

Notas de aulas de Estatística Econômica

Marcos Minoru Hasegawa

2020-10-26

Sumário

Licença	5
Sobre o material	7
Sobre o Autor	9
1 Estatística Descritiva	11
1.1 Medidas de posição	11
1.2 Medidas de dispersão	21
1.3 Medidas de relação linear entre duas variáveis	33
2 Medidas de desigualdade	37
2.1 Princípio de Pigou-Dalton	37
2.2 Transferência Regressiva	37
2.3 Curva de Lorenz	37
2.4 Índice Gini	39
2.5 Discrepância Máxima	49
2.6 Redundância e Índice de Theil	51
2.7 Variância dos Logaritmos	58
3 Números-Índices	61
3.1 Introdução	61
3.2 Preços Relativos	61
3.3 Índice Simples de Preços Agregados	63

3.4	Média Aritmética dos Preços Relativos	65
3.5	Índice de Preços de Laspeyres	67
3.6	Índice de Preços de Paasche	69
3.7	Índice de Preços de Fisher	72
3.8	Índice de Preços de Marshall-Edgeworth	72
3.9	Deflacionamento	73
4	Variável Aleatória Discreta	77
4.1	Esperança matemática	77
4.2	Variável Aleatória Discreta	80
4.3	Distribuição Uniforme	80
4.4	Distribuição de Bernoulli	81
4.5	Distribuição Binomial	83
4.6	Distribuição de Poisson	90
5	Variável Aleatória Contínua	95
5.1	Distribuição Normal	95
5.2	Teorema de Tchebichev	95
6	Distribuição de variáveis aleatórias conjunta	97

Licença

Como está descrito no repositório, os poucos códigos originais desenvolvidos ao longo do texto estão sob a licença **GNU GPLv3** .

O texto e as artes gráficas elaboradas de forma original estão sob licença **Creative Commons BY-NC-SA 4.0**.

Sobre o material

A situação especial causada pela pandemia da COVID-19 forçou a muitos professores criarem materiais para facilitar aulas remotas das suas disciplinas. A disciplina SE305 Estatística Econômica e Introdução à Econometria da UFPR não poderia ser diferente. Então, o objetivo deste material é de suprir a falta das bibliografias básicas na sua versão digital com a disponibilização de forma digital e gratuita o que seria o material das notas das aulas da disciplina de Estatística Econômica. Não é o ideal, mas a ideia é melhorar o material com tempo.

Sobre o Autor

Professor do Departamento de Economia da Universidade Federal do Paraná. Engenheiro Agrônomo pela UNESP/Jaboticabal, Mestrado em Economia Agrária pela ESALQ/USP e Doutorado em Economia Aplicada pela ESALQ/USP, é um dos professores responsáveis pelas disciplinas de SE305 Estatística Econômica e Introdução à Econometria e SE308 Econometria ambas do curso de Economia da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

Capítulo 1

Estatística Descritiva

O conteúdo deste tópico foi elaborado com base no capítulo 2 de Sartoris (2013) e nos capítulos 4 e 5 de Hoffmann (2006).

1.1 Medidas de posição

Trata-se de medidas de tendência central ou resumo. Como os nomes dizem, tratam-se de medidas que tratam de resumir a massa de valores e um único número.

1.1.1 Variável Aleatória

- variável aleatória (v.a.) é uma variável que está associada a uma *distribuição de probabilidade*.
- Ou seja, cada valor da v.a. está associada a uma probabilidade.
- O resultado do lançamento de uma dado, que poder ser qualquer número de 1 a 6, está associada a uma probabilidade de 1/6.

1.1.2 Média Aritmética Simples

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (1.1)$$

onde $i = 1, \dots, n$

Exemplo 1

Qual é a média aritmética de um grupo de cinco pessoas cujas idades são em ordem crescente, 21, 23, 25, 28 e 31. Para responder, basta aplicar (1.1).

$$\overline{X} = \frac{21 + 23 + 25 + 28 + 31}{5} = 25,6$$

Exemplo 1 no R

```
X <- c(21, 23, 25, 28, 31)
X
```

```
## [1] 21 23 25 28 31
```

```
mediaX <- mean(X)
mediaX
```

```
## [1] 25,6
```

Exemplo 2

Qual é a média aritmética de três provas realizadas por um aluno, cujas notas foram 4,6 e 8. Para responder, basta aplicar (1.1).

$$\overline{X} = \frac{4 + 6 + 8}{3} = 6$$

Exemplo 2 no R

```
X2 <- c(4, 6, 8)
X2
```

```
## [1] 4 6 8
```

```
mediaX2 <- mean(X2)
mediaX2
```

```
## [1] 6
```

1.1.3 Média Aritmética Ponderada

Na média aritmética ponderada, cada valor pode ter importância diferentes dos outros valores considerados no computo. A frequência dos valores é muito comumente usada para dar maior ou menor importância relativa entre os valores considerados no computo da média aritmética ponderada. Veja como fica a fórmula para o cálculo da média aritmética ponderada em (1.2)

$$\bar{X} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i} \sum_{i=1}^n w_i X_i \quad (1.2)$$

onde w_i é a ponderação ou peso associado a i ésimo valor de X .

Podemos escrever na forma de frequência relativa dos valores da variável X :

$$f_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (1.3)$$

Exemplo 3

Qual é a média aritmética de um grupo de vinte alunos, oito com 22 anos, sete de 23 anos, três de 25 anos, um de 28 anos e um de 30 anos. Para responder, basta aplicar (1.2).

$$\bar{X} = \frac{22 \times 8 + 23 \times 7 + 25 \times 3 + 28 \times 1 + 30 \times 1}{20} = 23,5$$

Exemplo 3 no R

```
X3 <- c(22, 23, 25, 28, 30)
X3
```

```
## [1] 22 23 25 28 30
```

```
w3 <- c(8, 7, 3, 1, 1)
w3
```

```
## [1] 8 7 3 1 1
```

```
wX3 <- w3 * X3
mediaX3 <- sum(wX3)/sum(w3)
mediaX3
```

```
## [1] 23,5
```

Exemplo 4

Qual é a média ponderada de três provas realizadas por um aluno, cujas notas foram 4, 6 e 8. A primeira prova tem peso igual a 1, a segunda tem peso igual a 2 e a terceira tem peso igual a 3. Para responder, basta aplicar (1.2).

$$\bar{X} = \frac{4 \times 1 + 6 \times 2 + 8 \times 3}{1 + 2 + 3} \cong 6,7$$

Exemplo 4 no R

```
X4 <- c(4, 6, 8)
X4
```

```
## [1] 4 6 8
```

```
w4 <- c(1, 2, 3)
w4
```

```
## [1] 1 2 3
```

```
wX4 <- w4 * X4
mediaX4 <- sum(wX4)/sum(w4)
round(mediaX4, digits = 1)
```

```
## [1] 6,7
```

1.1.4 Média Geométrica Simples

Na média geométrica simples, a forma de obter uma medida resumo ou de tendência central é multiplicar todos os n valores e tirar a raiz enésima do resultado do produtório. Assim é possível ter duas fórmulas para a média geométrica a (1.4) e (1.5).

$$G = \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{\frac{1}{n}} \quad (1.4)$$

ou

$$G = \sqrt[n]{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n} \quad (1.5)$$

O que acontece se um dos valores de X for igual a zero? E se um dos valores for negativo?

Exemplo 5

Sejam três valores 4, 6 e 8. Calcule a média geométrica simples.

$$\sqrt[3]{4 \times 6 \times 8} \cong 5,7690$$

Exemplo 5 no R

```
X5 <- c(4, 6, 8)
X5
```

```
## [1] 4 6 8
```

```
n <- length(X5)
mediaX5 <- prod(X5)^(1/n)
round(mediaX5, digits = 1)
```

```
## [1] 5,8
```

1.1.5 Média Geométrica Ponderada

Na média geométrica ponderada que podem ser calculadas através de duas fórmulas (1.6) e (1.7), cada valor pode ter uma importância diferente em relação aos outros valores no computo da média geométrica. Muito comumente, esta maior ou menor importância pode estar associada a frequência dos valores considerados no cálculo.

$$G = \left(\prod_{j=1}^k X_j^{w_j} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (1.6)$$

ou

$$G = \sqrt[n]{X_1^{w_1} \times X_2^{w_2} \times \dots \times X_k^{w_k}} \quad (1.7)$$

onde a $\sum_{j=1}^k w_j = n$

Exemplo 6

tomando os valores do exemplo 5 e ponderando por 1,2 e 3, temos:

$$\sqrt[6]{4^1 \times 6^2 \times 8^3} \cong 6,5$$

O exemplo 6 no R

```
x6 <- c(4, 6, 8)
class(x6)
```

```
## [1] "numeric"
```

```
x6
```

```
## [1] 4 6 8
```

```
w6 <- c(1, 2, 3)
w6
```

```
## [1] 1 2 3
```

```
G2 <- round((prod(x6^w6))^(1/sum(w6)), 1)
G2
```

```
## [1] 6,5
```

1.1.6 Média Harmônica

É o inverso da média dos inversos dos valores da variável que pode ser calculada através das fórmulas (1.8) e (1.9).

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}} \quad (1.8)$$

$$H = \frac{n}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \dots + \frac{1}{X_n}} \quad (1.9)$$

O que acontece se um dos valores de X for igual a zero? Para entender essa situação, use o conceito de limite fazendo o valor tender a zero.

Exemplo 7

Tomando o exemplo das notas, temos:

$$H = \frac{3}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}} \cong 5,5.$$

1.1.7 Média Harmônica Ponderada

Na média harmônica ponderada, assim como na média aritmética ponderada e na média geométrica ponderada, cada valor pode ter uma importância em relação aos outros valores considerados no seu cálculo. Comumente, a frequência do valor pode associar uma maior ou menor importância no cálculo da média harmônica ponderada que pode ser calculada através das fórmulas (1.10) e (1.11)

$$H = \frac{n}{\sum_{j=1}^k w_j \frac{1}{X_j}} \quad (1.10)$$

ou

$$H = \frac{n}{w_1 \frac{1}{X_1} + w_2 \frac{1}{X_2} + \dots + w_k \frac{1}{X_k}} \quad (1.11)$$

onde $\sum_{j=1}^k w_j = n$

Exemplo 8

Tomando o exemplo das notas

$$H = \frac{6}{\frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3} \cong 6,3.$$

Observação

Tanto para as médias simples como para as ponderadas, a média aritmética é maior do que a média geométrica e essa, por sua vez, é maior que a harmônica. Isso só não vale quando todos os valores são iguais. Veja de forma esquemática em (1.12)

$$\overline{X} \geq G \geq H \quad (1.12)$$

Exemplo 9

O aluno tira as seguintes notas bimestrais: 3,4,5,7 e 8,5. Determine qual seria sua média final se esta fosse calculada dos três modos, aritmética, geométrica e harmônica, em cada um dos seguintes casos: i) as notas têm o mesmo peso e; ii) as notas têm pesos diferentes.

i) As notas dos bimestres têm os mesmos pesos.

$$\overline{X} = \frac{3 + 4,5 + 7 + 8,5}{4} = 23/4 = 5,75$$

$$G = \sqrt[4]{3 \times 4,5 \times 7 \times 8,5} = \sqrt[4]{803,25} \cong 5,32$$

$$H = \frac{4}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4,5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8,5}} \cong 4,90$$

ii) Suponha que agora os pesos para as notas bimestrais sejam, 30%, 25%, 25% e 20%.

$$\overline{X} = 0,3 \times 3 + 0,25 \times 4,5 + 0,25 \times 7 + 0,20 \times 8,5 = 5,475$$

$$G = 3^{0,3} \times 4,5^{0,25} \times 7^{0,25} \times 8,5^{0,2} \cong 5,05$$

$$H = \frac{1}{0,3 \frac{1}{3} + 0,25 \frac{1}{4,5} + 0,25 \frac{1}{7} + 0,2 \frac{1}{8,5}} \cong 4,66$$

1.1.8 Mediana

é o valor que divide um conjunto de dados ordenados ao meio, ou seja, dois grupos de valores de igual tamanho. Com base na definição de mediana, o valor da mediana pode ser obtida através da sua posição que proporciona duas situações: i) o número de valores é ímpar e ii) o número de valores é par.

- i) Quando o número de valores é ímpar, a posição do valor correspondente a mediana é obtida através de (1.13):

$$PMediana_{\text{ímpar}} = \frac{n+1}{2} \quad (1.13)$$

onde n é o número de valores considerado no cálculo.

- ii) Quando o número de valores é par, a posição da mediana é obtida através da média entre os dois valores centrais do conjunto de valores ordenados de menor a maior. O primeiro valor central é definido pela posição obtida através de (1.14)

$$P1Mediana_{\text{par}} = \frac{n}{2} \quad (1.14)$$

onde n é o número de valores considerado para o cálculo.

O segundo valor central é definido pela posição obtida através de (1.15)

$$P2Mediana_{\text{par}} = \frac{n}{2} + 1 \quad (1.15)$$

onde n é o número de valores considerado para o cálculo.

Assim, a mediana quando o número de valores é par é obtida através da média aritmética simples dos valores correspondentes as posições obtidas por (1.14) e por (1.15) através de (1.16)

$$Mediana_{\text{par}} = \frac{ValorCentral_1 + ValorCentral_2}{2} \quad (1.16)$$

Exemplo numérico de Mediana quando o número de valores é ímpar

Seja um conjunto de valores 2,-3,1,-2,0,-1,3. Obtenha a mediana.

Primeiramente ordena-se do menor para o maior.

-3,-2,-1,0,1,2,3

Como se trata de número ímpar de valores o valor central que divide o conjunto de valores em dois subconjuntos de igual tamanho é o valor da mediana. Neste caso é o zero.

Mediana no R

```
w <- c(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)
mediana1 <- median(w)
print(mediana1)
```

```
## [1] 0
```

Exemplo numérico de Mediana quando o número de valores é par

No exemplo anterior o conjunto de dados era composto por um número ímpar de valores. Neste exemplo o número de valores ordenado de menor a maior é par. Nesse caso, apesar de existir vários critérios, o mais usual é tirar a média aritmética simples entre os dois valores centrais do conjunto de valores ordenados de menor a maior. Uma vez que não existe um valor que separe dois subconjuntos de igual tamanho, a média aritmética simples destes dois valores é o valor da mediana quando o número total de valores não é ímpar.

Sejam os valores -2,1,3,2,-3,1. Obtenha a mediana.

Primeiramente ordena-se os seis valores.

-3,-2,-1,1,2,3

Note que trata-se de conjunto com um número par de valores.

Dessa forma, toma-se os dois valores centrais que são -1 e 1 e calcula-se a média aritmética simples. Ou seja, a mediana para este conjunto com seis valores é igual a zero.

O exemplo do número par de valores no R

```
v <- c(-3, -2, -1, 1, 2, 3)
mediana2 <- median(v)
print(mediana2)
```

```
## [1] 0
```

1.1.9 Quartis ou Quartiles

são os valores que dividem o conjunto de dados ordenados em quatro subconjuntos de igual tamanho. Ou seja são valores do conjunto que definem o primeiro quarto dos dados (25%), a metade dos dados (50%) que coincide com a mediana, os três quartos dos dados (75%).

