# Introducción a las Gráficas/Grafos

Miguel Raggi
mraggi@gmail.com

Algoritmos en grafos
Escuela Nacional de Estudios Superiores
UNAM

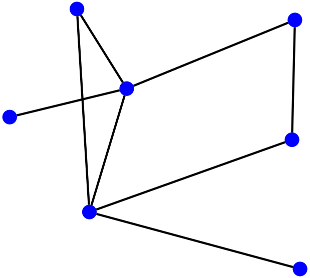
29 de enero de 2018

# Índice:

# Índice:

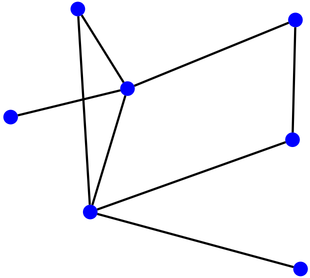
# Introducción a las Gráficas

- Las gráficas son cosas como esta:



# Introducción a las Gráficas

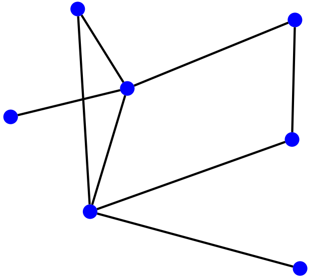
- Las gráficas son cosas como esta:



- Son estructuras que tienen nodos o vértices, que representan los objetos de estudio, y aristas, que representan las relaciones que hay entre los objetos.

# Introducción a las Gráficas

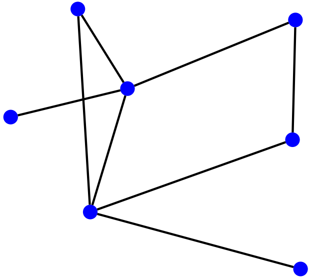
- Las gráficas son cosas como esta:



- Son estructuras que tienen nodos o vértices, que representan los objetos de estudio, y aristas, que representan las relaciones que hay entre los objetos.
- Sirven para representar relaciones entre objetos, personas, ciudades, lo que sea.

# Introducción a las Gráficas

- Las gráficas son cosas como esta:



- Son estructuras que tienen nodos o vértices, que representan los objetos de estudio, y aristas, que representan las relaciones que hay entre los objetos.
- Sirven para representar relaciones entre objetos, personas, ciudades, lo que sea.
- Nota: Lo de arriba es solo un dibujo de una gráfica. En donde se juntan las aristas que no hay punto azul, no hay nodo.

# Definición Formal

**Definición**

*Una gráfica (simple) es una pareja ordenada* $(V, A)$ *donde* $V$*, los vértices, es un conjunto cualquiera y* $A \subset \binom{V}{2}$ *es el conjunto de las aristas.*

# Definición Formal

**Definición**

*Una gráfica (simple) es una pareja ordenada $(V, A)$ donde $V$, los vértices, es un conjunto cualquiera y $A \subset \binom{V}{2}$ es el conjunto de las aristas.*

Notas:

# Definición Formal

## Definición

*Una gráfica (simple) es una pareja ordenada* $(V, A)$ *donde* $V$*, los vértices, es un conjunto cualquiera y* $A \subset \binom{V}{2}$ *es el conjunto de las aristas.*

Notas:

- Si $G = (V, A)$, llamamos $V(G)$ a $V$ y $A(G)$ a $A$.

# Definición Formal

**Definición**

*Una gráfica (simple) es una pareja ordenada $(V, A)$ donde $V$, los vértices, es un conjunto cualquiera y $A \subset \binom{V}{2}$ es el conjunto de las aristas.*

Notas:

- Si $G = (V, A)$, llamamos $V(G)$ a $V$ y $A(G)$ a $A$.
- En inglés casi siempre son $G = (V, E)$, por "edges".

# Definición Formal

## Definición

*Una gráfica (simple) es una pareja ordenada $(V, A)$ donde $V$, los vértices, es un conjunto cualquiera y $A \subset \binom{V}{2}$ es el conjunto de las aristas.*

Notas:

- Si $G = (V, A)$, llamamos $V(G)$ a $V$ y $A(G)$ a $A$.
- En inglés casi siempre son $G = (V, E)$, por "edges".
- Si la gráfica es dirigida, entonces $A \subset V \times V$.

# Definición Formal

**Definición**

*Una gráfica (simple) es una pareja ordenada* $(V, A)$ *donde* $V$, *los vértices, es un conjunto cualquiera y* $A \subset \binom{V}{2}$ *es el conjunto de las aristas.*

Notas:

- Si $G = (V, A)$, llamamos $V(G)$ a $V$ y $A(G)$ a $A$.
- En inglés casi siempre son $G = (V, E)$, por "edges".
- Si la gráfica es dirigida, entonces $A \subset V \times V$.
- Si no es simple, puede ser un multi-conjunto.

# Definición Formal

## Definición

*Una gráfica (simple) es una pareja ordenada $(V, A)$ donde $V$, los vértices, es un conjunto cualquiera y $A \subset \binom{V}{2}$ es el conjunto de las aristas.*

Notas:

- Si $G = (V, A)$, llamamos $V(G)$ a $V$ y $A(G)$ a $A$.
- En inglés casi siempre son $G = (V, E)$, por “edges”.
- Si la gráfica es dirigida, entonces $A \subset V \times V$.
- Si no es simple, puede ser un multi-conjunto.
- Si se permiten loops (aristas de un vértice a sí mismo), $V \subset \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$.

