

Trabajo Práctico N°2 Análisis de Fourier

Ejercicios.

Serie de Fourier

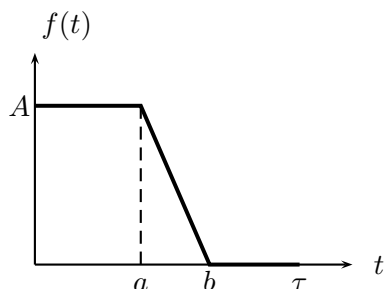
1. Desarrollar en serie trigonométrica de Fourier las siguientes funciones $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$:

$$f(t) = \begin{cases} |t|, & -\pi < t \leq \pi \\ f(t+2\pi), & \forall t \end{cases} \quad f(t) = \begin{cases} A \sin \omega_0 t, & 0 \leq t \leq \pi/\omega_0 \\ 0, & \pi/\omega_0 < t \leq 2\pi/\omega_0 \\ f(t+2\pi/\omega_0), & \forall t \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} t(\pi-t), & -\pi < t \leq \pi \\ f(t+2\pi), & \forall t \end{cases} \quad f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t \leq T \\ f(t+T), & \forall t \end{cases}$$

Graficar en cada caso la cuarta suma parcial.

2. La función $f(x) = \pi - x$ está definida en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$.
- (a) Construir una función $\varphi(x)$ que sea la extensión periódica par de $f(x)$ con período 2π . Graficarla para $-3\pi \leq x \leq 3\pi$.
 - (b) Obtener el desarrollo en serie de Fourier trigonométrico de la extensión par $\varphi(x)$.
 - (c) Computar las sumas $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
3. Dada la función $f(t)$ definida en el intervalo $(0, \tau]$ como se muestra en la figura,



- (a) Representarla mediante una serie trigonométrica con términos cosenoidales en $(0, \tau)$.
- (b) Representarla mediante una serie trigonométrica con términos senoidales en $(0, \tau)$.

4. La temperatura en una barra metálica de longitud L , con los extremos a 0° y lateralmente aislada, es una función $u(x, t)$, siendo x la coordenada de un punto de la barra y t el tiempo. La evolución de la temperatura obedece al proceso de difusión y está gobernada por la ecuación de Fourier:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= k^2 u_t(x, t), & t > 0, & \quad 0 < x < L \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 & t &\geq 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) & 0 &\leq x \leq L \end{aligned}$$

donde k^2 es una constante que depende del material y $u_0(x)$ es la distribución inicial de temperatura.

Para resolverla, proponer como solución $u(x, t) = \phi(x)e^{-\lambda t}$, siendo λ una constante a determinar y $\phi : [0, L] \rightarrow \mathcal{R}$ una función desconocida.

- (a) Demostrar que tanto la constante λ como la función ϕ , satisfacen el problema:

$$\begin{aligned}\phi''(x) + \lambda k^2 \phi(x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq L \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(L) &= 0\end{aligned}$$

- (b) Demostrar que existen infinitos valores de $\lambda > 0$ e infinitas soluciones ϕ :

$$\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{k^2 L^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- (c) Justificar que la solución de la ecuación de Fourier con las condiciones de borde dadas es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{\pi^2 n^2}{k^2 L^2} t} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

donde a_n son constantes a determinar.

- (d) Demostrar que los coeficientes a_n se computan a partir de la condición inicial $u_0(x)$ como:

$$a_n(x) = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

Calcular la temperatura para una distribución inicial de temperatura:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq \frac{3L}{8} \\ A, & \frac{3L}{8} < x \leq \frac{5L}{8} \\ 0, & \frac{5L}{8} < x \leq L \end{cases}$$

Graficar la temperatura $u(x, t_i)$ para distintos valores de t_i , $i = 0, 1, \dots$ en función de x .

