Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное

образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Национальный исследовательский университет

«Высшая школа экономики»

Курсовая работа на тему:

«*Создание визуальных демонстраций для учебных математических курсов: статических чертежей, анимационных роликов, интернет - приложений»*

Факультет компьютерных наук

Бакалаврская программа «Прикладная математика и информатика»

Выполнила студентка 302 группы
Кушнир И.В.

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент,
Никитин А.А.

Оценка: _______ ___________

Москва
2015 год

Содержание

1. Введение. Необходимость видеть

Визуальное представление информации обеспечивает лучшее понимание и запоминание материала благодаря зрительной памяти человека, которая, как правило, развита сильнее других видов памяти.

В педагогике часто используется демонстрация каких-либо явлений, процессов, примеров; в частности, в методике преподавания точных наук наглядное представление оказывает значительную помощь в объяснении математических процессов. При переводе вербальной и письменной информации в образную используются такие методы визуализации как: диаграммы, графы, блок-схемы, таблицы, 2 и 3-мерные графики, анимация и др.

Можно отметить следующие преимущества визуального представления учебного материала:

- наглядное представление обеспечивает лучшее понимание и рождение ассоциаций;

- визуальные модели помогают развивать фантазию и пространственное мышление;

- графики, чертежи и схемы быстрее и качественнее запоминаются и воспроизводятся в памяти, нежели формулы;

- цветные (и анимационные) изображения привлекают внимание человека на подсознательном уровне.

Таким образом, в преподавании точных наук графические изображения являются полезным инструментом для демонстрации и объяснения математических и геометрических задач.

Целью данной курсовой работы является создание визуальных демонстраций учебного материала по темам математического анализа для старшеклассников и студентов начальных курсов.

2. VisualMath. Решаемые задачи

На сегодняшний день для обучения используется множество цифровых технологий, преподаватель может дополнить свой урок демонстрацией слайдов, работой с онлайн-ресурсами и веб-приложениями.
Исходя из этого, группой VisualMath под руководством Никитина А.А. была разработана и реализована идея о создании веб-ресурса для преподавателей (математического анализа), с помощью которого можно было бы демонстрировать учащимся математические графики и чертежи, как стационарные, так и динамические и анимационные. Это стало первой и основной задачей проекта VisualMath.
JavaScript
Для работы с веб-браузером и написании программ для веб-ресурса мною были изучены методы создания веб-страниц в html и основы языка программирования JavaScript. Ресурсом послужили различные сайты и учебники по изучению языка.

JSXGraph и Skeleton

Для отображения анимированных графиков в веб-браузере как правило используется библиотека JSXGraph на JavaScript, которая обладает широким спектром возможностей для визуализации математических и геометрических чертежей, однако помимо многих достоинств у этой библиотеки есть очень существенный недостаток. Стремление разработчиков библиотеки сделать код как можно более компактным превратило написание кода в «кошмар для новичка». Код какого-либо графика будет выглядеть примерно следующим образом:

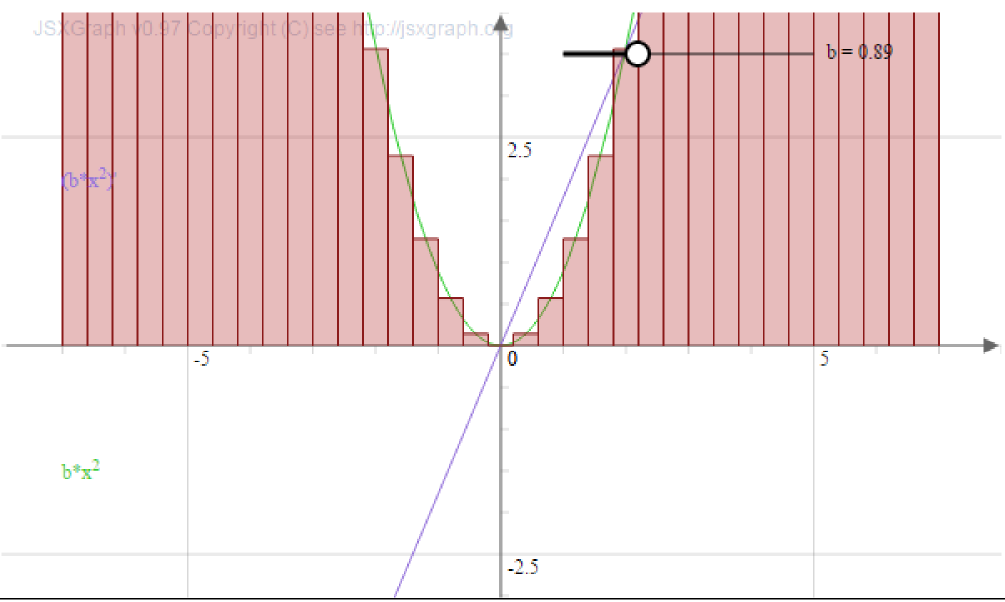
```
brd.create('text',[-6,-3,function(){ return 'Sum='
+(JXG.Math.Numerics.riemannsum(f,s.Value(),document.
getElementById('sumtype').value,a.Value(),b.Value())).toFixed(4); }]);
```

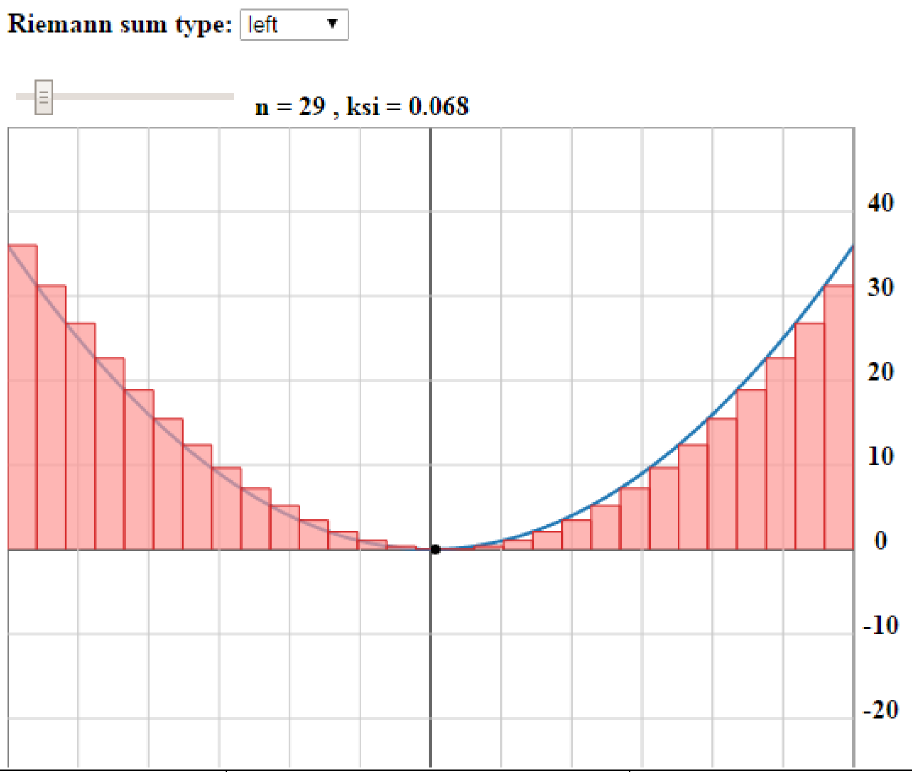
Даже опытный специалист не сумеет за короткие сроки разобраться в создании графика из-за неочевидности семантики функций библиотеки JSXGraph, хотя весь код может занимать несколько строк.

Таким образом, у группы VisualMath появилась вторая задача – написание принципиально новых библиотек для визуализации графиков, которые обладали бы не меньшим (большим) количеством возможностей и при этом описывались простыми структурами.

Двумя членами группы VisualMath были написаны две библиотеки: для 2D и 3D визуализации. Библиотека Skeleton, методы которой я применяла в своей курсовой работе, занимается первым типом визуализации. В данной библиотеке мною был написан ряд программ, которые визуализируют примеры по темам математического анализа на 2 курсе бакалавриата.

