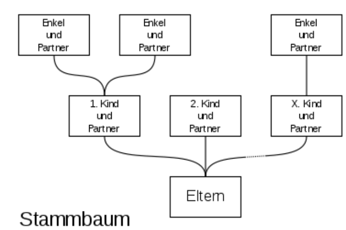
WIKIPEDIA

Graph (Graphentheorie)

Ein **Graph** (selten auch **Graf**[1]) ist in der Graphentheorie eine abstrakte Struktur, die eine Menge von Objekten zusammen mit den zwischen diesen Objekten bestehenden Verbindungen repräsentiert. Die mathematischen Abstraktionen der Objekte werden dabei *Knoten* (auch *Ecken*) des Graphen genannt. Die paarweisen Verbindungen zwischen Knoten heißen *Kanten* (manchmal auch *Bögen*). Die Kanten können gerichtet oder ungerichtet sein. Häufig werden Graphen anschaulich gezeichnet, indem die Knoten durch Punkte und die Kanten durch Linien dargestellt werden.[2]

Anschauliche Beispiele für Graphen sind ein Stammbaum oder das U-Bahn-Netz einer Stadt (siehe Abbildungen). Bei einem Stammbaum stellt jeder Knoten ein Familienmitglied dar und jede Kante ist eine Verbindung zwischen einem Elternteil und einem Kind. In einem U-Bahn-Netz stellt jeder Knoten eine U-Bahn-Station dar und jede Kante eine direkte Zugverbindung zwischen zwei Stationen.



Schematischer Aufbau eines Stammbaumes

Plan der Wiener U-Bahn

Inhaltsverzeichnis

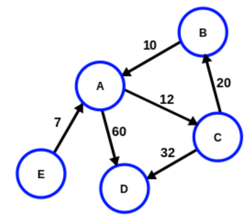
Visualisierung spezieller Graphen

Multigraph

In sogenannten *Multigraphen* können zwei Knoten auch durch mehrere Kanten verbunden sein, was in einfachen Graphen nicht erlaubt ist. Außerdem dürfen Multigraphen Schleifen enthalten: Kanten, die zum selben Knoten führen, von dem sie ausgehen.[2]

Sind Knoten durch mehrere Kanten verbunden, wird häufig nur eine Kante gezeichnet und die Anzahl der Kanten zwischen diesen beiden Knoten als Kantengewicht an die eine Kante geschrieben. Im Beispiel gibt es 60 Kanten zwischen Knoten *A* und *D*. Anstatt alle 60 Kanten zu zeichnen, wird eine Kante mit dem Kantengewicht 60 gezeichnet.

Digraph



Multigraph: Mehrfachkanten werden durch eine gewichtete Kante visualisiert

In *Digraphen* (auch orientierte oder gerichtete Graphen genannt) werden Kanten statt durch Linien durch Pfeile gekennzeichnet, wobei der Pfeil von ihrem Anfangs- zu ihrem Endknoten zeigt. Dies verdeutlicht, dass jede Kante des Graphen nur in eine Richtung durchlaufen werden kann.[3]

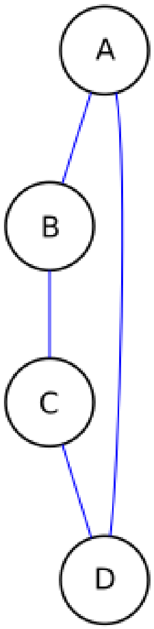
Hypergraph

Bei *Hypergraphen* verbindet eine Kante (auch *Hyperkante* genannt) nicht nur zwei, sondern mehrere Knoten gleichzeitig. Hypergraphen können beispielsweise durch mehrere planare Graphen mit Indizierung der Kanten dargestellt werden. Hypergraphen mit wenigen Kanten (sogenannte *dünne Graphen*) zeichnet man so, dass man eine Menge von Punkten zeichnet, die den Knoten entsprechen, und die zu einer Hyperkante gehörigen Punkte werden dann durch eine geschlossene Linie umkreist, die somit die Teilmenge der zu ihr gehörenden Knoten innerhalb aller Knoten angibt. Bei Hypergraphen mit vielen Kanten wird diese Darstellung aber schnell unübersichtlich. Weniger intuitiv, aber übersichtlicher ist es dann, einen Hypergraphen als bipartiten Meta-Graphen darzustellen, wobei die eine der beiden Bipartitionsmengen den Knoten des Hypergraphen, die andere Bipartitionsmenge den Hyperkanten des Hypergraphen entspricht. Die Kanten zwischen diesen beiden Bipartitionsmengen symbolisieren dann die Zugehörigkeit der Knoten zu den Hyperkanten.

