

生物医工学

放射線の基礎(1)

1. 相対論的運動学
2. 陽子と電子の弾性衝突の運動学
3. 光子と自由電子の衝突（コンプトン散乱）の運動学
4. 散乱微分断面積、散乱断面積、線吸収係数、質量吸収係数

光と物質の相互作用

5. 光電効果（光電吸収）
6. Klein-Nishina の式（Compton 散乱の衝突微分断面積）
7. Klein-Nishina の式（Compton 散乱光子のエネルギー散乱微分断面積）
8. Klein-Nishina の式
（Compton 散乱での反跳電子吸収エネルギー微分断面積）
9. 制動放射（X 線の発生）

1. 相対論的運動学 (Relativistic Kinematics)

物体の速度が光速に比べて十分小さい場合は、ニュートン力学が成り立つが、物体の速度が光速に近づく（これを相対論的になるといふ）と、ニュートン力学は成り立たず相対論的力学が支配する世界になる。

特殊相対性理論は、Albert Einstein によって作られた理論で

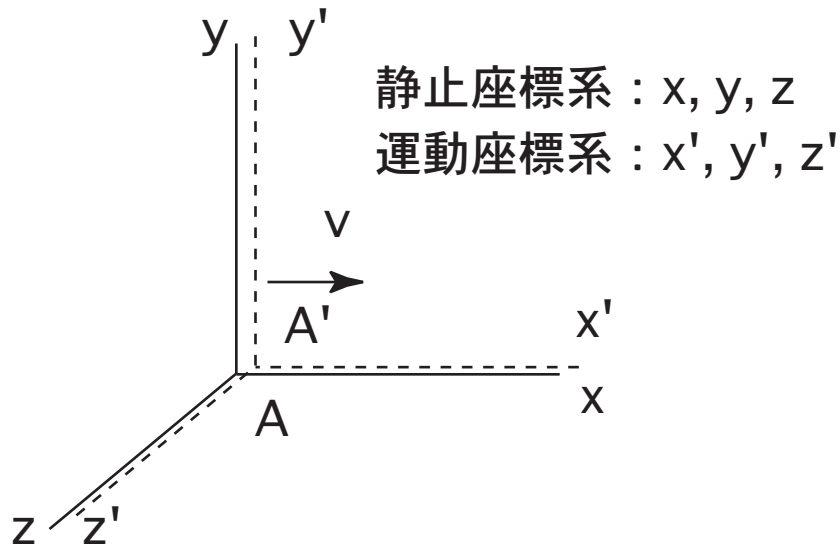
1. すべての物理法則は、すべての慣性系で同じ形をとる。

2. 光速は、慣性系によらず、不変な定数である。

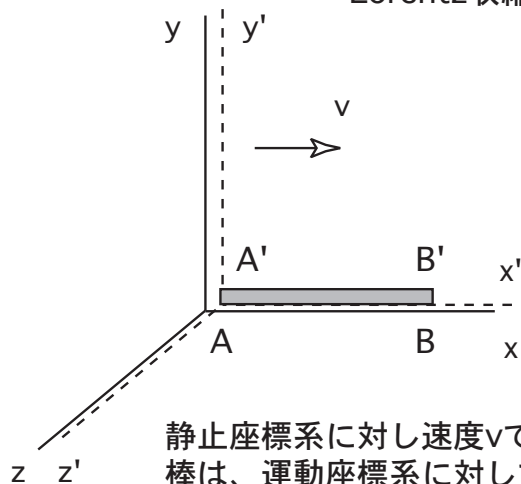
という2つの原理から導かれる。時間と空間は、もはや独立したものではなく、時空と呼ばれる4つの自由度を持つ時空座標ベクトルで記述される。時間は絶対的なものでなく、その物体の運動状態によって異なる。2つの慣性系 L' が慣性系 L に対して相対速度 v で $+X$ 方向に運動しているとすると、慣性系 L での時空座標 (ct, x, y, z) 、 L' での時空座標 (ct', x', y', z') の間には、Lorentz 変換で結ばれる次の関係が成り立つ。

$$t' = \frac{t - \beta \frac{x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x' = \frac{x - c\beta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (c \text{ は、光速})$$



Lorentz収縮と運動する時計の遅れ



静止座標系 : x, y, z
運動座標系 : x', y', z'

運動座標系は、静止座標系に対し
 x 方向に速度 v で等速運動している。

静止座標系に対し速度 v で動く棒を考え、その端点を A, B とする。
棒は、運動座標系に対しては静止している。点 A の運動座標系での座標を $x'_A=0, x'_B=l$ とする。時刻 t での端点 A の静止座標系での座標は、

$$x_A = v t$$

であるから、同時刻での端点 B の静止座標系での座標は、Lorentz変換により

$$x'_B = \frac{x_B - v t}{\sqrt{1-\beta^2}} = l$$

となるから

$$x_B = v t + l \sqrt{1-\beta^2} = x_A + l \sqrt{1-\beta^2}$$

となる。静止座標系における棒の長さ l_0 は、 $x_B - x_A$ のことだから、結局

$$l_0 = l \sqrt{1-\beta^2}$$

となり、縮んでみえる。これをLorentz収縮という。

速度 v で x の正の方向に歩いている人 A の静止座標系での座標は、 $x_A = v t$ 、運動座標系では、 $x'_A = 0$ である。 A の持っている時計は、運動座標系における A の時間座標 t' を指す。Lorentz変換を行うと

$$ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{ct - \beta vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{ct - \beta^2 ct}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{ct(1 - \beta^2)}{\sqrt{1-\beta^2}} = ct \sqrt{1-\beta^2}$$

よって、

$$t' = t \sqrt{1-\beta^2}$$

t' は、 t より小さくなる。これは、運動する時計は遅れて見えることを示す。

□ 4-Vector

Space-time coordinate vector $u = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{x})$

Energy-momentum vector $p = (E/c, p_x, p_y, p_z) = (E/c, \mathbf{p})$

$$\begin{aligned} (c dt, dx, dy, dz) &\rightarrow \frac{m_0}{d\tau} (c dt, dx, dy, dz) = m_0 \frac{dt}{d\tau} \left(c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (mc, mv_x, mv_y, mv_z) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) \end{aligned}$$

ここで、 m_0 は静止質量、 $d\tau$ は固有時間（運動している人が持っている時計の時間）であり、両方とも Lorentz 変換に対し不変な定数である。 m は運動しているものの質量で、静止質量 m_0 よりも大きい。すなわち、慣性質量 m は運動状態による。

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

□ 4-Vector の Norm（ノルム）

Norm of 4-vector : $\|u\|^2 = (ct)^2 - \mathbf{x}^2$

$$\|p\|^2 = (E/c)^2 - \mathbf{p}^2$$

□ Lorentz 変換に対しての不変性（Lorentz Invariance）

4-vector のノルムは、Lorentz 変換に対して不変である。

粒子の Energy-momentum vector p のノルムは、その粒子の静止質量に光速をかけたものであり Lorentz 変換に対して不変である。（これは 3次元空間においては、空間ベクトルの長さが、原点を中心とする回転に対して不変であることと似ている。）

□ 相対論的粒子のエネルギー、運動量、質量、速度の関係

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m_0 \gamma c^2,$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$E^2 = (c p)^2 + (m_0 c^2)^2, \quad \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 = (m_0 c)^2$$

エネルギー、運動量、速度のどれか 1 つを与えれば他の量は計算できる。

$$\beta = \frac{cp}{E}, \gamma = \frac{E}{m_0 c^2}, p = mc\beta = \frac{m_0 c \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