Сравнительный анализ графиков одного и того же примера, написанных в JSXGraph и Skeleton, показал следующее:

	График
JSXGraph	

<table>
<tr><td>Skeleton</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Сравнение</td><td>(1)JSXGraph</td><td>(2)Skeleton</td></tr>
<tr><td>- визуальное (график):</td><td colspan="2">- у 1 немного быстрее ползунок
- у 1 есть подписи графиков
- у 2 устойчивее график, не «зависает», не «глючит», не мерцает в отличие от 1.
- у 2 больше спектр цветов, цвета ярче
- у 2 есть автоматическое плавное приближение и удаление колесом мыши
- у 2 более правильное построение функций с «проблемными» точками (в которых функция не существует и т.д.)</td></tr>
<tr><td>- техническое (код):</td><td colspan="2">- у 1 код значительно короче
- у 2 код более структурирован, график строится с применением простых общеизвестных структур: циклы for,while; if-else и др.
- у 2 структура кода совершает пошаговая, специальные функции описаны «очевидно», что позволяет разобраться в действии функции без дополнительной литературы и часто даже без комментариев.</td></tr>
</table>

Работа над библиотекой и над графиками для веб-ресурса продолжается в настоящее время, однако уже можно говорить о том, что группа VisualMath выполняет поставленные задачи.

3.Библиотека Skeleton. Методы визуализации

Моей задачей было изучение методов библиотеки Skeleton для построения графиков по нескольким темам математического анализа. В ходе работы над визуализацией были выявлены ошибки и недостатки библиотеки, которые позволили внести исправления и дополнения в текущую версию Skeleton'а.

Были изучены и применены следующие основные инструменты библиотеки:

3.1. Статические методы

- Построение пустого графика P1 с автоматическим приближение/удалением, с контролем правой, левой, нижней, верхней границами графика относительно веб-страницы:

```
var P1 = new Plotter("plot1",{left:-4, right:4, top:6, bottom:-6, height:350, width:500});
P1.draw();
```

- Построение функции на графике при определённых опциях – параметрах графика:

```
var f = P1.addFunc( function(x) {
  return x*Math.abs(x)/2 ;
}, options );
```

- Введение опций для построения какого-либо графика: right< x <left, bottom< y <top, strokeWidth и color –толщина графика и его цвет

```
var options = {
left: -2,
right: 2,
top: 1,
bottom: -1,
strokeWidth:1.5,
color:3
};
```

- Удаление одной функции на графике и удаление всего графика:

```
P1.remove(func)
P1.removeAll();
```

- Добавление области по точкам – квадрат с параметрами: strokeWidth и color – толщина линии контура и цвет, fillOpacity и fill – плотность цвета заливки и номер цвета заливки.

```
var arr = [];
   arr.push({x: 1, y: 0});
   arr.push({x: 1, y: 1});
   arr.push({x: 2, y: 1});
   arr.push({x: 2, y: 0});
   arr.push({x: 1, y: 0});
var area = P1.addArea(arr, {strokeWidth: 1, color: 6, fillOpacity: 0.7, fill: 7});
```

- Построение на графике одной точки с координатами (2,3) и опциями с описанием цвета точки, толщины.

```
var p = plot.addPoint( 2, 3, options);
```

3.2. Динамические методы

- Создание контейнера – структуры, позволяющей рисовать больше одного графика на странице. Первая строка – создание контейнера, вторая строка – добавление в него двух графиков, третья – подключение динамических опций app.Controls:

```
var container = new PlotContainer("plot");

var P1 = container.addPlot({left:-6, right:6, top:50, bottom:-50, height:500, width:500});
var P2 = container.addPlot({left:-3, right:3, top:6, bottom:-0.5, height:350, width:500});

//подключение динамических опций:
var controls = new app.Controls(container.addEmptyDiv());

var func1 = P1.addFunc( function(x) {
  return -2*x-1;
}, { left: -3, right: -1, top: 6, bottom: -0.5, strokeWidth:1.5, color: 1 } );

var func2 = P2.addFunc( function(x) {
  return Math.pow(x,2);
}, { left: -1, right: 2, top: 6, bottom: -0.5, strokeWidth:1.5, color: 2 });
```

- Создание кнопки, по нажатию которой меняется график с функции y = x на $y = x^2$ и обратно:

```
var func = P1.addFunc( function(x) {
   return x;
 }, { left: -4, right: 0, top: 6, bottom: -6, strokeWidth:1.5} );
var range;
// при нажатии кнопки вместо графика y=x появляется график y=x^2
function changeButton1() {
    P1.remove(func);
    func = P1.addFunc( function(x) {
        return Math.pow(x,2);
    }, { left: 0, right: 4, top: 6, bottom: -6, strokeWidth:1.5, color: 2 });

   //если кнопка уже была построена, то она сотрётся, и построится другая
   if (range) {
    range.remove();
  }
  range = controls.addButton( changeButton2, " Показать y = x ");
 }

function changeButton2() {
  P1.remove(func);
  func = P1.addFunc( function(x) {
      return x;
  }, { left: -4, right: 0, top: 6, bottom: -6, strokeWidth:1.5} );
  if (range) {
    range.remove();
  }
  range = controls.addButton( changeButton1, " Показать y = x ");
 }
 range = controls.addButton( changeButton1, " Показать y = x^2 ");
```

- Создание ползунка, с передвижением которого меняется значение, и в зависимости от этого изменяется и функция:

```
//строится функция
var func = plot.addFunc(function (x) {
   return x;
});

//функция меняется с ползунком, который меняет значение value
function changeRange (value) {
   range.setText(text + value);
   plot.remove(func);
   func = plot.addFunc(function (x) {
       return value*x;
```

```
   });
}

var text = "Коэффициент a: ";
//построение ползунка, который подписан text + изначальное значение
//затем два значение-диапазон изменения value, 0.01-шаг изменения value,
//последнее значение 1 - изначальная позиция-значение value :
var range = controls.addRange(changeRange, text + "1", -1, 1, 0.01, 1);
```

- Создание анимации – один график плавно сменяется другим, и процесс продолжается снова и снова:

```
var P2 = new Plotter('plot', {
  left: -4, right: 4, top: 6, bottom: -6, height: 350, width: 500
});

var func;

function createFunctions() {
  func = P2.addFunc(function (x) {
    return x ;
  }, {left: -4, right: -2, top: 6, bottom: -6, strokeWidth: 2});
}
//число-время интервала между повтором анимации
var maxRepeats = Number.POSITIVE_INFINITY;
var count = 0;
if (maxRepeats > 0) {
  var repeat = setInterval(function animate() {

    P2.removeAll();
    createFunctions();
    //процесс анимации от функции  y=x к функции y=x^3
    func
      .moveTo(function (x) {
        return Math.pow(x, 3);
      },
      {
        delay: 2000,
        duration: 2000
      });

    if (++count === maxRepeats) {
      clearInterval(repeat);
    }
```

```
    if (maxRepeats > 1 && count === 1) {
      clearInterval(repeat);
      repeat = setInterval(animate, 6000);
    }
  }, 0);
} else {
  createFunctions();
}
```

4. Результаты. Графики

Были построены графики примеров по трём темам математического анализа [1]:

4.1. Интегральные суммы Римана

Пример№1

Пусть на сегменте [a,b] определена непрерывная функция f. Рассматривается разбиение отрезка a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n−1 < x_n = b.
Таким образом, [a,b] разбивается на n отрезков вида [x_i−1 , x_i] , i=1..n, с длиной отрезка соответственно Δx_i = x_i - x_{i-1}.