5. Computar la forma compleja de la serie de Fourier de las siguientes funciones periódicas y representar el espectro de frecuencias de cada una de ellas.

$$(a) f(t) = \begin{cases} 0, & -T/2 < t < -d/2 \\ A, & |t| \leq d/2 \\ 0, & d/2 < t < T/2 \\ f(t+T), & \forall t \end{cases}$$

- (b) Onda triangular de amplitud 1, valor medio nulo y período 2π .

$$(c) f(t) = \sin^4 t$$

$$(d) f(t) = \begin{cases} e^t, & 0 < t \leq 2\pi \\ f(t+2\pi), & \forall t \end{cases}$$

$$(e) f(t) = \begin{cases} At, & 0 < t \leq T \\ f(t+T), & \forall t \end{cases}$$

6. Sea f periódica de período T y sea s_N la secuencia de funciones:

$$s_N(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{in\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

El *error cuadrático medio* de la sucesión $s_n(t)$ es:

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t) - s_N(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \|f - s_N\|^2$$

A partir de la *identidad de Parseval*:

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

demostrar que:

$$\sigma_N^2 = \sum_{|n| \geq N+1} |c_n|^2$$

Graficar σ_N^2 versus N para:

- (a) Onda cuadrada de amplitud $1/2$, período 2π y valor medio nulo.
- (b) Onda triangular de amplitud $1/2$, período 2π y valor medio nulo.

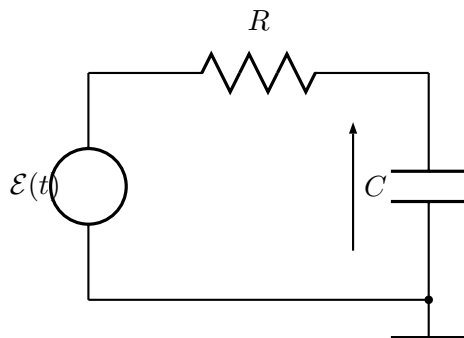
Comentar los rasgos característicos en cada grafico y explicar dicho comportamiento.

¿En qué caso la convergencia es más rápida?

Estimar experimentalmente la rapidez de convergencia en cada caso. Si $\sigma_N^2 \sim \mathcal{O}(N^{-k})$, estimar k .

Suponiendo que $|c_n| = \mathcal{O}(1/n^2)$, mostrar que $\sigma_N^2 = \mathcal{O}(N^{-3})$.

7. Sea $f \in \mathcal{C}^1$ periódica de período $2\pi/\omega_0$. Sea d_n los coeficientes de Fourier complejos de f' y c_n los coeficientes de Fourier complejos de f . Probar que $d_n = in\omega_0 c_n$.
8. El circuito de la figura está formado por un generador $\mathcal{E}(t)$ en serie con un capacitor de capacidad C y una resistencia R . La señal de entrada (input) es la tensión provista por el generador: tren de pulsos rectangulares de duración d y frecuencia ω_0 .



La salida (output) del sistema se considera la tensión en el capacitor $u_C(t)$, por lo tanto el sistema se modela mediante la ecuación diferencial (relación input-output):

$$RC \frac{du_C}{dt}(t) + u_C(t) = \mathcal{E}(t)$$

Llamando a la constante de tiempo del circuito $\tau = RC$ y suponiendo que el sistema se encuentra en régimen permanente,

- (a) Demostrar que los coeficientes de Fourier complejos de la salida son $U_n = e_n/(1 + jn\omega_0\tau)$, donde e_n son los coeficientes de Fourier complejos de la entrada $\mathcal{E}(t)$ y j es la unidad imaginaria.
- (b) Demostrar que la tensión de salida en el capacitor es:

$$u_C(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e_n}{1 + jn\omega_0\tau} e^{-jn\omega_0 t}$$

escribir esta expresión en forma trigonométrica. Graficar las primeras 5 sumas parciales.

- (c) Graficar en módulo y fase la secuencia $H(n\omega_0) = \frac{1}{1+jn\omega_0\tau}$.
- (d) Analizar la salida cuando se dan las siguientes situaciones: i) $\tau \gg 2\pi/\omega_0$, ii) $\tau \ll 2\pi/\omega_0$. Interpretar estos resultados.

Transformada e Integral de Fourier

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$, se define *Transformada de Fourier de $f(t)$* a:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

De esta forma, es posible *reconstruir* la función $f(t)$, a partir de $\hat{f}(\omega)$, al menos en aquellos puntos donde f es continua, según:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

la cual constituye la representación en *integral de Fourier de $f(t)$* .

