Trabajo Práctico N°1
Autovalores

Repaso de Algebra Lineal

Indicaremos $(\mathcal{V}, \mathcal{K}, \oplus, \odot)$ un *espacio lineal* (también llamado *espacio vectorial*).
El lo que sigue, y salvo que se diga lo contrario, usaremos: $\mathcal{V} = \mathcal{R}^n$ (con $n \in \mathcal{N}$), $\mathcal{K} = \mathcal{R}$ (o $\mathcal{C}$), $\oplus = +$ la suma ordinaria en $\mathcal{R}^n$ y $\odot = \cdot$ el producto ordinario en $\mathcal{R}$ (o $\mathcal{C}$).

Ejercicio de repaso 1. Dados los siguientes espacios, demostrar si son lineales:

1. Sea $\mathcal{V} = \mathcal{R}^{n\times n}$ el conjunto de las matrices cuadradas de $n \times n$. Considerar $\mathcal{V} = \mathcal{R}$, $+$ la suma ordinaria de matrices y $\cdot$ la multiplicación ordinaria.
2. $(\mathcal{F}_T, \mathcal{R}, +, \cdot)$: donde llamamos $\mathcal{F}_T$ al conjunto de las funciones periódicas de perído T, continuas por tramos en el intervalo $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$.

Definición (Transformación Lineal). Una transformación $\mathcal{T}$ asigna a cada vector de entrada x el vector de salida $\mathcal{T}(x)$. La transformación es *lineal* si para todo vector x, y se cumple:

1. $\mathcal{T}(x + y) = \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y)$
2. $\mathcal{T}(\alpha x) = \alpha\mathcal{T}(x)$, para todo escalar α.

Ejercicio de repaso 2. Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales:

1. $\mathcal{T} : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ tal que $\mathcal{T}(x^1, x^2, x^3) = (2x^1 - 7x^3, 0, 3x^2 + 2x^3)^T$
2. $\mathcal{T} : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ tal que $\mathcal{T}(x) = \|x\|_2$
3. $\mathcal{T} : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^3$ tal que $\mathcal{T}(x^1, x^2) = (x^1 - x^2, 2x^2, 1 + x^1)^T$
4. $\mathcal{T} : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ tal que $\mathcal{T} = a^T x$ donde a es un vector (fijo) de $\mathcal{R}^n$.
5. $\mathcal{T} : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ tal que $\mathcal{T}(x) = Ax$, si $A \in \mathrm{R}^{m\times n}$.
6. $\mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{T}(z) = \overline{z}$, con $\mathcal{K} = \mathcal{R}$ (o $\mathcal{K} = \mathcal{C}$).

Ejercicio de repaso 3. Como dijo Gilbert Strang (*Linear Algebra, Geodesy and GPS*, Strang, G. and Borre, K., Wellesley-Cambridge Press, 1997): "It is more interesting to *see* a transformation than to define it". Por eso trabajaremos en el *plano*, es decir que si $x = (x^1, x^2)^T$, de modo que las siguientes transformaciones (¿son lineales?) $\mathcal{T} : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$, interpretarlas geometricamente y hallar la matriz T tal que $\mathcal{T}(x) = Tx$

1. $\mathcal{T}(x) = (x^1, 0)^T$
2. $\mathcal{T}(x) = (0, x^2, 0)^T$
3. $\mathcal{T}(x) = 2x$
4. $\mathcal{T}(x) = (\frac{x^1+x^2}{2}, \frac{x^1+x^2}{2})^T$
5. $\mathcal{T}(x) = (x^1, -x^2)^T$

6. $\mathcal{T}(x) = (x^1 \cos t - x^2 \sin t, x^1 \sin t + x^2 \cos t)^T$

Ejercicio de repaso 4. Este es un ejercicio para jugar (siguiendo la filosofía de Gilbert Strang).
El siguiente espacio de vectores de $\mathcal{R}^2$:

$$H = \begin{bmatrix} -6 & -6 & -7 & 0 & 7 & 6 & 6 & -3 & -3 & 0 & 0 & 6 \\ -7 & 2 & 1 & 8 & 1 & 2 & -7 & -7 & -2 & -2 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$

definen las coordenadas de los vértices de una *casita*.
Si desean visulaizarlos con MATLAB u Octave:

```
>> h = [-6 -6 -7 0 7 6 6 -3 -3 0 0 6;-7 2 1 8 1 2 -7 -7 -2 -2 -7 -7];
>> plot(h(1,:),h(2,:),'o-')
```