Сумма

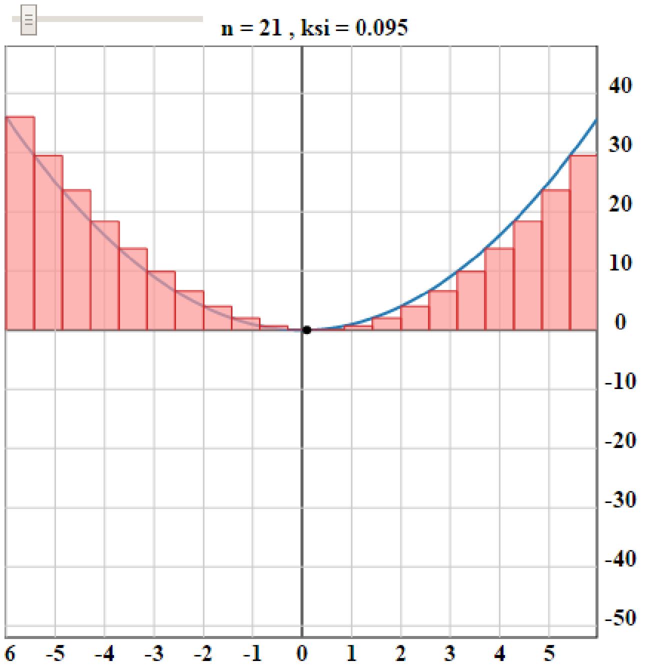
$$S(f,\xi_i) = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

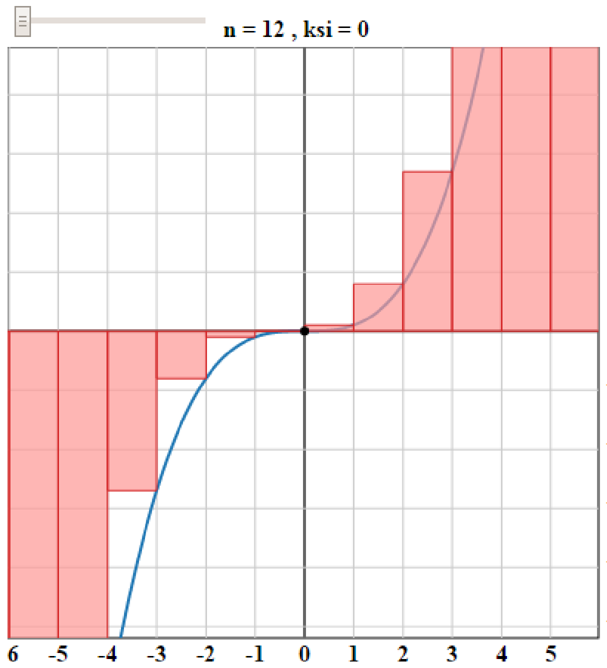
, где ξ_i∈[a,b], называется **интегральной суммой** функции f на [a, b].

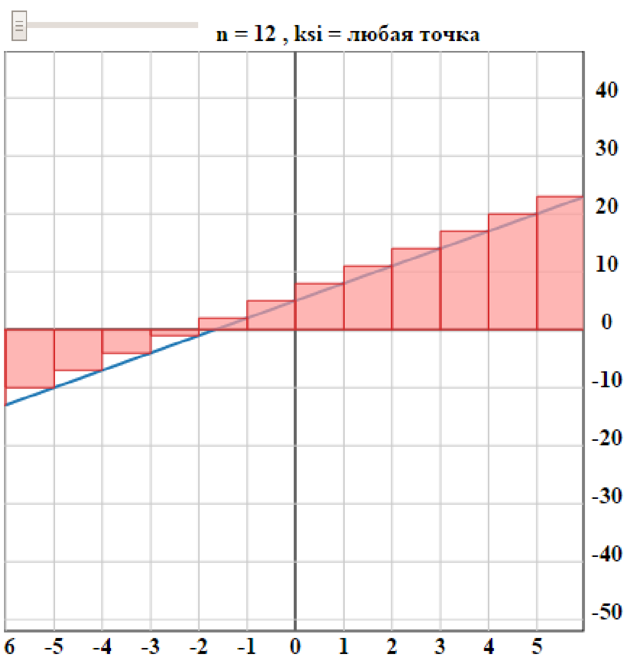
Геометрический смысл формулы - сумма площадей n прямоугольников со стороной Δx_i и высотой f(ξ_i), и чем меньше диаметр разбиения dτ, тем "ближе" площадь получившейся ступенчатой фигуры к площади фигуры, ограниченной графиком функции f(x) и прямыми x = a и x = b.
Если ξ_i=x_{i-1} для всех i, то S называется **левой суммой Римана**, если ξ_i=x_i для всех i, то S называется **правой суммой Римана**, если $\xi_i = 12(x_i + x_{i-1})$ для всех i, то – **средней суммой Римана**.
Погрешность для формул правых и левых прямоугольников составляет $E(f) = f'(\xi)2n(b-a)^2$, для формулы средних прямоугольников - $E(f) = f''(\xi)24n(b-a)^3$.
Таким образом, погрешности зависят от производной функции в некой точке ξ, обозначенной на графике ниже.
Иллюстрация примеров:

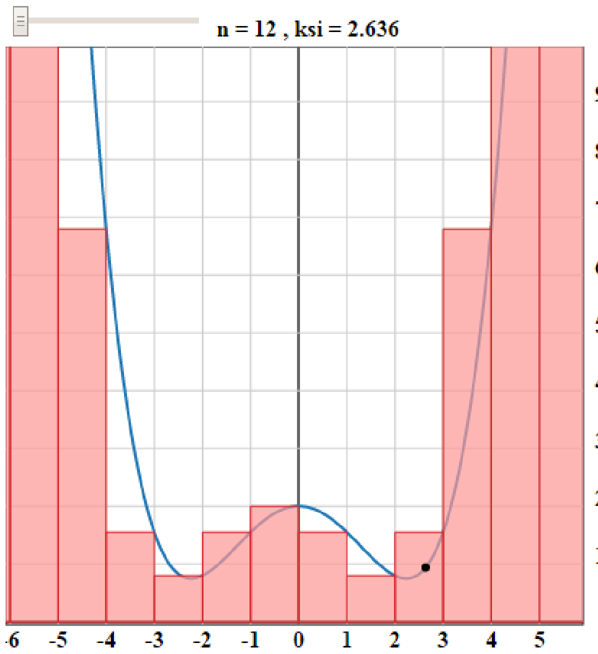
- ***а)*** f(x)=x^2
- ***б)*** f(x)=5+3x
- ***в)*** f(x)=x^3
- ***г)*** f(x)=$0.5x^4 - 5x^2 + 20$

Riemann sum type: left









Пример№2

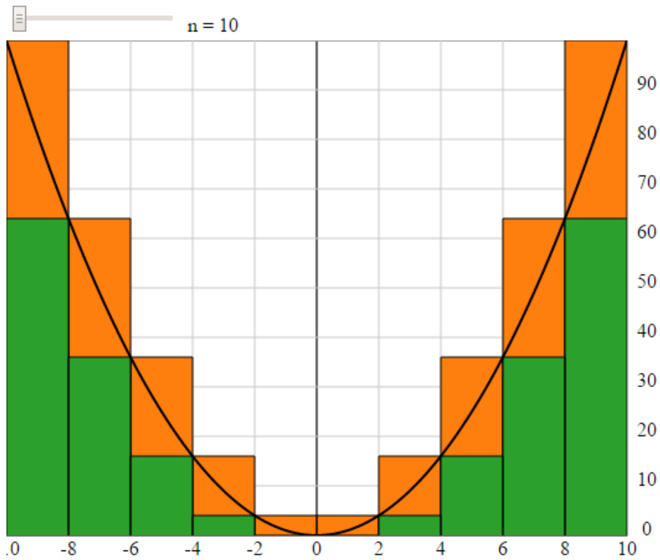
Пусть функция f(x) ограничена на отрезке [a,b]. В этом случае функция также ограничена на любом отрезке $[\, x_{i-1} \,,\, x_i]$, а значит, $\exists\ \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = M_i$ и $\exists\ \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = m_i$. **Верхней суммой Дарбу** и **нижней суммой Дарбу** называют соответственно:

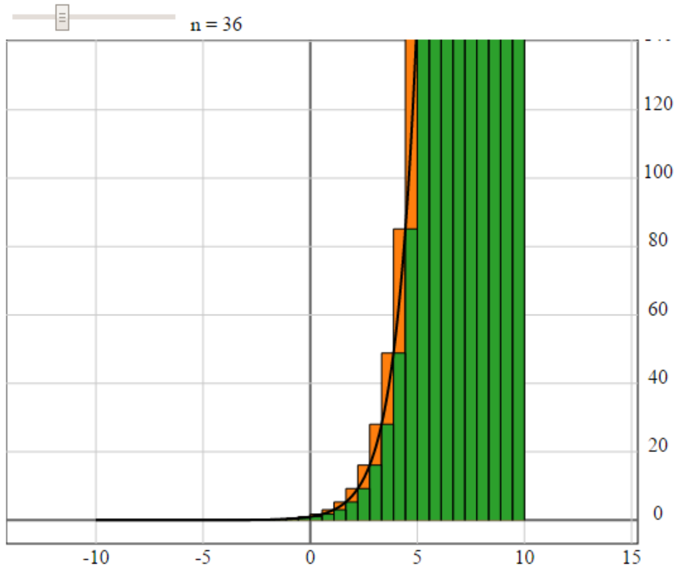
$$\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \overline{S_\tau}(f) \text{ и } \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \underline{S_\tau}(f)$$

