Trabajo Práctico N°3
Ecuaciones en Derivadas Parciales
Ecuaciones parabólicas y elípticas

Ecuaciones Parabólicas

1. Dada la ecuación parabólica:
$$u_t = \alpha u_{xx}$$
donde $u(x,t)$ satisface las condiciones de borde: $u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t$.

(a) Discretizar el intervalo $(0,1)$ en $N = 11$ puntos $x_j, j = 0, \dots, N-1$ (incluyendo los extremos).
Mediante un esquema explicito centrado, mostrar como se propaga una perturbación unitaria ubicada en $x = \frac{1}{2}$ $(j = 5)$ para los casos $r = \alpha\Delta t/\Delta x^2 = 0.25, 0.5, 0.75$. Mostrar los resultados en forma de tabla de doble entrada:

j \\ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
1	0										0
2	0										0
3	0										0
4	0										0

¿Cuán grande es el efecto para $j = n = 4$?

(b) Para $r = 0.2$ y $\alpha = 10^{-2}$, aproximar la solución si:

i. $u(x,0) = 5\sin(3\pi x)$, $0 < x < 1$. Comparar con la solución exacta dada por el método de separación de variables en $t = 0.5$: $u(x_j, \frac{1}{2}), \quad j = 0, \dots, 10$.
Mostrar los resultados en la forma:

j	x_j	u_j^4	$u(x_j, 0.5)$	$\lvert u_j^4 - u(x_j, 0.5)\rvert$
$\vdots$				

ii. La condición inicial es:
$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 0.3 \\ 1, & 0.3 \le x \le 0.6 \\ 0, & 0.6 < x < 1 \end{cases}$$

2. Aproximar la solución al problema:
$$\begin{aligned} u_t &= \alpha u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad 0 < t \\ u_x(0,t) &= 0, & 0 < t \\ u_x(1,t) &= 0, & 0 < t \\ u(x,0) &= x(x-1), & 0 < x < 1 \end{aligned}$$
usando $\alpha = \frac{1}{16}$, $\Delta x = 0.25$ y $r = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} = 0.05$, usando el esquema explícito centrado. Tabular los resultados para los primeros 5 pasos de tiempo.

3. Dado el problema:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad 0 < t \\ u_x(0,t) &= 0, & 0 < t \\ u_x(1,t) + 5u(1,t) &= 0, & 0 < t \\ u(x,0) &= f(x), & 0 < x < 1 \end{aligned}$$

(a) Obtener la solución, mediante el método de separación de variables para

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Aproximar la solución a los primeros cuatro términos del desarrollo en serie. Graficar.

(b) Aproximar la solución para $\Delta x = 0.2$ y $\Delta t = 0.01$ usando un esquema explicito centrado.
Sugerencia: Para la condición de borde mixta (condición de Robin), discretizarla mediante un esquema centrado de orden 2:

$$\frac{u^n_{N+1} - u^n_{N-1}}{2\Delta x} + 5u^n_N = 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

introduciendo así un *nodo fantasma* en la fila j (ver figura 1), computar en cada paso de tiempo u^n_{N+1} del esquema explicito.

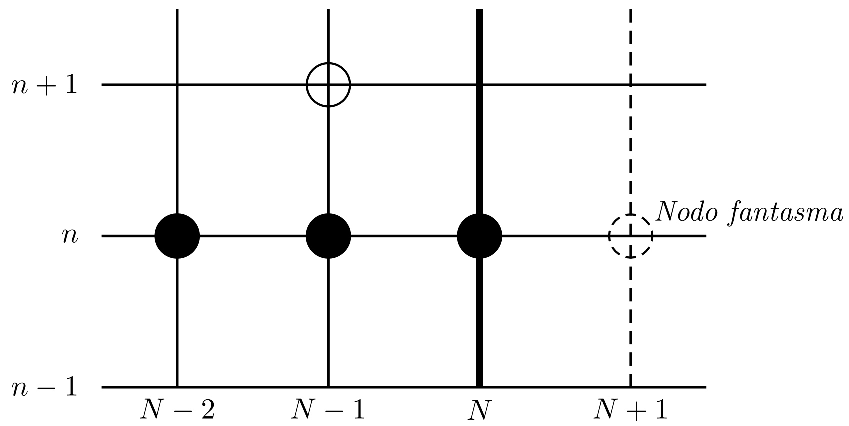

Figure 1:

