



РАНХиГС

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Э М И Т
И Н С Т И Т У Т
ЭКОНОМИКИ, МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И
ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Модели пересекающихся поколений (OLG)

2020

Михаил Гареев

ЭО-15-01

[mkhlgrv@gmail.com](mailto:mkhlgrr@gmail.com)

Научный руководитель: к.э.н. Полбин А.В.

- ▶ Проблема: модели экономического роста первого поколения (модель Солоу) предполагают экзогенную норму сбережения.
- ▶ Решение: модель, в которой сбережения формируются исходя из выбора экономических агентов:
 - ⇒ модель Рамсея — Кааса — Купманса (1963): бесконечно живущий агент выбирает уровень потребления и сбережения, максимизируя полезность;
 - ⇒ модель пересекающихся поколений Даймонда¹ (1965): в каждый момент времени существует несколько поколений, молодые работают и сберегают, пожилые тратят свои сбережения.

¹Diamond, Peter A. (1965): «National Debt in a Neoclassical Growth Model,» American Economic Review, 55, 1126–1150

Базовая модель 2-х поколений

Предположения

- ▶ Дискретное время;
- ▶ Индивиды живут два периода;
- ▶ Полезность индивида $U_t = \ln(c_{1,t}) + \beta \ln(c_{2,t+1})$,
 - ⇒ $c_{1,t}$ — потребление молодого поколения,
 - ⇒ $c_{2,t+1}$ — потребление пожилого поколения,
 - ⇒ $\beta \in (0, 1)$ — коэффициент временных предпочтений,
- ▶ Численность населения растёт с постоянным темпом n :
$$L_t = (1 + n)^t L_0;$$
- ▶ Индивиды работают только в первый период жизни, неэластично предлагая единицу труда и получая зарплату w_t .

Базовая модель 2-х поколений

Предположения

- ▶ Выпуск описывается функцией Кобба — Дугласа:
$$Y_t = F(K_t, L_t) = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha};$$
- ▶ Рынки факторов производства находятся в совершенной конкуренции;
- ▶ Обозначим $k_t = K_t/L_t$, $f(k_t) = F(K_t, 1)$, тогда рентная цена капитала, равная доходности сбережений $R_t = 1 - \delta + f'(k_t)$, где δ — амортизация;
- ▶ Зарплата $w_t = f(k_t) - R_t k_t$;
- ▶ Единица сбережений s_t без потерь трансформируется в единицу капитала K_t .

Базовая модель 2-х поколений

Задача индивида

- ▶ Уровень сбережений s_t индивида из поколения t — это результат решения оптимизационной задачи:

$$\max_{c_{1,t}, c_{2,t+1}, s_t} \ln(c_{1,t}) + \beta \ln(c_{2,t+1})$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} c_{1,t} + s_t &\leq w_t, \\ c_{2,t} &\leq R_{t+1} s_t. \end{aligned}$$

- ▶ Условия первого порядка:

$$s_t = \frac{\beta}{1 + \beta} w_t.$$

Базовая модель 2-х поколений

Динамика капитала

- ▶ Уровень капитала в момент времени $t + 1$:

$$K_{t+1} = s_t L_t + (1 - \delta) K_t.$$

- ▶ Капиталовооружённость единицы труда:

$$k_{t+1} = \frac{s_t}{1+n} + (1-\delta) \frac{k_t}{1+n};$$

$$k_{t+1} = \frac{\beta w_t}{(1+\beta)(1+n)} + (1-\delta) \frac{k_t}{1+n};$$

$$k_{t+1} = \frac{\beta(1-\alpha)k_t^\alpha + (1-\delta)k_t}{(1+\beta)(1+n)}.$$

- ▶ В устойчивом состоянии капиталовооружённость не меняется: $k^* : k^* = k_{t+1} = k_t$:

$$k^* = \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+n) - (1-\delta)} \right]^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)}$$

Модель 3-х поколений

Предположения

- ▶ Дискретное время;
- ▶ Индивиды живут три периода;
- ▶ Полезность индивида из поколения τ

$U_\tau = \ln(c_{\tau,\tau}) + \beta \ln(c_{\tau,\tau+1}) + \beta^2 \ln(c_{\tau,\tau+2})$, где:

- ⇒ $c_{\tau,\tau} \equiv c_\tau^y$ — потребление молодого поколения в период времени τ ,
 - ⇒ $c_{\tau,\tau+1} \equiv c_{\tau+1}^m$ — потребление среднего поколения в период времени $\tau + 1$,
 - ⇒ $c_{\tau,\tau+2} \equiv c_{\tau+2}^o$ — потребление пожилого поколения в период времени $\tau + 2$,
 - ⇒ $\beta \in (0, 1)$ — коэффициент временных предпочтений;
- ▶ Численность поколения τ в момент времени t :

$$N_{\tau,t} = \begin{cases} (1+n)^\tau N_0, & \text{если } \tau \leq t+2, \\ 0, & \text{если } \tau > t+2; \end{cases}$$