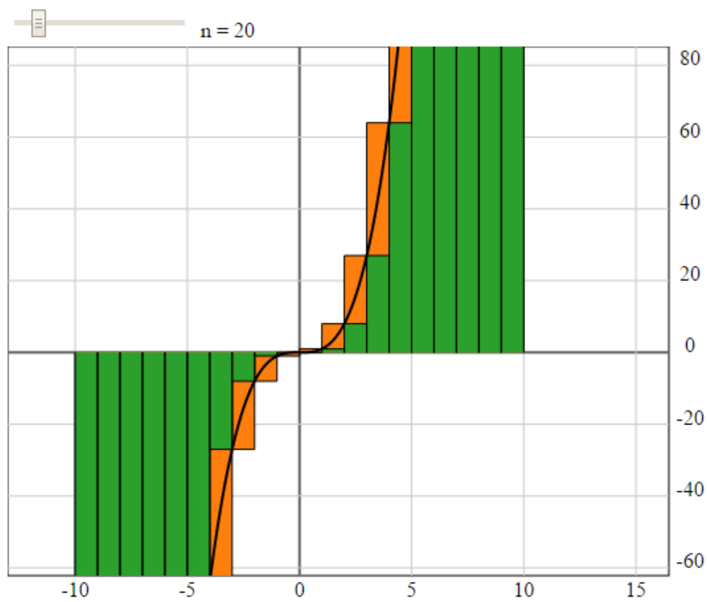
Геометрический смысл формул – сумма площадей n прямоугольников со стороной Δx_i и высотой M_i (или m_i) , и чем меньше диаметр разбиения $d\tau = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$, тем "ближе" площадь получившейся ступенчатой фигуры к площади фигуры, ограниченной графиком функции f(x) и прямыми x = a и x = b.

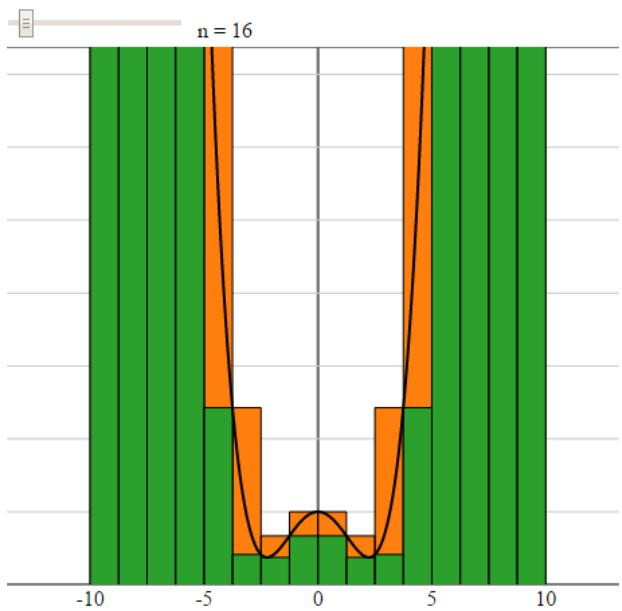
Примеры: (Розовым цветом показана иллюстрация верхней суммы Дарбу, оранжевым - нижней суммы Дарбу)

- ***а)*** f(x)=x^2 *на [a, b] = [-10, 10]*
- ***б)*** f(x)=e^x
- ***в)*** f(x)=x^3
- ***г)*** f(x)=$0.5x^4 - 5x^2 + 20$







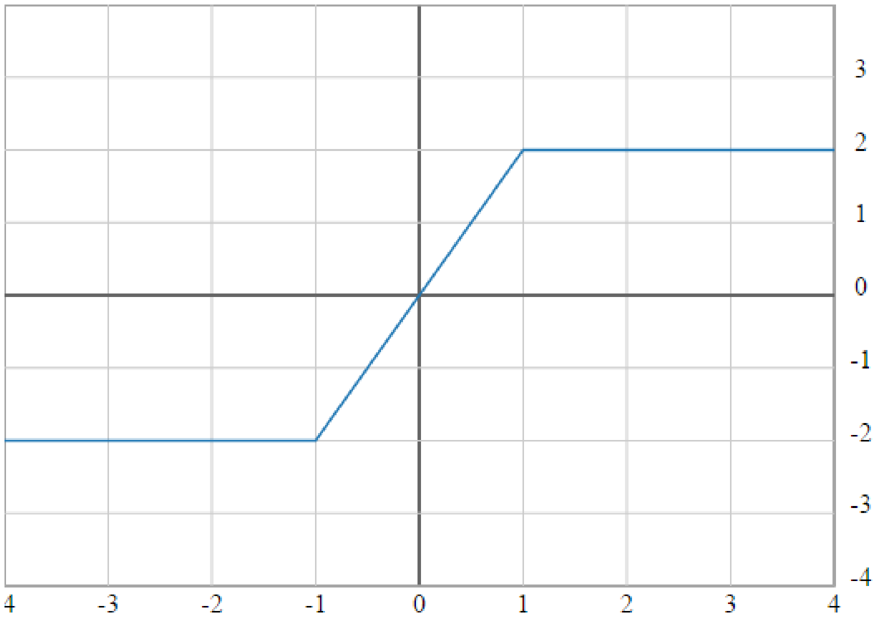


4.2. Неопределённый интеграл. Динамическое склеивание констант

Пример№1

Вычислить интеграл $\int(|1+x|-|1-x|)dx$

Изображение подынтегральной функции:



Далее,

$$(|\,1+x\,|-|\,1-x\,|)dx=\begin{cases}-1-x-(1-x), x\le -1\\ 1+x-(1-x), -1<x\le 1\Rightarrow\\ 1+x-(-1+x), x>1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \int(|\,1+x\,|-|\,1-x\,|)dx=\begin{cases}-\int 2dx=-2x+C_1\,, x\le -1\\ \int 2xdx=x_2+C, -1<x\le 1\\ \int 2dx=2x+C_2, x>1\end{cases}$$

Для непрерывности первообразной в точках -1, 1 должны выполняться следующие равенства:

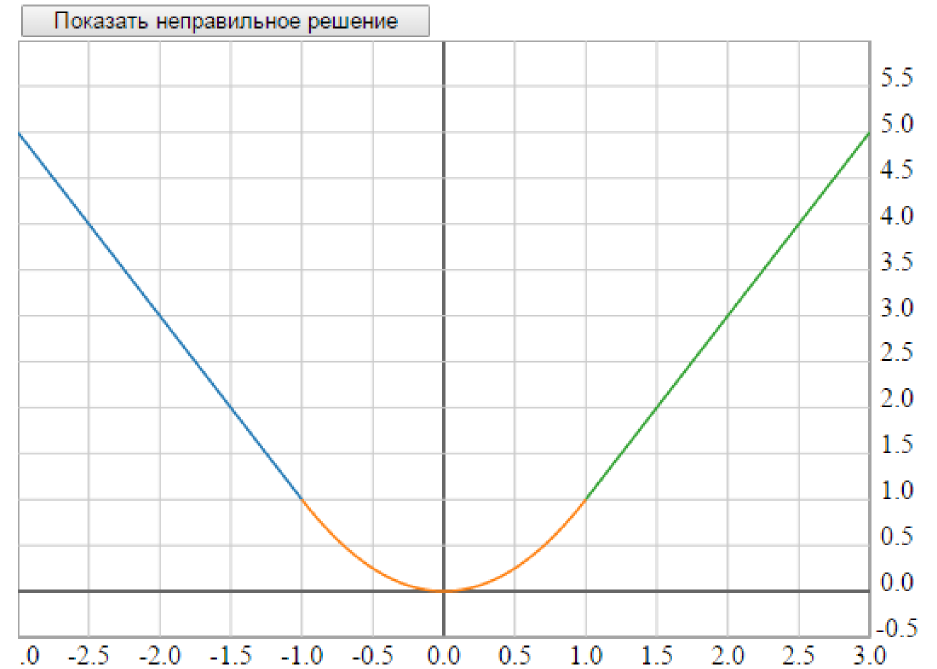
$$F(-1-0)=F(-1+0)\Longleftrightarrow 2+C_1=1+C\Longleftrightarrow C_1=C-1,$$