4. Los extremos de una barra unidimensional, lateralmente aislada de longitud $L = 0.5$m están a temperatura constante de 0°C y 20°C. Un sistema de coordenadas donde el origen en el extremo a temperatura 0°C y el eje x coincide con la barra. La temperatura $T(x,t)$ en el punto x de la barra en el instánte t satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k \frac{\partial T}{\partial t}$$

donde $k = 0.35\text{s/m}^2$. La distribución inicial de temperatura es $T(x,0) = 0°\text{C}$. Computar analiticamente la temperatura en todo punto de la barra en todo instánte. ¿Cómo

es el comportamiento de la temperaura en el largo plazo?
Usando el Método de Crank-Nicolson, computar la temperatura de la barra si unicialmente todo su interior está a temperatura $T(x, 0) = 10°\text{C}$. Discretizar el dominio con $\Delta_x = 0.05\text{m}$. Graficar.

5. Resolver por el método de Crank-Nicolson el siguiente problema parabólico:

$$\begin{aligned} u_t &= \tfrac{4}{\pi^2} u_{xx}, && 0 < x < 4, \quad 0 < t \\ u_x(0, t) &= u(4, t) = 0, && 0 < t \\ u(x, 0) &= \left(1 + 2\cos\tfrac{\pi}{4}x\right)\sin\tfrac{\pi}{4}x, && 0 < x < 4 \end{aligned}$$

Usar $\Delta x = 0.2$, $\Delta t = 0.04$. Compare su resultado con la solución exacta

$$u(x, t) = e^{-t}\sin\frac{\pi}{2}x + e^{-t/4}\sin\frac{\pi}{4}x$$

en $t = 0.4$.

6. Escriba un algorítmo en diferencias centrado con error de truncamiento local $\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2)$ para la ecuación parabólica:

$$u_{xx}(x, t) = \alpha u_t(x, t)$$

Analizar experimentalmente como se propaga una pertubación unitaria para $x \in (0, 1)$, si $u(x, 0) = u(x, 1) = 1$. Discretizar el intervalo $0 < x < 1$ en $N = 5$ puntos (incluyendo los extremos). Analizar los casos $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.1, .25, 0.5, 0.75, 1,$ presentando los resultados en forma de tabla:

j ╲ n	0	1	2	3	4
0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0				0
2	0				0
3	0				0
4	0				0

Usar el criterio de Von Neumann para estudiar la estabilidad de este método.

7. Modificar los algorítmos del *Esquema Explicito Centrado* y el *Método de Crank-Nicolson* para resolver el problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha\frac{\partial u}{\partial x^2} &= F(x, t), && 0 < x < l, \quad 0 < t \\ u_x(0, t) &= u(l, t) = 0, && 0 < t \\ u(x, 0) &= f(x), && 0 < x < l \end{aligned}$$

Resolver con ambos algoritmos el problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x^2} &= 2, && 0 < x < 1, \quad 0 < t \\ u_x(0, t) &= u(1, t) = 0, && 0 < t \\ u(x, 0) &= \sin(\pi x) + x(1 - x), && 0 < x < 1 \end{aligned}$$

Ecuaciones Parabólicas

8. Resolver la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi(x, y) = 0$$

para la región que se muestra (figura 2), teniendo en cuenta los valores que se dan en los bordes, para $\Delta x = \Delta y = 1$.