Dessa forma para obter os valores que dividem o conjunto de dados ordenados de menor a maior e quatro subconjuntos de igual tamanho, é necessário definir qual é a posição desses valores. Uma vez definido as suas posições pode-se obter os valores corretamente.

A posição do valor que separa o primeiro do segundo quartil é definido por (1.17).

$$PQ_1 = \frac{(n+1)}{4} \quad (1.17)$$

onde n é o número de valores. A posição do valor que separa o segundo do terceiro quartil é definido por (1.18).

$$PQ_3 = \frac{3(n+1)}{4} \quad (1.18)$$

onde n é o número de valores.

Note que o termo genérico é percentil. Por exemplo, o quintis são os valores que dividem o conjunto de ados ordenados de menor a maior em cinco subconjuntos de igual tamanho.

Quartis no R

No R tem uma função específica para a obtenção dos quartis.

```
p <- c(0:100)
length(p)
```

```
## [1] 101
```

```
quantile(p)
```

```
##    0%   25%   50%   75%  100%
##     0    25    50    75   100
```

```
faixainterquant <- quantile(p, 0.75) - quantile(p,
  0.25)
faixainterquant
```

```
## 75%
## 50
```

Quartis no R

No R tem uma função específica para a obtenção dos quartis.

```
p2 <- c(1:100)
length(p2)
```

```
## [1] 100
```

```
quantile(p2)

##      0%      25%      50%      75%     100%
##    1,00   25,75   50,50   75,25  100,00

faixainterquant2 <- quantile(p2, 0.75) - quantile(p2,
  0.25)
faixainterquant2

##      75%
##    49,5
```

1.1.10 Moda

Moda é o elemento de maior frequência, ou seja, que aparece o maior número de vezes. Pode haver mais de uma moda em um conjunto de valores:

- Unimodal
- Bimodal
- Multimodal
- Amodal

Moda no R Não existe uma função da moda para pronto uso no R. É necessário criar uma função segue abaixo.

```
# criando a função moda no R

getmode <- function(v) {
  uniqv <- unique(v)
  uniqv[which.max(tabulate(match(v, uniqv)))]
}
z <- c(2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 5, 5, 3, 2, 3)
moda1 <- getmode(z)
print(modal)

## [1] 2
```

1.2 Medidas de dispersão

Este tópico está baseado nos materiais de Hoffmann (2006), Morettin and Bus-sab (2013) e Sartoris (2013).

As medidas de dispersão medem como os dados estão **agrupados**, mais ou menos próximos entre si, ou seja, mais ou menos dispersos.

1.2.1 Amplitude

A amplitude de um conjunto de valores é a diferença entre o maior elemento e o menor elemento desse conjunto.

1.2.2 Variância

A variância é a somatória dos quadrados dos desvios em relação a média, dividido pelo número de observações. Note que a ideia inicial de dispersão foi a distância de cada valor do conjunto dados da variável em relação à média da variável. Mas como trata-se da distância relativa de cada valor em relação a média dos valores da variável, a sua somatória sempre resulta zero. Pois os desvios em relação a médias são compostos de valores positivos e negativos por estarem acima ou abaixo da média e assim a somatória das mesmas resulta zero, sempre. Portanto, a soma dos desvios não tem utilidade como medida de dispersão. Mas se a soma for dos quadrados dos desvios, isso é resolvido. Por isso, a variância é o valor médio dos quadrados dos desvios em relação à média. Ou seja,

$$var(X) = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} \text{ (população)}$$

$$var(X) = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1} \text{ (amostra)}$$

Note que a variância da amostra é um estimador não viesado da variância populacional. A diferença entre variância populacional e variância amostral será apresentada mais adiante. A interpretação intuitiva da diferença entre ambas as variâncias é de que quando se trabalha com amostra, está tendo acesso a parte das informações e isso precisa ser penalizado. Note que esta penalização se dá para amostras pequenas pois se trata de subtrair uma unidade do número de observações. O que acontece com a diferença entre variância populacional e a variância amostral quando i) o número de observações torna-se muito grande, tipo bem maior que 30 e; ii) o número de observações tende ao infinito.

Variância no R

Aproveitando os dados de alturas de 30 pessoas:

```
tail(X)
```

```
## [1] 21 23 25 28 31
```

```
varX <- round(var(X), 4)
varX
```

```
## [1] 15,8
```

Note que a variância no R é a variância amostral, cujo denominador é $(n - 1)$.

Em termos práticos, a variância tem uma desvantagem: a unidade do seu resultado é o quadrado da unidade original da variável. Portanto, se a variável em questão é preço de uma mercadoria em Reais, a sua variância será Reais ao quadrado. Tal fato dificulta a sua interpretação. Por isso é apresentado o desvio padrão como medida de dispersão na sequência.

1.2.3 Desvio Padrão

É a raiz quadrada da variância. No desvio padrão, denotado como $d.p.(X)$ ou σ , não tem o efeito do quadrado.

$$d.p.(X) \cong \sigma = \sqrt{var(X)}$$

Portanto, a sua interpretação é clara e direta por ter a mesma unidade da sua variável original. Desta forma, o desvio padrão facilita a sua análise juntamente com as medidas de posição como a média aritmética simples, por exemplo.

Desvio Padrão no R

```
tail(X)
```

```
## [1] 21 23 25 28 31
```

```
dpX <- round(sd(X), 4)
dpX
```

```
## [1] 3,9749
```

Note que, da mesma forma que a variância no R, o desvio padrão calculado no R tem como base a variância cujo numerador é $(n - 1)$.

Fórmula alternativa da Variância

Desenvolvendo a fórmula da definição da variância tem-se:

$$\begin{aligned}
 \text{var}(X) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2X_i\bar{X} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{n} n\bar{X}^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X}\bar{X} + \bar{X}^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2.
 \end{aligned}$$

Em outras palavras

$$\text{var}(X) = \text{média dos quadrados} - \text{quadrado da média}.$$

Exemplo de variância e desvio padrão no R

Tomando o exemplo numérico da tabela 2.7 (Sartoris, 2013, p.40) sobre notas do aluno A tem-se:

Aluno A	notas	notas^2
Economia	3	9
Contabilidade	2	4
Administração	4	16
Matemática	1	1
Somatória	10	30
Média	2,5	7,5

$$\text{var}(X) = 7,5 - (2,5)^2 = 1,25$$

$$\text{dp}(X) = \sqrt{1,25} = 1,12$$


```
X3 <- c(3, 2, 4, 1)
mediaX3e2 <- sum(X3^2)/length(X3)
mediaX3 <- sum(X3)/length(X3)
varX3 <- mediaX3e2 - mediaX3^2
varX3
```

```
## [1] 1,25
```

```
dpX3 <- round(sqrt(varX3), 4)
dpX3
```

```
## [1] 1,118
```

1.2.4 Desvio Absoluto Médio

Por definição, o desvio absoluto médio de um conjunto de dados

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

é a média aritmética dos valores absolutos dos desvios em relação a média de X_i ,

$$\delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|.$$

Se os valores de X estiverem em ordem crescente

$$X_1 \leq X_2 \leq \dots, X_n,$$

sendo válida pelos menos uma desigualdade, e se h é um inteiro positivo tal qual que

$$X_i < \bar{X} \text{ para } 1 \leq i \leq h$$

e

$$X_i \geq \bar{X} \text{ para } h < i \leq n,$$

temos

$$\delta = \frac{1}{n} \left[- \sum_{i=1}^h (X_i - \bar{X}) + \sum_{i=h+1}^n (X_i - \bar{X}) \right]$$

Como a soma dos n desvios em relação á média \bar{X} é zero

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) = 0$$

segue-se que

$$\sum_{i=h+1}^n (X_i - \bar{X}) = - \sum_{i=1}^h (X_i - \bar{X}).$$

Substituindo (1.2.4) em (1.2.4) se tem

$$\delta = \frac{2}{n} \sum_{i=h+1}^n (X_i - \bar{X}) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^h (\bar{X} - X_i)$$

Note que se pode economizar cálculos se optar por uma das fórmulas do desvio absoluto médio dado por (1.2.4). O desvio absoluto médio será utilizado mais adiante para definir a fórmula da discrepância máxima na seção sobre o índice de Gini.

1.2.5 Diferença Absoluta Média

Por definição, a diferença absoluta média de um conjunto de dados

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

é dado por

$$\Delta = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |X_i - X_j|.$$

Se

$$X_1 \leq X_2 \leq \dots, X_n$$

é possível escrever os valores de $X_i - X_j$, com $i + 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$, com segue

$$\begin{array}{ccccc} X_n - X_n & X_n - X_{n-1} & \cdots & X_n - X_2 & X_n - X_1 \\ X_n - X_{n-1} & X_{n-1} - X_{n-1} & \cdots & X_{n-1} - X_2 & X_{n-1} - X_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_n - X_2 & X_{n-1} - X_2 & \cdots & X_2 - X_2 & X_1 - X_1 \\ X_n - X_1 & X_{n-1} - X_1 & \cdots & X_2 - X_1 & X_1 - X_1 \end{array}$$

Coletando os termos positivos e os negativos, se tem

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{n^2} [X_1 + 3X_2 + \dots + (2n-3)X_{n-1} + (2n-1)X_n] - \\ &\quad - \frac{1}{n^2} [X_n - 3X_{n-1} + \dots + (2n-3)X_2 + (2n-1)X_1] \end{aligned}$$

Note que o segundo membro de (1.2.5) (lado direito) é a soma algébrica de duas parcelas de sinais contrários, seu valor não se altera se for adicionado a cada uma das expressões entre colchetes a expressão

$$[X_n + 3X_{n-1} + \dots + (2n-3)X_2 + (2n-1)X_1].$$

Dessa forma se obtém

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{n^2} 2n [X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1} + X_n] - \\ &\quad - \frac{2}{n^2} [X_n + 3X_{n-1} + \dots + (2n-3)X_2 + (2n-1)X_1]. \end{aligned}$$

Como

$$\sum_{i=1}^n X_i = n\bar{X}$$

se tem

$$\Delta = 2\bar{X} - \frac{2}{n^2} [(2n-1)X_1 + (2n-3)X_2 + \dots + 3X_{n-1} + X_n].$$

Somando e subtraindo

$$\sum_{i=1}^n X_i = n\bar{X}$$

à expressão entre colchetes em (1.2.5) se tem

$$\Delta = 2\bar{X} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{4}{n^2} [nX_1 + (n-1)X_2 + \dots + 2X_{n-1} + X_n]$$

ou

$$\Delta = 2\bar{X} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n (n-i+1)X_i.$$

Com mais algumas transformações algébricas de (1.2.5) se tem

$$\Delta = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n iX_i - 2\bar{X} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Note que a fórmula da diferença média absoluta será utilizada mais adiante para a obtenção da fórmula do índice de Gini.

1.2.6 Histograma

O histograma é uma ferramenta da estatística descritiva para mostrar visualmente, de forma bastante simples, como os valores da variável estão distribuídos. Mas também permite ter uma ideia visual da dispersão do conjunto de valores. Portanto, não se trata de uma medida de dispersão. Mas deveria ser a primeira coisa a se obter das variáveis de interesse em um trabalho de pesquisa.

Considere a altura de 30 pessoas medidas em centímetros.

Tabela 2.1 - Altura de 30 pessoas em cm.

159	168	172	175	181
161	168	173	176	183
162	169	173	177	185
164	170	174	178	190
166	171	174	179	194
167	171	174	180	201

Usando o R para construir o histograma do exemplo numérico

Os dados são inputados na variável X.

```
X <- c(159, 161, 162, 164, 166, 167, 168, 168, 169,  
      170, 171, 171, 172, 173, 173, 174, 174, 174, 175,  
      176, 177, 178, 179, 180, 181, 183, 185, 190, 194,  
      201)  
head(X)
```

```
## [1] 159 161 162 164 166 167
```

```
obsX <- length(X)  
obsX
```

```
## [1] 30
```

```
faixaX <- range(X)  
faixaX
```

```
## [1] 159 201
```

Usando a função hist do R para elaborar o histograma de altura

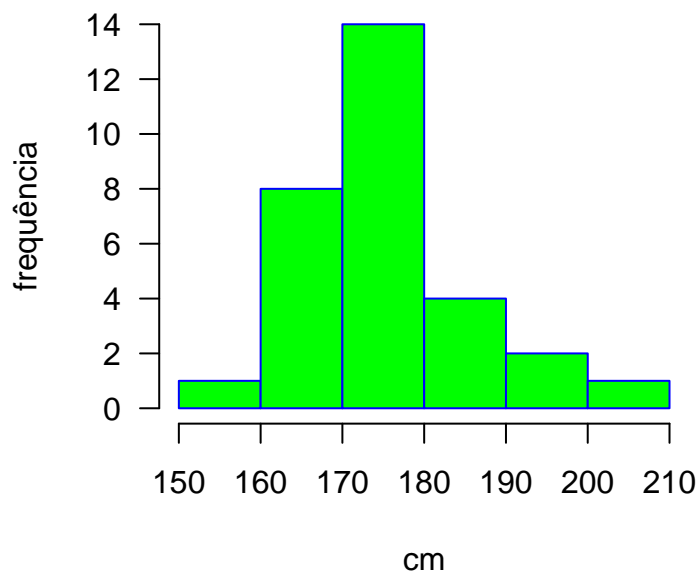
```
grafico1 <- hist(  
  X,  
  main="Histograma da Altura",  
  xlab="cm",  
  ylab="frequência",  
  border="blue",  
  col="green",  
  xlim=c(150,210),  
  las=1,  
  breaks=5,  
  right=FALSE  
)  
grafico1
```

onde

- **main**="Histograma da Altura de 30 pessoas" título do histograma
- **xlab**="cm" rótulo do eixo horizontal
- **ylab**="frequência" rótulo do eixo vertical
- **border**="blue" cor do contorno das barras
- **col**="green" cor das barras
- **xlim**=c(150,210) limite inferior e superior
- **las**=1 rotação do rótulo dos números do eixo vertical
- **breaks**=5 número de classes
- **right**=FALSE define intervalo do tipo [a,b), se FALSE, e (a,b], se TRUE.

Obtendo o histograma

Histograma da Altura de 30 pessoas



O pacote **ggplot2** gera gráficos e histogramas melhor elaborados.

Obtendo o histograma usando uma forma alternativa

Agrupando essas pessoas em **classes** de 10 cm temos:

classes	frequência
[150 ; 160[1
[160 ; 170[8
[170 ; 180[14
[180 ; 190[4

classes	frequência
[190 ; 200[2
[200 ; 210[1

Fazendo isso no R:

```
nobs <- c(1:30)
dataX <- as.data.frame(cbind(nobs, X))
# transformando em data frame
tail(dataX)
```

```
##      nobs  X
## 25    25 181
## 26    26 183
## 27    27 185
## 28    28 190
## 29    29 194
## 30    30 201
```

```
# mostrando as seis últimas observações
quebras <- seq(150, 210, by = 10)
# definindo os intervalos
quebras
```

```
## [1] 150 160 170 180 190 200 210
```

```
dataX.cut <- cut(dataX$X, quebras, right = FALSE)
# construindo as classes fechado a esq e aberto a
# direita
dataX.freq <- table(dataX.cut)
# obtendo a frequência para cada classe.
dataXfreq <- cbind(dataX.freq)
# colocando os dados em colunas
dataXfreq
```

```
##           dataX.freq
## [150,160)          1
## [160,170)          8
## [170,180)         14
## [180,190)          4
## [190,200)          2
## [200,210)          1
```

1.2.7 Diagrama de caixa (Boxplot)

O texto sobre o diagrama de caixa foi baseado em Morettin and Bussab (2013).