E は全エネルギーで、 $T = E - m_0 c^2$ が運動エネルギーである。 m_0 は静止質量、 $m_0 c^2$ は静止エネルギーと呼びます。静止エネルギーは非相対論的な場合は意味を持ちませんが、相対論的な高エネルギー現象（核エネルギーなど）では、そこからエネルギーを取り出すことができる場合があります。

非相対論的な場合 ($\beta = \frac{v}{c} \ll 1$) には、

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2\right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

となり、 $T = E - m_0 c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$ となって、我々のなじみ深い非相対論での運動エネルギーに近づきます。この運動エネルギー T を使って、 β , cp を表わすと

$$\beta = \frac{cp}{E} = \frac{\sqrt{E^2 - (m_0 c^2)^2}}{E} = \frac{\sqrt{T(T + 2 m_0 c^2)}}{T + m_0 c^2}$$

$$cp = \sqrt{T(T + 2 m_0 c^2)}$$

とかける。

相対論の参考書は、数多いが、以下の本などが参考になる。

1. 平川浩正著：「相対論」共立出版 1975 年出版
(古い本だが中央図書館にある) 前の 3 章が特殊相対論の記述に当てられている。
2. ランダウ、リフシッツ著：「場の古典論」東京図書 ← 古典的な名著

□ 反応前後の粒子の 4-Vector の和は等しい。

(例) 2 体反応 (反応の前後で粒子の数は 2 つ)

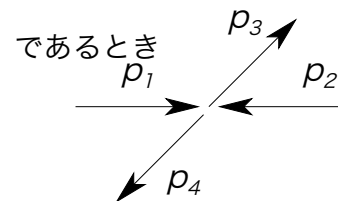
反応前の 2 つの粒子の 4 元運動量が

$$p_1 = \left(\frac{E_1}{c}, \mathbf{p}_1\right), \quad p_2 = \left(\frac{E_2}{c}, \mathbf{p}_2\right),$$

反応後の 2 つの粒子の 4 元運動量が

$$p_3 = \left(\frac{E_3}{c}, \mathbf{p}_3\right), \quad p_4 = \left(\frac{E_4}{c}, \mathbf{p}_4\right)$$

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$



がなりたつ、時間部分は、エネルギー保存則を空間部分は運動量保存則をそれぞれ表す。

□ 2 体問題 (反応の前後で粒子の数は 2 つ) の自由度

2 体問題では、入射粒子の Energy-momentum ベクトルは与えられ、反応の結果生じる粒子の Energy-momentum ベクトルを求めるという問題になる。2 体問題の特殊性として、運動量ベクトルの保存法則から散乱平面が一定であるので反応後の粒子の Energy-momentum ベクトルは、散乱平面内の散乱角度と運動量の 2 つの量で表される。すると自由度は 4 つである。散乱平面内の運動量ベクトルの保存則から 2 つの関係が与えられ、更にエネルギー保存則から 1 つの合計 3 つの関係式が与えられるので、自由度は 1 つだけとなる。すなわち、反応後の粒子の散乱角 (あるいは運動量) が与えられれば、その粒子の運動量 (あるいは散乱角) と残りの粒子の散乱角、運動量が決まることになる。これは、2 体問題特有の性質である。

2. 陽子と電子の弾性衝突の運動学

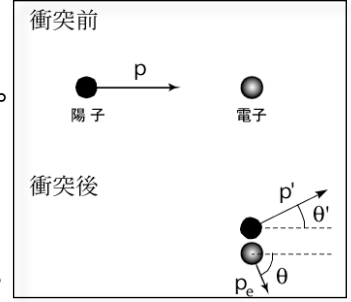
運動している陽子が静止している電子に衝突する場合を考える（下右図）。
衝突は弾性的に起こる（粒子の内部励起は考えない）とする。

衝突前の陽子の 4 元ベクトルを p_1 とし、電子のそれを p_2 とする。

$$p_1 = \left(\frac{E}{c}, p, 0, 0 \right), \quad p_2 = (m_e c, 0, 0, 0),$$

衝突後の陽子の 4 元ベクトルを p_3 とし、電子のそれを p_4 とする。

$$p_3 = \left(\frac{E'}{c}, p' \cos \theta', p' \sin \theta', 0 \right), \quad p_4 = \left(\frac{\varepsilon}{c}, p_e \cos \theta, p_e \sin \theta, 0 \right)$$



すると 4 元運動量の保存則と、4 元ベクトルのノルムの性質から

$\varepsilon = m_e c^2 + k_e$ により電子の運動エネルギー k_e を定義すると

$$k_e = 2 m_e c^2 \frac{(pc)^2 \cos^2 \theta}{\left[m_e c^2 + \sqrt{(pc)^2 + (M_p c^2)^2} \right]^2 - (pc)^2 \cos^2 \theta}$$

となる。これは、電子の散乱角 θ の関数だが $\cos^2 \theta = 1$ で最大になる。

$$k_{e \max} = 2 m_e c^2 \frac{(pc)^2}{(m_e c^2)^2 + (M_p c^2)^2 + 2 m_e c^2 \sqrt{(pc)^2 + (M_p c^2)^2}}$$

医学利用で使用する通常のエネルギーでは、

$$\frac{p}{M_p c} \ll \frac{M}{m_e} \frac{p}{c} \doteq 1836$$

が成り立つので、この近似の下では

$$k_{e \max} \approx 2 m_e c^2 \left(\frac{p}{M_p c} \right)^2 = 2 m_e c^2 \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}$$

$$k_e \approx 2 m_e c^2 \frac{\left(\frac{p}{M_p c} \right)^2 \cos^2 \theta}{1 + \left(\frac{p}{M_p c} \right)^2 \sin^2 \theta} = 2 m_e c^2 \frac{\frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \cos^2 \theta}{1 + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \sin^2 \theta} = 2 m_e c^2 \frac{\beta^2 \cos^2 \theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta}$$

となる。250 MeV の陽子は、速度が光速の 61.4% 程度だから、電子に与えられる運動エネルギーの最大値は、電子静止質量の 1.2 倍程度である。

3. 光子と自由電子の衝突（コンプトン散乱）の運動学

衝突前の光子と電子の4元運動量を p_1 , p_2 衝突後のそれを p_3 , p_4 とする(下右図を見よ)。

$$p_1 = \left(\frac{E}{c}, \frac{E}{c}, 0, 0 \right), \quad p_2 = \left(m_e c, 0, 0, 0 \right),$$

$$p_3 = \left(\frac{E'}{c}, \frac{E'}{c} \cos \theta, \frac{E'}{c} \sin \theta, 0 \right), \quad p_4 = \left(\frac{E_e}{c}, p_e \cos \varphi, p_e \sin \varphi, 0 \right)$$

