

# FORMATION ANALYSE DES DUREES

## Mai 2022

Marc Thévenin

**17 Mai 2022 : effets de la version 3 de la librairie « survival » (R) concernant les résultats du test Grambsch-Therneau concernant la proportionnalité des risques.**

**En résumé...**

Les précédentes versions de la formation utilisaient la version 2 de *survival* (dernière maj 2019). La procédure proposée pour tester la constance des rapports de risques était le test dit de Grambsch-Therneau exécuté avec la fonction `cox.zph()`. Les résultats étaient identiques à ceux exécutés avec SAS, Stata et Python. Avec la nouvelle version de *survival* les résultats affichés par le test sont différents, et pas qu'un peu (test sur un jeu de données de type biographiques). Je ne suis pas en mesure de l'expliquer précisément, mais un indice est donné dans une note de l'aide de la fonction : « *In versions of the package before survival3.0 the function computed a fast approximation to the score test. Later versions compute the actual score test* » ([lien](#)). Je n'ai pas le temps de modifier en profondeur le document sur ce point, qui me semble à première vue assez critique, ainsi que le tp de la formation où les variations du test me semble à première vue assez énorme. Donc à très court terme :

- Le chapitre sur R a été exécutée avec les version 2.44-1 (2019) de *survival* pour garder des résultats homogènes entre les outils. Une procédure d'installation de cette version est également donnée.
- Pour les personnes qui utiliseront la version 3 de *survival*, ou qui l'utilise déjà, la marche à suivre pour tester différemment l'hypothèse, via une régression linéaire entre les résidus de Schoenfeld et une fonction de la durée, sera ajoutée. Elle permet d'avoir des résultats comparables entre les différents logiciels (Sas, Stata,Python). C'est un peu plus long que pour le test de Grambsch-Therneau, mais pas très compliqué non plus. Dans un premier temps, le test a été seulement réalisé avec fonction strictement linéaire de la durée.

## Table des matières

|   |    |
|---|----|
| <b>Introduction</b>   | 4  |
| <b>Questions</b>  | 4  |
| <b>Terminologies</b>  | 4  |
| <b>Exemples d'analyse</b>                                   | 4  |
| <b>Eléments nécessaires à l'analyse</b>                     | 5  |
| <b>Bibliographie</b>  | 5  |
| <b>Données et théorie</b>                                   | 7  |
| <b>Les données biographiques</b>                            | 7  |
| <b>Données prospectives et rétrospectives</b>               | 7  |
| <b>Enregistrement des données</b>                           | 8  |
| <b>Exemples de mise à disposition</b>                       | 10 |
| <b>La théorie de l'analyse des durées</b>                   | 12 |
| <b>Temps et durée</b>                                       | 12 |
| <b>Le Risk Set</b>  | 13 |
| <b>La Censure</b>   | 13 |
| <b>Les grandeurs</b>  | 16 |
| <b>Compléments</b>  | 21 |
| <b>Méthodes non paramétriques</b>                           | 24 |
| <b>Introduction</b>   | 24 |
| <b>Les variables d'analyse</b>                              | 24 |
| <b>Calcul de la fonction de survie (séjour)</b>             | 24 |
| <b>La méthode actuarielle</b>                               | 25 |
| <b>La méthode de Kaplan-Meier</b>                           | 28 |
| <b>Tester l'égalité des courbes de survie (méthode KM)</b>  | 34 |
| <b>Tests du log-rank</b>                                    | 34 |
| <b>Comparaison des RMST</b>                                 | 39 |
| <b>Les modèles à risques proportionnels</b>                 | 43 |
| <b>Introduction aux modèles à risques proportionnels</b>    | 43 |
| <b>Le modèle semi-paramétrique de Cox</b>                   | 46 |
| <b>Vraisemblance partielle et estimation des paramètres</b> | 46 |
| <b>Estimation des paramètres</b>                            | 48 |
| <b>Lecture des résultats</b>                                | 49 |
| <b>L'hypothèse de constance des rapports de risque</b>      | 51 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Modèles à temps discret</b>                             | 60  |
| Organisation des données                                   | 60  |
| Estimation et ajustement de la durée                       | 61  |
| Modèle à temps discret et hypothèse PH                     | 65  |
| Introduction de variables dynamiques                       | 67  |
| Facteur dynamique traitée de manière fixe                  | 67  |
| Estimation avec une variable dynamique                     | 69  |
| <b>Compléments</b>   | 73  |
| <b>Modèles paramétriques</b>                               | 73  |
| Les modèles paramétriques usuels                           | 73  |
| Hypothèse AFT: Accelerated Failure Time                    | 73  |
| Principe de construction des modèles AFT                   | 74  |
| Quelques lois de distribution                              | 74  |
| <b>Risques concurrents</b>                                 | 78  |
| Risques « cause-specific » et biais sur les estimateurs KM | 78  |
| Estimations en présence de risques concurrents             | 80  |
| Estimation non paramétrique                                | 80  |
| Modèles semi paramétrique et à temps discret               | 85  |
| Fragilité et immunité                                      | 88  |
| <b>Applications logiciels</b>                              | 89  |
| SAS  | 89  |
| R  | 117 |
| Stata  | 146 |
| Python   | 169 |

# Introduction

## Questions

On dispose de données dites « longitudinales », et on cherche à appréhender l'occurrence d'un évènement au sein d'une population. Les problématiques se basent sur les questions suivantes :

- Observe-t-on la survenue de l'évènement pour l'ensemble des individus ?
- Quelle est la durée jusqu'à la survenue de l'évènement ?
- Quels sont les facteurs qui favorisent la survenue de cet évènement ? Facteurs fixes ou facteurs pouvant apparaître ou dont la valeur peut changer durant la période d'observation.

## Terminologies

| Français                | Anglais  |
|-------------------------|--|
| Modèles de durée        | Duration analysis (Econométrie)  |
| Analyse de survie       | Survival analysis (Epidémiologie, médecine, démographie)                             |
| Analyse de fiabilité    | Failure time data analysis (Statistiques industrielles)                              |
| Analyse des transitions | Event-history analysis (Démographie, Sociologie)<br>Transition analysis (Sociologie) |

## Exemples d'analyse

### Nuptialité, Mise en couple

cohabiter, décohabiter, se marier, rompre une union ...

### Logement/mobilité

Changement de statut (locataire/propriétaire), mobilité résidentielle, migration ...

### Emploi

Trouver un 1er emploi, changer d'emploi, entrée ou sortie du chômage ...

### Fécondité

Avoir un premier enfant, avoir un nouvel enfant ...

### Mortalité:

Décéder après un diagnostic, survivre après l'administration d'un traitement...

## Eléments nécessaires à l'analyse

Un processus temporel :

- Une échelle de mesure (... , minutes, heures, jours, mois, années...)
- Une origine commune définissant un évènement de départ : âge au mariage (durée du mariage), âge aux premières règles (durée avant la naissance du premier enfant)...
- Une définition précise de l'évènement d'étude.
- Une durée entre le début et la fin de la période d'observation, et si nécessaire la fin de la période d'exposition au risque.

Une population soumise au risque de connaître l'évènement. Elle est appelée « *Risk Set* ».

Des variables « *explicatives* » ou covariables :

- Fixes : genre, génération, niveau de diplôme, CSP...
- Dynamiques (TVC : Time Varying Covariates) : Mesurées à tout moment entre le début et la sortie de l'observation: statut matrimonial, taille du ménage, niveau de revenu, statut d'activité.

## Bibliographie

Les éléments bibliographiques qui figurent ci-dessous proviennent du champ des sciences sociales ou de l'économie. Quelle que soit la langue, le nombre de cours ou documents sur les éléments techniques sont très nombreux dans le domaine de la médecine.

Cours Gilbert Colletaz (Université d'Orléans).

Le cours est mis à jour tous les ans. Il n'est plus possible d'accéder directement à la dernière version du document, mais il est néanmoins possible de télécharger la version de 2016 (<https://docplayer.fr/69359088-Modeles-de-survie-notes-de-cours-master-2-esa-voies-professionnelle-et-recherche-gilbert-colletaz.html>). Très complet, technique mais très pédagogique. Applications avec Sas.

Document de travail de Simon Quantin (Insee).

Egalement un excellent document, qui couvre l'ensemble des techniques de base d'analyse des durées en temps dit continu (<https://www.insee.fr/fr/statistiques/3695681>). Il propose sûrement la meilleure introduction en langue française à la problématique de la *fragilité*. Applications avec R. On peut juste regretter que les risques concurrents ne soient pas abordés.

## Autres

Ce n'est pas hors sujet, d'autant que les méthodes décrites dans la formation proviennent très généralement de la médecine. Je conseille très vivement de s'intéresser aux préconisations de l'ASA sur l'utilisation des p-values. Un déroulé très intéressant avec des exemples, est également en lien.

<https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00031305.2016.1154108>

<https://www.ics.uci.edu/~jutts/UnderstandingP-Values>

Déjà en 1988....



# Données et théorie

## Les données biographiques

On distingue deux types de données : les *données prospectives* et *rétrospectives*.

### Données prospectives et rétrospectives

#### Les données prospectives

- Individus suivis à des dates successives.
- Instrument de mesure identique à chaque vague (si possible).
- **Avantage** : qualité des données (moins de biais de mémoire).
- **Inconvénients** : délais pour mettre en oeuvre une analyse, mêmes hypothèses entre deux passages pas forcément respectées, attrition (perdus de vue), problèmes liés aux âges d'inclusion.

A noter l'exploitation croissante des données administratives qui peuvent regorger d'informations biographiques. Déjà disponibles, le problème du coût de collecte est contourné. Ce type de données comprend par exemple les informations issues des fichiers des Ressources Humaines des entreprises. Ce type d'informations sont exploitées à l'Ined dans le cadre du projet « **worklife** » : <https://worklife.site.ined.fr/> ). Elles engendrent en revanche des interrogations techniques liés à l'inférence (on ne travaille pas directement sur des échantillons).

#### Les données rétrospectives

- Individus interrogés une seule fois.
- Recueil de biographies thématiques depuis une origine jusqu'au moment de l'enquête.
- Recueil d'informations complémentaires à la date de l'enquête (âge, sexe, csp au moment de l'enquête et/ou csp représentative).
- **Avantages:** Information longitudinale, éventuellement multidimensionnelle immédiatement disponible, « faible » coût.
- **Inconvénients** Questionnaire long, informations datées qui font appel à la mémoire de l'enquêté.e. A de rares exceptions (enfant, mariage), il est difficile d'aller chercher des datations trop fines avec une retrospectivité assez longue.

Les deux types de recueil peuvent être mixés avec des enquêtes à passages répétés comprenant des informations rétrospectives entre 2 vagues (Exemple: la **cohorte Elfe** de l'Ined-Inserm ou la **Millenium-Cohort-Study** en Grande Bretagne).

## Grille AGEVEN

Pour recueillir des informations biographiques retrospectives on utilise généralement la méthode des grilles AGEVEN.

Il s'agit d'une grille âges-événements, de type chronologique, avec des repères temporels en ligne (âge, année). En colonne, sont complétés de manière progressive et relative, les événements relatifs à des domaines, par exemple la biographie professionnelle, familiale, résidentielle...

Références :

- Antoine P., X. Bry and P.D. Diouf, 1987 “*La fiche Ageven : un outil pour la collecte des données rétrospectives*”, Statistiques Canada 13(2).
- Vivier G, “*Comment collecter des biographies ? De la fiche Ageven aux grilles biographiques, Principes de collecte et Innovations récentes*”, Acte des colloques de l'AIDELF, 2006.
- GRAB, 1999, “*Biographies d'enquêtes : bilan de 14 collectes biographiques*”, Paris, INED.

Exemple grille Ageven page 121:

<http://retro.erudit.org/livre/aidelf/2006/001404co.pdf>

## Enregistrement des données

La question du format des fichiers biographiques mis à disposition n'est pas neutre, en particulier au niveau des manipulations pour la créer le fichier d'analyse, opération qui pourra s'avérer particulièrement chronophage et complexe si plusieurs modules doivent être appariés. On distingue trois formats d'enregistrement.

### Large [format individu]

Une ligne par individu, qui renseigne sur une même ligne tous les événements liés à un domaine : les datations et les caractéristiques des événements.

Exemple : domaine = « unions » - échelle temporelle: année - fin de l'observation en 1986.

| id | debut1 | fin1 | cause1         | début2 | fin2 | cause2 |
|----|--------|------|----------------|--------|------|--------|
| A  | 1979   | 1982 | décès conjoint | 1985   | .    | .      |
| B  | 1983   | 1984 | Séparation     | .      | .    | .      |

Inconvénients : peut générer beaucoup de vecteurs colonnes avec de nombreuses valeurs manquantes. Le nombre de colonnes va dépendre du nombre maximum d'événements. Si ce nombre concerne un seul individu, on va multiplier le nombre de colonnes pour un niveau d'information très limité. Situation classique, le nombre d'enfants où les naissances de rang élevé deviennent de plus en plus rares.

### Semi-long [format individu-événements]

C'est le format le plus courant de mise à disposition des enquêtes biographiques. Si l'évènement est de type continu, par exemple le lieu de résidence, la date de fin de la séquence correspond à la date de début de la séquence suivante. Les dates de fin ne sont pas forcément renseignées sur une ligne pour des trajectoires continues, l'information peut être donnée sur la ligne suivante avec la date de début.

Pour la séquence en cours au moment de l'enquête la date de fin est souvent une valeur manquante, une fin de séquence peut se produire juste avant l'enquête la même année. Il est également possible d'avoir une information qui ne s'est pas encore produite au moment de l'enquête, mais qui aura lieu peu de temps après (personne enceinte, donc une naissance probable la même année).

Exemple précédent (trajectoires discontinues):

| id | debut | fin  | cause          | Numéro séquence |
|----|-------|------|----------------|-----------------|
| A  | 1979  | 1982 | décès conjoint | 1               |
| A  | 1985  | .    | .              | 2               |
| B  | 1983  | 1984 | Séparation     | 1               |

### Long [format individu-périodes]

Typique des recueils prospectifs. Ils engendrent des lignes sans information supplémentaire.

Exemple précédent:

| id | Année | cause          | Numéro séquence |
|----|-------|----------------|-----------------|
| A  | 1979  | .              | 1               |
| A  | 1980  | .              | 1               |
| A  | 1981  | .              | 1               |
| A  | 1982  | Décès conjoint | 1               |
| A  | 1985  | .              | 2               |
| A  | 1986  | .              | 2               |
| B  | 1983  | .              | 1               |
| B  | 1984  | Séparation     | 1               |

Ici les trajectoires ne sont pas continues. Une forme continue présenterait toute la trajectoire, avec l'ajout d'un statut du type être en couple ou non. Pour ID=A, en 1983 et 1984, deux lignes « pas couple » (cohabitant ou non) pourraient être insérées avec au total 3 séquences.

Remarque : pour certaines analyses (par exemple analyse en temps discret), on doit transformer passer d'un format large ou semi-long à un format long, sur les durées observées ou sur des intervalles de durées construits.

## Exemples de mise à disposition

Deux enquêtes biographiques de type rétrospectives produite par l'Ined, avec un fichier qui fournit des informations générales sur les individus (une ligne par individu), et une série de modules biographiques en format individus-événements.

### Enquête biographie et entourage (Ined)

[https://grab.site.ined.fr/fr/enquetes/france/biographie\\_entourage/](https://grab.site.ined.fr/fr/enquetes/france/biographie_entourage/)

#### Base sur les caractéristiques individuelles

|    | Identifiant questionnaire | prénom d'ego | sexe d'ego | Date de naissance | Département de naissance     | Commune ou pays de naissance | Pays ou DOM-TOM de naissance | Numéro INSEE de la commune de naissance | Nationalité actuelle en clair |
|----|---------------------------|--------------|------------|-------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|---|-------------------------------|
| 1  | 101 ANDREE                |              |            | 2 06/19/1938      | 93 LIVRY-GARGAN              |                              |                              | 46 FRANCAISE                            |                               |
| 2  | 102 JEANNE                |              |            | 2 06/11/1934      | 37 TOURS                     |                              |                              | 261 FRANCAISE                           |                               |
| 3  | 103 MANUEL                |              |            | 1 08/20/1942      | 99 NR                        |                              | PORTUGAL                     | 99139 PORTUGAISE                        |                               |
| 4  | 104 LEON                  |              |            | 1 01/13/1933      | 93 BONDY                     |                              |                              | 10 FRANCAISE                            |                               |
| 5  | 105 FRANCOIS              |              |            | 1 12/27/1932      | 99 ALGER                     |                              | ALGERIE                      | 99352 FRANCAISE                         |                               |
| 6  | 106 EVELYNNE              |              |            | 2 11/21/1950      | 99 NR                        |                              | ALGERIE                      | 99352 FRANCAISE                         |                               |
| 7  | 107 MICHEL                |              |            | 1 05/23/1949      | 75 PARIS-20E__ARRONDISSEMENT |                              |                              | 120 FRANCAISE                           |                               |
| 8  | 108 JEANNINE              |              |            | 2 05/21/1948      | 94 PERREUX-SUR-MARNE         |                              |                              | 58 FRANCAISE                            |                               |
| 9  | 109 BEATRICE              |              |            | 2 06/09/1949      | 59 LOUVROIL                  |                              |                              | 365 FRANCAISE                           |                               |
| 10 | 110 THANH CUA             |              |            | 1 03/16/1941      | 99 TRAVINH                   |                              | VIET NAM                     | 99243 FRANCAISE                         |                               |
| 11 | 111 MAXIME                |              |            | 1 07/31/1950      | 77 LAGNY-SUR-MARNE           |                              |                              | 243 FRANCAISE                           |                               |
| 12 | 112 JACQUELINE            |              |            | 2 09/25/1934      | 54 SAINT-MAX                 |                              |                              | 482 FRANCAISE                           |                               |
| 13 | 113 YVETTE                |              |            | 2 09/08/1937      | 19 CORNOL                    |                              |                              | 61 FRANCAISE                            |                               |
| 14 | 114 ZOFIA                 |              |            | 2 06/11/1935      | 99 EMILOWNA                  |                              | POLOGNE                      | 99122 POLONAISE                         |                               |
| 15 | 115 ANTONIO               |              |            | 1 09/19/1932      | 99 SEVILLE                   |                              | ESPAGNE                      | 99134 ESPAGNOL                          |                               |
| 16 | 116 JEAN PIERRE           |              |            | 1 04/18/1930      | 75 PARIS-12E__ARRONDISSEMENT |                              |                              | 112 FRANCAISE                           |                               |
| 17 | 117 JOSETTE               |              |            | 2 04/20/1939      | 75 PARIS-6E__ARRONDISSEMENT  |                              |                              | 106 FRANCAISE                           |                               |
| 18 | 118 RADA                  |              |            | 2 12/18/1945      | 99 ZAGREB                    |                              | YUGOSLAVIE                   | 99121 CROATE                            |                               |
| 19 | 119 JACQUELINE            |              |            | 2 03/23/1933      | 92 CLICHY                    |                              |                              | 24 FRANCAISE                            |                               |
| 20 | 120 CLAUDE                |              |            | 1 09/11/1942      | 83 TOULON                    |                              |                              | 137 FRANCAISE                           |                               |
| 21 | 121 MARIE-NOELLE          |              |            | 2 07/06/1944      | 21 SEMUR-EN-AUXOIS           |                              |                              | 603 FRANCAISE                           |                               |
| 22 | 122 ROGER                 |              |            | 1 12/30/1935      | 62 ESQUERDES                 |                              |                              | 309 FRANCAISE                           |                               |
| 23 | 123 DANIEL                |              |            | 1 06/12/1948      | 75 PARIS-14E__ARRONDISSEMENT |                              |                              | 114 FRANCAISE                           |                               |
| 24 | 124 JEAN-CLAUDE           |              |            | 1 08/31/1936      | 92 NEUILLY-SUR-SEINE         |                              |                              | 51 FRANCAISE                            |                               |
| 25 | 125 GHISLAINE             |              |            | 2 01/20/1944      | 60 BRETEUIL                  |                              |                              | 104 FRANCAISE                           |                               |
| 26 | 126 JOCELYNE              |              |            | 2 06/28/1949      | 28 BOUILLY-LES-DEUX-EGLISES  |                              |                              | 53 FRANCAISE                            |                               |
| 27 | 127 MARIE-JOSE            |              |            | 2 10/31/1949      | 76 MONT-SAINT-AIGNAN         |                              |                              | 451 FRANCAISE                           |                               |

#### Module biographique sur le logement et les lieux de résidence

|    | Identifiant questionnaire | Age en début de période | Code des événements familiaux | Etape | Département                  | Liste de communes ou pays ou DOM-TOM | INSEEL3 | Type de logement (appartement, maison, ...) | Nombre de pièces dans le logement | Confort sanitaire | Détenteur du statut |
|----|---------------------------|-------------------------|-------------------------------|-------|------------------------------|--------------------------------------|---------|---|-----------------------------------|-------------------|---------------------|
| 1  | 101                       | 0                       |                               | 1     | 93 LIVRY-GARGAN              |                                      | 46      | 21  | 3                                 | 1 PM              |                     |
| 2  | 101                       | 18 M1                   |                               | 2     | 93 LIVRY-GARGAN              |                                      | 46      | 22  | 3                                 | 0 2               |                     |
| 3  | 101                       | 23                      |                               | 2M    | 93 LIVRY-GARGAN              |                                      | 46      | 22  | 3                                 | 4 2               |                     |
| 4  | 101                       | 49 DCC1                 |                               | 2M    | 93 LIVRY-GARGAN              |                                      | 46      | 22  | 3                                 | 4 1               |                     |
| 5  | 102                       | 0                       |                               | 1     | 37 TOURS                     |                                      | 261     | 12  | 99                                | 99 PM             |                     |
| 6  | 102                       | 5                       |                               | 2     | 37 TOURS                     |                                      | 261     | 22  | 4                                 | 1 PM              |                     |
| 7  | 102                       | 7                       |                               | 3T    |                              |                                      |         |   |                                   | .                 |                     |
| 8  | 102                       | 7                       |                               | 3     | 37 TOURS                     |                                      | 261     | 12  | 99                                | 1 PM              |                     |
| 9  | 102                       | 10 NF3                  |                               | 4     | 75 PARIS-18E__ARRONDISSEMENT |                                      | 118     | 41  | 2                                 | 0 PM              |                     |
| 10 | 102                       | 22 M1                   |                               | 5     | 93 BOBIGNY                   |                                      | 8       | 22  | 1                                 | 1 12              |                     |
| 11 | 102                       | 26                      |                               | 6     | 93 BOBIGNY                   |                                      | 8       | 21  | 4                                 | 4 12              |                     |
| 12 | 102                       | 37                      |                               | 7     | 93 LIVRY-GARGAN              |                                      | 46      | 21  | 3                                 | 4 12              |                     |
| 13 | 103                       | 0                       |                               | 1     | 99 PORTUGAL                  |                                      | 99139   | 22  | 2                                 | 0 PM              |                     |
| 14 | 103                       | 20                      |                               | 2T    |                              |                                      | .       | .   | .                                 | .                 |                     |
| 15 | 103                       | 20                      |                               | 2     | 93 NANTERRE                  |                                      | 50      | 43  | 1                                 | 88 1              |                     |
| 16 | 103                       | 22                      |                               | 3     | 93 DRANCY                    |                                      | 29      | 43  | 1                                 | 88 1              |                     |
| 17 | 103                       | 24 M1                   |                               | 4     | 93 LIVRY-GARGAN              |                                      | 46      | 22  | 2                                 | 2 1               |                     |
| 18 | 103                       | 27                      |                               | 5     | 93 LIVRY-GARGAN              |                                      | 46      | 21  | 3                                 | 4 12              |                     |

## Enquête MAFE (Ined)

<https://mafeproject.site.ined.fr/>

### Base sur les caractéristiques individuelles

| ident | q1    | q1a  | statu_mig | year | age_survey |
|-------|-------|------|-----------|------|------------|
| E1    | Man   | 1972 | Migrant   | 2008 | 37         |
| E10   | Man   | 1966 | Migrant   | 2008 | 43         |
| E100  | Man   | 1972 | Migrant   | 2008 | 37         |
| E101  | Woman | 1977 | Migrant   | 2008 | 32         |
| E102  | Woman | 1966 | Migrant   | 2008 | 43         |
| E103  | Woman | 1978 | Migrant   | 2008 | 31         |
| E104  | Woman | 1958 | Migrant   | 2008 | 51         |
| E105  | Man   | 1968 | Migrant   | 2008 | 41         |
| E106  | Man   | 1961 | Migrant   | 2008 | 48         |
| E107  | Woman | 1965 | Migrant   | 2008 | 44         |
| E108  | Man   | 1972 | Migrant   | 2008 | 37         |
| E109  | Woman | 1966 | Migrant   | 2008 | 43         |
| E11   | Man   | 1979 | Migrant   | 2008 | 30         |
| E110  | Man   | 1966 | Migrant   | 2008 | 43         |
| E111  | Woman | 1983 | Migrant   | 2008 | 26         |
| E112  | Man   | 1972 | Migrant   | 2008 | 37         |
| E113  | Man   | 1977 | Migrant   | 2008 | 32         |
| E114  | Man   | 1964 | Migrant   | 2008 | 45         |
| E115  | Woman | 1983 | Migrant   | 2008 | 26         |
| E116  | Man   | 1951 | Migrant   | 2008 | 58         |
| E117  | Man   | 1963 | Migrant   | 2008 | 46         |
| E118  | Woman | 1965 | Migrant   | 2008 | 44         |
| E119  | Woman | 1968 | Migrant   | 2008 | 41         |
| E12   | Woman | 1977 | Migrant   | 2008 | 32         |
| E120  | Woman | 1973 | Migrant   | 2008 | 36         |

### Module biographique sur les lieux de résidence

| ident | num_log | q301d | q301f | q302    | q303                           | age_survey | q1a  |
|-------|---------|-------|-------|---------|--------------------------------|------------|------|
| E1    | 1       | 1972  | 1975  | SENEGAL | Namanieque                     | 37         | 1972 |
| E1    | 2       | 1975  | 2001  | SENEGAL | Madina Aly                     | 37         | 1972 |
| E1    | 3       | 2001  | 2007  | SPAIN   | Santa Maria De Palautordera    | 37         | 1972 |
| E1    | 4       | 2007  | .     | SPAIN   | Santa Maria De Palautordera    | 37         | 1972 |
| E10   | 1       | 1966  | 1996  | SENEGAL | Anambe                         | 43         | 1966 |
| E10   | 2       | 1996  | 1997  | SPAIN   | Pineda De Mar                  | 43         | 1966 |
| E10   | 3       | 1997  | 1999  | SPAIN   | Granollers                     | 43         | 1966 |
| E10   | 4       | 1999  | 2006  | SPAIN   | Figuieres                      | 43         | 1966 |
| E10   | 5       | 2006  | .     | SPAIN   | Figuieres                      | 43         | 1966 |
| E100  | 1       | 1972  | 2004  | SENEGAL | Dakar                          | 37         | 1972 |
| E100  | 2       | 2004  | 2007  | SENEGAL | Fass / Colobane / Gueule Tapee | 37         | 1972 |
| E100  | 3       | 2007  | .     | SPAIN   | Murcia                         | 37         | 1972 |
| E101  | 1       | 1977  | 1997  | SENEGAL | Mandegane                      | 32         | 1977 |
| E101  | 2       | 1997  | 2006  | SENEGAL | Dakar                          | 32         | 1977 |
| E101  | 3       | 2006  | 2007  | SPAIN   | Rubi                           | 32         | 1977 |
| E101  | 4       | 2007  | .     | SPAIN   | Rubi                           | 32         | 1977 |
| E102  | 1       | 1966  | 2005  | SENEGAL | Bignona                        | 43         | 1966 |
| E102  | 2       | 2005  | .     | SPAIN   | Mataro                         | 43         | 1966 |
| E103  | 1       | 1978  | 1992  | SENEGAL | Medina Yero                    | 31         | 1978 |
| E103  | 2       | 1992  | 1995  | SPAIN   | Calella                        | 31         | 1978 |
| E103  | 3       | 1995  | 1997  | SENEGAL | Medina Yero                    | 31         | 1978 |
| E103  | 4       | 1997  | .     | SPAIN   | Barcelona                      | 31         | 1978 |
| E104  | 1       | 1958  | 2004  | SENEGAL | Dakar                          | 51         | 1958 |
| E104  | 2       | 2004  | 2007  | SPAIN   | Salou                          | 51         | 1958 |
| E104  | 3       | 2007  | .     | SPAIN   | Salou                          | 51         | 1958 |

## La théorie de l'analyse des durées

L'analyse des durées peut être vue comme l'étude d'une variable aléatoire  $T$  qui décrit la durée d'attente jusqu'à l'occurrence d'un évènement.

- La durée  $T = 0$  est le début de l'exposition au risque (entrée dans le **Risk set**).
- $T$  est une mesure non négative de la durée.

La principale caractéristique de l'analyse des durées est le traitement des informations dites **censurées**, c'est-à-dire dire lorsque la **durée d'observation est inférieure à la durée d'exposition au risque** (à retenir).

### Temps et durée

Le temps est une dimension, la durée est sa mesure. La durée est tout simplement calculer par la différence, à une échelle temporelle donnée, entre la fin et le début d'une période d'exposition ou d'observation.

On distingue généralement deux types de durée : la **durée continue** et la **durée discrète (groupée)**. Ces deux notions ne possèdent pas réellement de définition, la différence s'explique plutôt par la présence ou non de simultanéité dans l'occurrence des évènements.

Le temps étant strictement continu car deux évènements ne peuvent pas avoir lieu en « même temps » ; c'est donc l'échelle temporelle choisie ou imposée par l'analyse et les données qui pourra rendre cette mesure continue ou discrète/groupée.

Pour un physicien travaillant dans le champ expérimental de la théorie de la relativité avec des horloges atomiques, une minute (voire une seconde) est une mesure très discrète/groupée pour ne pas dire grossière du temps, alors que pour un géologue cela sera une mesure continue. Pour ces deux disciplines, cette échelle de mesure n'est pas adaptée à leur recherche. Le choix de l'échelle temporelle doit être pertinent par rapport aux objectifs de l'analyse.

Il existe néanmoins des cas où les durées sont par nature discrète, lorsqu'un évènement ne peut avoir lieu qu'à un moment précis. Généralement dans les sciences sociales avec un recueil de données de type rétrospectif, les mesures discrètes sont plutôt de nature groupées. Pour une même année, on considérera indifféremment des évènements qui se produiront un premier janvier et un 31 décembre d'une même année. Exemple de durée discrète : la durée d'un contrat avec une « date anniversaire ».

#### A retenir

Durée continue : absence (ou très peu) d'évènements simultanés.

Durée discrète/groupée : présence quasi systématique d'évènements simultanés (en nombre plutôt élevé).

## Le Risk Set

Il s'agit de la population « soumise » ou « exposée » au risque lorsque  $T = t_i$ .

Cette population varie dans le temps car :

- Certaines personnes ont connu l'évènement, donc peuvent ne plus être soumises au risque (exemple : décès si on analyse la mortalité).
- Certaines personnes sortent de l'observation sans avoir (encore) observé l'évènement : décès si on analyse un autre type d'évènement, perdus de vue, fin de l'observation dans un recueil rétrospectif.

### Exemples:

Les individus célibataires sont soumis au risque .....[remplir]

Les individus mariés sont soumis au risque .....[remplir]

Les individus au chômage sont soumis au risque ..... [remplir]

Les individus qui travaillent sont soumis au risque ... [remplir]

Les individus vivants sont soumis au risque .....[remplir]

## La Censure

Définition de la censure

**Une observation est dite censurée lorsque la durée d'observation est inférieure à la durée d'exposition au risque.**

### Censure à droite

#### Définition

Certains individus n'auront pas (encore) connu l'évènement à la date de l'enquête après une certaine durée d'exposition. On a donc besoin d'un marqueur permettant de déterminer que les individus n'ont pas observé l'évènement sur la période d'étude.

Pourquoi une information est-elle censurée (à droite) ?

- Fin de l'étude, date de l'enquête.
- Perdu de vue, décès si un autre évènement étudié.

### En pratique (important)

- Ne pas exclure ces observations, sinon on surestime la survenue de l'évènement.
- Ne pas les considérer a-priori comme sorties de l'exposition sans avoir connu l'évènement. Elles peuvent connaître l'évènement après la date de l'enquête

ou en étant perdues de vue. Sinon on sous-estime la durée moyenne de survenue de l'évènement.

#### *Exemple*

On effectue une enquête auprès de femmes et on souhaite mesurer l'âge de la naissance de leur premier enfant. Au moment de l'enquête, une femme est âgée de 29 ans et n'a pas (encore) d'enfant. Cette information sera dite « censurée ». Elle est clairement encore soumise au risque après la date de l'enquête. Au niveau de l'analyse, elle sera soumise au risque à partir de ses premières règles jusqu'au moment de l'enquête.

#### *Hypothèse fondamentale*

Les observations censurées ont vis à vis du phénomène observé le même comportement que les observations non censurées.

On dit que la **censure est non informative**, elle ne dépend pas de l'évènement analysé. Normalement le problème ne se pose pas dans les recueils rétrospectifs.

#### *Problème posé par la censure informative*

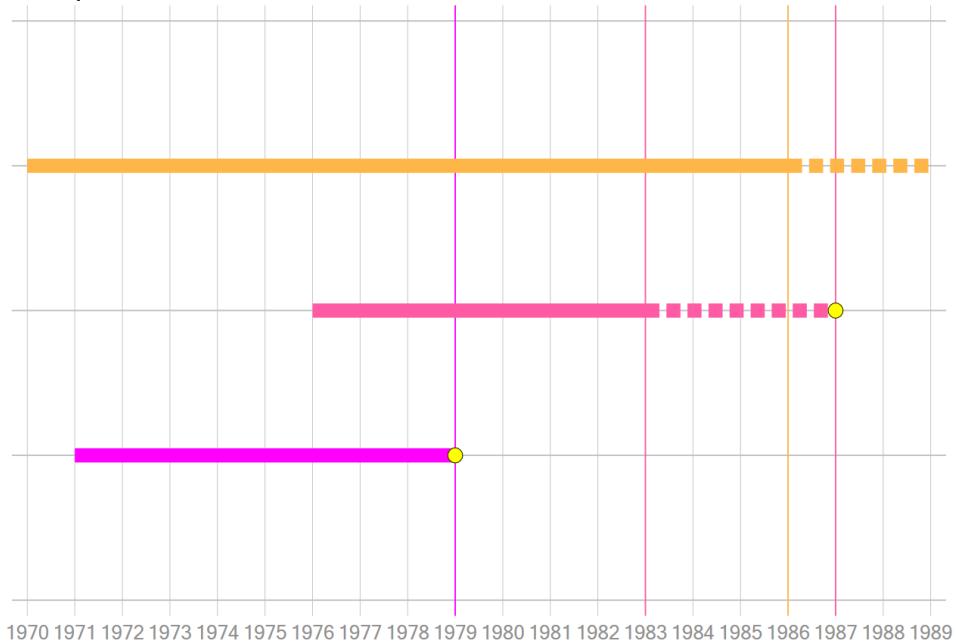
Par exemple en analysant des décès avec un recueil prospectif, si un individu est perdu de vue en raison d'une dégradation de son état de santé, l'indépendance entre la cause de la censure et le décès ne peut plus être assurée.

A l'Ined l'exploitation du registre des personnes atteintes de mucoviscidose (G.Bellis) donne une autre illustration de ce phénomène. Chaque année un nombre significatif personnes sortent du registre (pas de résultats aux examens annuels). Si certain.e.s perdu.e.s de vue s'expliquent par des déménagements, émigration ou par un simple problème d'enregistrement des informations, on note qu'ils/elles sont nombreux.e.s à présenter une forme « légère » de la maladie. L'information étant être donnée par la mutation d'un gène. Comme il n'est pas recommandé de supprimer ou de traiter ces observations comme des censures à droite non informative, on peut les appréhender comme un risque concurrent au décès ou à tout autre évènement analysé à partir de ce registre (voir section dédiée).

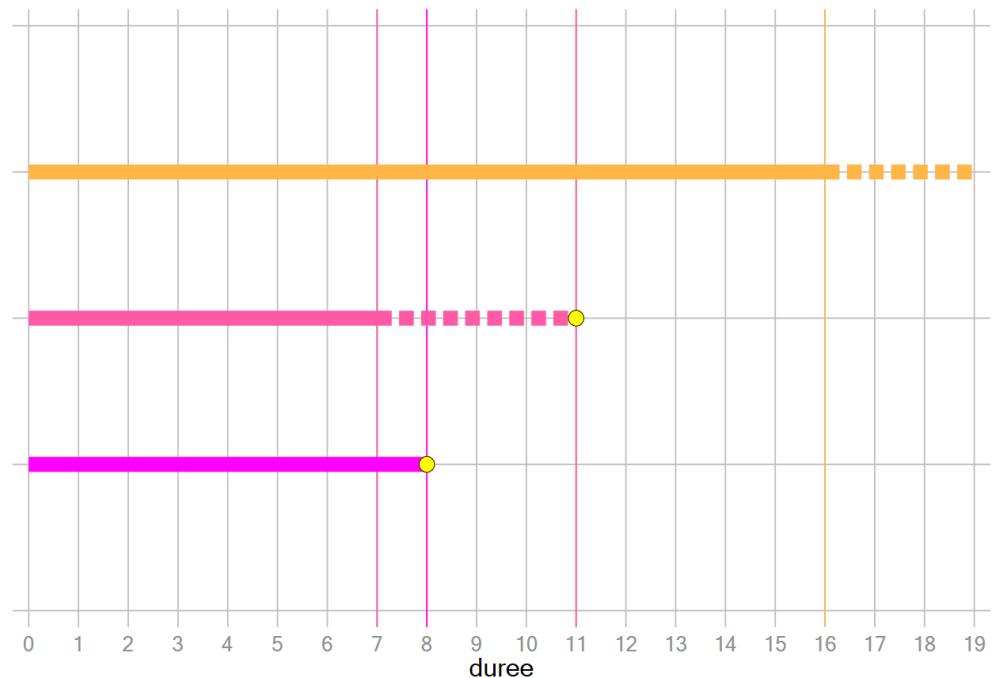
Les graphiques suivant représentent, en temps calendaire et après sa transformation en durée, la logique des censures à droite. Le recueil des informations est ici de nature prospectives.