# Definición Formal

**Definición**

*Una* *gráfica* *(simple) es una pareja ordenada* $(V, A)$ *donde* $V$*, los vértices, es un conjunto cualquiera y* $A \subset \binom{V}{2}$ *es el conjunto de las aristas.*

Notas:

- Si $G = (V, A)$, llamamos $V(G)$ a $V$ y $A(G)$ a $A$.
- En inglés casi siempre son $G = (V, E)$, por "edges".
- Si la gráfica es dirigida, entonces $A \subset V \times V$.
- Si no es simple, puede ser un multi-conjunto.
- Si se permiten loops (aristas de un vértice a sí mismo), $V \subset \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$.
- Nunca, nunca, nos imaginamos una gráfica así.

# Ejemplos

- Una gráfica de personas, y se pone una arista entre dos personas si se conocen entre sí (o si son amigos de facebook, o lo que sea).

# Ejemplos

- Una gráfica de personas, y se pone una arista entre dos personas si se conocen entre sí (o si son amigos de facebook, o lo que sea).
- Una gráfica de computadoras en una red, y se pone una arista entre dos computadoras si están conectadas una con otra.

# Ejemplos

- Una gráfica de personas, y se pone una arista entre dos personas si se conocen entre sí (o si son amigos de facebook, o lo que sea).
- Una gráfica de computadoras en una red, y se pone una arista entre dos computadoras si están conectadas una con otra.
- Una gráfica de ciudades, donde las aristas son las carreteras que hay de una ciudad a otra.

# Ejemplos

- Una gráfica de personas, y se pone una arista entre dos personas si se conocen entre sí (o si son amigos de facebook, o lo que sea).
- Una gráfica de computadoras en una red, y se pone una arista entre dos computadoras si están conectadas una con otra.
- Una gráfica de ciudades, donde las aristas son las carreteras que hay de una ciudad a otra.
- Gráfica de países, y se pone una arista si comparten frontera.

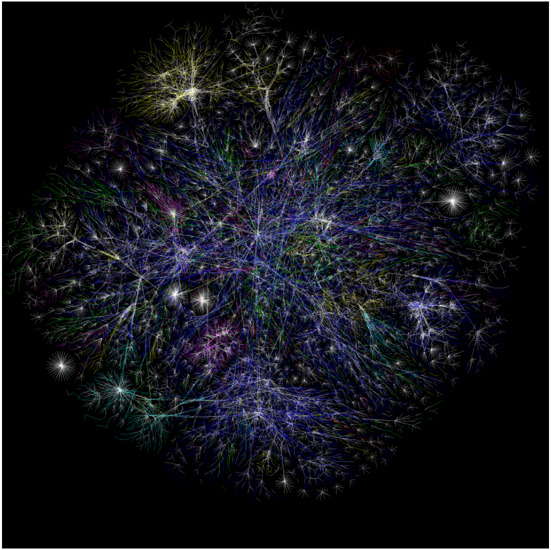
# Ejemplos

- Una gráfica de personas, y se pone una arista entre dos personas si se conocen entre sí (o si son amigos de facebook, o lo que sea).
- Una gráfica de computadoras en una red, y se pone una arista entre dos computadoras si están conectadas una con otra.
- Una gráfica de ciudades, donde las aristas son las carreteras que hay de una ciudad a otra.
- Gráfica de países, y se pone una arista si comparten frontera.
- Gráfica de cubos de Rubik, y se pone una arista entre dos posiciones si puedes llegar de una a la otra en un sólo movimiento.

# Ejemplos

- Una gráfica de personas, y se pone una arista entre dos personas si se conocen entre sí (o si son amigos de facebook, o lo que sea).
- Una gráfica de computadoras en una red, y se pone una arista entre dos computadoras si están conectadas una con otra.
- Una gráfica de ciudades, donde las aristas son las carreteras que hay de una ciudad a otra.
- Gráfica de países, y se pone una arista si comparten frontera.
- Gráfica de cubos de Rubik, y se pone una arista entre dos posiciones si puedes llegar de una a la otra en un sólo movimiento.
- ¡Ustedes inventen ejemplos!

# Gráfica del Internet

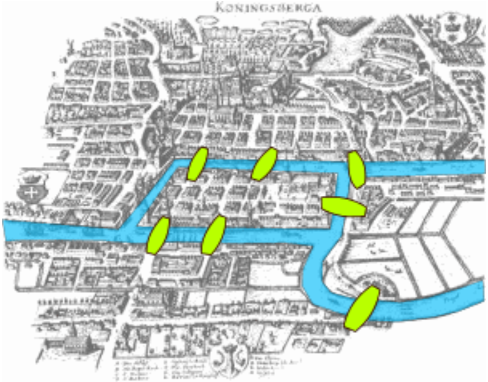


# Puentes de Köningsberg

Históricamente, la teoría de gráficas empezó cuando Euler quizo saber si podía hacer un recorrido por los puentes de Köningsberg sin pasar dos veces por el mismo puente:

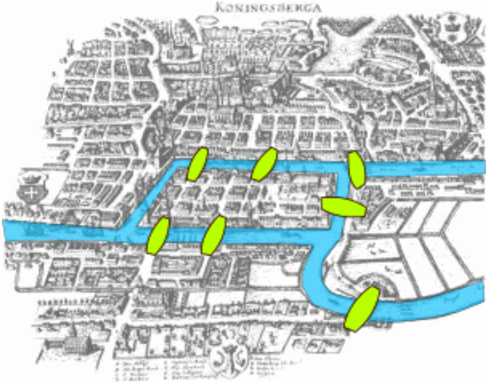
# Puentes de Köningsberg

Históricamente, la teoría de gráficas empezó cuando Euler quizo saber si podía hacer un recorrido por los puentes de Köningsberg sin pasar dos veces por el mismo puente:



# Puentes de Köningsberg

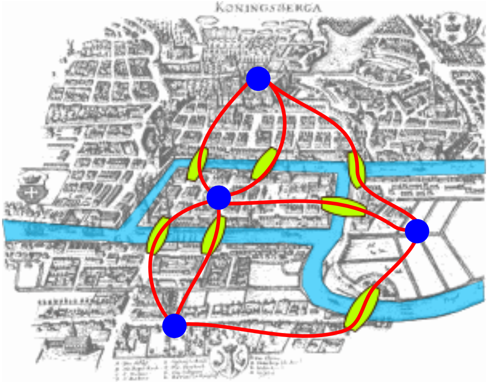
Históricamente, la teoría de gráficas empezó cuando Euler quizo saber si podía hacer un recorrido por los puentes de Köningsberg sin pasar dos veces por el mismo puente:




Nosotros contestaremos esta pregunta al rato.

