Plus courts chemins

Gilles Simonin

22 octobre 2021

Résumé
Durant cette séance de 1h15, vous allez concevoir deux algorithmes relatifs au problème de plus court chemin dans un graphe. Vous porterez une attention particulière aux questions de conception et de complexité avant de vous lancer dans une quelconque implémentation.

1 Dériver l'algorithme de Floyd

Considérons un graphe G=(V,E) représenté par sa matrice d'adjacence (booléenne). Nous souhaitons pouvoir calculer la fermeture transitive de G efficacement.

Question 1 *À partir de l'exemple Figure 1, proposez une transformation de l'invariant de l'algorithme de Floyd ($M^k_{x,y}$ =min($M^{k-1}_{x,y}, M^{k-1}_{x,k} + M^{k-1}_{k,y}$)) afin de répondre au problème du calcul de la fermeture transitive.*

$$M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow M^2 \longrightarrow M^3$$

$$\begin{bmatrix} 0&1&1&0&1&1\\ 0&0&1&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0&1&1&0&1&1\\ 0&0&1&1&0&0\\ 1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&0&1&1\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&0&0\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&0&0\\ 0&1&1&1&1&0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

FIGURE 1 – Exemple du calcul de la fermeture transitive via l'invariant de Floyd avec des booléens.

2 Algorithme de Bellman

Pour un graphe $G = (V, E)$, muni d'une fonction de coût w, l'algorithme de Bellman calcule un plus court chemin d'un sommet $s \in V$ à tous les autres sommets de V. Pour cela, il se base sur un principe récursif simple issu de la programmation dynamique. Notons $dist_k(x)$ la distance d'un plus court chemin de s à x dans V utilisant au plus k arcs de G, le schéma récursif s'écrit alors de la manière suivante :
- $dist_0(s) = 0$,
- $dist_0(x) = +\infty, \forall x \neq s$,
- $dist_k(y) = \min(dist_{k-1}(y), dist_{k-1}(x) + w(x, y)),\ k > 0$.

Question 2 *Déterminez la condition qui vous assure que le schéma récursif précédent ait calculé un plus court chemin de s à tous les sommets de G.*

Question 3 *Proposez un algorithme (pseudo-code) implémentant le schéma récursif précédent. Quel est la complexité, au pire cas, de votre algorithme ?*

Question 4 *Proposez une mise en œuvre en Java de votre algorithme.*