- Trait plein : durée observée
- Pointillés : durée censurés
- Bulle : moment de l'évènement

### Temps calendaire



### Durée



### Censure à gauche, troncature et censure par intervalle

#### *Censure à gauche*

L'évènement s'est produit avant le début période d'observation. Typique des données prospectives, de type registre, avec des âges d'inclusion différenciés.

### *Censure par intervalle*

Un évènement peut avoir lieux entre 2 temps d'observations sans qu'on puisse les observer (ex: en criminologie récidive d'un délit entre deux arrestations).

Ces situations sont généralement plutôt bien contrôlées dans les recueils rétrospectifs.

### *Troncature (late-entry)*

Par l'exemple, on analyse la survie d'une population. Seule la survie des individus vivants à l'inclusion peut être analysée. Des phénomènes de sélection peuvent être rencontrés. On peut également trouver un phénomène de troncature lorsqu'on mesure la durée à partir d'un certain seuil niveau temporel (ce qui autorise aussi des phénomènes de troncature à droite).

La troncature peut affecter directement le phénomène étudié. Si on souhaite analyser le problème des tentatives de suicide de personnes interrogées via une enquête, par définition ont pourra seulement récolter l'information des survivant.e.s. Cela rendra difficile une analyse sur le suicide en général.

### **Durée d'observation supérieure à la durée d'exposition**

A l'inverse des individus peuvent sortir de l'exposition avant la fin de la période d'observation, et il convient donc de corriger la durée de cette sortie.

Un exemple simple : si au moment de l'enquête une femme sans enfant a 70 ans, cela n'a pas de sens de continuer de l'exposer au risque au-delà d'un certain âge. Si on ne dispose pas d'information sur l'âge à la ménopause on peut tronquer la durée légèrement au-delà de l'âge le plus élevé à la première naissance observée dans les données.

## **Les grandeurs**

La fonction de survie :  $S(t)$

La fonction de répartition :  $F(t)$

La fonction de densité :  $f(t)$

Le risque « instantané » :  $h(t)$

Le risque « instantané » cumulé :  $H(t)$

### **Remarques :**

- Toutes ces grandeurs sont mathématiquement liées les unes par rapport aux autres. En connaître une permet d'obtenir les autres.

- Au niveau formel on se placera ici du point de vue où la durée mesurée est strictement continue. Cela se traduit, entre autre, par l'absence d'évènements dits « simultanés ».
- Les expressions qui vont suivre ne sont pas des techniques de calcul, mais des grandeurs dont on précisera seulement les propriétés.

### La fonction de Survie $S(t)$

Dans ce type d'analyse, il est courant d'analyser la courbe de survie (ou de séjour).

**La fonction de survie donne la proportion de la population qui n'a pas encore connue l'évènement après une certaine durée  $t$ . Elle y a « survécu ».**

Formellement, la fonction de survie est la probabilité de survivre au-delà de  $t$ , soit:

$$S(t) = P(T > t)$$

Propriétés:  $S(0) = 1$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$

La fonction de survie strictement non croissante.

### La fonction de répartition $F(t)$

C'est la probabilité de connaître l'évènement jusqu'en  $t$ , soit:

$$F(t) = P(T \leq t)$$

$F(t) = 1 - S(t)$ . Fonction de survie et fonction de répartition sont donc deux grandeurs strictement complémentaires.

Propriétés:  $F(0) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$

La fonction de répartition strictement non décroissante.

### La fonction de densité $f(t)$

Pour une valeur de  $t$  donnée, la fonction de densité de l'évènement donne la distribution des moments où les évènements ont lieu. Elle est donnée dans un premier temps par la probabilité de connaître l'évènement dans un petit intervalle de temps  $dt$ . Si  $dt$  est proche de 0 alors cette probabilité tend également vers 0. On norme donc cette probabilité par  $dt$ .

En temps continu, la fonction de densité est donnée par la dérivée de la fonction de répartition:  $f(t) = F'(t) = -S'(t)$ .

Formellement la fonction de densité  $f(t)$  s'écrit:

$$f(t) = \frac{P(t \leq T < t + dt)}{dt}$$

### Le risque instantané $h(t)$

Concept fondamental de l'analyse des durées :

$$h(t) = \frac{P(t \leq T < t + dt | T \geq t)}{dt}$$

- $P(t \leq T < t + dt | T \geq t)$  donne la probabilité de survenue de l'évènement sur l'intervalle  $[t, t + dt]$  **conditionnellement à la survie au temps  $t$ .**
- La quantité obtenue donne un nombre moyen d'évènements que connaîtrait un individu durant une unité de temps choisie.
- A priori *cette quantité n'est pas une probabilité*. C'est la nature de l'évènement, en particulier sa non récurrence, et la métrique temporelle choisie ou disponible qui peut la rendre assimilable à une probabilité.

On peut également écrire :

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{F'(t)}{S(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)}$$

On voit ici clairement que la fonction de risque n'est pas une probabilité :  $\frac{f(t)}{S(t)}$  ne peut pas contraindre la valeur à être inférieure à 1.

### Le risque cumulé $H(t)$

Le risque cumulé est égal à :

$$H(t) = \int_0^t h(u) du = -\log(S(t))$$

On peut alors le réécrire toutes les autres quantités :

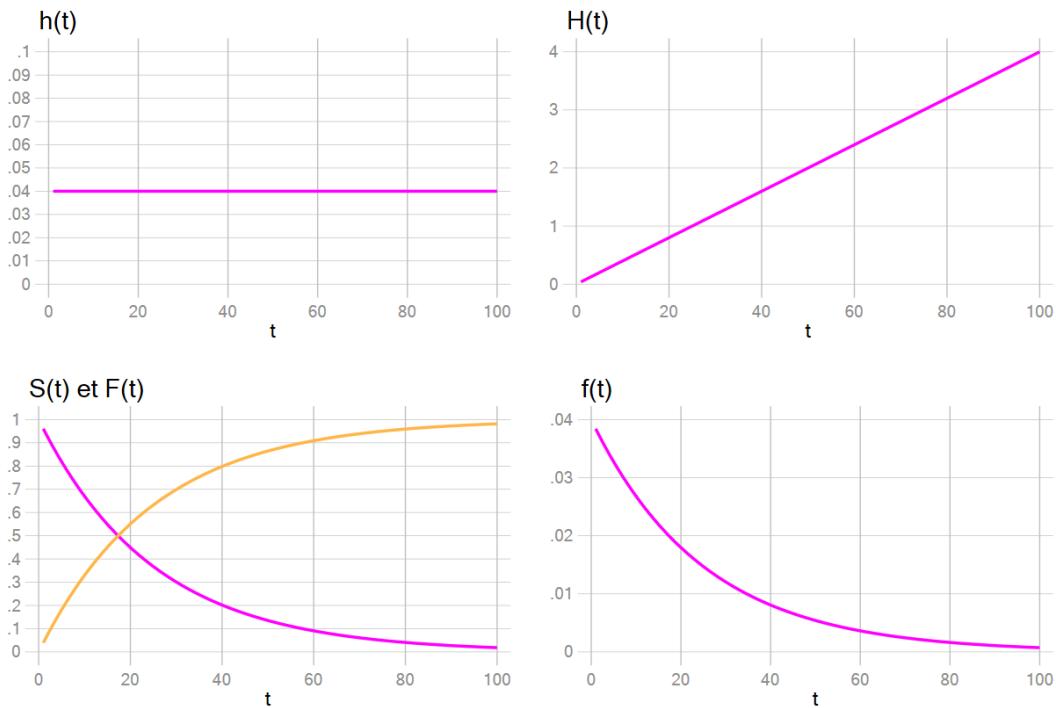
- $S(t) = e^{-H(t)}$
- $F(t) = 1 - e^{-H(t)}$
- $f(t) = h(t) \times e^{-H(t)}$

### Exemple

Si on pose que le risque instantané est strictement constant au cours du temps:  
 $h(t) = a$  (loi dite exponentielle, typique des processus sans mémoire comme la durée de vie des ampoules):

- $h(t) = a$
- $H(t) = a \times t$
- $S(t) = e^{-axt}$
- $F(t) = 1 - e^{-axt}$
- $f(t) = a \times e^{-axt}$

Grandeurs de la loi exponentielle - Risque constant = 0.04



### Application: risque et échelles temporelles

Fortement inspiré, pour ne pas dire copié, de l'excellent cours de **Gilbert Colletaz**:

<https://www.univ-orleans.fr/deg/masters/ESA/GC/sources/Econometrie%20des%20Donnees%20de%20Survie.pdf>

Attention on sort ici très clairement du temps continu, il s'agit seulement de manipuler les concepts, et de voir la dépendance de la mesure du risque à l'échelle temporelle. Par ailleurs on inverse plutôt la logique de « l'instantanéité » en augmentant les intervalles de durée (du mois au trimestre ou à l'année).

- Durant les mois d'hiver, disons entre le 1er janvier et le 1er avril (3 mois), la probabilité d'attraper un rhume chaque mois est de 48% (il s'agit bien d'un risque). Quelle est le risque d'attraper le rhume durant la saison froide ?

$\frac{0.48}{1/3} = 1.44$ . On peut donc s'attendre à attraper 1.44 rhume durant la période d'hiver.

- On passe une année en « vacances » dans une région où la probabilité de décéder chaque mois est évaluée à 33%. Quelle est le risque de décéder pendant cette année sabbatique

$\frac{0.33}{1/12} = 3.96$ . On peut donc s'attendre à mourir près de 4 fois durant les 12 mois.

Le risque peut donc être supérieur à 1 (c'est donc plutôt un taux tel qu'on le définit généralement). En soit cela ne pose pas de problème comme il s'agit d'un nombre moyen d'évènements espérés durant une unité de temps, mais pour des évènements qui ne peuvent pas se répéter, dits « *absorbants* », l'interprétation n'est pas très intuitive.

On peut ici prendre l'inverse du risque qui va mesurer la durée moyenne (espérée) jusqu'à l'occurrence de l'évènement.

On retrouve ici un concept classique en analyse démographique comme l'espérance de vie (survie) : la question n'est pas de savoir si « on » va mourir ou non, mais jusqu'à quand on peut espérer survivre.

- Pour le rhume, la durée espérée d'attraper le premier rhume est de  $1/1.44 = 0.69$  du trimestre hivernal, soit approximativement le début du mois de mars.
- Pour l'année sabbatique, la durée moyenne de survie est de  $1/3.96 = 0.25$  d'une année, soit 3 mois après l'arrivée dans cette région visiblement peu accueillante.

### Exercice

- On a une population de 100 cochons d'Inde.
- On analyse leur mortalité (naturelle).
- Ici l'analyse est en durée discrète/groupée.
- La durée représente le nombre d'années de vie.
- Il n'y a pas de censure à droite.

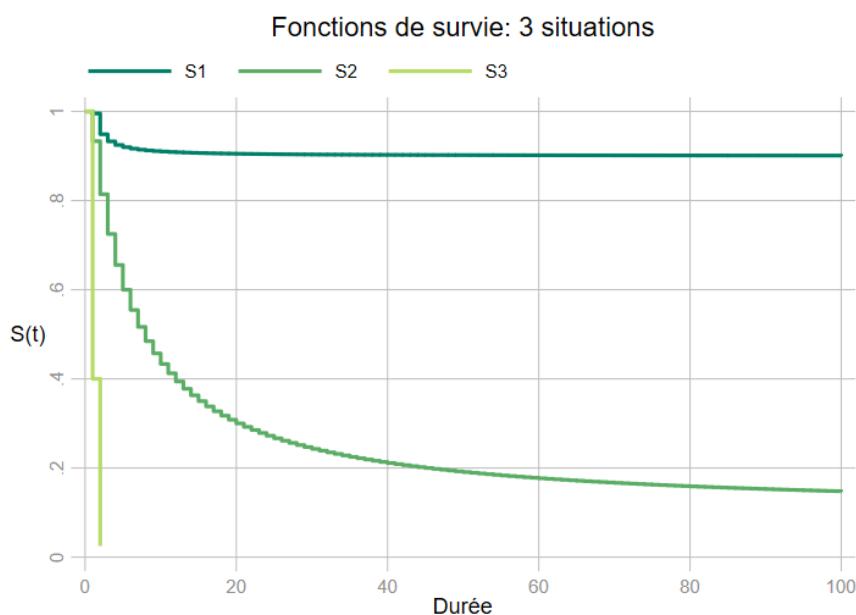
| Durée | Nombre de décès |
|-------|-----------------|
| 1     | 1               |
| 2     | 1               |
| 3     | 3               |
| 4     | 9               |
| 5     | 30              |
| 6     | 40              |
| 7     | 10              |
| 8     | 3               |
| 9     | 2               |
| 10    | 1               |
| N=100 |                 |

A quel âge le risque de mourir des cochons d'Inde est-il le plus élevé ? Quelle est la valeur de ce risque ?

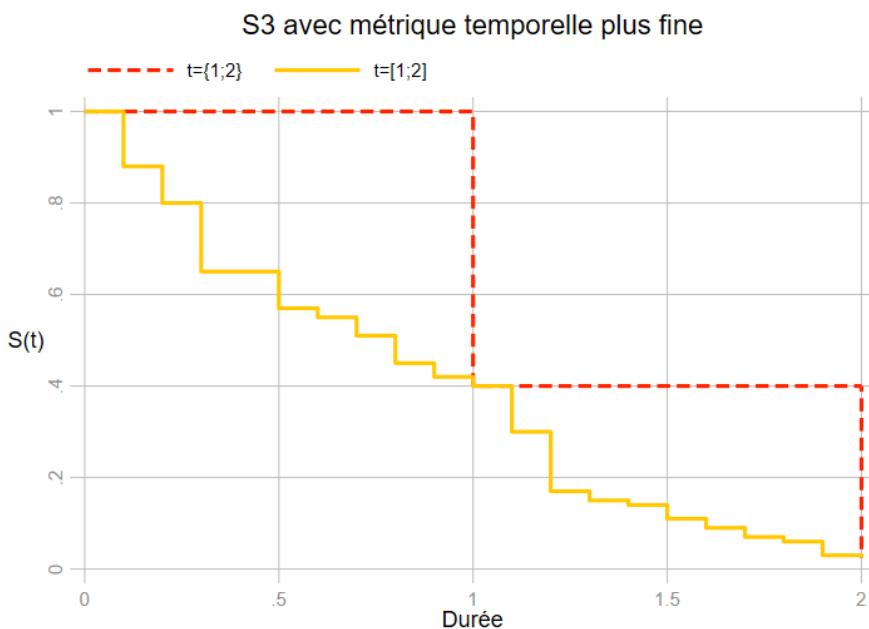
## Compléments

### Forme des fonctions de survie

Une des propriétés de la fonction de survie ou de séjour est qu'elles tendent vers 0. A la lecture du graphique suivant, cela peut correspondre à la forme de la courbe S2, bien que le % de survivant tend à baisser de moins en moins à mesure que la durée augmente. Deux cas limites doivent être considérés.



- La survie tombe à 0 très/trop rapidement (courbe S3) : il n'y a donc pas ou presque pas de durée (par exemple presque tout l'échantillon observe l'évènement la première année de l'exposition). Les méthodes en temps continu ne sont a priori pas adaptées à ce genre de situation. Si on dispose d'une information plus fine pour dater les évènements, la fonction de séjour pourra reprendre une forme plus « standard». Dans le graphique,  $S(t = 1) = 0.4$  et  $S(t = 2) = 0.025$ , mais si on dispose par exemple de 10 points d'observations supplémentaires dans chaque durée groupée:



- Très peu d'évènements et la fonction de séjour suit une asymptote nettement supérieur à 0 ( $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = a$  avec  $a > 0$ ). La question est plus délicate car on interroge l'exposition au risque d'une partie de l'échantillon ou, dit autrement on peut penser qu'une fraction est immunisé au risque. Cette problématique est rapidement posée en fin de formation.

### Absence de censures à droites

Les méthodes qui vont être présentées **gèrent** la présence de censures à droite. En leur absence, elles restent néanmoins parfaitement valables. L'absence de censure facilite certaines analyses, par exemple celles des fonctions de séjour où le calcul direct des durées moyennes est rendu possible.

### Utilisation des pondérations

Une question assez récurrente concerne l'utilisation des poids de sondage dans les analyses de durées avec longueurs biographiques souvent assez longues. Appartenant à « l' école du bon sens » (Eva Levièvre), leur utilisation ne me semble pas recommandée voire à exclure sauf exceptions. En effet les pondérations sont générées

au moment de l'enquête, alors que les évènements étudiés peuvent remonter dans un passé plus ou moins lointain pour une partie de la population analysée. Si on regarde de plus près, la création de poids longitudinaux ne résoudrait pas grand chose, les pondérations devant être recalculées à chaque moment d'observation ou à chaque moment où des évènements se produisent. Par ailleurs on mélangerait à un instant donné des personnes issues de générations différentes ce qui rend impossible tout calage sur des caractéristiques d'une population. Supposons une personne âgée de 25 ans et une personne âgée de 70 ans au moment de l'enquête en 2022, avec un début d'observation à l'âge de 18 ans. A 20 ans ( $t = 2$ ), pour la première personne les caractéristiques de la population sont celles de 2017, pour celle de 70 ans celles de 1972. On fait comment ??????

# Méthodes non paramétriques

Les méthodes non paramétriques portent généralement sur l'analyse des fonctions de survie (séjour) ou sur celle des fonctions de répartition, plus rarement sur les mesures d'incidence données par le risque cumulé.

Deux méthodes d'estimations sont proposées : la méthode dite **actuarielle** et la méthode dite de **Kaplan & Meier**. Ces deux méthodes sont adaptées à des mesures différentes de la durée : plutôt discrète pour la technique actuarielle et plutôt continue pour Kaplan-Meier (KM). Cela induit un traitement différent de la censure dans l'estimation. La seconde est de très loin la plus diffusée en raison, par exemple, de la disponibilité de plusieurs tests de comparaison.

## Introduction

### Les variables d'analyse

On a un échantillon aléatoire de  $n$  individus avec:

- Des indicateurs de fin d'épisode  $e_1, e_2, \dots, e_k$  avec  $e_i = 0$  si censure à droite et  $e_i = 1$  si évènement observé pendant la période d'observation.
  - Des durées d'exposition au risque  $t_1, t_2, \dots, t_k$  jusqu'à l'évènement ou la censure.
1. En théorie, il ne peut pas y avoir d'évènement en  $t = 0$ .

### Calcul de la fonction de survie (séjour)

Rappel: La fonction de survie donne la probabilité que l'évènement survienne après  $t_i$ , soit  $S(t_i) = P(T > t_i)$ .

Pour survivre en  $t_i$ , il faut avoir survécu en  $t_{i-1}$ ,  $t_{i-2}$ , ...,  $t_1$ . La fonction de survie rapporte donc des probabilités conditionnelles: survivre en  $t_i$  conditionnellement au fait d'y avoir survécu avant. Il s'agit donc d'un produit de probabilités.

Soit  $d_i = \sum e_i$  le nombre d'évènements observé en  $t_i$  et  $r_i$  la population encore soumise au risque en  $i$ . On peut mesurer l'intensité de l'évènement en  $t_i$  en calculant le quotient  $q(t_i) = \frac{d_i}{r_i}$ . Si le temps est strictement continu on devrait toujours avoir  $q(t_i) = \frac{1}{r_i}$ .

$$S(t_i) = \left(1 - \frac{d_i}{r_i}\right) \times S(t_{i-1}) = S(t_i) = (1 - q(t_i)) \times S(t_{i-1}).$$

En remplaçant  $S(t_{i-1})$  par sa valeur:  $S(t_i) = (1 - \frac{d_i}{r_i}) \times (1 - \frac{d_{i-1}}{r_{i-1}}) \times S(t_{i-2})$ .

En remplaçant toutes les expressions de la survie jusqu'en  $t_0$  ( $S(0) = 1$ ):

$$S(t_i) = \prod_{t_j \leq k} (1 - q(t_j))$$

### Application pour la suite de la formation

On va analyser le risque de décéder (la survie) de personnes souffrant d'une insuffisance cardiaque. Le début de l'exposition est leur inscription dans un registre d'attente pour une greffe du coeur.

Les covariables sont dans un premier temps toutes fixes:

L'année (*year*)

L'âge à l'entrée dans le registre (*age*)

Le fait d'avoir été opéré pour un pontage aorto-coronarien avant l'inscription (*surgery*).

Le début de l'exposition au risque est l'entrée dans le registre, la durée est mesurée en jour (*stime*). La variable évènement est le décès (*died*).

## La méthode actuarielle

- Estimation sur des intervalles définis par l'utilisatrice/utilisateur.
- Au niveau technique, la méthode est dite «continue», avec une estimation en milieu d'intervalle.
- Méthode adaptée lorsque la durée est mesurée de manière discrète.

### Echelle temporelle

La durée est divisée en  $J$  intervalles, en choisissant  $J$  points:  $t_0 < t_1 < \dots < t_J$  avec  $t_{J+1} = \infty$ .

### Calcul du Risk set

- A  $t_{min} = 0$ ,  $n_0 = n$  individus soumis au risque:  $r_0 = n_0$ .
- Le nombre d'exposé.e.s au risque sur un intervalle est calculé en soustrayant la moitié des cas censurés sur la longueur de l'intervalle:  $r_i = n_i - 0.5 \times c_i$ , avec  $n_i$  le nombre de personnes soumises au risque au début de l'intervalle et  $c_i$  le nombre d'observations censurées sur la longueur de l'intervalle.

On suppose donc que les observations censurées  $c_i$  sont sorties de l'observation uniformément sur l'intervalle. Les cas censurés le sont en moyenne au milieu de l'intervalle.

### Calcul de $S(t_i)$

On applique la méthode de la section précédente avec

$$q(t_i) = \frac{d_i}{n_i - 0.5 \times c_i}$$

### Calcul de la durée médiane (ou autre quantiles)

#### Rappel

Compte tenu des censures à droite, le dernier intervalle étant ouvert, il est déconseillé voire proscris de calculer des durées moyennes. On utilise la médiane ou tout autre quantile lorsqu'ils sont estimables.

#### Définition:

Il s'agit de la valeur de la durée telle que  $S(t_i) = 0.5$ .

#### Calcul

Comme on applique une méthode continue et monotone à l'intérieur d'intervalles, on ne peut pas calculer directement un point de coupure qui correspond à 50% de survivants. On doit donc trouver ce point par interpolation linéaire dans l'intervalle  $[t_i; t_{i+1}[$  ou  $]t_i; t_{i+1}]$  selon la définition retenue avec  $S(t_{i+1}) \leq 0.5$  et  $S(t_i) > 0.5$ .

### Logiciels

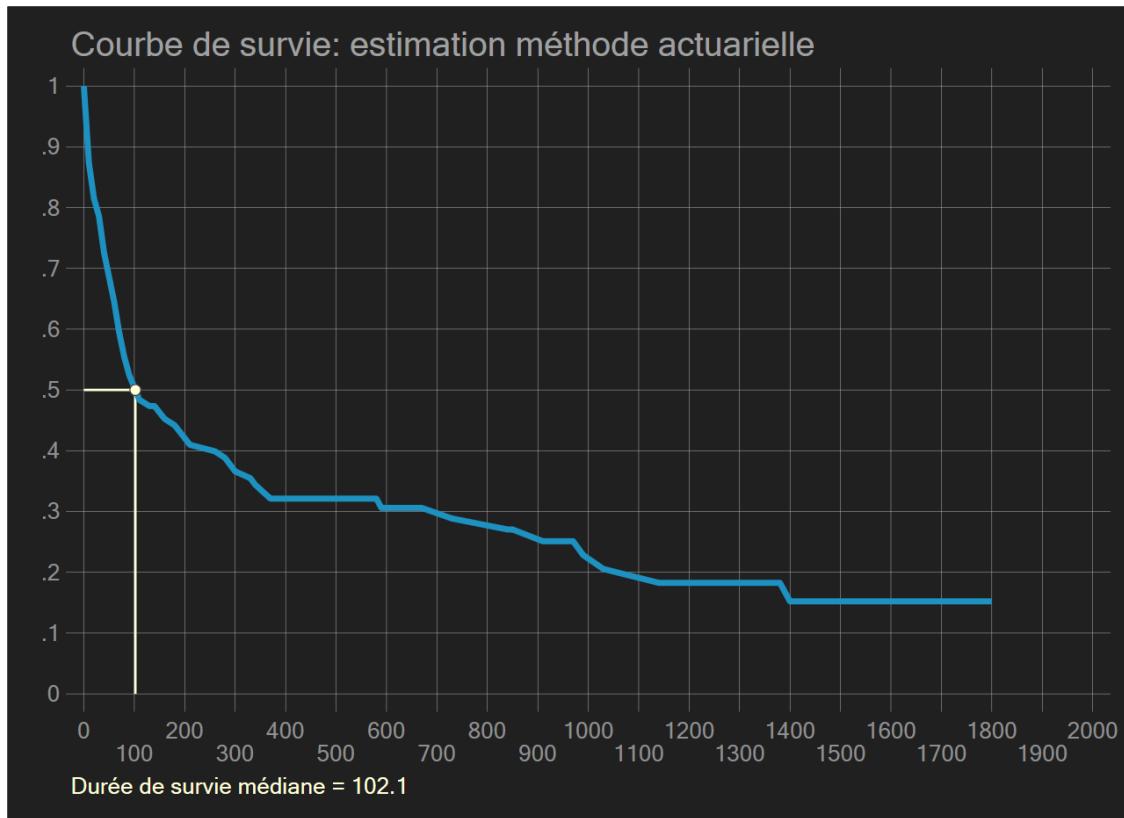
**SAS:** incluse dans *proc lifetest* avec l'option `method=act`.

**Stata:** commande *Itable*. Voir la commande externe *qlt* (MT) qui calcule les durées médianes (+ quartiles) et qui cale la définition des intervalles avec celle de Sas.

**R:** une fonction programmée par un utilisateur (package *discSurv* => fonction *lifeTable*), mais pas convaincante car pas d'estimation sur les quantiles, et estimation avec des intervalles toujours fixés à  $dt = 1$ . D'un intérêt très limité.

**Python:** à l'heure actuelle aucune fonction à ma connaissance.

*Exemple (définition des bornes type Sas)*



| Interval | Beg. | Total | Deaths | Lost | Survival | Std. Error | [95% Conf. Int.] |
|----------|------|-------|--------|------|----------|------------|------------------|
| 0        | 10   | 103   | 13     | 0    | 0.8738   | 0.0327     | 0.7926 0.9247    |
| 10       | 20   | 90    | 6      | 1    | 0.8152   | 0.0383     | 0.7257 0.8779    |
| 20       | 30   | 83    | 3      | 0    | 0.7857   | 0.0405     | 0.6931 0.8533    |
| 30       | 40   | 80    | 6      | 2    | 0.7261   | 0.0441     | 0.6284 0.8020    |
| 40       | 50   | 72    | 4      | 0    | 0.6857   | 0.0461     | 0.5857 0.7664    |
| 50       | 60   | 68    | 4      | 0    | 0.6454   | 0.0476     | 0.5439 0.7299    |
| 60       | 70   | 64    | 5      | 0    | 0.5950   | 0.0489     | 0.4926 0.6834    |
| 70       | 80   | 59    | 4      | 0    | 0.5546   | 0.0496     | 0.4523 0.6454    |
| 80       | 90   | 55    | 3      | 0    | 0.5244   | 0.0499     | 0.4225 0.6165    |
| 90       | 100  | 52    | 2      | 0    | 0.5042   | 0.0499     | 0.4029 0.5971    |
| 100      | 110  | 50    | 2      | 1    | 0.4838   | 0.0500     | 0.3831 0.5773    |
| 110      | 120  | 47    | 1      | 0    | 0.4735   | 0.0499     | 0.3732 0.5673    |
| 130      | 140  | 46    | 0      | 1    | 0.4735   | 0.0499     | 0.3732 0.5673    |
| 140      | 150  | 45    | 1      | 0    | 0.4630   | 0.0499     | 0.3631 0.5570    |
| 150      | 160  | 44    | 1      | 0    | 0.4525   | 0.0499     | 0.3530 0.5467    |
| 160      | 170  | 43    | 1      | 0    | 0.4420   | 0.0498     | 0.3429 0.5364    |
| 180      | 190  | 42    | 2      | 1    | 0.4207   | 0.0496     | 0.3227 0.5154    |
| 200      | 210  | 39    | 1      | 0    | 0.4099   | 0.0495     | 0.3125 0.5047    |
| 210      | 220  | 38    | 1      | 0    | 0.3991   | 0.0494     | 0.3024 0.4939    |
| 260      | 270  | 37    | 1      | 1    | 0.3882   | 0.0492     | 0.2921 0.4830    |
| 280      | 290  | 35    | 2      | 0    | 0.3660   | 0.0489     | 0.2714 0.4608    |
| 300      | 310  | 33    | 1      | 0    | 0.3549   | 0.0486     | 0.2612 0.4496    |
| 330      | 340  | 32    | 1      | 0    | 0.3438   | 0.0483     | 0.2510 0.4383    |
| 340      | 350  | 31    | 2      | 1    | 0.3213   | 0.0477     | 0.2305 0.4153    |
| 370      | 380  | 28    | 0      | 1    | 0.3213   | 0.0477     | 0.2305 0.4153    |
| 390      | 400  | 27    | 0      | 1    | 0.3213   | 0.0477     | 0.2305 0.4153    |
| 420      | 430  | 26    | 0      | 1    | 0.3213   | 0.0477     | 0.2305 0.4153    |
| 440      | 450  | 25    | 0      | 1    | 0.3213   | 0.0477     | 0.2305 0.4153    |

|      |      |    |   |   |        |        |        |        |
|------|------|----|---|---|--------|--------|--------|--------|
| 480  | 490  | 24 | 0 | 1 | 0.3213 | 0.0477 | 0.2305 | 0.4153 |
| 510  | 520  | 23 | 0 | 1 | 0.3213 | 0.0477 | 0.2305 | 0.4153 |
| 540  | 550  | 22 | 0 | 1 | 0.3213 | 0.0477 | 0.2305 | 0.4153 |
| 580  | 590  | 21 | 1 | 0 | 0.3060 | 0.0478 | 0.2156 | 0.4008 |
| 590  | 600  | 20 | 0 | 1 | 0.3060 | 0.0478 | 0.2156 | 0.4008 |
| 620  | 630  | 19 | 0 | 1 | 0.3060 | 0.0478 | 0.2156 | 0.4008 |
| 670  | 680  | 18 | 1 | 1 | 0.2885 | 0.0482 | 0.1983 | 0.3847 |
| 730  | 740  | 16 | 1 | 0 | 0.2705 | 0.0484 | 0.1808 | 0.3680 |
| 840  | 850  | 15 | 0 | 1 | 0.2705 | 0.0484 | 0.1808 | 0.3680 |
| 850  | 860  | 14 | 1 | 0 | 0.2511 | 0.0487 | 0.1622 | 0.3501 |
| 910  | 920  | 13 | 0 | 1 | 0.2511 | 0.0487 | 0.1622 | 0.3501 |
| 940  | 950  | 12 | 0 | 1 | 0.2511 | 0.0487 | 0.1622 | 0.3501 |
| 970  | 980  | 11 | 1 | 0 | 0.2283 | 0.0493 | 0.1398 | 0.3299 |
| 990  | 1000 | 10 | 1 | 0 | 0.2055 | 0.0494 | 0.1187 | 0.3088 |
| 1030 | 1040 | 9  | 1 | 0 | 0.1826 | 0.0489 | 0.0988 | 0.2869 |
| 1140 | 1150 | 8  | 0 | 1 | 0.1826 | 0.0489 | 0.0988 | 0.2869 |
| 1320 | 1330 | 7  | 0 | 1 | 0.1826 | 0.0489 | 0.0988 | 0.2869 |
| 1380 | 1390 | 6  | 1 | 0 | 0.1522 | 0.0493 | 0.0715 | 0.2609 |
| 1400 | 1410 | 5  | 0 | 2 | 0.1522 | 0.0493 | 0.0715 | 0.2609 |
| 1570 | 1580 | 3  | 0 | 1 | 0.1522 | 0.0493 | 0.0715 | 0.2609 |
| 1580 | 1590 | 2  | 0 | 1 | 0.1522 | 0.0493 | 0.0715 | 0.2609 |
| 1790 | 1800 | 1  | 0 | 1 | 0.1522 | 0.0493 | 0.0715 | 0.2609 |

---

(Heart transplant data)

Durée pour différents quantiles de la fonction de survie  
Définition des bornes Sas-lifetest  
 $S(t)=0.90$ :  $t= 7.923$   
 $S(t)=0.75$ :  $t= 35.989$   
 **$S(t)=0.50$ :  $t= 102.068$**   
 $S(t)=0.25$ :  $t= 913.968$   
 $S(t)=0.10$ :  $t= .$

102 jours après leur inscription dans le registre d'attente pour une greffe, 50% des malades sont toujours en vie. Au bout de 914 jours, 75% des personnes sont décédées.

## La méthode de Kaplan-Meier

- La méthode qui exploite toute l'information disponible est celle dite de **Kaplan-Meier (KM)**.
- Il y a autant d'intervalle que de moment où l'on observe au moins un évènement.
- Au lieu d'utiliser des intervalles prédéterminés, l'estimateur KM va définir un intervalle entre chaque évènement enregistré.
- La fonction de survie estimée par la méthode KM est donc une fonction en escalier (stair step), d'où une méthode dite « discrète ».
- Pour chaque intervalle entre deux évènements, on compte le nombre d'évènements et le nombre de censures.
- Méthode adaptée pour une mesure de la durée de type continue.

## Définition du Risk Set ( $r_i$ )

Si on observe au même moment des évènements et des censures, les observations censurées sont considérées comme exposées au risque à ce moment dévènement, comme si elles étaient censurées très rapidement après. C'est la principale caractéristique de cette méthode, appelée également l'estimateur « product-limit » :

$$r_i = r_{i-1} - d_{i-1} - c_{i-1}$$

## Calcul de $S(t_i)$

On applique la méthode de la section précédente avec :

$$q_i = \frac{d_i}{r_{i-1} - d_{i-1} - c_{i-1}}$$

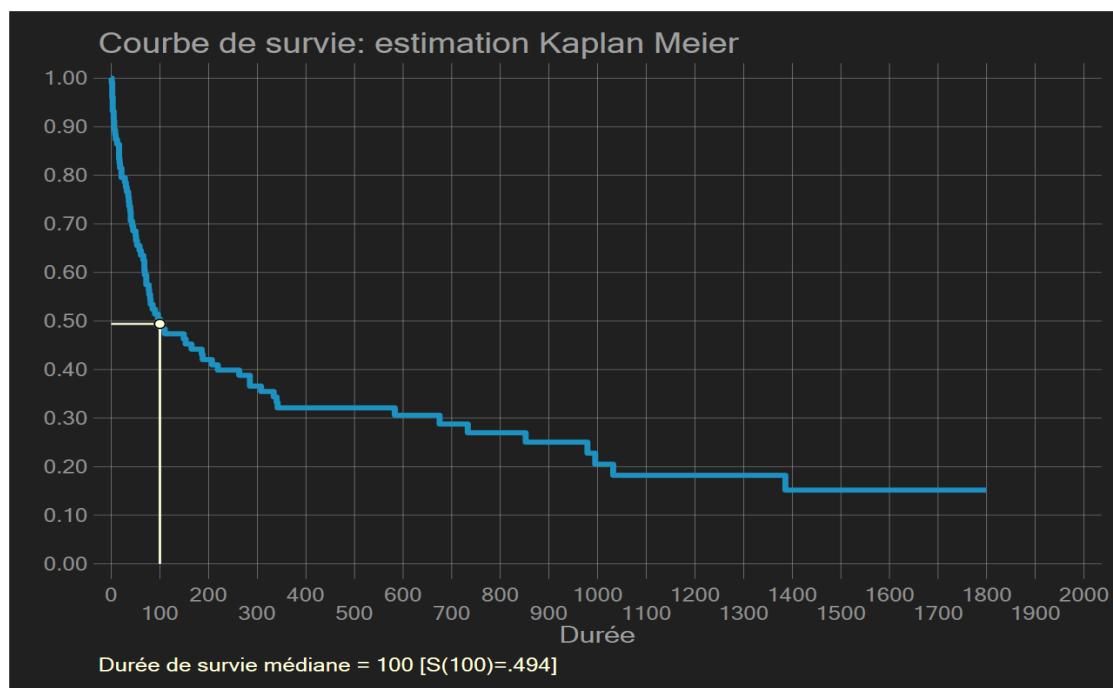
## Récupération de la médiane

Il n'y a pas de méthode pour calculer directement la durée médiane (ou tout autre quantile de la durée).

On va seulement lire la valeur de la durée qui se situe juste « en dessous » de 50% de survivant.e.s. Elle est donc définie tel que  $S(t) \leq 0.5$ . Pas de formule savante pour obtenir ce résultat, c'est une convention. Attention, il n'est pas impossible que le % de survivant.e.s soit bien en deçà de 50% pour obtenir cette durée médiane.

