Capitolo 1

Induzione strutturale

Introduzione

Sia A un insieme, sia $\lhd$ una relazione binaria definita su A ($\lhd : A \times A$).

Def. $\lhd$ è b.f. (ben fondata) se $\nexists \ldots \lhd a_i \lhd \ldots \lhd a_1 \lhd a_0$
ovvero non esistono catene infinite discendenti.
$(A, \lhd)$ è un insieme ben fondato se $\lhd$ è b.f.

Sia $\unlhd$ la chiusura riflessiva e transitiva di $\lhd$ b.f. su A.

Lemma 1. $\unlhd$ *non è mai* b.f.

Dimostrazione. Sia $a_i \in A$. $\exists \ldots a_i \unlhd a_i \unlhd \ldots$ $\square$

Def. Sia $a \in A$. a è *minimale* in A rispetto a $\lhd$ se $\forall b \lhd a, b \notin A$.

Lemma 2. *$\lhd$ è ben fondato su A se e solo se ogni $B \subseteq A$ ha un elemento minimale rispetto a $\lhd$.*

Dimostrazione.

- $\Rightarrow$) Da $B \subseteq A$ e $(A, \lhd)$ b.f. si ha che non esiste $\ldots \lhd b_i \lhd \ldots \lhd b_0$, quindi $\exists b_n$ t.c. $b_n \lhd \ldots \lhd b_i \lhd \ldots \lhd b_0$ ovvero b_n è minimale in B rispetto a $\lhd$.
- $\Leftarrow$) Per assurdo. Supponiamo che esista $\ldots \lhd a_i \lhd \ldots \lhd a_0$, ovvero $\neg(\lhd$ b.f.). Allora l'insieme $B = \{a_i | i \in \mathbb{N}\}$ (insieme degli elementi della sequenza) non ha un minimale, cosa che contraddice l'ipotesi. Quindi una tale sequenza non esiste, ovvero $\lhd$ b.f.

$\square$

1.1 Principio di induzione noetheriana

Teorema 1 (Principio di induzione noetheriana (prima forma))**.** *Sia $\mathcal{P}$ una proprietà su* $(A, \lhd)$ b.f. *.*

$$\forall a \in A.\mathcal{P}(a) \Leftrightarrow \forall a \in A.([\forall b \lhd a.\mathcal{P}(b)] \Rightarrow \mathcal{P}(a))$$

Dimostrazione.

- $\Rightarrow$) Ovvia.
- $\Leftarrow$) Per assurdo.
  Supponiamo
  $$\forall a \in A.([\forall b \lhd a.\mathcal{P}(b)] \Leftarrow \mathcal{P}(a)) \tag{1.1}$$
  e
  $$\exists c \in A.\neg\mathcal{P}(c) \tag{1.2}$$
  Sia $C = \{c \in A | \neg\mathcal{P}(c)\} \subseteq A$.
  Per il lemma 2, $\exists \hat{c}$ minimale di C rispetto a $\lhd$, allora $\neg\mathcal{P}(\hat{c})$
  Per $\hat{c}$ minimale, $\forall b \lhd \hat{c}.b \notin C$, allora $\mathcal{P}(b)$, ovvero per (1.1) $\mathcal{P}(\hat{c})$

$\square$

Def. $\texttt{base}_A = \{a \in A | a$ è minimale in A rispetto a $\lhd\}$.
Osserviamo che $\forall a \in \texttt{base}_A, \forall b \in A.b \not\lhd a$.

Teorema 2 (Principio di induzione noetheriana - seconda forma)**.** *Sia $\mathcal{P}$ una proprietà su* $(A, \lhd)$ b.f. *.*

$$\forall a \in A.\mathcal{P}(a) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \forall a \in \texttt{base}_A.\mathcal{P}(a) \\ \wedge \\ \forall a \in (A \setminus \texttt{base}_A).([\forall b \lhd a.\mathcal{P}(b)] \Rightarrow \mathcal{P}(a)) \end{pmatrix}$$

Teorema 3 (Induzione matematica)**.** *Sia $A = \mathbb{N}$.*
Sia $n \lhd m \Leftrightarrow m = n + 1 \quad n, m \in \mathbb{N}$.
Osserviamo che $\lhd$ è ben fondata: $0 \lhd 1 \lhd 2 \lhd \dots$.
Osserviamo $\texttt{base}_{\mathbb{N}} = \{0\}$.

$$\forall m \in \mathbb{N}.\mathcal{P}(m) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{P}(0) \\ \wedge \\ \forall m > 0.(\mathcal{P}(m-1) \Rightarrow \mathcal{P}(m)) \end{pmatrix}$$

Def. $a^{\lhd} = \{b \in A | b \lhd a\}$ con $(A, \lhd)$ b.f. .

Def. Sia $f : A \to B$, sia $A' \subseteq A$. $f_{|A'} = \{(a, f(a)) | a \in A'\}$.

Teorema 4 (di ricorsione / delle definizione noetheriane)**.** *Sia* $(A, \lhd)$ b.f.

$$\forall a \in A, \forall h : a^{\lhd} \to B.F(a, h) \in B$$

(F è detta operatore di composizione*). Allora*

$$\exists! f : A \to B \text{ t.c. } \forall a \in A.f(a) = F(a, f_{|a^{\lhd}})$$

Esempio. Sia $A = \mathbb{N}$, sia $n \lhd m \Leftrightarrow m = n + 1$.

$$\texttt{Fact}(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n \cdot \texttt{Fact}(n-1) & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

In questo caso, $f = \texttt{Fact}$ e F è la moltiplicazione.
$f(n) = F(n, f(n-1)) = n \cdot f(n-1)$