Una propiedad importante de la transformada de Fourier, es la *identidad de Parseval*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

Si la función $f(t)$ representa el modelo matemático de una *señal* que varía con el tiempo t , entonces la transformada de Fourier de $f(t)$: $\mathcal{F}\{f(t)\} = \hat{f}(\omega) = |\hat{f}(\omega)| e^{i\phi(\omega)}$, constituye el *espectro de frecuencias de $f(t)$* . Se denomina *espectro de amplitud de $f(t)$* a la función $|\hat{f}(\omega)|$ y *espectro de fase de $f(t)$* a la función $\phi(\omega)$.

Ejercicios.

1. Demostrar las siguientes propiedades de la transformada de Fourier¹

Propiedad (*Linealidad*). Si $\hat{f}_1(\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\}$ y $\hat{f}_2(\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\}$, y a_1 y a_2 dos constantes arbitrarias, entonces:

$$\mathcal{F}\{a_1 f_1 + a_2 f_2\} = a_1 \hat{f}_1(\omega) + a_2 \hat{f}_2(\omega)$$

Propiedad (*Cambio de escala*). Si $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ y $a \neq 0$, entonces:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Propiedad. Si $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, entonces:

$$\mathcal{F}\{f(-t)\} = \hat{f}(-\omega)$$

Propiedad (*Desplazamiento en el tiempo*). Si $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{i\omega a} \hat{f}(\omega)$$

Propiedad (*Desplazamiento en la frecuencia*). Si $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ y $\omega_0 \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\mathcal{F}\{f(t) e^{i\omega_0 t}\} = \hat{f}(\omega - \omega_0)$$

¹En todo momento, se supone que f admite Transformada de Fourier.

Propiedad (Simetría). Si $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, entonces:

$$\mathcal{F}\{\hat{f}(t)\} = 2\pi f(-\omega)$$

Propiedad (Derivada). Si $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ y f derivable, entonces:

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega \hat{f}(\omega)$$

Este resultado puede generalizarse: $\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n \hat{f}(\omega)$.

Propiedad (Integral). Si $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$, entonces:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(u) du\right\} = \frac{1}{i\omega} \hat{f}(\omega)$$

Propiedad (Convolución). Si $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ y $\hat{g}(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$, entonces:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u) du\right\} = 2\pi \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

2. Calcular la transformada de Fourier de las siguientes funciones y graficar los espectros de amplitud y fase.

(a) $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$.

Computar:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

(b) $f(t) = e^{-a|t|}$

Computar:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

(c) $f(t) = \begin{cases} A(1-t/T), & 0 \leq t \leq T \\ A(1+t/T), & -T \leq t \leq 0 \\ 0, & |t| > T \end{cases}$

(d) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{\sigma})^2}$

(e) $f(t) = e^{-t}u(t)$, donde $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ es la *Función de Heaviside*.

(f) $f_{\epsilon}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \epsilon/2 \\ 0, & |t| > \epsilon/2 \end{cases}$

Analizar el caso cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

3. Usando la *Delta de Dirac*, computar:

(a) $\mathcal{F}\{\delta(t-a)\} = \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega a}$

(b) $\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\}$

Aplicación de la Transformada de Fourier a Filtros Lineales

Un *Filtro* o *Sistema* es una correspondencia $\mathcal{S} : \hat{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}$, siendo \mathcal{F} un conjunto de funciones. Si \mathcal{F} es el conjunto de funciones continuas (al menos en casi todas partes), el Filtro se dice que es *analógico*, en cambio si se trata de sucesiones o secuencias, se dice que el Filtro es *digital*.

Consideremos el filtro analógico \mathcal{S} . La función $f \in \mathcal{F}$ modela a la señal de entrada al sistema a la que designamos como *input*. Llamemos *output* a la función $g \in \mathcal{F}$ que modela la respuesta del sistema.

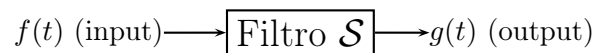


Figure 1: Filtro analógico

La forma explícita de correspondencia entre la entrada f y la salida g :

$$g(t) = \mathcal{S}\{f(t)\}$$

se denomina *relación entrada-salida*.

