Couverture et Coloration

Gilles Simonin

11 octobre 2021

Résumé

Votre travail lors de cette séance de 1h15 est de découvrir quelques problèmes de graphes bien connus et d'approfondir vos connaissances théoriques pour démontrer certains résultats.

1 Couvertures par les arêtes

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Nous allons étudier les problèmes de couvertures et le lien avec d'autres types de problèmes de graphe.

Définition 1 *Un "Edge Cover" est un ensemble $E' \subseteq E$ d'arêtes tels que chaque sommet du graphe G est couvert par au moins une arête.*

Définition 2 *Le problème du "Minimum Edge Cover" consiste à trouver le plus petit edge cover.*

Question 1 *Démontrer les assertions suivantes :*
- *Tout minimum edge cover est une forêt.*
- *Tout minimum edge cover connexe est un arbre couvrant.*
- *Un couplage parfait est toujours un minimum edge cover.*

2 Encadrement du nombre chromatique

Nous nous intéressons maintenant aux problèmes de colorations.

Définition 3 *La coloration de graphe consiste à attribuer une couleur à chacun des sommets (ou arêtes) d'un graphe G de manière que deux sommets reliés par une arête soient de couleur différente (deux arêtes adjacentes ont une couleur différente). Soit $\chi(G)$ le nombre minimal de couleurs utilisés, appelé* nombre chromatique.

Définition 4 *Dans tout graphe non orienté G, nous notons $\Delta(G)$ le degré maximum de G, i.e. le plus grand degré parmi tous les sommets.*

2.1 Majoration

Question 2 *Montrez que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ pour tout graphe G.*

Question 3 *Montrez que $\chi(G) \leq |\mathtt{S}|$ pour tout graph G, où $\mathtt{S}$ est une couverture des sommets par stables disjoints.*

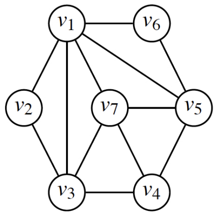
2.2 Minoration

Il est évident que le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à celui de chacun de ses sous-graphes.

Question 4 *Montrez que $\chi(G) \geq \omega(G)$ pour tout graph G, où $\omega(G)$ est la taille de la plus grande clique du graphe.*

2.3 Mise en pratique

Question 5 *Majorez et minorez le nombre chromatique du graphe suivant.*



Question 6 *On donne un graphe de 7 sommets par sa matrice d'adjacences M ci-dessous. Ce graphe représente les 7 bancs d'un parc et les allées permettant de passer de l'un à l'autre.*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *On veut peindre les bancs de façon que deux bancs reliés par une allée soient toujours de couleurs différentes. Donnez un encadrement du nombre minimal de couleurs nécessaire, en justifiant. Déterminez ce nombre.*
2. *Est-il possible de parcourir toutes les allées de ce parc sans passer deux fois par la même allée ?*
3. *Est-il possible de parcourir des allées de ce parc en passant à côté de chaque banc exactement une fois ?*

Question 7 *Un lycéen doit organiser les horaires des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7 et enfin 6 et 7.*

Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée minimale ?