すると衝突後の電子の運動エネルギーは、

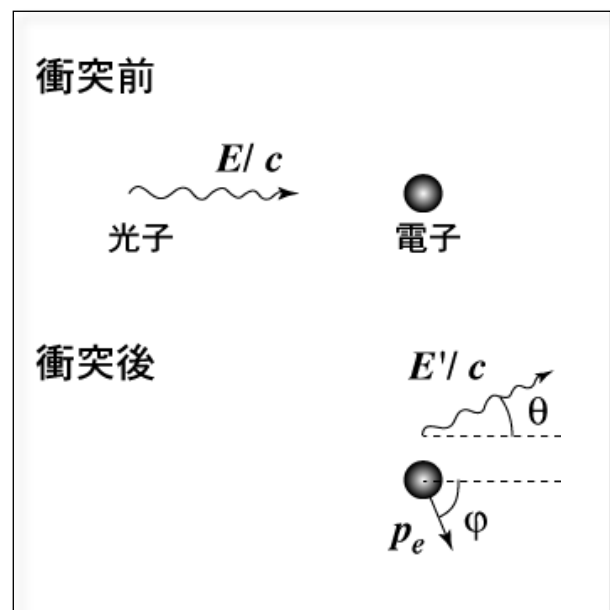
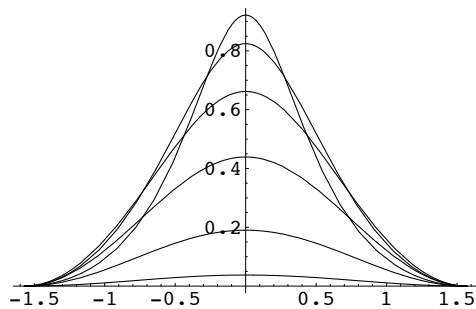
$$k_e = 2 m_e c^2 \frac{E^2 \cos^2 \varphi}{\left[m_e c^2 + E \right]^2 - E^2 \cos^2 \varphi} = 2 m_e c^2 \frac{E^2 \cos^2 \varphi}{\left(m_e c^2 \right)^2 + 2 m_e c^2 E + E^2 \sin^2 \varphi}$$

$$k_e = 2 m_e c^2 \frac{E^2 \cos^2 \varphi}{\left[m_e c^2 + E \right]^2 - E^2 \cos^2 \varphi} = E \frac{2\alpha \cos^2 \varphi}{\left[1 + \alpha \right]^2 - \alpha^2 \cos^2 \varphi}$$

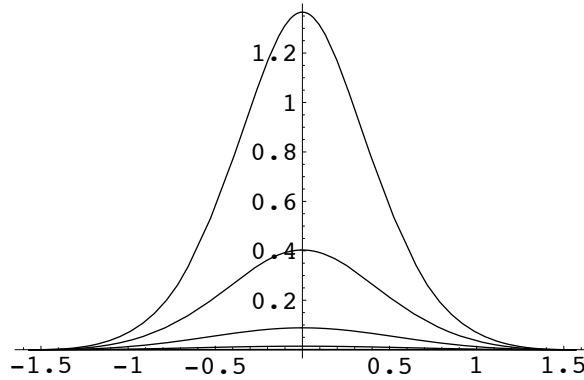
となる。ここで、 $\alpha = \frac{E}{m_e c^2}$ である。電子の最大エネルギーは、 $\cos \varphi = 1$ の場合である(前方)。そのときの値は、

$$k_{e, \max} = E \frac{2\alpha}{2\alpha + 1} = E \frac{1}{1 + \frac{1}{2\alpha}}$$

下左図は、入射光子のエネルギー 0.01, 0.06, 0.2, 0.5, 1.2, 3.0 MeV の反跳電子の反跳角 (横軸、 $-\pi/2, \pi/2$) と電子の運動エネルギーを入射光子のエネルギーで除したもの(縦軸)の関係を示したものである。



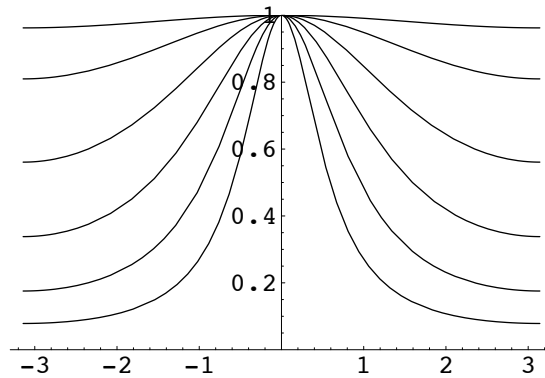
下の図は、入射光子エネルギー 0.01, 0.06, 0.2, 0.5, 1.2, 3.0 MeV の場合の反跳電子の反跳角（横軸）と電子の水中残飛程（縦軸, cm）の関係を示した。入射光子のエネルギーが大きい場合には、反跳電子の飛程が大きくなり、これがビルドアップを引き起こす。



また衝突後の光子のエネルギーは、

$$E' = \frac{E}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} \quad \left(E'_{\max} = E, E'_{\min} = E \frac{1}{1 + 2\alpha} \right)$$

下図は、入射光子エネルギー 0.01, 0.06, 0.2, 0.5, 1.2, 3.0 MeV の場合の散乱光子の散乱角（横軸）と散乱光子のエネルギーの入射光子エネルギーに対する割合を示す。入射光子エネルギーが大きくなると前方散乱が増える。



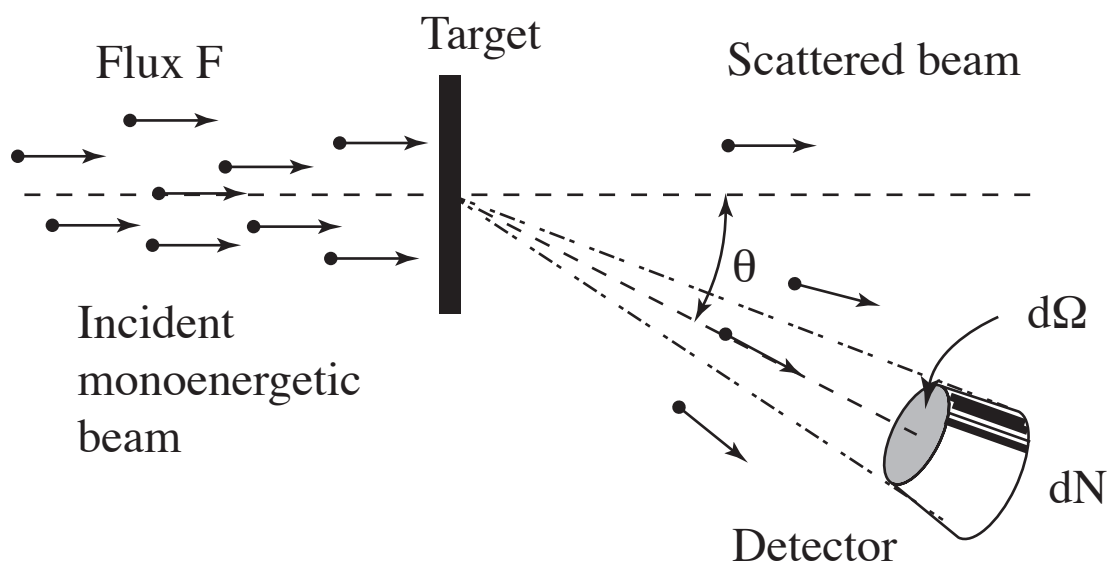
$$\text{また、} \cot \varphi = (1 + \alpha) \tan \frac{\theta}{2} = (1 + \alpha) \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

光子の波長の差は $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{E}$, $\lambda' = \frac{c}{\nu'} = \frac{hc}{E'}$, の関係から

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) = 3.86158 \times 10^{-10} (1 - \cos \theta) [\text{m}]$$

(ここで $hc = 197.327053 [\text{MeV fm}]$ を使った。)

4. 微分散乱断面積、散乱断面積、線吸収係数、質量吸収係数



極角 θ に立体角 $d\Omega$ を張る検出器の単位時間あたりの計数 dN は、入射粒子の Flux(F)、入射ビームが横切る標的の数 N_T 、検出器の立体角 $d\Omega$ に比例する。

$$dN = F N_T \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

その比例係数 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ を微分散乱断面積と呼ぶ。これを換言すると下記の如く。