## Exemple

La durée médiane est égale à 100 jours (102 pour la méthode actuarielle) et correspond à  $S(t) = 0.4940$ .



| Time | Beg. Total | Fail | Net Lost | Survivor Function | Std. Error | [95% Conf. Int.] |
|------|------------|------|----------|-------------------|------------|------------------|
| 1    | 103        | 1    | 0        | 0.9903            | 0.0097     | 0.9331 0.9986    |
| 2    | 102        | 3    | 0        | 0.9612            | 0.0190     | 0.8998 0.9852    |
| 3    | 99         | 3    | 0        | 0.9320            | 0.0248     | 0.8627 0.9670    |
| 5    | 96         | 2    | 0        | 0.9126            | 0.0278     | 0.8388 0.9535    |
| 6    | 94         | 2    | 0        | 0.8932            | 0.0304     | 0.8155 0.9394    |
| 8    | 92         | 1    | 0        | 0.8835            | 0.0316     | 0.8040 0.9321    |
| 9    | 91         | 1    | 0        | 0.8738            | 0.0327     | 0.7926 0.9247    |
| 11   | 90         | 0    | 1        | 0.8738            | 0.0327     | 0.7926 0.9247    |
| 12   | 89         | 1    | 0        | 0.8640            | 0.0338     | 0.7811 0.9171    |
| 16   | 88         | 3    | 0        | 0.8345            | 0.0367     | 0.7474 0.8937    |
| 17   | 85         | 1    | 0        | 0.8247            | 0.0375     | 0.7363 0.8857    |
| 18   | 84         | 1    | 0        | 0.8149            | 0.0383     | 0.7253 0.8777    |
| 21   | 83         | 2    | 0        | 0.7952            | 0.0399     | 0.7034 0.8614    |
| 28   | 81         | 1    | 0        | 0.7854            | 0.0406     | 0.6926 0.8531    |
| 30   | 80         | 1    | 0        | 0.7756            | 0.0412     | 0.6819 0.8448    |
| 31   | 79         | 0    | 1        | 0.7756            | 0.0412     | 0.6819 0.8448    |
| 32   | 78         | 1    | 0        | 0.7657            | 0.0419     | 0.6710 0.8363    |
| 35   | 77         | 1    | 0        | 0.7557            | 0.0425     | 0.6603 0.8278    |
| 36   | 76         | 1    | 0        | 0.7458            | 0.0431     | 0.6495 0.8192    |
| 37   | 75         | 1    | 0        | 0.7358            | 0.0436     | 0.6388 0.8106    |
| 39   | 74         | 1    | 1        | 0.7259            | 0.0442     | 0.6282 0.8019    |
| 40   | 72         | 2    | 0        | 0.7057            | 0.0452     | 0.6068 0.7842    |
| 43   | 70         | 1    | 0        | 0.6956            | 0.0457     | 0.5961 0.7752    |
| 45   | 69         | 1    | 0        | 0.6856            | 0.0461     | 0.5855 0.7662    |
| 50   | 68         | 1    | 0        | 0.6755            | 0.0465     | 0.5750 0.7572    |
| 51   | 67         | 1    | 0        | 0.6654            | 0.0469     | 0.5645 0.7481    |
| 53   | 66         | 1    | 0        | 0.6553            | 0.0472     | 0.5541 0.7390    |
| 58   | 65         | 1    | 0        | 0.6452            | 0.0476     | 0.5437 0.7298    |
| 61   | 64         | 1    | 0        | 0.6352            | 0.0479     | 0.5333 0.7206    |
| 66   | 63         | 1    | 0        | 0.6251            | 0.0482     | 0.5230 0.7113    |
| 68   | 62         | 2    | 0        | 0.6049            | 0.0487     | 0.5026 0.6926    |
| 69   | 60         | 1    | 0        | 0.5948            | 0.0489     | 0.4924 0.6832    |
| 72   | 59         | 2    | 0        | 0.5747            | 0.0493     | 0.4722 0.6643    |
| 77   | 57         | 1    | 0        | 0.5646            | 0.0494     | 0.4621 0.6548    |
| 78   | 56         | 1    | 0        | 0.5545            | 0.0496     | 0.4521 0.6453    |
| 80   | 55         | 1    | 0        | 0.5444            | 0.0497     | 0.4422 0.6357    |
| 81   | 54         | 1    | 0        | 0.5343            | 0.0498     | 0.4323 0.6261    |
| 85   | 53         | 1    | 0        | 0.5243            | 0.0499     | 0.4224 0.6164    |
| 90   | 52         | 1    | 0        | 0.5142            | 0.0499     | 0.4125 0.6067    |
| 96   | 51         | 1    | 0        | 0.5041            | 0.0499     | 0.4027 0.5969    |
| 100  | 50         | 1    | 0        | 0.4940            | 0.0499     | 0.3930 0.5872    |
| 102  | 49         | 1    | 0        | 0.4839            | 0.0499     | 0.3833 0.5773    |
| 109  | 48         | 0    | 1        | 0.4839            | 0.0499     | 0.3833 0.5773    |
| 110  | 47         | 1    | 0        | 0.4736            | 0.0499     | 0.3733 0.5673    |
| 131  | 46         | 0    | 1        | 0.4736            | 0.0499     | 0.3733 0.5673    |
| 149  | 45         | 1    | 0        | 0.4631            | 0.0499     | 0.3632 0.5571    |
| 153  | 44         | 1    | 0        | 0.4526            | 0.0499     | 0.3531 0.5468    |
| 165  | 43         | 1    | 0        | 0.4421            | 0.0498     | 0.3430 0.5364    |
| 180  | 42         | 0    | 1        | 0.4421            | 0.0498     | 0.3430 0.5364    |
| 186  | 41         | 1    | 0        | 0.4313            | 0.0497     | 0.3327 0.5258    |
| 188  | 40         | 1    | 0        | 0.4205            | 0.0497     | 0.3225 0.5152    |
| 207  | 39         | 1    | 0        | 0.4097            | 0.0495     | 0.3123 0.5045    |
| 219  | 38         | 1    | 0        | 0.3989            | 0.0494     | 0.3022 0.4938    |
| 263  | 37         | 1    | 0        | 0.3881            | 0.0492     | 0.2921 0.4830    |
| 265  | 36         | 0    | 1        | 0.3881            | 0.0492     | 0.2921 0.4830    |
| 285  | 35         | 2    | 0        | 0.3660            | 0.0488     | 0.2714 0.4608    |
| 308  | 33         | 1    | 0        | 0.3549            | 0.0486     | 0.2612 0.4496    |
| 334  | 32         | 1    | 0        | 0.3438            | 0.0483     | 0.2510 0.4383    |
| 340  | 31         | 1    | 1        | 0.3327            | 0.0480     | 0.2409 0.4270    |
| 342  | 29         | 1    | 0        | 0.3212            | 0.0477     | 0.2305 0.4153    |
| 370  | 28         | 0    | 1        | 0.3212            | 0.0477     | 0.2305 0.4153    |
| 397  | 27         | 0    | 1        | 0.3212            | 0.0477     | 0.2305 0.4153    |

|      |    |   |   |        |        |        |        |
|------|----|---|---|--------|--------|--------|--------|
| 427  | 26 | 0 | 1 | 0.3212 | 0.0477 | 0.2305 | 0.4153 |
| 445  | 25 | 0 | 1 | 0.3212 | 0.0477 | 0.2305 | 0.4153 |
| 482  | 24 | 0 | 1 | 0.3212 | 0.0477 | 0.2305 | 0.4153 |
| 515  | 23 | 0 | 1 | 0.3212 | 0.0477 | 0.2305 | 0.4153 |
| 545  | 22 | 0 | 1 | 0.3212 | 0.0477 | 0.2305 | 0.4153 |
| 583  | 21 | 1 | 0 | 0.3059 | 0.0478 | 0.2156 | 0.4008 |
| 596  | 20 | 0 | 1 | 0.3059 | 0.0478 | 0.2156 | 0.4008 |
| 620  | 19 | 0 | 1 | 0.3059 | 0.0478 | 0.2156 | 0.4008 |
| 670  | 18 | 0 | 1 | 0.3059 | 0.0478 | 0.2156 | 0.4008 |
| 675  | 17 | 1 | 0 | 0.2879 | 0.0483 | 0.1976 | 0.3844 |
| 733  | 16 | 1 | 0 | 0.2699 | 0.0485 | 0.1802 | 0.3676 |
| 841  | 15 | 0 | 1 | 0.2699 | 0.0485 | 0.1802 | 0.3676 |
| 852  | 14 | 1 | 0 | 0.2507 | 0.0487 | 0.1616 | 0.3497 |
| 915  | 13 | 0 | 1 | 0.2507 | 0.0487 | 0.1616 | 0.3497 |
| 941  | 12 | 0 | 1 | 0.2507 | 0.0487 | 0.1616 | 0.3497 |
| 979  | 11 | 1 | 0 | 0.2279 | 0.0493 | 0.1394 | 0.3295 |
| 995  | 10 | 1 | 0 | 0.2051 | 0.0494 | 0.1183 | 0.3085 |
| 1032 | 9  | 1 | 0 | 0.1823 | 0.0489 | 0.0985 | 0.2865 |
| 1141 | 8  | 0 | 1 | 0.1823 | 0.0489 | 0.0985 | 0.2865 |
| 1321 | 7  | 0 | 1 | 0.1823 | 0.0489 | 0.0985 | 0.2865 |
| 1386 | 6  | 1 | 0 | 0.1519 | 0.0493 | 0.0713 | 0.2606 |
| 1400 | 5  | 0 | 1 | 0.1519 | 0.0493 | 0.0713 | 0.2606 |
| 1407 | 4  | 0 | 1 | 0.1519 | 0.0493 | 0.0713 | 0.2606 |
| 1571 | 3  | 0 | 1 | 0.1519 | 0.0493 | 0.0713 | 0.2606 |
| 1586 | 2  | 0 | 1 | 0.1519 | 0.0493 | 0.0713 | 0.2606 |
| 1799 | 1  | 0 | 1 | 0.1519 | 0.0493 | 0.0713 | 0.2606 |

## Logiciels

**SAS :** l'estimation de Kaplan-Meier est affichée par défaut par la proc `lifetest`.  
**Attention :** le tableau donné par SAS est particulièrement pénible à lire voire illisible, en particulier lorsque le nombre de censure est élevé, une ligne est ajoutée pour chaque observation censurée. Je conseille de ne pas afficher cette partie de l'output (voir chapitre SAS). On récupère pour le reste de l'output les valeurs de la durée pour S(t) =(.75,.5,.25) ainsi que le graphique, ce qui est suffisant.

**Stata :** en mode survie (`stset`), le tableau des estimateurs est donnée par la commande `sts list` et le graphique par `sts graph`.

**R :** les estimateur sont donnés par la fonction `survfit` de la librairie `survival`.

**Python:** les résultats sont donnés dans la librairie `lifeline` par des fonctions dont le nom est tout bonnement interminable. Je conseille plutôt l'utilisation de la librairie `statmodels` (se reporter à la session dédiée à Python).

### Exercice

Calculer la fonction de survie  $S$  avec un tableur.

| t   | d | c | r | q | S |
|-----|---|---|---|---|---|
| 0   | 0 | 0 |   |   |   |
| 6   | 1 | 0 |   |   |   |
| 19  | 1 | 0 |   |   |   |
| 32  | 1 | 0 |   |   |   |
| 42  | 2 | 0 |   |   |   |
| 43  | 0 | 1 |   |   |   |
| 94  | 1 | 0 |   |   |   |
| 126 | 0 | 2 |   |   |   |
| 207 | 1 | 0 |   |   |   |
| 227 | 0 | 2 |   |   |   |
| 253 | 1 | 0 |   |   |   |
| 255 | 0 | 1 |   |   |   |

d= nombre d'évènements en t

c = nombre de censure en t

r = risk set en t

q= quotient mesurant l'intensité de l'évènement en t

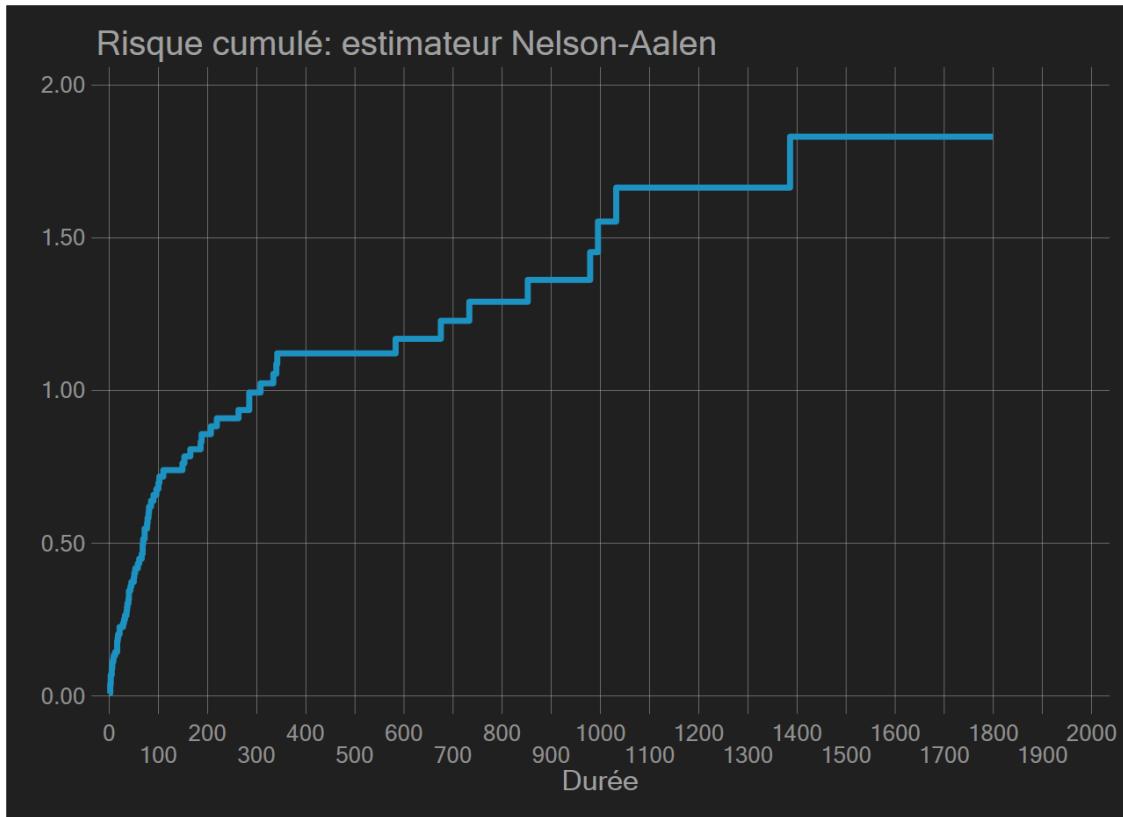
S= valeur de la survie en t

### Quantités associées

#### Le risque cumulé

On utilise habituellement l'estimateur de Nelson-Aalen. Il est simplement égal à:

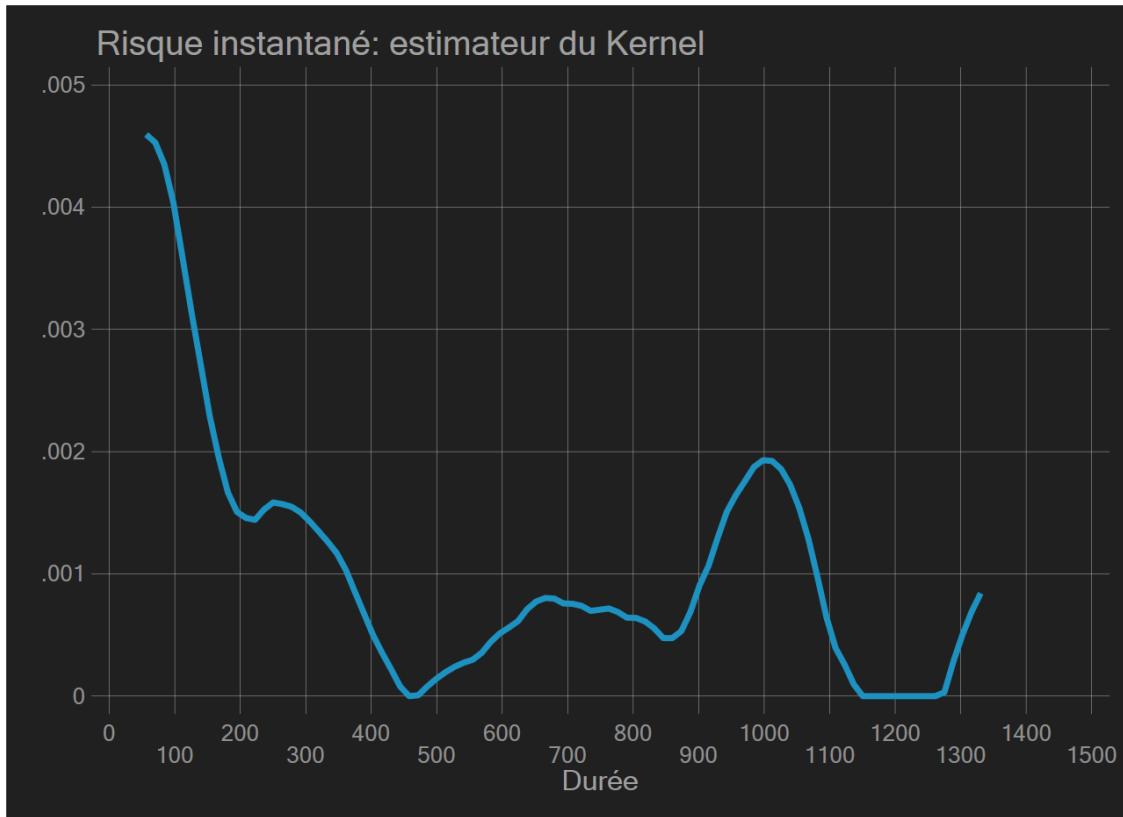
$$H(t) = \sum_{t_i \leq k} q(t_i)$$



On peut également utiliser l'estimateur de Breslow qui tire directement les Valeurs de  $H(t)$  de la relation  $S(t) = e^{-H(t)}$ . Donc  $H(t) = -\log S(t)$ .

### Le risque instantané

Nécessite l'estimateur de l'incidence cumulée ( $H(t)$ ). L'estimation du risque instantané est obtenu en lissant les différences - par définition positive - entre  $H(t)$  par une méthode du noyau (**kernel**). Elle permet d'obtenir une fonction continue avec la durée (paramétrables sur les largeurs des fenêtres de lissage). D'autres méthodes de lissage sont maintenant possibles, et de plus en plus utilisées, en particulier celles utilisant des splines cubiques restreintes (paramétrable sur un nombre de degré de liberté - noeuds-).



## Tester l'égalité des courbes de survie (méthode KM)

Les tests d'égalités des fonctions de survie entre différentes valeurs d'une covariable sont calculés à partir de la méthode de Kaplan Meier. L'utilisation d'un test correspond à la nécessité de déterminer si une même distribution gouverne les événements observés dans les différentes strates ou les différents échantillons.

Attention : pas de test possibles sur des variables continues. Il faudra donc prévoir des regroupements pour les transformer en variable ordinaire.

Deux méthodes sont utilisées :

- La plus ancienne et la plus diffusée : tests sur les rangs ou tests du **log-rank**.
- Plus récente et moins diffusée: comparaison des **RMST** (*Restricted Mean of Survival Time*).

## Tests du log-rank

Il s'agit d'une série de tests qui répondent à la même logique, la seule différence réside dans le poids accordé au début ou à la fin de la période d'observation. Par ailleurs ces différents tests sont plus ou moins sensibles à la distribution des censures à droites entre les sous échantillons. Ils entrent dans le cadre des tests dits du Khi2, même si formellement ils relèvent des techniques dites de rang, d'où leur nom. Rang

car on ne s'intéresse pas directement aux durées entre les événements mais entre les rangs d'occurrence.

Il s'agit donc de comparer des effectifs observés à des effectifs espérés à chaque temps d'événement. La principale différence réside avec un test standard du Khi2 dans le calcul de la variance de la statistique du test qui, ici, suit une loi hypergéométrique (très proche de la loi binomiale, adaptée aux tirage sans remise, ce qui est adaptée ici avec des sorties d'observation au cours du temps).

### Principe de calcul

#### Effectifs observés en $t_i$

$o_{i1}$  et  $o_{i2}$  sont égaux à  $d_{i1}$  et  $d_{i2}$ , et leur somme pour tous les temps d'événement à  $O_1$  et  $O_2$ .

#### Effectifs espérés (hypothèse nulle $H_0$ )

Comme pour la statistique du test standard du  $\chi^2$  on se base sur les marges, avec ici le risque set ( $R_i$ ) en  $t_i$ , soit  $e_{i1} = R_{i1} \times \frac{d_i}{R_i}$  et  $e_{i2} = R_{i2} \times \frac{d_i}{R_i}$ . Leur somme pour tous les temps d'événement est égal à  $E_1$  et  $E_2$ .

*Le principe de calcul des effectifs espérés repose donc sur l'hypothèse d'un rapport des risques toujours égal à 1 au cours de la période d'observation (hypothèse fondamentale de risque proportionnel).*

Les écarts entre effectifs observés et espérés doivent également respecter cette hypothèse. Si les courbes de séjour ne sont pas homogènes, alors cette non homogénéité doit reposer sur des écarts constants au cours du temps. La validité de ce test repose aussi sur cette hypothèse.

#### Statistique du log-rank

$$(O_1 - E_1) = -(O_2 - E_2).$$

#### Statistique de test:

Sous  $H_0$ ,  $\frac{(O_1 - E_1)^2}{\sum v_i}$ , avec  $v_i$  la variance de  $(o_{i1} - e_{i2})$ , la statistique suis un  $\chi^2(1)$ .

Si on teste la différence de  $g$  fonctions de survie, la statistique de test suis un  $\chi^2(g - 1)$ .

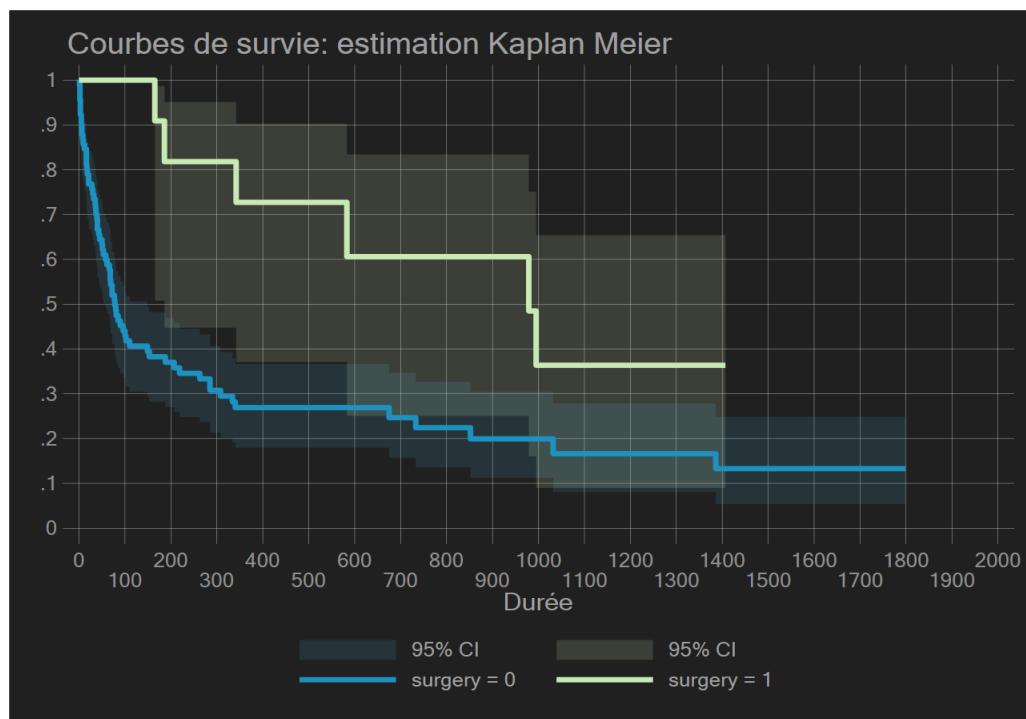
### Les principaux tests de type log-rank

Le principe de construction des effectifs observés et espérés reste le même dans chaque test, les différences résident dans les pondérations ( $w_i$ ) qui prennent en compte, de manière différente, la taille de la population soumise au risque à chaque durée où au moins un événement est observé. Outre le problème de proportionnalité, la validité du test du log-rank repose également sur une distribution des censures homogènes entre les différents groupes qui sont comparés, car la présence de censures affecte la valeur du risk set au cours du temps.

- **Test du log-rank (standard):**  $w_i = 1$   
Il accorde le même poids à toutes les durées d'évènement. C'est le test standard. Il est très sensible aux distribution des censures.
- **Test de Wilcoxon-Breslow-Gehan:**  $w_i = R_i$   
Les écarts entre effectifs observés et espérés sont pondérés par la population soumise à risque en  $t_i$ . Le test accorde plus de poids au début de la période analysée, et il est sensible aux différences de distributions des observations censurées dans chaque groupe.
- **Test de Tarone-Ware:**  $w_i = \sqrt{R_i}$   
Variante du test précédent, il atténue le poids accordé aux évènements au début de la période d'observation. Il est par ailleurs moins sensible au problème de la distribution des censures entre les groupes. A utiliser si le nombre de censures est faible et qu'on ne privilégie pas trop le début de la durée d'observation.
- **Test de Peto-Peto :**  $w_i = S_i$   
La pondération est une variante de la fonction de survie KM (avec  $R_i = R_i + 1$ ). Le test n'est pas sensible au problème de distribution des censures. Il accorde un poids important au début de la période d'observation, mais moins qu'avec les deux versions précédentes. A utiliser lorsque le nombre de censures est élevé.
- **Test de Fleming-Harington:**  $w_i = (S_i)^p \times (1 - S_i)^q$  avec  $0 \leq p \leq 1$  Il permet de paramétriser le poids accordé au début ou à la fin de temps d'observation. Si  $p = q = 0$  on retrouve le test du log-rank.

### Exemple

On compare ici « l'effet » d'un pontage sur le risque de décéder depuis l'inscription dans le registre de greffe.



#### Log-rank test for equality of survivor functions

| surgery                            | Events observed | Events expected |
|------------------------------------|-----------------|-----------------|
| 0                                  | 69              | 60.34           |
| 1                                  | 6               | 14.66           |
| Total                              | 75              | 75.00           |
| chi2(1) = 6.59<br>Pr>chi2 = 0.0103 |                 |                 |

#### Wilcoxon (Breslow) test for equality of survivor functions

| surgery                            | Events observed | Events expected | Sum of ranks |
|------------------------------------|-----------------|-----------------|--------------|
| 0                                  | 69              | 60.34           | 623          |
| 1                                  | 6               | 14.66           | -623         |
| Total                              | 75              | 75.00           | 0            |
| chi2(1) = 8.99<br>Pr>chi2 = 0.0027 |                 |                 |              |

#### Tarone-Ware test for equality of survivor functions

| surgery | Events observed | Events expected | Sum of ranks |
|---------|-----------------|-----------------|--------------|
| 0       | 69              | 60.34           | 73.111827    |
| 1       | 6               | 14.66           | -73.111827   |
| Total   | 75              | 75.00           | 0            |

```

chi2(1) =      8.46
Pr>chi2 =    0.0036

Peto-Peto test for equality of survivor functions



| surgery | Events observed | Events expected | Sum of ranks |
|---------|-----------------|-----------------|--------------|
| 0       | 69              | 60.34           | 6.0529913    |
| 1       | 6               | 14.66           | -6.0529913   |
| Total   | 75              | 75.00           | 0            |


chi2(1) =      8.66
Pr>chi2 =    0.0033

```

Les résultats font apparaître que l'opération permet d'accroître la durée de vie des personnes.

## Logiciels

**Sas:** le test non pondéré et la version Wilcoxon sont données avec l'option strata de la proc lifetest. Attention : ne jamais utiliser la version LR Test qui est biaisée. Pour obtenir d'autres versions du test du log-rank, on ajoute /test=all à l'option strata.

**Stata:** on utilise la commande sts test avec le nom de la version du test si on ne souhaite pas récupérer toutes les variantes.

**R:** on utilise la fonction survdiff. Le résultat du test de Peto-Peto est affiché par défaut ( $\rho=1$ ). Si on souhaite utiliser le test non pondéré, on ajoute l'option  $\rho=0$ . En particulier pour les tests multiples (plus d'un degré de liberté), on peut utiliser la fonction pairwise\_survdiff de la librairie survminer.

**Python:** Avec la librairie lifelines, on utilise la fonction logrank\_test. Quatre variantes sont disponibles (Wilcoxon, Tarone-Ware, Peto-Peto et Fleming-Harrington). On peut également utiliser la fonction duration.survdiff de statmodels (non pondéré, Wilcoxon - appelé ici Breslow- et Tarone-Ware).

## En pratique/remarques:

- Les tests du log-rank sont sensibles à l'hypothèse de risque proportionnel (voir modèle **Semi-paramétrique de Cox**). En pratique si des courbes de séjours se croisent, il est déconseillé de les utiliser. Cela ne signifie pas que si les courbes ne se croisent pas, l'hypothèse de proportionnalité des risques est respectée : des rapports de risque peuvent au cours du temps s'accentuer, se réduire ou le cas échéant s'inverser (typique d'un croisement).
- Effectuer un test global (multiple/omnibus) sur un nombre important de groupes (ou >2) peut rendre le test très facilement significatif. Il peut être intéressant de tester des courbes deux à deux (idem qu'une régression avec covariable discrète), en conservant un seul degré de liberté. Des méthodes de correction du test multiple sont possibles.

## Comparaison des RMST

### RMST: *Restricted Mean of Survival Time*

La comparaison des RMST est une alternative pertinente aux tests du log-rank car elle ne repose pas sur des hypothèses contraignantes (proportionnalité des risques, distribution des censures), et permet une lecture plus vivante basée sur des espérances de séjour/vie et non sur la lecture d'une simple *p-value* traduisant l'homogénéité ou non de fonctions. Par ailleurs les comparaisons sont souples, on peut choisir un ou plusieurs points d'horizon pour alimenter l'analyse.

#### Principe

- L'aire sous la fonction de survie représente la durée moyenne d'attente de l'évènement, soit l'espérance de survie à l'évènement. On est très proche d'une mesure en analyse démographique type « **espérance de vie partielle** ».
- En présence de censures à droite, il faut borner la durée maximale  $t^* < \infty$ . L'espérance de survie s'interprète donc sur un horizon fini.
- $RMST = \int_0^{t^*} S(t)dt$ .
- On peut facilement comparer les RMST de deux groupes, en termes de différence ou de ratio. Et donc réaliser des tests simples, comme celui d'une différence entre deux moyennes.
- Par défaut on définit généralement  $t^*$  à partir le temps du dernier évènement observé. Il est néanmoins possible de calculer la RMST sur des intervalles plus court, ce qui lui permet une véritable souplesse au niveau de l'analyse.

#### Logiciels

**SAS** : depuis la version 15.1 de SAS/Stat (fin 2018). Les estimations et le résultat du test de comparaison sont récupérables très simplement dans une `proc lifetest`. Bien que sortie tardivement par rapport aux autres application standard, les résultats sont particulièrement complets. Remarque Ined : pour les personnes travaillant avec Sas Studio, on est dans l'attente de la maj de la version Linux. Les Rmst ne sont, à ce jour, exécutables.

**Stata** : commande externe `strmst2`. La plus ancienne fonction proposée par les logiciels. Au final plus limitée que la solution Sas. J'ai programmé une commande, `diffrmst`, qui représente graphiquement les estimations des Rmst à chaque temps d'évènement, leurs différences et les p-value issues des comparaisons.

**R** : librairie `SurvRm2`. Programmée par les mêmes personnes que la commande Stata, la fonction est peu souple, et mériterait un coup de polish

Python : estimation avec une fonction de la librairie **lifelines**. Pas de test de comparaison.

| Restricted Mean Survival Time (RMST) by arm |          |           |                      |         |
|---|----------|-----------|----------------------|---------|
| Group                                       | Estimate | Std. Err. | [95% Conf. Interval] |         |
| arm 1                                       | 734.758  | 133.478   | 473.145              | 996.370 |
| arm 0                                       | 310.169  | 43.158    | 225.581              | 394.757 |

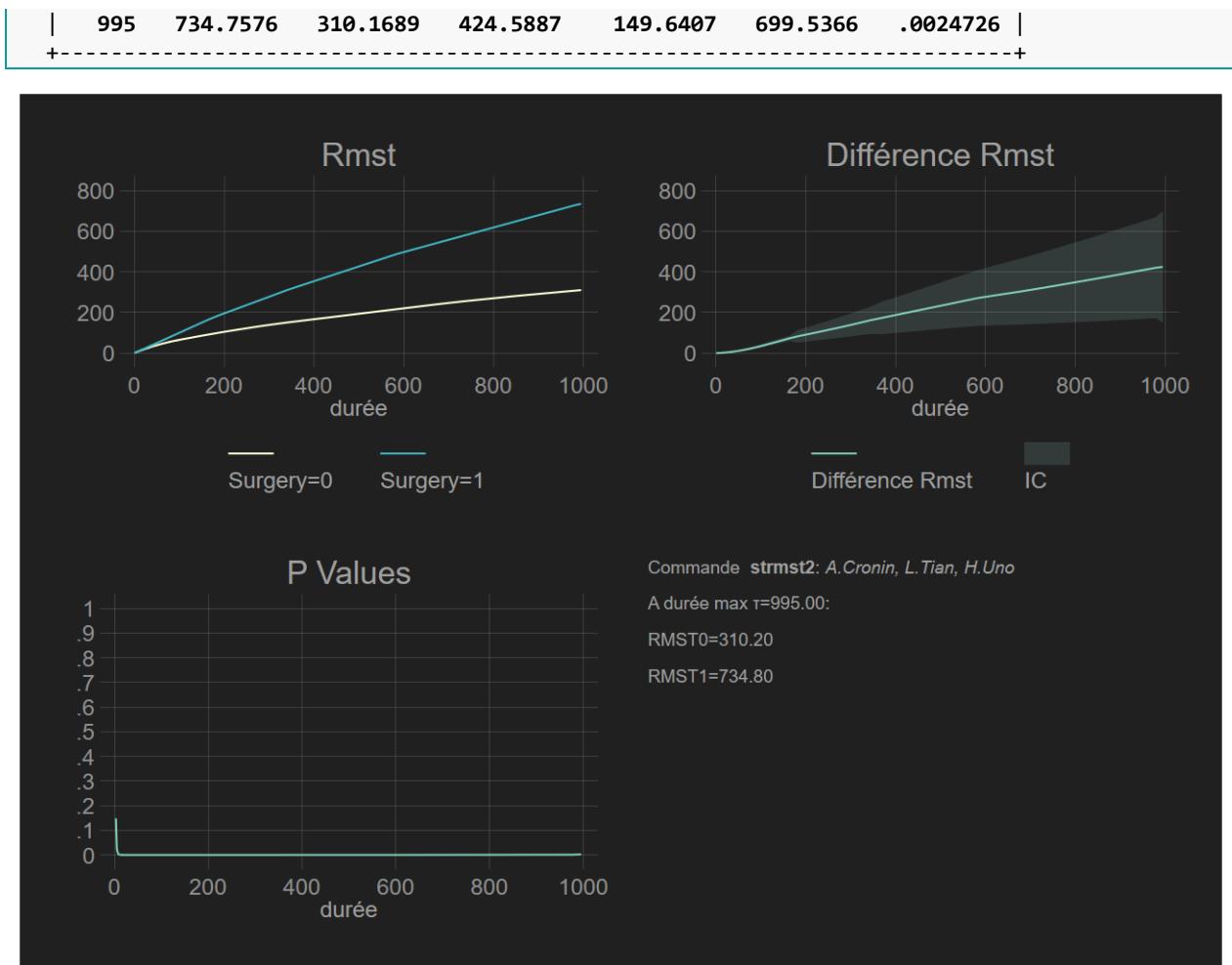
| Between-group contrast (arm 1 versus arm 0) |          |                      |         |       |
|---|----------|----------------------|---------|-------|
| Contrast                                    | Estimate | [95% Conf. Interval] | P> z    |       |
| RMST (arm 1 - arm 0)                        | 424.589  | 149.641              | 699.537 | 0.002 |
| RMST (arm 1 / arm 0)                        | 2.369    | 1.513                | 3.710   | 0.000 |

Ici  $t^*$  est égal à 995 jours, soit la durée qui correspond au dernier décès observé lorsqu'une personne a été opérée pour un pontage (surgery=1). Sur cet horizon, les personnes qui ont été opérées peuvent espérer vivre 735 jours en moyenne, contre 310 jours pour les autres. La durée moyenne de survie est donc deux fois plus importante (rapport des rmst = 2.3 ), soit une différence de 424 jours.