1. Visualizar $\mathcal{T}(H)$ para todas las transformaciones del ejercicio anterior.
2. Visualizar $\mathcal{T}(x) = Ax, \forall x \in H$ si A es una matriz
   (a) Diagonal.
   (b) De rango 1.
   (c) Triangular inferior.
3. Visualizar $\mathcal{T}(x) = Ax, \forall x \in H$ si A es:
   a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} .7 & .7 \\ .3 & .3 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$
4. ¿Cuáles son las condiciones sobre $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ para asegurar que $\mathcal{T}(H)$:
   (a) Quede derecha como está.
   (b) Expanda la casa por 3 en todas las direcciones.
   (c) Rote la casa sin cambiar la forma.
5. Visualizar $\mathcal{T}(x) = -x + (1,0)^T, \forall x \in H$

Ejercicio de repaso 5. Este ejercicio debe resolverse analiticamente:
Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Computar todos los autovalores y autovectores de A, $A + I$, A^{-1}, A^2.
   (a) ¿Qué conclusión extrae de estos resultados?
   (b) Demuestre las propiedades basadas en las sospechas del item 1a.
2. Para la matriz A, obtener la matriz M que *transforma* a A en una matriz diagonal. ¿Cuál es esa matriz diagonal? Verificar ese resultado.
3. Usando el espacio H que define a la *casita*, visulizar el resultado AH y DH, siendo D la matriz diagonalizada de A. ¿Qué conclusión extrae? Explicar.

Ahora empezamos con los ejercicios de MNA:

Ejercicio 1. Este ejercicio debe resolverse analiticamente:
Considerar el sistma mecánico formado por tres masas de valores $m_i, \quad i = 1,2,3$ sujetas a fuerzas elásticas como se indica en la figura 1. Los resortes tienen constantes elásticas $k_i, \quad i = 1,2,3$. La posición del sistema queda determinada por las coordenadas respecto de las posiciones de equilibrio $x_i, i = 1,2,3$.

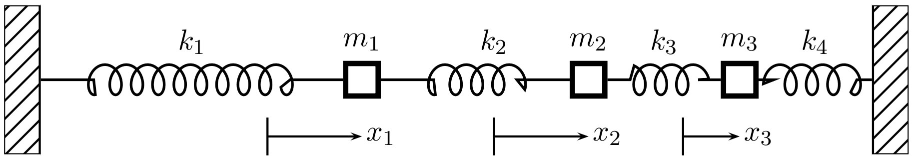


Figure 1: Sistema de tres masas conectadas mediante resortes. Ejercicio 1

1. Asumiendo que las tres masas son iguales $m_1 = m_2 = m_3 = m$ y que los cuatro resortes obedecen a la ley de Hook, demostrar que las ecuaciones de movimiento del sistema son:
$$m\ddot{x} = -Kx$$
donde $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ y la matriz K es:
$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}$$
¿Qué caracteristicas posee la matriz K?

2. Asumiendo que $k_1 = k_4 = 10\mathrm{Nm}^{-1}$, $k_2 = k_3 = 40\mathrm{Nm}^{-1}$ y que $m = 1\mathrm{kg}$, obtener las frecuencias de oscilación del sistema.
Respuesta: $\omega_1^2 = 6.477\mathrm{s}^{-2}$, $\omega_3^2 = 50.00\mathrm{s}^{-2}$ y $\omega_3^2 = 125.523\mathrm{s}^{-2}$.

3. Si las conciciones iniciales son tales que $x_1(0) = 0.1\mathrm{m}$, $x_2(0) = 0.2\mathrm{m}$, $x_3(0) = 0.75\mathrm{m}$, partiendo del reposo, obtener el vector $x(t), \forall t$.

   Respuesta:
$$x(t) = \begin{bmatrix} 0.335\cos\omega_1 t - 0.325\cos\omega_2 t + 0.09\cos\omega_3 t \\ 0.365\cos\omega_1 t - 0.165\cos\omega_3 t \\ 0.335\cos\omega_1 t + 0.325\cos\omega_2 t + 0.09\cos\omega_3 t \end{bmatrix}$$

4. Si $e_i \in \mathbb{R}^3$ es el i-ésimo autovector correspondiente al autovalor ω_i^2, se definen *coordenadas normales* del sistema X_i de modo:
$$x(t) = \sum_{i=1}^{3} X_i(t) e_i$$
   (a) Demostrar que $\ddot{X}_i(t) = -\omega_i^2 X_i(t), i = 1,2,3$. Explicar que significa esta relación, que significalas coordenadas normales y que significan los autovectores $e_i, i = 1,2,3$

(b) Demostrar que los valores iniciales de las coordenadas normales cumplen $X_i(0) = e_i^T x(0), i = 1, 2, 3$

(c) Computar $X(t), \forall t$

Respuesta:

$$X(t) = \begin{bmatrix} 0.5983 \cos \omega_1 t \\ -0.4596 \cos \omega_2 t \\ 0.2080 \cos \omega_3 t \end{bmatrix}$$

5. Analizar los siguientes casos:

Caso 1 $X_1(0) = X_3(0) = 0$ y $X_2(0) \neq 0$.
Caso 2 $X_1(0) = X_2(0) = 0$ y $X_3(0) \neq 0$.
Caso 3 $X_2(0) = X_3(0) = 0$ y $X_1(0) \neq 0$.

¿Cómo se mueven cada masa en cada caso y con qué amplitud?

Ejercicio 2. Determinar cotas para los autovalores de las matrices:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4.75 & 2.25 & -0.25 \\ 2.25 & 4.75 & 1.25 \\ -0.25 & 1.25 & 4.74 \end{bmatrix}$

Ejercicio 3. Un sistema dinámico lineal de orden n puede representarse mediante el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

donde $x : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^n$ se denomina *vector de estado*, $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $B \in \mathcal{R}^{n \times r}$ y $u : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^r$ se denomina *vector de entradas*.
Para que el sistema dinámico sea estable, debe cumplirse que todos los autovalores de A tengan parte real no positiva.

1. Probar la condición de estabilidad enunciada.
   Ayuda: Para probarla, tener en cuenta que la estabilidad de un sistema, es inherente al propio sistema y no a la entrada. Por eso, puede considerarse $u(t) = 0 \forall t$ en el análisis.

2. Decir si el sistema es estable en los casos:

   a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2.5 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

Ejercicio 4. Para las matrices:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ Usar $x^0 = (100)^T$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ Usar $x^0 = (100)^T$

c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ Usar $x^0 = (1111)^T$ d) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -0.5 & 1.5 \\ -2 & 5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & 5 & -2 \\ 1.5 & -0.5 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ Usar $x^0 = (1111)^T$

1. Realizar las primeras 3 iteraciones obtenidas del método de la potencia para las siguientes matrices con el correspondiente vector inicial.
   Recomputar para la matriz de (d) usando aritmética de 4 dígitos.
2. Hallar una aproximación al menor (en módulo) autovalor con un error menor que 10^{-5}.

Ejercicio 5. Sea el problema de hallar las constantes λ y las funciones y que satisfagan:

$$y''(x) + 2y'(x) + 4y(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1$$

con la condición $y(0) = y(1) = 0$.

1. Discretizar el intervalo $[0, 1]$ en $N = 5$ subintervalos iguales y discretizar la ecuación diferencial (problema continuo) mediante un esquema centrado de orden dos. De esta forma, el problema se convierte en discreto de la forma
$$Ay = \Lambda y$$
2. Estimar una aproximación a la función $y(x)$ solución, que corresponda al mínimo valor de $|\lambda|$.

Ejercicio 6.

Dado el problema de valor en la frontera:

$$y''(x) + \kappa^2 y(x) = 0; \quad \text{con} \quad 0 < x < 1 \tag{1}$$
$$y(0) = 0 \tag{2}$$
$$y(1) = 0 \tag{3}$$
$$\tag{4}$$

Discretizando el intervalo $(0, 1)$ con una grilla de 10 nodos,

1. Hallar el mínimo valor absoluto de κ con una precisión de 10^{-7}.
2. Hallar el correspondiente autovector. Comparar con la solución exacta $y(x) = \sin \pi x, \quad 0 < x < 1$.