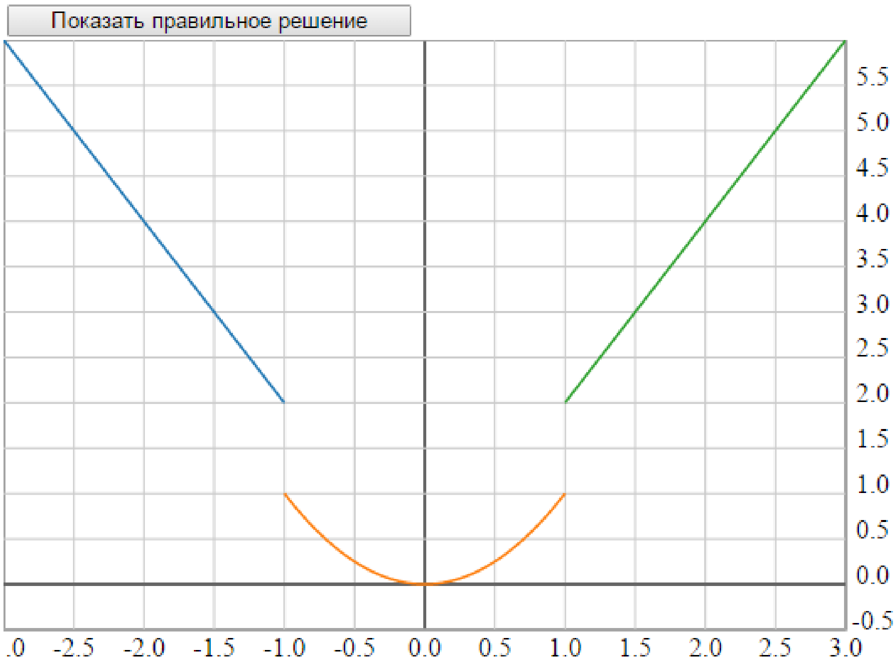
$$F(1-0)=F(1+0)\Longleftrightarrow 1+C=2+C_2\Longleftrightarrow C_2=C-1,$$

Поэтому, окончательно:

$$\int(|\,1+x\,|-|\,1-x\,|)dx=\begin{cases}-2x-1+C\,, x\le -1\\ x^2+C, -1<x\le 1\\ 2x-1+C, x>1\end{cases}$$

Изобразим окончательный график первообразной при C = 0.

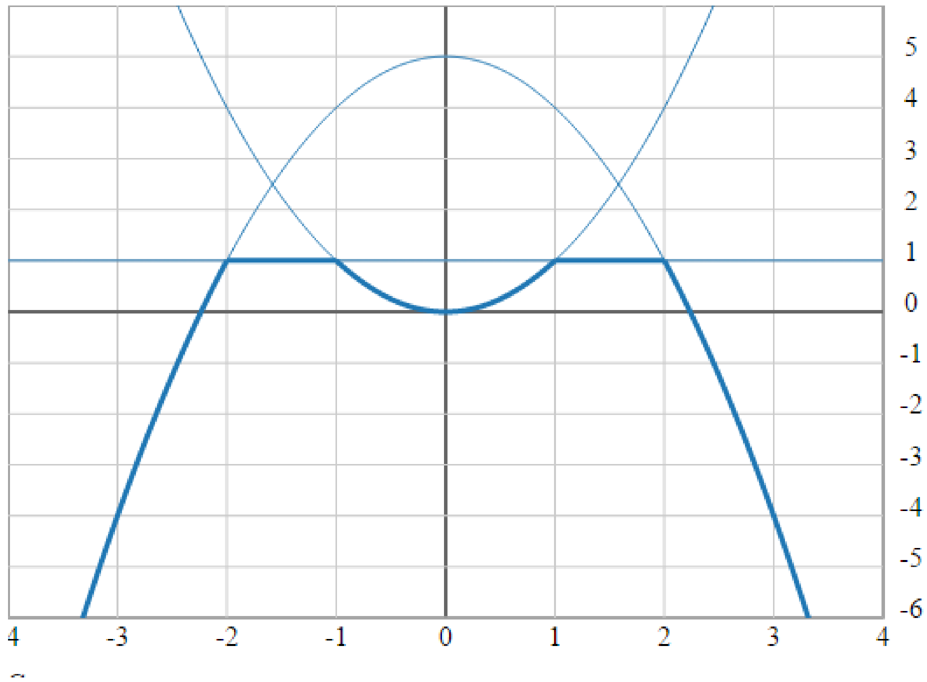




Пример№2

Вычислить интеграл: $\int \min\{5 - x2; 1; x2\}dx$

Решение: Сначала изобразим входящие в подынтегральное выражение функции. Жирной линией выделена подынтегральная функция:



Следовательно,

$$\min\{5{-}x2;1;x2\}=\begin{cases} 5-x^2, x<-2 \\ 1, -2\le x<-1 \\ x^2, -1\le x<1 \\ 1, 1\le x<2 \\ 5-x^2,, x\ge 2 \end{cases} \Rightarrow \int \min\{5-x2;1;x2\}dx \ =\begin{cases} 5x-\frac{x^3}{3}+C_1, x<-2 \\ x+C_2, -2\le x<-1 \\ \frac{x^3}{3}+C, -1\le x<1 \\ x+C_3, 1\le x<2 \\ 5x-\frac{x^3}{3}+C_4, x\ge 2 \end{cases}$$

Для непрерывности первообразной в точках -2, -1, 1, 2 должны выполняться следующие равенства:

$$F(-2-0)=F(-2+0) \Longleftrightarrow -10+\frac{8}{3}+C_1=-2+C_2 \Rightarrow C_1=\frac{16}{3}+C_2,$$

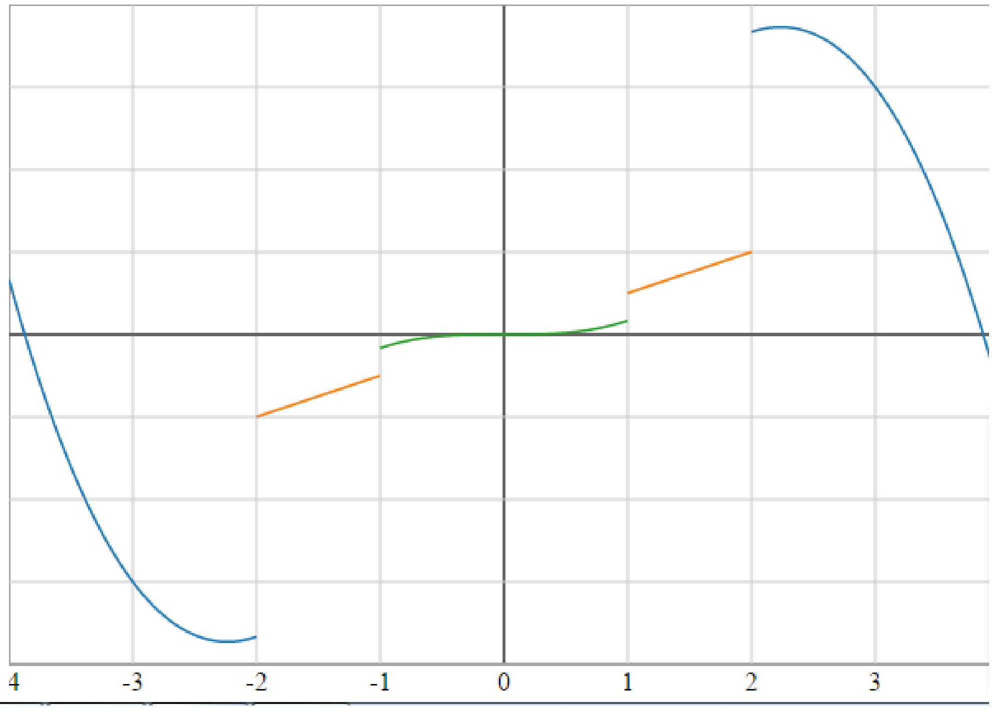
$$F(-1-0)=F(-1+0) \Longleftrightarrow -1+C_2=-\frac{1}{3}+C \Rightarrow C_2=\frac{2}{3}+C \Rightarrow C_1=6+C,$$