Por lo general, \mathcal{S} es un operador diferencial, resultando la relación entrada-salida una ecuación integro-diferencial.

Un *Filtro Lineal* es aquel cuyo operador \mathcal{S} es lineal, es decir que si f_1 y f_2 son dos funciones cuyas respuestas son g_1 y g_2 respectivamente, entonces:

$$\mathcal{S}\{f_1(t) + f_2(t)\} = \mathcal{S}\{f_1(t)\} + \mathcal{S}\{f_2(t)\} = g_1(t) + g_2(t)$$

Un *Filtro invariante en el tiempo* \mathcal{S} es aquel que cumple:

$$\mathcal{S}\{f(t - t_0)\} = g(t - t_0) \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

Un *Filtro causal* \mathcal{S} es aquel que si $f(t) = 0, \forall t \leq t_0$, entonces $g(t) = 0, \forall t \leq t_0$.

Ejemplos de filtros lineales e invariantes en el tiempo son:

1. Circuito RLC serie, excitado por una fuente de tensión alterna $\mathcal{E}(t)$. La ecuación diferencial que gobierna la sistema es:

$$L \frac{di}{dt}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi = \mathcal{E}(t)$$

2. Sistema formado por una masa m , sujeta a un resorte de constante elástica k y bajo la acción de un amortiguador con coeficiente viscoso β .

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

donde $x(t)$ es la coordenada de la masa y es la que se considera como salida del sistema.

Se denomina *Función de Green* $h(t)$ del filtro \mathcal{S} a la respuesta del filtro ante una excitación Delta de Dirac $\delta(t)$ considerando condiciones iniciales nulas, es decir:

$$h(t) = \mathcal{S}\{\delta(t)\}$$

Si la entrada al filtro es continua, entonces puede escribirse:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(t-x) dx$$

entonces la respuesta del filtro $g(t)$ es:

$$g(t) = \mathcal{S}\{f(t)\} = \mathcal{S}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(t-x) dx\right\}$$

Como el sistema es lineal, entonces:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathcal{S}\{\delta(t-x)\} dx$$

Si el filtro es invariante en el tiempo, por definición $h(t-x) = \mathcal{S}\{\delta(t-x)\}$ es la función de Green del filtro, desplazada en el tiempo x . Entonces, la respuesta del sistema es:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(t-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)h(x) dx$$

Este resultado nos dice: *la respuesta de un filtro lineal e invariante en el tiempo ante un input $f(t)$ es la convolución entre la excitación y la función de Green $h(t)$ del filtro.* La función de Green de un filtro contiene toda la información dinámica del filtro, es característico de él y depende solo de los parámetros del filtro.

Aplicando Transformada de Fourier a respuesta del filtro lineal e invariante en el tiempo:

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)h(x) dx\right\}$$

LLamando $\mathcal{F}\{g(t)\} = H(\omega)$, $\mathcal{F}\{f(t)\} = \hat{f}(\omega)$ y $\mathcal{F}\{g(t)\} = G(\omega)$, resulta la relación:

$$G(\omega) = 2\pi\hat{f}(\omega)H(\omega)$$

A la transformada de Fourier de la función de Green del filtro, se la denomina *función de transferencia* $H(\omega)$.

Ejercicios.

1. Demostrar que si a un filtro lineal e invariante en el tiempo se lo excita con una señal senoidal, el filtro responde con una respuesta senoidal de la misma frecuencia que la entrada.
2. Demostrar que el sistema circuito RLC-serie, considerando la salida como la intensidad de corriente $i(t)$, es un filtro lineal e invariante en el tiempo.
3. Mostrar que $h(t) = -\frac{1}{2k}e^{-|k|t}$ es la función de Green del filtro modelado por:

$$x'' - k^2x = f(t)$$

4. Sea el sistema constituido por un circuito RC-serie. Considerar como input la tensión $\mathcal{E}(t)$ y output la tensión en el capacitor $u_C(t)$. La relación entrada-salida es:

$$\tau \frac{du_C}{dt}(t) + u_C(t) = \mathcal{E}(t)$$

siendo $\tau = RC$, la constante de tiempo del sistema.