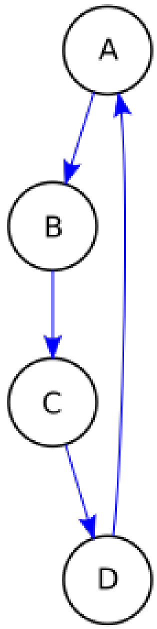
Definitionen

Ein Graph G ist ein geordnetes Paar (V, E), wobei V eine Menge von *Knoten* (englisch *vertex/vertices*, oft auch *Ecken* genannt) und E eine Menge von *Kanten* (engl. *edge/edges*, manchmal auch *Bögen* genannt) bezeichnet. Dabei ist E in

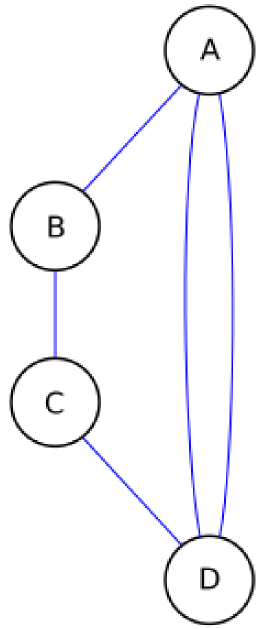
- *ungerichteten Graphen ohne Mehrfachkanten* eine Teilmenge aller 2-elementigen Teilmengen von V[2],
- *gerichteten Graphen ohne Mehrfachkanten* eine Teilmenge aller Paare (i, j) die durch das kartesische Produkt $V \times V$ entstehen[4],
- *ungerichteten Graphen mit zusammengefassten Mehrfachkanten* eine Multimenge über der Menge W aller 2-elementigen Teilmengen von V, also eine Funktion $E\colon W \to \mathbb{N}_0$,
- *gerichteten Graphen mit zusammengefassten Mehrfachkanten* eine Multimenge über dem kartesischen Produkt $V \times V$, also eine Funktion $E\colon V \times V \to \mathbb{N}_0$,
- *gerichteten Graphen mit eigenständigen Mehrfachkanten* eine beliebige Menge, deren Elemente mit Hilfe von zwei Funktionen $\mathrm{src}, \mathrm{tgt}\colon E \to V$ die den Elementen einen Quell- bzw. Zielknoten zuordnen, als Kanten angesehen werden (so ein Graph ist dasselbe wie ein Funktor $G\colon \mathcal{G} \to \mathbf{Set}$, wobei $\mathcal{G}$ die recht überschaubare Kategorie $\mathcal{G} = \{V \xleftarrow{\mathrm{src}} E \xrightarrow{\mathrm{tgt}} V\}$ mit zwei Objekten und zwei ausgezeichneten Pfeilen ist)
- *Hypergraphen* eine Teilmenge der Potenzmenge von V[2].



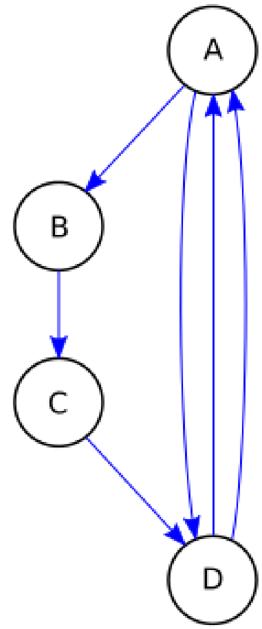
Ungerichteter Graph ohne Mehrfachkanten



Gerichteter Graph ohne Mehrfachkanten



Ungerichteter Graph mit Mehrfachkanten



Gerichteter Graph mit Mehrfachkanten

Den Zusatz „ohne Mehrfachkanten“ lässt man gewöhnlich weg und nennt Graphen mit Mehrfachkanten *Multigraphen*. Ferner verzichtet man meist auf das Attribut „ungerichtet“ und kennzeichnet nur gerichtete Graphen explizit. Ungerichtete Graphen ohne Mehrfachkanten nennt man auch häufig *schlicht* oder *einfach*. Eine andere Bezeichnung für gerichtete Graphen ist *Digraph* (Directed Graph).

