

Problèmes de flots

Gilles Simonin

25 octobre 2021

Résumé

Durant cette séance de 2h, vous allez manipuler les concepts de flots introduits durant le cours.

1 Réseau d'adduction d'eau

Le graphe suivant représente un réseau d'adduction d'eau. Les 3 villes 10, 11 et 12 sont alimentées par 4 réservoirs (1, 2, 3, 4). Les disponibilités des réservoirs figurent près de ces sommets. Ces disponibilités et les capacités des canalisations sont données en m^3/h . Une étude est en cours pour savoir si le réseau va pouvoir satisfaire les besoins respectifs des 3 villes dans 10 ans, à savoir 15, 20 et 15.

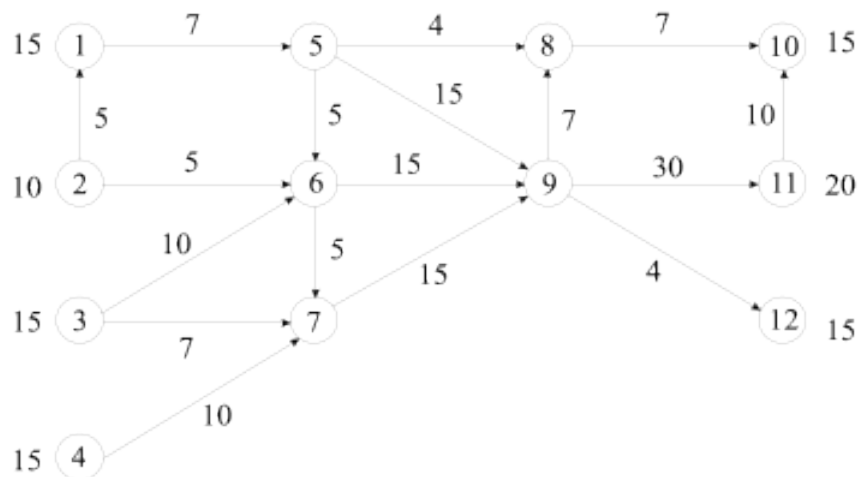


FIGURE 1 – Graphe du réseau d'adduction d'eau.

Question 1 Déterminer le flot maximal permis par le réseau actuel et donner la coupe minimale correspondante. Le réseau sera-t-il suffisant dans 10 ans ?

Question 2 Le conseil régional décide de refaire en priorité les canalisations (1, 5) et (9, 12). Déterminez les nouvelles capacités suffisantes pour ces canalisations, si aucune autre canalisation n'est refaite. Déterminer le nouveau flot maximal.

Question 3 Devant le coût des travaux, le conseil souhaite ne construire qu'une des deux canalisations. Laquelle recommandez-vous ?

2 Construction d'autoroute

Avant d'établir un projet de construction d'autoroute on désire étudier la capacité du réseau routier, représenté par le graphe ci-dessous, reliant la ville E à la ville S . Pour cela, on a évalué le nombre maximal de véhicules que chaque route peut écouler par heure, compte tenu des ralentissements aux traversées des villes et villages, des arrêts aux feux, etc. Ces évaluations sont indiquées en centaines de véhicules par heure sur les arcs du graphe. Les temps de parcours entre villes sont tels que les automobilistes n'emprunteront que les chemins représentés par le graphe.

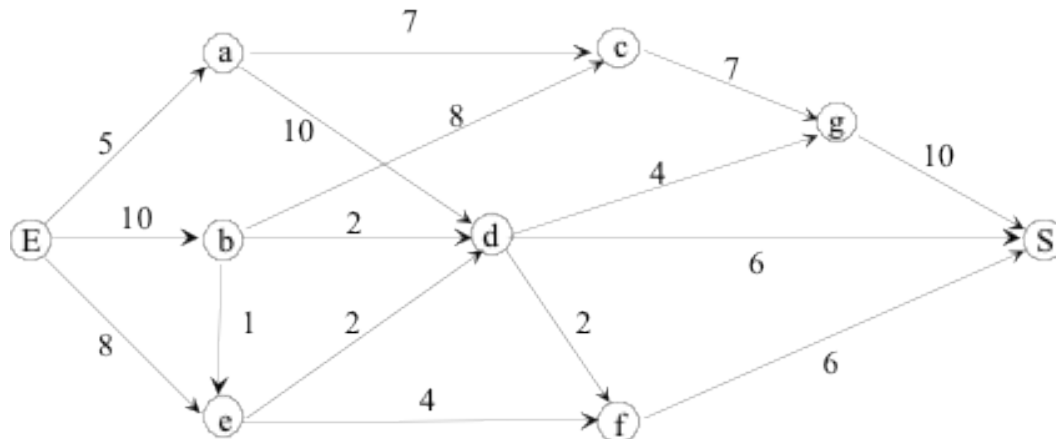


FIGURE 2 – Graphe de la capacité du réseau routier.

Question 4 Quel est le nombre maximal de véhicules susceptibles de transiter de E à S par heure ?

Question 5 L'étude de ce réseau routier peut-être complétée par l'évaluation du nombre maximal de véhicules pouvant traverser chacune des villes A, B, \dots, G par heure. En effet, un automobiliste se rendant de la ville A à la ville G et empruntant les routes (A, D) et (D, G) doit nécessairement traverser la ville D . Le débit horaire du réseau urbain de cette ville intervient donc dans l'étude du nombre de voitures circulant au maximum dans le réseau routier. Les évaluations des débits horaires maximaux étant donnés (en centaine de véhicules par heure) dans le tableau ci-dessous, déterminer le débit horaire maximal du réseau ainsi modifié.

ville	A	B	C	D	E	F	G
débits	6	7	8	6	6	5	9

TABLE 1 – Evaluations des débits horaires maximaux.

3 Problème des chemins disjoint

Question 6 On souhaite maximiser le nombre de chemins disjoints (sans sommets intermédiaires communs) entre deux sommets s et t d'un graphe $G = (X, U)$. Montrer que ce problème revient à calculer un flot maximal dans un réseau auxiliaire que l'on définira.

Question 7 Un graphe est k -connexe s'il existe au moins k chaînes disjointes entre toutes paires de sommets. Dédurre de la question précédente le principe d'un algorithme pour connaître le plus grand entier k pour lequel un graphe est k -connexe. Notez qu'un tel graphe résiste à la coupure de $k - 1$ chaînes entre deux sommets.