Boxplot ou caixa de bigode também é uma ferramenta da estatística descritiva que permite visualizar a dispersão dos valores da variável em análise. O que define o diagrama de caixa são os quartis. A parte inferior e superior da caixa, são respectivamente o primeiro quartil (Q_1) e o terceiro quartil (Q_3). A linha que corta da caixa é a mediana ou o segundo quartil (Q_2). Os bigodes que são as linhas que se estendem a partir da caixa, são calculado com base na amplitude interquartil (AIQ). A amplitude interquartil é a diferença entre os valores do terceiro e do primeiro quartis. Ou seja,

$$AIQ = Q_3 - Q_1$$

O bigode inferior denominado LI é calculado subtraindo $1,5 \times AIQ$ do valor do primeiro quartil Q_1 . Ou seja,

$$LI = Q_1 - 1,5 \times AIQ$$

O bigode superior, denominado LS , é calculado somando $1,5 \times AIQ$ ao valor da terceiro quartil Q_3 . Ou seja,

$$LS = Q_3 + 1,5 \times AIQ$$

Os valores que forem menor que o LI ou maior que o LS são denominados valores discrepantes ou *outliers*. Os valores discrepantes, quando existentes, são colocados separadamente no diagrama de caixa mantendo a distancia relativa do limite inferior ou do limite superior.

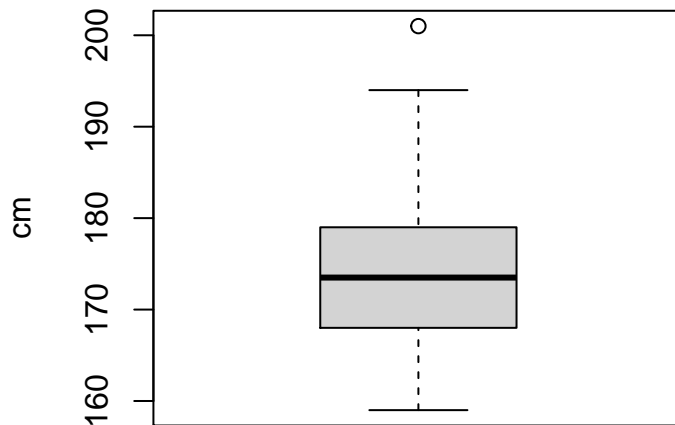
Toma-se o mesmo exemplo da altura de 30 pessoas para apresentar o boxplot.

O código seria:

```
boxplot(X, data = dataX, main = "Diagrama de Caixa",  
        ylab = "cm", xlab = "altura de 30 pessoas")
```

e o resultado segue abaixo.

Diagrama de Caixa



altura de 30 pessoas

1.3 Medidas de relação linear entre duas variáveis

Este assunto tem como base o material de Sartoris (2013).

Parece um pouco estranho incluir esse tópico logo depois das medidas de dispersão. Mas a variância é um caso especial da covariância que é a primeira medida de relação linear entre duas variáveis.

O coeficiente de correlação utiliza a covariância e o desvio padrão para resolver o problema de interpretação do resultado da covariância.

1.3.1 Covariância

pode ser estendida como uma *variância conjunta* entre duas variáveis. Ou seja,

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

Fórmula alternativa da Variância

Também existe a fórmula alternativa da covariância.

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \overline{XY}.$$

Fórmula alternativa da Covariância

Em outras palavras

$$\text{cov}(X, Y) = \text{média dos produtos de X e Y} - \text{produto das médias de X e Y}.$$

Covariância no R

Tomando o exemplo de consumo e renda da tabela 2.11 (Sartoris, 2013, p.42) tem-se

Ano	Consumo(X)	Renda(Y)	(XY)
1	600	1.000	600.000
2	700	1.100	770.000
3	800	1.300	1.040.000
4	900	1.400	1.260.000
Somatória	3.000	4.800	3.670.000
Média	750	1.200	917.500

Covariância no R

```
C1 <- c(600, 700, 800, 900)
R1 <- c(1000, 1100, 1300, 1400)
mediaC1 <- sum(C1)/length(C1)
mediaR1 <- sum(R1)/length(R1)
mediaC1R1 <- sum(C1 * R1)/length(C1)
covC1R1 <- mediaC1R1 - mediaC1 * mediaR1
covC1R1
```

```
## [1] 17500
```

```
cov(C1, R1)
```

```
## [1] 23333,33
```

Note que a função covariância no R é calculada dividindo por $(n - 1)$ e não por n .

1.3.2 Coeficiente de Correlação

É obtido dividindo a covariância pelos desvios padrões das variáveis, retirando-se o efeito dos valores de cada variável. Como as unidades das variáveis se cancelam matematicamente, o coeficiente de correlação é um número puro que varia entre -1 e +1. Essa característica o torna mais fácil e claro a sua interpretação. Ou seja,

$$\text{corr}(X, Y) \cong \rho_{xy} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{dp(X) \times dp(Y)}$$

onde

$$-1 \leq \rho \leq +1$$

Portanto, quando o coeficiente de correlação é igual a zero ou muito próximo a zero, significa que as duas variáveis analisadas não tem relação do tipo linear entre elas. Quando o coeficiente de correlação é igual a -1 ou próximo de -1, tal fato indica que a existência de uma relação do tipo linear entre as duas variáveis analisadas, sendo que as variações ocorrem no sentido oposto. Ou seja, quando uma das variáveis aumenta de valor, a outra diminui. Quando o coeficiente de correlação é igual a +1 ou muito próximo de um positivo, tal fato indica que as duas variáveis tem uma relação do tipo linear, sendo que as variações em ambas as variáveis ocorrem no mesmo sentido. Ou seja, quando uma das variáveis aumenta de valor, a outra aumenta também. O que significa o coeficiente de correlação ser: i) exatamente igual a zero; ii) ser exatamente igual a -1 e; exatamente igual a +1?

Correlação no R

```
medC1 <- sum(C1)/length(C1)
medR1 <- sum(R1)/length(R1)
varC1 <- (sum((C1 - medC1)^2))/length(C1)
varC1
```

```
## [1] 12500
```

```
varR1 <- (sum((R1 - medR1)^2))/length(R1)
varR1
```

```
## [1] 25000
```

```
dpC1 <- abs(sqrt(varC1))
dpR1 <- abs(sqrt(varR1))
corrC1R1 <- round(covC1R1/(dpC1 * dpR1), 4)
corrC1R1
```

```
## [1] 0,9899
```

Ou simplesmente

```
round(cor(C1, R1), 4)
```

```
## [1] 0,9899
```

Capítulo 2

Medidas de desigualdade

O assunto sobre medidas de desigualdade está baseada na sua totalidade no capítulo 17 de Hoffmann (2006)

2.1 Princípio de Pigou-Dalton

A condição de Pigou-Dalton define que as medidas de desigualdades devem ter seus valores aumentados quando há transferência regressivas de renda. Para entender a condição de Pigou-Dalton, considere uma população com apenas duas pessoas cujas rendas são X_1 e X_2 . Então, $\mu = \frac{X_1 + X_2}{2}$. No caso de perfeita igualdade, $X_1 = X_2 = \mu$. No caso de uma distribuição com $X_1 \neq X_2$, uma transferência de renda do mais pobre para o mais rico, mantendo a renda média constante, aumenta o grau de desigualdade.

2.2 Transferência Regressiva

Essa transferência de renda do mais pobre para o mais rico, mantida a renda média constante, é denominada como **transferência regressiva** de renda. Portanto, uma **transferência progressiva** é a transferência de renda do mais rico para o mais pobre.

2.3 Curva de Lorenz

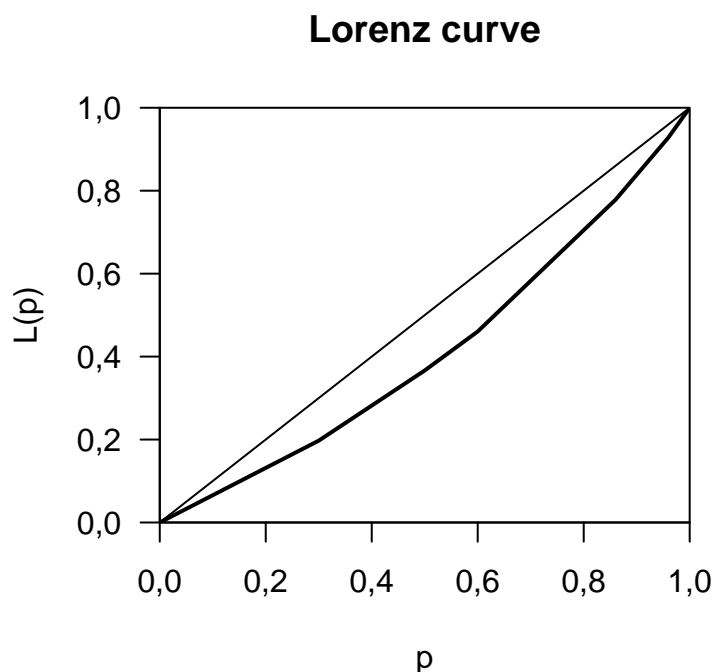
Tabela 2.1: Distribuição de pessoas ocupadas conforme renda obtida na atividade exercida no Brasil, de acordo com a PNAD 2003

estrato	% no estrato da população (%)	% no estrato da renda (%)	% acumulada da população (100p)	% acumulada da renda (100Φ)
I	30	7	30	7
II	20	9	50	16
III	20	13	70	29
IV	10	10	80	39
V	10	16	90	55
VI	5	13	95	68
VII	4	19	99	87
VIII	1	13	100	100

Considere os dados da tabela 2.1. Na coluna de porcentagem acumulada podemos observar que 70% da população possui 29% da renda. Os percentuais acumulados da população p e da renda Φ formam um plano cartesiano (p, Φ) originando a Cuirva de Lorenz.

```
library(ineq)
# usando os valores do exemplo em porcentagem mesmo
p <- c(30, 20, 20, 10, 10, 5, 4, 1)
r <- c(7, 9, 13, 10, 16, 13, 19, 13)

# calcula o mínimo da curva de Lorenz
Lcmin <- Lc(r, n = p)
# Desenha a curva de Lorenz em um gráfico
plot(Lcmin)
```



Considerando a curva de Lorenz, figura 2.1, que é basicamente a obtida pelo R, figura ??, mas com algumas indicações, é possível obter algumas definições.

```
knitr::include_graphics("lorenz3.png")
```

A área que corresponde a letra a é denominada área de desigualdade. o seguimento de retas \overline{AB} é chamado de *linha de perfeita igualdade* onde $p = \Phi$ e a área de de desigualdade é zero.

Analisando o casos de máxima desigualdade:

- excluindo-se o fato de renda negativa, considere que apenas um de n indivíduos receba toda a renda e os demais $n - 1$ indivíduos recebam zero de renda.
- Neste caso a porcentagem de renda é zero até o ponto $\frac{n-1}{n}$ no eixo horizontal, tornando-se $\Phi = 1$ ao se incluir o último indivíduo.
- Neste caso, a Curva de Lorenz é dada pela poligonal \widehat{ABC} e a área de desigualdade máxima é o triângulo ABC .

2.4 Índice Gini

Considere os dados da tabela 2.1. Seja p o valor da proporção acumulada da população até certo estrato e seja Φ o valor da correspondente proporção

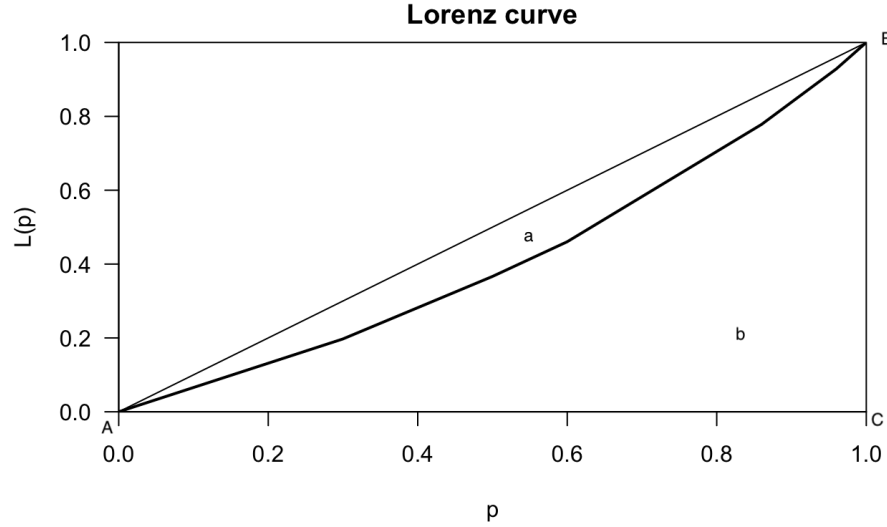


Figura 2.1: A curva de Lorenz com algumas indicações

acumulada da renda. Os pares de valores (p, Φ) , para os diversos estratos, definem pontos em um sistema de eixos cartesianos como aparece na figura 2.1. Estes pontos estão sobre a curva de Lorenz, que mostra como a proporção acumulada da renda (Φ) varia em função da proporção acumulada da população (p), com as pessoas ordenadas de acordo com valores crescentes da renda. A área correspondente a a que está entre a reta AB e a curva de Lorenz na figura 2.1, é denominada **área de desigualdade**.

Para entender como ocorre a variação desta área de desigualdade, a área a , primeiro considere uma situação de distribuição de renda com perfeita igualdade, ou seja, uma população em que todos recebem a mesma renda. Nesta situação, a uma população p da população corresponde uma igual proporção Φ da renda total, ou seja, $\Phi = p$. Portanto, a curva de Lorenz dessa distribuição coincide com a reta AB da figura 2.1, denominado, por isso, de **linha de perfeita igualdade**. Neste caso a área de desigualdade é igual a zero.

Considere agora uma outra situação, uma distribuição de renda com o máximo de desigualdade. Considerando que **não** existe a possibilidade de renda negativa, esse seria o caso de uma população com n pessoas, em que uma delas recebe toda a renda e as $n - 1$ restante receba zero de renda. Nesta situação, a proporção acumulada da renda é igual a zero até o ponto do eixo horizontal (abscissa) $\frac{(n-1)}{n}$, tornando-se $\Phi = 1$ quando se inclui a pessoa que recebe toda a renda. Neste caso, a curva de Lorenz passa a ser a poligonal ABC da figura 2.1. Que é numericamente igual a 0,5 (Por quê?).

