Optimización Lineal

Miguel Raggi

Graph Algorithms
Escuela Nacional de Estudios Superiores
UNAM

11 de abril de 2018

Índice:

Índice:

Hiperplanos y medios espacios.

- Sea $d \in \mathbb{N}$. Un hiperplano de $\mathbb{R}^d$ es un subespacio afín (subespacio lineal más traslación) de dimensión $d-1$.

Hiperplanos y medios espacios.

- Sea $d \in \mathbb{N}$. Un hiperplano de $\mathbb{R}^d$ es un subespacio afín (subespacio lineal más traslación) de dimensión $d-1$.
- Todo hiperplano es de la siguiente forma: Si $\vec{a} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces
$$H(\vec{a}, b) = \{\vec{x} \in \mathbb{R} : \vec{a}^T \vec{x} = b\}$$

Hiperplanos y medios espacios.

- Sea $d \in \mathbb{N}$. Un hiperplano de $\mathbb{R}^d$ es un subespacio afín (subespacio lineal más traslación) de dimensión $d - 1$.
- Todo hiperplano es de la siguiente forma: Si $\vec{a} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces

$$H(\vec{a}, b) = \{\vec{x} \in \mathbb{R} : \vec{a}^T \vec{x} = b\}$$

- Un hiperplano define dos medios espacios (cerrados):

$$\{x \in \mathbb{R} : \vec{a}^T x \leq b\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : \vec{a}^T x \geq b\}$$

Politopos Convexos

- Recordemos que intersección de convexos es convexo.

Politopos Convexos

- Recordemos que intersección de convexos es convexo.
- A una intersección finita de medios planos la llamamos politopo convexo o simplemente politopo.

Politopos Convexos

- Recordemos que intersección de convexos es convexo.
- A una intersección finita de medios planos la llamamos politopo convexo o simplemente politopo.
- Notemos que si sustituimos $\vec{a}$ por $-\vec{a}$ y b por $-b$ podemos cambiar $\leq$ por $\geq$ y viceversa.

Politopos Convexos

- Recordemos que intersección de convexos es convexo.
- A una intersección finita de medios planos la llamamos politopo convexo o simplemente politopo.
- Notemos que si sustituimos $\vec{a}$ por $-\vec{a}$ y b por $-b$ podemos cambiar $\leq$ por $\geq$ y viceversa.
- Un politopo es el conjunto de puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ que satisface un conjunto de ecuaciones de tipo:

$$\vec{a_i}\vec{x} \leq b_i \quad i \in I$$

Politopos Convexos

- Recordemos que intersección de convexos es convexo.
- A una intersección finita de medios planos la llamamos politopo convexo o simplemente politopo.
- Notemos que si sustituimos $\vec{a}$ por $-\vec{a}$ y b por $-b$ podemos cambiar $\leq$ por $\geq$ y viceversa.
- Un politopo es el conjunto de puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ que satisface un conjunto de ecuaciones de tipo:

$$\vec{a_i}\vec{x} \leq b_i \quad i \in I$$

- Escribimos estas ecuaciones como

$$A\vec{x} \leq \vec{b}$$

Politopos Convexos

- Recordemos que intersección de convexos es convexo.
- A una intersección finita de medios planos la llamamos politopo convexo o simplemente politopo.
- Notemos que si sustituimos $\vec{a}$ por $-\vec{a}$ y b por $-b$ podemos cambiar $\leq$ por $\geq$ y viceversa.
- Un politopo es el conjunto de puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ que satisface un conjunto de ecuaciones de tipo:

$$\vec{a_i}\vec{x} \leq b_i \quad i \in I$$

- Escribimos estas ecuaciones como

$$A\vec{x} \leq \vec{b}$$

- Usamos la notación $\vec{a} \leq \vec{b}$ si $\vec{a}[i] \leq \vec{b}[i]$ para cada i.

Politopos Convexos

- Recordemos que intersección de convexos es convexo.
- A una intersección finita de medios planos la llamamos politopo convexo o simplemente politopo.
- Notemos que si sustituimos $\vec{a}$ por $-\vec{a}$ y b por $-b$ podemos cambiar $\leq$ por $\geq$ y viceversa.
- Un politopo es el conjunto de puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ que satisface un conjunto de ecuaciones de tipo:

$$\vec{a_i}\vec{x} \leq b_i \quad i \in I$$

- Escribimos estas ecuaciones como

$$A\vec{x} \leq \vec{b}$$

- Usamos la notación $\vec{a} \leq \vec{b}$ si $\vec{a}[i] \leq \vec{b}[i]$ para cada i.
- Ah, y también usamos la notación $\vec{a}[i]$ para denotar la i-ésima coordenada de $\vec{a}$.