粒子が散乱源に衝突して特定方向に散乱される微分散乱断面積は、特定方向の単位立体角あたりで表し

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{特定方向の単位立体角あたりに散乱粒子が観測される確率} [sr^{-1}]}{\text{単位面積あたりの散乱中心の数} [L^{-2}]} [L^2 sr^{-1}]$$

粒子が散乱源に衝突する散乱の全断面積は、これをあらゆる方向に積分し

$$\sigma = \frac{\text{散乱粒子が観測される確率}}{\text{単位面積あたりの散乱中心の数} [L^{-2}]} [L^2]$$

単位体積あたり n 個の散乱中心があると、単位長さ当たりの物質を 1 個の入射粒子が通過するとき、散乱が起こる確率は

$$\mu = n \sigma \quad [L^{-1}]$$

n として例えば単位体積あたりの原子数をとる場合には

$$n = \rho \frac{1}{A} N_A \quad [L^{-3}]$$

また n として例えば単位体積あたりの軌道電子数をとる場合（例えば反応に軌道電子が関わるコンプトン散乱の場合など）には

$$n = \rho \frac{Z}{A} N_A \quad [L^{-3}]$$

などとなる。ここで ρ は、物質の密度、 Z, A は物質の原子番号と質量数、 N_A は、アボガドロ数である。

Flux が Φ の入射粒子が物質に入射し dl の長さを通過した後の散乱による Flux の変化を $d\Phi$ とすると

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = -\mu dl$$

の関係が成り立つので、これを解くと

$$\Phi = \Phi_0 \exp[-\mu l]$$

が成り立つ。この μ を線吸収係数（あるいは線減衰係数）といい、 $\frac{\mu}{\rho}$ を質量吸収係数（あるいは質量減衰係数）という。

光子と物質の相互作用は、光子のエネルギーにより
主に寄与する物理過程が変化する。

- A. (Rayleigh 散乱) : 光子が原子により散乱されるが原子が励起されたり、イオン化されたりしない。
- B. 光電効果 (光電吸収)
- C. Compton 散乱 : 光子が自由電子と起こす散乱
- D. (光核反応)
- E. 対生成 : 光子が原子核の強い電場にさらされた時に消滅し、電子と陽電子の対を生成する現象

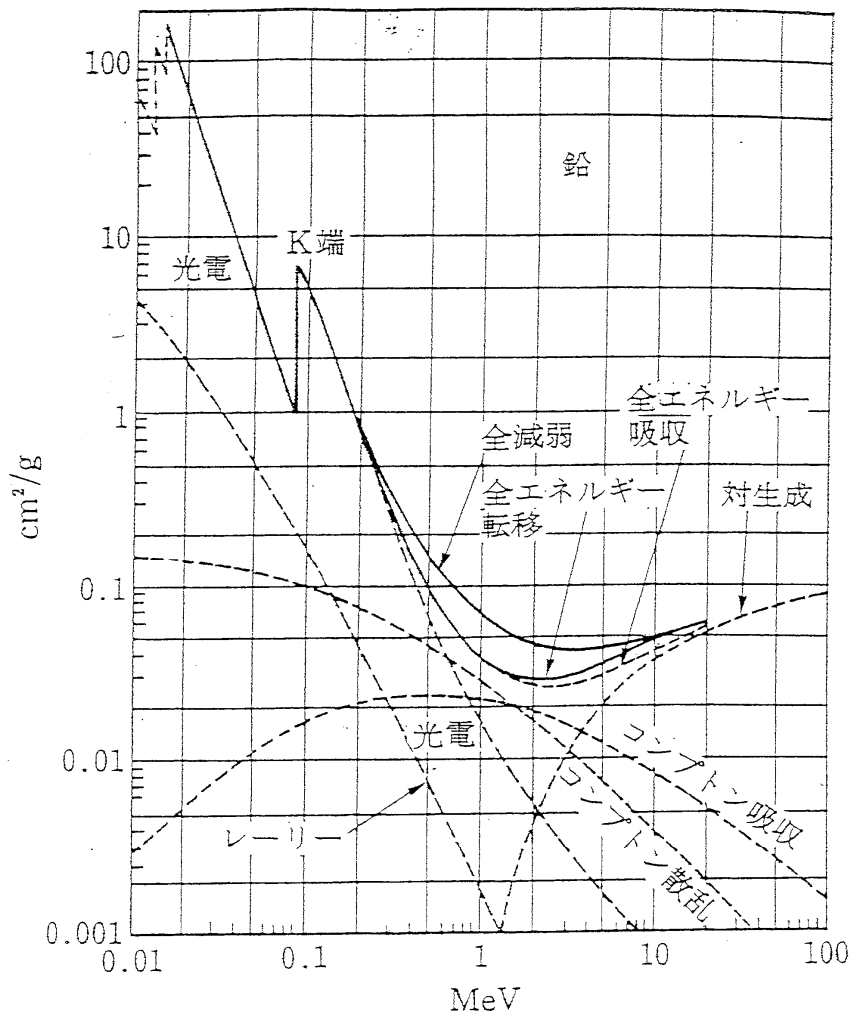


図 1.25 鉛に対する γ 線の断面積

$$\Phi = \Phi_0 \exp \left[-\frac{\mu}{\rho} (\rho l) \right] \quad \frac{\mu}{\rho} : \text{質量吸収係数} [\text{cm}^2/\text{g}]$$