# Puentes de Köningberg

Históricamente, la teoría de gráficas empezó cuando Euler quizo saber si podía hacer un recorrido por los puentes de Köningsberg sin pasar dos veces por el mismo puente:

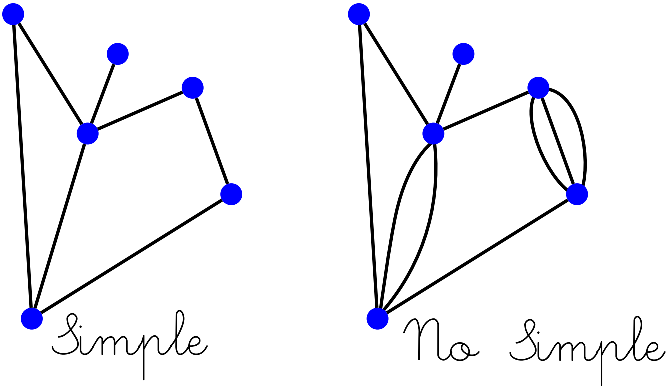



Nosotros contestaremos esta pregunta al rato.

# Gráficas Simples

## Definición

*Una gráfica es simple si no tiene aristas repetidas.*

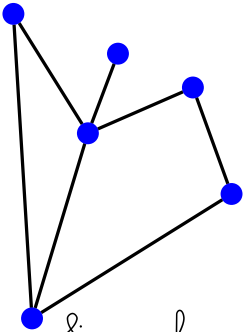



Ejercicio: ¿Cuál es el máximo número de aristas que una gráfica simple con $n$ vértices puede tener?

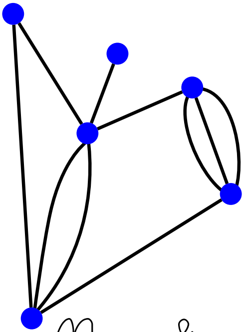
# Gráficas Simples

**Definición**

*Una gráfica es simple si no tiene aristas repetidas.*



Simple

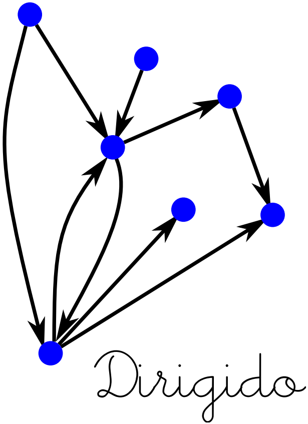


No Simple

Ejercicio: ¿Cuál es el máximo número de aristas que una gráfica simple con $n$ vértices puede tener? $\binom{n}{2}$

# Gráficas Dirigidas

También está el concepto de gráficas dirigidas, que son lo mismo, pero las aristas tienen dirección:



# Nota

- Cuando hable de "una gráfica", me refiero a una gráfica simple, no dirigida, a menos que especifique lo contrario.

# Nota

- Cuando hable de “una gráfica”, me refiero a una gráfica simple, no dirigida, a menos que especifique lo contrario.
- En aplicaciones, depende completamente de la aplicación si se van a permitir aristas múltiples, o si es dirigida o no.

# Nota

- Cuando hable de “una gráfica”, me refiero a una gráfica simple, no dirigida, a menos que especifique lo contrario.
- En aplicaciones, depende completamente de la aplicación si se van a permitir aristas múltiples, o si es dirigida o no.
- Las ideas para estudiar una o la otra son básicamente las mismas.

# Grado, Orden o Valencia

**Definición**

*Dado un vértice $v$, llamamos orden o valencia o grado al número $\delta(v)$ de aristas que salen de $v$.*

- Por ejemplo, en la gráfica primera, los órdenes son: 1, 2, 2, 2, 1, 4.

# Grado, Orden o Valencia

**Definición**

*Dado un vértice $v$, llamamos orden o valencia o grado al número $\delta(v)$ de aristas que salen de $v$.*

- Por ejemplo, en la gráfica primera, los órdenes son: 1, 2, 2, 2, 1, 4.
- ¿Cuáles son los órdenes de la gráfica de los puentes de Köningsberg?

# Grado, Orden o Valencia

**Definición**

*Dado un vértice $v$, llamamos orden o valencia o grado al número $\delta(v)$ de aristas que salen de $v$.*

- Por ejemplo, en la gráfica primera, los órdenes son: 1, 2, 2, 2, 1, 4.
- ¿Cuáles son los órdenes de la gráfica de los puentes de Köningsberg?
- ¿Cuál es el mínimo y máximo orden en una gráfica con $n$ vértices?

# Grado, Orden o Valencia

**Definición**

*Dado un vértice $v$, llamamos orden o valencia o grado al número $\delta(v)$ de aristas que salen de $v$.*

- Por ejemplo, en la gráfica primera, los órdenes son: 1, 2, 2, 2, 1, 4.
- ¿Cuáles son los órdenes de la gráfica de los puentes de Köningsberg?
- ¿Cuál es el mínimo y máximo orden en una gráfica con $n$ vértices?
- Dibuja una gráfica con 5 vértices y que todos sus grados sean 2.