Combinaciones Convexas

- Sean $\vec{p_1}, \vec{p_2}, ..., \vec{p_n}$ puntos en $\mathbb{R}^d$.

Combinaciones Convexas

- Sean $\vec{p_1}, \vec{p_2}, ..., \vec{p_n}$ puntos en $\mathbb{R}^d$.
- Decimos que una combinación (lineal) convexa de los p_i es un punto de la forma
$$\sum_i a_i \vec{p_i}$$
donde con $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \geq 0$ para cada i y además
$$\sum_i a_i = 1$$

Combinaciones Convexas

- Sean $\vec{p_1}, \vec{p_2}, ..., \vec{p_n}$ puntos en $\mathbb{R}^d$.
- Decimos que una combinación (lineal) convexa de los p_i es un punto de la forma

$$\sum_i a_i \vec{p_i}$$

donde con $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \geq 0$ para cada i y además

$$\sum_i a_i = 1$$

- Notemos que un subconjunto $P \subset \mathbb{R}^d$ es convexo sí y sólo si para cualquier conjunto finito de puntos $p_1, ..., p_n \in P$ tenemos que toda combinación convexa de los p_i también esta en P.

Politopos Acotados

- Sea P un politopo. ¿Quiénes son los vértices de P?

Politopos Acotados

- Sea P un politopo. ¿Quiénes son los vértices de P?
- $p \in P$ es un vértice de P si p no es combinación lineal convexa de puntos de P (diferentes de p).

Politopos Acotados

- Sea P un politopo. ¿Quiénes son los vértices de P?
- $p \in P$ es un vértice de P si p no es combinación lineal convexa de puntos de P (diferentes de p).

Teorema

Sea P un politopo acotado de dimensión d. Entonces P consta de todas las combinaciones lineales convexas de sus vértices.

Politopos Acotados

- Sea P un politopo. ¿Quiénes son los vértices de P?
- $p \in P$ es un vértice de P si p no es combinación lineal convexa de puntos de P (diferentes de p).

Teorema

Sea P un politopo acotado de dimensión d. Entonces P consta de todas las combinaciones lineales convexas de sus vértices.
Conversamente, si V es un conjunto finito de puntos en $\mathbb{R}^d$, entonces el conjunto de combinaciones lineales convexas de V forma un politopo, y el conjunto de vértices de P es un subconjunto de V (que consta de aquellos puntos de V que están en la envolvente convexa)

Politopos Acotados

- Sea P un politopo. ¿Quiénes son los vértices de P?
- $p \in P$ es un vértice de P si p no es combinación lineal convexa de puntos de P (diferentes de p).

Teorema

Sea P un politopo acotado de dimensión d. Entonces P consta de todas las combinaciones lineales convexas de sus vértices.
Conversamente, si V es un conjunto finito de puntos en $\mathbb{R}^d$, entonces el conjunto de combinaciones lineales convexas de V forma un politopo, y el conjunto de vértices de P es un subconjunto de V (que consta de aquellos puntos de V que están en la envolvente convexa)

¡No vamos a demostrar esto!

Índice:

Introducción

- Estudiaremos una herramienta muy útil para la optimización combinatoria (y la optimización en general) que se llama "programación lineal", o más bien optimización lineal.

Introducción

- Estudiaremos una herramienta muy útil para la optimización combinatoria (y la optimización en general) que se llama "programación lineal", o más bien optimización lineal.
- La idea es que queremos encontrar el máximo (o mínimo) de una función lineal $f(\vec{x})$ donde $\vec{x}$ está dentro de un politopo convexo P.

Introducción

- Estudiaremos una herramienta muy útil para la optimización combinatoria (y la optimización en general) que se llama "programación lineal", o más bien optimización lineal.
- La idea es que queremos encontrar el máximo (o mínimo) de una función lineal $f(\vec{x})$ donde $\vec{x}$ está dentro de un politopo convexo P.

Definición

El problema (general) de optimización lineal es maximizar la función objetivo $\vec{c}^T\vec{x}$ dado

$$\vec{a_i}^T\vec{x} \leq \vec{b_i} \qquad \forall i \in N_{\leq}$$

$$\vec{a_i}^T\vec{x} \geq \vec{b_i} \qquad \forall i \in N_{\geq}$$

$$\vec{a_i}^T\vec{x} = \vec{b_i} \qquad \forall i \in N_{=}\}$$

donde $N_{\leq}, N_{\geq}, N_{=}$ son conjuntos de índices.

Reducciones

Podemos hacer las siguientes transformaciones para simplificar el problema:

Reducciones

Podemos hacer las siguientes transformaciones para simplificar el problema:

- Intercambiar máx por mín cambiando $\vec{c}$ por $-\vec{c}$.