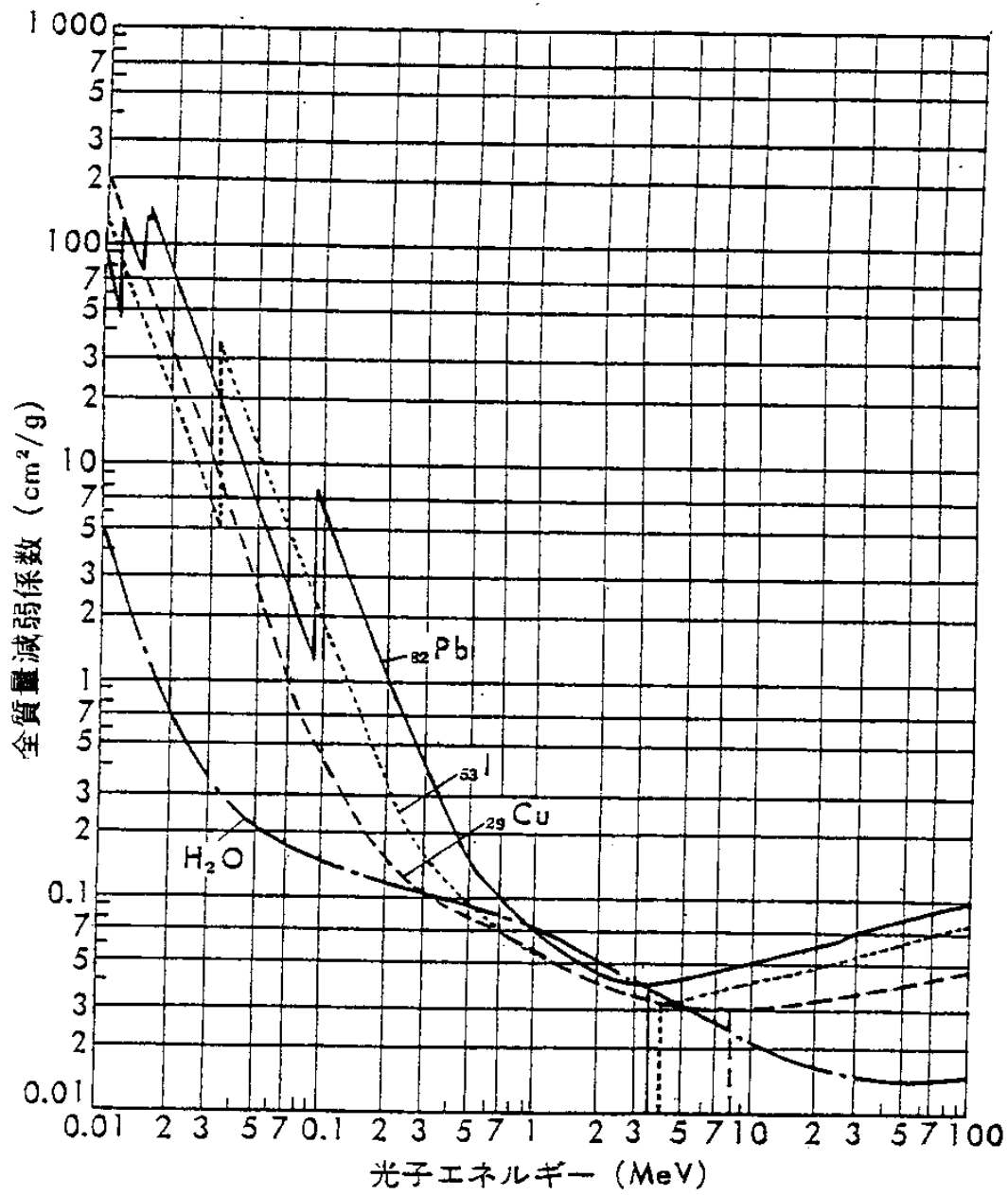


図 15 鉛，ヨウ素，銅および水の全質量減弱係数

5. 光電効果

1. 光子と原子全体の間の相互作用とみなせる。
2. エネルギー k の入射光子が原子中の電子の結合エネルギー E_b を越えると吸収される。電子は、運動エネルギー $T = k - E_b$ を持って飛び出す。
3. 入射光子が非常に低エネルギーで偏極していない場合は、光電子は、入射光子の方向から約 90° の方向に飛び出す。
4. 入射光子のエネルギーが高くなるにつれて、光電子の放出角度は、どんどん前方に偏ってくる。しかし、その方向性も多重散乱によりすぐに無くなってしまう。
5. 原子の殻の結合エネルギーに対応して光電効果のエネルギースペクトルには鋭い不連続性がある。その中でも最も大きい不連続性は、最も内側にある K 殻の電子に対応するものである。
6. 光電吸収の断面積は、光子のエネルギーが殻内の電子の結合エネルギーを越えるときに急激に大きくなる。
7. 放出される光電子には蛍光や付加的な電子（オージェ電子）を伴うことがある。
8. 高エネルギーでの光電吸収の断面積は、大まかに Z_2^5 / k に比例し、高エネルギー相互作用では無視できる。

6. Klein-Nishina の式 (Compton 散乱の微分衝突断面積)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2(m_e c)^2} \left(\frac{E'}{E} \right)^2 \left[\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \sin^2 \theta \right] = \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{E'}{E} \right)^2 \left[\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \sin^2 \theta \right]$$

光子の散乱角と散乱光子のエネルギー E' には次の関係がある。

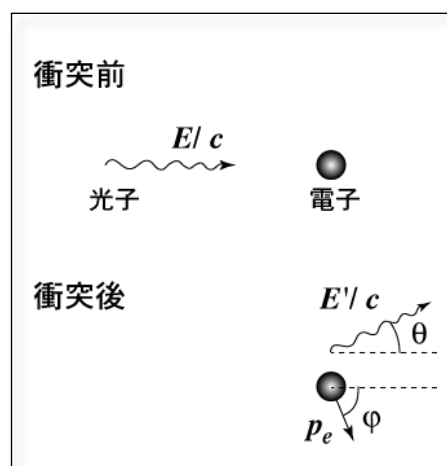
$$\cos \theta = 1 - \left(\frac{E}{E'} - 1 \right) \frac{m_e c^2}{E} \rightarrow E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

従って散乱光子のエネルギーの微分と立体角の関係は

$$dE' = \frac{E}{\left(1 + \frac{E}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) \right)^2} \frac{E}{m_e c^2} d(\cos \theta) = \left(\frac{E'^2}{m_e c^2} \right) d(\cos \theta)$$

$$d\Omega = 2\pi d(\cos \theta) = 2\pi \left(\frac{m_e c^2}{E'^2} \right) dE'$$

$$\left(\frac{E'}{E} \right) \sin^2 \theta = \left(1 - \frac{E'}{E} \right) \frac{m_e c^2}{E} \left[2 - \left(\frac{E}{E'} - 1 \right) \frac{m_e c^2}{E} \right]$$



$$= \frac{2m_e c^2}{E} - 2 \frac{E' m_e c^2}{E} - \left(-2 + \frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} \right) \left(\frac{m_e c^2}{E} \right)^2$$

従って散乱光子のエネルギーの関数として見た微分断面積は

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dE'} &= \pi r_e^2 \left(\frac{m_e c^2}{E} \right) \frac{1}{E'} \left[1 + \left(\frac{E'}{E} \right)^2 - \left(\frac{E'}{E} \right) \sin^2 \theta \right] \\ &= \pi r_e^2 \left(\frac{m_e c^2}{E} \right) \frac{1}{E'} \left[A + \left(\frac{E'}{E} \right)^2 + B \left(\frac{E'}{E} \right) + C \frac{E}{E'} \right] \\ A &= 1 - 2 \frac{m_e c^2}{E} \left(1 + \frac{m_e c^2}{E} \right), \quad B = \frac{m_e c^2}{E} \left(2 + \frac{m_e c^2}{E} \right), \quad C = \left(\frac{m_e c^2}{E} \right)^2 \end{aligned}$$

これをエネルギーで積分してコンプトン散乱の全断面積を求めると（積分の上限は、E、下限は、次式で与えられる）

$$\frac{E_{min}}{E} = \frac{1}{1 + 2 \frac{E}{m_e c^2}}$$

全断面積は

$$\begin{aligned} \sigma &= \pi r_e^2 \frac{m_e c^2}{E} \times \\ &\left[1 - 2 \frac{m_e c^2}{E} \left(1 + \frac{m_e c^2}{E} \right) \right] \log \frac{E}{E_{min}} + \left(\frac{1}{2} + 4 \frac{m_e c^2}{E} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{E_{min}}{E} \right)^2 - B \left(\frac{E_{min}}{E} \right) + \left(\frac{m_e c^2}{E} \right)^2 \\ &\left[B = \frac{m_e c^2}{E} \left(2 + \frac{m_e c^2}{E} \right) \right] \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{E}{m_e c^2}$ と置くことにすると上記の式は α の関数として次のように書ける。

$$\sigma = \pi r_e^2 \frac{1}{\alpha} \times \left[\left(1 - 2 \frac{1+\alpha}{\alpha^2} \right) \log (1 + 2 \alpha) + \left(\frac{1}{2} + 4 \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + 2 \alpha} \right)^2 \right]$$

$$\frac{m_e c^2}{\hbar c} r_e \quad (\text{微細構造定数})$$

$$r_e = 2.81794092 \times 10^{-15} \text{ m}, \quad (\text{古典電子半径})$$

$$\pi r_e^2 = 2.49467 \times 10^{-25} \text{ cm}^2 = 0.249467 \text{ barn} \quad (\text{古典電子半径円の面積})$$