# Grado, Orden o Valencia

**Definición**

*Dado un vértice $v$, llamamos orden o valencia o grado al número $\delta(v)$ de aristas que salen de $v$.*

- Por ejemplo, en la gráfica primera, los órdenes son: 1, 2, 2, 2, 1, 4.
- ¿Cuáles son los órdenes de la gráfica de los puentes de Köningsberg?
- ¿Cuál es el mínimo y máximo orden en una gráfica con $n$ vértices?
- Dibuja una gráfica con 5 vértices y que todos sus grados sean 2.
- Dibuja una gráfica con 6 vértices y que todos sus grados sean 1.

# Grado, Orden o Valencia

**Definición**

*Dado un vértice $v$, llamamos orden o valencia o grado al número $\delta(v)$ de aristas que salen de $v$.*

- Por ejemplo, en la gráfica primera, los órdenes son: 1, 2, 2, 2, 1, 4.
- ¿Cuáles son los órdenes de la gráfica de los puentes de Köningsberg?
- ¿Cuál es el mínimo y máximo orden en una gráfica con $n$ vértices?
- Dibuja una gráfica con 5 vértices y que todos sus grados sean 2.
- Dibuja una gráfica con 6 vértices y que todos sus grados sean 1.
- Dibuja una gráfica con 4 vértices y que los grados sean 3, 2, 2, 1.

# Número de Aristas

**Proposición**

*El número de aristas de una gráfica es la mitad de la suma de los órdenes de los vértices.*

# Número de Aristas

**Proposición**

*El número de aristas de una gráfica es la mitad de la suma de los órdenes de los vértices.*

- ¿Por qué?

# Número de Aristas

**Proposición**

*El número de aristas de una gráfica es la mitad de la suma de los órdenes de los vértices.*

- ¿Por qué?
- Simplemente para contar el número de aristas, sumamos los órdenes y dividimos entre 2.

# Número de Aristas

**Proposición**

*El número de aristas de una gráfica es la mitad de la suma de los órdenes de los vértices.*

- ¿Por qué?
- Simplemente para contar el número de aristas, sumamos los órdenes y dividimos entre 2.
- Pues cuando ponemos una arista, le aumenta 1 al orden de cada uno de los dos vértices a los que se la ponemos.

# Número de Aristas

**Proposición**

*El número de aristas de una gráfica es la mitad de la suma de los órdenes de los vértices.*

- ¿Por qué?
- Simplemente para contar el número de aristas, sumamos los órdenes y dividimos entre 2.
- Pues cuando ponemos una arista, le aumenta 1 al orden de cada uno de los dos vértices a los que se la ponemos.
- ¡Inducción!

# Ejercicios

## Ejercicio

*Dado una gráfica $G$, demuestra que el número de vértices de orden impar es par.*

# Ejercicios

### Ejercicio

*Dado una gráfica $G$, demuestra que el número de vértices de orden impar es par.*

### Ejercicio

*Si $G$ tiene 26 aristas y todos sus vértices tienen el mismo grado, ¿cuántos vértices puede tener?*

# Ejercicios

## Ejercicio

*Dado una gráfica $G$, demuestra que el número de vértices de orden impar es par.*

## Ejercicio

*Si $G$ tiene 26 aristas y todos sus vértices tienen el mismo grado, ¿cuántos vértices puede tener?*

## Ejercicio

*Se quiere diseñar una competencia entre $n$ participantes en donde cada uno compita contra otros $k$. ¿Cuándo se puede hacer?*

# Ejercicios

**Ejercicio**

*Dado una gráfica $G$, demuestra que el número de vértices de orden impar es par.*

**Ejercicio**

*Si $G$ tiene 26 aristas y todos sus vértices tienen el mismo grado, ¿cuántos vértices puede tener?*

**Ejercicio**

*Se quiere diseñar una competencia entre $n$ participantes en donde cada uno compita contra otros $k$. ¿Cuándo se puede hacer?*

**Ejercicio**

*¿Cuántos vértices y aristas tiene cada uno de los sólidos platónicos?*

# $\Delta$ y $\delta$

**Definición**

*El grado máximo* $\Delta(G)$ *de una gráfica es el máximo entre los* $\delta(v)$ *tal que* $v \in V(G)$.

# $\Delta$ y $\delta$

**Definición**

*El grado máximo* $\Delta(G)$ *de una gráfica es el máximo entre los* $\delta(v)$ *tal que* $v \in V(G)$.

**Definición**

*El grado mínimo* $\delta(G)$ *de una gráfica es el mínimo entre los* $\delta(v)$ *tal que* $v \in V(G)$.

# $\Delta$ y $\delta$

**Definición**

*El grado máximo* $\Delta(G)$ *de una gráfica es el máximo entre los* $\delta(v)$ *tal que* $v \in V(G)$.

**Definición**

*El grado mínimo* $\delta(G)$ *de una gráfica es el mínimo entre los* $\delta(v)$ *tal que* $v \in V(G)$.

**Definición**

*Una gráfica* $G$ *es* $r$*-regular si todos sus vértices tienen grado* $r$. *Es decir, si* $\Delta(G) = \delta(G) = r$.

# Camino

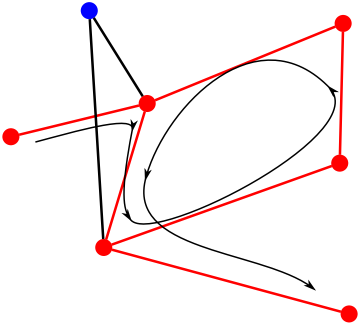
## Definición

*Un camino de longitud $n$ en una gráfica es una sucesión intercalada de vértices y aristas:*

$$V_1, A_1, V_2, A_2, ..., A_n V_{n+1},$$

*en donde $A_i = \{V_i, V_{i+1}\}$.*

Es decir, es algo como esto:



# Paseo

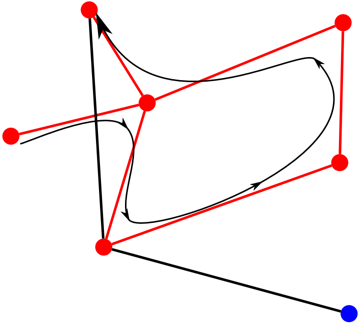
## Definición

*Un* *paseo de longitud* $n$ *en una gráfica es una sucesión intercalada de vértices y aristas:*

$$V_1, A_1, V_2, A_2, ..., A_n V_{n+1},$$

*en donde* $A_i = \{V_i, V_{i+1}\}$ *y* $A_i \neq A_j$ *si* $i \neq j$.