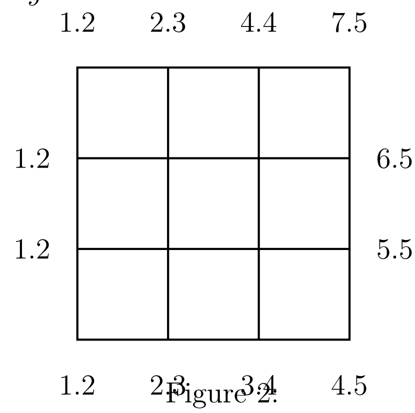

Figure 2:

9. Resolver la ecuación de Poisson:

$$u_{xx} + u_{yy} = 4, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2$$

sabiendo que:

$$u(x, 0) = x^2, \quad u(x, 2) = (x-2)^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0, y) = y^2, \quad u(1, y) = (x-1)^2, \quad 0 \leq x \leq 2$$

Usar $\Delta x = \Delta y = 0.2$ y resolver el sistema por el Método de Gauss-Seidel.

10. Una manera recomendable de *etiquetar* los puntos de una grilla es mediante la asignación:

$$P_l = (x_i, y_j) \quad \text{y} \quad \tilde{u}_l = u_{ij}$$

donde $l = i + (M - 1 - j)(N - 1)$, para $i = 1, 2, \ldots, N-1$ y $j = 1, 2, \ldots, M-1$.

Usando el problema elíptico:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega$$

donde $\Omega = \{(x, y)/0 < x < 1, \quad 0 < y < 1\}$ y $u(0, y) = u(x, 0) = 0$ y $u(x, 1) = u(1, y) = 100$, verificar la conveniencia del etiquetamiento. Usar $\Delta x = \Delta y = 0.1$. Resolver el sistema de ecuaciones por el m'etodo de Gauss-Seidel.

Ejercicios con computadora.

1. En el análisis de esfuerzos de deformación en un cilindro, por calentamiento y enfriamiento, la temperatura $T(r,t)$ satisface el problema de valor en la frontera:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{4K}\frac{\partial T}{\partial t}, \quad \frac{1}{2} < r < 1, \quad 0 < t$$

con las condiciones:

$$\begin{array}{rcll} T(1,t) & = & 100 + 40t, & 0 \leq t \leq 10 \\ T(\frac{1}{2},t) & = & t, & 0 \leq t \leq 10 \\ T(r,0) & = & 200(r-0.5), & 0.5 \leq r \leq 1 \end{array}$$

donde r es la coordenada radial, medida desde el eje del cilindro. La deformación I es proporcional a la temperatura media sobre el cilindro:

$$I(t) = \int_{0.5}^{1} \alpha\, r\, T(r,t)\, dr$$

donde $K = 0.1$ y $\alpha = 10.7$

(a) Realizar un programa de computadora que resuleva el problema dado mediante un esquema de orden 2. Analizar la estabilidad.

(b) Resolverlo, eligiendo Δt y Δr de modo que:

i. El algorítmo sea estable.

ii. La deformación en estado estacionario $I_\infty = \lim_{t\to\infty} I(t)$ no difiera en más del 5%, utilizando la regla de trapecios en el cómputo de $I(t)$.

(c) Graficar en las temperaturas $T(r_i,t)$, en los puntos : $r_i = 0.6, 0.7, 0.8$ y 0.9 en función del tiempo.

(d) Graficar las curvas de temperatura constante cuando se establece el régimen permanente.

(e) Graficar la deformación $I(t)$ versus t.

2. En un reactor nuclear de agua hirviendo o *Boiling Water Reactor* BWR, la potencia es controlada por una distribución cruciforme de barras de control absorvedoras de neutrones como muestra la figura 2.