*Rmst et différences de Rmst à tous les points d'évènement jusqu'à tmax*

| _time | _rmst1 | _rmst0   | _diff    | _l        | _u       | _p       |
|-------|--------|----------|----------|-----------|----------|----------|
| 1     | 1      | 1        | 0        | 0         | 0        | .        |
| 2     | 2      | 1.989011 | .010989  | .010989   | .010989  | .        |
| 3     | 3      | 2.945055 | .0549451 | -.0196757 | .1295658 | .1489731 |
| 5     | 5      | 4.791209 | .2087912 | .0256584  | .3919241 | .0254456 |
| 5.1   | 5.1    | 4.882418 | .2175824 | .0240373  | .4111275 | .0275679 |
| 6     | 6      | 5.693407 | .3065934 | .0643487  | .5488381 | .0131162 |
| 8     | 8      | 7.451648 | .5483516 | .1860869  | .9106163 | .0030096 |
| 9     | 9      | 8.31978  | .6802198 | .2523926  | 1.108047 | .0018318 |
| 11    | 11     | 10.03407 | .965934  | .4072903  | 1.524578 | .0007017 |
| 12    | 12     | 10.89121 | 1.108791 | .4836155  | 1.733967 | .0005087 |
| 16    | 16     | 14.27525 | 1.724747 | .8259398  | 2.623554 | .0001692 |
| 17    | 17     | 15.08787 | 1.912131 | .9277063  | 2.896555 | .0001407 |
| 18    | 18     | 15.88935 | 2.110646 | 1.05301   | 3.168283 | .0000918 |
| 21    | 21     | 18.26041 | 2.739589 | 1.458002  | 4.021176 | .0000279 |
| 28    | 28     | 23.63703 | 4.362966 | 2.526501  | 6.199431 | 3.22e-06 |
| 30    | 30     | 25.15095 | 4.849051 | 2.842812  | 6.85529  | 2.17e-06 |
| 31    | 31     | 25.89677 | 5.103226 | 3.014868  | 7.191583 | 1.67e-06 |
| 32    | 32     | 26.6426  | 5.3574   | 3.186886  | 7.527915 | 1.31e-06 |
| 35    | 35     | 28.84618 | 6.153824 | 3.736433  | 8.571216 | 6.06e-07 |
| 36    | 36     | 29.5694  | 6.4306   | 3.929635  | 8.931564 | 4.67e-07 |
| 37    | 37     | 30.28132 | 6.718675 | 4.135427  | 9.301923 | 3.44e-07 |
| 39    | 39     | 31.68257 | 7.317427 | 4.569757  | 10.0651  | 1.79e-07 |
| 40    | 40     | 32.37189 | 7.628103 | 4.797789  | 10.45842 | 1.28e-07 |
| 43    | 43     | 34.37207 | 8.627934 | 5.552385  | 11.70349 | 3.83e-08 |

|            |                 |                 |                 |                 |                 |                 |          |  |
|------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|--|
|            | 45              | 45              | 35.68291        | 9.31709         | 6.07508         | 12.5591         | 1.77e-08 |  |
| 50         | 50              | 38.90352        | 11.09648        | 7.431942        | 14.76102        | 2.94e-09        |          |  |
| 51         | 51              | 39.53634        | 11.46366        | 7.711818        | 15.2155         | 2.12e-09        |          |  |
| 53         | 53              | 40.77938        | 12.22061        | 8.298259        | 16.14297        | 1.02e-09        |          |  |
| 58         | 58              | 43.83049        | 14.16951        | 9.81571         | 18.52331        | 1.79e-10        |          |  |
| 61         | 61              | 45.62725        | 15.37275        | 10.75502        | 19.99047        | 6.81e-11        |          |  |
| 66         | 66              | 48.56535        | 17.43465        | 12.37503        | 22.49426        | 1.44e-11        |          |  |
| 68         | 68              | 49.71799        | 18.28201        | 13.04371        | 23.5203         | 7.90e-12        |          |  |
| 69         | 69              | 50.27171        | 18.72829        | 13.40325        | 24.05333        | 5.45e-12        |          |  |
| 72         | 72              | 51.89897        | 20.10103        | 14.51838        | 25.68369        | 1.70e-12        |          |  |
| 77         | 77              | 54.49805        | 22.50194        | 16.49285        | 28.51104        | 2.14e-13        |          |  |
| 78         | 78              | 55.00657        | 22.99343        | 16.89797        | 29.08889        | 1.43e-13        |          |  |
| 80         | 80              | 56.00101        | 23.99899        | 17.73478        | 30.26321        | 5.97e-14        |          |  |
| 81         | 81              | 56.48692        | 24.51307        | 18.16526        | 30.86089        | 3.77e-14        |          |  |
| 85         | 85              | 58.38539        | 26.61461        | 19.93458        | 33.29464        | 5.77e-15        |          |  |
| 90         | 90              | 60.70197        | 29.29803        | 22.1984         | 36.39766        | 6.66e-16        |          |  |
| 96         | 96              | 63.41406        | 32.58594        | 24.97681        | 40.19506        | 0               |          |  |
| 100        | 100             | 65.17693        | 34.82308        | 26.87198        | 42.77418        | 0               |          |  |
| 102        | 102             | 66.03575        | 35.96425        | 27.84368        | 44.08482        | 0               |          |  |
| 109        | 109             | 68.96255        | 40.03745        | 31.32724        | 48.74766        | 0               |          |  |
| 110        | 110             | 69.38067        | 40.61933        | 31.82339        | 49.41528        | 0               |          |  |
| 131        | 131             | 77.91717        | 53.08283        | 42.46146        | 63.7042         | 0               |          |  |
| 149        | 149             | 85.23417        | 63.76583        | 51.49939        | 76.03227        | 0               |          |  |
| 153        | 153             | 86.81235        | 66.18765        | 53.54893        | 78.82638        | 0               |          |  |
| 165        | 165             | 91.4034         | 73.5966         | 59.87845        | 87.31474        | 0               |          |  |
| 180        | 178.6364        | 97.14223        | 81.49413        | 51.34782        | 111.6404        | 1.17e-07        |          |  |
| 186        | 184.0909        | 99.43776        | 84.65315        | 53.34505        | 115.9613        | 1.16e-07        |          |  |
| 188        | 185.7273        | 100.2029        | 85.52434        | 53.56977        | 117.4789        | 1.56e-07        |          |  |
| 207        | 201.2727        | 107.2376        | 94.0351         | 58.18815        | 129.8821        | 2.73e-07        |          |  |
| 219        | 211.0909        | 111.5325        | 99.55843        | 61.16676        | 137.9501        | 3.72e-07        |          |  |
| 263        | 247.0909        | 126.7373        | 120.3536        | 72.25138        | 168.4559        | 9.40e-07        |          |  |
| 265        | 248.7273        | 127.4037        | 121.3235        | 72.75741        | 169.8897        | 9.77e-07        |          |  |
| 285        | 265.0909        | 134.0682        | 131.0227        | 77.89536        | 184.1501        | 1.34e-06        |          |  |
| 308        | 283.9091        | 141.1427        | 142.7664        | 84.36629        | 201.1664        | 1.66e-06        |          |  |
| 334        | 305.1818        | 148.8068        | 156.375         | 91.96277        | 220.7872        | 1.95e-06        |          |  |
| 340        | 310.0909        | 150.4986        | 159.5923        | 93.78695        | 225.3977        | 2.00e-06        |          |  |
| 342        | 311.7273        | 151.0369        | 160.6904        | 94.42397        | 226.9568        | 2.01e-06        |          |  |
| <b>370</b> | <b>332.0909</b> | <b>158.5728</b> | <b>173.5181</b> | <b>93.67896</b> | <b>253.3572</b> | <b>.0000205</b> |          |  |
| 397        | 351.7273        | 165.8396        | 185.8876        | 98.91358        | 272.8617        | .000028         |          |  |
| 427        | 373.5454        | 173.9138        | 199.6316        | 104.6545        | 294.6087        | .0000379        |          |  |
| 445        | 386.6364        | 178.7584        | 207.878         | 108.0686        | 307.6874        | .0000446        |          |  |
| 482        | 413.5454        | 188.7166        | 224.8289        | 115.0297        | 334.6281        | .0000599        |          |  |
| 515        | 437.5454        | 197.5982        | 239.9472        | 121.1866        | 358.7078        | .000075         |          |  |
| 545        | 459.3636        | 205.6725        | 253.6912        | 126.7507        | 380.6316        | .0000897        |          |  |
| 583        | 487             | 215.8998        | 271.1002        | 133.7623        | 408.438         | .0001093        |          |  |
| 596        | 494.8788        | 219.3987        | 275.4801        | 134.5264        | 416.4339        | .0001279        |          |  |
| 620        | 509.4243        | 225.858         | 283.5662        | 136.4692        | 430.6632        | .0001579        |          |  |
| 670        | 539.7273        | 239.3151        | 300.4122        | 140.0713        | 460.7531        | .0002405        |          |  |
| 675        | 542.7576        | 240.6608        | 302.0968        | 140.4026        | 463.7909        | .0002504        |          |  |
| 733        | 577.9091        | 254.9701        | 322.939         | 145.3689        | 500.509         | .0003645        |          |  |
| 841        | 643.3636        | 279.1928        | 364.1708        | 155.9437        | 572.3979        | .0006085        |          |  |
| 852        | 650.0303        | 281.6599        | 368.3704        | 156.9483        | 579.7925        | .000638         |          |  |
| 915        | 688.2121        | 294.2198        | 393.9923        | 164.2457        | 623.7389        | .0007762        |          |  |
| 941        | 703.9697        | 299.4033        | 404.5664        | 167.1596        | 641.9732        | .0008378        |          |  |
| 979        | 727             | 306.9791        | 420.0209        | 171.3309        | 668.7109        | .0009321        |          |  |



Si on se limite à un horizon d'un an après l'inscription dans le registre (ici 370 jours), les personnes qui ont bénéficiées d'un pontage peuvent espérer survivre en moyenne 173 jours de plus que les personnes qui n'ont pas été opérées.

#### Remarques:

- Comme l'estimateur de la Rmst est calculé comme une aire sous la fonction de séjour KM, on peut calculer l'aire au-dessus. L'estimateur obtenu est appelé **Restricted Mean of Time Loss** (Rmtl). Les logiciels proposent également cette estimation.
- Un modèle basé sur les Rmst a été proposé. Après quelques tests il me semble mal supporter la complexité souvent inhérente aux modèles dans les sciences sociales. Il supporte visiblement un nombre très limité de covariables (en médecine une variable d'intérêt de type traitement, et un nombre limité de contrôle type âge sexe).

# Les modèles à risques proportionnels

## Introduction aux modèles à risques proportionnels

La spécification usuelle est:

$$h(t) = h_0(t) \times e^{X'b}$$

- $h(t)$  est une fonction de risque (instantané).
- $h_0(t)$  est une fonction qui dépend du temps mais pas des caractéristiques individuelles. Il définira le risque de base (baseline).
- $e^{X'b}$  est une fonction qui ne dépend pas du temps, mais des caractéristiques individuelles avec  $X'b = \sum_{k=1}^p b_k X_k$ . La forme exponentielle assure la positivité du risque.

### Le risque de base

- $h(t) = h_0(t)$  donc  $e^{X'b} = 1$
- Observations pour lesquelles  $X = 0$
- Il joue donc le rôle de constante

### Risques proportionnels

Cette hypothèse stipule l'invariance dans le temps des « rapports de risque» (Hazard Ratios).

Exemple:

Une seule covariable  $X$  est introduite, et soit 2 individus  $A$  et  $B$ :  $h_A(t) = h_0(t)e^{bX_A}$  et  $h_B(t) = h_0(t)e^{bX_B}$ .

Les rapport des risques entre  $A$  et  $B$  est égal à:

$$\frac{h_A(t)}{h_B(t)} = \frac{e^{bX_A}}{e^{bX_B}} = e^{b(X_A - X_B)}$$

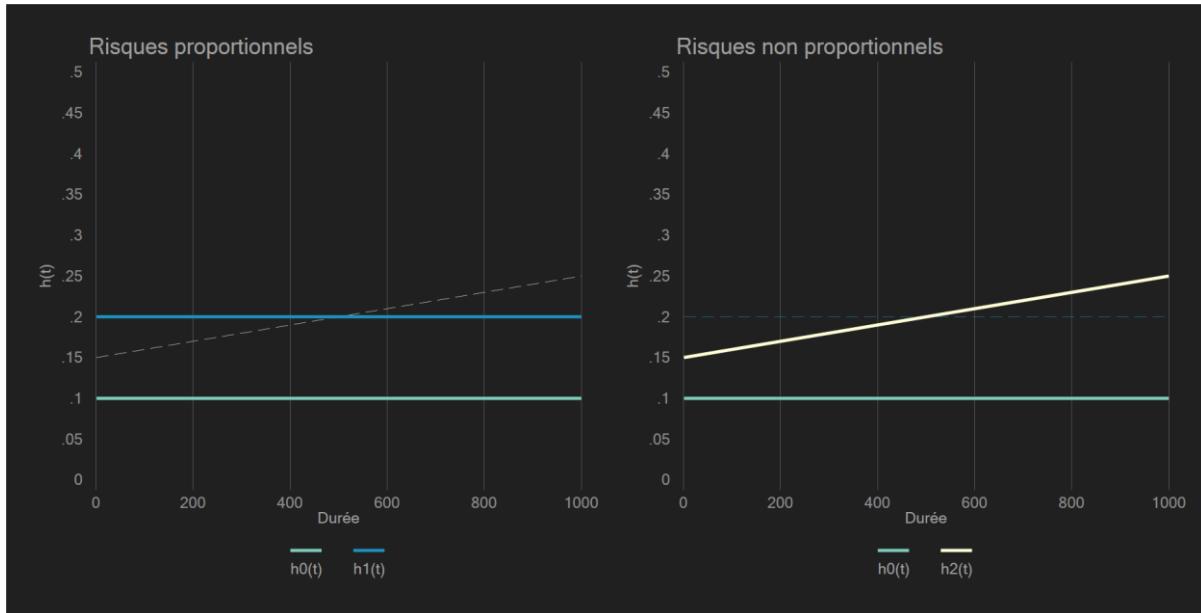
Pour une caractéristique binaire:  $X_A = 1$  et  $X_B = 0$ :

$$\frac{h_A(t)}{h_B(t)} = e^b$$

Autrement dit, la proportionnalité des risques traduit l'absence d'une interaction significative entre les rapports de risque estimés et la durée. Mais également, la

proportionnalité des risques implique que toutes les observations partagent un profil homogène de risque durant la période d'observation.

### Illustration graphique



On part d'un modèle à risque constant avec  $h_0(t) = 0.1$ .

Comme  $h_1(t) = 0.2$  quel que soit  $t$ , le rapport des risques est toujours égal à  $\frac{0.2}{0.1} = 2 = e^b$ . Le coefficient estimé sera égal à  $\log(2) = 0.69$ .

Pour  $h_{1b}(t)$ , le rapport des risques augmente avec le temps:  $t = 1$ ,  $h_{1b}(1) = 0.15$  et  $h_{1b}(1000) = 0.25$  l'hypothèse de proportionnalité n'est donc pas respectée.

Néanmoins, estimé par un modèle à risque proportionnel comme celui de Cox, l'estimateur sera égal à .69 (rapport de risques =2).

### Les modèles

#### *Le modèle semi-paramétrique de Cox*

Le modèle estime directement les  $b$  indépendamment de  $h_0(t)$ , c'est pour cela qu'il est semi-paramétrique. Les rapports des risques ( $e^b$ ) sont utilisés pour estimer la baseline  $h_0(t)$  nécessaire si on souhaite calculer des fonctions de survie ajustée. Le respect de l'hypothèse de proportionnalité va alors s'avérer importante et donc être testée.

#### Les modèles à temps discret

De type paramétrique. Peut être estimé à l'aide d'un modèle logistique, probit ou complémentaire log-log. La première est la plus courante, la dernière a l'avantage d'être directement relié au modèle de Cox (modèle de Cox à temps discret).

Cas particulier car sa forme diffère de la présentation usuelle d'un modèle à risque proportionnel. Toutefois, il est régi par une hypothèse de proportionnalité. Le non respect de l'hypothèse est moins critique car la baseline du « risque » est estimée simultanément. Il est comme son nom l'indique, particulièrement adapté au durées discrètes/groupées. Le modèle de Cox est une réponse à une possible difficulté dans l'ajustement du risque par une loi a priori (modèles paramétriques standards).

Avec une spécification logistique, la plus courante, les Odds vont sous certaines conditions, se confondre avec des probabilités/risques.

### Les modèles paramétriques standard

Les modèles dits de **Weibull**, **exponentiel** ou **Gompertz** ont une spécification sous hypothèse de risques proportionnels. Ils seront traités brièvement dans les compléments.

### Modèle paramétrique de Parmar-Royston (non traité)

$h_0(t)$ , via le risque cumulé  $H(t)$ , est estimé simultanément avec les risk ratios (RR) en utilisant la populaire méthode des splines cubiques. Il est implémenté dans les logiciels standards (R, Stata, Sas). Les RR sont très proches de ceux estimés par le modèle classique de Cox.

Il offre donc une alternative particulièrement intéressante à celui-ci, et il est maintenant largement diffusé dans l'analyse des effets cliniques.

# Le modèle semi-paramétrique de Cox

On peut ignorer la partie sur l'estimation du modèle. On retiendra tout de même, que pour la correction de la vraisemblance, il est déconseillé de tester la méthode dite exacte qui ne peut fonctionner matériellement qu'avec un nombre très limité d'évènements observés simultanément, ce qui est plutôt rare avec des données à durées discrètes ou groupées, classique dans les sciences sociales.

## Vraisemblance partielle et estimation des paramètres

On se situe dans une situation où la durée est mesurée sur une échelle strictement continue. Il ne peut donc y avoir qu'un seul évènement observé en  $t_i$  (idem pour les censures).

Pour une observation quelconque en  $t_i$ , correspondant à un seul individu en temps continu, soit on observe l'évènement soit on observe une censure. La contribution d'un individu à la vraisemblance peut s'écrire :

$$L_i = f(t_i)^{\delta_i} S(t_i)^{1-\delta_i}$$

$f(t_i)$  est la valeur de la fonction de densité en  $t_i$ .

$S(t_i)$  est la valeur de la fonction de survie en  $t_i$ .

$\delta_i = 1$  si l'évènement est observé:  $L_i = f(t_i)$ .

$\delta_i = 0$  si l'observation est censurée:  $L_i = S(t_i)$ .

Comme  $f(t_i) = h(t_i) \times S(t_i)$ , on obtient:

$$L_i = [h(t_i)S(t_i)]^{\delta_i} S(t_i)^{1-\delta_i} = h(t_i)^{\delta_i} S(t_i)$$

Pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , la vraisemblance totale s'écrit donc:  $L_i = \prod_{i=1}^n h(t_i)^{\delta_i} S(t_i)$

On peut réécrire cette vraisemblance en la multipliant et en la divisant par  $\sum_{j \in R_i} h(t_j)$ , où  $j \in R_i$  est l'ensemble des observations soumises au risque en  $t_i$ .

$$L = \prod_{i=1}^n \left[ h(t_i) \times \frac{\sum_{j \in R_i} h(t_j)}{\sum_{j \in R_i} h(t_j)} \right]^{\delta_i} \times S(t_i) = \prod_{i=1}^n \left[ \frac{h(t_i)}{\sum_{j \in R_i} h(t_j)} \right]^{\delta_i} \sum_{j \in R_i} h(t_j)^{\delta_i} \times S(t_i)$$

La vraisemblance partielle ne retient le premier terme de la vraisemblance, soit:

$$PL = \prod_{i=1}^n \left[ \frac{h(t_i)}{\sum_{j \in R_i} h(t_j)} \right]^{\delta_i}$$

Une fois remplacée la valeur de  $h(t_i)$  par son expression en tant que modèle à risque proportionnel, la vraisemblance partielle ne dépendra plus de la durée. Mais elle va dépendre de l'ordre d'arrivée des évènements, c'est-à-dire leur rang.

Remarque: pour les observations censurées ( $\delta_i = 0$ ) ,  $PL = 1$ . Toutefois, ces censures à droite vont entrer dans l'expression  $\sum_{j \in R} h(t_j)$  tant qu'elles sont soumises au risque.

En remplaçant donc  $h(t_i)$  par l'expression  $h_0(t)e^{X_i'b}$ :

$$PL = \prod_{i=1}^n \left[ \frac{h_0(t_i)e^{X_i'b}}{\sum_{j \in R_i} h_0(t_j)e^{X_j'b}} \right]^{\delta_i} = \prod_{i=1}^n \left[ \frac{e^{X_i'b}}{\sum_{j \in R_i} e^{X_j'b}} \right]^{\delta_i}$$

L'expression  $\frac{e^{Xb}}{\sum_{j \in R} e^{Xb}}$  est une probabilité, la vraisemblance partielle est donc bien un produit de probabilités. Il s'agit de la probabilité qu'un individu observe l'évènement en  $t_i$  sachant qu'un évènement s'est produit.

### Condition nécessaire : pas d'évènement simultané

On rappelle que le temps est strictement continu, il ne doit pas y avoir d'évènement simultané.

Sinon, l'estimation de la vraisemblance doit être corrigée.

### Correction de la vraisemblance avec des évènements simultanés

- La méthode dite **exacte**: Comme en réalité il n'y a pas d'évènement simultané, on va intégrer à la vraisemblance toutes les permutations possibles des évènements observés simultanément: si en  $t_i$  on observe au « même moment » l'évènement pour A et B, une échelle temporelle plus précise nous permettrait de savoir si A s'est produit avant B ou si B s'est produit avant A. Le nombre de permutations étant calculé par une factorielle, si 3 évènements sont mesurés simultanément, il y a 6 permutations possibles :  $3 \times 2 \times 1$  Problème: le nombre de permutations pour chaque  $t_i$  peut devenir très vite particulièrement élevé. Par exemple pour seulement 10 évènements mesurés simultanément, le nombre de permutations est égal à 3.628.800 ( $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \dots \times 2 \times 1$ ). Le temps de calcul devient particulièrement long, et ce type de correction totalement inopérant.
- La méthode dite de **Breslow**: il s'agit d'une approximation de la méthode exacte permettant de ne pas avoir à intégrer chaque permutation. Cette approximation est utilisée par défaut par les logiciels Sas et Stata.
- La méthode dite d'**Efron**: elle corrige l'approximation de Breslow, et est jugée plus proche de la méthode exacte. C'est la méthode utilisée par défaut avec le logiciel R. Elle est disponible dans les autres applications.

## Estimation des paramètres

On utilise la méthode habituelle, à savoir la maximisation de la log-vraisemblance (ici partielle).

- Conditions de premier ordre: calcul des équations de score à partir des dérivées partielles. Solution:  $\frac{\partial \log(PL)}{\partial b_k} = 0$ . On ne peut pas obtenir de solution numérique directe.
- Remarque: les équations de score sont utilisées pour tester la validité de l'hypothèse de constance des rapports de risque (hazard ratio) pour calculer les **résidus dits de Schoenfeld** (voir test de l'hypothèse de risque proportionnel).
- Conditions de second ordre: calcul des dérivées seconde qui permettent d'obtenir la matrice d'information de Fisher et la matrice des variances-covariances des paramètres.
- Comme il n'y a pas de solution numérique directe, on utilise un algorithme d'optimisation (ex: Newton-Raphson) à partir des équations de score et de la matrice d'information de Fisher.

## Eléments de calcul

En logarithme, la vraisemblance partielle s'écrit:

$$\begin{aligned}
 pl(b) &= \log(pl(b)) = \log \left( \prod_{i=1}^n \left[ \frac{e^{X_i'b}}{\sum_{j \in R_i} e^{X_j'b}} \right]^{\delta_i} \right) \\
 pl(b) &= \sum_{i=1}^n \delta_i \log \left( \frac{e^{X_i'b}}{\sum_{j \in R_i} e^{X_j'b}} \right) \\
 pl(b) &= \sum_{i=1}^n \delta_i \left( \log(e^{X_i'b}) - \log \sum_{j \in R_i} e^{X_j'b} \right) \\
 pl(b) &= \sum_{i=1}^n \delta_i \left( X_i'b - \log \sum_{j \in R_i} e^{X_j'b} \right)
 \end{aligned}$$

Calcul de l'équation de score pour une covariable  $X_k$ :

$$\frac{\partial pl(b)}{\partial b_k} = \sum_{i=1}^n \delta_i \left( X_{ik} - \sum_{j \in R_i} X_{ik} \frac{e^{X_i'b}}{\sum_{j \in R_i} e^{X_j'b}} \right)$$

Comme  $\frac{e^{X_i b}}{\sum_{j \in R} e^{X_j b}}$  est une probabilité  $\sum_{j \in R_i} X_{ik} \frac{e^{X'_j b}}{\sum_{j \in R_i} e^{X'_j b}}$  est l'espérance (la moyenne)  $E(X_k)$  d'avoir la caractéristique  $X_k$  lorsqu'un évènement a été observé. Finalement:

$$\frac{\partial \ln p(b)}{\partial b_k} = \sum_{i=1}^n \delta_i (X_{ik} - E(X_k))$$

Cette expression va permettre de tester le respect ou non de l'hypothèse de risque proportionnel.

## Lecture des résultats

Comme il s'agit d'un modèle à risques proportionnels, **les rapports de risques sont constants pendant toute la période d'observation**. Il s'agit d'une propriété de l'estimation.

### Covariable binaire (indicatrice)

$$X = (0,1) \text{ et } RR = \frac{h(t|X=1)}{h(t|X=0)} = e^b$$

A chaque moment de la durée  $t$ , le risque d'observer l'évènement est  $e^b$  fois plus important/plus faible pour  $X = 1$  que pour  $X = 0$ .

### Covariable continue (mais fixe dans le temps)

On prendra pour illustrer une variable type âge au début de l'exposition au risque (a)\* et un delta de comparaison avec un âge inférieur (c).

$$RR = \frac{h(t | X=a+c)}{h(t | X=a)} = e^{c \times b}.$$

Si  $c = 1$  (résultat de l'estimation): A un âge donnée en début d'exposition, le risque de connaître l'évènement est  $e^b$  fois inférieur/supérieur à celui d'une personne qui a un an de moins .

Si on regarde une différence de 5 ans en âge ( $c = 5$ ), le risque est  $e^{5 \times b}$  inférieur/supérieur à celui d'une personne qui a 5 ans de moins.

\* Par exemple si on s'intéresse à la durée d'une migration, il s'agira de l'âge à la migration.

## Exemple pour les insuffisances cardiaques

Estimateurs :  $b$

```
Cox regression -- Efron method for ties
```

| No. of subjects | = | 103            | Number of obs | =     | 103                        |
|-----------------|---|----------------|---------------|-------|----------------------------|
| No. of failures | = | 75             |               |       |                            |
| Time at risk    | = | 31938          | LR chi2(3)    | =     | 17.63                      |
| Log likelihood  | = | -289.30639     | Prob > chi2   | =     | 0.0005                     |
| _t              |   | Coef.          | Std. Err.     | z     | P> z  [95% Conf. Interval] |
| year            |   | <b>-0.1196</b> | 0.0673        | -1.78 | 0.076 -0.2516 0.0124       |
| age             |   | <b>0.0296</b>  | 0.0135        | 2.19  | 0.029 0.0031 0.0561        |
| surgery         |   | <b>-0.9873</b> | 0.4363        | -2.26 | 0.024 -1.8424 -0.1323      |

Rapports de risque:  $e^b$

```
Cox regression -- Efron method for ties
```

| No. of subjects | = | 103        | Number of obs | =     | 103                        |
|-----------------|---|------------|---------------|-------|----------------------------|
| No. of failures | = | 75         |               |       |                            |
| Time at risk    | = | 31938      | LR chi2(3)    | =     | 17.63                      |
| Log likelihood  | = | -289.30639 | Prob > chi2   | =     | 0.0005                     |
| _t              |   | Haz. Ratio | Std. Err.     | z     | P> z  [95% Conf. Interval] |
| year            |   | 0.8872     | 0.0597        | -1.78 | 0.076 0.7775 1.0124        |
| age             |   | 1.0300     | 0.0139        | 2.19  | 0.029 1.0031 1.0577        |
| surgery         |   | 0.3726     | 0.1625        | -2.26 | 0.024 0.1584 0.8761        |

On retrouve les résultats des tests non paramétriques, à savoir qu'un pontage réduit les risques journaliers de décès pendant la période d'observation (augmente la durée de survie).

De la même manière, plus on entre à un âge élevé dans la liste d'attente plus le risque de décès augmente. La variable *year*, qui doit traduire des progrès en médecine, implique une réduction relativement modérée du risque de décès durant l'attente de la greffe.

## Logiciels

SAS : le modèle est estimé avec la proc phreg .

Stata : Le modèle est estimé avec la commande stcox .

R : le modèle peut être estimé avec la fonction coxph de la librairie survival (a utilisé de préférence).

Python : Avec la librairie lifelines, le modèle est estimé avec la fonction CoxPHFitter . Avec la librairie statmodels, il est estimé avec la fonction smf.phreg .

## L'hypothèse de constance des rapports de risque

- Les rapports de risque (RR) estimés par le modèle sont contraints à être constant pendant toute la période d'observation. C'est une hypothèse forte.
- Le respect de cette hypothèse doit être testé, en particulier pour un modèle de Cox où la baseline du risque est habituellement estimée à l'aide de ces rapports (méthode dite de Breslow, non traitée). En post-estimation, les valeurs estimées du risque pourront présenter des valeurs aberrantes, en particulier négatives.
- Tester cette hypothèse revient à tester une interaction entre les rapports et la durée (ou plutôt une fonction de la durée).
- Plusieurs méthodes disponibles, celle sur les résidus de martingales, réservée aux covariables continues, et le « test » graphique ne seront pas traités. On traitera seulement celle basée sur les **résidus de Schoenfeld**.
- Si on se limite aux courbes de Kaplan-Meier, leur croisement impliquera nécessairement un problème sur cette hypothèse.

### Tests sur les résidus de Schoenfeld

- Les résidus « bruts » sont directement calculés à partir des équations de scores (voir section estimation).
- Ce résidu n'est calculé que pour les observations qui ont observées l'événement.
- Il est calculé au moment où l'événement s'est produit.
- La somme des résidus pour chaque covariable est égale à 0 (propriété de l'équation de score à l'équilibre).
- On utilise généralement les résidus de Schoenfeld « standardisés » - par leur variance - pour tenir compte du fait que le risk set diminue au cours du temps.
- Pour une observation dont l'événement s'est produit en  $t_i$ , le résidu brut de Schoenfeld pour la covariable  $X_k$ , après estimation du modèle, est égal à:

$$rs_{ik} = X_{ik} - \sum_{j \in R_i} X_{ik} \frac{e^{X_j'b}}{\sum_{j \in R_i} e^{X_j'b}} = X_{ik} - E(X_k)$$

- Ce résidu est formellement la contribution d'un individu au score. Il se lit comme la différence entre la valeur observée d'une covariable et sa valeur espérée au moment où un événement se produit.
- Si l'hypothèse de constance des risques ratio est respectée, les résidus ne doivent pas suivre une tendance précise.
- Intuitivement sans censure à droite et en ne considérant que les résidus bruts: on a un RR strictement égal à 1, en début d'exposition  $R_i = 100$  avec 50 hommes ( $X_k = 0$ ) et 50 femmes ( $X_k = 1$ ). Si l'hypothèse PH est strictement respectée, lorsqu'il reste 90 personnes soumises au risque, on devrait avoir 45 hommes et 45 femmes. Avec  $R_i = 50$ , 25 hommes et 25 femmes,..... avec  $R_i = 10$ , 5 hommes et 5 femmes. Au final  $X_k$  est toujours égal à 0.5 et les résidus bruts prendront toujours la valeur -.5 si  $X = 0$  et .5 si  $X = 1$ . En faisant une simple régression linéaire entre les résidus, qui alternent ces deux valeurs , et  $t$ , le coefficient estimé sera non significativement différent de 0.
- On peut donc tester l'hypothèse sur les résidus par une régression entre ces résidus pour chaque covariable et la durée (ou une fonction dérivée de la durée). La solution la plus utilisée est le test dit de Grambsch-Therneau implémenté dans tous les logiciels. On peut montrer que le test de Grambsch-Therneau consiste à introduire une interaction entre les covariables et une fonction de la durée dans le modèle.

**Utilisateurs et utilisatrices de R: lire attentivement car les résultats du tests sont modifiés depuis la version 3 de la librairie Survival. Je ne suis pas encore en mesure de dire clairement pourquoi, une piste est donnée par une courte note dans le fichier d'aide, et d'évaluer la sensibilité de ce changement à des échantillons de grande taille, avec un nombre important de degrés de liberté dans les modèles et surtout des estimations avec des durées discrètes/groupées. Bref évaluer cette nouvelle estimation a des données typiques des sciences sociales (T.Therneau est un biostatisticien en poste dans un des établissements de la fameuse mayo clinic)**

Résultat cohérent entre SAS - STATA - Survival v2 (R) - Lifelines (PYTHON)

| Test of proportional-hazards assumption |      |         |      |    |           |
|---|------|---------|------|----|-----------|
| Time:                                   | Time | rho     | chi2 | df | Prob>chi2 |
| year                                    |      | 0.10162 | 0.80 | 1  | 0.3720    |
| age                                     |      | 0.12937 | 1.61 | 1  | 0.2043    |
| surgery                                 |      | 0.29664 | 5.54 | 1  | 0.0186    |
| global test                             |      |         | 8.76 | 3  | 0.0327    |

Ici l'hypothèse de proportionnalité des risques est questionable pour la variable *surgery*. Le risque ratio n'est vraisemblablement pas constant dans le temps.

## Remarques / à savoir

- Test multiple : de nouveau il convient de se méfier du résultat du test multiple lorsque le nombre de degrés de liberté est élevé (ou tout simplement supérieur à 1). Le risque de premier espèce peut-être assez faible alors que les tests pour chaque covariables prises une à une présentent des risques élevées (>1 par exemple). Dans l'exemple sur les trois variables, seulement une est questionnable et le test sur un seuil courant de 5% pourrait être jugé significatif.
- Le test est considéré par certain.e.s comme un indicateur de l'ampleur du biais qui affecte la baseline du risque.
- Les transformations de la durée : n'importe quelle fonction de la durée peut être utilisée pour effectuer le test. On retient généralement les fonctions suivantes:  $f(t) = t$  (« identity »),  $f(t) = \log(t)$  ,  $f(t) = KM(t)$  ou  $f(t) = 1 - KM(t)$  où  $KM(t)$  est l'estimateur de Kaplan-Meier. Enfin une transformation appelée « rank » utilisée seulement pour les durées strictement continue ou suffisamment dispersées. Par exemple  $t = (0.1, 0.5, 1.2, 6.3)$  donne une transformation  $t = (1,2,3,4)$ . A savoir : la fonction « identity » rend le test relativement sensible aux événements très tardifs et rares (outliers).

## Logiciels

**SAS:** le test est disponible depuis quelques années avec l'argument **zph** sur la ligne `proc lifetest.` Par défaut SAS utilise  $f(t) = t$ .

**Stata:** le test est donné par la commande **estat phtest, d.** Par défaut SAS utilise  $f(t) = t$ .

**R [17-05-2022 : attention test visiblement modifié depuis le v3 de survival]** : après avoir créer l'objet lié à l'estimation du modèle de cox, on utilise la fonction `cox.zph`. La fonction utilise par défaut  $f(t) = 1 - KM(t)$  où  $KM(t)$  sont les estimateurs de la courbe de Kaplan-Meier.

**Pour avoir des résultats cohérents avec les autres applications, une méthode via une régression linéaire entre les résidus standardisés et la durée est proposée dans la partie programmation dédiée à R.**

**Python :** après avoir créer l'objet lié à l'estimation du modèle de Cox, on utilise la fonction `proportional_hazard_test`. La fonction utilise par défaut  $f(t) = t$ , mais on peut afficher les résultats pour toutes les transformations de  $t$  disponibles avec l'option `time_transform='all'`.

## Test avec introduction d'une interaction avec la durée

### Petit retour sur l'estimation du modèle

Pour estimer le modèle de Cox, les données sont dans un premier temps splittées aux temps d'évènement. A l'exception de Sas, pour les autres logiciels des fonctions prennent en charge cette opération.

|     | id | surgery | _d | _t | _t0 |
|-----|----|---------|----|----|-----|
| 24. | 2  |         | 0  | 0  | 1   |
| 25. | 2  |         | 0  | 0  | 2   |
| 26. | 2  |         | 0  | 0  | 3   |
| 27. | 2  |         | 0  | 0  | 5   |
| 28. | 2  | 1       | 0  | 1  | 6   |
|     |    |         |    |    | 5   |
| 29. | 3  |         | 0  | 0  | 1   |
| 30. | 3  |         | 0  | 0  | 2   |
| 31. | 3  |         | 0  | 0  | 3   |
| 32. | 3  |         | 0  | 0  | 5   |
| 33. | 3  |         | 0  | 0  | 6   |
|     |    |         |    |    | 5   |
| 34. | 3  |         | 0  | 0  | 8   |
| 35. | 3  |         | 0  | 0  | 9   |
| 36. | 3  |         | 0  | 0  | 12  |
| 37. | 3  | 1       | 0  | 1  | 16  |
|     |    |         |    |    | 12  |

- Les bornes des intervalles  $[t_0; t]$  ont des valeurs seulement lorsqu'un évènement s'est produit (principe de la vraisemblance partielle). Il n'y a donc pas de valeurs pour  $t$  et  $t_0$  en  $t = 4$  ( $id = 2, 3$ ),  $t = 7, 10, 11, 13, 14, 15$  ( $id = 3$ ).
- Les deux individus observent l'évènement en  $t = 6$  pour  $id = 2$ , et en  $t = 16$  pour  $id = 3$ . Avant ce moment la valeur de la variable prise par la variable d'évènement (ici  $d$ ) prend toujours la valeur 0, et prend la valeur 1 au moment de l'évènement.

On vérifie que les paramètres estimés sont identiques

| Cox regression -- Breslow method for ties |            |           |               |       |                      |           |
|---|------------|-----------|---------------|-------|----------------------|-----------|
| No. of subjects =                         | 103        |           | Number of obs | =     | 3,573                |           |
| No. of failures =                         | 75         |           |               |       |                      |           |
| Time at risk =                            | 31938      |           | LR chi2(3)    | =     | 17.56                |           |
| Log likelihood =                          | -289.54474 |           | Prob > chi2   | =     | 0.0005               |           |
| <hr/>                                     |            |           |               |       |                      |           |
| _t  | Coef.      | Std. Err. | z             | P> z  | [95% Conf. Interval] |           |
| year                                      | -.1195075  | .0673691  | -1.77         | 0.076 | -.2515486            | .0125336  |
| age                                       | .0295539   | .0135341  | 2.18          | 0.029 | .0030275             | .0560803  |
| 1.surgery                                 | -.984869   | .4362881  | -2.26         | 0.024 | -1.839978            | -.1297601 |

### *Introduction de l'interaction avec une fonction de la durée*

On a une variable de durée (on prendra  $t$  avec  $f(t) = t$ ) qui sera croisée avec la variable *surgery*. Le modèle va alors s'écrire:

$$h(t|X, t) = h_0(t) e^{b_1 \text{age} + b_2 \text{year} + b_3 \text{surgery} + b_4 (\text{surgery} \times t)}$$

Remarque : il est souvent d'usage d'utiliser  $f(t) = \log(t)$ , qui permet d'homogénéiser l'échelle entre la baseline et le terme d'interaction :

$$\log(h(t|X, t)) = \log h_0(t) + b_4(\text{surgery} \times \log(t)) + b_1 \text{age} + b_2 \text{year} + b_3 \text{surgery}$$

En revanche, l'avantage de  $f(t) = t$  réside dans la lecture du résultat où le terme d'interaction est directement interprétable comme un rapport de rapports de risques, qui exprimera la variation constante de ce double rapport au cours du temps.

### **Estimation du modèle**

On présentera le modèle avec le log des paramètres estimées (le terme d'interaction n'étant pas un rapport de risque mais un rapport de rapport de risque).

*Important:* le modèle estimé n'est plus un modèle à risques proportionnels.

| Cox regression -- Breslow method for ties           |                  |                 |               |              |                      |                  |
|---|------------------|-----------------|---------------|--------------|----------------------|------------------|
| No. of subjects =                                   | 103              |                 | Number of obs | =            | 103                  |                  |
| No. of failures =                                   | 75               |                 |               |              |                      |                  |
| Time at risk =                                      | 31938            |                 | LR chi2(4) =  | 21.50        |                      |                  |
| Log likelihood =                                    | -287.57352       |                 | Prob > chi2 = | 0.0003       |                      |                  |
| _t  | Coef.            | Std. Err.       | z             | P> z         | [95% Conf. Interval] |                  |
| main  |                  |                 |               |              |                      |                  |
| year  | -.1229512        | .0668619        | -1.84         | 0.066        | -.2539981            | .0080958         |
| age   | .0288597         | .0134588        | 2.14          | 0.032        | .002481              | .0552384         |
| 1.surgery   | <b>-1.751567</b> | <b>.6744632</b> | <b>-2.60</b>  | <b>0.009</b> | <b>-3.073491</b>     | <b>-.4296435</b> |
| tvc [interaction]                                   |                  |                 |               |              |                      |                  |
| surgery   | <b>.0022277</b>  | <b>.0011025</b> | <b>2.02</b>   | <b>0.043</b> | <b>.0000669</b>      | <b>.0043886</b>  |
| Note: Variables in tvc equation interacted with _t. |                  |                 |               |              |                      |                  |

L'interaction *surgery*  $\times$  *t* est ici significative ( $p < 0.05$ ). On retrouve le résultat du test sur les résidus de Schoenfeld.