Es decir, es algo como esto:



# Trayectoria

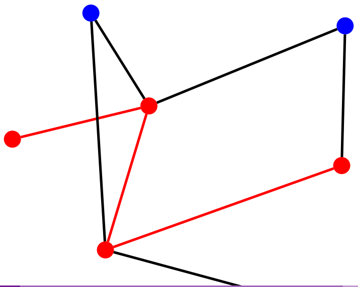
## Definición

*Una trayectoria de longitud $n$ en una gráfica es una sucesión intercalada de vértices y aristas:*

$$V_1, A_1, V_2, A_2, ..., A_n V_{n+1},$$

*en donde $A_i = \{V_i, V_{i+1}\}$ y $V_i \neq V_j$ si $i \neq j$.*

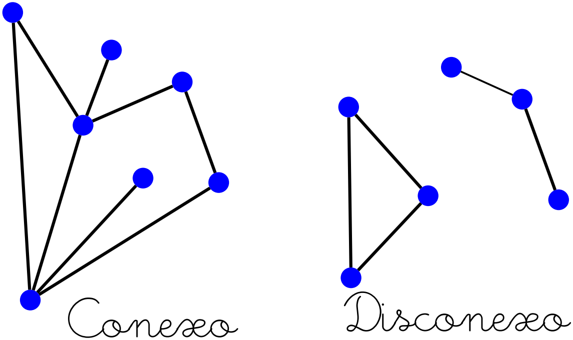
Es decir, es algo como esto:



# Conexidad

## Definición

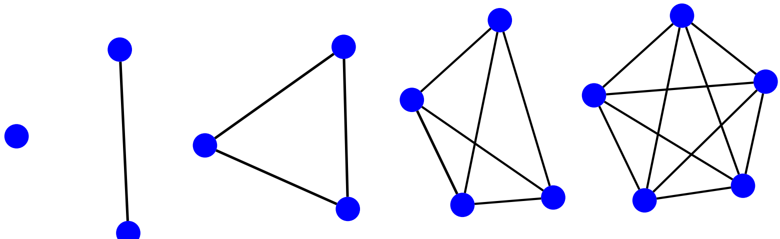
*Una gráfica es conexa o conectada si para cualesquiera dos vértices $x$ y $y$, hay un camino de $x$ a $y$. En otro caso es disconexa.*



# Gráfica Completa

## Definición

*Dado $n$, la gráfica completa de $n$ vértices la denotamos por $K_n$ y es la gráfica con $n$ vértices y todas las $\binom{n}{2}$ aristas posibles.*



$K_1$ $K_2$ $K_3$ $K_4$ $K_5$

# Complemento

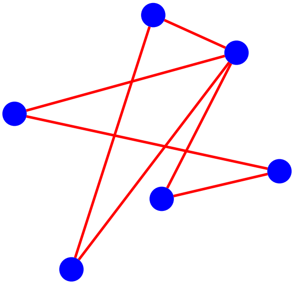
## Definición

*Sea $G$ una gráfica. El complemento $\overline{G}$ es la gráfica que tiene los mismos vértices que $G$, pero las aristas opuestas.*

# Complemento

## Definición

*Sea $G$ una gráfica. El complemento $\overline{G}$ es la gráfica que tiene los mismos vértices que $G$, pero las aristas opuestas. Es decir, $x - y$ es arista de $\overline{G}$ si y solo si no es arista de $G$.*

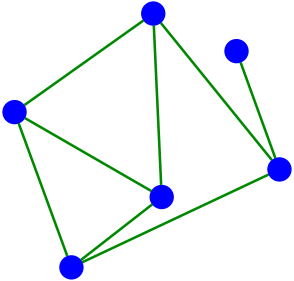


$G$

# Complemento

## Definición

*Sea $G$ una gráfica. El complemento $\overline{G}$ es la gráfica que tiene los mismos vértices que $G$, pero las aristas opuestas. Es decir, $x - y$ es arista de $\overline{G}$ si y solo si no es arista de $G$.*

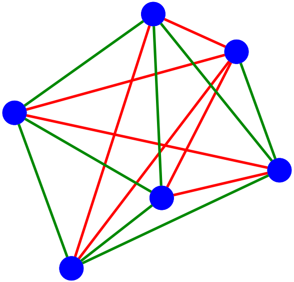


$\overline{G}$

# Complemento

## Definición

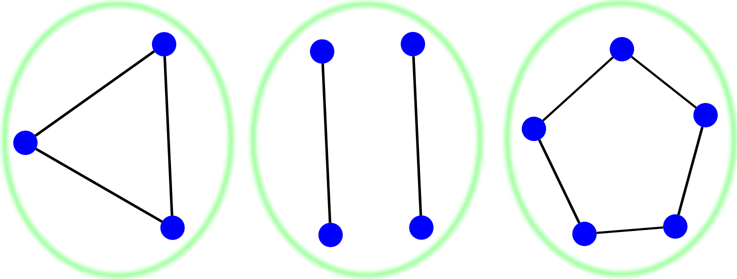
*Sea $G$ una gráfica. El complemento $\overline{G}$ es la gráfica que tiene los mismos vértices que $G$, pero las aristas opuestas. Es decir, $x - y$ es arista de $\overline{G}$ si y solo si no es arista de $G$.*