- (a) Demostrar que este sistema es un filtro lineal e invariante en el tiempo.
 - (b) Obtener la función de transferencia $H(\omega)$ del filtro. Graficar $|H(\omega)|$ y la fase $\phi(\omega)$ versus la frecuencia. Indicar cómo es el comportamiento del filtro con la frecuencia, ante una excitación $\mathcal{E}(t)$ cualquiera.
 - (c) Demostrar que si $E(\omega) = \mathcal{F}\{\mathcal{E}(t)\}$, entonces la Transformada de Fourier de la respuesta del filtro es: $U_C(\omega) = H(\omega)E(\omega)$.
5. Un *filtro ideal pasabajos* es aquel sistema lineal cuya función de transferencia es:

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-i\omega T}, & \text{para } |\omega| < \omega_0 \\ 0, & \text{para } |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

siendo ω_0 la *frecuencia de corte*.

- (a) Hallar la función de Green $h(t)$ del filtro ideal pasabajo.
- (b) Hallar la respuesta ante una entrada $f(t) = A \cos 3\omega_0 t + B \sin \frac{\omega_0 t}{2}$

Transformada Discreta de Fourier

Sea función $x(t)$, la cual es muestreada a intervalos regulares en los N puntos $t_j = jh$, con $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$, siendo h el *intervalo de muestreo*. Llamando x como $x_j = x(t_j)$, se define la *Transformada Discreta de Fourier* de los valores muestreados $\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ a:

$$X_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-\frac{2\pi i}{N}jk} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

La fórmula de inversión o *Antitransformada discreta de Fourier*:

$$x_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2\pi i}{N}jk} \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

Cada valor de la transformada discreta X_k , está definido en el valor de frecuencia:

$$\omega_k = \frac{k}{2\pi hN} \quad (3)$$

Definición 1. *Espectro de Potencia* Si X_k , con $k = 0, 1, \dots, N-1$ son los valores de la Transformada Discreta de Fourier de una secuencia $\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$, entonces se llama *Espectro de Potencia* a:

$$P_k = |X_k|^2 \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Ejercicios.

1. Considerar el vector x de muestras $x_j, j = 0, 1, \dots, N-1$ de la señal $x(t)$ para $N = 4$. Llamando $w = \exp(i\pi/2)$, demostrar que la Transformada Discreta de Fourier de la secuencia $\{x_j\}_{j=0}^3$ es el vector $X = (X_0, X_1, X_2, X_3)^T$ que satisface:

$$WX = x$$

con:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix}$$

Demostrar que la TDF resulta:

$$X = W^{-1}x = \frac{1}{4}\bar{W}x = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{w} & \bar{w}^2 & \bar{w}^3 \\ 1 & \bar{w}^2 & \bar{w}^4 & \bar{w}^6 \\ 1 & \bar{w}^3 & \bar{w}^6 & \bar{w}^9 \end{bmatrix} x$$

donde $\bar{w} = \exp(-i\pi/2)$

2. Para la función $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}$:

$$f(t) = 2e^{-it} + 1 + 3e^{-it}$$

sus coeficientes de Fourier complejos son: $c_{-1} = 2$, $c_0 = 1$ y $c_1 = 3$. Mediante la TDF computar los coeficientes para $N = 2$ y $N = 4$.

```
function y = mi_tdf(x)
% Funcion: y = mi_tdf(x)
% Proposito: Calcula la transformada discreta
% de Fourier de la secuencia x
%
% y(n) = (1/N)* Suma{ x(nu) exp(-i 2*pi*n*nu/N) }
%
if nargin~=1
    sprintf('%s','Debe ingresar un solo vector/matriz de datos')
    break
end
%
N = length(x);
y = zeros(1,N);
aux = 2i*pi/N;
for n=0:N-1
    s = 0.0;
    for nu=1:N
        s = s + x(nu)*exp(-1*aux*n*(nu-1));
    end
    y(n+1) = s/N;
end
return
```

Figure 2: Transformada Discreta de Fourier

La figura ?? muestra una función en MATLAB que implementa el cómputo de la Transformada Discreta de Fourier.

En muchas aplicaciones, se utiliza la base trigonométrica para “reconstruir” una función $f(t)$, a partir de sus muestras en un conjunto de puntos.

