Analyse et résolution de problèmes via les graphes

Gilles Simonin

4 novembre 2020

Résumé

Cette séance de 2h30 va vous permettre de vous entraîner à comprendre les problématiques posées, puis de faire le lien avec des problèmes de graphes connus et des algorithmes vus en cours pour les résoudre.

1 Quelques problèmes pour se chauffer...

1.1 Analyse rapide et lien avec des problèmes connus

Pour chaque problème de la liste suivante, nous vous demandons d'analyser le problème, de proposer une modélisation rapide et d'indiquer le problème de la littérature associé. Dans certains cas, vous expliquerez s'il vous manque des informations.

— Noël se prépare au pôle nord, et le père Noël doit planifier son parcours de manière à visiter le plus vite possible chaque cheminée dans le monde entier.

— Un postier veut optimiser son parcours dans les rues d'un quartier depuis son dépôt. Il aimerait minimiser son parcours pour ne pas parcourir plusieurs fois les rues et rentrer au plus vite.

— Sur des lignes de production, différentes pièces sont créées dans le but d'être assemblées pour former un produit final. En fonction du temps de fabrication des pièces pour chaque ligne de production, le responsable aimerait identifier lesquelles sont déterminantes sur la durée totale de fabrication.

— Chaque élève d'un établissement possède une liste de contacts (des autres élèves) sur le réseau social de l'établissement. Nous aimerions sélectionner un nombre minimum d'élèves de telle manière que l'union de leurs listes couvre tous les élèves de l'établissement.

— L'agence ESA planche depuis des années sur une problématique importante :
étant donné une grande quantité de déchets autour de la terre, on aimerait qu'une navette récupère dans une large zone tous les déchets orbitaux en un minimum de temps.

— Un serre botanique gère son alimentation en eau via un système d'irrigation assez complexe. Un réseau de tuyaux connecte les parcelles végétales (il peut y avoir plusieurs tuyaux de débits différents entre deux parcelles). L'utilisation d'un tuyau consomme une certaine quantité d'énergie selon le débit du tuyau sélectionné. Nous aimerions amener de l'eau (la quantité n'est pas prise en compte ici) à chaque parcelle en minimisant l'énergie globale consommée.

— Une association veut remercier ses bénévoles en leur offrant un cadeau parmi une liste. Chaque bénévole donne une sous-liste des objets qui l'intéressent. Chaque cadeau est hélas unique mais peut figurer sur plusieurs sous-listes. Comment vérifier si chaque bénévole peut recevoir un cadeau de son choix ?

1.2 Des prisonniers en cavale

4 prisonniers se sont échappés d'un pénitencier durant la nuit. Des balles ont fusé et certains sont blessés. Alors que le noir de la nuit est de plus en plus présent, ils arrivent devant un pont en piteux état (des planches sont manquantes et des trous se devinent). Les gardiens seront bientôt sur leurs pas et ils doivent absolument traverser ce pont.

Ils ont une lampe torche sur eux, et sentent qu'il ne peuvent passer qu'à deux à la fois au maximum sur le pont avec la lampe pour éviter les trous. Lors du passage de deux personnes, le temps de traversée est basé sur le plus lent (max des deux temps). Les temps de passage sont les suivants selon leurs blessures et fatigues :

- Prisonnier un : 1min
- Prisonnier deux : 2min
- Prisonnier trois : 5min
- Prisonnier quatre : 10min

Question 1 *Quel temps minimum faut-il pour que les 4 prisonniers passent de l'autre côté du pont ? Donnez une modélisation propre du problème, puis citez un algorithme pour résoudre le problème sur votre graphe.*

2 Problème de robustesse

Nous nous intéressons ici à l'analyse d'une forme de robustesse dans un réseau ethernet. Pour ce faire, nous supposons que notre réseau est représenté par un graphe simple non orienté connexe $G = (V, E)$. L'objectif est de construire un algorithme capable de vérifier qu'il existe pour chaque paire de sommets x et y, $x \neq y$, au moins deux chemins sommets disjoints reliant x et y dans G. Un tel algorithme permet de s'assurer que la panne d'un routeur (ici donc un sommet de G) sur le réseau ne rompt pas la connexité de G, autrement dit le réseau reste totalement opérationnel.

Question 2 *Rappelez (en donnant le nom) quels algorithmes permettent de s'assurer, pour un sommet $x \in V$ donné, de l'existence d'un chemin depuis x à tout $y \in V$, $x \neq y$, dans $G = (V, E)$.*

Question 3 *Choisissez un des algorithmes proposés dans la question précédente, nous l'appellerons* `PathChecker(Node` x`)`*. Pouvez-vous le modifier de sorte que, pour chaque sommet y, nous connaissions la liste des sommets de G utilisés pour aller de x à y. Vous fournirez le pseudo-code de l'algorithme* `PathChecker(Node` x`)` *ainsi modifié.*

Question 4 *Pour toute paire de sommets $x, y \in V$ de G, $x \neq y$, proposez un nouvel algorithme dérivé de* `PathChecker(Node` x`)`*, nommé* `PathChecker(Node` x, `Node` y, `List < Node >` *firstPath), qui recherche l'existence d'un nouveau chemin de x à y n'utilisant aucun des sommets utilisés dans la liste firstPath.*

Question 5 *Proposez le pseudo-code d'un algorithme vérifiant qu'il existe pour chaque paire de sommets x et y, $x \neq y$, au moins deux chemins sommets disjoints reliant x et y dans G.*

Question 6 *Quelle est la complexité de cet algorithme ?*