Ambas

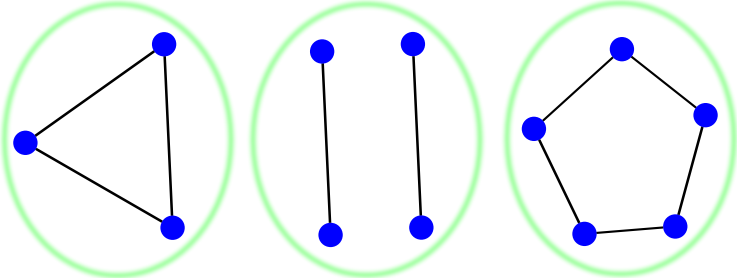
# Ejercicios

- Encuentra el complemento de los siguientes gráficas:



# Ejercicios

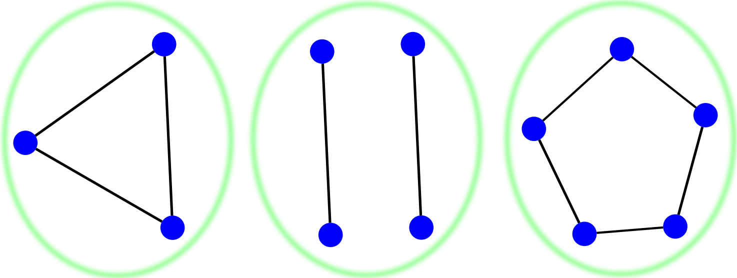
- Encuentra el complemento de los siguientes gráficas:



- Sea $G$ una gráfica. Demuestra que $G$ o $\overline{G}$ es conexa (o ambos).

# Ejercicios

- Encuentra el complemento de los siguientes gráficas:



- Sea $G$ una gráfica. Demuestra que $G$ o $\overline{G}$ es conexa (o ambos).
- Encuentra una gráfica tal que ella y su complemento ambas son conexas.

# Índice:

# Ciclos

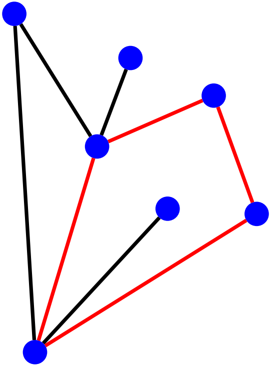
## Definición

*Un ciclo en una gráfica es un "camino" que empieza y termina en el mismo vértice, y no repite vértices ni aristas, (salvo el primero, claro, pero sólo una vez).*

# Ciclos

## Definición

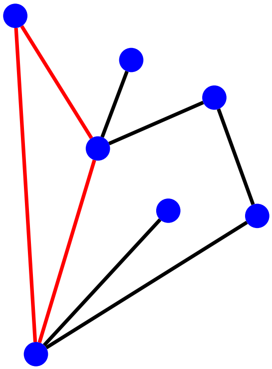
*Un ciclo en una gráfica es un "camino" que empieza y termina en el mismo vértice, y no repite vértices ni aristas, (salvo el primero, claro, pero sólo una vez).*



# Ciclos

## Definición

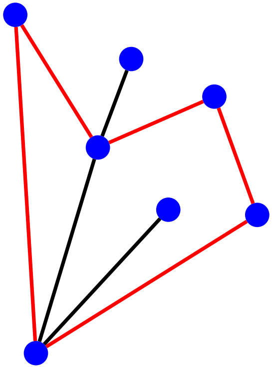
*Un* ***ciclo*** *en una gráfica es un "camino" que empieza y termina en el mismo vértice, y no repite vértices ni aristas, (salvo el primero, claro, pero sólo una vez).*



# Ciclos

**Definición**

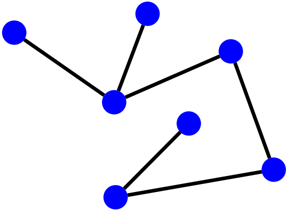
*Un ciclo en una gráfica es un "camino" que empieza y termina en el mismo vértice, y no repite vértices ni aristas, (salvo el primero, claro, pero sólo una vez).*



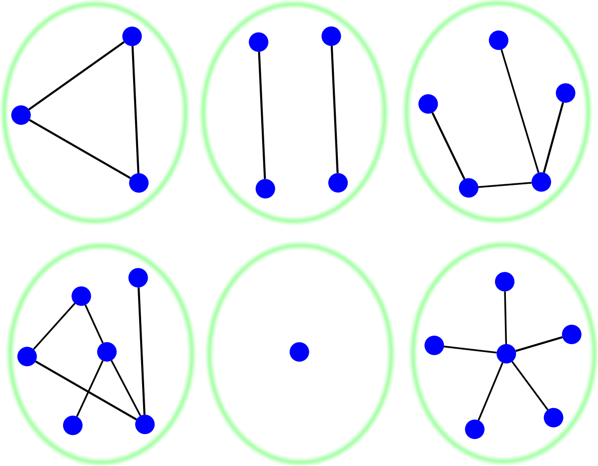
# Árboles

**Definición**

*Un* *árbol* *es una gráfica conexa que no tiene ciclos.*



# ¿Cuáles de los siguientes son árboles?



# Árboles

Notas:

- Para que una gráfica sea un árbol, debe ser simple.

# Árboles

Notas:

- Para que una gráfica sea un árbol, debe ser simple.
- Todo árbol con dos o más vértices tiene por lo menos 2 vértices de grado 1.

# Árboles

Notas:

- Para que una gráfica sea un árbol, debe ser simple.
- Todo árbol con dos o más vértices tiene por lo menos 2 vértices de grado 1.