Abgeleitete Bezeichnungen

Statt die Knoten- und Kantenmenge eines Graphen G mit den Symbolen V und E zu identifizieren, kann man auch allgemeine Abbildungen V und E definieren, die einen Graphen auf dessen Knotenmenge oder Kantenmenge abbilden. Für zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ bezeichnen also $V(G_1) := V_1$ und $E(G_1) := E_1$ sowie $V(G_2) = V_2$ und $E(G_2) = E_2$.

Die Mehrdeutigkeit $V(G) = V$ und $E(G) = E$ wird bei dieser Notation in Kauf genommen, obwohl die Abbildungen etwas anderes darstellen als die mit ihr verbundene Knoten- und Kantenmenge. Als Konvention bietet sich an, mit V bzw. E ohne Argument Knoten- bzw. Kantenmenge zu bezeichnen, V bzw. E mit Argument bezeichnen dagegen die definierten Abbildungen.

Ist G ein Graph, so sagt man allgemein v ist *Knoten* bzw. *Ecke* von G, wenn v zu $V(G)$ gehört. Außerdem bezeichnet man Kanten $e \in E(G)$ als

- *ungerichtete Kante* von G, falls G ein ungerichteter Graph ist.
- *gerichtete Kante* von G, falls G ein gerichteter Graph ist.
- *Hyperkante* von G, falls G ein Hypergraph ist.

In einer ungerichteten Kante $e = \{v, w\}$ bezeichnet man v und w als *Endknoten* von e. In einer gerichteten Kante $e = (v, w)$ bezeichnet man v als *Startknoten* und w als *Endknoten* von e.

Bei Multigraphen bezeichnet $E(G)(e)$ die *Vielfachheit* von e. Wenn $E(G)(e) > 1$ gilt, so spricht man von einer *Multi-* oder *Mehrfachkante*.

Hat eine Kante e in gerichteten Graphen die Form (v, v), so spricht man von einer *Schleife*. Ist die Schleife e in einem Multigraphen G zugleich eine Mehrfachkante, so spricht man von einer *Mehrfachschleife*. Gerichtete Graphen ohne Schleifen nennt man *schleifenlos* oder *schleifenfrei*.

Als *Knotenzahl* $n(G) = |V(G)|$ eines Graphen G bezeichnet man die Anzahl seiner Knoten, als *Kantenzahl* $m(G) = |E(G)|$ bezeichnet man die Anzahl seiner Kanten (in Multigraphen summiert man über die Vielfachheit der Kanten).

Zwei Knoten heißen *benachbart*, wenn eine Kante sie verbindet.

Spezialfälle

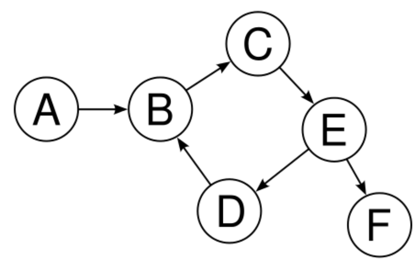
Verbindet in einem gerichteten Graphen die Kante e_1 zwei Knoten, und die Kante e_2 dieselben Knoten in umgekehrter Richtung, kann man beide zusammen auch als eine *ungerichtete Kante* innerhalb des gerichteten Graphen betrachten. Im Falle von Mehrfachkanten müssen die Vielfachheiten beider Kanten übereinstimmen.

Gibt es zu jeder Kante eines gerichteten Graphen eine solche entgegengesetzte Kante im Graphen, so ist er ein *Symmetrischer Graph*.