Reducciones

Podemos hacer las siguientes transformaciones para simplificar el problema:

- Intercambiar $\max$ por $\min$ cambiando $\vec{c}$ por $-\vec{c}$.
- Deshacernos de $N_=$, añadiendo $\vec{a_i}\vec{x} \geq b_i$ y $\vec{a_i}\vec{x} \leq b_i$

Reducciones

Podemos hacer las siguientes transformaciones para simplificar el problema:

- Intercambiar $\max$ por $\min$ cambiando $\vec{c}$ por $-\vec{c}$.
- Deshacernos de $N_=$, añadiendo $\vec{a_i}\vec{x} \geq b_i$ y $\vec{a_i}\vec{x} \leq b_i$
- Deshacernos de $N_\leq$ intercambiando $\vec{a_i}$ por $-\vec{a_i}$ y b_i por $-b_i$.

Reducciones

Podemos hacer las siguientes transformaciones para simplificar el problema:

- Intercambiar máx por mín cambiando $\vec{c}$ por $-\vec{c}$.
- Deshacernos de $N_=$, añadiendo $\vec{a_i}\vec{x} \geq b_i$ y $\vec{a_i}\vec{x} \leq b_i$
- Deshacernos de $N_\leq$ intercambiando $\vec{a_i}$ por $-\vec{a_i}$ y b_i por $-b_i$.
- Suponer que $\vec{x} \geq 0$, escribiendo $\vec{x} = \vec{x^+} - \vec{x^-}$

Reducciones

Podemos hacer las siguientes transformaciones para simplificar el problema:

- Intercambiar $\max$ por $\min$ cambiando $\vec{c}$ por $-\vec{c}$.
- Deshacernos de $N_=$, añadiendo $\vec{a_i}\vec{x} \geq b_i$ y $\vec{a_i}\vec{x} \leq b_i$
- Deshacernos de $N_\leq$ intercambiando $\vec{a_i}$ por $-\vec{a_i}$ y b_i por $-b_i$.
- Suponer que $\vec{x} \geq 0$, escribiendo $\vec{x} = \vec{x^+} - \vec{x^-}$
- Usar notación más corta con matrices.

Forma Canónica

Definición

Decimos que un problema de optimización lineal está en Forma Canónica si es de la forma:

$$\max\{\vec{c}^T\vec{x} \ :$$
$$A\vec{x} \leq \vec{b}$$
$$\vec{x} \geq 0\}$$

Forma Canónica

Definición

Decimos que un problema de optimización lineal está en Forma Canónica *si es de la forma:*

$$\max\{\vec{c}^T\vec{x} \ :$$

$$A\vec{x} \leq \vec{b}$$

$$\vec{x} \geq 0\}$$

También podemos deshacernos de $\geq$ en la segunda condición y reemplazarlo por igualdad, agregando variables $\vec{y}$ a $\vec{x}$, con $\vec{y} \geq 0$, de manera que

$$\vec{y} = \vec{b} - A\vec{x}$$

Forma Estándar

Definición

Decimos que un problema de optimización lineal está en Forma Estándar si es de la forma:

$$\min\{\vec{c}^T\vec{x} :$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\vec{x} \geq 0\}$$

Comentarios

- Concluimos entonces que todas las presentaciones de “programas lineales” son equivalentes.

Comentarios

- Concluimos entonces que todas las presentaciones de “programas lineales” son equivalentes.
- Dado que las funciones lineales son convexas y cóncavas y el dominio es un convexo, sólo pueden pasar 3 cosas.

Comentarios

- Concluimos entonces que todas las presentaciones de “programas lineales” son equivalentes.
- Dado que las funciones lineales son convexas y cóncavas y el dominio es un convexo, sólo pueden pasar 3 cosas.
- ¿Qué podría pasar? Puede ocurrir que:

Comentarios

- Concluimos entonces que todas las presentaciones de “programas lineales” son equivalentes.
- Dado que las funciones lineales son convexas y cóncavas y el dominio es un convexo, sólo pueden pasar 3 cosas.
- ¿Qué podría pasar? Puede ocurrir que:
    - Exista (al menos) una solución óptima al problema.

Comentarios

- Concluimos entonces que todas las presentaciones de "programas lineales" son equivalentes.
- Dado que las funciones lineales son convexas y cóncavas y el dominio es un convexo, sólo pueden pasar 3 cosas.
- ¿Qué podría pasar? Puede ocurrir que:
  - Exista (al menos) una solución óptima al problema.
  - Que el politopo sea vacío. Puede ocurrir si las restricciones son contradictorias (e.g. si $x_1 \leq 2$ y $x_1 \geq 5$)