## Interprétation:

- Le paramètre (logRR) pour la variable *surgery* donne le risque ratio au début de l'exposition au risque ( $t = 0 + \epsilon$ ): le risque de décéder en début d'observation est  $(e^{-1.27} - 1) \times 100 = -82\%$  plus faible pour les personnes qui ont eu un pontage avant leur inscription dans le registre.
- Le terme d'interaction étant positif, le gain en survie pour les personnes qui ont eu un pontage va diminuer avec le temps. Le RR augmente donc avec le temps, ici de +.2% par jour.

| $t$            | Calcul                      | Risk ratio |
|----------------|-----------------------------|------------|
| $0 + \epsilon$ | $e^{-1.27+0.002\times 0}$   | 0.28       |
| 1              | $e^{-1.27+0.002\times 1}$   | 0.281      |
| 2              | $e^{-1.27+0.002\times 2}$   | 0.282      |
| .              | .                           |            |
| .              | .                           |            |
| 10             | $e^{-1.27+0.002\times 10}$  | 0.286      |
| 100            | $e^{-1.27+0.002\times 100}$ | 0.34       |
| 365            | $e^{-1.27+0.002\times 365}$ | 0.58       |

\* Attention de ne rien inférer sur ce tableau qui ne montre que la mécanique. Des intervalles de confiance devrait être calculée à chaque  $t_i$ .

## Important :

- Le modèle n'est plus un modèle à risque proportionnel. La variable *surgery* n'est plus une variable **fixe** mais une variable tronquée dynamique qui prend seulement la valeur de  $t$  pour les personnes qui ont été opérées d'un pontage avant leur entrée dans le registre de greffe.
- L'altération des rapports de risque dépend de la forme fonctionnelle de l'interaction choisie. Ici la modification dans le temps du rapport des risques est constante, ce qui est une hypothèse assez forte. On a, en quelques sorte, réintroduit une hypothèse de proportionnalité, ici sur le degré d'altération des écarts de risques dans le temps.

## Que faire si l'hypothèse n'est pas respectée?

### *Ne rien faire*

On interprète le risque ratio comme un ratio moyen pendant la durée d'observation (P.Allison). Difficilement soutenable pour l'analyse des effets cliniques, elle peut être envisagée dans d'autres domaines. Attention au nombre de variables qui ne respectent pas l'hypothèse, l'estimation de la baseline du risque pourrait être sensiblement affectée. Il convient tout de même lors de l'interprétation, de préciser les variables qui seront analysées sous cette forme « moyenne » sur la période d'observation.

On peut également adapter cette stratégie du « ne rien faire » selon le sens de l'altération des rapports de risque. Si aux cours du temps les écarts déjà significatifs en début d'observation s'accentuent, à la hausse comme à la baisse, on peut

conserver cet estimateur moyen. Mais si l'effet est modéré :  $RR>1$  qui baisse ou  $RR<1$  qui augmente au cours du temps, je suis moins convaincu de la pertinence de ce « rien faire ».

Egalement il faut tenir compte de l'intérêt portée par les variables qui présentent un problème par rapport à l'hypothèse. Il n'est peut-être pas nécessaire de complexifier le modèle pour des variables introduites comme contrôle.

Mais plus problématique... On sait qu'une des causes du non respect de l'hypothèse peut provenir d'effets de sélection liées à des variables omises ou non observables. En analyse de durée ce problème prend le nom de **frailty** (fragilité) lorsqu'une non homogénéité n'est pas observable. Des estimations, plutôt complexes, sont possibles dans ce cas, et sont en mesure malgré leur interprétation plutôt difficile de régler le problème. Si l'hypothèse est sensible aux problèmes d'omission, il convient donc de bien spécifier le modèle au niveau des variables de contrôle observables et disponibles.

### **Cox stratifié**

Utiliser la méthode dite de « Cox stratifiée » (non traitée). Utile si l'objectif est de présenter des fonctions de survie ajustées, et si une seule covariable (binaire) présente un problème. Les RR ne seront pas estimés pour la variable.

### **Interaction**

Introduire une interaction avec la durée, ce qui a été fait plus haut. Cela peut permettre d'enrichir le modèle au niveau de l'interprétation. Valable si peu de covariables présentent des problèmes de stabilité des RR, dans l'idéal corriger une seule variable. Attention tout de même à la forme de la fonction, dans l'exemple on a contraint l'effet d'interaction à être linéaire, ce qui est une hypothèse plutôt forte.

### **Modèles alternatifs**

Utiliser un modèle alternatif: modèles paramétriques de type risque proportionnel si la distribution du risque s'ajuste bien, le modèle paramétrique « flexible » de **Parmar-Royston** (non traité à ce jour) ou un **modèle à temps discret**.

Utiliser un modèle non paramétrique additif dit d'*Aalen* ou une de ses variantes (non traité). Mais ces modèles, dont les résultats sont des visuels graphiques, se commentent difficilement.

Autre méthode : les forêts aléatoires [à présenter un jour tout de même]. Leo Breiman a dès le départ proposé une estimation des modèles de survie par cette méthode. Par définition, pas sensible à l'hypothèse PH. Mais cela reste des méthodes à finalité prédictive, moins riche en interprétation si ce n'est sur les facteurs d'importance.

### **Remarque finale sur l'estimation du modèle de Cox**

Le modèle a été estimé par la méthode de la vraisemblance partielle. On peut montrer que le modèle de Cox est estimable à partir d'un modèle de Poisson. Cette estimation est appelée « *Constant Piecewise Exponential PH model* ».

**Poisson regression**

|               |   |        |
|---------------|---|--------|
| Number of obs | = | 3,573  |
| LR chi2(90)   | = | 122.42 |
| Prob > chi2   | = | 0.0131 |
| Pseudo R2     | = | 0.1507 |

Log likelihood = -344.95318

| _d      | Coef.     | Std. Err. | z     | P> z  | [95% Conf. Interval] |
|---------|-----------|-----------|-------|-------|----------------------|
| year    | -.1195204 | .067374   | -1.77 | 0.076 | -.251571 .0125302    |
| age     | .0295531  | .013535   | 2.18  | 0.029 | .003025 .0560811     |
| surgery | -.98486   | .4363162  | -2.26 | 0.024 | -1.840024 -.1296961  |
| stime   |           |           |       |       |                      |
| 2       | .4223592  | 1.154708  | 0.37  | 0.715 | -1.840826 2.685544   |
| 3       | .0495983  | 1.154704  | 0.04  | 0.966 | -2.21358 2.312776    |
| 5       | -.828855  | 1.224781  | -0.68 | 0.499 | -3.229383 1.571673   |
| 6       | -.9922643 | 1.224779  | -0.81 | 0.418 | -3.392786 1.408258   |
| 8       | -1.940546 | 1.414215  | -1.37 | 0.170 | -4.712356 .8312648   |
| 9       | -2.03868  | 1.414233  | -1.44 | 0.149 | -4.810526 .7331649   |
| 11      | -12.59255 | 2179.957  | -0.01 | 0.995 | -4285.23 4260.045    |
| 12      | -2.30438  | 1.414226  | -1.63 | 0.103 | -5.076213 .4674526   |
| 16      | -1.481512 | 1.154713  | -1.28 | 0.199 | -3.744708 .7816839   |
| 17      | -2.591968 | 1.41426   | -1.83 | 0.067 | -5.363868 .1799312   |
| 18      | -2.642535 | 1.414254  | -1.87 | 0.062 | -5.414421 .1293516   |
| 21      | -2.095489 | 1.224819  | -1.71 | 0.087 | -4.496091 .3051133   |
| 28      | -3.055745 | 1.414246  | -2.16 | 0.031 | -5.827616 -.2838729  |
| 30      | -3.103495 | 1.41426   | -2.19 | 0.028 | -5.875395 -.3315961  |
| 31      | -13.89462 | 2179.957  | -0.01 | 0.995 | -4286.532 4258.743   |
| 32      | -3.144133 | 1.414253  | -2.22 | 0.026 | -5.916018 -.3722474  |
| 35      | -3.219157 | 1.414258  | -2.28 | 0.023 | -5.991053 -.447262   |
| 36      | -3.227893 | 1.414267  | -2.28 | 0.022 | -5.999806 -.4559796  |
| 37      | -3.246139 | 1.414263  | -2.30 | 0.022 | -6.018042 -.4742351  |
| 39      | -3.26923  | 1.414303  | -2.31 | 0.021 | -6.041213 -.4972472  |
| 40      | -2.581465 | 1.224839  | -2.11 | 0.035 | -4.982106 -.1808239  |
| 43      | -3.311454 | 1.414341  | -2.34 | 0.019 | -6.083512 -.5393966  |
| 45      | -3.327473 | 1.414407  | -2.35 | 0.019 | -6.099661 -.5552857  |
| 50      | -3.421206 | 1.414399  | -2.42 | 0.016 | -6.193377 -.6490357  |
| 51      | -3.425081 | 1.414444  | -2.42 | 0.015 | -6.197341 -.6528208  |
| 53      | -3.44536  | 1.414475  | -2.44 | 0.015 | -6.21768 -.673039    |
| 58      | -3.514664 | 1.414489  | -2.48 | 0.013 | -6.287011 -.7423175  |
| 61      | -3.543748 | 1.414557  | -2.51 | 0.012 | -6.316229 -.7712681  |
| 66      | -3.602062 | 1.414546  | -2.55 | 0.011 | -6.374522 -.8296028  |
| 68      | -2.90779  | 1.225106  | -2.37 | 0.018 | -5.308954 -.5066257  |
| 69      | -3.580111 | 1.414549  | -2.53 | 0.011 | -6.352577 -.8076461  |
| 72      | -2.914206 | 1.22505   | -2.38 | 0.017 | -5.31526 -.5131524   |
| 77      | -3.624716 | 1.414601  | -2.56 | 0.010 | -6.397284 -.8521489  |
| 78      | -3.593983 | 1.414779  | -2.54 | 0.011 | -6.366898 -.8210686  |
| 80      | -3.597845 | 1.414765  | -2.54 | 0.011 | -6.370734 -.8249558  |
| 81      | -3.589639 | 1.414745  | -2.54 | 0.011 | -6.362489 -.8167895  |
| 85      | -3.598044 | 1.414948  | -2.54 | 0.011 | -6.371291 -.824798   |
| 90      | -3.62163  | 1.415099  | -2.56 | 0.010 | -6.395173 -.8480873  |
| 96      | -3.658159 | 1.415134  | -2.59 | 0.010 | -6.43177 -.884548    |
| 100     | -3.672641 | 1.415162  | -2.60 | 0.009 | -6.446308 -.8989739  |
| 102     | -3.662767 | 1.415232  | -2.59 | 0.010 | -6.436571 -.8889631  |
| 109     | -14.65089 | 2179.957  | -0.01 | 0.995 | -4287.288 4257.986   |
| 110     | -3.704316 | 1.415125  | -2.62 | 0.009 | -6.47791 -.9307209   |
| 131     | -14.68697 | 2179.957  | -0.01 | 0.995 | -4287.324 4257.95    |
| 149     | -3.976368 | 1.415012  | -2.81 | 0.005 | -6.749742 -.1.202995 |
| 153     | -3.97938  | 1.414995  | -2.81 | 0.005 | -6.752718 -.1.206041 |
| 165     | -4.013449 | 1.415156  | -2.84 | 0.005 | -6.787104 -.1.239793 |
| 180     | -15.09339 | 2179.957  | -0.01 | 0.994 | -4287.731 4257.544   |
| 186     | -4.112806 | 1.414994  | -2.91 | 0.004 | -6.886144 -.1.339468 |
| 188     | -4.11316  | 1.414915  | -2.91 | 0.004 | -6.886342 -.1.339978 |
| 207     | -4.178467 | 1.414929  | -2.95 | 0.003 | -6.951678 -.1.405256 |
| 219     | -4.206547 | 1.41493   | -2.97 | 0.003 | -6.97976 -.433334    |
| 263     | -4.342286 | 1.415099  | -3.07 | 0.002 | -7.11583 -.568742    |
| 265     | -16.10078 | 2179.957  | -0.01 | 0.994 | -4288.738 4256.536   |
| 285     | -3.688074 | 1.225534  | -3.01 | 0.003 | -6.090076 -.286072   |
| 308     | -4.409256 | 1.414925  | -3.12 | 0.002 | -7.182459 -.636054   |
| 334     | -4.432237 | 1.415143  | -3.13 | 0.002 | -7.205866 -.658607   |
| 340     | -4.422918 | 1.415095  | -3.13 | 0.002 | -7.196453 -.649383   |
| 342     | -4.365805 | 1.41511   | -3.09 | 0.002 | -7.13937 -.592239    |
| 370     | -16.64142 | 2179.957  | -0.01 | 0.994 | -4289.279 4255.996   |

| 397       | -16.53454 | 2179.957 | -0.01      | 0.994 | -4289.172 | 4256.103  |  |
|-----------|-----------|----------|------------|-------|-----------|-----------|--|
| 427       | -16.28492 | 2179.957 | -0.01      | 0.994 | -4288.922 | 4256.352  |  |
| 445       | -16.76689 | 2179.957 | -0.01      | 0.994 | -4289.404 | 4255.87   |  |
| 482       | -15.8041  | 2179.957 | -0.01      | 0.994 | -4288.441 | 4256.833  |  |
| 515       | -16.91429 | 2179.957 | -0.01      | 0.994 | -4289.552 | 4255.723  |  |
| 545       | -16.10426 | 2179.957 | -0.01      | 0.994 | -4288.742 | 4256.533  |  |
| 583       | -4.641434 | 1.415524 | -3.28      | 0.001 | -7.41581  | -1.867057 |  |
| 596       | -16.41019 | 2179.957 | -0.01      | 0.994 | -4289.047 | 4256.227  |  |
| 620       | -17.07029 | 2179.957 | -0.01      | 0.994 | -4289.708 | 4255.567  |  |
| 670       | -17.14785 | 2179.957 | -0.01      | 0.994 | -4289.785 | 4255.489  |  |
| 675       | -4.631958 | 1.416377 | -3.27      | 0.001 | -7.408006 | -1.855911 |  |
| 733       | -4.60698  | 1.416405 | -3.25      | 0.001 | -7.383082 | -1.830878 |  |
| 841       | -17.05138 | 2179.957 | -0.01      | 0.994 | -4289.689 | 4255.586  |  |
| 852       | -4.566243 | 1.417712 | -3.22      | 0.001 | -7.344907 | -1.787579 |  |
| 915       | -17.40169 | 2179.957 | -0.01      | 0.994 | -4290.039 | 4255.236  |  |
| 941       | -17.34105 | 2179.957 | -0.01      | 0.994 | -4289.978 | 4255.296  |  |
| 979       | -4.426862 | 1.419414 | -3.12      | 0.002 | -7.208862 | -1.644862 |  |
| 995       | -4.401387 | 1.418922 | -3.10      | 0.002 | -7.182422 | -1.620352 |  |
| 1032      | -4.390393 | 1.418666 | -3.09      | 0.002 | -7.170928 | -1.609859 |  |
| 1141      | -16.4898  | 2179.957 | -0.01      | 0.994 | -4289.127 | 4256.148  |  |
| 1321      | -17.02179 | 2179.957 | -0.01      | 0.994 | -4289.659 | 4255.616  |  |
| 1386      | -4.427898 | 1.41857  | -3.12      | 0.002 | -7.208243 | -1.647553 |  |
| 1400      | -17.74095 | 2179.957 | -0.01      | 0.994 | -4290.378 | 4254.896  |  |
| 1407      | -17.17352 | 2179.957 | -0.01      | 0.994 | -4289.811 | 4255.464  |  |
| 1571      | -18.15173 | 2179.957 | -0.01      | 0.993 | -4290.789 | 4254.486  |  |
| 1586      | -18.39765 | 2179.957 | -0.01      | 0.993 | -4291.035 | 4254.24   |  |
| 1799      | -18.08037 | 2179.957 | -0.01      | 0.993 | -4290.718 | 4254.557  |  |
| <hr/>     |           |          |            |       |           |           |  |
| _cons     | 2.482922  | 4.946271 | 0.50       | 0.616 | -7.211591 | 12.17744  |  |
| ln(stime) |           | 1        | (exposure) |       |           |           |  |

## Modèles à temps discret

On va principalement traiter le modèle **logistique à temps discret**.

- Par définition ce n'est pas un modèle à risque proportionnel, mais à Odds proportionnels. Toutefois en situation de rareté ( $p < 10\%$ ), l'Odds converge vers une probabilité, qui est une mesure du risque (ici une probabilité conditionnelle).
- Le modèle à temps discret est de type paramétrique, il est moins contraignant que le modèle de Cox si l'hypothèse de proportionnalité n'est pas respectée, car le modèle est ajusté par une fonction de la durée. Il est donc pleinement paramétrique.
- Formellement, le modèle est estimable avec des événements mesurés à une durée nulle (même si cela n'a pas grand sens).
- La base de données doit être transformée en format long: aux temps d'observation ou sur des intervalles de temps. C'est une des principales différences avec le modèle de Cox qui est une estimation aux temps d'évènement. Néanmoins avec une bonne forme fonctionnelle de la durée traitée de manière continue, les deux modèles aboutissent à des résultats quasiment identiques.
- Permet d'introduire de manière plutôt souple un ensemble de covariables dynamiques.

Avec un lien logistique, le modèle à temps discret, avec seulement des covariables fixes, peut s'écrire :

$$\log \left[ \frac{P(Y = 1 | t_p, X_k)}{1 - P(Y = 1 | t_p, X_k)} \right] = a_0 + \sum_p a_p f(t_p) + \sum_k b_k X_k$$

## Organisation des données

### Format long

Les données doivent être en format long ou *individus-périodes*: pour chaque individu on a une ligne par durée observée ou par intervalle de durées jusqu'à l'évènement ou la censure. On retrouve le *split* des données du modèle de Cox. Avec des données de type discrète, qui se traduisent par des nombres élevés d'évènement simultanés, classique en sciences sociales, il y a souvent peu de différence entre un allongement aux temps d'évènement et aux temps d'observation.

## Durée

La durée est dans un premier temps construite sous forme d'un simple compteur, par exemple  $t = 1,2,4,5, \dots$  (des valeurs non entières sont possibles). Le choix de la forme fonctionnelle de la durée sera présenté par la suite.

## Variable évènement/censure

Si l'individu a connu l'évènement, elle prend la valeur 0 avant celui-ci. Au moment de l'évènement sa valeur est égale à 1. Pour les observations censurées, la variable prend toujours la valeur 0.

## Exemple avec les malformations cardiaques

On reprend les données de la base *transplantation*, mais les durées ont été regroupées par période de 30 jours. Il n'y a pas de durée mesurée comme nulle, on a considéré que les 30 premiers jours représentaient le premier mois d'exposition. Cette variable de durée se nomme *mois*.

## Format d'origine

| id | year | age | surgery | mois | died |
|----|------|-----|---------|------|------|
| 1  | 67   | 30  | 0       | 2    | 1    |

## Format long et variables pour l'analyse

| id | year | age | surgery | mois | died | t | e |
|----|------|-----|---------|------|------|---|---|
| 1  | 67   | 30  | 0       | 2    | 1    | 1 | 0 |
| 1  | 67   | 30  | 0       | 2    | 1    | 2 | 1 |

Pour info : la personne est décédé 50 jours après son inscription dans le registre d'attente.

## Estimation et ajustement de la durée

L'enjeu principal réside le choix de la forme fonctionnelle de la durée:

- Elle peut être modélisée sous forme de fonction d'une variable de type continue.
- Elle peut être modélisée comme variable discrète, de type indicatrice {0 ;1}, sur tous les points d'observation ou sous forme de regroupements.

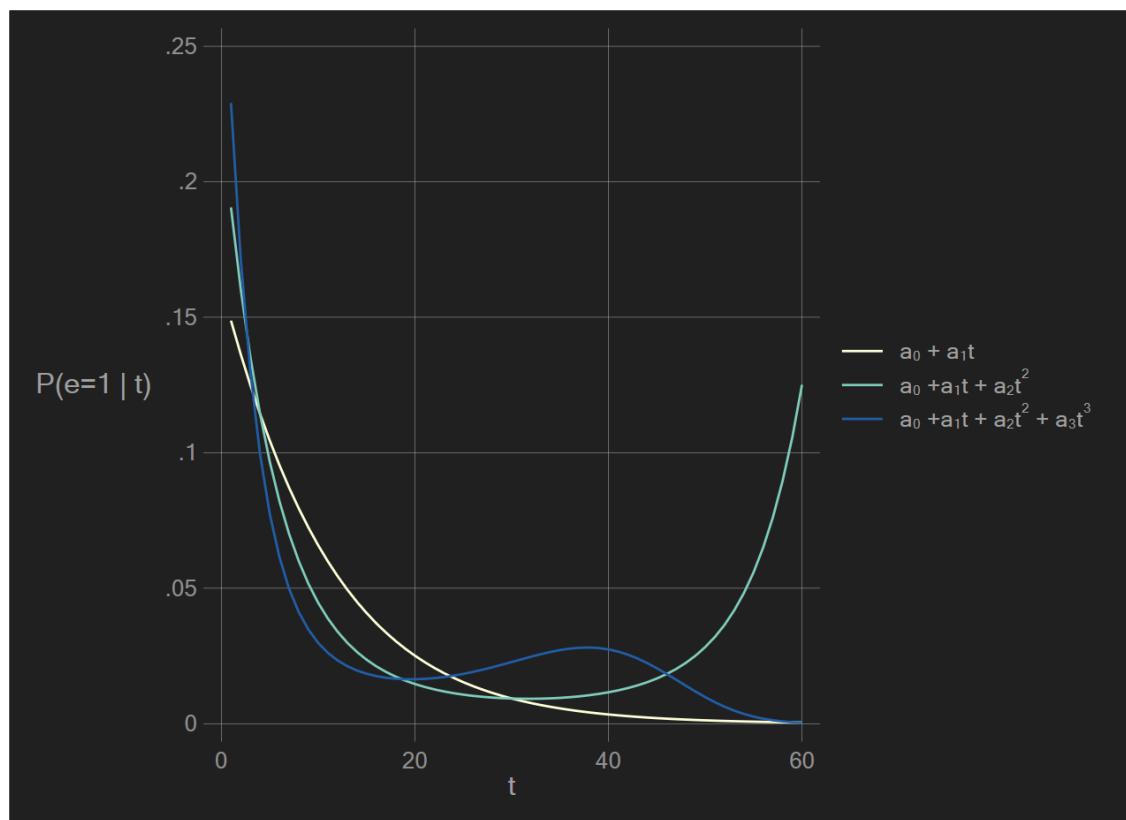
## Ajustement avec une durée en « continu » ou « quantitative » (nombre de mois)

Le modèle étant paramétrique, on doit trouver une fonction qui ajuste le mieux les données. Toute transformation de la variable de durée est possible:  $f(t) = t$ ,  $f(t) = \log(t)$ .....formes quadratiques. Les ajustements sous forme de **splines** (cubique) tendent à se développer ces dernières années, et présentent beaucoup d'avantages par rapport aux formes quadratiques. Pour sélectionner cette fonction, on peut tester différents modèles sans covariable additionnelle, et sélectionner la forme qui minimise un critère d'information de type **AIC** ou **BIC** (vraisemblance pénalisée).

### *Exemple avec les malformations cardiaques*

On va tester les formes suivantes :

- Une forme linéaire stricte  $f(t) = a \times t$
- Des effets quadratiques d'ordres 2 et 3:  $f(t) = a_1 \times t + a_2 \times t^2$  et  $f(t) = a_1 \times t + a_2 \times t^2 + a_3 \times t^3$ .



Lecture :  $t$  = mois

### Critères AIC

| $f(t)$   | AIC |
|--|-----|
| $a \times t$                                     | 504 |
| $a_1 \times t + a_2 \times t^2$                  | 492 |
| $a_1 \times t + a_2 \times t^2 + a_3 \times t^3$ | 486 |

On peut utiliser la troisième forme à savoir  $a_1 \times t + a_2 \times t^2 + a_3 \times t^3$ .

### Estimation du modèle avec toutes les covariables :

|   |               |   |        |
|---|---------------|---|--------|
| Logistic regression   | Number of obs | = | 1,127  |
|   | LR chi2(6)    | = | 90.69  |
|   | Prob > chi2   | = | 0.0000 |
| Log likelihood = -230.33671                                 | Pseudo R2     | = | 0.1645 |
| <hr/>   |               |   |        |
| e   Coef. Std. Err. z P> z  [95% Conf. Interval]            |               |   |        |
| -t   -.3720566 .0823946 -4.52 0.000 -.5335471 -.2105661     |               |   |        |
| t2   .0142379 .005023 2.83 0.005 .0043929 .0240828          |               |   |        |
| t3   -.0001659 .0000785 -2.11 0.035 -.0003198 -.000012      |               |   |        |
| year   -.1326693 .0737755 -1.80 0.072 -.2772666 .011928     |               |   |        |
| age   .0333413 .0146876 2.27 0.023 .0045541 .0621285        |               |   |        |
| surgery   -1.010918 .448598 -2.25 0.024 -1.890154 -.1316821 |               |   |        |

Remarque : La constante n'est pas reportée, les valeurs de la référence n'ayant pas grand sens (année et âge à 0). On peut centrer les deux variables par rapport à leur moyenne si on souhaite reporter une constante plus « parlante »

Maintenant si on estime le modèle avec la méthode de Cox (avec des durées mesurées sur une échelle de 30 jours) :

|  |               |   |        |
|--|---------------|---|--------|
| Cox regression -- Efron method for ties                      | Number of obs | = | 103    |
| No. of subjects = 103  |               |   |        |
| No. of failures = 75   |               |   |        |
| Time at risk = 1127  | LR chi2(3)    | = | 17.97  |
| Log likelihood = -289.81242                                  | Prob > chi2   | = | 0.0004 |
| <hr/>  |               |   |        |
| _t   Coef. Std. Err. z P> z  [95% Conf. Interval]            |               |   |        |
| -year   -.1304397 .0674344 -1.93 0.053 -.2626087 .0017293    |               |   |        |
| age   .0288141 .0134981 2.13 0.033 .0023583 .0552698         |               |   |        |
| surgery   -.9695805 .4361069 -2.22 0.026 -1.824334 -.1148266 |               |   |        |

On remarque que les coefficients estimés sont relativement proches.

Remarque: il est tout à fait possible d'estimer ce modèle avec la durée mesurée en jour.

## Ajustement discret

- Il s'agit d'introduire la variable de durée dans le modèle comme une variable catégorielle.
- La méthode n'est pas conseillée avec beaucoup de points d'observation, ce qui est le cas dans l'application, avec un nombre très (trop élevé) élevé de degrés de liberté.
- A l'inverse, si on ne dispose de peu de points d'observation, la paramétrisation avec une durée continue n'est pas un choix pertinent (et ne pas faire un modèle de Cox).

On va supposer qu'on dispose seulement de quatre intervalles d'observations. Pour l'exemple, on va créer ces intervalles à partir des quartiles de la durée, et conserver pour chaque personne une seule observation par intervalle :

- t=1 : Entre le début de l'exposition et 4 mois.
- t=2 : Entre 5 mois et 11 mois .
- t=3 : Entre 12 mois et 23 mois.
- t=4 : 24 mois et plus.

On va estimer le risque globalement sur l'intervalle. La base sera plus courte que la précédente (197 observations), on ne conserve qu'une ligne par intervalle d'observation pour chaque individu soumis au risque de décéder.

| quantiles<br>of t | e   | 0  | 1 | Total |
|-------------------|-----|----|---|-------|
| 1                 | 50  | 53 |   | 103   |
| 2                 | 35  | 11 |   | 46    |
| 3                 | 27  | 5  |   | 32    |
| 4                 | 10  | 6  |   | 16    |
| Total             | 122 | 75 |   | 197   |

|                             |               |   |        |
|-----------------------------|---------------|---|--------|
| Logistic regression         | Number of obs | = | 197    |
|                             | LR chi2(6)    | = | 39.30  |
|                             | Prob > chi2   | = | 0.0000 |
| Log likelihood = -111.23965 | Pseudo R2     | = | 0.1501 |

| e       | Coef.     | Std. Err. | z     | P> z  | [95% Conf. Interval] |
|---------|-----------|-----------|-------|-------|----------------------|
| ct4     |           |           |       |       |                      |
| 2       | -1.033368 | .4188719  | -2.47 | 0.014 | -1.854342 -.2123944  |
| 3       | -1.615245 | .544858   | -2.96 | 0.003 | -2.683147 -.5473433  |
| 4       | -.4789305 | .5992969  | -0.80 | 0.424 | -1.653531 .6956698   |
| year    | -.2032436 | .0931956  | -2.18 | 0.029 | -.3859036 -.0205835  |
| age     | .0468518  | .0184958  | 2.53  | 0.011 | .0106006 .083103     |
| surgery | -1.110163 | .5025594  | -2.21 | 0.027 | -2.095161 -.1251644  |

*Remarque : La constante n'est pas reportée, les valeurs de La référence n'ayant pas grand sens (année et âge à 0). Préférer par exemple un centrage des variables quantitatives par rapport à Leur moyenne si on veut afficher La constante.*

Au niveau de l'interprétation, avec 37% d'évènements sur l'ensemble des observations, il n'est plus possible d'interpréter le modèle en terme de rapport de probabilités. La lecture en termes d'Odds Ratio s'impose ici. Mais on peut utiliser les effets marginaux pour présenter les écarts en termes de points de %.

Le tableau suivant présente les probabilités estimées de décéder à partir d'un modèle avec la durée seulement (sous forme discrète).

| Durées       | p    |
|--------------|------|
| 0 à 4 mois   | 0.51 |
| 4 à 11 mois  | 0.24 |
| 11 à 23 mois | 0.16 |
| 23 à 61 mois | 0.37 |

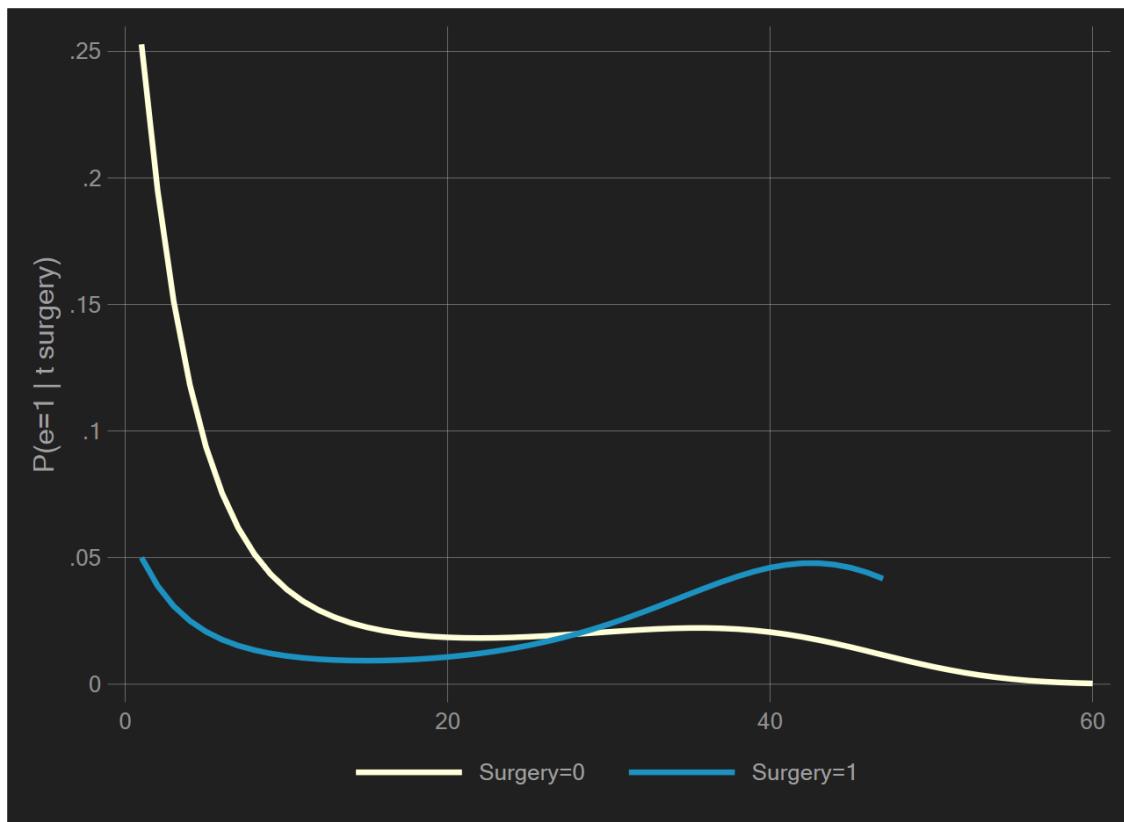
### Modèle à temps discret et hypothèse PH

- Formellement un modèle logistique à temps discret repose sur une hypothèse d'Odds proportionnel (Odds Ratios constants pendant la durée d'observation). Contrairement au modèle de Cox, l'estimation des probabilités (risque) n'est pas biaisée si l'hypothèse PH n'est pas respectée.
- Comme pour le modèle de Cox, la correction de la non proportionnalité peut se faire en intégrant une interaction avec la durée dans le modèle.

Les variables *year* et *age* seront omises pour faciliter la représentation graphique.

| Logistic regression         |                  | Number of obs = 1,127 |              |              |                      |                  |
|-----------------------------|------------------|-----------------------|--------------|--------------|----------------------|------------------|
|                             |                  | LR chi2(5) = 84.78    |              |              |                      |                  |
|                             |                  | Prob > chi2 = 0.0000  |              |              |                      |                  |
| Log likelihood = -233.29204 |                  | Pseudo R2 = 0.1538    |              |              |                      |                  |
| <hr/>                       |                  |                       |              |              |                      |                  |
| e                           | Coef.            | Std. Err.             | z            | P> z         | [95% Conf. Interval] |                  |
| t                           | -.373826         | .083913               | -4.45        | 0.000        | -.5382924            | -.2093595        |
| 1.surgery                   | <b>-1.929061</b> | <b>.6920142</b>       | <b>-2.79</b> | <b>0.005</b> | <b>-3.285383</b>     | <b>-.5727377</b> |
| surgery#c.t                 |                  |                       |              |              |                      |                  |
| 1                           | <b>.0690069</b>  | <b>.0333128</b>       | <b>2.07</b>  | <b>0.038</b> | <b>.003715</b>       | <b>.1342987</b>  |
| t2                          | .0137676         | .0052405              | 2.63         | 0.009        | .0034964             | .0240388         |
| t3                          | -.0001596        | .0000828              | -1.93        | 0.054        | -.0003218            | 2.62e-06         |

*Remarque : La constante n'est pas reportée, les valeurs de la référence n'ayant pas grande sens (année et âge à 0)*



# Introduction de variables dynamiques

Cette section sera principalement traitée par l'exemple, et on ne s'intéressera qu'aux variables de type discrètes. Pour une variable dynamique quantitative on peut penser sur une durée annuelle à une variable de type revenu qui est susceptible de varier d'une année sur l'autre.

- Dans un modèle de durée, une variable dynamique peut être appréhendée comme une interaction entre la durée et une variable.
  - Pour un modèle de Cox, l'hypothèse de risque proportionnel ne peut donc pas être testée.
  - Ne pas tenir compte du caractère dynamique d'une dimension peut conduire à des interprétations erronées.
  - La façon de modéliser les dimensions dynamiques en analyse des durées peut conduire à des biais de causalité, en particulier dans les sciences sociales, en omettant les effets d'anticipation. C'est une situation classique avec des covariables dynamiques de type discrètes. Les techniques standards ne peuvent modéliser que des effets d'adaptation : la cause - observée - précède l'effet.

## Facteur dynamique traitée de manière fixe

On reprend l'exemple sur malformation cardiaque, en ajoutant la variable relative à la greffe : la transplantation réduit-elle le risque journalier de décéder (ou augmente la durée de survie).

On a dans la base 2 variables : une variable binaire pour savoir si l'individu a été greffé ou non, **transplant**, et une variable continue tronquée donnant la durée en jour jusqu'à la greffe (0 si pas de greffe), **wait**.

On va dans un premier temps estimer le modèle (de Cox) avec la variable fixe *transplant*.

```

Cox regression -- Efron method for ties

No. of subjects =           103                         Number of obs     =      103
No. of failures =          75
Time at risk    =      31938
                                                               LR chi2(4)      =     49.81
Log likelihood  = -273.21499                         Prob > chi2     =     0.0000

```

| _t           | Coef.   | Std. Err. | z     | P> z  | [95% Conf. Interval] |
|--------------|---------|-----------|-------|-------|----------------------|
| year         | -0.0909 | 0.0659    | -1.38 | 0.168 | -0.2201 0.0383       |
| age          | 0.0579  | 0.0147    | 3.95  | 0.000 | 0.0292 0.0866        |
| 1.surgery    | -0.6547 | 0.4475    | -1.46 | 0.143 | -1.5318 0.2224       |
| 1.transplant | -1.6484 | 0.2792    | -5.90 | 0.000 | -2.1957 -1.1011      |

Interprétation : traité de manière fixe, la greffe réduit le risque journalier de décéder de près de -81%:  $(1 - e^{1.65}) \times 100$

Au niveau des données le modèle a été estimé, pour une personne greffée, à partir de ce mapping:

| id | year | age | surgery | transplant | wait | _d | _t        | _t0       |
|----|------|-----|---------|------------|------|----|-----------|-----------|
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 1         | 0         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 2         | 1         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 3         | 2         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 5         | 3         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 5.0999999 | 5         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 6         | 5.0999999 |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 8         | 6         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 9         | 8         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 12        | 9         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 16        | 12        |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 17        | 16        |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 18        | 17        |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 21        | 18        |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 28        | 21        |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 30        | 28        |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 32        | 30        |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 35        | 32        |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 36        | 35        |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 37        | 36        |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 39        | 37        |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 40        | 39        |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 43        | 40        |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 45        | 43        |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 50        | 45        |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 51        | 50        |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 0  | 53        | 51        |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1          | 12   | 1  | 58        | 53        |

**Problème:** la personne est codée transplantée avant le jour de la greffe. L'effet causal est donc mal mesuré si sa dimension temporelle a été ignorée, ici le jour exact de la greffe. C'est le même principe pour l'évènement, la personne est codée décédée (1) le jour du décès, et vivante avant (0).