Einen Graphen, dessen Knotenmenge endlich ist, nennt man einen *endlichen Graphen*. Im Gegensatz dazu nennt man einen Graphen, dessen Knotenmenge unendlich ist, *unendlichen Graphen*. Meist betrachtet man nur endliche Graphen und lässt daher das Attribut „endlich“ weg, während man *unendliche Graphen* explizit kennzeichnet.

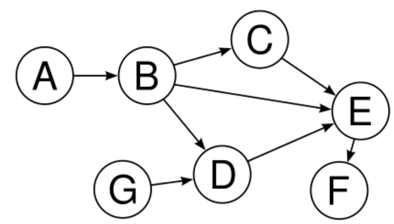
Teilgraphen, Wege und Zyklen

Ein Teilgraph G' eines Graphen G enthält nur Knoten und Kanten, die auch in G enthalten sind. Ein von einer Knotenmenge U induzierter Teilgraph enthält die Knoten aus U und alle Kanten aus G zwischen diesen Knoten.



Ein gerichteter Graph mit Zyklus

Eine Folge von paarweise verschiedenen Knoten $v_1, \dots, v_n$, in der aufeinander folgende Knoten v_i und v_{i+1} im Graphen durch eine Kante verbunden sind, bezeichnet man als Weg, manchmal auch als *Pfad*. Gilt $v_1 = v_n$, und ist dies der einzige doppelte Knoten, spricht man von einem Zyklus oder *Kreis*. Eine Sequenz von benachbarten Knoten, in der sich Knoten wiederholen dürfen, bezeichnet man als Kantenfolge. Die Begriffe Weg, Pfad, Kantenfolge, Kreis und Zyklus werden in der Literatur zum Teil unterschiedlich definiert.



Ein gerichteter Graph ohne Zyklus

Enthält ein gerichteter Graph keinen Zyklus, nennt man ihn *azyklisch* oder *zyklenfrei* – also einen *gerichteten azyklischen Graphen* (engl. *DAG* oder *dag* für »*directed acyclic graph*«). Ein solcher Graph lässt sich durch die Ergänzung aller Kanten, die gleichen Ausgangs- und Endknoten wie Wege haben, also die Umwege über andere Kanten zu einem Zielknoten abkürzen, zu einer (endlichen und diskreten) Halbordnung erweitern. Diesen Vorgang nennt man die Bildung der transitiven Hülle. Ein Hasse-Diagramm ist ein gerichteter azyklischer Graph, bei dem die durch das Transitivitätsgesetz implizierten Kanten weggelassen sind (transitive Reduktion).

Grundlegende Operationen

Bei der Untersuchung von Grapheneigenschaften kommt es häufiger vor, dass man auf Graphen einfache Operationen anwenden muss, um möglichst kompakt und damit leichter verständlich schreiben zu können. Besonders häufig werden die üblichen Operationen der Mengenlehre (Vereinigung, Durchschnitt, Differenz und Komplement) auf Knoten- bzw. Kantenmengen von Graphen angewendet, sodass diese direkt auf Graphen definiert werden.

Sind $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ Graphen desselben Typs, so bezeichnet

- $G_1 + G_2$ den Graphen, der entsteht, wenn man die Knoten- und Kantenmenge vereinigt,
- $G_1 - E_2$ den Graphen, der entsteht, wenn man E_2 von der Kantenmenge von G_1 abzieht und

- $G_1 - V_2$ den Graphen, der entsteht, wenn man V_2 von der Knotenmenge von G_1 abzieht und alle Kanten entfernt, die Knoten aus V_2 enthalten.

Man beachte dabei die unterschiedliche Definition der Begriffe Vereinigungsmenge und Differenzmenge für Mengen und Multimengen. Man schreibt auch abkürzend

- $G_1 + E_2$, falls V_2 Teilmenge von V_1 ist,
- $G_1 + V_2$, falls E_2 leer oder Teilmenge von E_1 ist,
- $G_1 + \{v, w\}$, falls $G_2 = (\{v, w\}, \{\{v, w\}\})$,
- $G_1 + v$, falls $G_2 = (\{v\}, \{\})$,
- $G_1 - \{v, w\}$, falls $E_2 = \{\{v, w\}\}$ und
- $G_1 - v$ falls $V_2 = \{v\}$.