- ▶ Численность населения в момент времени t :

$$\widetilde{N}_t = N_{t-2,t} + N_{t-1,t} + N_{t,t}, \quad t = (1+n)^{t-2} N_0 + (1+n)^{t-1} N_0 + (1+n)^t N_0.$$

Модель 3-х поколений

Предположения

- ▶ Индивиды работают два первых периода жизни: молодому поколению доступна единица труда, среднему поколению доступно $d > 0$ труда;
- ▶ Предложение труда неэластично. Индивиды предлагают весь доступный труд и получают зарплату w_t :

$$L_t = N_{t-1,t} + N_t, t = (1+n)^{t-1}N_0 + (1+n)^tN_0;$$

- ▶ Выпуск описывается функцией Кобба-Дугласа:
 $Y_t = F(K_t, L_t) = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha};$
- ▶ Рынки факторов производства находятся в совершенной конкуренции;
- ▶ Рентная цена капитала $R_t = 1 - \delta + f'(k_t);$
- ▶ Зарплата $w_t = f(k_t) - R_t k_t;$
- ▶ Единица сбережений s_t без потерь трансформируется в единицу капитала K_t .

Модель 3-х поколений

Задача индивида

- ▶ Уровень сбережений $s_{\tau,t}$ индивида из поколения τ в момент времени t — это результат решения оптимизационной задачи:

$$\max_{c_{1,t}, c_{2,t+1}, s_t} \ln(c_{\tau,\tau}) + \beta \ln(c_{\tau,\tau+1}) + \beta^2 \ln(c_{\tau,\tau+2})$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned}c_{\tau,\tau} + s_{\tau,\tau} &\leq w_{\tau}, \\c_{\tau,\tau+1} + s_{\tau,\tau+1} &\leq dw_{\tau+1} + R_{\tau+1}s_{\tau,\tau}, \\c_{\tau,\tau+2} &\leq R_{\tau+2}s_{\tau,\tau+1}.\end{aligned}$$

- ▶ Условия первого порядка:

$$s_t = \frac{\beta}{1 + \beta} w_t.$$

Модель 3-х поколений

Накопление капитала

- Уровень капиталовооружённости в момент времени $t + 1$:

$$k_{t+1} = \frac{c_t^y}{1+n+d} + \frac{c_t^m}{(1+n)(1+n+d)} + k_t \frac{1-\delta}{1+n},$$

где:

$$c_t^y = w_t(1+\beta)\beta - \frac{w_{t+1}d}{R_{t+1}(1+\beta+\beta^2)},$$
$$s_t^m = \frac{\beta^2(dw_t + (w_{t-1}R_t)) - w_t d}{1+\beta+\beta^2}.$$

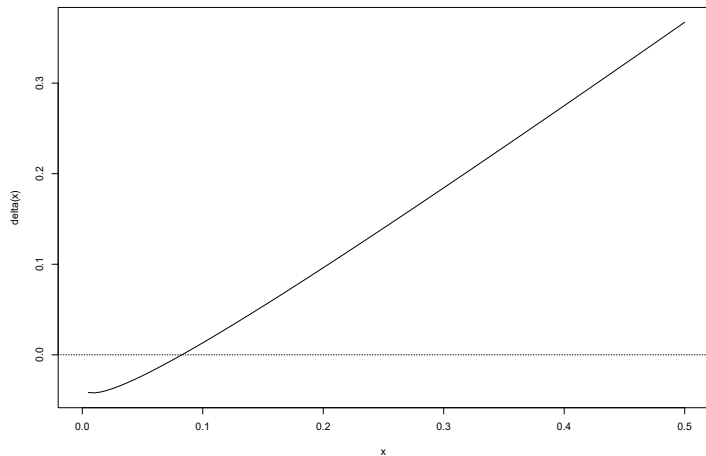
Модель 3-х поколений

Решение

- ▶ Аналитическое решение невозможно, приходится использовать численные методы.
- ▶ Алгоритм:
 1. Численно находится капиталовооружённость в устойчивом состоянии k^* ;
 2. Находится первое приближение (линейный тренд от k_0 до $k_T = k^*$);
 3. Для каждого момента времени $t \in (0, T)$ при известных капитале и труде рассчитываются цены факторов производства R_t, w_t ;
 4. При известных ценах на факторы рассчитываются потребление и сбережения;
 5. При известных сбережениях формируется новая траектория капиталовооружённости, которая прибавляется к предыдущей с шагом η ;
 6. Процедура повторяется с шага 3, пока разница между моделями не окажется меньше заданного уровня ζ .