Comentarios

- Concluimos entonces que todas las presentaciones de "programas lineales" son equivalentes.
- Dado que las funciones lineales son convexas y cóncavas y el dominio es un convexo, sólo pueden pasar 3 cosas.
- ¿Qué podría pasar? Puede ocurrir que:
  - Exista (al menos) una solución óptima al problema.
  - Que el politopo sea vacío. Puede ocurrir si las restricciones son contradictorias (e.g. si $x_1 \leq 2$ y $x_1 \geq 5$)
  - La función objetivo no este acotada. Sólo puede ocurrir si el politopo no esta acotado (e.g. $x_1 \geq 5$ es la única restricción)

Comentarios

- Concluimos entonces que todas las presentaciones de “programas lineales” son equivalentes.
- Dado que las funciones lineales son convexas y cóncavas y el dominio es un convexo, sólo pueden pasar 3 cosas.
- ¿Qué podría pasar? Puede ocurrir que:
  - Exista (al menos) una solución óptima al problema.
  - Que el politopo sea vacío. Puede ocurrir si las restricciones son contradictorias (e.g. si $x_1 \leq 2$ y $x_1 \geq 5$)
  - La función objetivo no este acotada. Sólo puede ocurrir si el politopo no esta acotado (e.g. $x_1 \geq 5$ es la única restricción)
- Entonces un algoritmo que solucione el problema deberá responder que no hay soluciones, decir que el problema no es acotado, o dar al menos una solución óptima.

Una solución óptima está en un vértice

- Veamos que, de haber solución óptima, a fuerzas debe ocurrir que hay una solución óptima en un vértice.

Una solución óptima está en un vértice

- Veamos que, de haber solución óptima, a fuerzas debe ocurrir que hay una solución óptima en un vértice.
- Supongamos que sí existe una solución óptima y que ocurre en un punto $\vec{u}$ del politopo.

Una solución óptima está en un vértice

- Veamos que, de haber solución óptima, a fuerzas debe ocurrir que hay una solución óptima en un vértice.
- Supongamos que sí existe una solución óptima y que ocurre en un punto $\vec{u}$ del politopo.
- Considera cualquier línea que pase por $\vec{u}$.

Una solución óptima está en un vértice

- Veamos que, de haber solución óptima, a fuerzas debe ocurrir que hay una solución óptima en un vértice.
- Supongamos que sí existe una solución óptima y que ocurre en un punto $\vec{u}$ del politopo.
- Considera cualquier línea que pase por $\vec{u}$.
- En esa línea, la función objetivo es lineal también. Es decir, o es constante, o hacia alguna de las dos direcciones aumenta.

Una solución óptima está en un vértice

- Veamos que, de haber solución óptima, a fuerzas debe ocurrir que hay una solución óptima en un vértice.
- Supongamos que sí existe una solución óptima y que ocurre en un punto $\vec{u}$ del politopo.
- Considera cualquier línea que pase por $\vec{u}$.
- En esa línea, la función objetivo es lineal también. Es decir, o es constante, o hacia alguna de las dos direcciones aumenta.
- Si no me creyeron eso, la recta es de esta forma:

$$\vec{u} + t\vec{x}$$

y la función objetivo será entonces $\vec{c}^T\vec{u} + t\vec{c}^T\vec{x}$.

Una solución óptima está en un vértice

- Veamos que, de haber solución óptima, a fuerzas debe ocurrir que hay una solución óptima en un vértice.
- Supongamos que sí existe una solución óptima y que ocurre en un punto $\vec{u}$ del politopo.
- Considera cualquier línea que pase por $\vec{u}$.
- En esa línea, la función objetivo es lineal también. Es decir, o es constante, o hacia alguna de las dos direcciones aumenta.
- Si no me creyeron eso, la recta es de esta forma:

$$\vec{u} + t\vec{x}$$

  y la función objetivo será entonces $\vec{c}^T\vec{u} + t\vec{c}^T\vec{x}$.
- Podemos concluir que, o no está acotada, o está en un "hiperplano" del politopo.

Una solución óptima está en un vértice

- Veamos que, de haber solución óptima, a fuerzas debe ocurrir que hay una solución óptima en un vértice.
- Supongamos que sí existe una solución óptima y que ocurre en un punto $\vec{u}$ del politopo.
- Considera cualquier línea que pase por $\vec{u}$.
- En esa línea, la función objetivo es lineal también. Es decir, o es constante, o hacia alguna de las dos direcciones aumenta.
- Si no me creyeron eso, la recta es de esta forma:

$$\vec{u} + t\vec{x}$$

  y la función objetivo será entonces $\vec{c}^T \vec{u} + t\vec{c}^T \vec{x}$.
- Podemos concluir que, o no está acotada, o está en un "hiperplano" del politopo.
- Etc. Seguimos haciendo eso hasta llegar a un vértice.

Estado del arte

- Para hacer corta la historia, estos problemas están resueltos por completo: la computadora puede encontrar una solución óptima (o decidir si existe o no esta acotado) con cientos de variables y miles de restricciones en muy poco tiempo.