Kantenkontraktion und die Bildung des Komplementgraphen sind weitere Basisoperationen.

Bemerkungen

Ungerichtete Graphen ohne Mehrfachkanten sind Spezialfälle von Hypergraphen. Multigraphen, in denen keine Mehrfachkanten vorkommen, sind zwar nicht formal, aber anschaulich äquivalent zu Graphen ohne Mehrfachkanten, weshalb man auch diese als Graphen ohne Mehrfachkanten bezeichnet. Es gibt eine bijektive Zuordnung zwischen den beiden Varianten. In diesem Sinne sind Graphen ohne Mehrfachkanten also Spezialfälle von Graphen mit Mehrfachkanten. Ähnlich verhält es sich mit ungerichteten Graphen, die in gewissem Sinn Spezialfälle von gerichteten Graphen sind. Ist ein gerichteter Graph symmetrisch und schleifenlos, so bezeichnet man diesen auch als *ungerichtet*, da es auch hier eine einfache eineindeutige Zuordnung zwischen beiden Varianten gibt (siehe auch Adjazenzmatrix).

Es lassen sich natürlich auch ungerichtete Graphen mit Schleifen definieren, wobei man diese wohl am einfachsten wie eben als (formale) Spezialfälle von gerichteten Graphen definiert und die Bedingung der Schleifenlosigkeit weg lässt. Solche Graphen sind aber nur selten Gegenstand der Betrachtungen in der Graphentheorie.

Der wohl allgemeinste Typ von Graphen sind gerichtete Hypergraphen mit Mehrfachkanten. Jeder oben definierte Graphentyp kann dann als Spezialfall von diesem betrachtet werden. Solche Graphen sind aber so gut wie gar nicht Gegenstand der Betrachtungen in der Graphentheorie, weshalb sie hier auch nicht näher erläutert werden.

Sollen Graphen als Darstellung eines Sachverhaltes herhalten, werden Algorithmen benötigt, die für das Graphzeichnen benötigt werden. Diese Disziplin der Informatik hat sich in den letzten Jahren stets fortentwickelt und liefert Lösungen für unterschiedliche Visualisierungen, die auf Graphen beruhen.

Erweiterungen

Graphen können mit weiteren Eigenschaften bzw. Informationen ergänzt werden.

Gefärbte Graphen

Eine Erweiterung von Graphen $G = (V, E)$ zu knotengefärbten Graphen erhält man, indem das Tupel (V, E) zu einem Tripel (V, E, f) ergänzt wird. f ist eine Abbildung von V in die Menge der natürlichen Zahlen. Anschaulich gibt man jedem Knoten damit eine Farbe.

Statt der Knoten kann man in Graphen ohne Mehrfachkanten und in Hypergraphen auch die Kanten färben und spricht dann von einem *kantengefärbten Graphen*. Dazu erweitert man ebenfalls das Tupel (V, E) zu einem Tripel (V, E, f), wobei f aber eine Abbildung von E (statt von V) in die Menge der natürlichen Zahlen ist. Anschaulich gibt man jeder Kante damit eine Farbe. In Graphen mit Mehrfachkanten ist dies zwar prinzipiell auch möglich, aber schwieriger zu definieren, insbesondere, wenn Mehrfachkanten entsprechend ihrer Vielfachheit mehrere verschiedene Farben zugeordnet werden sollen.

Man beachte, dass die Begriffe „Färbung“ und „färben“ in der Graphentheorie auch eine speziellere Bedeutung besitzen. Exakt spricht man dann zwar von gültiger Färbung, lässt das Attribut „gültig“ aber meist weg.

Analog gibt es auch *benannte Graphen* (V, E, f, g), bei denen Knoten und/oder Kanten einen Namen tragen, und die Abbildungen f bzw. g den Knoten bzw. Kanten einen Namen zuordnen. Die zuvor abgebildeten Beispiele sind benannte Graphen, bei denen die Knoten mit Buchstaben benannt wurden. Dies wird oft bei Visualisierungen gemacht, so dass man besser über den Graphen diskutieren kann.