## Estimation avec une variable dynamique

### Modèle de Cox

Il convient donc de modifier l'information avec le délai d'attente jusqu'à la greffe. On doit générer une variable qui prend la valeur 0 avant la greffe et la valeur 1 à partir du jour où la personne a été opérée. Quel que soit le logiciel, le principe de construction de la variable suit la logique suivante:

- $tvc = 1$  si  $transplant = 1$  et  $t \geq wait$
- $tvc = 0$  sinon

| id | year | age | surgery | tvc | wait | _d | _t         | _t0        |
|----|------|-----|---------|-----|------|----|------------|------------|
| 10 | 68   | 42  | 0       | 0   | 12   | 0  | 1          | 0          |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 0   | 12   | 0  | 2          | 1          |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 0   | 12   | 0  | 3          | 2          |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 0   | 12   | 0  | 5          | 3          |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 0   | 12   | 0  | 5.09999999 | 5          |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 0   | 12   | 0  | 6          | 5.09999999 |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 0   | 12   | 0  | 8          | 6          |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 0   | 12   | 0  | 9          | 8          |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1   | 12   | 0  | 12         | 9          |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1   | 12   | 0  | 16         | 12         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1   | 12   | 0  | 17         | 16         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1   | 12   | 0  | 18         | 17         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1   | 12   | 0  | 21         | 18         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1   | 12   | 0  | 28         | 21         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1   | 12   | 0  | 30         | 28         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1   | 12   | 0  | 32         | 30         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1   | 12   | 0  | 35         | 32         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1   | 12   | 0  | 36         | 35         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1   | 12   | 0  | 37         | 36         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1   | 12   | 0  | 39         | 37         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1   | 12   | 0  | 40         | 39         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1   | 12   | 0  | 43         | 40         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1   | 12   | 0  | 45         | 43         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1   | 12   | 0  | 50         | 45         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1   | 12   | 0  | 51         | 50         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1   | 12   | 0  | 53         | 51         |
| 10 | 68   | 42  | 0       | 1   | 12   | 1  | 58         | 53         |

Maintenant si on estime le modèle avec cette variable dynamique qui indique clairement le moment de la transition (jour de la greffe) :

| Cox regression -- Efron method for ties |            |               |              |              |                      |               |
|---|------------|---------------|--------------|--------------|----------------------|---------------|
| No. of subjects =                       | 103        | Number of obs | =            | 3,668        |                      |               |
| No. of failures =                       | 75         |               |              |              |                      |               |
| Time at risk =                          | 31938.1    |               |              |              |                      |               |
|   |            | LR chi2(4)    | =            | 17.70        |                      |               |
| Log likelihood =                        | -289.27058 | Prob > chi2   | =            | 0.0014       |                      |               |
| _t                                      | Coef.      | Std. Err.     | z            | P> z         | [95% Conf. Interval] |               |
| year                                    | -.1202612  | .0673414      | -1.79        | 0.074        | -.252248             | .0117256      |
| age                                     | .0304498   | .0138998      | 2.19         | 0.028        | .0032068             | .0576929      |
| 1.surgery                               | -.9829386  | .4365524      | -2.25        | 0.024        | -1.838566            | -.1273116     |
| 1.tvc                                   | -.0826682  | .3047751      | <b>-0.27</b> | <b>0.786</b> | <b>-.6800165</b>     | <b>.51468</b> |

La greffe n'a plus d'impact significatif sur la survie des individus, tout du moins elle ne l'augmente pas. Cela ne signifie pas non plus que des personnes ont pu être « sauvée » ou plutôt leur durée de vie augmentée grâce à cette opération, mais des complications lors de l'opération ou post-opératoires, des rejets du greffon, à une époque où ces techniques étaient encore à leurs balbutiements, ont provoqué une mortalité peut-être un peu plus précoce (ici mesuré en jour).

## Logiciels

**SAS:** la base n'est pas modifiée et la création de la TVC est faite « en aveugle» dans la procédure *phreg*. Donc faire très attention.  
**Stata, R, Python:** la base doit être transformée en format long aux temps d'évènement (*survspli* avec R, *stspli* avec Stata) avant la création de la variable dynamique.

## Modèle à temps discret

Même principe pour la construction de la variable dynamique. Pour rappel l'échelle temporelle est le mois, et on a créé en amont une variable qui transforme les jours d'attente en mois (*mwait*)

| id | year | age | surgery | tvc | mwait | t |
|----|------|-----|---------|-----|-------|---|
| 13 | 68   | 54  | 0       | 0   | 2     | 1 |
| 13 | 68   | 54  | 0       | 1   | 2     | 2 |
| 13 | 68   | 54  | 0       | 1   | 2     | 3 |

Logistic regression

|               |   |        |
|---------------|---|--------|
| Number of obs | = | 1,127  |
| LR chi2(7)    | = | 90.73  |
| Prob > chi2   | = | 0.0000 |
| Pseudo R2     | = | 0.1645 |

Log likelihood = -230.32152

| e       | Coef.     | Std. Err. | z     | P> z  | [95% Conf. Interval] |
|---------|-----------|-----------|-------|-------|----------------------|
| t       | -.365048  | .0915105  | -3.99 | 0.000 | -.5444052 -.1856907  |
| t2      | .0139226  | .0053256  | 2.61  | 0.009 | .0034846 .0243606    |
| t3      | -.000162  | .0000815  | -1.99 | 0.047 | -.0003217 -2.27e-06  |
| year    | -.1324928 | .0737516  | -1.80 | 0.072 | -.2770433 .0120577   |
| age     | .033829   | .0149503  | 2.26  | 0.024 | .004527 .0631311     |
| surgery | -1.007795 | .4490177  | -2.24 | 0.025 | -1.887854 -.1277365  |
| tvc     | -.0543011 | .3114096  | -0.17 | 0.862 | -.6646528 .5560505   |

Remarque : la constante n'est pas reportée, les valeurs de la référence n'ayant pas grand sens (année et âge à 0)

## Remarques (important)

- Rappel : la cause doit précéder l'effet.
- Lorsque l'événement étudié n'est pas intrinsèquement de type absorbant comme le décès, la « cause » peut se manifester ou plutôt être observée après la survenue de l'événement étudié.

Les modèles de durée standards ne peuvent pas gérer ces situations car l'observation sort du risque après la survenue de l'événement.

Même si la cause est bien mesurée avant l'événement d'intérêt, un « choc » n'est peut-être qu'un point final d'un processus causal antérieur : une séparation est rarement un événement ponctuel, une phase plus ou moins longue de mésentente dans le couple lui a vraisemblablement préexister. La datation du début d'un processus causal n'est donc pas toujours facile à mesurer.

Logique d'adaptation: la « cause » identifiée est mesurée avant l'événement étudié.

- Logique d'anticipation: la « cause » identifiée est mesurée après l'occurrence de l'événement étudié. L'origine causale est bien antérieure à l'événement, mais elle n'est pas directement observable.

- Lorsque les variables dynamiques sont de type quantitatives/continues, le problème doit aussi être considérer avec des anticipations sur les valeurs attendues de ces variables, observées postérieurement à l'évènement étudié. On peut introduire des « lags » dans le modèle pour saisir ce phénomène : par exemple  $x_t = x_{t+1}$ . Ce décalage du temps d'occurrence peut être également réalisé pour les variables discrètes (naissance d'un enfant par exemple).

# Compléments

## Modèles paramétriques

Objectifs: présenter (très/trop rapidement) la logique des modèles de type AFT, pour Accelerated Failure Time, principalement le modèle de Weibull (et exponentiel). Je n'ai pas forcément de pratique sur les modèles paramétriques, et à terme plutôt intéressé pour explorer de manière plus approfondie et présenter le modèle de Parmar-Royston.

### Les modèles paramétriques usuels

- Dans les modèles paramétriques, la durée de survie est distribuée selon une loi dont la densité  $f(t)$  s'exprime en fonction de paramètres (de la loi).
- Pour utiliser l'approche paramétrique, il faut avoir de bonnes raisons de penser que les temps de survie sont approximativement distribués selon une certaine loi connue plutôt qu'une autre.
- La majorité des distributions reposent sur une hypothèse dite **AFT (Accelerated Failure Time)**. Une seule repose seulement sur l'hypothèse PH (Gompertz), certaines peuvent selon la paramétrisation reposer sur les deux (exponentiel et Weibull).

### Hypothèse AFT: Accelerated Failure Time

L'hypothèse AFT signifie que l'effet des covariables est multiplicatif par rapport à la durée de survie. Par opposition, les modèles PH décrivent un effet multiplicatif par rapport au risque. Selon les caractéristiques des individus, « *le temps ne s'écouleraient pas à la même vitesse* », ils ne partagent plus la même métrique temporelle. Remarque: on a souvent des explications de type *dilation/contraction* du temps, par analogie à la théorie de la relativité.

Exemple populaire: la durée de vie d'un être humain et d'un chien. On dit qu'une année de vie d'un être humain équivaut à 7 années de vie d'un chien. C'est typiquement une hypothèse d'AFT.

$S_h(t) = S_c(7 \times t)$ . C'est ce facteur multiplicatif qu'estime un modèle paramétrique de type AFT.

$$S(t_i|X_1) = S(\phi t_i|X_0)$$

Remarque: si un modèle s'estime également sous hypothèse PH (ex Weibull):  
 $h(t_i|X_1) = -\rho \phi h(t_i|X_0)$

- Avantage: l'interprétation des modèles est directement liée aux fonctions de survie. Pratique après une analyse non paramétrique.
- Inconvénient: ne permet pas l'introduction de variables dynamiques. On doit trouver une forme fonctionnelle de la densité du risque qui s'ajuste bien. Et elle sont en nombre limitée.

Un être humain versus un chien: la probabilité qu'un être humain survive 80 ans est égale à la probabilité qu'un chien survive 11 ans ( $80/7$ ). Le temps s'écoule donc plus vite pour le chien que pour l'être humain. Ce raisonnement peut s'appliquer aux quantiles du temps de survie: le temps de survie médian d'un être humain est 7 fois plus élevé que celui d'un chien. En terme d'interprétation des paramètres estimés, si le temps de survie est plus court, le risque est plus élevé.

## Principe de construction des modèles AFT

Le raisonnement mathématique est ici bien plus complexe. On donnera juste quelques pistes en début de raisonnement.

On part d'une expression proche du modèle linéaire (à une transformation logarithmique près de la variable dépendante). En imposant la contrainte  $t_i > 0$ , en ne posant qu'une seule covariable  $X$  de type binaire, et en se situant de nouveau dans une logique de durée strictement continue (pas d'évènement simultané):

$$\log(t_i) = \alpha_0 + \alpha_1 X_i + b \times u_i$$

$b$  est un paramètre d'échelle identique pour toutes les observations et  $u_i$  un terme de terme d'erreur qui suit une loi de distribution de densité  $f(u)$ . C'est la forme de  $f(u)$  qui définit le type de modèle paramétrique. Par simple réécriture:  $f(u_i) = f\left(\frac{\log(t_i) - \alpha_0 - \alpha_1 X_i}{b}\right)$ . La suite est interminable....

## Quelques lois de distribution

### Modèles de Weibull et modèle exponentiel

#### Weibull

- Peut estimer un modèle PH ou AFT, d'où sa popularité.
- Distribution monotone des temps d'évènement (toujours croissante/décroissante).
- $f(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha}$  et  $h(t) = \lambda \alpha (\lambda t)^{\alpha-1}$ ,  $\alpha > 0$  et  $\lambda > 0$ . Le risque est croissant si  $\lambda > 1$ , décroissant si  $\lambda < 1$ , et est égal à la loi exponentielle si  $\lambda = 1$ .

#### Exponentiel

- Processus sans mémoire, utilisé pour étudier par exemple la durée de vie de composants électriques ou électroniques.

- La fonction de risque est une constante.
- Cas limite de la loi de Weibull. Un modèle de type exponentiel peut-être de type AFT ou PH.
- Pour contourner la stricte constance du risque dans le temps, on peut estimer un modèle en scindant la durée en plusieurs intervalles. Le risque sera constant à l'intérieur de ces intervalles, il s'agit d'un modèle "exponential piecewise" (exponentiel par morceau). Ce type de modèle est assez populaire, en particulier en démographie, il est estimable à partir d'un modèle de Poisson, et quasiment assimilable à un modèle de Cox.

### **Log-logistique**

- Estime un modèle de type AFT seulement. Proche du modèle log-normal (plus difficile à estimer).
- Permet une interprétation en terme d'Odds de survie.
- La fonction du risque peut être "U-shaped" (unimodale croissante puis décroissante).

**Autres lois:** Gompertz (risques proportionnels seulement), Gamma et Gamma généralisé..... Le modèle de Gompertz a été beaucoup utilisé en démographie, en particulier dans l'analyse de la mortalité.

**Sélection de la loi** On peut sélectionner la loi en comparant les AIC où les BIC des modèles. Pour le modèle de Weibull, on peut voir s'il peut bien ajuster les données en regardant la linéarité de la transformation  $\log(-\log(S(t_i)))$  par rapport à  $\log(t_i)$ .

### **Exemple avec les malformations cardiaques**

Estimation sans covariables

#### **Comparaison des AIC**

Weibull: 400.1

Exponentiel: 461.0

Gompertz: 409.6

*Log-logistique:* 391.8

### **Exemple avec le modèle de Weibull**

Ce n'est pas le meilleur modèle (cf AIC du modèle log-logistique), mais il est assez standard, et peut être paramétré sous risques proportionnels, approche décrites précédemment.

## AFT

### Weibull AFT regression

| No. of subjects = | 103       | Number of obs | =     | 103                        |
|-------------------|-----------|---------------|-------|----------------------------|
| No. of failures = | 75        |               |       |                            |
| Time at risk =    | 31938     |               |       |                            |
|                   |           | LR chi2(3)    | =     | 18.87                      |
| Log likelihood =  | -188.6278 | Prob > chi2   | =     | 0.0003                     |
| <hr/>             |           |               |       |                            |
| _t                | Coef.     | Std. Err.     | z     | P> z  [95% Conf. Interval] |
| year              | 0.1620    | 0.1218        | 1.33  | 0.184 -0.0768 0.4008       |
| age               | -0.0615   | 0.0247        | -2.49 | 0.013 -0.1100 -0.0130      |
| surgery           | 1.9703    | 0.7794        | 2.53  | 0.011 0.4427 3.4980        |
| _cons             | -3.0220   | 8.7284        | -0.35 | 0.729 -20.1294 14.0854     |
| /ln_p             | -0.5868   | 0.0927        | -6.33 | 0.000 -0.7685 -0.4051      |
| p                 | 0.5561    | 0.0516        |       | 0.4637 0.6669              |
| 1/p               | 1.7983    | 0.1667        |       | 1.4995 2.1566              |

Une journée de survie d'une personne qui n'a pas été opérée d'un pontage correspond à 7 jours (soit une semaine) de survie d'une personne opérée ( $e^{1.9703}$ ). Cette remise à l'échelle de la métrique temporelle entre les deux groupes exprime bien le gain en durée de survie médiane pour les personnes opérées, soit des risques journaliers de décès plus faibles (et plus faibles à valeurs constantes, proportionnalité oblige).

## PH

### Weibull PH regression

| No. of subjects = | 103       | Number of obs | =     | 103                        |
|-------------------|-----------|---------------|-------|----------------------------|
| No. of failures = | 75        |               |       |                            |
| Time at risk =    | 31938     |               |       |                            |
|                   |           | LR chi2(3)    | =     | 18.87                      |
| Log likelihood =  | -188.6278 | Prob > chi2   | =     | 0.0003                     |
| <hr/>             |           |               |       |                            |
| _t                | Coef.     | Std. Err.     | z     | P> z  [95% Conf. Interval] |
| year              | -.0900736 | .0663972      | -1.36 | 0.175 -.2202097 .0400626   |
| age               | .034214   | .0138509      | 2.47  | 0.014 .0070667 .0613613    |
| surgery           | -1.095685 | .4341312      | -2.52 | 0.012 -1.946566 -.2448033  |
| _cons             | 1.680511  | 4.823645      | 0.35  | 0.728 -7.77366 11.13468    |
| /ln_p             | -.5868247 | .0927049      | -6.33 | 0.000 -.768523 -.4051264   |
| p                 | .5560902  | .0515523      |       | .4636974 .6668925          |
| 1/p               | 1.798269  | .1667084      |       | 1.499492 2.156579          |

Remarque:  $b_{ph} = -\rho \times b_{aft}$ . Ici  $-0.556 \times (1.97) = -1.096$

### Modèle de Cox précédemment estimé

| Cox regression -- Breslow method for ties |            |           |       |               |                      |           |
|---|------------|-----------|-------|---------------|----------------------|-----------|
| No. of subjects =                         | 103        |           |       | Number of obs | = 103                |           |
| No. of failures =                         | 75         |           |       |               |                      |           |
| Time at risk =                            | 31938      |           |       | LR chi2(3) =  | 17.56                |           |
| Log likelihood =                          | -289.54474 |           |       | Prob > chi2 = | 0.0005               |           |
| <hr/>                                     |            |           |       |               |                      |           |
| _t  | Coef.      | Std. Err. | z     | P> z          | [95% Conf. Interval] |           |
| year                                      | -.1195075  | .0673691  | -1.77 | 0.076         | -.2515486            | .0125336  |
| age                                       | .0295539   | .0135341  | 2.18  | 0.029         | .0030275             | .0560803  |
| surgery                                   | -.984869   | .4362881  | -2.26 | 0.024         | -1.839978            | -.1297601 |
| <hr/>                                     |            |           |       |               |                      |           |

**Attention:** on ne peut pas comparer la qualité d'un modèle paramétrique à celle d'un modèle de Cox par des critères type AIC ou BIC. Les deux méthodes d'estimation sont totalement différentes.

## Risques concurrents

Le problème des événements multiples dans les analyses de survie a été posée dans les années 1970 avec la notion de « **risques concurrents** » (*competing risks*) : il s'agit d'événements survenant pendant la période d'observation et qui « empêchent » l'occurrence de l'évènement d'intérêt.

- On étudie un processus dont l'occurrence peut être scindée en plusieurs modalités, « causes » ou « types »: la mortalité par cause de décès, les types de sortie du chômage (formation, emploi, radiation), les types de sortie de l'emploi (chômage, longue maladie, sortie du marché du travail hors retraite), les lieux de migration ou les espaces de mobilité résidentielle, type de rupture d'union (séparation-divorce, veuvage). Déjà abordé dans la partie théorie, avec un recueil de données de type prospectif des « perdu.e.s de vue » peuvent difficilement être assimilés à des sorties d'observation non informatives (censures).
- L'analyse des risques concurrents est un cas particulier des modèles « multi-états » avec différents risques considérés comme absorbants.
- En présence de risques concurrents, l'estimation de Kaplan-Meier ne peut se faire que sous **l'hypothèse d'indépendance entre chacun des risques**. Sinon l'estimateur n'est plus une probabilité. Il n'est pas possible de mesurer cette hypothèse.
- Une estimation de type KM d'un évènement en concurrence avec d'autres impose que ces derniers soient traités comme des censures à droites non informatives.
- En terme de lecture des résultats, on utilise rarement les fonctions de survie. On survit ou non à un évènement, mais il est en revanche peu intuitif de dire qu'on survit à une cause.

## Risques « cause-specific » et biais sur les estimateurs KM

- Si les risques ne sont pas indépendants les uns par rapport aux autres, la somme des estimateurs de  $(1-KM)$  pour chaque risque n'est pas égale - elle est **supérieure** - à l'estimateur de  $(1-KM)$  où les risques concurrents sont regroupés en un évènement unique (par exemple le décès).

- Le risque calculé en considérant les risques concurrents comme des censures à droite est appelé « **cause-specific risk** ».

Pour le risque de type  $k$ , le risque *cause-spécifique* (traduction?) en  $t_i$  est égal à:

$$h_k(t_i) = \frac{d_{i,k}}{R_i}$$

Où  $d_{i,k}$  est le nombre d'évènement de type  $k$  survenu en  $t_i$  et  $R_i$  la population soumise en  $t_i$ .

Conséquence : si les risques ne sont pas indépendants, la fonction de survie estimée avec la méthode Kaplan Meier n'exprime plus une probabilité.

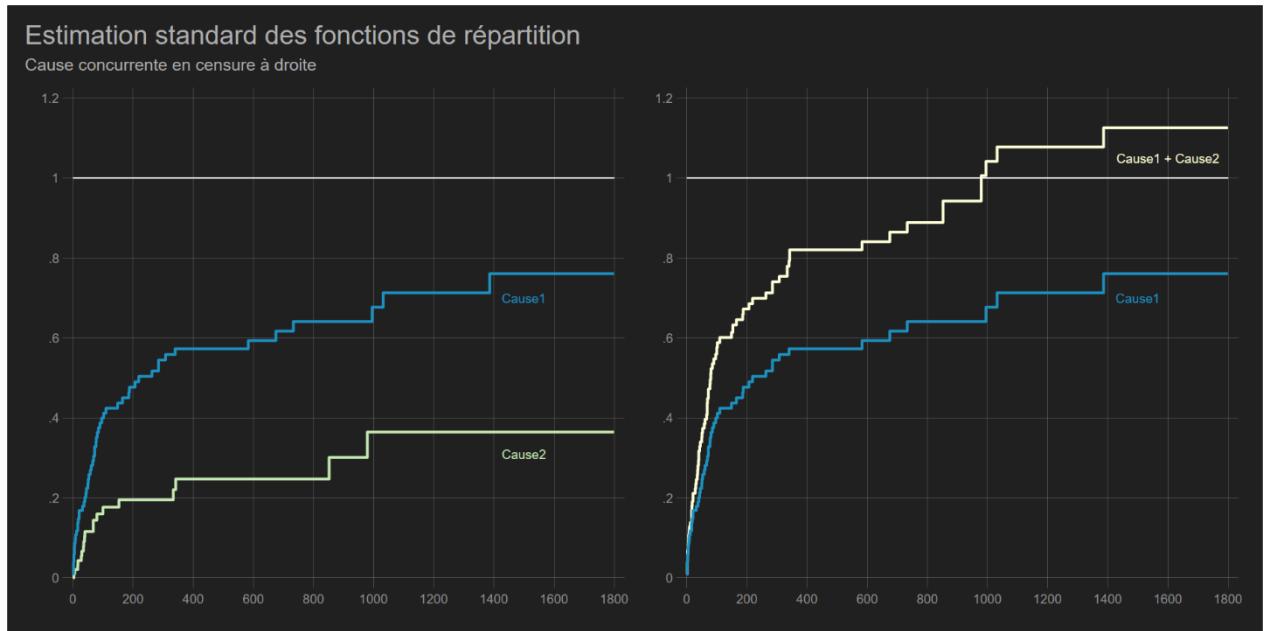
#### **Exemple sur les décès causés par une malformation cardiaque aigüe**

Dans la base d'origine, il n'y a pas directement cette dimension de risque concurrent, même si on trouve dans la littérature médicale des études prenant le décès rapide post greffe comme un risque de ce type. Les données étant assez anciennes, avec beaucoup de décès post-opératoire, je ne me suis pas « risquer » à générer directement un risque concurrent. Une sortie concurrente a donc été simulée sans plus de précision (cause2), que l'on considérera non strictement indépendante à la cause d'intérêt. Ce risque entre en concurrence avec la cause du décès directement liée à la malformation cardiaque, que la personne ait été transplanté ou non.

|        |  | Survival Status<br>(1=dead) |    | Total |
|--------|--|-----------------------------|----|-------|
| compet |  | 0                           | 1  |       |
| 0      |  | 28                          | 0  | 28    |
| 1      |  | 0                           | 56 | 56    |
| 2      |  | 0                           | 19 | 19    |
| Total  |  | 28                          | 75 | 103   |

Lorsqu'on a analysé le décès par la méthode KM, la proportion de survivant.e.s était de 15%.

Si on applique la méthode de Kaplan Meier à la cause 1 en traitant la cause 2 comme une censure à droite, et à la cause 2 en traitant la cause 1 comme une censure à droite, puis en sommant les deux estimateurs, la fonction de répartition excède 100% au bout de 1000 jours environ. La proportion de survivant.e.s est donc négative.



## Estimations en présence de risques concurrents

### Estimation non paramétrique

- Utiliser l'estimateur de Nelson Aalen: il s'agit du risque instantané cumulé. Comme il ne s'agit pas d'une probabilité, il a été longtemps utilisé comme mesure de l'incidence en présence d'au moins un risque concurrent dans une logique dite « cause spécifique »:

$$H_k(t_i) = \sum_{t_i \leq t} \left( \frac{e_{i,k}}{n_i} \right)$$

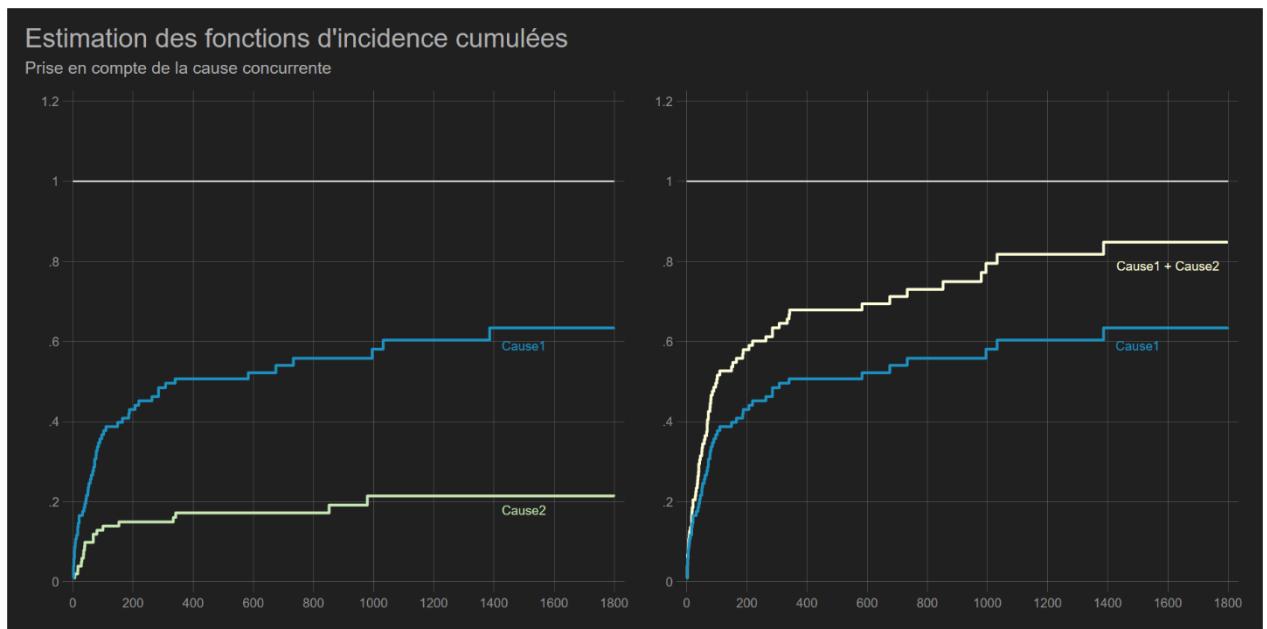
- De nos jours, l'estimateur le plus utilisé est la fonction dite **d'incidence cumulée - CIF** - (Kalbfleisch-Prentice, Marubini-Valscchi):
  - Il repose sur une probabilité tout en supportant la non indépendance des risques.
  - Son interprétation est identique à la fonction de répartition  $F(t) = 1 - S(t)$ . Cette fonction est donc croissante.
  - Il est possible de tester les différences entre CIF: test de Gray ou test de Pepe-Mori.

### La fonction d'incidence cumulée (CIF)

- Si  $h_k(t_i)$  est le risque « cause-spécifique » en  $t_i$  et  $S(t_i - 1)$  l'estimateur de Kaplan-Meier en  $t_i - 1$  lorsque tous les risques sont regroupés en un événement unique, la fonction d'incidence cumulée pour le risque  $k$  en  $t_i$  est égale à:

$$IC_k(t_i) = \sum_{t_i \leq t} S(t_i - 1) h_k(t_i)$$

- Les valeurs prises par cette fonction en  $t_i$  ne dépendent donc pas seulement des individus ayant observé l'évènement à partir de cette seule cause, mais aussi du nombre de personnes qui n'ont pas encore observés l'évènement à partir des autres causes identifiées. Cette dernière information est donnée par  $S(t_i - 1)$ . Cela permet à la grandeur de conserver une propriété de probabilité.
- L'incidence cumulée peut ainsi s'interpréter simplement comme la proportion d'individus qui sont sortis du risque jusqu'en  $t_i$  en raison de la cause  $k$ .



```

failure:  competit == 1
competing failures:  competit == 2

      Time      CIF        SE    [95% Conf. Int.]
-----
```

| Time | CIF    | SE     | [95% Conf. Int.] |
|------|--------|--------|------------------|
| 1    | 0.0097 | 0.0097 | 0.0009 0.0477    |
| 2    | 0.0194 | 0.0136 | 0.0038 0.0619    |
| 3    | 0.0485 | 0.0212 | 0.0181 0.1022    |
| 5    | 0.0680 | 0.0248 | 0.0300 0.1273    |
| 6    | 0.0874 | 0.0278 | 0.0429 0.1515    |
| 8    | 0.0971 | 0.0292 | 0.0497 0.1634    |
| 9    | 0.1068 | 0.0304 | 0.0566 0.1751    |
| 12   | 0.1166 | 0.0316 | 0.0638 0.1868    |
| 16   | 0.1264 | 0.0328 | 0.0711 0.1984    |
| 18   | 0.1362 | 0.0338 | 0.0785 0.2099    |
| 21   | 0.1559 | 0.0358 | 0.0937 0.2325    |
| 30   | 0.1657 | 0.0367 | 0.1014 0.2437    |
| 32   | 0.1756 | 0.0376 | 0.1093 0.2550    |
| 35   | 0.1856 | 0.0384 | 0.1173 0.2662    |
| 37   | 0.1955 | 0.0392 | 0.1253 0.2773    |

|      |               |               |               |               |
|------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 39   | 0.2055        | 0.0400        | 0.1335        | 0.2884        |
| 40   | 0.2156        | 0.0407        | 0.1418        | 0.2996        |
| 45   | 0.2256        | 0.0414        | 0.1502        | 0.3107        |
| 50   | 0.2357        | 0.0421        | 0.1586        | 0.3217        |
| 53   | 0.2458        | 0.0427        | 0.1671        | 0.3327        |
| 58   | 0.2559        | 0.0433        | 0.1757        | 0.3436        |
| 61   | 0.2660        | 0.0439        | 0.1843        | 0.3544        |
| 66   | 0.2761        | 0.0445        | 0.1930        | 0.3652        |
| 68   | 0.2861        | 0.0450        | 0.2018        | 0.3759        |
| 69   | 0.2962        | 0.0454        | 0.2106        | 0.3866        |
| 72   | 0.3063        | 0.0459        | 0.2195        | 0.3973        |
| 77   | 0.3164        | 0.0463        | 0.2284        | 0.4079        |
| 78   | 0.3265        | 0.0467        | 0.2374        | 0.4184        |
| 81   | 0.3365        | 0.0471        | 0.2464        | 0.4289        |
| 85   | 0.3466        | 0.0474        | 0.2554        | 0.4393        |
| 90   | 0.3567        | 0.0478        | 0.2645        | 0.4497        |
| 96   | 0.3668        | 0.0481        | 0.2737        | 0.4601        |
| 100  | 0.3769        | 0.0484        | 0.2829        | 0.4704        |
| 102  | 0.3870        | 0.0486        | 0.2921        | 0.4807        |
| 110  | 0.3972        | 0.0489        | 0.3016        | 0.4911        |
| 149  | 0.4078        | 0.0491        | 0.3112        | 0.5019        |
| 153  | 0.4183        | 0.0494        | 0.3209        | 0.5125        |
| 186  | 0.4291        | 0.0496        | 0.3309        | 0.5235        |
| 188  | 0.4399        | 0.0498        | 0.3409        | 0.5343        |
| 207  | 0.4506        | 0.0500        | 0.3509        | 0.5451        |
| 263  | 0.4614        | 0.0502        | 0.3610        | 0.5559        |
| 285  | 0.4836        | 0.0505        | 0.3818        | 0.5780        |
| 308  | <b>0.4947</b> | <b>0.0506</b> | <b>0.3923</b> | <b>0.5890</b> |
| 340  | 0.5058        | 0.0507        | 0.4028        | 0.5999        |
| 583  | 0.5211        | 0.0513        | 0.4162        | 0.6158        |
| 733  | 0.5391        | 0.0524        | 0.4313        | 0.6351        |
| 852  | 0.5584        | 0.0535        | 0.4475        | 0.6555        |
| 995  | 0.5811        | 0.0550        | 0.4657        | 0.6801        |
| 1032 | 0.6039        | 0.0561        | 0.4850        | 0.7036        |
| 1386 | 0.6343        | 0.0584        | 0.5084        | 0.7362        |

```

failure:  competit == 2
competing failures:  competit == 1

```

| Time | CIF    | SE     | [95% Conf. Int.] |        |
|------|--------|--------|------------------|--------|
| 2    | 0.0194 | 0.0136 | 0.0038           | 0.0619 |
| 16   | 0.0391 | 0.0191 | 0.0128           | 0.0897 |
| 17   | 0.0489 | 0.0213 | 0.0182           | 0.1029 |
| 28   | 0.0587 | 0.0232 | 0.0240           | 0.1157 |
| 36   | 0.0686 | 0.0250 | 0.0302           | 0.1286 |
| 40   | 0.0787 | 0.0267 | 0.0368           | 0.1413 |
| 43   | 0.0888 | 0.0283 | 0.0436           | 0.1539 |
| 51   | 0.0989 | 0.0297 | 0.0506           | 0.1663 |
| 68   | 0.1090 | 0.0310 | 0.0578           | 0.1785 |
| 72   | 0.1190 | 0.0323 | 0.0651           | 0.1905 |
| 80   | 0.1291 | 0.0334 | 0.0726           | 0.2024 |
| 165  | 0.1396 | 0.0346 | 0.0804           | 0.2149 |
| 219  | 0.1504 | 0.0358 | 0.0886           | 0.2276 |
| 334  | 0.1615 | 0.0370 | 0.0970           | 0.2406 |
| 342  | 0.1730 | 0.0383 | 0.1058           | 0.2540 |
| 675  | 0.1910 | 0.0414 | 0.1177           | 0.2777 |
| 979  | 0.2138 | 0.0457 | 0.1321           | 0.3086 |

En présence du risque concurrent, et traité comme tel, 50% des personnes sont décédées directement de la malformation cardiaque au bout de 308 jours (200 jours avec une estimation de type « cause specific »).

On peut vérifier que la somme des estimateurs permet d'obtenir la survie toutes causes confondues. Il n'y a pas de surprise à cela, dans l'estimateur Marubini-Valscchi la survie d'ensemble intervient comme un facteur de pondération de la mesure d'intensité dite « cause-specific ».

## Logiciels

L'estimation avec des risques de type « cause-specific » demande juste de recoder la variable évènement/censure, en glissant les risques concurrents en censure à droite.

**Sas** : maintenant directement estimable avec **proc lifetest**. Il suffit d'indiquer le ou les risques d'intérêt dans l'instruction précisant la variable de durée et de censure avec l'option **failcode=valeur**.

**Stata** : Estimation avec la commande externe **stcompet**. La commande génère des variables qui demande des manipulations supplémentaires pour afficher les résultats sous forme de tableau par exemple. On peut utiliser la commande externe **stcomlist** pour afficher directement les résultats.

**R** : la librairie **cmprsk** permet d'estimer simplement les incidences cumulées avec la fonction **cuminc**.

**Python** : le wrapper de R (cmprsk) ne fonctionne plus à ce jour à défaut de mise à jour.

## Comparaison des courbes

- Test d'homogénéité de **Gray**: est basé sur une autre mesure du risque en évènement concurrent. Il s'agit du « subdistribution risks » (« risque de sous-répartition », A.Latouche). Son interprétation n'est pas aisée car les personnes ayant observé un risque concurrent sont remises dans le Risk Set. Mais on peut directement le relié à l'estimation des CIF. Disponible avec SAS et R. Il est également sensible l'hypothèse de proportionnalité et à la distribution des censures à droites entre les groupes comparés.
- Test de **Pepe & Mori**: teste directement deux courbes d'incidences et seulement 2. Il y a une version du test qui repose sur une autre fonction directement tirée des incidences, la CPF (Conditional Probability Function), que je ne traite pas afin de ne pas rajouter un concept de supplémentaire.

- On peut toujours tester les différences entre les risques « causes spécifiques » avec un test du log-rank. Mais on ne teste pas des différences entre CIF. Déconseillé.