Por definição, o **índice de Gini (G)** é uma relação entre a área de desigualdade,

indicada por a que passar a ser denominada de α , e a área do triângulo ABC que é numericamente igual a 0,5, ou seja,

$$G = \frac{\alpha}{0,5} = 2\alpha$$

A fórmula (2.4) é uma das fórmulas de Gini que tem utilidade do ponto de vista teórico. Uma vez que

$$0 \leq \alpha \leq 0,5$$

tem-se que

$$0 \leq G \leq 1$$

Ou seja de que o índice de Gini varia entre zero, ausência de desigualdade, e um, máxima desigualdade. Adicionalmente, o índice de Gini é um número adimensional.

Uma fórmula alternativa e mais prática do ponto de vista do cálculo do índice de Gini pode ser obtida considerando-se uma distribuição discreta.

Seja uma variável aleatória discreta X_i para $i = 1, \dots, n$, cujos valores estão em ordem crescente

$$X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_{n-1} \leq X_n$$

admitindo-se que os n valores são igualmente prováveis.

a proporção acumulada do número de elementos, m até o i -ésimo elemento, é

$$p_i = \frac{i}{n}, \text{ para } i = 1, \dots, n$$

A correspondente proporção acumulada de X , até o i -ésimo elemento é

$$\Phi_i = \frac{\sum_{j=1}^i X_j}{\sum_{j=1}^n X_j} = \frac{1}{n\mu} \sum_{j=1}^i X_j$$

onde

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

Se X representa a renda individual e se $X_j < X_{j+1}$, Φ_i representa a fração da renda total apropriada pelas pessoas com renda inferior ou igual a X_i . As expressões (2.4) e (2.4) definem as coordenadas (p_i, Φ_i) com $i = 1, \dots, n$ de n

pontos da curva de Lorenz. A rigor não existe, nesse caso, uma curva, mas uma poligonal cujos vértices são a origem dos eixos e os pontos de coordenadas (p_i, Φ_i) .

Na sequência é apresentada de forma resumida como se calcula o índice de Gini a partir dos valores de X_i para $i = 1, \dots, n$ da variável. Na figura 2.1 a soma das áreas a e b totaliza a área do polígono ABC que numericamente é igual a 0,5. Portanto, $a = 0,5 - b$. Ou seja, colocando na notação mais elegante,

$$\alpha = 0,5 - \beta.$$

Substituindo (2.4) em (2.4) obtém-se

$$G = \frac{0,5 - \beta}{0,5} = 1 - 2\beta.$$

Note que a área abaixo da “curva” de Lorenz pode ser representada, de forma aproximada, como a soma das áreas de n trapézios um do lado do outro. Desta forma, a área b da figura 2.1, compreendida entre a poligonal de Lorenz e o eixo das abscissas, é obtida somando-se a área dos n trapézios. Ou seja, a área do i -ésimo trapézio é

$$S_i = \frac{\Phi_{i-1} + \Phi_i}{2} \times \frac{1}{n}$$

onde Φ_{i-1} é a base menor do i -ésimo trapézio; Φ_i é a base maior do i -ésimo trapézio e; $1/n$ é a altura do trapézio que corresponde a pessoa da população composta por n pessoas.

Note que o valor de $\Phi_0 = 0$, ou seja, o valor de Φ_{i-1} para $i = 1$. Com base na fórmula (2.4) é possível obter a área corresponde a b na figura 2.1 ou β nas notações matemáticas no texto

$$\beta = \sum_{i=1}^n S_i = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (\Phi_{i-1} + \Phi_i)$$

Substituindo (2.4) em (2.4), obtém-se

$$G = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Phi_{i-1} + \Phi_i)$$

Considerando a fórmula (2.4) e que $\Phi_0 = 0$, se obtém o índice de Gini em termos da variável X_i . Ou seja,

$$G = 1 - \frac{1}{n^2 \mu} [(2n-1)X_1 + (2n-3)X_2 + \dots + 3X_{n-1} + 1X_n]$$

Na parte sobre Estatística Descritiva foi apresentada a medida de dispersão chamada Diferença Absoluta Média que é dada por

$$\Delta = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |X_i - X_j|$$

Trabalhando algebricamente a fórmula (2.4)

$$\Delta = 2\mu - \frac{2}{n^2} [(2n-1)X_1 + (2n-3)X_2 + \cdots + 3X_{n-1} + 1X_n]$$

Se dividir (2.4) por 2μ obtém a fórmula do índice de Gini em termos da medida de dispersão Diferença Absoluta Média

$$G = \frac{\Delta}{2\mu}$$

Tratando-se da distribuição da renda em uma população, a relação (2.4) mostra que o índice de Gini, como medida de do grau de desigualdade, apresenta a vantagem de medir diretamente as diferenças de rendal, levando em consideração diferenças entre as rendas de **todos** os pares de pessoas.

Como Δ é uma medida de dispersão da distribuição, a relação (2.4) mostra que o índice de Gini é uma medida de dispersão relativa. Assim, o conceito de desigualdade de uma distribuição se confunde com o conceito de dispersão relativa.

Com um desenvolvimento algébrico de Δ é possível transformar a fórmula (2.4) em

$$G = \frac{2}{n^2\mu} \sum_{i=1}^n iX_i - \frac{1}{n} - 1$$

A relação (2.4) mostra que, no cálculo do índice de Gini, cada valor de X_i da variável aparece poderado por i . Ou seja, X_i aparece poderada pelo respectivo número de ordem na sequência dos valores ordenados.

Exemplo numérico

Para aplicar a fórmula do índice de Gini, utiliza-se os dados apresentados na tabela abaixo, obtidos de Hoffmann (2006).

Tabela 2.2: Valores de X_i , p_i , Φ_i e $\Phi_{i-1} + \Phi_i$ para a população hipotética de 8 elementos

i	p_i	X_i	$\sum_{j=1}^n X_j$	Φ_i	$\Phi_{i-1} + \Phi_i$
1	0,125	1	1	0,02	0,02
2	0,250	1	2	0,04	0,06
3	0,375	1	3	0,06	0,10

i	p_i	X_i	$\sum_{j=1}^n X_j$	Φ_i	$\Phi_{i-1} + \Phi_i$
4	0,500	2	5	0,10	0,16
5	0,625	4	9	0,18	0,28
6	0,750	8	17	0,34	0,52
7	0,875	13	30	0,60	0,94
8	1,000	20	50	1,00	1,60

Com essas informações é possível calcular o índice de Gini, através de (2.4)

$$G = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Phi_{i-1} + \Phi_i);$$

através de (2.4)

$$G = \frac{\Delta}{2\mu},$$

onde

$$\Delta = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |X_i - X_j|$$

e

$$\mu = \sum_{i=1}^n X_i;$$

e através de (2.4)

$$G = \frac{2}{n^2\mu} \sum_{i=1}^n iX_i - \frac{1}{n} - 1$$

Usando (2.4), é necessário totalizar a coluna $\Phi_{i-1} + \Phi_i$ na tabela 2.2. Ou seja,

```
options(OutDec = ",")
somaphis <- c(0.02, 0.06, 0.1, 0.16, 0.28, 0.52, 0.94,
             1.6)
somasomaphis <- sum(somaphis)
somasomaphis
```

```
## [1] 3,68
```

$$\sum_{i=1}^8 (\Phi_{i-1} + \Phi_i) = 3,68$$

Portanto

```
giniphis <- 1 - 1/length(somaphis) * somasomaphis
giniphis
```

```
## [1] 0,54
```

$$G = 1 - \frac{1}{8} \times 3,68 = 0,54$$

Para aplicar a fórmula (2.4) que é a fórmula do índice de Gini em termos de diferença absoluta média, Δ , é necessário calcular a diferença absoluta média com base nos dados de X_i da tabela 2.2.

```
xi <- c(1, 1, 1, 2, 4, 8, 13, 20)
```

```
XC <- matrix(xi, nrow = length(xi), ncol = length(xi),
             byrow = FALSE)
XC
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8]
## [1,]    1    1    1    1    1    1    1    1
## [2,]    1    1    1    1    1    1    1    1
## [3,]    1    1    1    1    1    1    1    1
## [4,]    2    2    2    2    2    2    2    2
## [5,]    4    4    4    4    4    4    4    4
## [6,]    8    8    8    8    8    8    8    8
## [7,]   13   13   13   13   13   13   13   13
## [8,]   20   20   20   20   20   20   20   20
```

```
XL <- matrix(xi, nrow = length(xi), ncol = length(xi),
             byrow = TRUE)
XL
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8]
## [1,]    1    1    1    2    4    8   13   20
## [2,]    1    1    1    2    4    8   13   20
## [3,]    1    1    1    2    4    8   13   20
## [4,]    1    1    1    2    4    8   13   20
## [5,]    1    1    1    2    4    8   13   20
## [6,]    1    1    1    2    4    8   13   20
## [7,]    1    1    1    2    4    8   13   20
## [8,]    1    1    1    2    4    8   13   20
```

```
DIFX <- XC - XL
DIFX
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8]
## [1,]    0    0    0   -1   -3   -7  -12  -19
## [2,]    0    0    0   -1   -3   -7  -12  -19
## [3,]    0    0    0   -1   -3   -7  -12  -19
## [4,]    1    1    1    0   -2   -6  -11  -18
## [5,]    3    3    3    2    0   -4   -9  -16
## [6,]    7    7    7    6    4    0   -5  -12
## [7,]   12   12   12   11    9    5    0   -7
## [8,]   19   19   19   18   16   12    7    0
```

```
ABSDIFX <- abs(DIFX)
ABSDIFX
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8]
## [1,]    0    0    0    1    3    7   12   19
## [2,]    0    0    0    1    3    7   12   19
## [3,]    0    0    0    1    3    7   12   19
## [4,]    1    1    1    0    2    6   11   18
## [5,]    3    3    3    2    0    4    9   16
## [6,]    7    7    7    6    4    0    5   12
## [7,]   12   12   12   11    9    5    0    7
## [8,]   19   19   19   18   16   12    7    0
```

```
iota <- matrix(1, nrow = length(xi), ncol = 1, byrow = TRUE)
iota
```

```
##      [,1]
## [1,]    1
## [2,]    1
## [3,]    1
## [4,]    1
## [5,]    1
## [6,]    1
## [7,]    1
## [8,]    1
```

```
somacolunaABSDIFX <- t(iota) %*% ABSDIFX
somacolunaABSDIFX
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8]
## [1,]   42   42   42   40   40   48   68  110
```

```
somalinhasomacolunaABSDIFX <- somacolunaABSDIFX %*%
  iota
somalinhasomacolunaABSDIFX
```

```
##      [,1]
## [1,] 432
```

```
obs <- length(xi)

delta <- obs^(-2) * somalinhasomacolunaABSDIFX
delta
```

```
##      [,1]
## [1,] 6,75
```

Ou seja,

$$\Delta = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |X_i - X_j| = \frac{1}{(8)^2} \times 432 = 6,75$$

Com a diferença absoluta média de X_i devidamente calculada, aplica-se a fórmula (2.4)

```
ximedio <- sum(xi)/length(xi)
ximedio
```

```
## [1] 6,25
```

```
ginidelta <- delta/(2 * ximedio)
ginidelta
```

```
##      [,1]
## [1,] 0,54
```

$$G = \frac{\Delta}{2\mu} = \frac{6,75}{2 \times 6,25} = 0,54$$

Para aplicar a fórmula (2.4) na obtenção do índice de Gini é necessário ponderar cada valor de X_i pela sua respectiva ordem i e soma todos os respectivos produtos

$$\sum_{i=1}^n iX_i.$$

usando os dados da tabela 2.2

```
is <- matrix(1:length(xi), nrow = length(xi), ncol = 1,
             byrow = TRUE)
is
```

```
##      [,1]
## [1,]    1
## [2,]    2
## [3,]    3
## [4,]    4
## [5,]    5
## [6,]    6
## [7,]    7
## [8,]    8
```

```
ixi <- t(is) * xi
ixi
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8]
## [1,]    1    2    3    8   20   48   91  160
```

```
somaixi <- sum(ixi)
somaixi
```

```
## [1] 333
```

```
ginifinal <- 2/(obs^2 * ximedio) * somaixi - obs^(-1) -
1
ginifinal
```

```
## [1] 0,54
```

obtem

$$G = \frac{2}{n^2\mu} \sum_{i=1}^n iX_i - \frac{1}{n} - 1 = \frac{2}{8^2 \times 6,25} \times 333 - \frac{1}{8} - 1 = 0,54$$

2.5 Discrepância Máxima

Discrepância Máxima é a maior distância entre a linha AB e a curva de Lorenz da figura 2.1. Portanto, a discrepância máxima é a diferença máxima entre a relação da porcentagem acumulada da população e a sua respectiva porcentagem acumulada da renda numa situação de exata igualdade dada pela reta AB e a relação da porcentagem acumulada da população e a sua respectiva porcentagem acumulada da renda numa situação de desigualdade entre as pessoas dessa população que na figura corresponde a poligonal da curva de Lorenz. De acordo com Hoffmann (2006)

$$D = p_h - \Phi_h$$

Portanto, o cálculo de D através de (2.5) depende de h , um número inteiro positivo. Encontrando-se $i = h$ encontra-se a discrepância máxima D .

Seja uma sequência de valores ordenados em ordem crescente de uma variável discreta X_i

$$X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n$$

sendo válida pelos menos uma desigualdade.

Para o cálculo da discrepância máxima, é importante entender que a mesma ocorre quando a inclinação do segmento da poligonal da curva de Lorenz passa de um valor menor que um para um valor maior que um. De acordo com Hoffmann (2006), a inclinação do segmento da poligonal é dada por

$$d_i = \frac{X_i}{\mu}$$

Essa mudança é identificada quando o valor de X_i ordenada em ordem crescente passa de um valor menor que a média μ para um valor maior que a média μ , ou seja,

$$X_i < \mu \text{ para } 1 \leq i \leq h$$

e

$$X_i \geq \mu \text{ para } h < i \leq n$$

Nestas condições percorre-se a sequência de valores em ordem crescente, o valor de $p_i - \Phi_i$ aumenta até a inclusão do h -ésimo elemento, que corresponde a (2.5).