Compton 散乱の散乱光子の角分布

Compton 散乱の微分衝突断面積を散乱光子の散乱角で表すと

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + \frac{E}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)} = \frac{1}{1 + \alpha (1 - \cos \theta)}, \quad \alpha = \frac{E}{m_e c^2}$$

であることに留意して

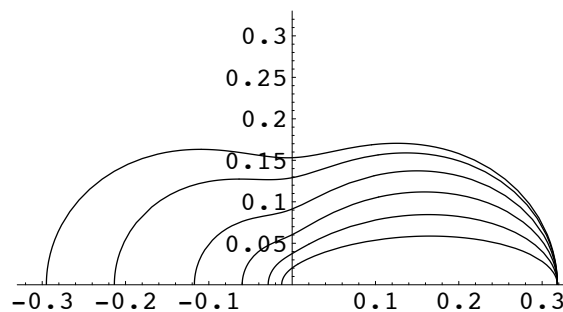
$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) \frac{1 + \frac{\alpha^2 (1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta) \left(1 + \alpha (1 - \cos \theta)\right)}}{\left(1 + \alpha (1 - \cos \theta)\right)^2} \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Thomson} \frac{1 + \frac{\alpha^2 (1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta) \left(1 + \alpha (1 - \cos \theta)\right)}}{\left(1 + \alpha (1 - \cos \theta)\right)^2} \end{aligned}$$

と表せる。これは散乱光子の角分布を与える。 $d\Omega = 2\pi d(\cos \theta)$ であるから極角の分布関数は、

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \pi r_e^2 \sin \theta (1 + \cos^2 \theta) \frac{1 + \frac{\alpha^2 (1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta) \left(1 + \alpha (1 - \cos \theta)\right)}}{\left(1 + \alpha (1 - \cos \theta)\right)^2}$$

となる。入射光子のエネルギー 0.01, 0.06, 0.2, 0.5, 1.2, 3.0 MeV の場合の散乱光子の角度分

布 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ (=微分散乱断面積) を下に示す。



Compton 散乱の反跳電子の角度分布

反跳電子の角度分布は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{\varphi} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{d\Omega}{d\Omega_{\varphi}} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \left| \frac{d\cos \theta}{d\cos \varphi} \right|$$

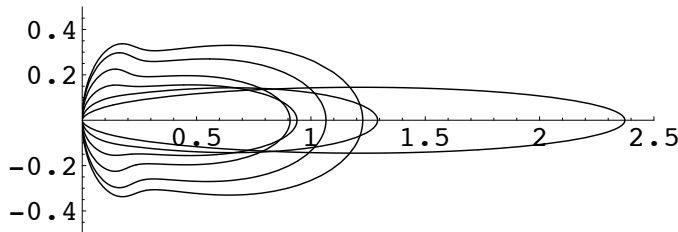
$$-\cos \varphi = (1 + \alpha) \tan \frac{\theta}{2} = (1 + \alpha) \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

より求めることができる。

の関係式を使って j の式に書き直すと

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_\varphi} = 4r_e^2 \frac{(1 + \alpha)^2 \cos \varphi}{(1 + 2\alpha + \alpha^2 \sin^2 \varphi)^2} \left\{ 1 + \frac{2\alpha^2 \cos^4 \varphi}{(1 + 2\alpha + \alpha^2 \sin^2 \varphi)^2 (1 + \alpha(\alpha + 2) \sin^2 \varphi)} - \frac{2(1 + \alpha)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(1 + \alpha(\alpha + 2) \sin^2 \varphi)^2} \right\}$$

下の図は、入射光子のエネルギーが 3.0, 1.2, 0.5, 0.2, 0.06, 0.01 MeV の場合の反跳電子の角度分布を示す。入射光子のエネルギーが大きい程前方ピークになる。



7. Klein-Nishina の式 (Compton 散乱光子のエネルギー微分散乱断面積)

Compton 散乱光子の微分散乱断面積は、特定の方向に散乱された光子のエネルギーの入射光子のエネルギーに対する割合に Compton 散乱の微分衝突断面積をかけたもの。即ち

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_s}{d\Omega} &= \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{E'}{E} \right)^3 \left[\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \sin^2 \theta \right] \\ &= \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) \frac{1 + \frac{\alpha^2 (1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta) (1 + \alpha (1 - \cos \theta))}}{(1 + \alpha (1 - \cos \theta))^3} \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Thomson} \frac{1 + \frac{\alpha^2 (1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta) (1 + \alpha (1 - \cos \theta))}}{(1 + \alpha (1 - \cos \theta))^3} \end{aligned}$$

角分布は、

$$\frac{d\sigma_s}{d\theta} = \pi r_e^2 \sin\theta (1 + \cos^2\theta) \frac{1 + \frac{\alpha^2(1 - \cos\theta)^2}{(1 + \cos^2\theta)(1 + \alpha(1 - \cos\theta))}}{(1 + \alpha(1 - \cos\theta))^3}$$

これを積分すると平均散乱断面積（散乱光子の平均エネルギーの入射光子に対する割合に一電子あたりの Compton 散乱の全断面積をかけたもの）、これに入射光子のエネルギー束をかければ単位時間あたりの散乱光子の平均エネルギーがでる。（1 個の標的電子あたり）

$$\sigma_s = \pi r_e^2 \left[\frac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha^3} + \frac{2(1+\alpha)(2\alpha^2-2\alpha-1)}{\alpha^2(1+2\alpha)^2} + \frac{8\alpha^2}{3(1+2\alpha)^3} \right]$$

8. Klein-Nishina の式

（Compton 散乱での反跳電子吸収エネルギー微分断面積）

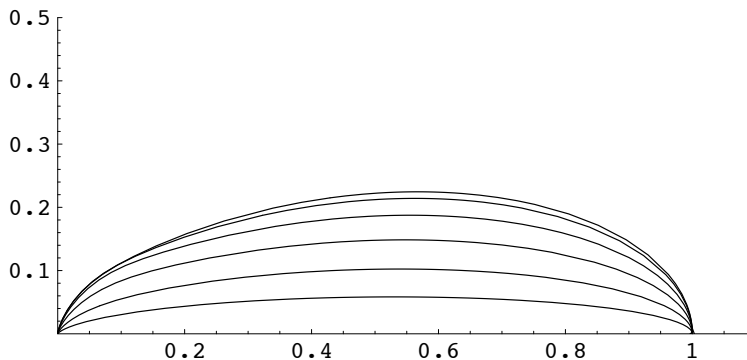
反跳電子吸収エネルギー微分断面積は、Compton 散乱で特定方向に反跳された電子の運動エネルギーの入射光子のエネルギーに対する割合に、Compton 散乱の衝突微分断面積をかけたもの。これに入射光子のエネルギー束をかければ単位時間あたりに特定方向に反跳された電子の運動エネルギーが計算できる。即ち

$$\frac{d\sigma_a}{d\Omega_\varphi} = \left(1 - \frac{E'}{E}\right) \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{d\Omega}{d\Omega_\varphi} = \left(1 - \frac{E'}{E}\right) \frac{d\sigma}{d\Omega} \left| \frac{d\cos\theta}{d\cos\varphi} \right|$$

$$\frac{d\sigma_a}{d\Omega_\varphi} = \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2\theta) \frac{1 + \frac{\alpha^2(1 - \cos\theta)^2}{(1 + \cos^2\theta)(1 + \alpha(1 - \cos\theta))}}{(1 + \alpha(1 - \cos\theta))^2} \left(\frac{\alpha(1 - \cos\theta)}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \right) \frac{(1 + \cos\theta) \sin\theta}{(1 + \alpha) \sin^3\varphi}$$