Estado del arte

- Para hacer corta la historia, estos problemas están resueltos por completo: la computadora puede encontrar una solución óptima (o decidir si existe o no esta acotado) con cientos de variables y miles de restricciones en muy poco tiempo.
- Hay varios algoritmos que funcionan. Se ha demostrado que el problema se puede resolver en tiempo polinomial, utilizando un algoritmo espantoso que se llama "método elipsoide".

Estado del arte

- Para hacer corta la historia, estos problemas están resueltos por completo: la computadora puede encontrar una solución óptima (o decidir si existe o no esta acotado) con cientos de variables y miles de restricciones en muy poco tiempo.
- Hay varios algoritmos que funcionan. Se ha demostrado que el problema se puede resolver en tiempo polinomial, utilizando un algoritmo espantoso que se llama “método elipsoide”.
- Extrañamente, ese algoritmo en la practica es muy lento.

Estado del arte

- Para hacer corta la historia, estos problemas están resueltos por completo: la computadora puede encontrar una solución óptima (o decidir si existe o no esta acotado) con cientos de variables y miles de restricciones en muy poco tiempo.
- Hay varios algoritmos que funcionan. Se ha demostrado que el problema se puede resolver en tiempo polinomial, utilizando un algoritmo espantoso que se llama "método elipsoide".
- Extrañamente, ese algoritmo en la practica es muy lento.
- El algoritmo mas utilizado es uno que se llama el "método simplejo": en la practica es muy rápido, pero hay una clase exótica de problemas en que el algoritmo tarda "tiempo exponencial".

Programación Entera

- Si al mismo problema de optimización lineal agregamos la restricción de que $\vec{x}$ debe tener coordenadas enteras (o algunas coordenadas enteras) entonces el problema se llama "programación entera" o optimización entera.

Programación Entera

- Si al mismo problema de optimización lineal agregamos la restricción de que $\vec{x}$ debe tener coordenadas enteras (o algunas coordenadas enteras) entonces el problema se llama "programación entera" o optimización entera.
- Con enteros, para no hacer el cuento largo, si encuentras un algoritmo polinomial que lo resuelva, resolverás el problema mas conocido de computación: P vs NP (de hecho, algo más fuerte).

Programación Entera

- Si al mismo problema de optimización lineal agregamos la restricción de que $\vec{x}$ debe tener coordenadas enteras (o algunas coordenadas enteras) entonces el problema se llama “programación entera” o optimización entera.
- Con enteros, para no hacer el cuento largo, si encuentras un algoritmo polinomial que lo resuelva, resolverás el problema mas conocido de computación: P vs NP (de hecho, algo más fuerte).
- Aunque no haya algoritmos polinomiales, el problema se puede resolver en casos pequeños con búsqueda y heurísticas. Quizás veremos cómo después.

Ejemplos

- Antes de ver como resolver estos problemas y cosas feas como "algoritmo de simplejos" y "dualidad", trataremos de agarrarle mas sabor con ejemplos.

Ejemplos

- Antes de ver como resolver estos problemas y cosas feas como "algoritmo de simplejos" y "dualidad", trataremos de agarrarle mas sabor con ejemplos.
- El ejemplo clásico: Trabajas en una granja y te encargaron alimentar a todos los animalitos gastando la menor cantidad posible de dinero.

Ejemplos

- Antes de ver como resolver estos problemas y cosas feas como "algoritmo de simplejos" y "dualidad", trataremos de agarrarle mas sabor con ejemplos.
- El ejemplo clásico: Trabajas en una granja y te encargaron alimentar a todos los animalitos gastando la menor cantidad posible de dinero.
- Cada animalito necesita 200 gramos de proteínas, 350 gramos de carbohidratos y 190 gramos de grasa al día para sobrevivir.

Ejemplos

- Antes de ver como resolver estos problemas y cosas feas como "algoritmo de simplejos" y "dualidad", trataremos de agarrarle mas sabor con ejemplos.
- El ejemplo clásico: Trabajas en una granja y te encargaron alimentar a todos los animalitos gastando la menor cantidad posible de dinero.
- Cada animalito necesita 200 gramos de proteínas, 350 gramos de carbohidratos y 190 gramos de grasa al día para sobrevivir.
- Les puedes dar pasto, semillas y comida procesada.

Ejemplos

- Antes de ver como resolver estos problemas y cosas feas como "algoritmo de simplejos" y "dualidad", trataremos de agarrarle mas sabor con ejemplos.
- El ejemplo clásico: Trabajas en una granja y te encargaron alimentar a todos los animalitos gastando la menor cantidad posible de dinero.
- Cada animalito necesita 200 gramos de proteínas, 350 gramos de carbohidratos y 190 gramos de grasa al día para sobrevivir.
- Les puedes dar pasto, semillas y comida procesada.
  - Un kilo de pasto aporta 5 gramos de proteínas, 17 de carbohidratos y 1 de grasa. Cuesta $2 pesos.