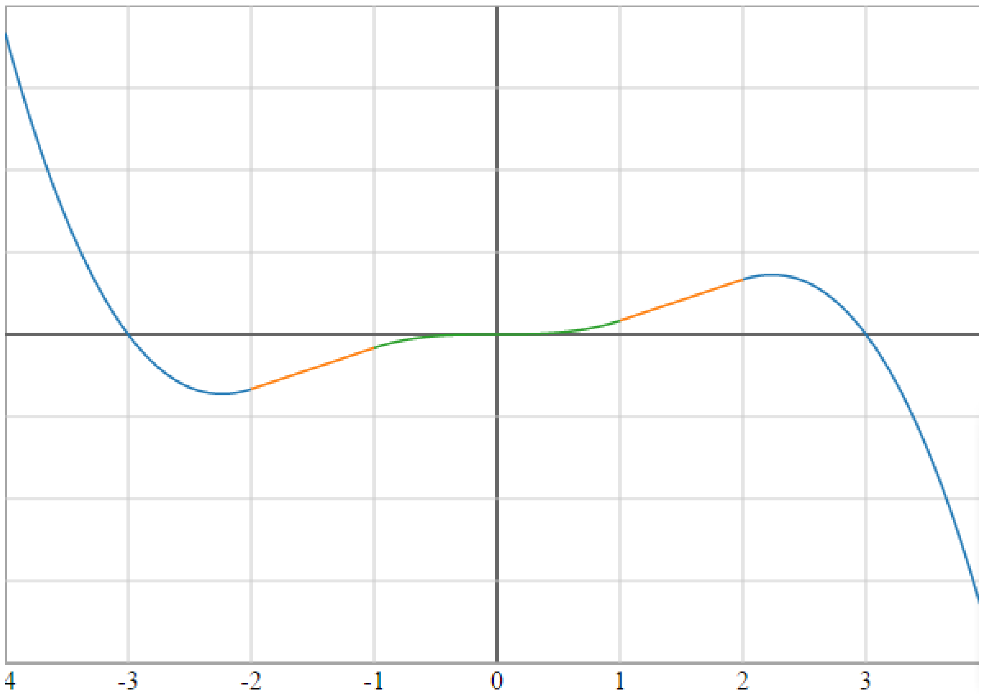
$$F(1-0)=F(1+0) \Longleftrightarrow 1+C_3=\frac{1}{3}+C \Rightarrow C_3=-\frac{2}{3}+C,$$

$$F(2-0)=F(2+0) \Longleftrightarrow 2+C_3=10-\frac{8}{3}+C_4 \Rightarrow C_4=-6+C,$$

Поэтому, окончательно $\int \min\{5-x2;1;x2\}dx \ =\begin{cases} 5x-\frac{x^3}{3}+6+C, x<-2 \\ x+\frac{2}{3}+C, -2\le x<-1 \\ \frac{x^3}{3}+C, -1\le x<1 \\ x-\frac{2}{3}+C, 1\le x<2 \\ 5x-\frac{x^3}{3}-6+C, x\ge 2 \end{cases}$

Изобразим окончательный график первообразной при C = 0. Неправильное решение динамически меняется на правильное:

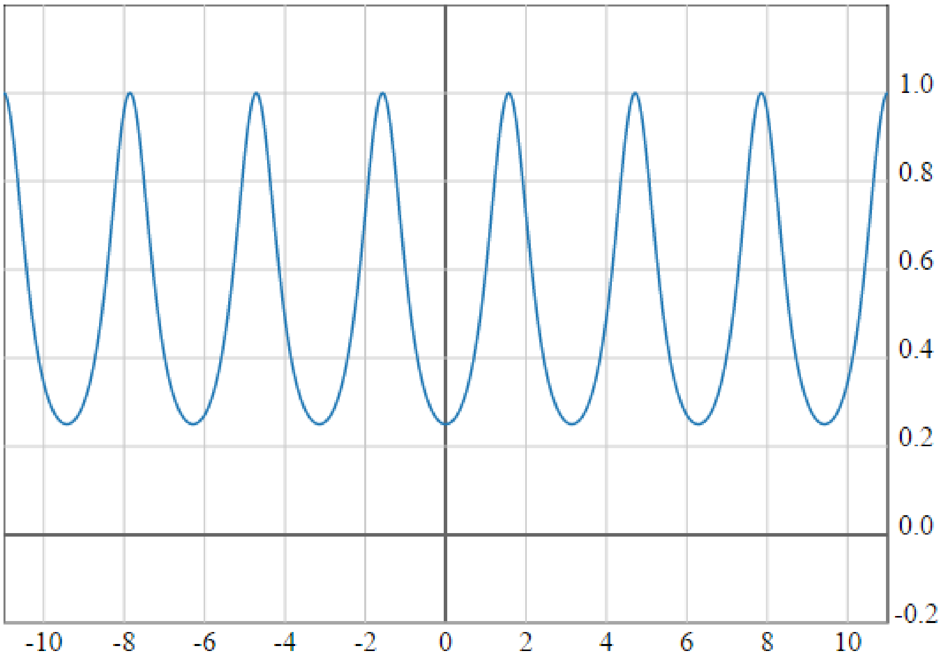




Пример№3

Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}, x \in R$

Решение: Сначала изобразим график подынтегрального выражения.



Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2} = \int \frac{\frac{1}{cox^4 x} dx}{(tg^2 x + 2)^2} = \int \frac{tg^2 x + 1}{(tg^2 x + 2)^2} d(tgx)$$
$$= \left\{t = tgx, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right\} =$$

$$= \int \frac{t^2 + 1}{(t^2 + 2)^2} dt = \frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^2 + 2} - \frac{t}{4(t^2 + 2)} = \frac{3}{4\sqrt{2}} arctg\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - \frac{t}{4(t^2 + 2)} + C =$$

$$=\{t = tg\ x\} = \frac{3}{4\sqrt{2}} arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right) - \frac{tgx}{4(tg^2 x + 2)} + C$$

Очевидно, что данный ответ не является верным, так как во-первых, получился график разрывной функции, и во-вторых, периодической функции.

Первообразная же для интеграла $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}$ необходимо должна быть непрерывной и возрастать (т.к. F′(x) = f(x) > 0).

Неверный ответ получаем в силу того, что подстановка t=tgx справедлива только для $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. Постараемся исправить ситуацию.

Запишем полученную первообразную F в виде:

$$F(x) = \frac{3}{4\sqrt{2}} arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right) - \frac{tgx}{4(tg^2 x + 2)} + C_n, \text{где} -\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$$

"Склеим константы" C_n в точках $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Для этого приравняем левый и правый пределы первообразной в этих точках:

$$F\left(\frac{\pi}{2} + \pi n - 0\right) = F\left(\frac{\pi}{2} + \pi n + 0\right) \Longleftrightarrow \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} + C_n = -\frac{3\pi}{8\sqrt{2}} + C_{n+1}.$$