**Proposición**

*Si un árbol tiene $n$ vértices, entonces tiene $n-1$ aristas.*

# Árboles

Notas:

- Para que una gráfica sea un árbol, debe ser simple.
- Todo árbol con dos o más vértices tiene por lo menos 2 vértices de grado 1.

**Proposición**

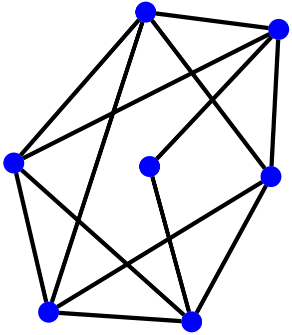
*Si un árbol tiene $n$ vértices, entonces tiene $n-1$ aristas.*

Dem: Inducción (quitando un vértice de grado 1).

# Árbol Generador

**Definición**

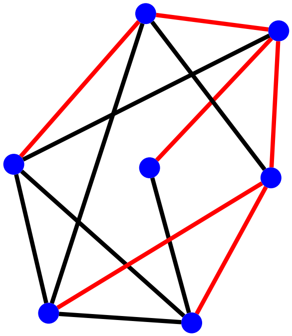
*Dado una gráfica conexa $G$, un árbol generador de $G$ es un árbol en los vértices de $G$ que utiliza sólo aristas de $G$.*



# Árbol Generador

## Definición

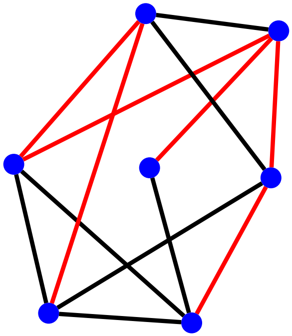
*Dado una gráfica conexa $G$, un árbol generador de $G$ es un árbol en los vértices de $G$ que utiliza sólo aristas de $G$.*



# Árbol Generador

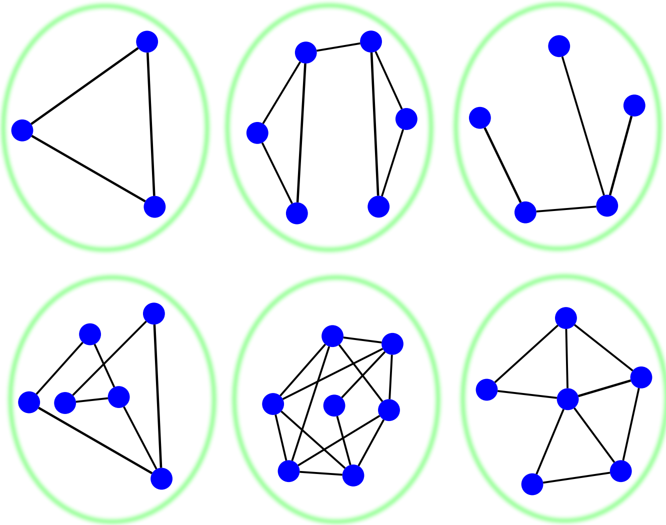
## Definición

*Dado una gráfica conexa $G$, un árbol generador de $G$ es un árbol en los vértices de $G$ que utiliza sólo aristas de $G$.*



# Ejercicios

Encuentra un árbol generador para cada uno de los siguientes:



# Bosques

**Definición**

*Un bosque es un conjunto de árboles. En otras palabras, un bosque es una gráfica sin ciclos:*

# Árboles y Bosques

### Ejercicio

*Sean* $g_i$ *naturales tales que* $1 \leq g_i$ *y que* $\sum g_i = 2(n-1)$. *Demuestra que existe un árbol cuyos vértices tienen grado* $g_i$*'s.*

### Ejercicio

*Sean* $g_i$ *naturales tales que* $1 \leq g_i$ *y que* $\sum g_i \leq 2(n-1)$ *y es par. Demuestra que existe un bosque cuyos vértices tienen grado* $g_i$*'s.*

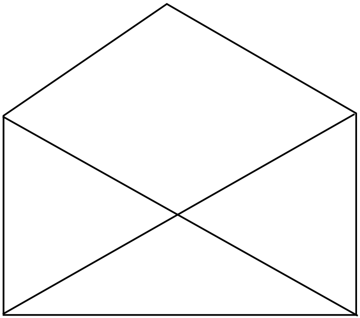
### Ejercicio

*Probar que todo árbol* $G$ *tiene por lo menos* $\Delta(G)$ *vértices de orden 1.*

# Índice:

# Dibujar

¿Puedes dibujar el siguiente sobre sin despegar el lápiz del papel, y sin recalcar nada?



# ¡No se puede!

- No se puede! ¿Por qué no se puede?

# ¡No se puede!

- No se puede! ¿Por qué no se puede?
- Esta, básicamente, es la misma pregunta que se hizo Euler: ¿Puedo pasar por todos los puentes de Köningsberg sin repetir ninguno?

# ¡No se puede!

- No se puede! ¿Por qué no se puede?
- Esta, básicamente, es la misma pregunta que se hizo Euler: ¿Puedo pasar por todos los puentes de Köningsberg sin repetir ninguno?
- En ambas, la respuesta es no, pero, ¿por qué no? ¿cuándo sí se puede y cuando no?

# ¡No se puede!

- No se puede! ¿Por qué no se puede?
- Esta, básicamente, es la misma pregunta que se hizo Euler: ¿Puedo pasar por todos los puentes de Köningsberg sin repetir ninguno?
- En ambas, la respuesta es no, pero, ¿por qué no? ¿cuándo sí se puede y cuando no?
- La respuesta es sorprendentemente sencilla.
- ¡Inténtenlo!