Ejemplos

- Antes de ver como resolver estos problemas y cosas feas como “algoritmo de simplejos” y “dualidad”, trataremos de agarrarle mas sabor con ejemplos.
- El ejemplo clásico: Trabajas en una granja y te encargaron alimentar a todos los animalitos gastando la menor cantidad posible de dinero.
- Cada animalito necesita 200 gramos de proteínas, 350 gramos de carbohidratos y 190 gramos de grasa al día para sobrevivir.
- Les puedes dar pasto, semillas y comida procesada.
  - Un kilo de pasto aporta 5 gramos de proteínas, 17 de carbohidratos y 1 de grasa. Cuesta $2 pesos.
  - Un kilo de semillas aporta 80 gramos de proteínas, 280 de carbohidratos y 100 de grasas. Cuesta $40.

Ejemplos

- Antes de ver como resolver estos problemas y cosas feas como "algoritmo de simplejos" y "dualidad", trataremos de agarrarle mas sabor con ejemplos.
- El ejemplo clásico: Trabajas en una granja y te encargaron alimentar a todos los animalitos gastando la menor cantidad posible de dinero.
- Cada animalito necesita 200 gramos de proteínas, 350 gramos de carbohidratos y 190 gramos de grasa al día para sobrevivir.
- Les puedes dar pasto, semillas y comida procesada.
  - Un kilo de pasto aporta 5 gramos de proteínas, 17 de carbohidratos y 1 de grasa. Cuesta \$2 pesos.
  - Un kilo de semillas aporta 80 gramos de proteínas, 280 de carbohidratos y 100 de grasas. Cuesta \$40.
  - Un kilo de comida procesada aporta 400 gramos de proteínas, 300 de carbohidratos y 90 de grasas. Cuesta \$80

Granja

Podemos formular el problema de la siguiente manera. Sean p, s, c las cantidades de pasto, semillas y comida procesada que comerá cada animalito. Entonces queremos minimizar el precio:

$$2p + 40s + 60c$$

Granja

Podemos formular el problema de la siguiente manera. Sean p, s, c las cantidades de pasto, semillas y comida procesada que comerá cada animalito. Entonces queremos minimizar el precio:

$$2p + 40s + 60c$$

sujeto a las condiciones:

$$\begin{bmatrix} 5 & 80 & 400 \\ 17 & 280 & 300 \\ 1 & 100 & 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ s \\ c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 200 \\ 350 \\ 190 \end{bmatrix}$$

Granja

Podemos formular el problema de la siguiente manera. Sean p, s, c las cantidades de pasto, semillas y comida procesada que comerá cada animalito. Entonces queremos minimizar el precio:

$$2p + 40s + 60c$$

sujeto a las condiciones:

$$\begin{bmatrix} 5 & 80 & 400 \\ 17 & 280 & 300 \\ 1 & 100 & 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ s \\ c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 200 \\ 350 \\ 190 \end{bmatrix}$$

$$p, s, c \geq 0$$

resuelvelo en sage

Índice:

Ejemplo

Consideremos el siguiente problema lineal: Supongamos otra vez que tenemos una granja en donde queremos alimentar animalitos.

Ejemplo

Consideremos el siguiente problema lineal: Supongamos otra vez que tenemos una granja en donde queremos alimentar animalitos.

- Hay sólo 2 tipos de comida procesada: croquetas y lata.

Ejemplo

Consideremos el siguiente problema lineal: Supongamos otra vez que tenemos una granja en donde queremos alimentar animalitos.

- Hay sólo 2 tipos de comida procesada: croquetas y lata.
- Cada animalito necesita 350 gramos de proteínas y 200 gramos de carbohidratos al día para sobrevivir.

Ejemplo

Consideremos el siguiente problema lineal: Supongamos otra vez que tenemos una granja en donde queremos alimentar animalitos.

- Hay sólo 2 tipos de comida procesada: croquetas y lata.
- Cada animalito necesita 350 gramos de proteínas y 200 gramos de carbohidratos al día para sobrevivir.
- Las croquetas contienen 20 gramos de proteínas y 50 de carbohidratos. Cuesta $10.

Ejemplo

Consideremos el siguiente problema lineal: Supongamos otra vez que tenemos una granja en donde queremos alimentar animalitos.

- Hay sólo 2 tipos de comida procesada: croquetas y lata.
- Cada animalito necesita 350 gramos de proteínas y 200 gramos de carbohidratos al día para sobrevivir.
- Las croquetas contienen 20 gramos de proteínas y 50 de carbohidratos. Cuesta $10.
- La lata contiene 40 de proteínas y 10 de carbohidratos. Cuesta $20.