ここで $\cot\varphi = (1 + \alpha) \tan\frac{\theta}{2} = (1 + \alpha) \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$ の関係式を使って φ を使って書き直すことも可能だがかなり複雑な式なのでここでは省略する。

入射光子のエネルギーが 0.01, 0.06, 0.2, 0.5, 1.2, 3.0 MeV の場合の反跳電子のエネルギー角度分布（前方を 1 に規格化して表示した）

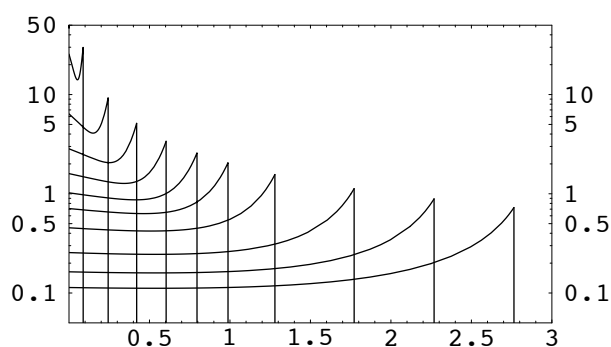


また、反跳電子の運動エネルギー T の分布は、

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{d\Omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dT} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{2\pi m_e c^2}{E'^2} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{2\pi m_e c^2}{(E - T)^2}$$

$$= \frac{\pi r_e^2}{\alpha^2 m_e c^2} \left\{ 2 + \left(\frac{T}{E - T} \right)^2 \left[\frac{1}{\alpha^2} + \frac{E - T}{E} - \frac{2}{\alpha} \frac{(E - T)}{T} \right] \right\}$$

下図に、入射光子のエネルギーが 3.0, 2.5, 2.0, 1.5, 1.2, 1.0, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2 MeV の場合の反跳電子のエネルギースペクトル（微分断面積に比例する値）を示す。



大事な点は、

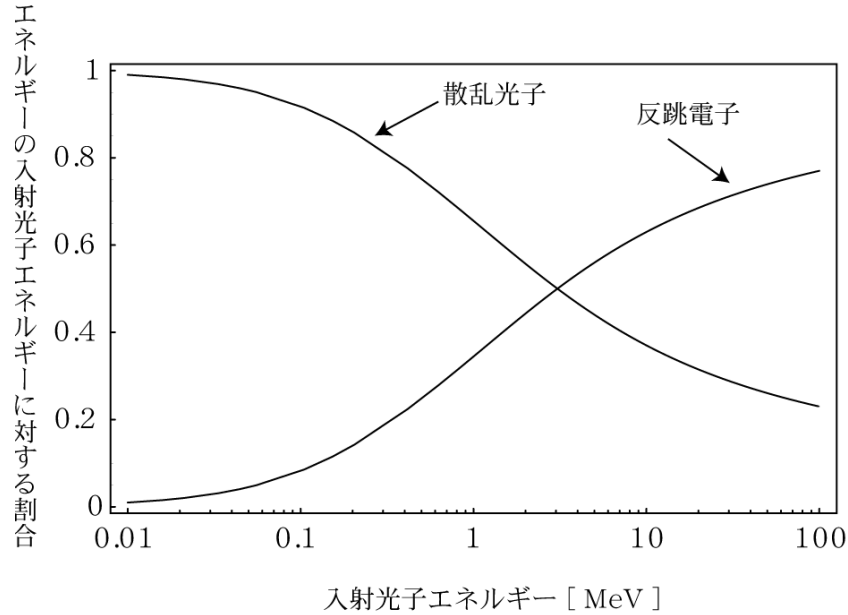
- (1) 反跳電子の飛び出す角度は 90 度以内であること
- (2) 低エネルギーでは、分布は 0～90 度に広く分布するが、高エネルギーでは、前方ピークになることである。

これを角度について積分すると平均吸収断面積（反跳電子された電子の平均運動エネルギーの入射光子のエネルギーに対する割合に、Compton 散乱の衝突全断面積をかけたもの。）これに入射光子のエネルギー束をかければ単位時間あたりに反跳電子に与えられる電子の平均運動エネルギー量が求められる。（1 個の標的電子あたり）

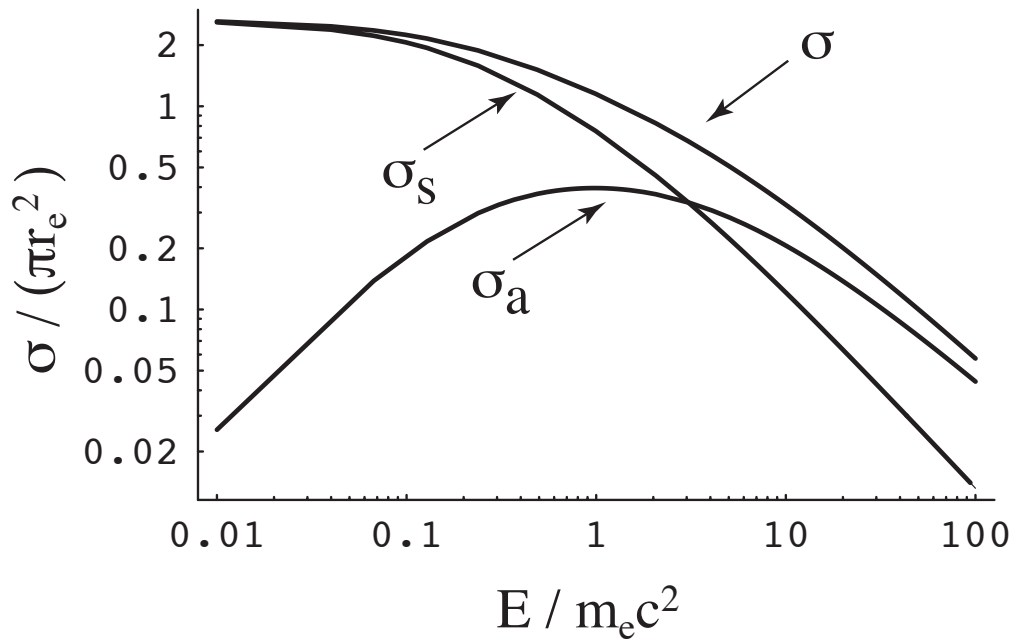
$$\sigma_a = 2\pi r_e^2 \times$$

$$\frac{2(1+\alpha)^2}{\alpha^2(1+2\alpha)} - \frac{(1+3\alpha)}{(1+2\alpha)^2} - \frac{(1+\alpha)(2\alpha^2-2\alpha-1)}{\alpha^2(1+2\alpha)^2} - \frac{4\alpha^2}{3(1+2\alpha)^3} - \frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2\alpha^3} \ln(1+2\alpha)$$

Compton散乱における散乱光子の平均エネルギーと
反跳電子の平均運動エネルギーの入射光子エネルギー
に対する割合の入射光子エネルギーへの依存性



コンプトン散乱の全断面積、平均散乱断面積、平均吸収断面積



9. 制動放射 (X線の発生)