Considerando (2.5), (2.4) e (2.4) chega-se em

$$D = \frac{h}{n} - \frac{1}{n\mu} \sum_{i=1}^h X_i$$

que depois de algumas manobras algébricas torna-se

$$D = \frac{1}{n\mu} \sum_{i=1}^h (\mu - X_i)$$

Na parte de estatística descritiva foi apresentado a medida de dispersão desvio absoluto médio

$$\delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|$$

e considerando que

$$\delta = \frac{1}{n} \left[- \sum_{i=1}^h (X_i - \mu) + \sum_{i=h+1}^n (X_i - \mu) \right]$$

e que

$$\sum_{i=h+1}^n (X_i - \mu) = - \sum_{i=1}^h (X_i - \mu).$$

Portanto

$$\delta = \frac{2}{n} \sum_{i=h+1}^n (X_i - \mu) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^h (\mu - X_i).$$

Comparando (2.5) e (2.5) obtém-se

$$D = \frac{\delta}{2\mu}.$$

Se o Desvio Absoluto Médio, δ , é uma medida de dispersão da distribuição, a fórmula (2.5) mostra que discrepância máxima, da mesma forma que o índice de Gini, é uma medida de dispersão relativa. Retomando o exemplo numérico da tabela 2.2, é possível obter o valor da sua discrepância máxima através de (2.5).

$$D = p_h - \Phi_h = 0,625 - 0,180 = 0,445.$$

O mesmo resultado poderia ser obtido através da fórmula (2.5). Para isso é necessário calcular o desvio absoluto médio, δ , para os valores de X_i do exemplo numérico. Ou seja,

```
somadesvioabsolutomedioxi <- sum(abs(xi - ximedio))
somadesvioabsolutomedioxi
```

```
## [1] 44,5
```

```
desvioabsolutomedioxi <- (length(xi))(-1) * sum(abs(xi -
  ximedio))
desvioabsolutomedioxi
```

```
## [1] 5,5625
```

$$\delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu| = \frac{1}{8} \times 44,5 = 5,5625.$$

Portanto,

```
discrepanciamaximaxi <- desvioabsolutomedioxi/(2 *
  ximedio)
discrepanciamaximaxi
```

```
## [1] 0,445
```

$$D = \frac{\delta}{2\mu} = \frac{5,5625}{2 \times 6,25} = 0,445.$$

2.6 Redundância e Índice de Theil

2.6.1 Teoria da Informação

Para entender melhor as medidas de desigualdades de Theil, é necessário introduzir alguns conceitos da teoria da informação.

Seja x , a probabilidade de ocorrer o evento E .

- Para $x = 1$, a mensagem **evento E ocorreu** não tem nenhum conteúdo informativo.
- Para $x \rightarrow 0$, ou seja, para valores muito pequenos de x , a mensagem **evento E ocorreu** tem alto valor informativo.

A segunda situação seria, por exemplo, o caso de uma notícia que nos causas surpresa ou de um *furo* de imprensa. Quando x tende a zero, o conteúdo informativo da mensagem **evento** E **ocorreu** tende a infinito.

Matematicamente, o conteúdo informativo da mensagem que afirma que determinado evento ocorreu é dado por

$$h(x) = \log \frac{1}{x} = \log x^{-1} = -\log x$$

De acordo com Hoffmann (2006), a escolha da função logarítmica é devido a propriedade de atividade do conteúdo informativo no caso de eventos independentes. Portanto, se E_1 e E_2 são dois eventos independentes com probabilidades x_1 e x_2 , respectivamente, a probabilidade de que ambos ocorram é $x_1 x_2$. O conteúdo informativo da mensagem de que ambos os eventos ocorreram é

$$h(x_1 x_2) = \log \frac{1}{x_1 x_2} = \log \frac{1}{x_1} + \log \frac{1}{x_2} = h(x_1) + h(x_2)$$

Em teoria da informação, normalmente se utiliza logaritmos na base 2 ou logaritmos naturais. Desta forma:

- Logaritmos na base 2: o conteúdo informativo é medido em **bits**.
- Logaritmos naturais: o conteúdo informativo é medido em **nits**.
- 1 bit = 0,693 nit.
- 1 nit = 1,443 bit.

Generalizando o conceito de informação, é apresentando, na sequência, como se mede o conteúdo informativo de uma **mensagem sujeita a erro**, ou **mensagem incerta**.

Para isso, admita-se que a a probabilidade de chover em um determinado dia, em certo local, estabelecida com base em séries históricas, seja $x_1 = 0,5$. Nesse caso o conteúdo da informação **chove** é de

$$h(x_1) = \log \frac{1}{0,5} = \log 2^1 = 1 \text{ bit}$$

Suponha agora que uma previsão de tempo estabeleceu que iria chover. Suponha, também, que, com base nos resultados anteriores de tais previsões, probabilidade de que realmente shova passa a ser $y_1 = 0,68$. De acordo com as novas suposições, o conteúdo da informação **chove** é

$$h(y_1) = \log \frac{1}{0,68} + 0,5564 \text{ bit}$$

O conteúdo informativo da previsão é

$$h(x_1) - h(y_1) = \log \frac{1}{x_1} - \log \frac{1}{y_1} = 1 - 0,5564 = 0,4436 \text{ bit}$$

ou

$$h(x_1) - h(y_1) = \log \frac{1}{x_1} - \log \frac{1}{y_1} = \log \frac{1}{x_1} + \log \left(\frac{1}{y_1} \right)^{-1} = \log \frac{y_1}{x_1} = \log \left(\frac{0,50}{0,68} \right) = 0,4436 \text{ bit}.$$

Ou seja, o conteúdo informativo **chove**, com base na probabilidade x_i nos dados históricos e na probabilidade y_i do histórico de previsões, é de 0,4436 bit.

Generalizando, o conteúdo informativo de uma mensagem sujeita a erro ou mensagem incerta, como é o caso da previsão, é dado por

$$\log \frac{y}{x}$$

onde

- x é a probabilidade *ex-ante* ou a probabilidade de que o evento ocorra antes de recebida a mensagem;
- y é a probabilidade *ex-post* ou a probabilidade de que o evento ocorra uma vez recebida a mensagem.

Na sequência é apresentado o conceito de *entropia*.

Entropia de uma distribuição $H(x)$

Seja o universo de n possíveis eventos E_i , para $i = 1, \dots, n$, mutuamente exclusivos aos quais associa-se as probabilidades x_i . Sabe-se que

$$\sum_i^n x_i = 1.$$

A informação esperada de uma mensagem certa, ou seja, a esperança matemática do conteúdo informativo da mensagem **ocorreu** E_i , também denominada entropia da distribuição, é

$$H(x) = E[h(x_i)] = \sum_{i=1}^n x_i h(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i \log \frac{1}{x_i} = - \sum_{i=1}^n x_i \log x_i$$

Para o caso particular de $x_i = 0$, adota-se a definição

$$x \log x = 0, \text{ se } x = 0$$

uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \log x) = 0$$

Para $0 < x_i \leq 1$ se tem

$$\frac{1}{x_i} \geq 1$$

e

$$\log \frac{1}{x_i} \geq 0.$$

Conclui-se que

$$H(x) = \sum_{i=1}^n x_i \log \frac{1}{x_i} = - \sum_{i=1}^n x_i \log x_i \geq 0$$

Valor mínimo de $H(x)$

O valor mínimo de $H(x)$ ocorre quando uma das probabilidades é 1 e as demais, conseqüentemente, são nulas. Nesse caso $H(x) = 0$. Ou seja, na somatória há um único $x_i = 1$ e o restante $x_i = 0$. Portanto,

- quando $x = 0$

$$x \log x = 0$$

de acordo com (2.6.1);

- quando $x = 1$ se tem $\log 1 = 0$ e também

$$x \log x = 0.$$

Assim o valor mínimo do valor esperado do conteúdo informativo $H(x)$ é

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n x_i \log x_i = 0$$

Valor Máximo de $H(x)$

Para encontrar o valor máximo de $H(x)$ sujeito a condição de que $\sum x_i = 1$, utiliza-se o método do multiplicador de Lagrange, escrevendo a seguinte função

$$\max H(x) = - \sum_{i=1}^n x_i \log x_i$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

então

$$\mathcal{L} = - \sum_{i=1}^n x_i \log x_i - \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - 1 \right)$$

Igualando a zero as derivadas parciais de (2.6.1) em relação a x_i e admitindo-se que se usa os logaritmos naturais, se tem:

$$\log x_i = -(1 + \lambda), \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

sendo que

$$x_i = e^{-(1+\lambda)} = \frac{1}{e^{(1+\lambda)}}.$$

Note que λ é constante neste caso.

O valor máximo de $H(x)$ acontece quando todos os valores de x_i , ou seja, todas as probabilidades são iguais entre si e, portanto, igual a $\frac{1}{n}$. Nesse caso,

$$H(x) = \sum_{i=1}^n x_i \log \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log n = n \frac{1}{n} \log n = \log n$$

Resumindo, o valor esperado da informação ou a entropia da distribuição $H(x)$ varia entre 0 e $\log n$. Ou seja,

$$0 \leq H(x) \leq \log n.$$

A entropia da distribuição é máxima, ou seja, há um máximo de incerteza a respeito do que pode ocorrer, quando todos os possíveis eventos são igualmente prováveis, ou seja, quando há um máximo de *desordem* no sistema.

Informação de uma mensagem incerta

Finalmente é apresentado o conceito de informação de uma mensagem incerta. Dado o universo de n possíveis eventos E_i , mutuamente exclusivos, com probabilidades x_i , para $i = 1, \dots, n$, considera-se uma mensagem incerta que poderia ser uma previsão ou uma mensagem duvidosa, que transforma as probabilidades *a priori* x_i em probabilidade *a posteriori* y_i , onde y_i é a probabilidade de ocorrência do evento E_i depois de recebido a mensagem. Lembrando (2.6.1), verifica-se que a esperança matemática do conteúdo informativo da mensagem é

$$I(y : x) = \sum_{i=1}^n y_i \log \frac{y_i}{x_i}$$

A definição (2.6.1), do conteúdo informativo de uma mensagem certa, é somente um caso especial de (2.6.1), em que uma probabilidade *a posteriori* é igual a um e todas as outras são iguais a zero, ou seja, $y_j = 1$ e $y_i = 0$ para todo $i \neq j$.

2.6.2 Índice T de Theil

Seja uma população com n pessoas em que cada uma recebe uma fração não negativa da renda total,

$$y_i \geq 0, \text{ com } i = 1, \dots, n.$$

Se a renda média é μ e X_i é a renda i -ésima pessoa,

$$y_i = \frac{X_i}{n\mu}.$$

Obviamente,

$$\sum_{i=1}^n y_i = 1.$$

Os valores de y_i tem as mesmas propriedades que as probabilidades x_i associadas a um universo de eventos E_i da teoria da informação. Assim sendo, pode-se, com base em (2.6.1), definir a **entropia** da distribuição de renda considerada como sendo

$$H(y) = \sum_{i=1}^n y_i \log \frac{1}{y_i}.$$

De acordo com (2.6.1), se tem

$$0 \leq H(y) \leq \log n.$$

Assim é possível definir as duas situações extremas:

- o caso de perfeita igualdade na distribuição da renda,

$$y_i = \frac{1}{n} \text{ para } i = 1, \dots, n,$$

se tem $H(y) = \log n$;

- o caso de perfeita desigualdade na distribuição de renda,

$$y_i = 1, \text{ para } i = 1, \dots, n,$$

se tem $H(y) = 0$.

A **entropia** é, portanto, uma medida do grau de igualdade da distribuição. Mas como o objeto de análise é desigualdade, é muito mais interessante uma medida de desigualdade. Para isto basta subtrair a entropia do seu valor próprio máximo, $\log n$. Essa medida, denominada **Índice T de Theil** da distribuição é dada por

$$T = \log n - H(y) = \sum_{i=1}^n$$

Para o cálculo do índice T de Theil, pode-se usar os logaritmos naturais ou os logaritmos na base 2, obtendo-se o valor de T em *nits* ou *bits*, respectivamente. Na prática, utiliza-se mais o logaritmo natural.

Note que

$$0 \leq T \leq \log n$$

sendo que:

- $T = 0$ corresponde ao caso de uma distribuição da renda com perfeita igualdade e;
- $T = \log n$ corresponde ao caso de uma distribuição da renda com perfeita desigualdade.

De (2.6.2) se tem

$$T = \sum_{i=1}^n y_i \log \frac{y_i}{\frac{1}{n}}.$$

Comparando essa equação com (2.6.1), verifica-se que o **índice T de Theil** corresponde à esperança do valor informativo de uma mensagem incerta, em que as probabilidades *a posteriori* são as frações da renda total y_i apropriadas pelas pessoas, e as probabilidades *a priori* são iguais a $1/n$, ou seja, iguais à fração da população correspondente a cada pessoa.

2.6.3 Índice de L de Theil

A outra medida de desigualdade proposta por Theil, o **índice L de Theil**, corresponde à esperança do valor informativo de uma mensagem incerta, em que as probabilidades *a posteriori** são as frações da população $1/n$ e as probabilidades *a priori* são as frações da renda y_i . Ou seja,

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log \frac{\frac{1}{n}}{y_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{ny_i}.$$

Verifica-se que o **índice L de Theil** é igual a zero no caso de perfeita igualdade

$$y_i = \frac{1}{n}$$

para todo i .

Basta uma das renda aproximar-se de zero para que o valor de L tenda a infinito, fazendo que o índice L seja inútil quando se trata de comparar distribuições de renda que incluem valores nulos.

Uma vantagem importante das medidas de desigualdades de Theil na análise da distribuição de renda ou da riqueza é que, quando os dados podem ser agrupados com base em um critério qualquer, por exemplo regiões, os valores de T e L podem ser decompostos em uma medida de desigualdade **entre** grupos, por exemplo inter-regional, e uma média poderada das medidas de desigualdades **dentro** de grupos, por exemplo dentro das regiões.

2.7 Variância dos Logaritmos

A variância dos logaritmos das rendas é frequentemente utilizada como medida da desigualdade da distribuição da renda em uma população. Para uma população com n pessoas, em que a renda da i -ésima pessoas é indicada por X_i para $i = 1, \dots, n$, a variância dos logaritmos das rendas é dada por

$$V(Z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2$$

onde

$$Z_i = \log X_i$$

e

$$\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i.$$

Nota-se que $V(Z)$ só é definida para $X_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, n$.

Indicando-se por X^* a média geométrica dos X_i , se tem

$$V(Z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\log \frac{X_i}{X^*} \right)^2$$

A variância dos logaritmos, da mesma forma que as médias T e L de Theill, é uma medida de desigualdade que, quando os dados podem ser agrupados segundo um critério qualquer, pode ser decomposta em um componente que corresponde à desigualdade entre os grupos e uma média ponderada das variâncias dos logaritmos dentro dos grupos.

Capítulo 3

Números-Índices

O conteúdo deste tópico foi elaborado com base no capítulo 16 de Hoffmann (2006) e no capítulo 11 de Sartoris (2013).

3.1 Introdução

Os números-índices, ou simplesmente índices, são proporções estatísticas, geralmente expressas em porcentagem, idealizadas para comparar as situações de um conjunto de variáveis em épocas ou localidades diversas.

Para quem vai fazer uso do números-índices na análise de um problema, é importante saber como são obtidos. Mesmo que não seja necessário calcular um novo índice, é interessante conhecer os métodos de cálculo, pois isso permite interpretar melhor os índices publicados e avaliar suas limitações.

3.2 Preços Relativos

O número-índice preços relativos é a relação entre o preço de um produto em determinado período (ano ou mês, geralmente) e o preço no período escolhido como base. Esse índice se destina a acompanhar a evolução do preço de determinado produto. O preço relativo pode ser denominado também de índice relativo de preço ou número-índice simples de preço.