Ejemplo

El problema está representado por el siguiente problema lineal. Si c y ℓ representan la cantidad de croquetas y latas, tenemos

$$\text{mín} \quad 10c + 20\ell$$

$$20c + 40\ell \geq 350$$
$$50c + 10\ell \geq 200$$

Dualidad

$$\min \quad 10c + 20\ell$$

$$20c + 40\ell \geq 350$$
$$50c + 10\ell \geq 200$$

Dualidad

$$\min \quad 10c + 20\ell$$

$$20c + 40\ell \geq 350$$
$$50c + 10\ell \geq 200$$

- Si tomamos una combinación lineal positiva de las desigualdades, seguirá siendo desigualdad.

Dualidad

$$\text{mín} \quad 10c + 20\ell$$

$$20c + 40\ell \geq 350$$
$$50c + 10\ell \geq 200$$

- Si tomamos una combinación lineal positiva de las desigualdades, seguirá siendo desigualdad.
- Por ejemplo, tomando $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{10}$ como coeficientes, obtenemos:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}(20c + 40\ell) + \tfrac{1}{10}(50c + 10\ell) &= \\ 10c + 11\ell &\geq \\ \tfrac{1}{4}(350) + \tfrac{1}{10}(200) &= \\ 107.5 & \end{aligned}$$

Dualidad

$$\text{mín} \quad 10c + 20\ell$$

$$20c + 40\ell \geq 350$$
$$50c + 10\ell \geq 200$$

- Si tomamos una combinación lineal positiva de las desigualdades, seguirá siendo desigualdad.
- Por ejemplo, tomando $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{10}$ como coeficientes, obtenemos:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}(20c + 40\ell) + \tfrac{1}{10}(50c + 10\ell) &= \\ 10c + 11\ell &\geq \\ \tfrac{1}{4}(350) + \tfrac{1}{10}(200) &= \\ 107.5 & \end{aligned}$$

- Entonces

$$10c + 20\ell \geq 10c + 11\ell \geq 107.5,$$

lo cual nos da una cota inferior para el mínimo.

Dualidad

- Pero nos "sobraron" 9ℓ en este caso.

Dualidad

- Pero nos "sobraron" 9ℓ en este caso.
- Queremos encontrar la máxima cota inferior que podemos lograr tomando combinaciones lineales de esa manera.

Dualidad

- Pero nos “sobraron” 9ℓ en este caso.
- Queremos encontrar la máxima cota inferior que podemos lograr tomando combinaciones lineales de esa manera.
- En este ejemplo, es muy fácil: $\frac{1}{2}$ y 0. Obtenemos:

$$10c + 20\ell \geq 175$$

Dualidad

- Pero nos "sobraron" 9ℓ en este caso.
- Queremos encontrar la máxima cota inferior que podemos lograr tomando combinaciones lineales de esa manera.
- En este ejemplo, es muy fácil: $\frac{1}{2}$ y 0. Obtenemos:

$$10c + 20\ell \geq 175$$

- Resulta que 175 es el óptimo!

Dualidad

- Pero nos "sobraron" 9ℓ en este caso.
- Queremos encontrar la máxima cota inferior que podemos lograr tomando combinaciones lineales de esa manera.
- En este ejemplo, es muy fácil: $\frac{1}{2}$ y 0. Obtenemos:

$$10c + 20\ell \geq 175$$

- Resulta que 175 es el óptimo!
- Lo que resultó fue que tuvimos que encontrar una combinación lineal de las desigualdades que maximizara los lados derechos de las desigualdades, pero sin pasarnos de la función objetivo.

Dualidad

- Pero nos "sobraron" 9ℓ en este caso.
- Queremos encontrar la máxima cota inferior que podemos lograr tomando combinaciones lineales de esa manera.
- En este ejemplo, es muy fácil: $\frac{1}{2}$ y 0. Obtenemos:

$$10c + 20\ell \geq 175$$

- Resulta que 175 es el óptimo!
- Lo que resultó fue que tuvimos que encontrar una combinación lineal de las desigualdades que maximizara los lados derechos de las desigualdades, pero sin pasarnos de la función objetivo.
- Esto es un problema lineal: el problema lineal dual. Antes de verlo en general, veremos el punto de vista económico.

Ejemplo dual

- Ahora consideremos el punto de vista de la tienda que fabrica latas y croquetas.

Ejemplo dual

- Ahora consideremos el punto de vista de la tienda que fabrica latas y croquetas.
- Cada gramo de proteínas le sale en precio p y cada gramo de carbohidratos le sale en precio h.