荷電粒子が加速度を受けると電磁波を放射することが知られている。電子が原子核の近傍を通過する際に、原子核の強いクーロン電場により電子が大きな減速を受け同時に光子が発生する。これを制動放射 Bremsstrahlung という。電子の最初の運動エネルギーを T 、曲げられた後の運動エネルギーを T' 、制動放射の光子のエネルギーを $h\nu$ とするとエネルギー保存則より

$$T = T' + h\nu$$

が成り立つ。電子が核半径 ($\sim 10^{-13}$ cm) より大きく原子半径 ($\sim 10^{-8}$ cm) より小さい距離に近づくと、核の電場は、点電荷 Ze によるものと考えられるが、一方電子の接近距離が原子半径オーダーのときは原子核のクーロン場が軌道電子によって遮蔽される Screening が起こる。この Screening 効果は、次の γ 因子で規定される。ここで E は入射電子の全エネルギー、 $h\nu$ は光子のエネルギー、 Z は原子核の陽子数 (元素の原子番号)、 m_e は電子の静止質量である。

$$\gamma = 100 \frac{m_e c^2 h\nu}{E(E - h\nu)} Z^{-\frac{1}{3}}, \quad E = T + m_e c^2$$

電子の全エネルギー E が小さいと γ が大きくなり ($\gamma \gg 1$) Screening が無視でき、電子のエネルギーが大きいと γ が小さくなり ($\gamma \sim 0$) Screening がほぼ完全になる。運動エネルギー T の電子が dx [g/cm²] の距離を横切る間に原子核のクーロン場によりエネルギー $h\nu$ の光子を

放出する確率 $\phi_{rad}^n(T, h\nu) d(h\nu)$ は、次の式で与えられる。

(1) No screening ($\gamma \gg 1$) の場合

$$\phi_{rad}^n(T, h\nu) d(h\nu) = 4\alpha \frac{N_A Z^2 r_e^2}{A} \frac{d(h\nu)}{h\nu} \left[1 + \left(\frac{E'}{E} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{E'}{E} \right] \left[\ln \left(\frac{2EE'}{m_e c^2 h\nu} \right) - \frac{1}{2} \right] \quad (cm^2 g^{-1})$$

(2) Complete screening ($\gamma \sim 0$) の場合

$$\phi_{rad}^n(T, h\nu) d(h\nu) = 4\alpha \frac{N_A Z^2 r_e^2}{A} \frac{d(h\nu)}{h\nu} \left\{ \left[1 + \left(\frac{E'}{E} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{E'}{E} \right] \left[\ln 183 Z^{-\frac{1}{3}} \right] + \frac{1}{9} \frac{E'}{E} \right\} \quad (cm^2 g^{-1})$$

ここで、 N_A は、アボガドロ数、 α は、微細構造定数 (fine structure constant)、 r_e は古典電子半径で次のように表される。

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} = \frac{1}{137}, \quad r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.818 \times 10^{-13} \text{ cm}$$

軌道電子の場による制動放射については、screening が無視できる場合は、その確率は、

$\phi_{rad}^e = \frac{1}{Z} \phi_{rad}^n$ となる。Complete screening ($\gamma \sim 0$) の場合は、

$$\phi_{rad}^e(T, h\nu) d(h\nu) = 4\alpha \frac{N_A Z r_e^2}{A} \frac{d(h\nu)}{h\nu} \left\{ \left[1 + \left(\frac{E'}{E} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{E'}{E} \right] \left[\ln 1440 Z^{-\frac{2}{3}} \right] + \frac{1}{9} \frac{E'}{E} \right\} \quad (cm^2 g^{-1})$$

となる。従って両者を加えたものは、

(3) No screening ($\gamma \gg 1$) の場合

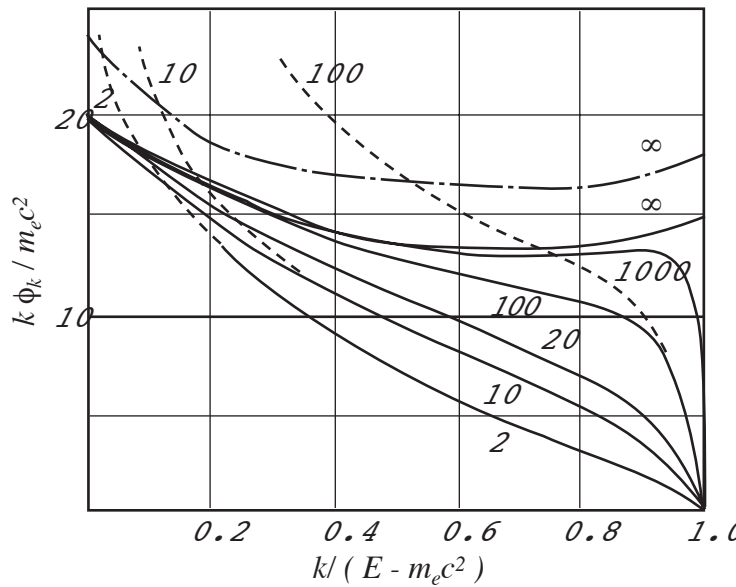
$$\phi_{rad}(T, h\nu) d(h\nu) = 4\alpha \frac{N_A}{A} Z(Z+1) r_e^2 \frac{d(h\nu)}{h\nu} \left[1 + \left(\frac{E'}{E} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{E'}{E} \right] \left[\ln \left(\frac{2EE'}{m_e c^2 h\nu} \right) - \frac{1}{2} \right] (cm^2 g^{-1})$$

(4) Complete screening ($\xi \sim 0$) の場合

$$\phi_{rad}(T, h\nu) d(h\nu) = 4\alpha \frac{N_A}{A} Z(Z+\xi) r_e^2 \frac{d(h\nu)}{h\nu} \left\{ \left[1 + \left(\frac{E'}{E} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{E'}{E} \right] \left[\ln 183 Z^{-\frac{1}{3}} \right] + \frac{1}{9} \frac{E'}{E} \right\} (cm^2 g^{-1})$$

ここで、 $\xi = Z \left(\frac{\phi_{rad}^e}{\phi_{rad}^n} \right)$ であり、この値はほぼ 1 に近い。

制動放射された光子の強度スペクトルを以下に示す。



ここで $k = h\nu$ である。図中の数字は、入射電子の運動エネルギー T を $m_e c^2$ の単位で示した。図中で実線は鉛のスクリーニングのある場合、点線はスクリーニングのない場合の全ての Z の元素に対する場合を示す。

このように制動放射で放出される電磁波のエネルギーは電子の運動エネルギー以下に連続的に分布している（連続スペクトルを持つ）。電子のエネルギーが大きいほど、放射されるエネルギーも大きくなり、X線のエネルギーも大きくなる。現在の医療で良く使われるX線治療装置は、LINACという電子加速器を利用して6～20 MeVに加速された電子を生成しこれを金属標的（タングステン、金、白金）に当て減速時に生じる高エネルギーX線を使用している。

次に原子核を取り巻く軌道電子と入射電子との相互作用で発生するX線を考えてみよう。原子へ入射した電子が内殻のK, L電子を原子の外へたたき出すと軌道に空席ができる。そこに外側の軌道電子が遷移するとき、余分なエネルギーが光子として放射される。これを特性X線といい、標的物質の元素に固有の線スペクトルを示す。特性X線は、制動放射に比べ発生量が少なく、エネルギーも小さい（100 keV以下）ので実際の放射線治療では付加フィルターで濾過される。