Откуда получаем

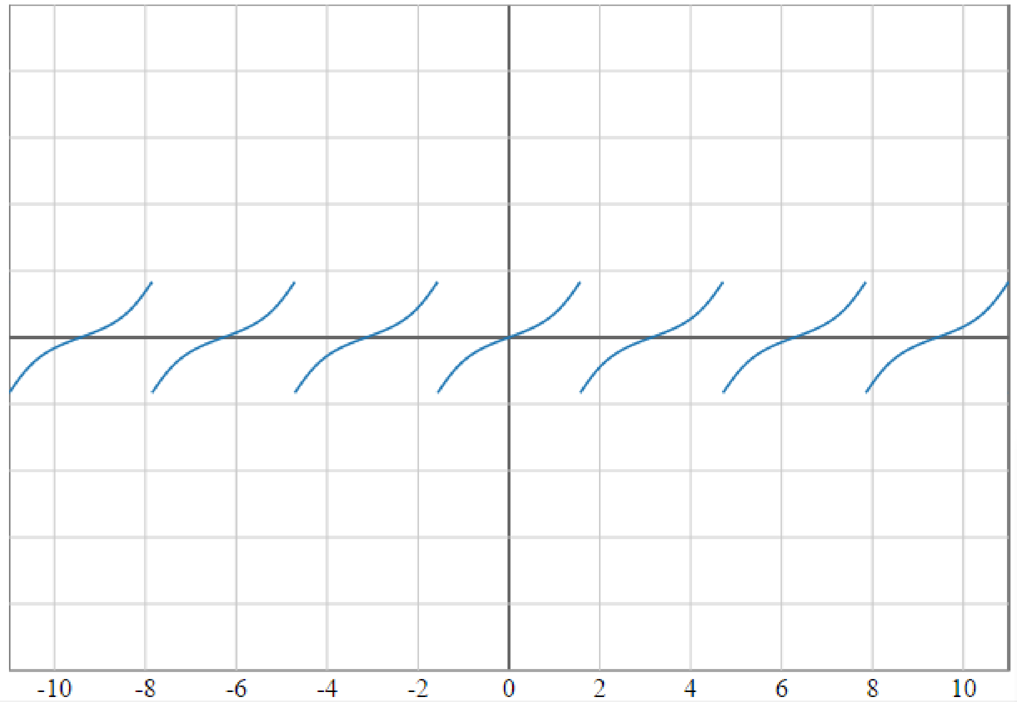
$$C_{n+1} = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} + C_n \Rightarrow C_n = \frac{3\pi n}{4\sqrt{2}} + C_0.$$

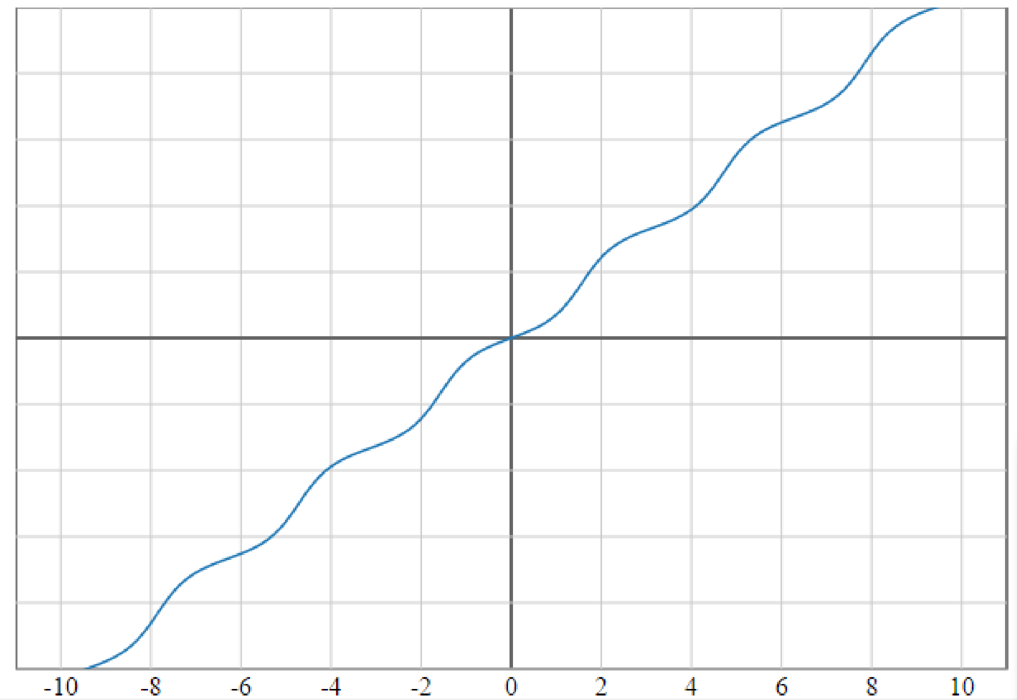
Далее, т.к.$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n,$ то $n < \frac{2x+\pi}{2\pi} < n + 1.$
Следовательно, $n = \left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right]$ и окончательный ответ имеет вид:

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2} = \frac{3}{4\sqrt{2}} arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right) - \frac{tgx}{4(tg^2x + 2)} + \frac{3}{4\sqrt{2}}\left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right] + C_0$$

Изобразим график полученной правильной первообразной при $C_0 = 0$.

График неправильного решения динамически переходит в график правильного решения:





4.3. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов

Пример№1

Простейшие признаки сравнения:

Первый признак сравнения: Пусть $\forall x \in [a, +\infty) \Rightarrow \mid f(x) \mid \leq g(x)$. Тогда если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится (далее сходимость будет обозначаться как $\rightarrow$).

Второй признак сравнения: Пусть $f(x), g(x) \geq 0$ и $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = k$. Тогда:

1.Если $0 < k < +\infty$, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx \rightarrow \Leftarrow\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx \rightarrow$.

2.Если k=0 , то $\int_a^{+\infty} g(x)dx \rightarrow \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \rightarrow$.

3.Если k=+∞ , то $\int_a^{+\infty} g(x)dx \nrightarrow \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \nrightarrow$.

Признак сравнения Дирихле:

Пусть выполняются следующие условия:

1)Функция f(x) непрерывна, и её первообразная ограниченна, т.е. $|F(x)| \leq k$;

2)g(x) непрерывно-дифференцируема и монотонна;

3)$g(x)\rightarrow 0$ при $x\rightarrow+\infty$. Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)f(x)dx$ сходится.

Данные признаки опираются на тот факт, что у нас уже есть некоторый интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, про который известно, сходится он или нет. Поэтому найдём следующие несобственные интегралы I рода и II рода, на которые сможем "опираться" далее.

$$1)\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\propto}} dx = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\propto}} = \lim_{A\to+\infty} \begin{cases} \ln A, \propto = 1 \\ \frac{A^{1-\propto}-1}{1-\propto}, \propto \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, \alpha > 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\propto}} \rightarrow \\ +\infty, \alpha \leq 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\propto}} \nrightarrow \end{cases}$$

$$2)\ \int_0^{1} \frac{1}{x^{\propto}} dx = \lim_{\varepsilon\to0+0} \int_\varepsilon^{1} \frac{dx}{x^{\propto}} = \lim_{\varepsilon\to0+0} \begin{cases} -\ln \varepsilon, \propto = 1 \\ \frac{1-\varepsilon^{1-\propto}}{1-\propto}, \propto \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, \alpha < 1 \Rightarrow \int_0^{1} \frac{dx}{x^{\propto}} \rightarrow \\ +\infty, \alpha \geq 1 \Rightarrow \int_0^{1} \frac{dx}{x^{\propto}} \nrightarrow \end{cases}$$

Абсолютная и условная сходимость:

1)Если и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, и $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходятся, то говорят , что $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится **абсолютно** (качественно);

2)Если и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, и $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходятся, то говорят, что $\int_a^{+\infty} f(x)dx$расходится;

3)Если же $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится, то говорят, что $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится **условно** (некачественно);

Исследуем на сходимость пример $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$ на двух промежутках:

1) на [1,+∞] :

$\alpha > 1$:По признаку Дирихле подынтегральное выражение $\frac{\sin(x)}{x^\alpha}$ сходится ($f(x) = sin(x), F(x) = -cos(x) \le 1, g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \to 0, x \to \infty$) .

Оценим: $\left|\frac{\sin(x)}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha}$, $\frac{1}{x^\alpha}$ на [1;+∞]⟶. Таким образом, по Первому признаку наблюдается абсолютная сходимость.

$0 < \alpha \le 1$: В этом случае также есть сходимость, но условная, т.к. $\left|\frac{\sin(x)}{x^\alpha}\right| \le \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} = \frac{1-\cos(2x)}{2x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos(2x)}{2x^\alpha}$, где $\frac{\cos(2x)}{2x^\alpha}$⟶, а $\frac{1}{2x^\alpha}$ $\nrightarrow$. Следовательно, $\left|\frac{\sin(x)}{x^\alpha}\right|$$\nrightarrow$, т.е. сходимость условная.

$\alpha \le 0$: наблюдается расходимость

2) на [0,1] :

$\alpha \ge 1$: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$ расходится т.к. g(x)= $\frac{1}{x^\alpha}$ $\nrightarrow$0, x⟶∞.

$\alpha < 1$: сходится.