Gewichtete Graphen

Statt von knoten- bzw. kantengefärbten Graphen spricht man von knoten- bzw. kantengewichteten Graphen, falls f statt in die natürlichen Zahlen in die reellen Zahlen abbildet. Knoten- bzw. kantengefärbte Graphen sind also Spezialfälle von knoten- bzw. kantengewichteten Graphen.

Man bezeichnet $f(v)$ bzw. $f(e)$ auch als *Gewicht* des Knotens v bzw. der Kante e. Zur Unterscheidung spricht man auch von *Knotengewicht* bzw. *Kantengewicht*. Eine solche Gewichtung wird erforderlich, wenn die Information über Knotenbeziehungen nicht ausreicht. Fasst man beispielsweise das Straßennetz (vereinfacht) als Graph auf (Orte sind Knoten, die Orte verbindende Straßen sind Kanten), so könnte eine Gewichtung der Kanten Aufschluss über die Distanz zwischen zwei Orten geben. Die Kantengewichte eines Graphen können in einer quadratischen Gewichtsmatrix, der Adjazenzmatrix, gesammelt werden.

Abbildungen zwischen Graphen

Schließlich lassen sich auch Abbildungen zwischen Graphen definieren. Interessant sind insbesondere solche, die mit der Struktur der beiden verträglich sind, so genannte „Homomorphismen“.

Seien dazu $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ Graphen desselben Typs. Eine Abbildung $p\colon V_1 \to V_2$ heißt *Homomorphismus* zwischen G_1 und G_2, falls gilt:

- In ungerichteten Graphen ohne Mehrfachkanten:
  Ist $\{v, w\}$ eine Kante von G_1, so ist $\{p(v), p(w)\}$ eine Kante von G_2.
- In gerichteten Graphen ohne Mehrfachkanten:
  Ist (v, w) Kante von G_1, dann ist $(p(v), p(w))$ Kante von G_2.
- In ungerichteten Graphen mit Mehrfachkanten:
  $E_1(\{v, w\}) \leq E_2(\{p(v), p(w)\})$, d. h. je zwei Ecken sind mit höchstens so vielen Kanten verbunden wie ihre Bildecken.
- In gerichteten Graphen mit Mehrfachkanten:
  $E_1(v, w) \leq E_2(p(v), p(w))$.
- In gerichteten Graphen mit eigenständigen Mehrfachkanten:
  p hat einen dazugehörenden Partner $q\colon E_1 \to E_2$ und für alle Kanten $e \in E_1$ gilt $\mathbf{src}_2(q(e)) = p(\mathbf{src}_1(e))$ sowie $\mathtt{tgt}_2(q(e)) = p(\mathtt{tgt}_1(e))$ (werden G_1 und G_2 als Funktoren angesehen, ist ein Graphhomomorphismus gerade eine natürliche Transformation).
- In Hypergraphen:
  Ist $\{v_1, \cdots, v_k\}$ Kante von G_1, so ist $\{p(v_1), \cdots, p(v_k)\}$ Kante von G_2.

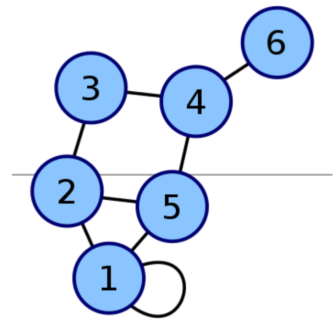
Das Bild $p(G_1)$ ist dann ein Teilgraph von G_2. Ist p umkehrbar und die Umkehrfunktion ebenfalls ein Homomorphismus, so ist p ein Isomorphismus von Graphen.

Zu beachten ist, dass die Knoten vor den Kanten einen Vorrang haben, indem p als Funktion nur auf den Knoten spezifiziert ist, die auf den Kanten lediglich eine induzierte Wirkung entfaltet.