### Test de Gray pour la variable surgery

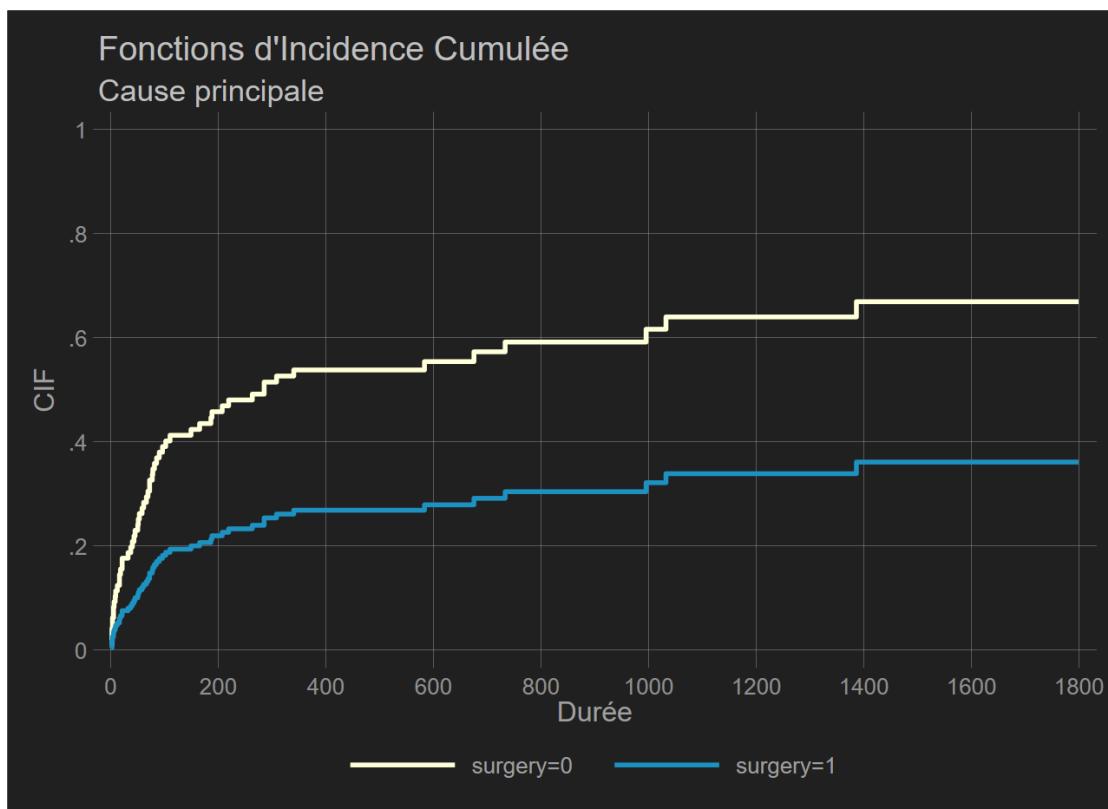
Tests:

|        | stat      | pv     | df |
|--------|-----------|--------|----|
| cause1 | 5.7834605 | 0.0161 | 1  |
| cause2 | 0.1293076 | 0.7191 | 1  |

### Test de Pepe-Mori pour la variable surgery

```
Main event failure:  compet == 1
Chi2(1) = 6.2028 - p = 0.01275
```

```
Competing event failure:  compet == 2
Chi2(1) = 1.8796 - p = 0.17038
```



## Logiciels

**Sas :** le test de Gray est estimé si on ajoute l'option `strata=nom_variable` à la proc `lifetest` sous risque concurrent (voir encadré précédent). Le test de Pepe-Mori est disponible via une macro externe (%`compcif`) : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9780470870709.app2>

**Stata:** Le test de Gray n'est pas disponible, il faut passer par une exécution de la fonction `cuminc` de la librairie R `cmprsk` directement dans stata (voir la commande `rsource`). Pour faire plus simple, on peut estimer le modèle de Fine-Gray avec une seule variable (discrète). Le résultat est comparable à celui du test (voir plus bas). Le test de Pepe-Mori est disponible via la commande externe `stpepmori`.

**R :** On ajoute une variable à la fonction `cuminc` de la librairie `cmprsk`. Pas de test de Pepe-Mori sur les fonctions d'incidence à ma connaissance.

**Python :** Ne pas essayer d'utiliser la librairie `cmprsk` qui n'est pas mis à jour et ne fonctionne plus.

## Modèles semi paramétrique et à temps discret

Cette présentation sera plutôt brève. Dans le domaine des sciences sociales, je préconise plutôt l'utilisation d'un modèle multinomial à temps discret de type logistique. Le modèle de Cox en présence de risques concurrent n'est valable que dans une logique de risques « cause-specific », le modèle de Fine et Gray bien que directement relié à l'estimation des incidences cumulées, repose sur une définition du risque (de sous répartition) dont l'interprétation n'est pas naturelle. Il est également soumis à l'hypothèse de proportionnalité des risques. Il est globalement très critiqué (cf blog d'Allison).

### Modélisation des risques « cause-specific » : Cox

Modèle de Cox «standard» pour chaque événement, les évènements concurrents sont traités comme des censures à droite. Aucune interprétation sur les fonctions d'incidence ne peut-être faite.

### Modèle de Fine-Gray: *subdistribution hazard regression*

Modèle de type semi-paramétrique avec une redéfinition du risque lié à l'estimation des fonctions d'incidence (voir test de Gray). La différence avec le Cox classique réside dans le calcul du risk-set : les évènements concurrents ne sont pas considérés comme des censures, on laisse les individus leur « survivre » jusqu'à la durée maximale observée dans l'échantillon. L'interprétation n'est donc pas très intuitive (Fine et Gray le soulignent). Ce modèle est relativement controversé.

Pour les questions liées à l'interprétation de ces deux types de modèles, se reporter à: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1002/sim.7501>

## Logiciels (modèle de Fine & Gray)

**Sas:** même principe que pour l'estimation non paramétrique, on ajoute l'option `eventcode=valeur` à l'instruction `model` de la proc `phreg`.

**Stata:** on utilise la commande interne `stcrreg`.

**R:** on utilise la fonction `crr` du package `cmprsk`.

**Python :** ne pas essayer d'utiliser la librairie `cmprsk` qui n'est pas mis à jour et ne fonctionne plus.

## Modèle à temps discret

- Il s'agit d'une extension du modèle à temps discret à évènement unique (toutes causes regroupées) avec ici le **modèle logistique multinomial**.
- S'il ne permet pas une interprétation sur les fonctions d'incidences, les risques concurrents ne sont pas traitées comme des censures à droite et sont estimés simultanément à la cause d'intérêt.
- Le modèle multinomial repose sur une hypothèse dite « d'indépendance » des alternatives non pertinentes (IIA). Cela peut donc paraître contradictoire d'utiliser ce modèle pour des évènements qui sont supposés non indépendants. Néanmoins la dépendance entre risques concurrents n'est pas non plus stricte. L'hypothèse d'IIA est souvent illustrée par l'exemple des couleurs des bus dans le choix du mode de transport (G. Debreu). On est loin ici d'un tel niveau de dépendance.
- En terme de lecture, le modèle logistique multinomial les estimateurs peuvent directement s'interpréter comme des rapports de risque (ou relative risk ratio). Ceci est l'objet d'une petite controverse liée à la lecture en Odds Ratio dans un modèle multinomial, qui devrait être strictement réservé pour certain.e.s à un signal binaire.
- En sciences sociales, il me semble que ce type de modèle soit à privilégier.
- On peut également envisager un modèle de type probit multinomial, mais on peut rencontrer des problèmes d'estimations (repose sur la loi normale multivariée). Prévoir un regroupement des causes concurrentes, et dans tous les cas de figure ne pas dépasser trois causes. Niveau lecture, il conviendra d'utiliser une méthode de standardisation, de type « effets marginaux ».

Pour l'exemple, j'ai utilisé comme plus haut pour les modèles à temps discret à évènement unique, le mois comme métrique temporelle.

|                                 |               |   |        |
|---------------------------------|---------------|---|--------|
| Multinomial logistic regression | Number of obs | = | 1,127  |
|                                 | LR chi2(10)   | = | 86.25  |
|                                 | Prob > chi2   | = | 0.0000 |
| Log likelihood = -275.00542     | Pseudo R2     | = | 0.1356 |

| e   | RRR | Std. Err. | z | P> z | [95% Conf. Interval] |
|---|-----|-----------|---|------|----------------------|
| <hr/>   |     |           |   |      |                      |
| 0   (base outcome)                                |     |           |   |      |                      |
| <hr/>   |     |           |   |      |                      |
| 1   |     |           |   |      |                      |
| t   0.8159 0.0338 -4.91 0.000 0.7522 0.8850       |     |           |   |      |                      |
| t2   1.0032 0.0009 3.53 0.000 1.0014 1.0049       |     |           |   |      |                      |
| age   1.0449 0.0183 2.51 0.012 1.0097 1.0813      |     |           |   |      |                      |
| year   0.8795 0.0718 -1.57 0.116 0.7494 1.0321    |     |           |   |      |                      |
| surgery   0.3175 0.1711 -2.13 0.033 0.1104 0.9129 |     |           |   |      |                      |
| <hr/>   |     |           |   |      |                      |
| 2   |     |           |   |      |                      |
| t   0.8168 0.0565 -2.93 0.003 0.7134 0.9353       |     |           |   |      |                      |
| t2   1.0030 0.0015 1.94 0.052 1.0000 1.0060       |     |           |   |      |                      |
| age   1.0111 0.0248 0.45 0.654 0.9635 1.0610      |     |           |   |      |                      |
| year   0.8158 0.1127 -1.47 0.141 0.6223 1.0695    |     |           |   |      |                      |
| surgery   0.5412 0.4221 -0.79 0.431 0.1173 2.4959 |     |           |   |      |                      |

Remarque : les constantes ne sont pas reportées, les valeurs de la référence n'ayant pas grand sens (année et âge à 0)

## Fragilité et immunité

A faire un jour.... mais le plus rapidement sera le mieux.

Quelques remarques tout de même.

Pour la fragilité (« frailty »), lire la dernière section du document de travail de Simon Quantin, je n'ai pas vu de meilleure présentation du problème que la sienne (en français). Très important, car une des sources de la non proportionnalité des risques se trouvent dans l'omission de variables. Ici on va être confronté une omission sur des traits non observables. Certaines de ces caractéristiques vont « accélérer » dès le début de la période d'exposition la survenue de l'évènement. L'introduction d'un facteur de fragilité se fait par l'introduction d'un effet aléatoire dans le modèle, de nature plus complexe, reposant sur des hypothèses fortes et rendant l'interprétation des modèles plus compliquée (on doit passer par des graphiques, le tableau de régression ne pouvant présenter des résultats en début d'exposition).

Pour l'immunité, qui est un cas particulier du précédent, on va interroger l'exposition au risque d'une partie observation. Visuellement on peut se poser cette question lorsque la courbe de séjour ne tend pas vers 0 mais présente une longue asymptote sur une valeur nettement supérieure à 0 :  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = a$ . On trouve déjà des applications en démographie en analyse de la fécondité (analyse des naissances de rang supérieur à 1). Cette problématique affecte les modèles de durées avec des évènements récurrents (non présentés). Pour traiter cette question, les modèles peuvent être de type mixte (probabilité d'être immunisée associée à un modèle de durée) ou non mixte de type bayésien. Il n'y a pas de méthode unifiée à ce jour, elles reste très dépendante du champ d'analyse d'origine.

# Applications logiciels

## SAS

### *Remarque: Sélection des outputs*

Selon le type d'analyse la totalité des outputs ne seront pas reproduits (*ods include* ou *ods exclude* pour la sélection). Un problème spécifique s'observe pour le tableau des estimateurs de Kaplan-Meier qui est particulièrement illisible en présence d'un nombre important d'observations censurées.

Exemple pour *proc lifetest*: noms des outputs récupérés dans la log

Output Added:

```
-----  
Name:      ProductLimitEstimates  
Label:     Product-Limit Estimates  
Template:  Stat.Lifetest.ProductLimitEstimates  
Path:      Lifetest.Stratum1.ProductLimitEstimates  
-----
```

Output Added:

```
-----  
Name:      Quartiles  
Label:    Quartiles of the Survival Distribution  
Template:  Stat.Lifetest.Quartiles  
Path:      Lifetest.Stratum1.TimeSummary.Quartiles  
-----
```

Output Added:

```
-----  
Name:      Means  
Label:    Mean  
Template:  Stat.Lifetest.Means  
Path:      Lifetest.Stratum1.TimeSummary.Means  
-----
```

Output Added:

```
-----  
Name:      SurvivalPlot  
Label:    Survival Curve  
Template:  Stat.Lifetest.Graphics.ProductLimitSurvival  
Path:      Lifetest.Stratum1.SurvivalPlot  
-----
```

Output Added:

```
-----  
Name:      CensoredSummary
```

|           |                               |
|-----------|-------------------------------|
| Label:    | Censored Summary              |
| Template: | Stat.Lifetest.CensoredSummary |
| Path:     | Lifetest.CensoredSummary      |

Utiliser de préférence le nom figurant dans la ligne **path**: (si comparaison de deux strates, le nom figurant dans la ligne **name** est identique).

### Récupération de la base

On peut télécharger la base d'exemple à cette adresse (onglet download ou cliquer sur view raw) :

[https://github.com/mthevenin/analyse\\_duree/blob/main/bases/trans.sas7bdat](https://github.com/mthevenin/analyse_duree/blob/main/bases/trans.sas7bdat)

## Analyse non paramétrique

### *Méthode actuarielle*

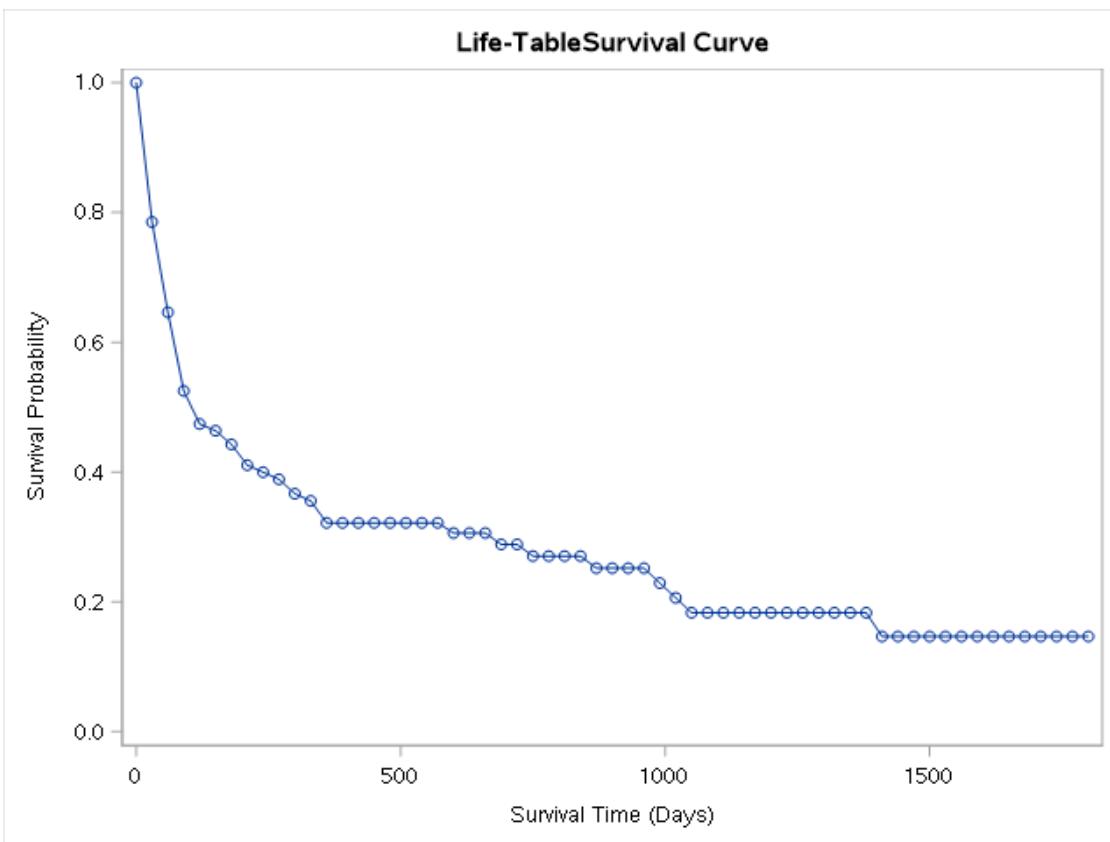
Avec une longueur d'intervalle fixe égale à 30 jours.

La durée médiane est donnée par la colonne **résidual median time**. Sur la première ligne, il s'agit de la durée médiane sur toutes les personnes exposées au risque. Dans les lignes suivantes, cette durée médiane est recalculée pour les personnes restant exposées au risque dans chaque intervalle.

```
proc lifetest data=trans method=lifetable width=30;
time stime*died(0);run;
```

| Life Table Survival Estimates |        |               |                 |                       |                                    |  |          |         |                         |                          |                       |  |
|-------------------------------|--------|---------------|-----------------|-----------------------|------------------------------------|--|----------|---------|-------------------------|--------------------------|-----------------------|--|
| Interval                      |        | Number Failed | Number Censored | Effective Sample Size | Conditional Probability of Failure | Conditional Probability Standard Error | Survival | Failure | Survival Standard Error | Median Residual Lifetime | Median Standard Error |  |
| [Lower                        | Upper) |               |                 |                       |                                    |  |          |         |                         |                          |                       |  |
| 0                             | 30     | 22            | 1               | 102.5                 | 0.2146                             | 0.0406                                 | 1.0000   | 0       | 0                       | 104.7                    | 29.0660               |  |
| 30                            | 60     | 14            | 2               | 79.0                  | 0.1772                             | 0.0430                                 | 0.7854   | 0.2146  | 0.0406                  | 229.4                    | 121.0                 |  |
| 60                            | 90     | 12            | 0               | 64.0                  | 0.1875                             | 0.0488                                 | 0.6462   | 0.3538  | 0.0475                  | 298.7                    | 35.7872               |  |
| 90                            | 120    | 5             | 1               | 51.5                  | 0.0971                             | 0.0413                                 | 0.5250   | 0.4750  | 0.0498                  | 762.7                    | 58.8416               |  |
| 120                           | 150    | 1             | 1               | 45.5                  | 0.0220                             | 0.0217                                 | 0.4741   | 0.5259  | 0.0499                  | 859.3                    | 46.0561               |  |
| 150                           | 180    | 2             | 0               | 44.0                  | 0.0455                             | 0.0314                                 | 0.4636   | 0.5364  | 0.0499                  | 836.2                    | 45.8052               |  |
| 180                           | 210    | 3             | 1               | 41.5                  | 0.0723                             | 0.0402                                 | 0.4426   | 0.5574  | 0.0498                  | 820.0                    | 45.0209               |  |
| 210                           | 240    | 1             | 0               | 38.0                  | 0.0263                             | 0.0260                                 | 0.4106   | 0.5894  | 0.0495                  | 810.9                    | 43.6474               |  |
| 240                           | 270    | 1             | 1               | 36.5                  | 0.0274                             | 0.0270                                 | 0.3998   | 0.6002  | 0.0494                  | 788.0                    | 43.3633               |  |
| 270                           | 300    | 2             | 0               | 35.0                  | 0.0571                             | 0.0392                                 | 0.3888   | 0.6112  | 0.0492                  | 765.2                    | 43.0695               |  |
| 300                           | 330    | 1             | 0               | 33.0                  | 0.0303                             | 0.0298                                 | 0.3666   | 0.6334  | 0.0488                  | 749.8                    | 41.8209               |  |
| 330                           | 360    | 3             | 1               | 31.5                  | 0.0952                             | 0.0523                                 | 0.3555   | 0.6445  | 0.0486                  | 1054.4                   | 25.9424               |  |
| 360                           | 390    | 0             | 1               | 27.5                  | 0                                  | 0                                      | 0.3216   | 0.6784  | 0.0478                  | 1038.3                   | 25.1208               |  |
| 390                           | 420    | 0             | 1               | 26.5                  | 0                                  | 0                                      | 0.3216   | 0.6784  | 0.0478                  | 1008.3                   | 25.5904               |  |
| 420                           | 450    | 0             | 2               | 25.0                  | 0                                  | 0                                      | 0.3216   | 0.6784  | 0.0478                  | 978.3                    | 26.3469               |  |
| 450                           | 480    | 0             | 0               | 24.0                  | 0                                  | 0                                      | 0.3216   | 0.6784  | 0.0478                  | 948.3                    | 26.8902               |  |
| 480                           | 510    | 0             | 1               | 23.5                  | 0                                  | 0                                      | 0.3216   | 0.6784  | 0.0478                  | 918.3                    | 27.1748               |  |
| 510                           | 540    | 0             | 1               | 22.5                  | 0                                  | 0                                      | 0.3216   | 0.6784  | 0.0478                  | 888.3                    | 27.7721               |  |
| 540                           | 570    | 0             | 1               | 21.5                  | 0                                  | 0                                      | 0.3216   | 0.6784  | 0.0478                  | 858.3                    | 28.4106               |  |
| 570                           | 600    | 1             | 1               | 20.5                  | 0.0488                             | 0.0476                                 | 0.3216   | 0.6784  | 0.0478                  | 828.3                    | 29.0953               |  |
| 600                           | 630    | 0             | 1               | 18.5                  | 0                                  | 0                                      | 0.3059   | 0.6941  | 0.0479                  | 804.7                    | 29.1337               |  |
| 630                           | 660    | 0             | 0               | 18.0                  | 0                                  | 0                                      | 0.3059   | 0.6941  | 0.0479                  | 774.7                    | 29.5355               |  |
| 660                           | 690    | 1             | 1               | 17.5                  | 0.0571                             | 0.0555                                 | 0.3059   | 0.6941  | 0.0479                  | 744.7                    | 29.9545               |  |
| 690                           | 720    | 0             | 0               | 16.0                  | 0                                  | 0                                      | 0.2885   | 0.7115  | 0.0483                  | -                        | -                     |  |
| 720                           | 750    | 1             | 0               | 16.0                  | 0.0625                             | 0.0605                                 | 0.2885   | 0.7115  | 0.0483                  | -                        | -                     |  |
| 750                           | 780    | 0             | 0               | 15.0                  | 0                                  | 0                                      | 0.2704   | 0.7296  | 0.0485                  | -                        | -                     |  |
| 780                           | 810    | 0             | 0               | 15.0                  | 0                                  | 0                                      | 0.2704   | 0.7296  | 0.0485                  | -                        | -                     |  |
| 810                           | 840    | 0             | 0               | 15.0                  | 0                                  | 0                                      | 0.2704   | 0.7296  | 0.0485                  | -                        | -                     |  |
| 840                           | 870    | 1             | 1               | 14.5                  | 0.0690                             | 0.0665                                 | 0.2704   | 0.7296  | 0.0485                  | -                        | -                     |  |
| 870                           | 900    | 0             | 0               | 13.0                  | 0                                  | 0                                      | 0.2518   | 0.7482  | 0.0486                  | -                        | -                     |  |
| 900                           | 930    | 0             | 1               | 12.5                  | 0                                  | 0                                      | 0.2518   | 0.7482  | 0.0486                  | -                        | -                     |  |
| 930                           | 960    | 0             | 1               | 11.5                  | 0                                  | 0                                      | 0.2518   | 0.7482  | 0.0486                  | -                        | -                     |  |
| 960                           | 990    | 1             | 0               | 11.0                  | 0.0909                             | 0.0867                                 | 0.2518   | 0.7482  | 0.0486                  | -                        | -                     |  |
| 990                           | 1020   | 1             | 0               | 10.0                  | 0.1000                             | 0.0949                                 | 0.2289   | 0.7711  | 0.0493                  | -                        | -                     |  |
| 1020                          | 1050   | 1             | 0               | 9.0                   | 0.1111                             | 0.1048                                 | 0.2060   | 0.7940  | 0.0494                  | -                        | -                     |  |
| 1050                          | 1080   | 0             | 0               | 8.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1831   | 0.8169  | 0.0489                  | -                        | -                     |  |
| 1080                          | 1110   | 0             | 0               | 8.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1831   | 0.8169  | 0.0489                  | -                        | -                     |  |
| 1110                          | 1140   | 0             | 0               | 8.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1831   | 0.8169  | 0.0489                  | -                        | -                     |  |
| 1140                          | 1170   | 0             | 1               | 7.5                   | 0                                  | 0                                      | 0.1831   | 0.8169  | 0.0489                  | -                        | -                     |  |
| 1170                          | 1200   | 0             | 0               | 7.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1831   | 0.8169  | 0.0489                  | -                        | -                     |  |
| 1200                          | 1230   | 0             | 0               | 7.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1831   | 0.8169  | 0.0489                  | -                        | -                     |  |

| Life Table Survival Estimates |        |               |                 |                       |                                    |  |          |         |                         |                          |                       |  |
|-------------------------------|--------|---------------|-----------------|-----------------------|------------------------------------|--|----------|---------|-------------------------|--------------------------|-----------------------|--|
| Interval                      |        | Number Failed | Number Censored | Effective Sample Size | Conditional Probability of Failure | Conditional Probability Standard Error |          |         | Survival Standard Error | Median Residual Lifetime | Median Standard Error |  |
| [Lower,                       | Upper] |               |                 |                       |                                    |  | Survival | Failure |                         |                          |                       |  |
| 1230                          | 1260   | 0             | 0               | 7.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1831   | 0.8169  | 0.0489                  | .                        | .                     |  |
| 1260                          | 1290   | 0             | 0               | 7.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1831   | 0.8169  | 0.0489                  | .                        | .                     |  |
| 1290                          | 1320   | 0             | 0               | 7.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1831   | 0.8169  | 0.0489                  | .                        | .                     |  |
| 1320                          | 1350   | 0             | 1               | 6.5                   | 0                                  | 0                                      | 0.1831   | 0.8169  | 0.0489                  | .                        | .                     |  |
| 1350                          | 1380   | 0             | 0               | 6.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1831   | 0.8169  | 0.0489                  | .                        | .                     |  |
| 1380                          | 1410   | 1             | 2               | 5.0                   | 0.2000                             | 0.1789                                 | 0.1831   | 0.8169  | 0.0489                  | .                        | .                     |  |
| 1410                          | 1440   | 0             | 0               | 3.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1465   | 0.8535  | 0.0510                  | .                        | .                     |  |
| 1440                          | 1470   | 0             | 0               | 3.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1465   | 0.8535  | 0.0510                  | .                        | .                     |  |
| 1470                          | 1500   | 0             | 0               | 3.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1465   | 0.8535  | 0.0510                  | .                        | .                     |  |
| 1500                          | 1530   | 0             | 0               | 3.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1465   | 0.8535  | 0.0510                  | .                        | .                     |  |
| 1530                          | 1560   | 0             | 0               | 3.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1465   | 0.8535  | 0.0510                  | .                        | .                     |  |
| 1560                          | 1590   | 0             | 2               | 2.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1465   | 0.8535  | 0.0510                  | .                        | .                     |  |
| 1590                          | 1620   | 0             | 0               | 1.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1465   | 0.8535  | 0.0510                  | .                        | .                     |  |
| 1620                          | 1650   | 0             | 0               | 1.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1465   | 0.8535  | 0.0510                  | .                        | .                     |  |
| 1650                          | 1680   | 0             | 0               | 1.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1465   | 0.8535  | 0.0510                  | .                        | .                     |  |
| 1680                          | 1710   | 0             | 0               | 1.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1465   | 0.8535  | 0.0510                  | .                        | .                     |  |
| 1710                          | 1740   | 0             | 0               | 1.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1465   | 0.8535  | 0.0510                  | .                        | .                     |  |
| 1740                          | 1770   | 0             | 0               | 1.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1465   | 0.8535  | 0.0510                  | .                        | .                     |  |
| 1770                          | 1800   | 0             | 1               | 0.5                   | 0                                  | 0                                      | 0.1465   | 0.8535  | 0.0510                  | .                        | .                     |  |
| 1800                          | .      | 0             | 0               | 0.0                   | 0                                  | 0                                      | 0.1465   | 0.8535  | 0.0510                  | .                        | .                     |  |



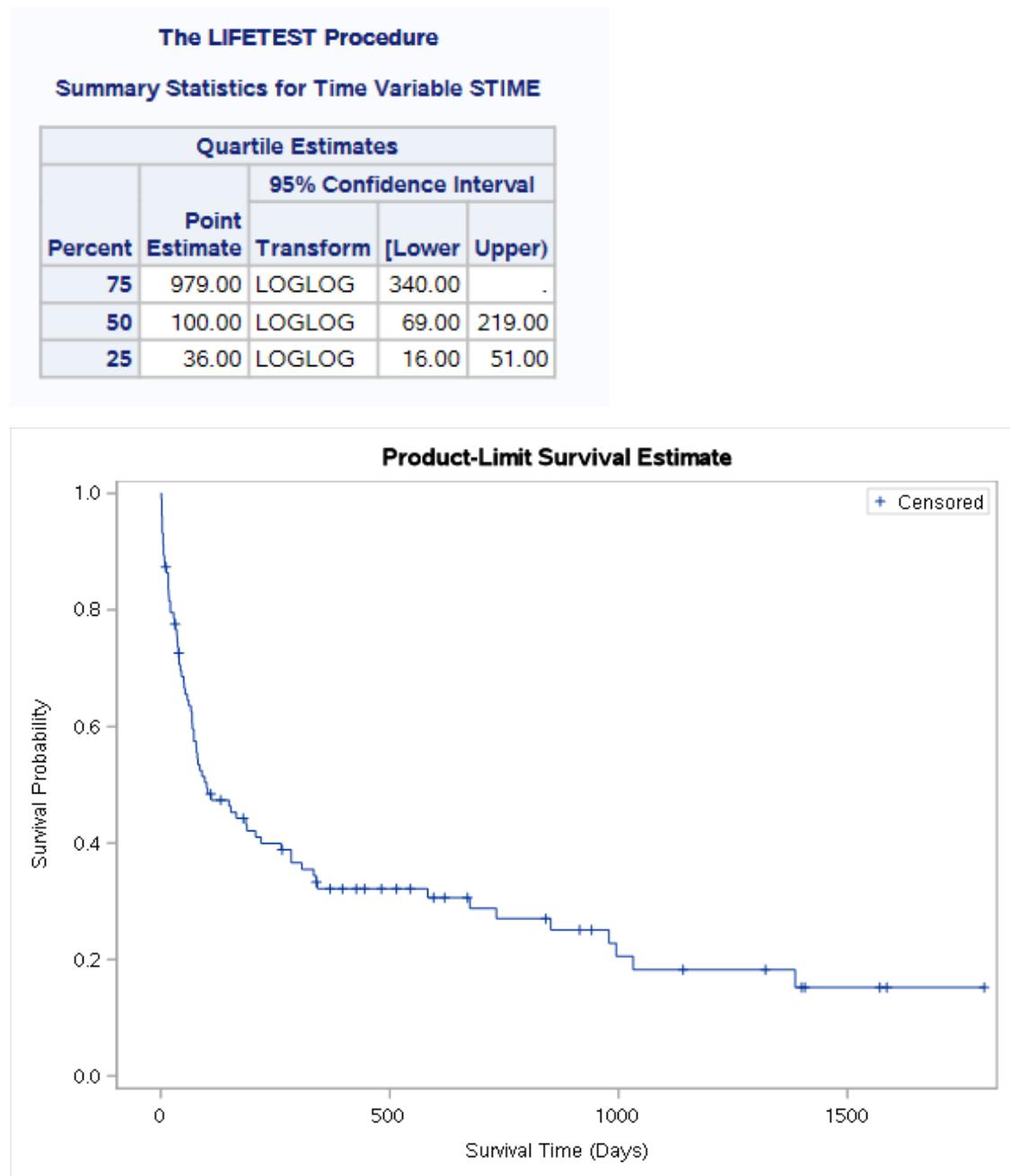
### Méthode Kaplan-Meier

Le tableau des estimateurs ne sera pas reporté (voir intro du document). Pour récupérer ces estimateurs, on peut le faire via l'instruction `output` et les exporter, par exemple, dans un tableau.

```

ods exclude Lifetest.Stratum1.ProductLimitEstimates;
proc lifetest data=trans;
time stime*died(0); run;

```



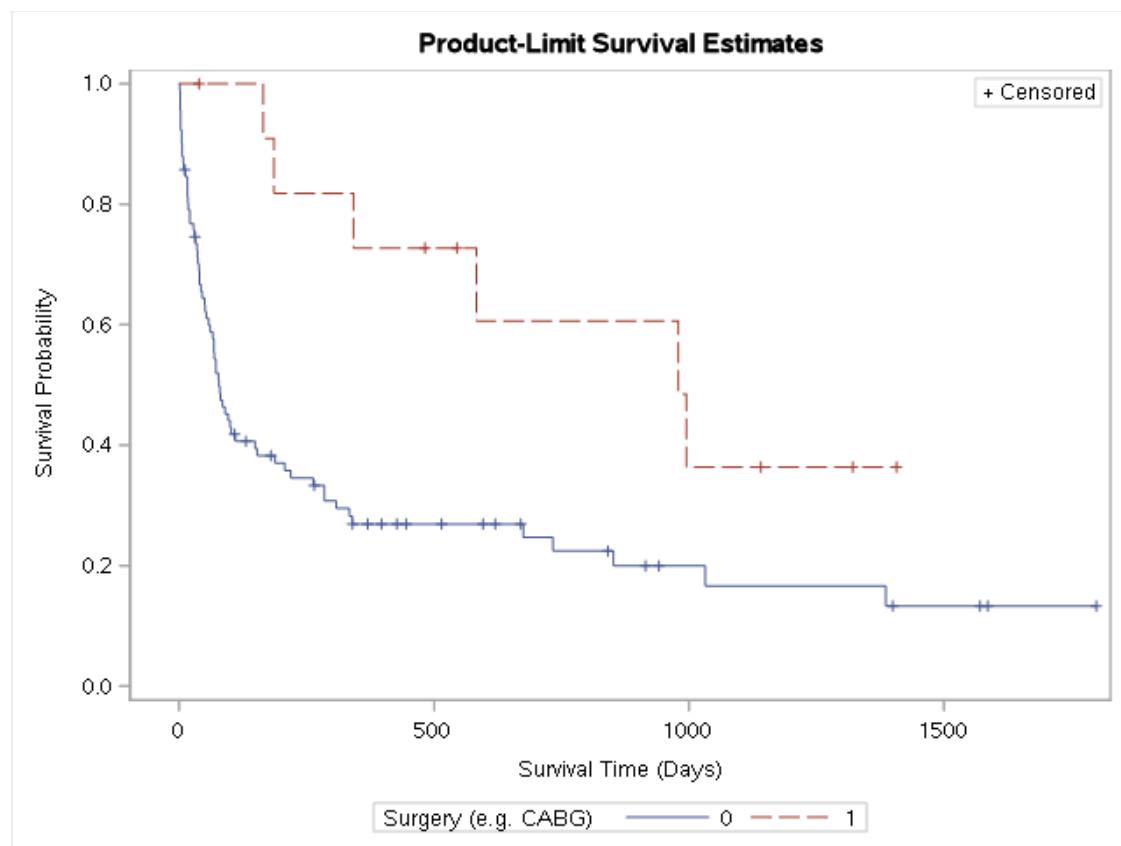
| Summary of the Number of Censored and Uncensored Values |        |          |                  |
|---|--------|----------|------------------|
| Total   | Failed | Censored | Percent Censored |
| 103   | 75     | 28       | 27.18            |

**Warning sur la durée moyenne reportée** Sauf exception (pas de censure à droite) ne pas interpréter le tableau donnant la durée moyenne, qui n'a pas été reporté ici. Voir l'estimation des RMST plus bas.

## Comparaison des fonctions de survie

### Tests du log rank

```
ods exclude Lifetest.Stratum1.ProductLimitEstimates Lifetest.Stratum2.ProductLimitEstimates ;  
  
proc lifetest data=trans;  
time stime*died(0);  
strata surgery / test=all;  
run;
```



### The LIFETEST Procedure

Stratum 1: Surgery (e.g. CABG) = 0

Summary Statistics for Time Variable STIME

| Percent | Point Estimate | 95% Confidence Interval |        |         |
|---------|----------------|-------------------------|--------|---------|
|         |                | Transform               | [Lower | Upper)  |
|         |                |                         | Lower  | Upper)  |
| 75      | 675.00         | LOGLOG                  | 219.00 | 1386.00 |
| 50      | 78.00          | LOGLOG                  | 58.00  | 149.00  |
| 25      | 30.00          | LOGLOG                  | 16.00  | 43.00   |

### The LIFETEST Procedure

Stratum 2: Surgery (e.g. CABG) = 1

Summary Statistics for Time Variable STIME

| Quartile Estimates |                |                         |         |        |
|--------------------|----------------|-------------------------|---------|--------|
| Percent            | Point Estimate | 95% Confidence Interval |         |        |
|                    |                | Transform               | [Lower] | Upper) |
| 75                 | .              | LOGLOG                  | 979.00  | .      |
| 50                 | 979.00         | LOGLOG                  | 186.00  | .      |
| 25                 | 342.00         | LOGLOG                  | 165.00  | 995.00 |

| Test of Equality over Strata |            |    |                 |
|------------------------------|------------|----|-----------------|
| Test                         | Chi-Square | DF | Pr > Chi-Square |
| Log-Rank                     | 6.5900     | 1  | 0.0103          |
| Wilcoxon                     | 8.9898     | 1  | 0.0027          |
| Tarone                       | 8.4624     | 1  | 0.0036          |
| Peto                         | 8.6641     | 1  | 0.0032          |
| Modified Peto                | 8.7027     | 1  | 0.0032          |
| Fleming(1)                   | 8.6508     | 1  | 0.0033          |

### Comparaison des RMST

Disponible avec le dernier module stat de Sas base (Sas-Stat 15.1 novembre 2018).