Se P_0 é o preço da mercadoria no período-base e P_t é o preço em um período t , o preço relativo da mercadoria no ano t é dado por

$$I(P_t|P_0) = \frac{P_t}{P_0}. \quad (3.1)$$

Usualmente, o valor do índice é dado em porcentagem, calculando-se

$$I^*(P_t|P_0) = \frac{P_t}{P_0} \cdot 100. \quad (3.2)$$

Exemplo numérico de índice relativo

Seja os dados da tabela 3.1 abaixo

Tabela 3.1: dados hipotético de preços e quantidades para três produtos no período de 2001 a 2005

ano	P_{1t}	Q_{1t}	P_{2t}	Q_{2t}	P_{3t}	Q_{3t}
2001	12	3	5	7	20	3
2002	15	4	10	9	25	4
2003	18	5	20	8	35	5
2004	24	5	30	7	45	6
2005	30	6	60	6	50	5

Fonte: Hoffmann (2006).

Tomando com base o ano 2002, o preço relativo do produto 1 em 2004, de acordo com (3.2) é

$$I^*(P_t|P_0) = \frac{24}{15} \cdot 100 = 160. \quad (3.3)$$

Com base na tabela 3.1, os demais preços relativos podem ser calculados, tomando como base o ano de 2002, que são apresentados na tabela 3.2.

Tabela 3.2: Preços relativos dos três produtos no período de 2001 a 2005, tomando como base o ano de 2002

ano	Produto 1	Produto 2	Produto 3
2001	80	50	80
2002	100	100	100
2003	120	200	140
2004	160	300	180
2005	200	600	200

Exemplo numérico de preço relativo no R

Carrega-se os preços dos três produtos e calcula os respectivos preços relativos tendo como base o ano de 2002.

```

prd1 <- c(12, 15, 18, 24, 30)
prd2 <- c(5, 10, 20, 30, 60)
prd3 <- c(20, 25, 35, 45, 50)

iprprd1 <- prd1/prd1[2] * 100
iprprd2 <- prd2/prd2[2] * 100
iprprd3 <- prd3/prd3[2] * 100

ipr161 <- cbind(iprprd1, iprprd2, iprprd3)
rownames(ipr161) <- c(2001, 2002, 2003, 2004, 2005)

ipr161

```

```

##      iprprd1 iprprd2 iprprd3
## 2001      80      50      80
## 2002     100     100     100
## 2003     120     200     140
## 2004     160     300     180
## 2005     200     600     200

```

Note que na linha do ano 2002, os três preços relativos em porcentagem são iguais a 100.

O preço relativo mostra como está evoluindo o preço de cada um dos produtos. Mas quando analisa-se um conjunto de mercadorias, interessa-se em obter um único índice que nos mostre como está evoluindo o nível geral dos preços dessas mercadorias.

3.3 Índice Simples de Preços Agregados

O índice Simples de Preços Agregados é a relação entre o somatório dos preços das mercadorias no período t e o somatório dos preços das mercadorias no período escolhido como base. O índice simples de preços agregados é também chamado de índice agregativo de preços. Defini-se que o índice i , variando de 1 a n , indique as n diferentes mercadorias do conjunto considerado. Note que $I_A(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_0)$ é o valor do índice agregativo para o vetor ou conjunto de preços $\mathbf{p}_t = P_{it}, i = 1, \dots, n$ quando comparado ao vetor de preços do período-base, $\mathbf{p}_0 = P_{i0}, i = 1, \dots, n$. Ou seja,

$$I_A(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_0) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{i0}}, \quad (3.4)$$

ou em porcentagem

$$I_A^*(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_0) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{i0}} \cdot 100. \quad (3.5)$$

Exemplo numérico do Índice simples de preços agregados

om base nos dados da tabela 3.1, calcula-se o índice simples de preços agregados para os três produtos em 2004, tomando 2002 como ano-base. De acordo com (3.5),

$$I_A^*(\mathbf{p}_4|\mathbf{p}_2) = \frac{24 + 30 + 45}{15 + 10 + 25} \cdot 100 = 198. \quad (3.6)$$

Analogamente, obtém-se os demais índices que são apresentados na tabela 3.3.

Tabela 3.3: Índice simples de preços agregados dos três produtos no período 2001-2005 tomando como base o ano de 2002

ano	$I_A^*(P_t P_0)$
2001	74
2002	100
2003	146
2004	198
2005	280

A seguir é calculado o Índice simples de preços agregados do exemplo numérico no R.

Exemplo numérico do índice simples de preços agregados no R

```
p1 <- c(12, 15, 18, 24, 30)
p2 <- c(5, 10, 20, 30, 60)
p3 <- c(20, 25, 35, 45, 50)

p161 <- cbind(p1, p2, p3)
rownames(p161) <- c(2001, 2002, 2003, 2004, 2005)

IAp1p2 <- sum(p161[1, ])/sum(p161[2, ]) * 100
IAp2p2 <- sum(p161[2, ])/sum(p161[2, ]) * 100
IAp3p2 <- sum(p161[3, ])/sum(p161[2, ]) * 100
IAp4p2 <- sum(p161[4, ])/sum(p161[2, ]) * 100
IAp5p2 <- sum(p161[5, ])/sum(p161[2, ]) * 100

ispa161 <- rbind(IAp1p2, IAp2p2, IAp3p2, IAp4p2, IAp5p2)
colnames(ispa161) <- c("ISPA")

ispa161

##          ISPA
```



```
## IAp1p2    74
## IAp2p2   100
## IAp3p2   146
## IAp4p2   198
## IAp5p2   280
```

3.4 Média Aritmética dos Preços Relativos

A Média Aritmética dos Preços Relativos é um índice geral de preços que se obtém calculando a média aritmética dos preços relativos, isto é

$$I_M(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{P_{it}}{P_{i0}} \quad (3.7)$$

ou, em porcentagem,

$$I_M^*(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{P_{it}}{P_{i0}} \cdot 100. \quad (3.8)$$

Na tabela 3.3 abaixo são apresentados os valores desse índice para os dados da tabela 3.1

Tabela 3.4: Índice média aritmética dos preços relativos dos três produtos no período 2001-2005 tomando como base o ano de 2002

ano	$I_M^*(P_t P_0)$
2001	70,0
2002	100,0
2003	153,3
2004	213,3
2005	333,3

Note que os valores da tabela 3.4 é a média aritmética dos preços relativos da tabela 3.1 para cada ano.

Para o ano de 2003, por exemplo, foi calculada da seguinte forma:

$$I_M^*(P_{2003}|P_{2002}) = \frac{1}{3} \times (120 + 200 + 140) = 153,3$$

Exemplo numérico da média aritmética dos preços relativos no R

Como temos calculado o preço relativo para cada um dos três produtos com ano base 2002, é só calcular a média aritmética para cada ano.

```
ipr161
```

```
##      iprprd1 iprprd2 iprprd3
## 2001      80      50      80
## 2002     100     100     100
## 2003     120     200     140
## 2004     160     300     180
## 2005     200     600     200
```

```
maprp1p2 <- sum(ipr161[1, ])/length(ipr161[1, ])
maprp2p2 <- sum(ipr161[2, ])/length(ipr161[2, ])
maprp3p2 <- sum(ipr161[3, ])/length(ipr161[3, ])
maprp4p2 <- sum(ipr161[4, ])/length(ipr161[4, ])
maprp5p2 <- sum(ipr161[5, ])/length(ipr161[5, ])
```

```
mapr161 <- round(rbind(maprp1p2, maprp2p2, maprp3p2,
  maprp4p2, maprp5p2), 1)
colnames(mapr161) <- c("MAPR")
```

```
mapr161
```

```
##      MAPR
## maprp1p2 70,0
## maprp2p2 100,0
## maprp3p2 153,3
## maprp4p2 213,3
## maprp5p2 333,3
```

Considerando que a expressão (3.4) pode ser escrita como em (3.9), pode-se entender por que o índice cresceu mais na média aritmética dos preços relativos na tabela 3.4 que o índice simples de preços agregados na tabela 3.3.

$$I_A(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_0) = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{P_{it}}{P_{i0}} \right) P_{i0}}{\sum_{i=1}^n P_{i0}} \quad (3.9)$$

Tanto o índice simples de preços agregados como a média aritmética dos preços relativos são índices gerais de preços. No seus cálculos não se leva em consideração a importância econômica de cada mercadoria que é dada pelo valor monetário da quantidade vendida.

Portanto, os índices simples de preços agregados bem como a média aritmética do preços relativas só devem ser usados quando não se tem disponível as informações de quantidades. Caso contrário, deve ser utilizados os índices ponderados de preço.

3.5 Índice de Preços de Laspeyres

O índice de preços de Laspeyres para um conjunto de mercadorias, em um período t , é a média ponderada dos preços relativos dessas mercadorias, utilizando, como fatores de ponderação, os valores monetários das quantidades de cada mercadoria vendidas no período base.

$$I_L(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_0) = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{P_{it}}{P_{i0}} \right) P_{i0} Q_{i0}}{\sum_{i=1}^n P_{i0} Q_{i0}} \quad (3.10)$$

onde

- Q_{i0} é a quantidade da i -ésima mercadoria vendida no período-base e;
- $P_{i0}Q_{i0}$ é o valor monetário da i -ésima mercadoria ao preço do período-base.

Simplificando

$$I_L(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_0) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it} Q_{i0}}{\sum_{i=1}^n P_{i0} Q_{i0}} \quad (3.11)$$

ou, em porcentagem,

$$I_L^*(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_0) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it} Q_{i0}}{\sum_{i=1}^n P_{i0} Q_{i0}} \cdot 100. \quad (3.12)$$

Exemplo numérico de Índice de preços de Laspeyres

Com base na tabela 3.1 e na fórmula (3.12), o índice de preços de Laspeyres para os três produtos, em 2004, tomando 2002 como ano-base é

$$I_L^*(\mathbf{p}_4|\mathbf{p}_2) = \frac{24 \cdot 4 + 30 \cdot 9 + 45 \cdot 4}{15 \cdot 4 + 10 \cdot 9 + 25 \cdot 4} \cdot 100 = \frac{546}{250} \cdot 100 = 218,4 \quad (3.13)$$

Os valores do índice de preços de Laspeyres para 2001, 2003 e 2005 podem ser obtidos da mesma maneira e são apresentados na tabela 3.5.

Tabela 3.5: Índice de Laspeyres dos três produtos no período 2001-2005 tomando como base o ano de 2002

ano	$I_L^*(P_t P_0)$
2001	69,2
2002	100,0
2003	156,8
2004	218,4
2005	344,0

Exemplo numérico de Índice de preços de Laspeyres no R

```
q1 <- c(3, 4, 5, 5, 6)
q2 <- c(7, 9, 8, 7, 6)
q3 <- c(3, 4, 5, 6, 5)
q161 <- cbind(q1, q2, q3)
rownames(q161) <- c(2001, 2002, 2003, 2004, 2005)

q161
```

```
##      q1 q2 q3
## 2001  3  7  3
## 2002  4  9  4
## 2003  5  8  5
## 2004  5  7  6
## 2005  6  6  5
```

```
iplp1p2 <- sum(p161[1, ] * q161[2, ])/sum(p161[2, ] *
  q161[2, ]) * 100
iplp2p2 <- sum(p161[2, ] * q161[2, ])/sum(p161[2, ] *
  q161[2, ]) * 100
iplp3p2 <- sum(p161[3, ] * q161[2, ])/sum(p161[2, ] *
  q161[2, ]) * 100
iplp4p2 <- sum(p161[4, ] * q161[2, ])/sum(p161[2, ] *
  q161[2, ]) * 100
iplp5p2 <- sum(p161[5, ] * q161[2, ])/sum(p161[2, ] *
  q161[2, ]) * 100

ipl161 <- rbind(iplp1p2, iplp2p2, iplp3p2, iplp4p2,
  iplp5p2)
colnames(ipl161) <- c("IPL")

ipl161
```

```
##          IPL
## ip1p1p2  69,2
## ip1p2p2 100,0
## ip1p3p2 156,8
## ip1p4p2 218,4
## ip1p5p2 344,0
```

Uma interpretação econômica do Índice de preços de Laspeyres

O índice de preços de Laspeyres é uma relação entre o custo de aquisição da **cesta de mercadorias** \mathbf{q}_0 no período t e o custo de aquisição dessa mesma cesta de mercadorias no período-base.

3.6 Índice de Preços de Paasche

O índice de preços de Paasche para o período t pode ser interpretado como uma média ponderada dos preços relativos, utilizando com fatores de ponderação os valores monetários das quantidades vendidas no período t , considerando os preços do período-base.

$$I_P(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_0) = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{P_{it}}{P_{i0}} \right) P_{i0} Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{i0} Q_{it}} \quad (3.14)$$

onde

- Q_{it} é a quantidade da i -ésima mercadoria vendida no período t e;
- $P_{i0}Q_{it}$ é o valor monetário da i -ésima mercadoria no período t considerando o preço do período-base.

Simplificando

$$I_P(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_0) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it} Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{i0} Q_{it}} \quad (3.15)$$

ou, em porcentagem,

$$I_P^*(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_0) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it} Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{i0} Q_{it}} \cdot 100. \quad (3.16)$$

De acordo com os dados da tabela 3.1 e a fórmula (3.16), o índice de preços de Paasche para os três produtos em 2004, tomando 2002 como ano-base é

$$I_P^*(\mathbf{p}_4|\mathbf{p}_2) = \frac{24 \cdot 5 + 30 \cdot 7 + 45 \cdot 6}{15 \cdot 5 + 10 \cdot 7 + 25 \cdot 6} \cdot 100 = \frac{600}{295} \cdot 100 = 203,4 \quad (3.17)$$

Os valores dos índices de preços de Paasche para os demais anos podem ser calculados na mesma forma e são apresentados na tabela 3.6.

Tabela 3.6: Índice de Paasche dos três produtos no período 2001-2005 tomando como base o ano de 2002

ano	$I_P^*(P_t P_0)$
2001	68,9
2002	100,0
2003	151,8
2004	203,4
2005	287,3

Exemplo numérico de índice de preços de Paasche no R

```

ipp1p2 <- sum(p161[1, ] * q161[1, ])/sum(p161[2, ] *
q161[1, ]) * 100
ipp2p2 <- sum(p161[2, ] * q161[2, ])/sum(p161[2, ] *
q161[2, ]) * 100
ipp3p2 <- sum(p161[3, ] * q161[3, ])/sum(p161[2, ] *
q161[3, ]) * 100
ipp4p2 <- sum(p161[4, ] * q161[4, ])/sum(p161[2, ] *
q161[4, ]) * 100
ipp5p2 <- sum(p161[5, ] * q161[5, ])/sum(p161[2, ] *
q161[5, ]) * 100

ipp161 <- round(rbind(ipp1p2, ipp2p2, ipp3p2, ipp4p2,
  ipp5p2), 1)
colnames(ipp161) <- c("IPP")

ipp161

##          IPP
## ipp1p2  68,9
## ipp2p2 100,0
## ipp3p2 151,8
## ipp4p2 203,4
## ipp5p2 287,3

```

Interpretação econômica do índice de preços de Paasche

O índice de preços de Paasche é uma relação entre o custo de aquisição da **cesta de mercadorias** q_t no período t com o custo de aquisição dessa mesma cesta de mercadorias no período-base.

Comparando os índices de preços de Laspeyres e Paasche

O método de Paasche exige mais informações do que o método de Laspeyres no cálculo do índice ponderado de preços.