La distribución de neutrones en una vecindad de las barras de control, se modela según la ecuación:

$$-D\nabla^2\phi + \Sigma_a\phi = S$$

donde $\phi(x,y)$ es la densidad de neutrones en el punto (x,y), D es el flujo de neutrones, Σ_a, la sección eficaz de absorción de neutrones del material de la barra y S la fuente de neutrones producida por el material fisil del reactor. La ecuación diferencial que describe la concentración de neutrones, se resuelve en la zona de influencia de la barra de control, la cual es un cuadrado de lado igual al doble que la longitud de la espiga de la barra cruciforme (ver figura 2. Para dicha región, las condiciones de borde son:

$$\begin{array}{ll} \phi = 0 & \text{sobre la superficie de la barra de control} \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 & \text{sobre todos los bordes excepto los de la barra de control.} \end{array}$$

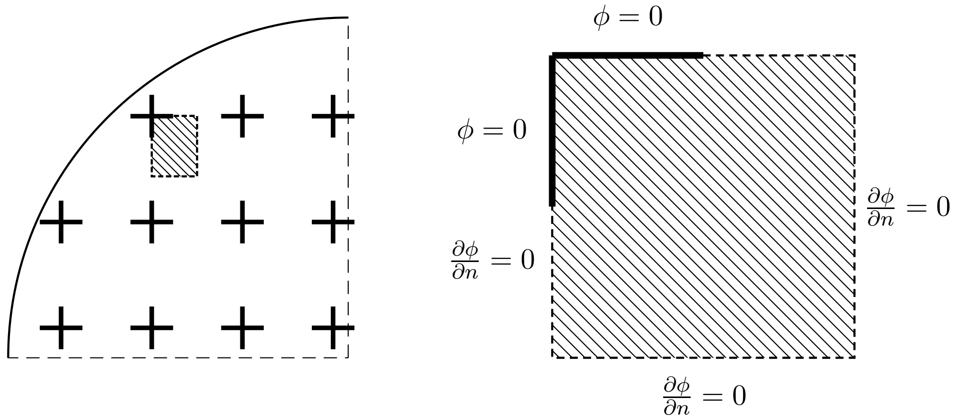

Figure 3: Arreglo de barras de control y zona de influencia de difusión en el núcleo del reactor. *Izquierda*: Disposición de barras de control. *Derecha*: Área de difusión de neutrones, regulada por una barra de control.

Los valores de los parámetros del sistema son: $D = 0.2\text{cm}^2$, $\Sigma_a = 0.1\text{cm}^{-1}$, $S = 1\text{neutrons}^{-1}\text{cm}^{-3}$y el ancho de cada espiga de la barra es $L = 24$cm (lo que hace que la región de influencia de la barra sea un cuadrado de 48cm de lado). Resolver el problema de valor en la frontera.

3. Durante el accidente nuclear como el de Chernobyl, los radionucléidos expulsados a la atmósfera se ven afectados por dos procesos simultaneaos: difusión de los radionucléidos en el aire y advección por el movimiento de la masa de airee debido a vientos. Para modelar el proceso de contaminación atmosférica puede considerarse que la concentración de contaminante $u(t, \mathbf{r})$ satisface la *ecuación de difusión–advección*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u\mathbf{v}) = k\nabla^2 u$$

donde $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ es la velocidad del viento y k es el coeficiente de difusión en la atmósfera. Considerar el caso bisimensional, donde $u = u(x, y)$, entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uv_x)}{\partial x} + \frac{\partial (uv_y)}{\partial y} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Usar un esquema explicito centrádo para resolver la ecuación diferencial, considerando $k = 0.025$. Considerar la velocidad del viento:

$$\mathbf{v} = v_0(\cos \omega t\mathbf{i} + \sin \omega t\mathbf{i})$$

con $v_0 = 2$ y $\omega = 2\pi/3600$. La fuente de contaminación puede considerarse casi toda concentrada en una región muy pequeña, es decir, casi una delta de Dirac. Graficar las curvas de nivel de la concentración, es decir, la nube radiactiva para distintos instantes, en falso color. Generar una animación del movimiento de la nube.