Ejercicio 7. Convertir las siguientes matrices en matrices tridiagonales y computar todos sus autovalores con una precisión de 10^{-5}.

a) $\begin{bmatrix} 12 & 10 & 4 \\ 10 & 8 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -0.5 & 1.5 \\ -2 & 5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & 5 & -2 \\ 1.5 & -0.5 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

Ejercicio 8. Sea $u \in \mathbb{R}^n$ que cumple la condición $u^T u = 1$. Si $P = I - 2u^T u$, demostrar que $P^2 = I$

Computadora 1. *Diseño de reactores nucleares*
Un reactor nuclear de fisión es un dispositivo en el que se producen reacciones nucleares donde neutrones *rompen* núcleos de Z (número atómico) grande. En dicha ruptura, se producen: 1) *fragmentos de fisión*, esto es núcleos con Z intermedio. 2) *neutrones* que se utilizan para continuar el proceso de fusión y 3) *energía* del orden de 200MeV. Si se dan las condiciones necesarias, este proceso es autosostenido (*reacción en cadena*).

La energía liberada permite calentar agua que circula por un determinado circuito. Así se genera vapor. Este vapor es utilizado para producir el movimiento de turbinas en generadores de electricidad.

La difusión de neutrones en el núcleo de un reactor debe ser controlada, para poder mantener la reacción en cadena. Para tal fin se utilizan medios *moderadores* como el agua H_2O o el agua pesada D_2O.

En reactores autoregenerables se utiliza como combustible nuclear sales de U_{92}^{238}.

Para modelar el proceso estacionario de difusión de neutrones en un reactor, consideremos un modelo de celda de combustible y medio moderador unidimensional. La sal UO_2 se encuentra en el núcleo de la celda emitiendo neutrones. Tales neutrones pasan al medio moderador que controla la difusión. Consideremos a dicho medio agua liviana.

La ecuación de difusión nuclear para los neutrones, en estado estacionario es:

$$-\frac{d}{dx}\left[D\frac{d\phi}{dx}(x)\right] + \sigma\phi(x) = \lambda\Sigma_f\phi(x) \tag{5}$$

donde ϕ es la concentración de neutrones, D es el coeficiente de difusión neutrónica del medio, σ es el coeficiente de absorcion de neutrones y Σ_f es la sección eficaz de fusión del medio. La constante λ depende de la geometría del reactor y por lo tanto es un parámetro de diseño.
Para el modelo 1D celda+moderador -cuyo diagrama se muestra en la figura 2- las dimensiones lineales son 20cm para la celda de combustible y 10cm para la barra de moderador. Además, en la figura, se dán los valores de σ, D y Σ_f.

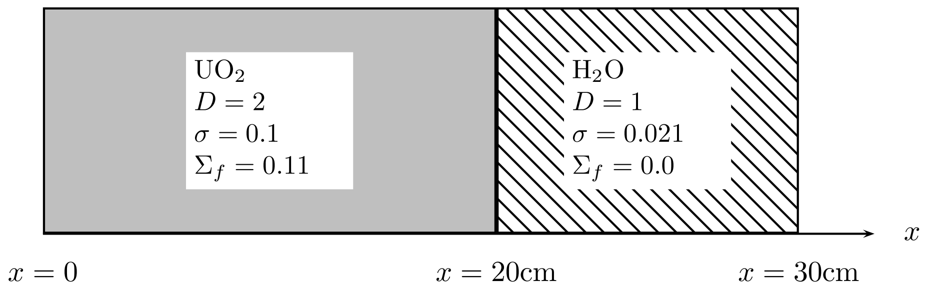


Figure 2: Modelo de reactor nuclear 1D.

Las condiciones de borde son $\phi'(0) = 0$ y $\phi(30) = 0$.