Definición 2. Se denomina *Polinomio Trigonométrico* de grado m a:

$$S_m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

Supongamos que se tiene una señal periódica $f(t)$ de período 2π y se conocen $N+1$ valores de f a intervalos regulares, en los puntos:

$$t_j = \frac{2\pi}{N+1} \quad j = 0, \dots, N$$

siendo dichos valores:

$$f_j = f(t_j) \quad j = 0, \dots, N$$

Entonces, f puede ser interpolada en los nodos t_j mediante el polinomio trigonométrico de grado $m < N/2$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (4)$$

donde los coeficientes se computan:

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f_j \cos jt_j \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (5)$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f_j \sin jt_j \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (6)$$

El cómputo de los coeficientes de la Transformada Discreta de Fourier ??, conduce a la realización de una cantidad de operaciones (sumas y multiplicaciones complejas) $\mathcal{O}(N^2)$. En 1966, Cooley y Turkey desarrollaron un algoritmo eficiente, en cuanto al número de operaciones, para el cómputo de la Transformada Discreta de Fourier. Dicho método de cómputo de llama *Transformada Rápida de Fourier* (Fast Fourier Transform) FFT y requiere $\mathcal{O}(n \log_2 n)$, siendo necesario un número de datos $N = 2^p$, con $p \in \mathbb{N}$. En la figura ?? se muestra un algoritmo recursivo para el cómputo de la FFT.

```
function X = fft_rec(NN,x)
% funcion fft_rec
% Proposito: Computa la TDF mediante FFT
% Entradas: NN = Tamaño del vector de datos (debe ser 2^p)
%           x = Vector de NN datos
% Salida:   X = Vector con la TDF de x
%
N = length(x);
w = exp(-2*pi*sqrt(-1)/N);
if N == 2
    X = x(1) + w.^[-NN/2:NN-1-NN/2]*x(2);
else
    a1 = x(1:2:N);
    b1 = x(2:2:N);
    a2 = fft_rec(a1,NN);
    b2 = fft_rec(b1,NN);
    for k = -NN/2:NN-1-NN/2
        X(k+1+NN/2) = a2(k+1+NN/2)+b2(k+1+NN/2)*w^k;
    end
end
```

Figure 3: Algoritmo FFT recursivo

Ejercicios.

1. (Lápiz y papel) Sea el vector $f = [f_0, f_1, \dots, f_{N-1}]$ y $\hat{f} = [\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{N-1}]$ su transformada discreta de Fourier. Demostrar, aplicando la definición de transformada discreta de Fourier (TDF) y de la TDF inversa que el antitransformado discreto de $[\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{N-1}]$, reconstruye completamente al vector de datos f .
2. (Computadora) Suponga que se desea estudiar el contenido en frecuencias usando la TDF, de la siguiente señal:

$$x(t) = 0.0472 \cos(2\pi(200)t + 1.5077) + 0.1362 \cos(2\pi(400)t + 1.8769) + \\ + 0.4884 \cos(2\pi(500)t - 0.1852) + 0.2942 \cos(2\pi(1600)t - 1.4488) + \\ + 0.1223 \cos(2\pi(1700)t)$$

- (a) Hacer un programa que compute la Transformada Discreta de Fourier.
- (b) Computar la TDF de $x(t)$ y calcular el espectro de potencia. Determinar la frecuencia fundamental.
- (c) Represente $|X(\omega)|$ y la fase de $\phi(\omega)$ en función de ω .
3. (Lpiz y papel) Obtenga el polinomio trigonométrico de grado 3 para la función $f(t) = 0$, entre $-\pi < t \leq 0$ y $f(t) = 1$, en $0 < t \leq \pi$. Graficar.
4. (Computadora) Para analizar el comportamiento de la TDF con el número de muestras N , compute polinomio trigonométrico de grado 3 de $f(t) = t^2$ en $0 \leq t < 2\pi$, y $f(t) = f(t + 2\pi)$, para: $N = 8, 16, 32, 64, 128$. Grafique la función $f(t)$ y los distintos polinomios.
5. (Computadora) Calcular la TDF de la función f , usando el cómputo directo y usando el algoritmo FFT. Graficar el espectro de amplitud y de fase. Reconstruir la función $f(t)$, mediante el cómputo de la transformada inversa. Ensayar para distintos números de muestras.