На графиках ниже красным цветом изображена функция $F(A) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$, которая показывает изменение значения интеграла (S = положительная площадь под графиком (голубым) плюс отрицательна(оранжевым)) в зависимости от верхнего предела интегрирования(по оси Ox - значение A, по оси Oy – значение F(A)):

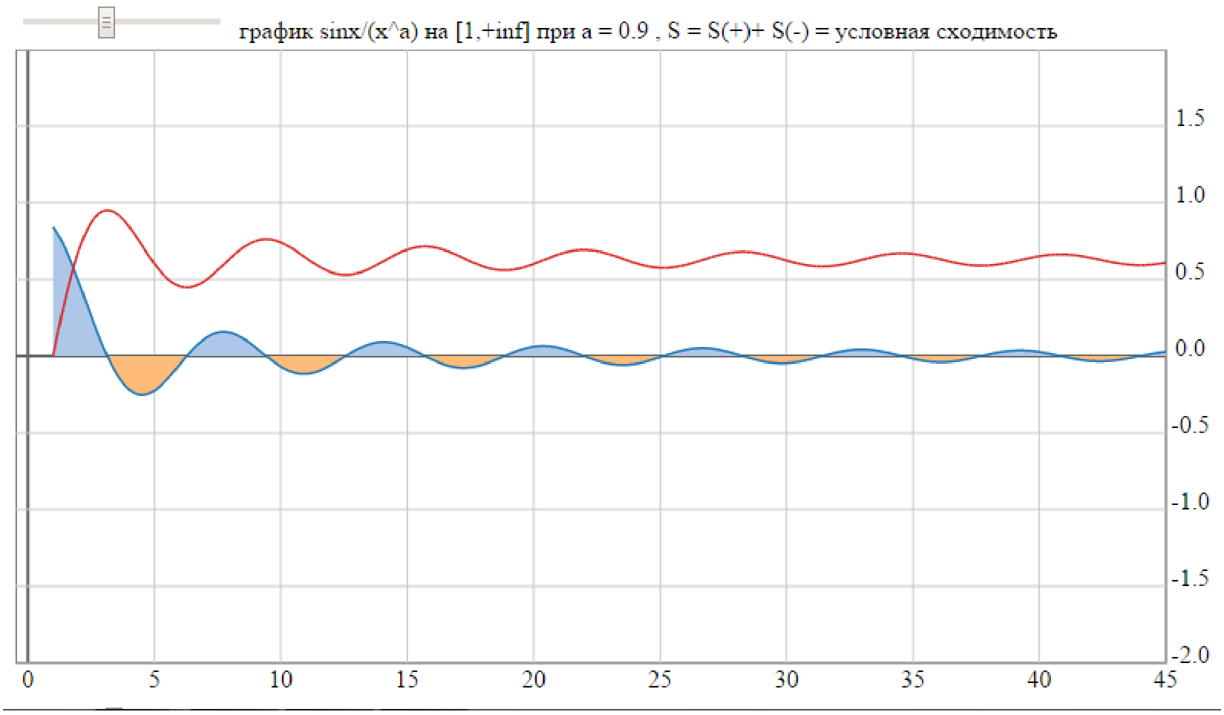


график | sinx/(x^a) | на [1,+inf] при a = 0.9 , S = S(+)+ S(-) = расходится

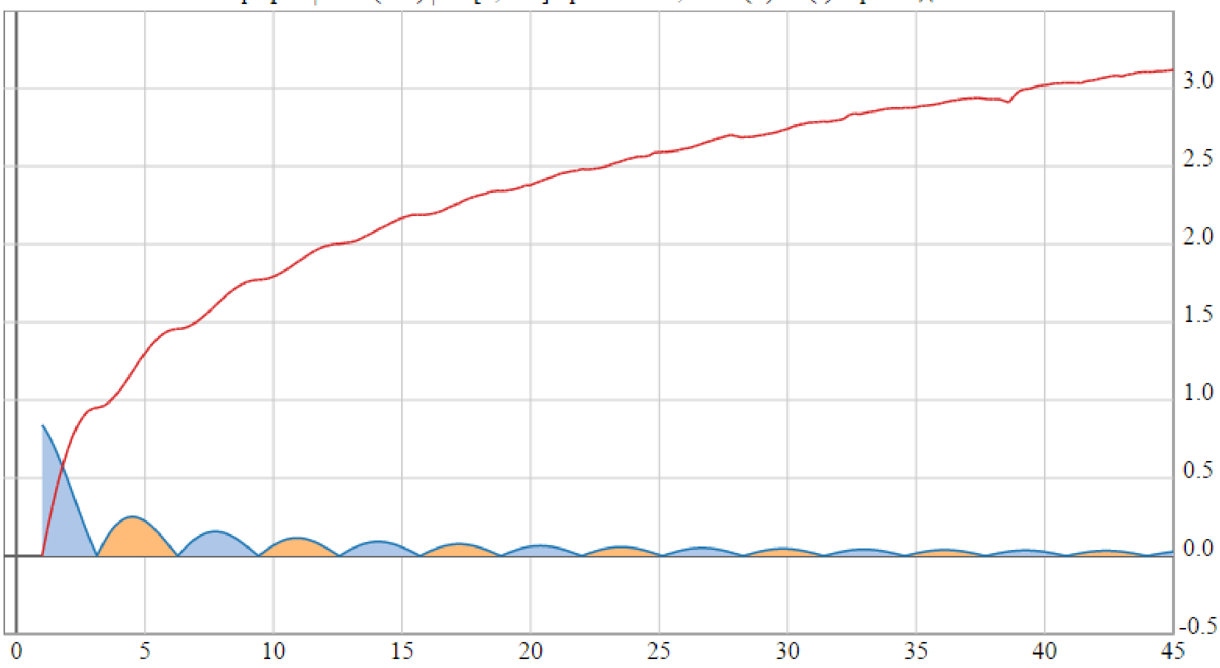
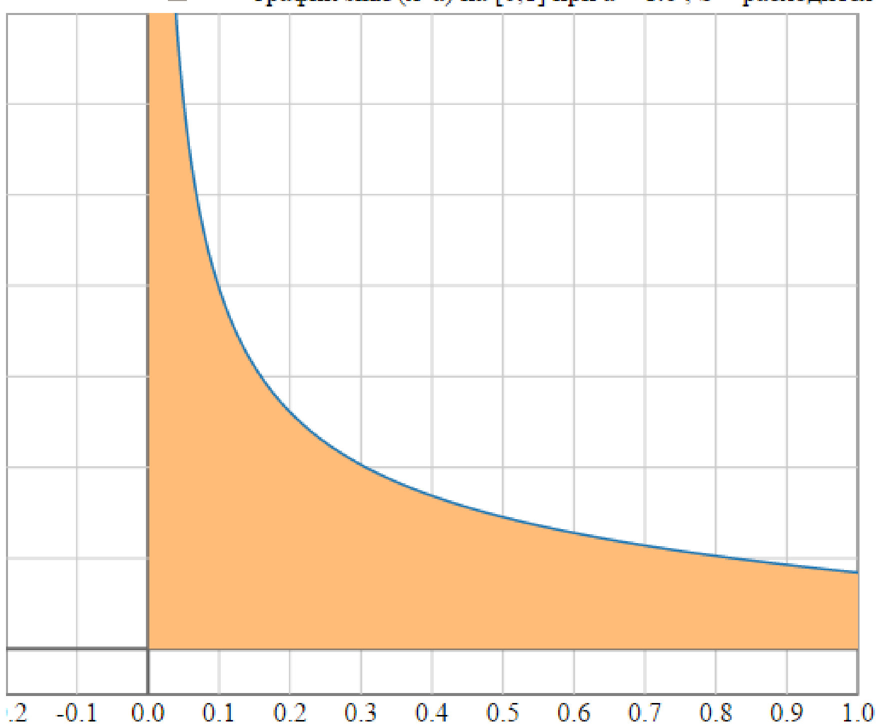


график sinx/(x^a) на [0,1] при a = 1.6 , S = расходится



5.Заключение

Для выполнения поставленной задачи мною были изучены средства создания веб-страниц в html и основы языка JavaScript, приобретён навык набора математических формул в LaTeX, полностью изучены методы библиотеки Skeleton.

В процессе выполнения курсовой работы мною были созданы визуальные демонстрации учебного материала по темам математического анализа для старшеклассников и студентов начальных курсов.

6.Литература

[1] Все примеры взяты из учебника «Матан», Никитин А.А., Тиунов А., Савостьянов А.