1. Mediante un esquema centrado de orden dos, discretizar el problema continuo.

2. Computar la concentración de neutrones en estado estacionario para el autovalor dominante.

Computadora 2. *Mecánica Quántica: Efecto Tunel*
Para sistemas mecánicos nucleares, atómicos y moleculares, la mecánica newtoniana no predice los resultados experimentales. Durante las tres primeras décadas del siglo XX, un grupo de jóvenes físicos desarrollaron una *nueva mecánica* para dar luz a los fenómenos atómicos. Nombres como De Broglie, Haisenberg, Dirac, Schröedinger y Bohr, entre otros, fueron los que construyeron una nueva teoría mecánica, de la cual, la mecanica newtoniana es un caso particular. Esta nueva mecánica se conoce como *Mecánica Quántica.*
La mecánica quántica se formula mediante una serie de postulados, cuyo único soporte es el experimental, entre ellos figura la forma de evolucionar el estado de los sistemas mecánicos.

El estado de un sitema mecánico (una partícula o un sistema de partículas) está caracterizado por un vector $\psi \in \mathcal{H}$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert.

Para una parícula moviendose en el espacio, bajo la acción de un potencial $V(\mathbf{r})$ (energía potencial) independiente del tiempo, el estado queda representado por la función de estado $\psi(\mathbf{r})$, siendo $\mathbf{r}$ el vector posición.

Toda la información dinámica de la particula está contenida en $\psi(\mathbf{r})$. La ecuación fundamental para el movimiento de una partícula en un potencial independiente del tiempo es la *Ecuación de Schröedinger independiente del tiempo*:

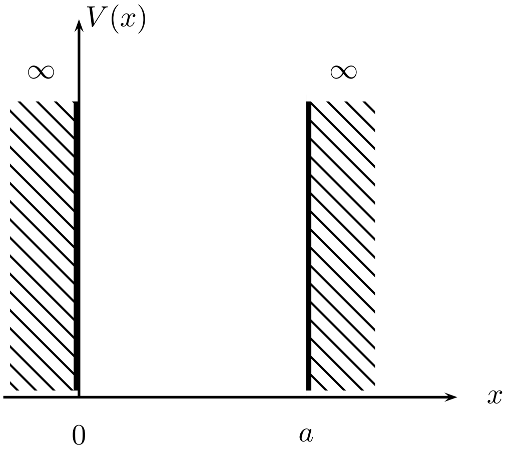
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

donde $\hbar = 1,0546 \times 10^{-34}$Js es una constante universal, m la masa de la partícula, $V(\mathbf{r})$ la energía potencial y E la energía de la partícula.

La función de estado tiene como significado el siguiente: $|\psi(\mathbf{r})|^2 = \psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$ es la función densidad de probabilidad de la posición $\mathbf{r}$ de la partícula. En otras palabras, $\psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$ es la probabilidad de que la partícula se encuentre en una esfera del espacio con centro $\mathbf{r}$ y radio $\delta > 0$. Además, $\psi(\mathbf{r}) \in \mathcal{C}^1[\mathcal{R}]$.

Partícula en un pozo infinito 1D:
Supongamos que una partícula está confinada en una región del espacio. Esto quiere decir que solo puede moverse en una zona acotada y no puede estar fuera de ella. Una energía potencial que puede producir tal movimiento es aquella que tome valor nulo (o constante) en una región de ancho a y tome valores infinitos fuera de la región. A este tipo de potencial se lo llama *Pozo Infinito de Potencial.* En un sistema de coordenadas unidimensional, la energía potencial toma valores:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 < x < a \\ \infty & \text{si} \quad x > a \wedge x < 0 \end{cases}$$



Entonces, la ecuación de Schröedinger independiente del tiempo resulta:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = E\psi(x), \quad 0 < x < a$$

con $\psi(x) = 0$ si $x \notin (0, a)$.

1. Resolver la ecuación de Schröedinger independiente del tiempo para una partícula en el pozo infinito. Para eso demostrar que:

   (a) Hay infinitos estados $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x$ para $0 < x < a$ y $\psi_n(x) = 0$ para $x > a$ y $x < 0$; con $n = 1, 2, \ldots$.
   Ayuda: Tener en cuenta que $|\psi_n(x)|^2$ es la probabilidad de encontrar a la partícula en las posiciones comprendidas en x y $x + dx$.

   (b) Las energías posibles que puede tomar la partícula son $E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2$, con $n = 1, 2, \ldots$. Interpretar este resultado.
   Ayuda: Para poder interpretar este resultado, considerar la siguiente pregunta: ¿Los valores de E pueden ser cualesquiera (para todo número real)? o lo que es lo mismo: ¿La partícula dentro del pozo, puede tener cualquier valor de energía que fije sus condiciones iniciales?