# ¡Cada vez que entro tengo que salir!

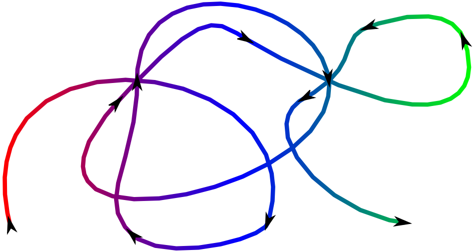
- ¿Por qué no puedo pasar por todos los puentes?

# ¡Cada vez que entro tengo que salir!

- ¿Por qué no puedo pasar por todos los puentes?
- En un camino, ¡cada vez que entro, tengo que salir!

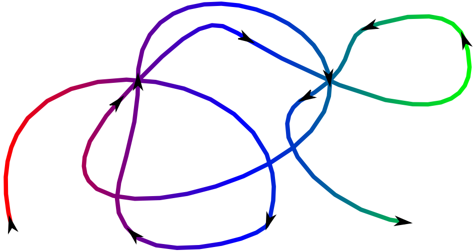
# ¡Cada vez que entro tengo que salir!

- ¿Por qué no puedo pasar por todos los puentes?
- En un camino, ¡cada vez que entro, tengo que salir!
- Salvo quizás al mero principio y al mero final del camino.



# ¡Cada vez que entro tengo que salir!

- ¿Por qué no puedo pasar por todos los puentes?
- En un camino, ¡cada vez que entro, tengo que salir!
- Salvo quizás al mero principio y al mero final del camino.



- Entonces, todos los vértices de en medio del camino tienen que tener grado par.

# Teorema

## Definición

*Dado una gráfica $G$, un camino es Euleriano si pasa por todas las aristas exactamente una vez.*

# Teorema

## Definición

*Dado una gráfica $G$, un camino es Euleriano si pasa por todas las aristas exactamente una vez.*

## Teorema

*Una gráfica tiene un camino Euleriano si y solo si es conexa y tiene a lo más dos vértices de grado impar.*

# Teorema

**Definición**

*Dado una gráfica $G$, un camino es Euleriano si pasa por todas las aristas exactamente una vez.*

**Teorema**

*Una gráfica tiene un camino Euleriano si y solo si es conexa y tiene a lo más dos vértices de grado impar.*

Nota: A lo más dos significa 0 o 2.

# Demostración del Teorema

1. El ( $\Longrightarrow$ ) ya lo demostramos en realidad: si tenemos un recorrido, entonces todos los vértices, salvo quizás 2, deben ser de grado par.

# Demostración del Teorema

1. El ( $\Longrightarrow$ ) ya lo demostramos en realidad: si tenemos un recorrido, entonces todos los vértices, salvo quizás 2, deben ser de grado par.
2. La otra ($\Leftarrow$) es más difícil: Que si en una gráfica conexa todos los vértices, salvo posiblemente 2, tienen grado par, entonces sí tiene camino Euleriano.

# Demostración del Teorema

1. El ( $\Longrightarrow$ ) ya lo demostramos en realidad: si tenemos un recorrido, entonces todos los vértices, salvo quizás 2, deben ser de grado par.
2. La otra ($\Leftarrow$) es más difícil: Que si en una gráfica conexa todos los vértices, salvo posiblemente 2, tienen grado par, entonces sí tiene camino Euleriano.

# Construyendo Un Camino Euleriano

Para demostrar $\Leftarrow$, la idea es sencilla:

- Para construirlo, simplemente hay que empezar de un vértice (si hay de grado impar, debo comenzar en uno de los de grado impar) y ponerse a caminar al azar hasta que ya no pueda más.

# Construyendo Un Camino Euleriano

Para demostrar $\Leftarrow$, la idea es sencilla:

- Para construirlo, simplemente hay que empezar de un vértice (si hay de grado impar, debo comenzar en uno de los de grado impar) y ponerse a caminar al azar hasta que ya no pueda más.
- Como todos los vértices salvo 2 tienen grado impar, nunca me voy a quedar atorado.

# Construyendo Un Camino Euleriano

Para demostrar $\Leftarrow$, la idea es sencilla:

- Para construirlo, simplemente hay que empezar de un vértice (si hay de grado impar, debo comenzar en uno de los de grado impar) y ponerse a caminar al azar hasta que ya no pueda más.
- Como todos los vértices salvo 2 tienen grado impar, nunca me voy a quedar atorado.
- Me quedaré atorado sólo cuando termino en el otro vértice de grado impar, (o en el vértice en el que comencé si todos eran de grado par).

# Construyendo Un Camino Euleriano

Para demostrar $\Leftarrow$, la idea es sencilla:

- Para construirlo, simplemente hay que empezar de un vértice (si hay de grado impar, debo comenzar en uno de los de grado impar) y ponerse a caminar al azar hasta que ya no pueda más.
- Como todos los vértices salvo 2 tienen grado impar, nunca me voy a quedar atorado.
- Me quedaré atorado sólo cuando termino en el otro vértice de grado impar, (o en el vértice en el que comencé si todos eran de grado par).
- Aquí podría haber un problema: quizás no pasé por todas las aristas.

# Construyendo Un Camino Euleriano

Para demostrar $\Leftarrow$, la idea es sencilla:

- Para construirlo, simplemente hay que empezar de un vértice (si hay de grado impar, debo comenzar en uno de los de grado impar) y ponerse a caminar al azar hasta que ya no pueda más.
- Como todos los vértices salvo 2 tienen grado impar, nunca me voy a quedar atorado.
- Me quedaré atorado sólo cuando termino en el otro vértice de grado impar, (o en el vértice en el que comencé si todos eran de grado par).
- Aquí podría haber un problema: quizás no pasé por todas las aristas.
- Si no he pasado por todas las aristas, entonces tengo que usar que la gráfica es conexa, y lidiar con algunos detalles, para ver que puedo "extender" el camino que tenía. pizarrón

# Ejercicios

Encuentra un camino Euleriano o di por qué no existe: