

Najkraći putevi i minimalno razapinjuće stablo (MST)

Programiranje za rješavanje složenih problema

1. Uvod i Motivacija

- Proširenje problema najkraćeg puta
- Što je MST?

2. Najkraći Putevi Svi-Svim

- Floyd-Warshall algoritam

3. Minimalno Razapinjuće Stablo (MST)

- Kruskalov algoritam (Union-Find)
- Primov algoritam

4. Zadaci za Vježbu

1. Uvod i motivacija

Proširenje problema najkraćeg puta

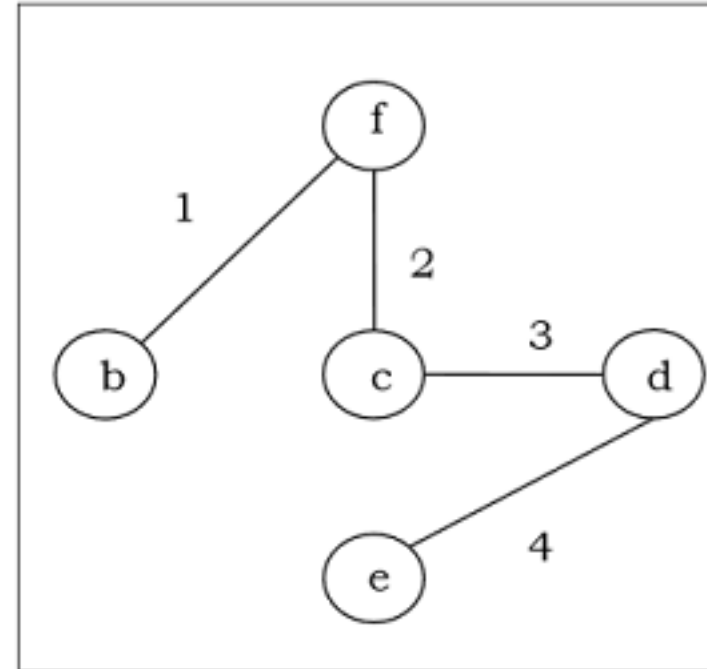
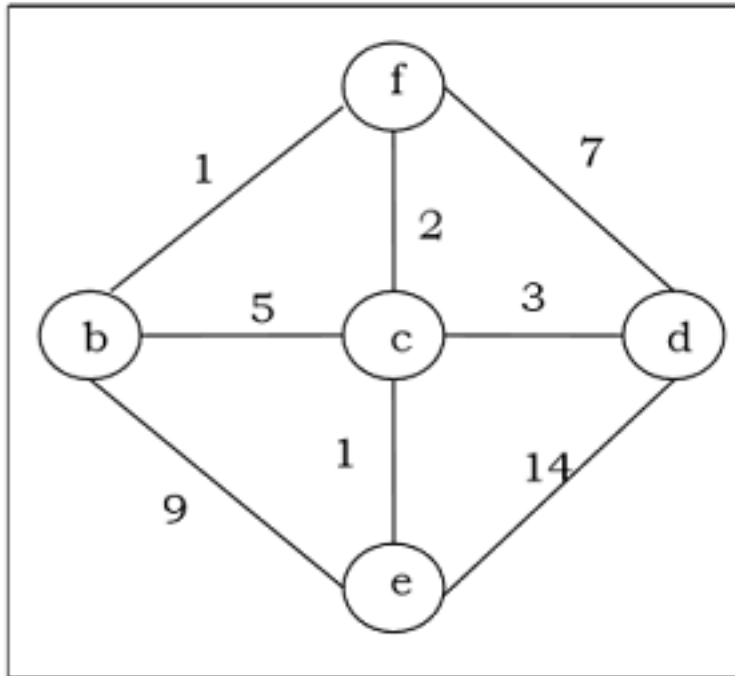
Do sada smo rješavali *Single-Source Shortest Path* (Dijkstra, Bellman-Ford). Što ako nam trebaju udaljenosti između **svih parova** čvorova?

Naivni pristupi:

- **Dijkstra n puta:**
 - Složenost: $O(n \cdot m \log n)$ (samo nenegativne težine).
- **Bellman-Ford n puta:**
 - Složenost: $O(n^2 \cdot m)$ (radi s negativnim težinama).

Ovi pristupi mogu biti prespori za guste grafove. Danas učimo **Floyd-Warshall** ($O(n^3)$).

Problem minimalnog razapinjućeg stabla (MST) (1/2)



Prikaz razlike između grafa i MST-a

Izvor: [Discrete Mathematics - Spanning Trees](#)

Problem minimalnog razapinjućeg stabla (MST) (2/2)

Motivacija: Povezivanje n gradova električnom mrežom uz **minimalan ukupan trošak**.

Definicija:

- **Ulaz:** Neusmjeren, težinski graf.
- **Razapinjuće stablo:** Podgraf koji povezuje sve čvorove i nema ciklusa.
- **MST:** Stablo čiji je zbroj težina bridova najmanji moguć.

Algoritmi koje radimo:

1. **Kruskalov:** Dodaj najlakši brid koji ne stvara ciklus.
2. **Primov:** Širi stablo od početnog čvora prema najbližim susjedima.

Preporučena literatura

- **CPH (Competitive Programmer's Handbook):**
 - Poglavlje 13.3: *Floyd-Warshall algorithm*
 - Poglavlje 15: *Spanning trees*
- **CLRS (Introduction to Algorithms):**
 - Poglavlje 25: *All-Pairs Shortest Paths*
 - Poglavlje 23: *Minimum Spanning Trees*
 - Poglavlje 21: *Data Structures for Disjoint Sets* (za Union-Find)

2. Floyd-Warshall algoritam

Intuicija: Dinamičko programiranje

Najkraći putevi svi sa svim

Ideja: Postupno poboljšavati procjenu udaljenosti između i i j dodavanjem mogućih **međučvorova**.

1. **Stanje:** $\text{dist}[i][j]$ = duljina najkraćeg puta od i do j .

2. **Inicijalizacija:**

- 0 ako je $i = j$, težina ako postoji brid, ∞ inače.

3. **Tranzicija:**

Iteriramo kroz svaki čvor k (od 1 do n) i provjeravamo možemo li skratiti put od i do j prolaskom kroz k .

$$\text{dist}[i][j] = \min(\text{dist}[i][j], \text{dist}[i][k] + \text{dist}[k][j])$$

Implementacija (C++)

Jednostavna implementacija s tri ugniježdene `for` petlje.

```
const int INF = 1e9;
int dist[N][N]; // Matrica udaljenosti

// Glavni dio algoritma
for (int k = 1; k <= n; ++k) {           // K: potencijalni međučvor
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {       // I: početni čvor
        for (int j = 1; j <= n; ++j) {   // J: završni čvor

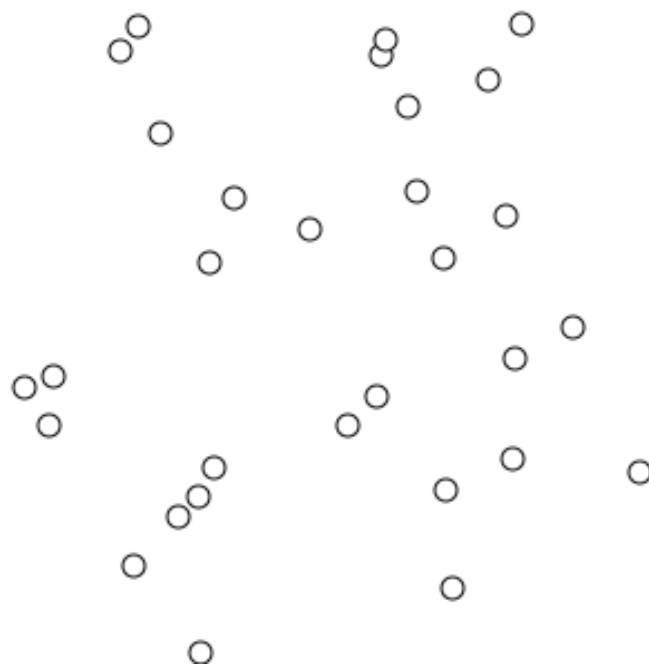
            // Paziti na overflow ako je dist[i][k] == INF
            if (dist[i][k] != INF && dist[k][j] != INF) {
                dist[i][j] = min(dist[i][j], dist[i][k] + dist[k][j]);
            }
        }
    }
}
```


Analiza i primjene

- **Složenost:** $O(n^3)$.
 - Pogodno za $n \leq 400$ (približno).
 - Izvrsno za guste grafove ($m \approx n^2$).
- **Negativne težine:**
 - Radi ispravno s negativnim bridovima.
 - Ne radi s negativnim **ciklusima**.
- **Detekcija negativnih ciklusa:**
 - Ako na kraju algoritma vrijedi `dist[i][i] < 0`, postoji negativni ciklus.
- **Tranzitivno zatvaranje:**
 - Može se koristiti za provjeru *postoji li* put (povezanost) umjesto duljine puta.

3. Minimalno Razapinjuće Stablo (MST) (1/3)

Kruskalov algoritam



Vizualizacija Krsukalova algoritma

Izvor: [Kruskal's algorithm](#)

3. Minimalno Razapinjuće Stablo (MST) (2/3)

Problem 1: Kruskalov algoritam

Pohlepna strategija:

"Na svakom koraku, dodaj najlakši brid u grafu koji ne stvara ciklus."

Postupak:

1. Sortiraj sve bridove po težini (uzlazno).
2. Iteriraj kroz bridove (u, v) :
 - Ako su u i v već u istoj komponenti: preskoči (stvorio bi se ciklus).
 - Inače: dodaj brid u MST i spoji komponente.
3. Ponavljaj dok ne spojimo sve čvorove.

3. Minimalno Razapinjuće Stablo (MST) (3/3)

Union-Find struktura (DSU)

Za efikasno izvršavanje Kruskalovog algoritma, moramo brzo provjeriti jesu li čvorovi povezani.

- `find(i)`: Vraća "šefa" (predstavnik) komponente kojoj i pripada.
- `unite(i, j)`: Spaja komponente od i i j .

Optimizacije:

- *Path Compression* (spljoštavanje stabla pri traženju).
- *Union by Rank/Size* (spajanje manjeg stabla pod veće).
- **Složenost:** Gotovo konstantna, $O(\alpha(n))$ amortizirano.

Implementacija Kruskalovog algoritma

```
struct Edge { int u, v, weight; };
bool compareEdges(const Edge& a, const Edge& b) { return a.weight < b.weight; }

// ... DSU funkcije find_set i unite_sets ...

sort(edges.begin(), edges.end(), compareEdges);

long long total_weight = 0;
for (Edge e : edges) {
    if (find_set(e.u) != find_set(e.v)) { // Ako nisu u istoj komponenti
        total_weight += e.weight;
        unite_sets(e.u, e.v);           // Spoji ih
    }
}
```

Složenost: $O(m \log m)$ (zbog sortiranja).

Problem 2: Primov algoritam (1/2)

Pohlepna strategija:

"Gradi stablo počevši od jednog čvora, šireći se na najbliže susjede."

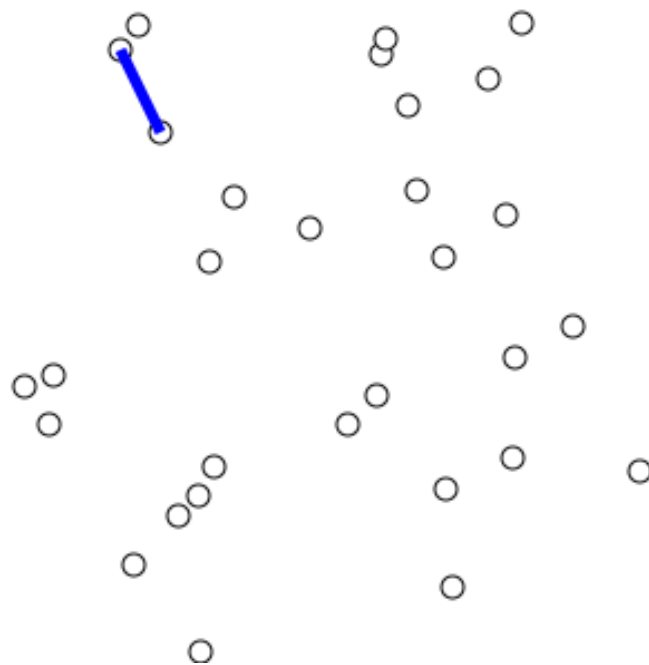
Sličnost s Dijkstrom:

- Koristi **Priority Queue**.
- Razlika: Kod Dijkstre je ključ *ukupna udaljenost od starta*, kod Prima je ključ *težina brida* kojim se spajamo na postojeće stablo.

Algoritam:

1. Stavi proizvoljni čvor u PQ s cijenom 0.
2. Dok PQ nije prazan: uzmi najjeftiniji čvor u .
3. Ako u nije posjećen: označi ga, dodaj cijenu u sumu, i dodaj sve njegove susjede u PQ.

Problem 2: Primov algoritam (2/2)



Vizualizacija Primovog algoritam:

Izvor: [Prim's algorithm](#)

Implementacija: Primov algoritam

```
priority_queue<pair<long long, int>> q; // {-težina, čvor}
vector<bool> visited(n + 1, false);

q.push({0, 1}); // Počni od čvora 1
long long total_weight = 0;

while (!q.empty()) {
    int u = q.top().second;
    long long w = -q.top().first;
    q.pop();

    if (visited[u]) continue;
    visited[u] = true;
    total_weight += w;

    for (auto edge : adj[u]) {
        if (!visited[edge.first]) {
            q.push({-edge.second, edge.first});
        }
    }
}
```


4. Zadaci za vježbu

CSES Problem Set

- **Road Reparation**
 - Klasičan MST (Prim ili Kruskal).
- **Road Construction**
 - Praćenje veličine komponenata (Union-Find).
- **Flight Routes Check**
 - Jaka povezanost.

Road Reparation (CSES)

Analiza i rješenje problema

Analiza zadatka: Road Reparation (1/2)

Definiranje problema: Road Reparation

Imamo n gradova i m cesta, svaka ima cijenu popravka.

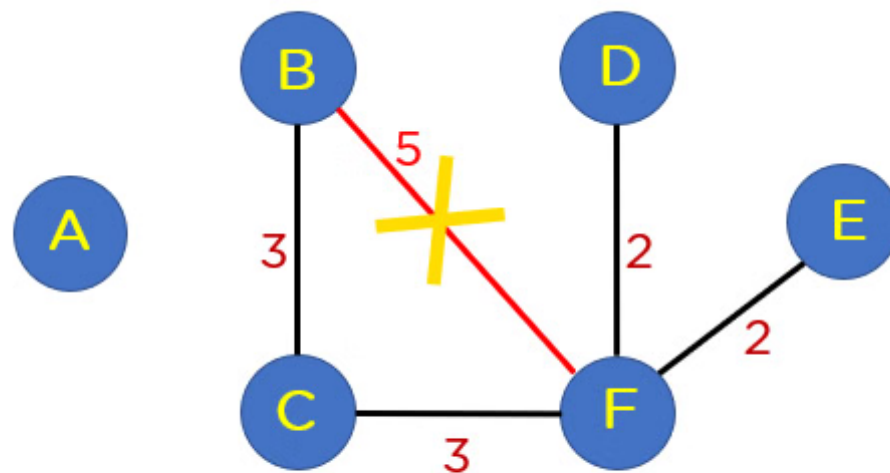
Cilj je odabrati skup cesta tako da su **svi gradovi povezani**, a ukupna cijena popravka bude **minimalna**.

Intuicija: Road Reparation

1. Moramo povezati n čvorova.
2. Najefikasniji način povezivanja n čvorova bez suvišnih bridova je **stablo** ($n - 1$ bridova).
3. Tražimo stablo s najmanjom sumom težina.

Zaključak: Ovo je klasična primjer **MST (Minimalno Razapinjuće Stablo)** problema.

Analiza zadatka: Road Reparation (2/2)



Edge BF should be discarded.

Odbacivanje brida

Izvor: [Kruskal's Algorithm: Key to Minimum Spanning Tree \[MST\]](#)

Strategija rješavanja: Kruskalov algoritam

Za ovaj problem Kruskalov algoritam je vrlo intuitivan:

1. **Sortiraj** sve ceste po cijeni (od najmanje do najveće).
2. **Pohlepni pristup:** Uzimaj ceste redom.
3. Ako cesta povezuje dva grada koji **već jesu povezani** (direktno ili indirektno), odbaci je (jer stvara ciklus i nepotreban trošak).
4. Ako cesta povezuje dva nepovezana skupa gradova, **kupi je** i spoji skupove.

Struktura podataka

Za efikasnu provjeru jesu li gradovi već povezani koristimo **Union-Find (DSU)**.

Rubni slučajevi i zamke

1. Nemoguće rješenje ("IMPOSSIBLE")

Što ako je graf nepovezan (npr. otok do kojeg ne vodi ni jedna cesta)?

- Ako nakon prolaska kroz sve ceste broj odabranih bridova nije $n - 1$, rješenje ne postoji.
- Alternativno: Provjeri je li veličina glavne komponente u DSU jednaka n .

2. Veliki brojevi

- Cijena ceste c može biti do 10^9 .
- Ukupna cijena može biti $10^5 \times 10^9 = 10^{14}$.
- **Obavezno** koristi `long long` za sumu cijena.

Implementacija: Struktura

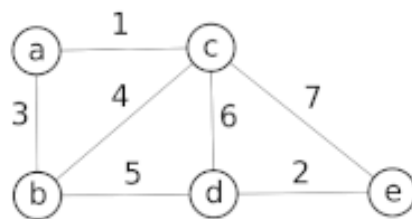
```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

struct Edge {
    int u, v, weight;
    // Sortiranje po težini
    bool operator<(const Edge& other) const {
        return weight < other.weight;
    }
};
```

Primjena Union-Find (DSU) (1/2)

Intuicija iza Union-Find (DSU)



Izvor: [Disjoint-set data structure](#)

Primjena Union-Find (DSU) (2/2)

"Tko je ovdje šef?"

Zamisli da je na početku svaki grad (čvor) zasebna "ekipa" i sam je svoj šef.

Cilj nam je efikasno pratiti tko pripada kojoj ekipi dok spajamo gradove cestama.

Struktura podržava dvije brze operacije:

1. **Find (Pronađi):** Tko je glavni predstavnik ("šef") tvoje ekipe?
2. **Union (Unija):** Spoji dvije ekipe u jednu (šef jedne ekipe postaje podređen šefu druge).

Kako Union-Find rješava MST?

Kruskalov algoritam nam daje najjeftiniju cestu između grada U i V . Moramo odlučiti hoćemo li je graditi.

Logika:

1. Pitamo: `Find(U)` i `Find(V)`. (Tko su im šefovi?)
2. **Slučaj A:** Imaju istog šefa.
 - To znači da su U i V već povezani nekim prijašnjim putem.
 - Dodavanje ove ceste stvorilo bi **ciklus** (krug).
 - **Odluka:** Odbacujemo cestu (nepotreban trošak).
3. **Slučaj B:** Imaju različite šefove.
 - Nisu povezani. Ovo je najjeftiniji način da ih spojimo.
 - **Odluka:** `Union(U, V)` (gradimo cestu i spajamo komponente).

Zašto baš Union-Find?

Mogli bismo koristiti BFS ili DFS da provjerimo postoji li put od U do V , ali...

- **BFS/DFS:** Postaje spor. Za svaku cestu moramo prolaziti kroz graf. Složenost bi bila $O(M \cdot N)$.
- **Union-Find:** Brz.
 - Uz optimizaciju ("Path Compression"), operacije su gotovo trenutačne ($O(1)$ amortizirano).
 - Ukupna složenost Kruskalovog algoritma postaje određena sortiranjem: $O(M \log M)$.

Vizualizacija procesa

Početak: (1) (2) (3) (4) -> Svako je svoj šef.

Korak 1: Spoji 1-2
(1-2) (3) (4) -> 1 je šef za 2.

Korak 2: Spoji 3-4
(1-2) (3-4) -> 3 je šef za 4.

Korak 3: Pokušaj spojiti 1-4

Find(1) -> 1

Find(4) -> 3

Različiti su! Spoji (Unija 1 i 3).

(1-2-3-4) -> Svi su povezani.

```

// Union-Find (DSU) struktura
vector<int> parent, sz;

int find_set(int v) {
    if (v == parent[v]) return v;
    return parent[v] = find_set(parent[v]);
}

void unite_sets(int a, int b) {
    a = find_set(a);
    b = find_set(b);
    if (a != b) {
        if (sz[a] < sz[b]) swap(a, b);
        parent[b] = a;
        sz[a] += sz[b];
    }
}

```

Implementacija: Glavni dio (1/2)

```
int main() {
    int n, m;
    cin >> n >> m;

    vector<Edge> edges(m);
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        cin >> edges[i].u >> edges[i].v >> edges[i].weight;
    }

    // 1. Sortiranje bridova
    sort(edges.begin(), edges.end());

    // 2. Inicijalizacija DSU
    parent.resize(n + 1);
    sz.resize(n + 1, 1);
    for (int i = 1; i <= n; i++) parent[i] = i;

    // ... nastavak na idućem slajdu
```

Implementacija: Glavni dio (2/2)

```
long long total_cost = 0;
int edges_count = 0;

// 3. Kruskalov algoritam
for (const auto& edge : edges) {
    if (find_set(edge.u) != find_set(edge.v)) {
        unite_sets(edge.u, edge.v);
        total_cost += edge.weight;
        edges_count++;
    }
}

// 4. Provjera rješenja
// MST mora imati točno n-1 bridova da bi povezoao n čvorova
if (edges_count == n - 1) {
    cout << total_cost << endl;
} else {
    // Poseban slučaj: n=1 traži 0 bridova,
    // ali za n > 1 ako nemamo n-1 bridova, graf je nepovezan.
    if (n == 1) cout << 0 << endl;
    else cout << "IMPOSSIBLE" << endl;
}

return 0;
}
```

Sažetak rješenja (Road Reparation)

1. **Prepoznaj MST:** Ključne riječi "connect all cities", "minimum cost".
2. **Kruskal:** Sortiraj bridove + Union-Find.
3. **Pazi na tipove:** `long long` za cijenu.
4. **Pazi na nepovezanost:** Provjeri jesu li spojeni svi čvorovi (broj bridova ili veličina komponente).

Road Construction (CSES)

Praćenje komponenata u stvarnom vremenu

Analiza zadatka: Road Construction (2/2)

Definiranje problema: Road Construction

Imamo n gradova i **nema cesta**. Svaki dan gradi se jedna nova cesta (ukupno m dana). Nakon gradnje **svake** ceste moramo ispisati:

1. **Broj komponenata:** Koliko ima odvojenih grupa gradova?
2. **Veličinu najveće komponente:** Koliko gradova ima u najvećoj povezanoj grupi?

Zašto je ovo drugačije od prethodnog?

U "Road Reparation" (MST) nas je zanimalo konačno stanje.

Ovdje nas zanima **stanje nakon svake promjene**. Ovo je problem **dinamičke povezanosti** (samo dodavanje bridova).

Intuicija i praćenje stanja

Počinjemo s N izoliranih gradova.

- **Broj komponenata:** N
- **Najveća komponenta:** 1 (svatko je sam)

Kada dodamo cestu između grada A i grada B :

1. Provjerimo jesu li već povezani (`find(A) == find(B)`).
 - Ako **JESU**: Ništa se ne mijenja. Broj komponenata i veličine ostaju isti.
2. Ako **NISU**:
 - Spajamo ih (`unite`). Dvije grupe postaju jedna.
 - **Broj komponenata**: Smanjuje se za 1.
 - **Veličina**: Nova veličina je `size[A] + size[B]` . Provjerimo je li to novi rekord.

Prilagodba Union-Find (DSU) strukture

Standardni DSU treba malo proširiti. Osim `parent` niza, treba nam:

1. `size[]` **niz:** `size[i]` pamti koliko čvorova ima u podstablu čiji je korijen `i`. Inicijalno je `1` za sve.
2. `num_components` **varijabla:** Inicijalno N . Smanjujemo je kad god uspješno spojimo dva različita skupa.
3. `max_component_size` **varijabla:** Inicijalno 1. Ažuriramo je pri spajanju.

Implementacija: varijable i inicijalizacija (1/2)

Variable

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

// Globalne varijable za DSU i praćenje stanja
vector<int> parent, sz;
int num_components;
int max_component_size = 1;
```

Implementacija: varijable i inicijalizacija (2/2)

Inicijalizacija

```
// Inicijalizacija
void init_dsu(int n) {
    num_components = n;
    max_component_size = 1;
    parent.resize(n + 1);
    sz.resize(n + 1, 1); // Svaka komponenta je veličine 1
    for (int i = 1; i <= n; i++) parent[i] = i;
}

int find_set(int v) {
    if (v == parent[v]) return v;
    return parent[v] = find_set(parent[v]);
}
```

Implementacija: logika spajanja (unite)

Ovo je glavni dio rješenja. Ovdje ažuriramo tražene vrijednosti.

```
void unite_sets(int a, int b) {
    a = find_set(a);
    b = find_set(b);

    if (a != b) {
        // Union by size optimizacija: manje stablo ide pod veće
        if (sz[a] < sz[b]) swap(a, b);

        parent[b] = a;          // Spajamo b pod a
        sz[a] += sz[b];         // Ažuriramo veličinu korijena a

        // Ažuriranje globalnih brojeva
        num_components--;       // Jedna komponenta manje
        max_component_size = max(max_component_size, sz[a]);
    }
}
```

Implementacija: glavni program

```
int main() {
    ios_base::sync_with_stdio(false); // Brzi I/O
    cin.tie(NULL);

    int n, m;
    cin >> n >> m;

    init_dsu(n);

    for (int i = 0; i < m; i++) {
        int u, v;
        cin >> u >> v;

        // Pokušamo spojiti i odmah ažuriramo stanja
        unite_sets(u, v);

        // Nakon svake ceste ispisujemo trenutacno stanje
        cout << num_components << " " << max_component_size << "\n";
    }

    return 0;
}
```


1. **Prepoznavanje:** Zadatak traži praćenje povezanosti i veličine skupova *nakon svakog dodavanja*.
2. **Alat:** Union-Find (DSU) s praćenjem veličine (`size` array).
3. **Logika:**
 - Spajanje različitih skupova \rightarrow `komponente--`.
 - Veličina nove grupe \rightarrow `size[rootA] += size[rootB]`.
4. **Složenost:** $O(M \cdot \alpha(N))$, što je praktički linearno. Vrlo efikasno.

Flight Routes Check (CSES)

Jaka povezanost u usmjerenim grafovima

Analiza Zadatka: Flight Routes Check

Opis problema: Flight Routes Check

Imamo n gradova i m **jednosmjernih** letova.

Moramo provjeriti možemo li od **bilo kojeg** grada doći do **bilo kojeg drugog** grada.

Ključna razlika

U neusmjerenim grafovima (kao "Road Reparation"), dovoljno je pokrenuti DFS/BFS iz jednog čvora i vidjeti jesmo li posjetili sve.

U **usmjerenim** grafovima to nije dovoljno!

- Možda možemo doći iz $1 \rightarrow 2$, ali ne možemo iz $2 \rightarrow 1$.
- Ovo svojstvo zove se **Jaka Povezanost (Strong Connectivity)**.

Strategija: Ideja "Huba"

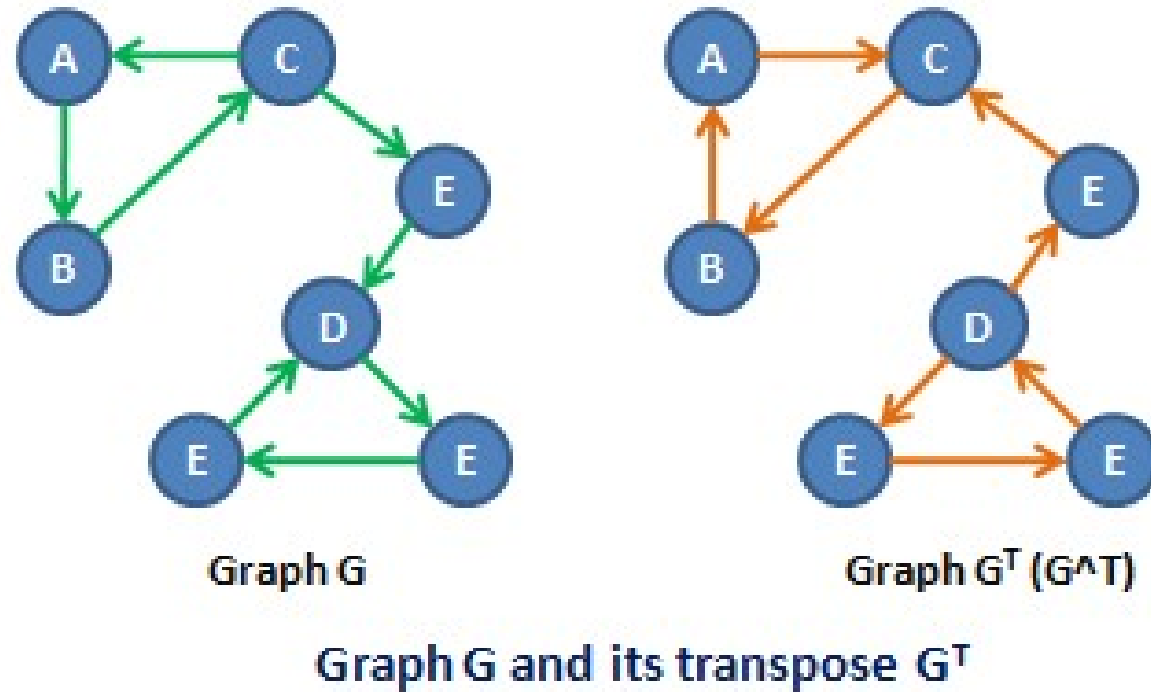
Umjesto da provjeravamo sve parove (presporo $O(N^2)$), odaberimo proizvoljan čvor, npr. **Grad 1**.

Graf je jako povezan ako i samo ako vrijede dva uvjeta:

1. **Iz Grada 1 možemo doći do svih ostalih gradova.**
2. **Iz svih ostalih gradova možemo doći do Grada 1.**

Ako vrijedi oboje, onda put $A \rightarrow B$ izgleda ovako: $A \rightarrow \dots \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow B$.

Algoritam: Dva prolaza (Forward & Backward) (1/2)



Transponirani graf

Izvor: [Transpose graph](#)

Algoritam: Dva prolaza (Forward & Backward) (2/2)

Kako efikasno provjeriti uvjete?

1. **Forward Pass:** Pokreni DFS iz Grada 1 na **originalnom grafu**.

- Ako neki čvor X nije posjećen \rightarrow Ne možemo doći $1 \rightarrow X$.
- **Rješenje:** NO, 1 X .

2. **Backward Pass:** Pokreni DFS iz Grada 1 na **obrnutom (transponiranom) grafu**.

- Obrnuti graf ima sve bridove usmjerene suprotno ($A \rightarrow B$ postaje $B \rightarrow A$).
- Ako u obrnutom grafu dođemo od 1 do Y , to znači da u originalnom postoji put $Y \rightarrow 1$.
- Ako neki čvor Y nije posjećen \rightarrow Ne možemo doći $Y \rightarrow 1$.
- **Rješenje:** NO, Y 1.

Implementacija: Priprema

Trebaju nam dvije liste susjedstva: jedna za pravi smjer, jedna za obrnuti.

```
#include <iostream>
#include <vector>

using namespace std;

const int MAXN = 100005;
vector<int> adj[MAXN];      // Originalni graf
vector<int> adj_rev[MAXN]; // Obrnuti graf
bool visited[MAXN];
int n;

void dfs(int u, vector<int> graph[]) {
    visited[u] = true;
    for (int v : graph[u]) {
        if (!visited[v]) dfs(v, graph);
    }
}
```

Implementacija: Glavna logika

```
int main() {
    int m;
    cin >> n >> m;
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        int u, v; cin >> u >> v;
        adj[u].push_back(v);    // Brid u pravom smjeru
        adj_rev[v].push_back(u); // Brid u obrnutom smjeru
    }

    // 1. FORWARD PASS (Provjera 1 -> Svi)
    dfs(1, adj);
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        if (!visited[i]) {
            cout << "NO\n1 " << i << endl; // Nismo mogli doći do i
            return 0;
        }
    }
    // ... nastavlja se
```


Implementacija: Drugi prolaz

```
// Resetiramo visited niz
for (int i = 1; i <= n; i++) visited[i] = false;

// 2. BACKWARD PASS (Provjera Svi -> 1)
// DFS na obrnutom grafu iz 1 simulira traženje tko sve može doći do 1
dfs(1, adj_rev);

for (int i = 1; i <= n; i++) {
    if (!visited[i]) {
        cout << "NO\n" << i << " 1" << endl; // i ne može doći do 1
        return 0;
    }
}

cout << "YES" << endl;
return 0;
}
```

Sažetak rješenja: Flight Routes Check

1. **Jaka povezanost:** U usmjerenom grafu svatko mora moći do svakoga.
2. **Trik s obrnutim grafom:**
 - Provjeri $1 \rightarrow \text{svi}$ (običan DFS).
 - Provjeri $\text{svi} \rightarrow 1$ (DFS na grafu s obrnutim bridovima).
3. **Kontraprimjer:** Prvi neposjećeni čvor u bilo kojem prolazu daje nam odgovor "NO" i par gradova koji nisu povezani.
4. **Složenost:** $O(N + M)$ - dva linearna prolaza.

Sažetak i zaključak

Što smo danas naučili?

Pregled algoritama

1. Floyd-Warshall

- **Što radi:** Najkraći putevi između *svih* parova čvorova.
- **Kada koristiti:** Mali grafovi ($N \leq 400$), gusti grafovi, negativne težine (bez ciklusa).
- **Složenost:** $O(N^3)$.

2. MST (Minimalno Razapinjuće Stablo)

- **Što radi:** Povezuje sve čvorove uz minimalnu cijenu.
- **Algoritmi:**
 - **Kruskal:** Sortiraj bridove + Union-Find.
 - **Prim:** Priority Queue (slično Dijkstri).
- **Složenost:** $O(M \log M)$ ili $O(M \log N)$.

Union-Find (DSU)

Naučili smo da je **DSU** (Disjoint Set Union) ključan alat za mnoge probleme s grafovima, ne samo za MST.

Primjene:

1. **Kruskalov algoritam:** Detekcija ciklusa pri gradnji stabla.
2. **Praćenje komponentata:** Brojanje otoka, veličine grupa u stvarnom vremenu ("Road Construction").
3. **Dinamička povezanost:** Brzo odgovaranje na upit "jesu li A i B povezani?".

Ključne napomene

Prilikom rješavanja zadatka, obratite pažnju na sljedeće:

1. Ograničenja (N):

- $N \leq 400 \rightarrow$ Vjerojatno **Floyd-Warshall**.
- $N \leq 10^5 \rightarrow$ Vjerojatno **BFS/DFS, Dijkstra, Kruskal**.

2. **Tipovi podataka:** Suma težina u MST-u često prelazi `int`. Koristite `long long`!

3. Vrsta grafa:

- **Neusmjeren:** Povezanost se lako provjerava BFS-om ili DSU-om.
- **Usmjeren:** Za jaku povezanost trebate **2x DFS** (pravi i obrnuti graf).

4. Zadaci za samostalnu vježbu

Codeforces

Do sada bi trebali moći riješiti većinu zadataka sa tagom `graphs` ili `dfs and similar` ili `shortest paths` do težine `1200`.

- **DZY Loves Bridges** (Problem 445B): Brojanje povezanih komponentata i primjena Kruskalovog principa za spajanje uz minimalan trošak.
- **Edgy Trees** (Problem 1131C): Ne radi se direktno o MST-u, ali ideja spajanja komponentata i brojanja je slična.