   (c) Graficar los primeros tres estados $\psi_n(x), \quad n = 1, 2, 3$ y graficar $|\psi_n(x)|^2, \quad n = 1, 2, 3$. Sacar alguna conclusión de estos últimos gráficos. Al estado $\psi_1(x)$ se lo denomina *estado fundamental* y le corresponde el valor de enegía $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$.

2. Fijando $N+1$ nodos en el intervalo $[0, a]$ de coordenadas $x_i = ih$ donde $h = a/N+1$, discretizar mediante un esquema centrado de orden dos la ecuación de Schröedinger independiente del tiempo y convertir el problema continuo a un problema discreto de la forma:

   $$H\psi = E\psi$$

   donde $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{N-1})^T$ es un vector cuyos elementos son aproximaciones a $\psi(x_i)$. ¿Cuál y cómo es la matriz H? ¿De qué depende la estructura y las entradas de H?

3. Si $m = 1.6 \times 10^{-19}$kg, $a = 10$nm, determinar en número de nodos en que hay que particionar el intervalo $[0, a]$, para obtener la energía del estado fundamental con un error relativo menor al 1% ¿Cúal es esa aproximación a E_1? Graficar $|\psi_1(x)|^2$ versus x para la aproximación obtenida. Graficar la aproximación de E_1 versus N. ¿Qué conclusión extrae?

4. Repetir el paso anterior, pero estableciendo como criterio de corte, para fijar N que:

   $$\left| \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_1^{aprox}(x)|^2 \, dx - 1 \right| < 10^{-6}$$

Computadora 3. *Ondas estacionarias en una cuerda*

Una cuerda es un medio elástico deformable, el cual permite propagar en ella una señal. Si $\epsilon(x,t)$ es el apartamiento de la cuerda en el punto ubicado en la posición x, en el instante t, entonces, si no hay pérdidas por fricción, el apartamiento es solución de la *Ecuación de D'alambert*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\epsilon(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\epsilon(x,t)$$

donde c es una constante que depende del medio elástico deformable y es igual a la velocidad de propagación de la onda en dicho medio. Para el caso de una onda transversal en una cuerda, la velocidad de propagación es $c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, donde F es la fuerza con que se tensiona la cuerda y μ es la densidad lineal de la cuerda.

Si se desea obtener las ondas estacionarias en una cuerda, cuyos estremos están fijos, la perturbación ondulatoria satisface la condición de borde

$$\epsilon(0,t) = \epsilon(L,t) = 0$$

donde se ha supuesto que un extremo de la cuerda se encuentra en el punto de coordenadas $x = 0$ y el otro extremo en $x = L$.

Las ondas estacionarias se establecen en forma tal que para un punto dado de la cuerda (para x fijo), este oscila con un movimiento oscilatorio armónico de frecuuencia ω. Por lo tanto resulta lógico buscar soluciones de la forma:

$$\epsilon(x,t) = u(x)e^{i\omega t}$$

donde, $u(x)$ es una función a determinar, al igual que la constante ω.

1. Reemplazar $\epsilon(x,t) = u(x)e^{i\omega t}$ y junto a las condiciones $\epsilon(0,t) = \epsilon(L,t) = 0$, demostrar que $u(x)$ y ω satisfacen el problema:

$$u''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 u(x) = 0, \qquad 0 < x < L \tag{6}$$

$$u(0) = 0 \tag{7}$$

$$u(L) = 0 \tag{8}$$

2. Discretizar el problema para N nodos. Hacer un programa de compuradora que compute el mínimo autovalor y su correspondiente autovector.

3. Usar el programa del item anterior para $L = 0.5$m y la densidad lineal de la cuerda es $\mu = 0.02$kg/m. Con dicho programa hallar la tensión F que hay que darle a la cuerda para afinarla a la frecuencia $\nu_{DO} = \frac{\omega_{DO}}{2\pi}$.
Ayuda: Hallar la frecuencia fundamental (de autovalor más chico) para distentos valores de F. Graficar

4. Para el valor de F obtenido en el punto anterior, obtener el siguiente autovalor y por lo tanto la siguiente autofrecuencia. Graficar el autovector.