Модель 3-х поколений

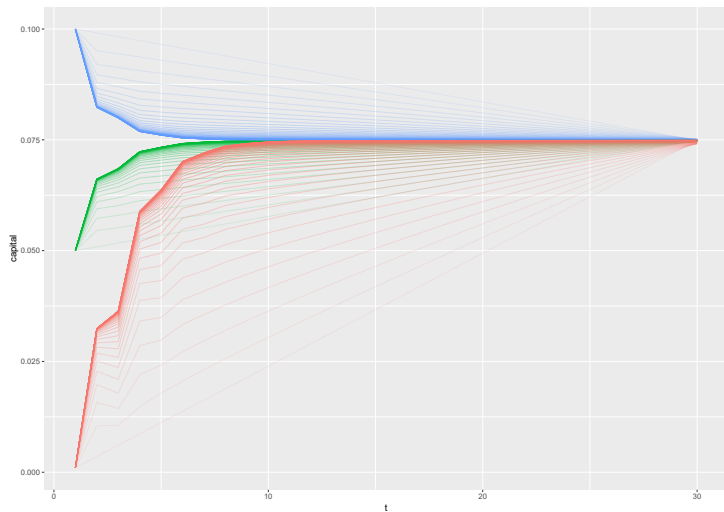
Решение



: Нахождение k^*

Модель 3-х поколений

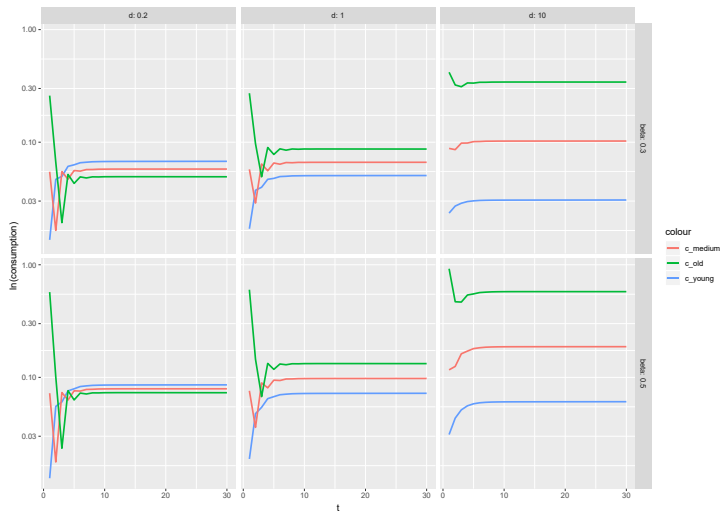
Симуляция



: Траектории k

Модель 3-х поколений

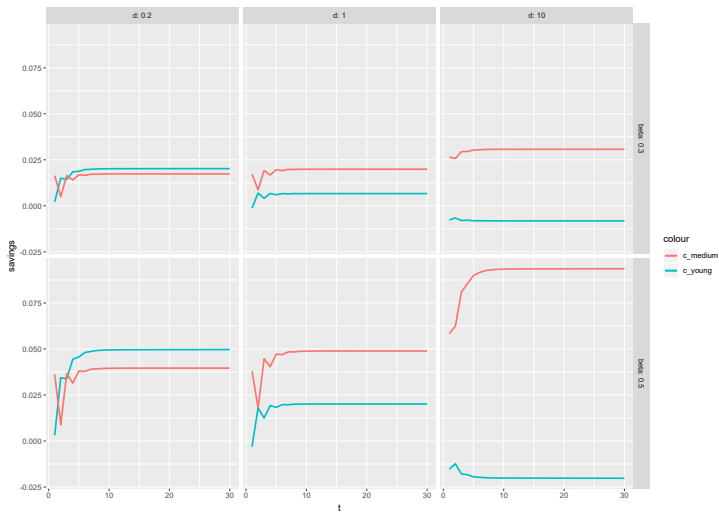
Симуляция



: Потребление

Модель 3-х поколений

Симуляция



: Сбережения

Модель 3-х поколений

Планы

- ▶ Налоги;
- ▶ Гетерогенные поколения;
- ▶ Увеличение числа поколений;
- ▶ Добавление досуга в функцию полезности, эластичное предложение труда, моделирование изменения пенсионного возраста;
- ▶ Открытая экономика.