3.7 Índice de Preços de Fisher

Vimos que o método de Laspeyres e o método de Paasche entregam, em geral, resultados diferentes quando utilizados para avaliar a variação no nível dos preços de um conjunto de produtos.

Para tentar superar essa divergência de resultados, foram criados índices que conduzem a valores intermediários entre o índice de Laspeyres e o índice de Paasche.

O índice de preços de Fisher, é por definição, a média geométrica entre o índice de preços de Laspeyres e o índice de preços de Paasche.

Ou seja,

$$I_F(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_0) = \sqrt{I_L(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_0)I_P(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_0)} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n P_{it}Q_{i0}}{\sum_{i=1}^n P_{i0}Q_{i0}} \frac{\sum_{i=1}^n P_{it}Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{i0}Q_{it}} \right)^{1/2} \quad (3.18)$$

ou, em porcentagem,

$$I_F^*(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_0) = I_F(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_0) \cdot 100. \quad (3.19)$$

Exemplo numérico do Índice de preços de Fisher

Para calcular o índice de preços de Fischer de 2004, tomando como 2002 com ano-base, com base nos dados da tabela 3.1, basta tomar os valores dos índices de preços de Laspeyres e de Paasche nas tabelas 3.5 e 3.6 respectivamente.

Ou seja,

$$I_F^*(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_0) = \sqrt{218,4 \cdot 203,4} = 210,8 \quad (3.20)$$

3.8 Índice de Preços de Marshall-Edgeworth

O índice de preços de Marshall-Edgeworth pode ser interpretado como uma relação entre o custo de aquisição no período t e o custo de aquisição no período-base de uma cesta de mercadorias que contém, para cada produto, a média aritmética das quantidades vendidas no período -base e no período t .

$$I_E(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_0) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it}(Q_{i0} + Q_{it})}{\sum_{i=1}^n P_{i0}(Q_{i0} + Q_{it})} \quad (3.21)$$

ou, em porcentagem.

$$I_E^*(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_o) = I_E(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_o) \cdot 100. \quad (3.22)$$

Exemplo numérico do índice de preços de Marshall-Edgeworth

Para calcular o índice de preços de Marshall-Edgeworth de 2004, tomando 2002 como ano base, calcula-se utilizando a fórmula (3.22) usando os dados da tabela 3.1

$$I_E^*(\mathbf{p}_t|\mathbf{p}_o) = \frac{24(4+5) + 30(9+7) + 45(4+6)}{15(4+5) + 10(9+7) + 25(4+6)} \cdot 100 = 210,3 \quad (3.23)$$

3.9 Deflacionamento

Considere dois valores monetários pagos ou recebidos em diferentes datas:

- $x = \text{R\$}120,00$ recebidos em setembro de 1997 e;
- $y = \text{R\$}240,00$ recebidos em setembro de 2003.

Aparentemente, não há a necessidade de modificar a unidade medida de nenhum dos dois valores, pois ambos estão em reais.

Mas devido à inflação ou desvalorização da moeda, o real de setembro de 2003 é uma unidade de medida de valor de troca bastante diferente do real de setembro de 1997.

Por isso, antes de fazer qualquer comparação ou operação aritmética envolvendo os valores de x e y é necessário fazer uniformizar a unidade de medida.

Isso se faz através de um índice de preços que possa ser utilizado como uma medida de desvalorização da moeda. Essa é uma das principais aplicações dos números-índices em uma economia inflacionária.

O índice de preços utilizados como medida da inflação ou desvalorização da moeda é denominada **deflator**.

Os valores de x e y medidos em reais da data em que o pagamento é efetuado são denominados **valores nominais** ou **valores em moeda corrente**. Caso se trate de preços de um produto, são denominados **preços correntes**.

Então, antes de fazer qualquer comparação ou operação aritmética envolvendo os valores em moeda corrente, é necessário calcular os **valores reais** ou **valores deflacionados** utilizando um **deflator**.

Através da regra de três simples,

$$\frac{V_r}{V_t} = \frac{I_k}{I_t} \quad (3.24)$$

temos

$$V_r = \frac{I_k}{I_t} V_t. \quad (3.25)$$

Se, por exemplo, a inflação entre o período k e o período t tivesse sido de 100%,

$$I_t = 2I_k \quad (3.26)$$

então

$$V_r = \frac{V_t}{2}. \quad (3.27)$$

Ou seja, o valor real, medido em moeda do ano k , seria igual à metade do valor em moeda corrente.

Geralmente, quando se calculam valores reais, a finalidade é apenas uniformizar a unidade de medida.

Então, por facilidade de cálculo, são obtidos os valores reais medidos em moeda do período-base do deflator, isto é, em lugar de I_k , considera-se $I_0 = 100$. Nesse caso, a expressão (3.25) fica

$$V_r = \frac{V_t}{I_t} 100. \quad (3.28)$$

Como exemplos de índices comumente usados em trabalhos de pesquisa em economia se tem:

- o Índice Geral de Preços - Disponibilidade Interna (IGP-DI) é usado como deflator para preços de produtos e serviços.
- o índice de custo de vida é o mais adequado para deflacionar salários.

Exemplo para o cálculo de valores reais

Considere $x = \text{R\$ } 120,00$ o valor corrente do salário mínimo vigente em setembro de 1997 e $y = \text{R\$ } 240,00$ o valor corrente do salário mínimo vigente em setembro de 2003.

Um deflator apropriado, nesse caso, é o **Índice Nacional de Preços ao Consumidor Restrito** (INPC) calculado pelo IBGE para medir o custo de vida das famílias cujos chefes são assalariados em sua ocupação principal e cujo rendimento monetário disponível situe-se entre 1 e 5 salários mínimos.

Com base em dezembro de 1993, o INPC é igual a R\$ 1.415,18 em setembro de 1997 e igual a R\$ 2.288,16 em setembro de 2003

Então, de acordo com (3.25), o valor deflacionado de y em reais de setembro de 1997 é

$$V_{1997} = \frac{I_{1997}}{I_{2003}} \times V_{2003}, \quad (3.29)$$

ou seja,

$$V_{1997} = \frac{1.415,18}{2.288,16} \times 240 = 148,44 \quad (3.30)$$

Alternativamente pode-se calcular o valor real de x em moeda de setembro de 2003,

$$V_{2003} = \frac{I_{2003}}{I_{1997}} \times V_{1997}, \quad (3.31)$$

ou seja,

$$V_{2003} = \frac{2.228,16}{1.415,18} \times 120 = 194,02. \quad (3.32)$$

Capítulo 4

Variável Aleatória Discreta

A associação de cada um dos valores de uma variável a uma probabilidade correspondente de ocorrer corresponde a uma **distribuição de probabilidade**.

Essa distribuição de probabilidade pode ser de uma variável aleatória discreta ou de uma variável aleatória contínua. No capítulo 03 do Sartoris (2013) apresenta-se as distribuições de probabilidade de variáveis aleatórias discretas.

4.1 Esperança matemática

Quando se calcula uma média do que **pode** acontecer com a variável, baseada em sua distribuição de probabilidade, está obtendo-se um valor médio esperado. Ou seja, a **esperança matemática**, ou, simplesmente, **esperança**.

A esperança de uma variável aleatória discreta X , denotada $E(X)$, é definida como

$$E(X) = X_1P(X_1) + X_2P(X_2) + \dots + X_nP(X_n) = \sum_{i=1}^n X_iP(X_i)$$

A probabilidade aqui tem o mesmo papel da frequência relativa.

Note que,

- quando se fala em frequência relativa, usualmente refere-se a uma quantidade obtida.
- quando se fala em probabilidade, nos remete a ideia de proporções em que a variável pode assumir determinado valor.

4.1.1 Função de Probabilidade

$P(X)$ é a função que associa o valor de X à sua probabilidade, que é chamada de **função de probabilidade**. É representada como $f(X)$. Desta forma pode-se escrever:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i f(X_i) \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

4.1.2 Função distribuição acumulada

A função que fornece a probabilidade acumulada dado o valor de X é a **função distribuição acumulada** ou, simplesmente, função distribuição, representada por $F(X)$.

$$F(X_k) = \sum_{i=1}^k f(X_i) \text{ para } i = 1, \dots, n$$

Exemplo numérico sobre Função de Probabilidade (Sartoris, 2013, pg.55)

Este exemplo numérico bem básico é sobre probabilidade que está na página 55 de Sartoris (2013). Num sorteio de números inteiros de 1 a 5, a probabilidade de um número ser sorteado é proporcional a esse número. Qual é a probabilidade de cada número ser sorteado?

Resposta: Se considerarmos que a $P(1)$ é igual a $1A$, onde A é uma constante desconhecida, temos:

$$P(1) = A$$

$$P(2) = 2A$$

$$P(3) = 3A$$

$$P(4) = 4A$$

$$P(5) = 5A.$$

Sendo os eventos mutuamente exclusivos, a soma de todas as probabilidades tem de ser igual a 1. Portanto,

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1$$

$$A + 2A + 3A + 4A + 5A = 1$$

$$15A = 1$$

$$A = \frac{1}{15}.$$

4.1.3 Esperanças, Variâncias e Covariâncias

Note que

$$E[aX + b] = aE(X) + b \quad (4.1)$$

$$E[X + Y] = E(X) + E(Y) \quad (4.2)$$

$$Var(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (4.3)$$

$$Cov(X, Y) = E[X - E(X)][Y - E(Y)] = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (4.4)$$

Exemplo Numérico sobre Esperança e Variância (Sartoris, 2013, p.56)

Este exemplo numérico é o 3.1.2 do Sartoris (2013) que está na página 56. Uma ação comprada por R\$10,00 pode assumir, após 30 dias, os seguintes valores: R\$5,00 com 20% de probabilidade; R\$10,00 com 30% de probabilidade; R\$16,00 com 25% de probabilidade ou R\$20,00 com 25% de probabilidade. Determine o valor esperado da ação e sua variância.

Resposta: O valor esperado da ação é

$$E(X) = 5 \times 0,2 + 10 \times 0,3 + 16 \times 0,25 + 20 \times 0,25 \quad (4.5)$$

$$E(X) = 1 + 3 + 4 + 5 = 13 \quad (4.6)$$

Como o preço da ação foi de R\$ 10,00, o lucro médio esperado dessa ação é de R\$3,00.

Para calcular a variância pela forma alternativa, é necessário calcular somente $E(X^2)$ uma vez que $E(X)$ já foi calculado.

$$E(X^2) = (5)^2 \times 0,2 + (10)^2 \times 0,3 + (16)^2 \times 0,25 + (20)^2 \times 0,25 \quad (4.7)$$

$$E(X^2) = 25 \times 0,2 + 100 \times 0,3 + 256 \times 0,25 + 400 \times 0,25 \quad (4.8)$$

$$E(X^2) = 5 + 30 + 64 + 100 \quad (4.9)$$

$$E(X^2) = 199. \quad (4.10)$$

Assim,

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (4.11)$$

$$Var(X) = 199 - 13^2 \quad (4.12)$$

$$Var(X) = 30. \quad (4.13)$$

Note que, ao medir a dispersão dos possíveis valores da ação, a variância é uma medida do risco da ação.

4.2 Variável Aleatória Discreta

Quando os valores da variável são específicas, ou seja, não pode assumir qualquer valor dentro do conjunto dos números reais.

4.3 Distribuição Uniforme

Na **distribuição uniforme** todos os elementos têm a mesma probabilidade de ocorrer.

Exemplo: obter um número de 1 a 6, lançando um dado não viciado. A probabilidade de obter qualquer um dos seis números é de $1/6$.

Exemplo numérico sobre Distribuição Uniforme (Sartoris, 2013, p.57)

Este exemplo numérico sobre distribuição uniforme está na página 57 de Sartoris (2013).

Joga-se um dado uma única vez. Qual o valor esperado do número obtido? E sua variância?

Resposta: O valor esperado é

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} \quad (4.14)$$

$$E(X) = 3,5. \quad (4.15)$$

Para calcular a variância pela forma alternativa é necessário $E(X^2)$.

$$E(X^2) = (1)^2 \frac{1}{6} + (2)^2 \frac{1}{6} + (3)^2 \frac{1}{6} + (4)^2 \frac{1}{6} + (5)^2 \frac{1}{6} + (6)^2 \frac{1}{6} \quad (4.16)$$

$$E(X^2) = 1 \frac{1}{6} + 4 \frac{1}{6} + 9 \frac{1}{6} + 16 \frac{1}{6} + 25 \frac{1}{6} + 36 \frac{1}{6} \quad (4.17)$$

$$E(X^2) = \frac{91}{6}. \quad (4.18)$$

Desta forma a variância é

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (4.19)$$

$$Var(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 \quad (4.20)$$

$$Var(X) = \frac{105}{36} \quad (4.21)$$

$$Var(X) \cong 2,92 \quad (4.22)$$

4.4 Distribuição de Bernoulli

A **distribuição de Bernoulli** caracteriza-se pela existência de apenas dois eventos, mutuamente exclusivos, denominados **sucesso** e **fracasso**, num experimento que é realizado uma única vez.

Se a probabilidade de **sucesso** é p , a probabilidade de **fracasso** é $(1 - p)$, uma vez que só existem esses dois eventos e eles são mutuamente exclusivos.

Exemplos de distribuição de Bernoulli

- **lançamento de uma moeda uma única vez.** Se o resultado cara é o sucesso, associado a uma probabilidade $p = 1/2$, então o resultado coroa é o fracasso associado a uma probabilidade $(1 - p) = 1/2$.
- **lançamento de um dado uma única vez.** Se o número escolhido é três, então o resultado 3 é o sucesso, associado a uma probabilidade $p = 1/6$ e qualquer um dos outros cinco números é o fracasso, associado a uma probabilidade $(1 - p) = 5/6$.

Exemplo numérico sobre distribuição de Bernoulli (Sartoris, 2013, p.58)

Este exemplo numérico sobre distribuição de Bernoulli está na página 58 de Sartoris (2013).

No caso da cara ou coroa, atribuindo o valor 1 para o sucesso e 0 para o fracasso, determine a média e a variância do resultado após uma jogada.

Resposta: A média é

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} \quad (4.23)$$

$$E(X) = \frac{1}{2} \quad (4.24)$$

$$E(X) = 0,5 \quad (4.25)$$

E a variância

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 0^2 \times \frac{1}{2} \quad (4.26)$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2} \quad (4.27)$$

$$E(X^2) = 0,5 \quad (4.28)$$

$$Var = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (4.29)$$

$$Var = 0,5 - (0,5)^2 \quad (4.30)$$

$$Var = 0,25. \quad (4.31)$$

Outro exemplo numérico sobre distribuição de Bernoulli (Sartoris, 2013, p.59)

No caso do dado, em que se aposta em um único número, atribuindo o valor 1 para o sucesso e 0 para o fracasso, determine a média e a variância do resultado após uma jogada.