Ejemplo dual

- Ahora consideremos el punto de vista de la tienda que fabrica latas y croquetas.
- Cada gramo de proteínas le sale en precio p y cada gramo de carbohidratos le sale en precio h.
- Sólo le conviene producir croquetas si

$$20p + 50h \leq 30$$

Ejemplo dual

- Ahora consideremos el punto de vista de la tienda que fabrica latas y croquetas.
- Cada gramo de proteínas le sale en precio p y cada gramo de carbohidratos le sale en precio h.
- Sólo le conviene producir croquetas si

$$20p + 50h \leq 30$$

- Supongamos que el proveedor de proteínas y carbohidratos quiere maximizar ganancias.

Ejemplo dual

- Ahora consideremos el punto de vista de la tienda que fabrica latas y croquetas.
- Cada gramo de proteínas le sale en precio p y cada gramo de carbohidratos le sale en precio h.
- Sólo le conviene producir croquetas si

$$20p + 50h \leq 30$$

- Supongamos que el proveedor de proteínas y carbohidratos quiere maximizar ganancias.
- El productor de croquetas y latas dijo que comprará 350 gramos de proteína y 200 de carbohidratos (pues sabe que eso venderá por cada animalito).

Problema dual desde el punto de vista económico

Transformamos entonces el problema anterior a:

$$\text{máx} \quad 350p + 200h$$

dado

$$20p + 50h \leq 30$$

$$40p + 30h \leq 40$$

Problema dual desde el punto de vista económico

Transformamos entonces el problema anterior a:

$$\text{máx} \quad 350p + 200h$$

dado

$$20p + 50h \leq 30$$

$$40p + 30h \leq 40$$

Por principios económicos, el óptimo del primal se alcanza cuando no hay "pérdida": Es decir, cuando el dual se satisface.

Dualidad en general

- En general ocurre así. Supongamos que tenemos un problema en forma canónica:

$$\min \quad \vec{c}^T \vec{x}$$

$$A\vec{x} \geq \vec{b}$$

$$\vec{x} \geq 0$$

Dualidad en general

- En general ocurre así. Supongamos que tenemos un problema en forma canónica:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \vec{c}^T \vec{x} \\
A\vec{x} & \geq \vec{b} \\
\vec{x} & \geq 0
\end{aligned}
$$

- Queremos entonces encontrar una combinación lineal positiva de las desigualdades (cada renglón de A, pues) de modo que:

Dualidad en general

- En general ocurre así. Supongamos que tenemos un problema en forma canónica:

$$\begin{gathered}\min \quad \vec{c}^T\vec{x} \\ A\vec{x} \geq \vec{b} \\ \vec{x} \geq 0\end{gathered}$$

- Queremos entonces encontrar una combinación lineal positiva de las desigualdades (cada renglón de A, pues) de modo que:
  - Para cada coordenada de $\vec{x}$ queremos que en la combinación lineal que encontramos el coeficiente sea mayor que el de $\vec{c}$ correspondiente.

Dualidad en general

- En general ocurre así. Supongamos que tenemos un problema en forma canónica:

$$\begin{gathered}\min \quad \vec{c}^T\vec{x} \\ A\vec{x} \geq \vec{b} \\ \vec{x} \geq 0\end{gathered}$$

- Queremos entonces encontrar una combinación lineal positiva de las desigualdades (cada renglón de A, pues) de modo que:
  - Para cada coordenada de $\vec{x}$ queremos que en la combinación lineal que encontramos el coeficiente sea mayor que el de $\vec{c}$ correspondiente.
  - La combinación lineal en $\vec{b}$ debe ser lo mayor posible.

El problema dual

Problema (Primal)

$$\text{mín} \quad \vec{c}^T \vec{x}$$

$$A\vec{x} \geq \vec{b}$$

$$\vec{x} \geq 0$$

Problema (Dual)

$$\text{máx} \quad \vec{b}^T \vec{y}$$

$$A^T \vec{y} \geq \vec{c}$$

$$\vec{y} \geq 0$$

Observación: El dual del dual es el primal.

Teorema principal

Teorema

Sea $\vec{x}$ un punto en el politopo primal y $\vec{y}$ un punto en el politopo dual. Entonces tenemos que

$$\vec{b}^T\vec{y} \leq \vec{c}^T\vec{x}.$$

Teorema principal

Teorema

Sea $\vec{x}$ un punto en el politopo primal y $\vec{y}$ un punto en el politopo dual. Entonces tenemos que

$$\vec{b}^T \vec{y} \leq \vec{c}^T \vec{x}.$$

Además, si existe al menos un punto en cada politopo, existe óptimo en ambos, y en la solución óptima tenemos que se da la igualdad.

Teorema principal

Teorema

Sea $\vec{x}$ un punto en el politopo primal y $\vec{y}$ un punto en el politopo dual. Entonces tenemos que

$$\vec{b}^T \vec{y} \leq \vec{c}^T \vec{x}.$$

Además, si existe al menos un punto en cada politopo, existe óptimo en ambos, y en la solución óptima tenemos que se da la igualdad.