Datenstrukturen

Für die Repräsentation von Graphen im Computer gibt es im Wesentlichen zwei gebräuchliche Formen: die Adjazenzmatrix (auch Nachbarschaftsmatrix) und die Adjazenzliste (Nachbarschaftsliste). Die Bedeutung der beiden Darstellungen liegt darin, dass praktisch jede algorithmische Lösung graphentheoretischer Probleme auf wenigstens eine der beiden Repräsentationen zurückgreift. Eine weitere, aber seltener genutzte Möglichkeit zur Darstellung von Graphen im Computer ist die Inzidenzmatrix, die man auch als Knoten-Kanten-Matrix bezeichnet.

Inzidenzmatrizen sind zwar aufwändiger zu implementieren und zu verwalten, bieten aber eine Reihe von Vorteilen gegenüber Adjazenzmatrizen. Zum einen verbrauchen sie bei fester Anzahl von Kanten stets nur linear viel Speicherplatz bezüglich der Anzahl der Knoten, was insbesondere bei dünnen Graphen (also Graphen mit wenig Kanten) von Vorteil ist, während die Adjazenzmatrix quadratischen Platzbedarf bezüglich der Anzahl Knoten besitzt (dafür aber kompakter bei dichten Graphen, also Graphen mit vielen Kanten ist). Zum anderen lassen sich viele graphentheoretische Probleme nur mit Adjazenzlisten in linearer Zeit lösen. In der Praxis verwendet man daher meist diese Form der Repräsentation.

Ungerichteter Graph	Adjazenzmatrix
	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Siehe auch

- Graphenspiele
- Kleine-Welt-Phänomen (Small-world-Netzwerk)
- Skalenfreies Netz
- Zufallsgraph
- Bandgraph
- Mengensystem

Literatur

- Thomas H. Cormen, Charles Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein: *Algorithmen – Eine Einführung*. 2. Auflage. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München 2007, ISBN 978-3-486-58262-8, S. 531–533.
- Reinhard Diestel: *Graphentheorie*. 4. Auflage. Springer, Berlin u. a. 2010, ISBN 978-3-642-14911-5 (online: 4th Electronic Edition 2010, Free preview version (englisch) (http://diestel-graph-theory.com/basic.html) – Erstausgabe: 1996).
- Jürgen Ebert: *Effiziente Graphenalgorithmen*. In: *Studien-Texte – Informatik*. Akademische Verlags-Gesellschaft, Wiesbaden 1981, ISBN 3-400-00424-3 (Zugleich Habilitationsschrift an der Universität Osnabrück 1982).
- Dieter Jungnickel: *Graphen, Netzwerke und Algorithmen*. 3. vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage. BI-Wissenschafts-Verlag, Mannheim u. a. 1994, ISBN 3-411-14263-4 (Inhaltsverzeichnis, PDF, 1,14 MB (http://www.gbv.de/dms/ilmenau/toc/164094962.PDF)).
- Manfred Nitzsche: *Graphen für Einsteiger*. Rund um das Haus vom Nikolaus. In: *Studium*. 3., überarbeitete und erweiterte Auflage. Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2009, ISBN 978-3-8348-0813-4.

Einzelnachweise

1. Duden online: Graph, Graf, der (http://www.duden.de/rechtschreibung/Graph_Darstellung_Mathematik), Bibliographisches Institut GmbH, 2013.
2. Reinhard Diestel: *Graphentheorie*. 4. Auflage. Springer, Berlin u. a. 2010, ISBN 978-3-642-14911-5, S. 1–34 (online: 4th elektronische Ausgabe 2010 (englisch) (http://diestel-graph-theory.com/basic.html) – Erstausgabe: 1996).
3. *Directed Graphs*. In: Claude Sammut, Geoffrey I. Webb (Hrsg.): *Encyclopedia of Machine Learning*. Springer US, 2010, S. 279, doi:10.1007/978-0-387-30164-8_218 (https://doi.org/10.1007%2F978-0-387-30164-8_218).
4. Brigitte Werners: *Grundlagen des Operations Research*. 3. Auflage. Springer, Berlin Heidelberg 2013, ISBN 978-3-642-40101-5, S. 175–209.