(a)

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \\ f(-t), \forall t \end{cases}$$

(b)

$$f(t) = u(t) - u(t - 1)$$

siendo $u(t)$ la función de Heaviside.

(c)

$$f(t) = \sin(2\pi f_0 t) + 4 \sin(5\pi f_0 t)$$

con $f_0 = 60\text{Hz}$.

(d)

$$f(t) = e^{-|t|}$$

Ejercicios con computadora.

Computadora 1. El objetivo de este ejercicio es simular la salida de un filtro análogo. Considerar un circuito RC-serie. La ecuación diferencial que lo gobierna es:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = \mathcal{E}(t)$$

si la salida $u_C(t)$ es la tensión en el capacitor, o:

$$\frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t u_R(\tau) d\tau + u_R = \mathcal{E}(t)$$

si la salida $u_R(t)$ es la tensión en la resistencia. Considerar para este sistema: $\tau = RC = 10^{-3}$ s.

1. Implementar el cómputo de la Transformada discreta de Fourier mediante el algoritmo FFT, en C/C++ o FORTRAN. (En GNU Octave ya está implementado mediante la función `fft.m`)

- Obtener la función de transferencia del filtro, considerando como salidas: a) $u_C(t)$, b) $u_R(t)$.
- Obtener la tensión en el capacitor, cuando $\mathcal{E}(t) = 5(u(t + 0.5) - u(t - 0.5))$, muestreando para $N = 128$ datos.
- Si la señal de entrada es:

$$\mathcal{E}(t) = 120 \cos \frac{2\pi 0.1t}{\tau} + 70 \cos \frac{2\pi 10t}{\tau}$$

obtener la tensión $u_C(t)$ y $u_R(t)$. Comparar ambas salidas con la entrada. Tomar un número de muestras tal que la energía de la entrada no varíe en más del 5%.

Computadora 2. Este ejercicio tiene como objetivo analizar espectralmente una imagen y utilizar la transformada discreta de Fourier para realizar *filtrados espaciales*.

La Transformada Discreta de Fourier de una secuencia bidimensional $x_{n,m}$, de $N \times N$ (imagen), es:

$$X_{l,k} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x_{n,m} e^{-\frac{2\pi i}{N}(nl+mk)}$$

siendo la Transformada Inversa Discreta:

$$x_{n,m} = \frac{1}{N^2} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_{l,k} e^{\frac{2\pi i}{N}(nl+mk)}$$

- Implementar un programa que compute la TDF 2D
- El archivo **saturno** contiene una matriz de 400×400 pixeles² y corresponde a niveles de intensidad luminosa comprendidos entre 0 y 255 (todos enteros). Para visualizar esta imagen en escala de grises, es necesario establecer un mapa de color de 255 niveles. Por ejemplo en MATLAB, se puede leer y visualizar así la imagen del planeta Saturno, capturada por la misión *Voyager*:

```
>> x=load('saturno');
>> colormap(gray(255));
>> image(x');
```

Computar la Transformada discreta de Fourier de la imagen original. Armar las imágenes de 400×400 pixel² correspondientes a la amplitud y la fase (Tener en cuenta de mapear los valores de amplitud y fase al intervalo entero $[0, 255]$).

Computar la Transformada inversa para reconstruir la imagen original de 400×400 pixel².

- Considerar el efecto que produce los siguientes filtros $H_{k,l}$ de 400×400 pixel² en el dominio de las frecuencias (espaciales):

- $H_{k,l} = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq 400, 190 \leq l \leq 210 \\ 0, & 0 \leq l \leq 400, 190 \leq k \leq 210 \\ 1, & \text{el resto de las posiciones} \end{cases}$
- El filtro gaussiano $H_{k,l} = \exp(-0.1(k^2 + l^2))$
- El *damero* $H_{k,l} = \begin{cases} 0, & \text{si } l + k \text{ es par} \\ 1, & \text{si } l + k \text{ es par} \end{cases}$

Reconstruir las imágenes resultantes de estos filtrados.