Resposta: A média é

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{5}{6} \quad (4.32)$$

$$E(X) = \frac{1}{6} \quad (4.33)$$

E a variância

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{6} + 0^2 \times \frac{5}{6} \quad (4.34)$$

$$E(X^2) = \frac{1}{6} \quad (4.35)$$

$$Var = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (4.36)$$

$$Var = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 \quad (4.37)$$

$$Var = \frac{5}{36} \quad (4.38)$$

Média e Variância da Distribuição de Bernoulli

Pelos exemplos numéricos apresentado, verifica-se que numa distribuição de Bernoulli:

$$E(X) = p \quad (4.39)$$

$$Var(X) = p(1 - p) \quad (4.40)$$

4.5 Distribuição Binomial

A **distribuição Binomial** é a generalização da distribuição de Bernoulli. Ou seja, há um sucesso com probabilidade p e um fracasso com probabilidade $(1-p)$. Mas o número de experimentos ou jogadas pode ser qualquer um.

Retomemos o exemplo da cara ou coroa, mas agora com três jogadas ou experimentos.

Associa-se cara a uma letra C e uma coroa a uma letra K para facilitar a visualização.

jogada 1	jogada 2	jogada 3
C	C	C
C	C	K
C	K	C
C	K	K
K	C	C
K	C	K
K	K	C
K	K	K

Na primeira jogada só há dois resultados possíveis: cara ou coroa. Portanto

$$P(C) = p = 1/2$$

$$P(K) = (1 - p) = 1/2$$

Na segunda jogada há quatro combinações para três resultados possíveis que são (cara, cara); (cara, coroa) e (coroa, coroa). Portanto

$$P(C, C) = pp = 1/4$$

$$P(C, K) + P(K, C) = p(1 - p) + (1 - p)p = 2p(1 - p) = 2/4$$

$$P(K, K) = (1 - p)(1 - p) = 1/4$$

Na terceira jogada há oito combinações para quatro resultados possíveis que são (cara, cara, cara); (cara, cara, coroa); (cara, coroa, coroa) e (coroa, coroa, coroa). Portanto

$$\begin{aligned}
P(C, C, C) &= 1/8 \\
P(C, C, K) + P(C, K, C) + P(K, C, C) &= 3/8 \\
P(K, K, C) + P(K, C, K) + P(C, K, K) &= 3/8 \\
P(K, K, K) &= 1/8
\end{aligned}$$

Ou em detalhes:

$$\begin{aligned}
P(3 \text{ caras}) &= ppp = 1/8 \\
P(2 \text{ caras, 1 coroa}) &= pp(1-p) + p(1-p)p + (1-p)pp = 3pp(1-p) = 3/8 \\
P(2 \text{ coroas, 1 cara}) &= (1-p)(1-p)p + (1-p)p(1-p) + p(1-p)(1-p) \\
&= 3(1-p)(1-p)p = 3/8 \\
P(3 \text{ coroas}) &= (1-p)(1-p)(1-p) = 1/8
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
P(3 \text{ caras}) &= 1 \times p \times p \times p \\
P(2 \text{ caras, 1 coroa}) &= 3 \times p \times p \times (1-p) \\
P(2 \text{ coroas, 1 cara}) &= 3 \times (1-p) \times (1-p) \times p \\
P(3 \text{ coroas}) &= 1 \times (1-p) \times (1-p) \times (1-p)
\end{aligned}$$

usando o binômio de newton,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\begin{aligned}
P(3 \text{ caras}) &= \binom{3}{3} \times p \times p \times p \\
P(2 \text{ caras, 1 coroa}) &= \binom{3}{2} \times p \times p \times (1-p) \\
P(2 \text{ coroas, 1 cara}) &= \binom{3}{1} \times (1-p) \times (1-p) \times p \\
P(3 \text{ coroas}) &= \binom{3}{0} \times (1-p) \times (1-p) \times (1-p)
\end{aligned}$$

Generalizando, nos leva a função de probabilidade,

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

onde

- k é o número de sucessos;
- n é o número de jogadas ou experimentos;
- p é a probabilidade de sucesso;
- $(1-p)$ é a probabilidade de fracasso.

O primeiro exemplo numérico de distribuição binomial

O primeiro exemplo numérico de distribuição binomial é o exemplo numérico 3.2.3.1 da página 62 do Sartoris (2013). Suponha um jogo de dados em que aposta em um único número. Determine as seguintes probabilidades:

- em três jogadas, ganhar duas.

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{(3-2)} \\ P(X = 2) &= \frac{3!}{2!(3-2)!} \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} \\ P(X = 2) &= 3 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} \\ P(X = 2) &= \frac{15}{216} = 0,0694 \end{aligned}$$

- em quatro jogadas, ganhar duas.

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \binom{4}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{(4-2)} \\ P(X = 2) &= \frac{4!}{2!(4-2)!} \times \frac{1}{36} \times \frac{25}{36} \\ P(X = 2) &= 6 \times \frac{1}{36} \times \frac{25}{36} \\ P(X = 2) &= \frac{150}{1.296} = 0,1157 \end{aligned}$$

- Em cinco jogadas, ganhar três.

$$\begin{aligned}
P(X=3) &= \binom{5}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{(5-3)} \\
P(X=3) &= \frac{5!}{3!(5-3)!} \times \frac{1}{216} \times \frac{25}{36} \\
P(X=3) &= 10 \times \frac{1}{216} \times \frac{25}{36} \\
P(X=3) &= \frac{250}{7.776} = 0,0321
\end{aligned}$$

Um segundo exemplo numérico de distribuição binomial

O segundo exemplo numérico sobre distribuição binomial é da página 63 de Sartoris (2013). Calcule a média e a variância no jogo de cara ou coroa, atribuindo valor um para cara e zero para coroa.

Considerando uma ,duas e três jogadas.

- Para uma jogada, que é o caso particular da distribuição de Bernoulli.

$$\begin{aligned}
E(X) &= p = \frac{1}{2} \\
var(X) &= p(1-p) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

- Para duas jogadas: CC; CK; KC; KK. Ou seja,

$$\begin{aligned}
E(X) &= 2 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\
E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{2}{4} + 0^2 \times \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = 1,5 \\
var(X) &= 1,5 - [1]^2 = 0,5
\end{aligned}$$

- Para três jogadas: CCC; CCK; CKC; KCC; CKK; KCK; KKC; KKK. Ou seja,

$$\begin{aligned}
E(X) &= 3 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1,5 \\
E(X^2) &= 3^2 \times \frac{1}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 0^2 \times \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3 \\
var(X) &= 3 - [1,5]^2 = 0,75
\end{aligned}$$

4.5.1 Média e Variância da distribuição binomial

Com base nos resultados do exemplo numérico anterior tem-se:

A média da distribuição binomial

$$E(X) = np$$

A variância da distribuição binomial

$$var(X) = np(1 - p)$$

4.5.2 Distribuição Binomial usando o R

Considerando que:

x é um vetor de números;

p é um vetor de probabilidades;

n é o número de observações;

tamanho é o número de experimentos ou tentativas e;

prob é a probabilidade de sucesso de cada experimento ou tentativa.

Seguem-se quatro funções no R para a distribuição binomial.

dbinom(x, tamanho, prob):

esta função entrega a distribuição densidade de probabilidade a cada ponto.

pbinom(x, tamanho, prob):

esta função entrega a probabilidade cumulativa de um evento. Ou seja, é um único valor representando probabilidade.

qbinom(p, tamanho, prob):

esta função toma o valor da probabilidade e entrega um número cujo valor cumulativo coincide com o valor da probabilidade.

rbinom(n, tamanho, prob):

esta função gera o número requerido de valores aleatórios de uma dada probabilidade.

Exemplo numérico de distribuição binomial resolvido usando o R

O primeiro exemplo numérico 3.2.3.1 da página 62 de Sartoris (2013) resolvido anteriormente é agora resolvido usando-se o R. Suponha um jogo de dados em que aposta em um único número. Determine as seguintes probabilidades:

- em três jogadas, ganhar duas.

```
library(MASS)

p1 <- dbinom(2, 3, 1/6)
p1
```

```
## [1] 0,06944444
```

```
p1frac <- fractions(p1)
p1frac
```

```
## [1] 5/72
```

- em quatro jogadas, ganhar duas.

```
library(MASS)

p2 <- dbinom(2, 4, 1/6)
p2
```

```
## [1] 0,1157407
```

```
p2frac <- fractions(p2)
p2frac
```

```
## [1] 25/216
```

- Em cinco jogadas, ganhar três.

```
library(MASS)

p3 <- dbinom(3, 5, 1/6)
p3
```

```
## [1] 0,03215021
```

```
p3frac <- fractions(p3)
p3frac
```

```
## [1] 125/3888
```


O segundo exemplo numérico de distribuição binomial usando R

O segundo exemplo numérico resolvido é o exemplo 3.2.3.2 da página 63 de Sartoris (2013) é agora resolvido usando-se o R. Calcule a média e a variância no jogo de cara ou coroa, atribuindo valor um para cara e zero para coroa. Considerando uma, duas e três jogadas.

- Para uma jogada, que é o caso particular da distribuição de Bernoulli.

```
media1 <- 1 * 0.5  
media1
```

```
## [1] 0,5
```

```
var1 <- 1 * 0.5 * (1 - 0.5)  
var1
```

```
## [1] 0,25
```

- Para duas jogadas: CC; CK; KC; KK.

```
media2 <- 2 * 0.5  
media2
```

```
## [1] 1
```

```
var2 <- 2 * 0.5 * (1 - 0.5)  
var2
```

```
## [1] 0,5
```

- Para três jogadas: CCC; CCK; CKC; KCC; CKK; KCK; KKC; KKK.

```
media3 <- 3 * 0.5  
media3
```

```
## [1] 1,5
```

```
var3 <- 3 * 0.5 * (1 - 0.5)  
var3
```

```
## [1] 0,75
```

4.6 Distribuição de Poisson

- Morte por patada de cavalo, mesmo para a época em que o principal meio de transporte era a cavalo, era um acontecimento pouco usual.
- Celular do professor tocar durante a aula de Estatística Econômica poderia ser um exemplo de evento muito difícil de ocorrer.
- Para estas situações a probabilidade associada ao sucesso p é muito pequena, mesmo considerando muitos meses ou muitas aulas. Ou seja, n ser muito grande.
- Por isso, pode se pensar que p tende a zero enquanto que n tende ao ∞ .

4.6.1 Média e a Variância da Distribuição de Poisson

Partindo da distribuição binomial e como $p \rightarrow 0$ e $n \rightarrow \infty$ então

$$E(X) = np = \lambda.$$

Ou seja, np é igual a um número finito λ que significa o número médio de vezes que o evento ocorre.

Para a variância tem-se que

$$var(X) = \underbrace{np}_{\lambda} \underbrace{(1-p)}_1 = \lambda.$$

Ou seja, a média e a variância da distribuição de Poisson são iguais a λ .

4.6.2 A função de probabilidade da distribuição de Poisson

A função de probabilidade para a distribuição de Poisson pode ser obtida a partir da função de probabilidade da distribuição binomial fazendo $p \rightarrow 0$ e $n \rightarrow \infty$.

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

A derivação matemática está no apêndice do capítulo 3 do Sartoris (2013).

Primeiro exemplo numérico de distribuição de Poisson

Exemplo 3.2.6.1 da página 67 de Sartoris (2013). Suponha que, em média, o telefone toque quatro vezes ao dia em uma casa. Qual a probabilidade de que, em certo dia, ele toque, no máximo, duas vezes?

Resposta: Trata-se de um problema sobre distribuição de Poisson cujo parâmetro é $\lambda = 4$. Note que pede-se a probabilidade de tocar **no máximo** duas vezes: $P(0) + P(1) + P(2)$.

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{e^{-4}4^0}{0!} = 1e^{-4} \\ P(X = 1) &= \frac{e^{-4}4^1}{1!} = 4e^{-4} \\ P(X = 2) &= \frac{e^{-4}4^2}{2!} = 8e^{-4} \end{aligned}$$

Portanto:

$$P(X \leq 2) = 13e^{-4} \cong 0,2381 = 23,81\%$$

Segundo exemplo numérico de distribuição de Poisson

Exemplo 3.2.6.2 da página 67 de Sartoris (2013). Um candidato tem apenas 2% das intenções de voto. Qual a probabilidade de que, em 100 eleitores escolhidos ao acaso, encontrem-se cinco que desejem votar nesse candidato?

Resposta: Usando a binomial pura e simplesmente

$$P(X = 5) = \frac{100!}{5!(100 - 5)!} \times 0,02^5 \times 0,98^{95} \cong 0,0353 = 3,53\%$$

Note que o exercício pode ser resolvido usando a distribuição de Poisson como aproximação, tendo como parâmetro $\lambda = np = 100 \times 0,02 = 2$.

$$P(X = 5) = \frac{e^{-2}2^5}{5!} \cong 0,0361 = 3,61\%$$

4.6.3 Distribuição de Poisson usando o R

Considerando que:

x é um vetor de números;

q é um vetor de quantiles;

p é um vetor de probabilidades;

n é o número de observações;

lambda é o vetor de médias não negativas;

Seguem-se quatro funções no R para a distribuição de Poisson.

dpois(x, lambda) :

esta função entrega a distribuição densidade de probabilidade a cada ponto.

ppois(q, lambda):

esta função entrega a probabilidade cumulativa de um evento. Ou seja, é um único valor representando probabilidade.

qpois(p, lambda):

esta função toma o valor da probabilidade e entrega um número cujo valor cumulativo coincide com o valor da probabilidade.

rpois(n, lambda):

esta função gera o número de requerido de valores aleatórios de uma dada probabilidade a partir de uma dada amostra.

O primeiro exemplo numérico de distribuição de Poisson resolvido usando R

Exemplo 3.2.6.1 da página 67 de Sartoris (2013). Suponha que, em média, o telefone toque quatro vezes ao dia em uma casa. Qual a probabilidade de que, em certo dia, ele toque, no máximo, duas vezes?

```
p4 <- round(ppois(2, 4), 4)
p4
```

```
## [1] 0,2381
```

O segundo exemplo numérico de distribuição de Poisson resolvido usando R

Exemplo 3.2.6.2 da página 67 de Sartoris (2013). Um candidato tem apenas 2% das intenções de voto. Qual a probabilidade de que, em 100 eleitores escolhidos ao acaso, encontrem-se cinco que desejem votar nesse candidato?

Usando distribuição binomial:

```
p5 <- round(dbinom(5, 100, 0.02), 4)
p5
```

```
## [1] 0,0353
```

Usando a distribuição de Poisson como aproximação e sabendo que $\lambda = np = 100 \times 0,02 = 2$

```
p6 <- round(dpois(5, 2), 4)
p6
```

```
## [1] 0,0361
```


Capítulo 5

Variável Aleatória Contínua

5.1 Distribuição Normal

5.2 Teorema de Tchebichev

Capítulo 6

Distribuição de variáveis aleatórias conjunta

Referências Bibliográficas

Hoffmann, R. (2006). *Estatística para Economistas*. Cengage Learning, São Paulo, 4 edition.

Morettin, P. A. and Bussab, W. d. O. (2013). *Estatística Básica*. Saraiva, São Paulo, 8 edition.

Sartoris, A. (2013). *Estatística e Introdução à Econometria*. Saraiva, São Paulo, 2 edition.