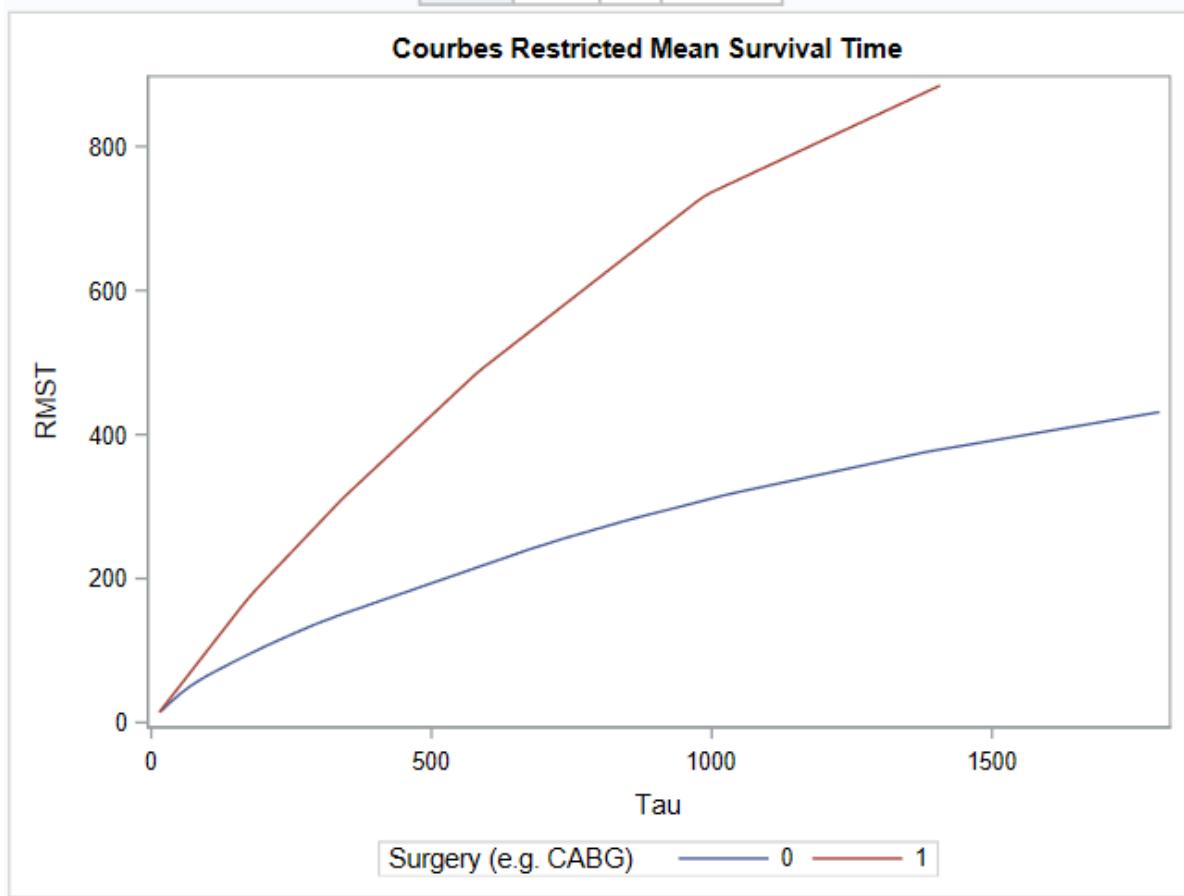
Attention à l'Ined pour celles et ceux qui utilisent la version Linux-Sas Studio. La maj n'a pas été encore faite.

```
ods exclude Lifetest.Stratum1.ProductLimitEstimates;
proc lifetest data=trans rmst plots=(rmst);
time stime*died(0);
strata surgery; run;
```

| Informations sur l'analyse RMST |      |
|---------------------------------|------|
| Tau                             | 1407 |

| Estimations RMST          |                     |            |             |  |
|---------------------------|---------------------|------------|-------------|--|
| Niveau de discréétisation | Surgery (e.g. CABG) | Estimation | Erreur type |  |
| 1                         | 0                   | 379.1476   | 58.6055     |  |
| 2                         | 1                   | 884.5758   | 151.9794    |  |

| Test RMST d'égalité |        |     |            |
|---------------------|--------|-----|------------|
| Source              | khi-2  | DDL | Pr > khi-2 |
| Strata              | 9.6282 | 1   | 0.0019     |



## Modèle semi paramétrique de Cox

### Estimation du modèle

On peut ajouter une instruction `class`. Contrairement à la `proc logistic`, codage à la référence seulement. Pas la peine d'ajouter l'option `param=ref`.

```
proc phreg data=trans;
model stime*died(0) = year age surgery ;
run;
```

| The PHREG Procedure   |                    |                    |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
|---|--------------------|--------------------|------------------|--------------------------|------------|--------------|---------------------|-----------|--------------------|-----------------|------------------|------------------|---------|-----|---------|---------|---------|---------|---------|------|---------|---|--------|
| <b>Model Information</b>  |                    |                    |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| Data Set  |                    | WORK.TRANS         |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| Dependent Variable  |                    | STIME              |                  | Survival Time (Days)     |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| Censoring Variable  |                    | DIED               |                  | Survival Status (1=dead) |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| Censoring Value(s)  |                    | 0                  |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| Ties Handling   |                    | BRESLOW            |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| <br>  |                    |                    |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| <b>Number of Observations Read</b> 103<br><b>Number of Observations Used</b> 103  |                    |                    |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| <br>  |                    |                    |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| <b>Summary of the Number of Event and Censored Values</b>   |                    |                    |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| <table><thead><tr><th>Total</th><th>Event</th><th>Censored</th><th>Percent Censored</th></tr></thead><tbody><tr><td>103</td><td>75</td><td>28</td><td>27.18</td></tr></tbody></table>   |                    |                    |                  |                          |            |              |                     | Total     | Event              | Censored        | Percent Censored | 103              | 75      | 28  | 27.18   |         |         |         |         |      |         |   |        |
| Total   | Event              | Censored           | Percent Censored |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| 103   | 75                 | 28                 | 27.18            |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| <br>  |                    |                    |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| <b>Convergence Status</b>   |                    |                    |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| Convergence criterion (GCONV=1E-8) satisfied.   |                    |                    |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| <br>  |                    |                    |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| <b>Model Fit Statistics</b>   |                    |                    |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| <table><thead><tr><th>Criterion</th><th>Without Covariates</th><th>With Covariates</th></tr></thead><tbody><tr><td>-2 LOG L</td><td>596.651</td><td>579.089</td></tr><tr><td>AIC</td><td>596.651</td><td>585.089</td></tr><tr><td>SBC</td><td>596.651</td><td>592.042</td></tr></tbody></table>                                   |                    |                    |                  |                          |            |              |                     | Criterion | Without Covariates | With Covariates | -2 LOG L         | 596.651          | 579.089 | AIC | 596.651 | 585.089 | SBC     | 596.651 | 592.042 |      |         |   |        |
| Criterion   | Without Covariates | With Covariates    |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| -2 LOG L  | 596.651            | 579.089            |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| AIC   | 596.651            | 585.089            |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| SBC   | 596.651            | 592.042            |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| <br>  |                    |                    |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| <b>Testing Global Null Hypothesis: BETA=0</b>   |                    |                    |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| <table><thead><tr><th>Test</th><th>Chi-Square</th><th>DF</th><th>Pr &gt; ChiSq</th></tr></thead><tbody><tr><td>Likelihood Ratio</td><td>17.5617</td><td>3</td><td>0.0005</td></tr><tr><td>Score</td><td>16.6482</td><td>3</td><td>0.0008</td></tr><tr><td>Wald</td><td>15.7002</td><td>3</td><td>0.0013</td></tr></tbody></table> |                    |                    |                  |                          |            |              |                     | Test      | Chi-Square         | DF              | Pr > ChiSq       | Likelihood Ratio | 17.5617 | 3   | 0.0005  | Score   | 16.6482 | 3       | 0.0008  | Wald | 15.7002 | 3 | 0.0013 |
| Test  | Chi-Square         | DF                 | Pr > ChiSq       |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| Likelihood Ratio  | 17.5617            | 3                  | 0.0005           |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| Score   | 16.6482            | 3                  | 0.0008           |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| Wald  | 15.7002            | 3                  | 0.0013           |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| <br>  |                    |                    |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| <b>Analysis of Maximum Likelihood Estimates</b>   |                    |                    |                  |                          |            |              |                     |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| Parameter   | DF                 | Parameter Estimate | Standard Error   | Chi-Square               | Pr > ChiSq | Hazard Ratio | Label               |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| YEAR  | 1                  | -0.11951           | 0.06737          | 3.1468                   | 0.0761     | 0.887        | Year of Acceptance  |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| AGE   | 1                  | 0.02955            | 0.01353          | 4.7683                   | 0.0290     | 1.030        | Age                 |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |
| SURGERY   | 1                  | -0.98469           | 0.43626          | 5.0946                   | 0.0240     | 0.374        | Surgery (e.g. CABG) |           |                    |                 |                  |                  |         |     |         |         |         |         |         |      |         |   |        |

## Tests de l'hypothèse PH

### Test de Grambsch Therneau sur les résidus de Schoenfeld

Le test est exécuté directement dans l'instruction `proc phreg` (ajouter `zph`). L'option `global` permet de récupérer le résultat du test omnibus (attention rejette facilement  $H_0$  - hypothèse PH respectée - lorsque le nombre de degré de liberté est élevé).

```
ods select PHReg.zphTest;  
  
proc phreg data=trans zph(global noplot);  
model stime*died(0) = year age surgery ;  
run;
```

The PHREG Procedure

| zph Tests for Nonproportional Hazards |                    |             |           |                |         |         |
|---------------------------------------|--------------------|-------------|-----------|----------------|---------|---------|
| Transform                             | Predictor Variable | Correlation | ChiSquare | Pr > ChiSquare | t Value | Pr >  t |
| RANK                                  | YEAR               | 0.1626      | 2.0370    | 0.1535         | 1.41    | 0.1634  |
| RANK                                  | AGE                | 0.1052      | 1.0667    | 0.3017         | 0.90    | 0.3690  |
| RANK                                  | SURGERY            | 0.2435      | 3.7290    | 0.0535         | 2.14    | 0.0353  |
| RANK                                  | _Global_           | .           | 7.7422    | 0.0517         | .       | .       |

Par défaut SAS utilise la transformation  $f(t) = t$  (idem Stata). Pour obtenir l'option par défaut de R  $f(t) = 1 - KM(t)$ :

```
ods select PHReg.zphTest;  
proc phreg data=trans zph(global noplot transform=km);  
model stime*died(0) = year age surgery ;  
run;
```

The PHREG Procedure

| zph Tests for Nonproportional Hazards |                    |             |           |                |         |         |
|---------------------------------------|--------------------|-------------|-----------|----------------|---------|---------|
| Transform                             | Predictor Variable | Correlation | ChiSquare | Pr > ChiSquare | t Value | Pr >  t |
| 1-KM                                  | YEAR               | 0.1634      | 2.0576    | 0.1515         | 1.42    | 0.1612  |
| 1-KM                                  | AGE                | 0.1114      | 1.1957    | 0.2742         | 0.96    | 0.3414  |
| 1-KM                                  | SURGERY            | 0.2520      | 3.9943    | 0.0457         | 2.22    | 0.0292  |
| 1-KM                                  | _Global_           | .           | 8.1906    | 0.0422         | .       | .       |

## *Introduction d'une interaction avec la durée*

Principe : Estimation d'un modèle de Cox en présence d'une intéraction posée sur la durée avec des indicatrices

La covariable doit être sous forme d'indicatrice (binaire: (0,1)). Ce qui est le cas ici avec la variable surgery.

Exemple avec une covariable X à 3 modalités codée 1,2,3.  
Estimation du modèle de Cox avec l'instruction *class* (ref: X=1)

```
proc phreg data=base;
class X(ref="1");
model variable_dur*variable_cens(0) = X; run;
```

Estimation du modèle de Cox avec indicatrices (X1 en référence)

```
data base; set base;
X1 = X=1;
X2 = X=2;
X3 = X=3; run;

proc phreg data=base;
model variable_dur*variable_cens(0) = X2 X3; run;
```

Pour l'exemple, la variable d'interaction (*surgeryt* = *surgery* × *stime*) est générée, pour le temps de l'estimation seulement, après l'instruction *model*.

```
ods select PHReg.ParameterEstimates;
proc phreg data=trans ;
model stime*died(0) = year age surgery surgeryt ;
surgeryt = surgery*stime;
run;
```

The PHREG Procedure

| Analysis of Maximum Likelihood Estimates |    |                    |                |            |            |              |                     |
|--|----|--------------------|----------------|------------|------------|--------------|---------------------|
| Parameter                                | DF | Parameter Estimate | Standard Error | Chi-Square | Pr > ChiSq | Hazard Ratio | Label               |
| YEAR                                     | 1  | -0.12295           | 0.06686        | 3.3815     | 0.0659     | 0.884        | Year of Acceptance  |
| AGE                                      | 1  | 0.02886            | 0.01346        | 4.5980     | 0.0320     | 1.029        | Age                 |
| SURGERY                                  | 1  | -1.75154           | 0.67446        | 6.7442     | 0.0094     | 0.174        | Surgery (e.g. CABG) |
| surgeryt                                 | 1  | 0.00223            | 0.00110        | 4.0828     | 0.0433     | 1.002        |                     |

Rappel : l'estimateur pour la variable *surgeryt* n'est pas un rapport de risques mais un rapport de rapports de risques en t

## *Introduction d'une variable dynamique (binaire)*

**Warning:** opération en « aveugle »

Contrairement à R et Stata, la base n'a pas à être splittée, on ne peut pas vérifier si la variable dynamique a été correctement créée. La variable dynamique, qui peut être appréhendée comme une variable en interaction avec la durée, est générée après l'instruction *model*.

Ici la tvc prendra la valeur 1 lorsque *stime>=wait*, 0 sinon. Comme pour les interactions avec la durée, la variable tvc est créée de manière temporaire.

```
ods select PHReg.ParameterEstimates;
```

```
proc phreg data=trans;
model stime*died(0) = year age surgery tvc ;
tvc = transplant=1 and stime>=wait;
run;
```

The PHREG Procedure

| Analysis of Maximum Likelihood Estimates |    |                    |                |            |            |              |                     |
|--|----|--------------------|----------------|------------|------------|--------------|---------------------|
| Parameter                                | DF | Parameter Estimate | Standard Error | Chi-Square | Pr > ChiSq | Hazard Ratio | Label               |
| YEAR                                     | 1  | -0.12020           | 0.06736        | 3.1839     | 0.0744     | 0.887        | Year of Acceptance  |
| AGE                                      | 1  | 0.03042            | 0.01391        | 4.7829     | 0.0287     | 1.031        | Age                 |
| SURGERY                                  | 1  | -0.98023           | 0.43655        | 5.0418     | 0.0247     | 0.375        | Surgery (e.g. CABG) |
| tvc                                      | 1  | -0.08305           | 0.30484        | 0.0742     | 0.7853     | 0.920        |                     |

## Modèle logistique à temps discret

### *Mise en forme de la base et variables d'analyse*

On utilise une boucle pour répliquer les lignes sur la valeur de la durée. La nouvelle variable de durée (t) sous forme de compteur est générée automatiquement.

```
data td; set trans;
do t=1 to mois;
  output;
  end; run;

data td; set td;
if t<mois then died=0;
t2=t*t;
t3=t2*t; run;
```

### *Estimation du modèle*

#### *Fonction continue de la durée*

```
ods select Logistic.FitStatistics;
proc logistic data=td;
model died(ref="0") = t t2 t3 year age surgery ; run;
```

|                                    |      |
|------------------------------------|------|
| <b>Number of Observations Read</b> | 1127 |
| <b>Number of Observations Used</b> | 1127 |

| <b>Response Profile</b> |             |                        |
|-------------------------|-------------|------------------------|
| <b>Ordered Value</b>    | <b>DIED</b> | <b>Total Frequency</b> |
| 1                       | 0           | 1052                   |
| 2                       | 1           | 75                     |

Probability modeled is DIED='1'.

| <b>Model Convergence Status</b>               |  |  |  |
|---|--|--|--|
| Convergence criterion (GCONV=1E-8) satisfied. |  |  |  |

| <b>Model Fit Statistics</b> |                       |                                 |
|-----------------------------|-----------------------|---------------------------------|
| <b>Criterion</b>            | <b>Intercept Only</b> | <b>Intercept and Covariates</b> |
| AIC                         | 553.368               | 474.673                         |
| SC                          | 558.396               | 509.865                         |
| -2 Log L                    | 551.368               | 460.673                         |

| <b>Testing Global Null Hypothesis: BETA=0</b> |                   |           |                      |  |
|---|-------------------|-----------|----------------------|--|
| <b>Test</b>                                   | <b>Chi-Square</b> | <b>DF</b> | <b>Pr &gt; ChiSq</b> |  |
| <b>Likelihood Ratio</b>                       | 90.6949           | 6         | <.0001               |  |
| <b>Score</b>                                  | 96.4611           | 6         | <.0001               |  |
| <b>Wald</b>                                   | 74.7266           | 6         | <.0001               |  |

| <b>Analysis of Maximum Likelihood Estimates</b> |           |                 |                       |                        |                      |
|---|-----------|-----------------|-----------------------|------------------------|----------------------|
| <b>Parameter</b>                                | <b>DF</b> | <b>Estimate</b> | <b>Standard Error</b> | <b>Wald Chi-Square</b> | <b>Pr &gt; ChiSq</b> |
| <b>Intercept</b>                                | 1         | 7.0827          | 5.3077                | 1.7806                 | 0.1821               |
| <b>t</b>  | 1         | -0.3721         | 0.0824                | 20.3901                | <.0001               |
| <b>t2</b>                                       | 1         | 0.0142          | 0.00502               | 8.0344                 | 0.0046               |
| <b>t3</b>                                       | 1         | -0.00017        | 0.000079              | 4.4660                 | 0.0346               |
| <b>YEAR</b>                                     | 1         | -0.1327         | 0.0738                | 3.2338                 | 0.0721               |
| <b>AGE</b>                                      | 1         | 0.0333          | 0.0147                | 5.1530                 | 0.0232               |
| <b>SURGERY</b>                                  | 1         | -1.0109         | 0.4486                | 5.0783                 | 0.0242               |

### *Fonction discrète de la durée*

Pour l'exemple on va regrouper la durée par ses quartiles. Pour chaque individu, on conserve seulement une observation dans chaque quartile.

```
proc rank data=td out=td2 groups=4;
var t;
ranks tq4;
run;

data td2; set td2;
id2=put(id, 3.);
tq42=put(tq4, 1.);
g=id2 || tq42; run;

proc sort data=td2; by id tq4; run;

data td2; set td2;
by g;
if LAST.g; run;
```

```
proc logistic data=td2;
class tq4 / param=ref;
model died(ref="0") = tq4 year age surgery; run;
```

| Response Profile |      |                 |
|------------------|------|-----------------|
| Ordered Value    | DIED | Total Frequency |
| 1                | 0    | 124             |
| 2                | 1    | 75              |

Probability modeled is DIED='1'.

| Class Level Information |       |                  |   |   |
|-------------------------|-------|------------------|---|---|
| Class                   | Value | Design Variables |   |   |
| tq4                     | 0     | 1                | 0 | 0 |
|                         | 1     | 0                | 1 | 0 |
|                         | 2     | 0                | 0 | 1 |
|                         | 3     | 0                | 0 | 0 |

#### Model Convergence Status

Convergence criterion (GCONV=1E-8) satisfied.

| Model Fit Statistics |                |                          |
|----------------------|----------------|--------------------------|
| Criterion            | Intercept Only | Intercept and Covariates |
| AIC                  | 265.682        | 236.835                  |
| SC                   | 268.976        | 259.888                  |
| -2 Log L             | 263.682        | 222.835                  |

#### Testing Global Null Hypothesis: BETA=0

| Test             | Chi-Square | DF | Pr > ChiSq |
|------------------|------------|----|------------|
| Likelihood Ratio | 40.8472    | 6  | <.0001     |
| Score            | 37.1530    | 6  | <.0001     |
| Wald             | 31.1592    | 6  | <.0001     |

| Type 3 Analysis of Effects |    |                 |            |
|----------------------------|----|-----------------|------------|
| Effect                     | DF | Wald Chi-Square | Pr > ChiSq |
| tq4                        | 3  | 14.0947         | 0.0028     |
| YEAR                       | 1  | 4.4598          | 0.0347     |
| AGE                        | 1  | 6.1053          | 0.0135     |
| SURGERY                    | 1  | 4.5858          | 0.0322     |

| Analysis of Maximum Likelihood Estimates |    |          |                |                 |            |
|--|----|----------|----------------|-----------------|------------|
| Parameter                                | DF | Estimate | Standard Error | Wald Chi-Square | Pr > ChiSq |
| Intercept                                | 1  | 11.5156  | 6.5518         | 3.0893          | 0.0788     |
| tq4                                      | 0  | 0.4790   | 0.5625         | 0.7252          | 0.3945     |
| tq4                                      | 1  | -0.5566  | 0.6331         | 0.7730          | 0.3793     |
| tq4                                      | 2  | -1.4102  | 0.7540         | 3.4975          | 0.0615     |
| YEAR                                     | 1  | -0.1961  | 0.0929         | 4.4598          | 0.0347     |
| AGE                                      | 1  | 0.0456   | 0.0185         | 6.1053          | 0.0135     |
| SURGERY                                  | 1  | -1.0773  | 0.5031         | 4.5858          | 0.0322     |

| Odds Ratio Estimates |                |                            |       |
|----------------------|----------------|----------------------------|-------|
| Effect               | Point Estimate | 95% Wald Confidence Limits |       |
| tq4 0 vs 3           | 1.614          | 0.536                      | 4.862 |
| tq4 1 vs 3           | 0.573          | 0.166                      | 1.982 |
| tq4 2 vs 3           | 0.244          | 0.056                      | 1.070 |
| YEAR                 | 0.822          | 0.685                      | 0.986 |
| AGE                  | 1.047          | 1.009                      | 1.085 |
| SURGERY              | 0.340          | 0.127                      | 0.913 |

| Association of Predicted Probabilities and Observed Responses |      |           |       |
|---|------|-----------|-------|
| Percent Concordant  | 77.2 | Somers' D | 0.544 |
| Percent Discordant  | 22.7 | Gamma     | 0.545 |
| Percent Tied  | 0.1  | Tau-a     | 0.257 |
| Pairs   | 9300 | c         | 0.772 |

## Modèles paramétrique de type AFT

On utilise la procédure proc **lifereg** et on indique le type de distribution.

**Weibull**

```
proc lifereg data=trans;
model stime*died(0) = year age surgery /D=WEIBULL;
run;
```

### The LIFEREG Procedure

| Model Information        |              |                          |
|--------------------------|--------------|--------------------------|
| Data Set                 | WORK.TRANS   |                          |
| Dependent Variable       | Log(STIME)   | Survival Time (Days)     |
| Censoring Variable       | DIED         | Survival Status (1=dead) |
| Censoring Value(s)       | 0            |                          |
| Number of Observations   | 103          |                          |
| Noncensored Values       | 75           |                          |
| Right Censored Values    | 28           |                          |
| Left Censored Values     | 0            |                          |
| Interval Censored Values | 0            |                          |
| Number of Parameters     | 5            |                          |
| Name of Distribution     | Weibull      |                          |
| Log Likelihood           | -188.6278016 |                          |

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| Number of Observations Read | 103 |
| Number of Observations Used | 103 |

| Fit Statistics           |         |
|--------------------------|---------|
| -2 Log Likelihood        | 377.256 |
| AIC (smaller is better)  | 387.256 |
| AICC (smaller is better) | 387.874 |
| BIC (smaller is better)  | 400.429 |

| Fit Statistics (Unlogged Response) |         |
|------------------------------------|---------|
| -2 Log Likelihood                  | 976.337 |
| Weibull AIC (smaller is better)    | 986.337 |
| Weibull AICC (smaller is better)   | 986.955 |
| Weibull BIC (smaller is better)    | 999.510 |

Algorithm converged.

| Type III Analysis of Effects |    |                 |            |
|------------------------------|----|-----------------|------------|
| Effect                       | DF | Wald Chi-Square | Pr > ChiSq |
| YEAR                         | 1  | 1.7673          | 0.1837     |
| AGE                          | 1  | 6.1828          | 0.0129     |
| SURGERY                      | 1  | 6.3906          | 0.0115     |

| Analysis of Maximum Likelihood Parameter Estimates |    |          |                |                       |         |            |            |
|--|----|----------|----------------|-----------------------|---------|------------|------------|
| Parameter  | DF | Estimate | Standard Error | 95% Confidence Limits |         | Chi-Square | Pr > ChiSq |
|  |    |          |                | Lower                 | Upper   |            |            |
| Intercept  | 1  | -3.0220  | 8.7284         | -20.1294              | 14.0854 | 0.12       | 0.7292     |
| YEAR   | 1  | 0.1620   | 0.1218         | -0.0768               | 0.4008  | 1.77       | 0.1837     |
| AGE  | 1  | -0.0615  | 0.0247         | -0.1100               | -0.0130 | 6.18       | 0.0129     |
| SURGERY  | 1  | 1.9703   | 0.7794         | 0.4427                | 3.4980  | 6.39       | 0.0115     |
| Scale  | 1  | 1.7983   | 0.1667         | 1.4995                | 2.1566  |            |            |
| Weibull Shape                                      | 1  | 0.5561   | 0.0516         | 0.4637                | 0.6669  |            |            |

*Log-logistique*

```
proc lifereg data=trans;
model stime*died(0) = year age surgery /D=LLOGISTIC;
run;
```

### The LIFEREG Procedure

| Model Information        |              |                          |
|--------------------------|--------------|--------------------------|
| Data Set                 | WORK.TRANS   |                          |
| Dependent Variable       | Log(STIME)   | Survival Time (Days)     |
| Censoring Variable       | DIED         | Survival Status (1=dead) |
| Censoring Value(s)       | 0            |                          |
| Number of Observations   | 103          |                          |
| Noncensored Values       | 75           |                          |
| Right Censored Values    | 28           |                          |
| Left Censored Values     | 0            |                          |
| Interval Censored Values | 0            |                          |
| Number of Parameters     | 5            |                          |
| Name of Distribution     | LL logistic  |                          |
| Log Likelihood           | -183.0393686 |                          |

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| Number of Observations Read | 103 |
| Number of Observations Used | 103 |

| Fit Statistics           |         |
|--------------------------|---------|
| -2 Log Likelihood        | 366.079 |
| AIC (smaller is better)  | 376.079 |
| AICC (smaller is better) | 376.697 |
| BIC (smaller is better)  | 389.252 |

| Fit Statistics (Unlogged Response)   |         |
|--------------------------------------|---------|
| -2 Log Likelihood                    | 965.160 |
| LL logistic AIC (smaller is better)  | 975.160 |
| LL logistic AICC (smaller is better) | 975.778 |
| LL logistic BIC (smaller is better)  | 988.333 |

Algorithm converged.

| Type III Analysis of Effects |    |                 |            |
|------------------------------|----|-----------------|------------|
| Effect                       | DF | Wald Chi-Square | Pr > ChiSq |
| YEAR                         | 1  | 4.2192          | 0.0400     |
| AGE                          | 1  | 4.0189          | 0.0450     |
| SURGERY                      | 1  | 10.8277         | 0.0010     |

| Analysis of Maximum Likelihood Parameter Estimates |    |          |                |                       |         |            |            |
|--|----|----------|----------------|-----------------------|---------|------------|------------|
| Parameter  | DF | Estimate | Standard Error | 95% Confidence Limits |         | Chi-Square | Pr > ChiSq |
| Intercept  | 1  | -10.4034 | 8.3410         | -26.7515              | 5.9446  | 1.56       | 0.2123     |
| YEAR   | 1  | 0.2408   | 0.1172         | 0.0110                | 0.4705  | 4.22       | 0.0400     |
| AGE  | 1  | -0.0427  | 0.0213         | -0.0845               | -0.0010 | 4.02       | 0.0450     |
| SURGERY  | 1  | 2.2747   | 0.6913         | 0.9198                | 3.6296  | 10.83      | 0.0010     |
| Scale  | 1  | 1.1979   | 0.1161         | 0.9906                | 1.4486  |            |            |

## Risques concurrents

### *Non paramétrique*

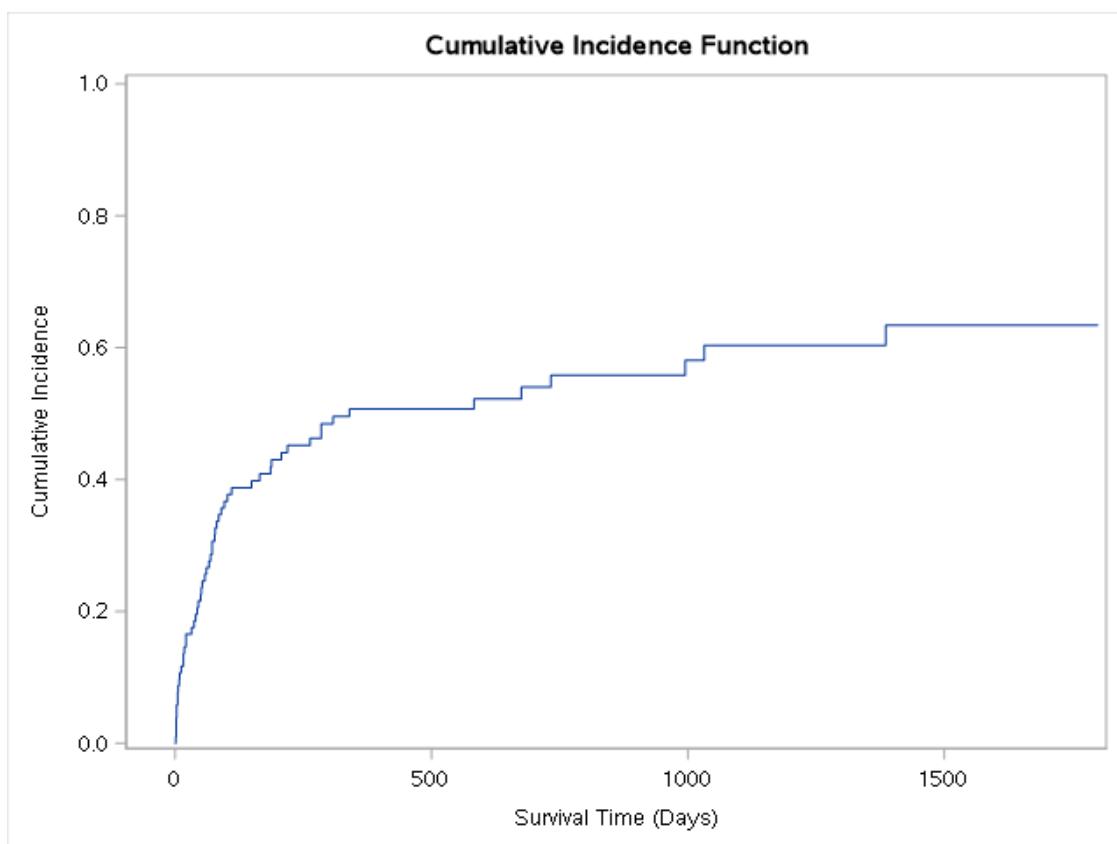
On indique en option la cause d'intérêt avec `eventcode=valeur`, les autres étant considérées comme des risques concurrents.

```
proc lifetest data=trans plots=CIF;
time stime*compet(0) / eventcode=1; run;
```

| Summary of Failure Outcomes |                  |          |       |  |
|-----------------------------|------------------|----------|-------|--|
| Failed Events               | Competing Events | Censored | Total |  |
| 56                          | 19               | 28       | 103   |  |

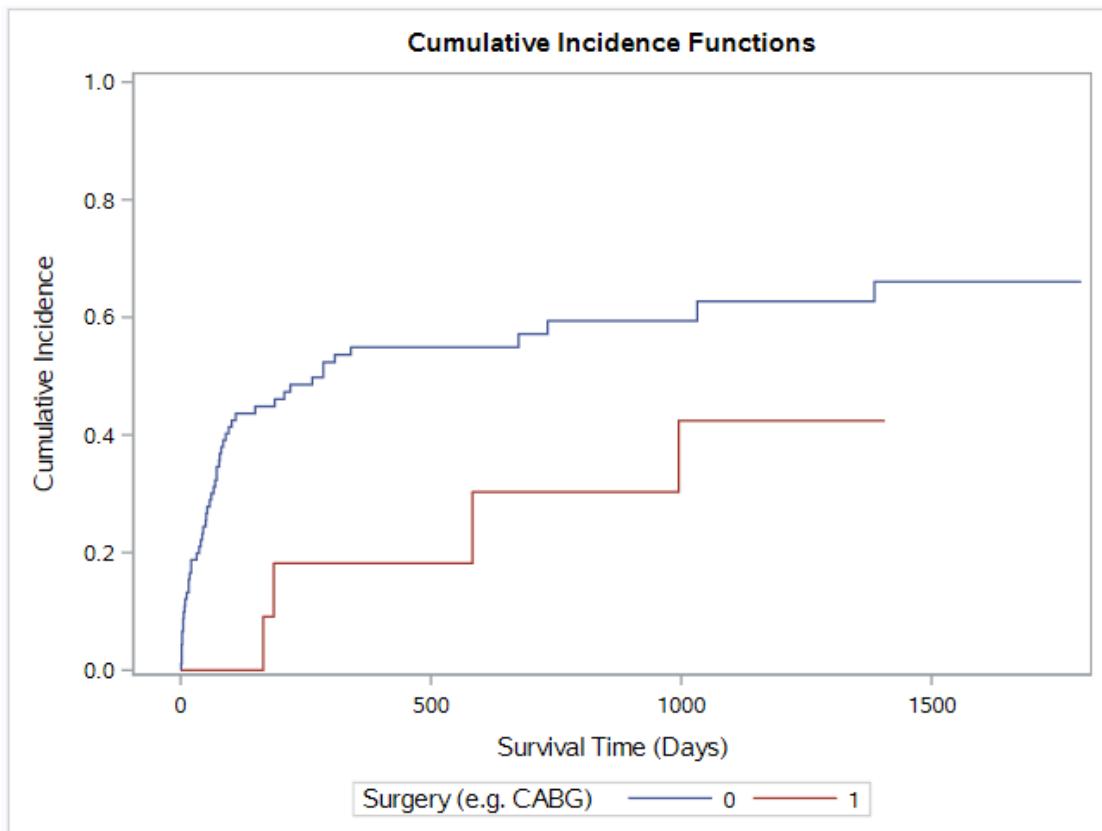
| Cumulative Incidence Function Estimates |                      |                |                         |        |
|---|----------------------|----------------|-------------------------|--------|
| STIME                                   | Cumulative Incidence | Standard Error | 95% Confidence Interval |        |
| 0                                       | 0                    | 0              | -                       | -      |
| 1                                       | 0.00971              | 0.00971        | 0.000847                | 0.0480 |
| 2                                       | 0.0388               | 0.0191         | 0.0126                  | 0.0895 |
| 3                                       | 0.0583               | 0.0232         | 0.0237                  | 0.1153 |
| 5                                       | 0.0777               | 0.0265         | 0.0362                  | 0.1399 |
| 6                                       | 0.0874               | 0.0280         | 0.0427                  | 0.1519 |
| 8                                       | 0.0971               | 0.0293         | 0.0495                  | 0.1638 |
| 9                                       | 0.1068               | 0.0306         | 0.0564                  | 0.1755 |
| 12                                      | 0.1166               | 0.0318         | 0.0636                  | 0.1872 |
| 16                                      | 0.1362               | 0.0340         | 0.0782                  | 0.2103 |
| 18                                      | 0.1461               | 0.0350         | 0.0858                  | 0.2217 |
| 21                                      | 0.1657               | 0.0369         | 0.1011                  | 0.2442 |
| 32                                      | 0.1756               | 0.0378         | 0.1090                  | 0.2554 |
| 37                                      | 0.1856               | 0.0386         | 0.1169                  | 0.2667 |
| 40                                      | 0.1957               | 0.0395         | 0.1251                  | 0.2780 |
| 43                                      | 0.2058               | 0.0403         | 0.1333                  | 0.2892 |
| 45                                      | 0.2158               | 0.0410         | 0.1416                  | 0.3004 |
| 50                                      | 0.2259               | 0.0417         | 0.1500                  | 0.3115 |
| 51                                      | 0.2360               | 0.0424         | 0.1584                  | 0.3226 |
| 53                                      | 0.2461               | 0.0430         | 0.1669                  | 0.3335 |
| 58                                      | 0.2562               | 0.0436         | 0.1755                  | 0.3444 |
| 61                                      | 0.2662               | 0.0442         | 0.1841                  | 0.3553 |
| 66                                      | 0.2763               | 0.0448         | 0.1928                  | 0.3661 |
| 69                                      | 0.2864               | 0.0453         | 0.2015                  | 0.3768 |
| 72                                      | 0.3066               | 0.0462         | 0.2192                  | 0.3982 |
| 77                                      | 0.3167               | 0.0466         | 0.2281                  | 0.4088 |
| 78                                      | 0.3267               | 0.0470         | 0.2370                  | 0.4193 |
| 81                                      | 0.3368               | 0.0474         | 0.2460                  | 0.4298 |
| 85                                      | 0.3469               | 0.0478         | 0.2551                  | 0.4402 |
| 90                                      | 0.3570               | 0.0481         | 0.2642                  | 0.4506 |
| 96                                      | 0.3671               | 0.0484         | 0.2733                  | 0.4610 |
| 102                                     | 0.3771               | 0.0487         | 0.2825                  | 0.4713 |
| 110                                     | 0.3874               | 0.0490         | 0.2919                  | 0.4819 |
| 149                                     | 0.3980               | 0.0493         | 0.3015                  | 0.4926 |
| 165                                     | 0.4085               | 0.0496         | 0.3111                  | 0.5034 |
| 186                                     | 0.4193               | 0.0498         | 0.3210                  | 0.5143 |

| Cumulative Incidence Function Estimates |                      |                |                         |        |
|---|----------------------|----------------|-------------------------|--------|
| STIME                                   | Cumulative Incidence | Standard Error | 95% Confidence Interval |        |
| 188                                     | 0.4301               | 0.0501         | 0.3309                  | 0.5253 |
| 207                                     | 0.4408               | 0.0503         | 0.3409                  | 0.5361 |
| 219                                     | 0.4516               | 0.0505         | 0.3509                  | 0.5470 |
| 263                                     | 0.4624               | 0.0507         | 0.3610                  | 0.5577 |
| 285                                     | 0.4846               | 0.0510         | 0.3817                  | 0.5798 |
| 308                                     | 0.4957               | 0.0511         | 0.3922                  | 0.5908 |
| 340                                     | 0.5068               | 0.0512         | 0.4027                  | 0.6017 |
| 583                                     | 0.5221               | 0.0519         | 0.4160                  | 0.6178 |
| 675                                     | 0.5401               | 0.0531         | 0.4308                  | 0.6372 |
| 733                                     | 0.5580               | 0.0540         | 0.4460                  | 0.6561 |
| 995                                     | 0.5808               | 0.0560         | 0.4634                  | 0.6813 |
| 1032                                    | 0.6036               | 0.0574         | 0.4819                  | 0.7054 |
| 1386                                    | 0.6340               | 0.0606         | 0.5028                  | 0.7393 |



Pour récupérer le test de Gray, on utilise l'instruction *strata*.

```
proc lifetest data=trans plots=CIF;
time stime*compet(0) / eventcode=1;
strata surgery; run;
```



| Gray's Test for Equality of Cumulative Incidence Functions |    |                 |
|--|----|-----------------|
| Chi-Square   | DF | Pr > Chi-Square |
| 3.5544   | 1  | 0.0594          |

## Modèles

### Modèle de Fine-Gray

```
proc phreg data=trans;
model stime*compet(0) = year age surgery / eventcode=1 ;
run;
```

| Model Information  |            |                      |
|--------------------|------------|----------------------|
| Data Set           | WORK.TRANS |                      |
| Dependent Variable | STIME      | Survival Time (Days) |
| Status Variable    | COMPET     |                      |
| Event of Interest  | 1          |                      |
| Competing Event    | 2          |                      |
| Censored Value     | 0          |                      |

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| Number of Observations Read | 103 |
| Number of Observations Used | 103 |

| Summary of Failure Outcomes |                   |                 |          |
|-----------------------------|-------------------|-----------------|----------|
| Total                       | Event of Interest | Competing Event | Censored |
| 103                         | 56                | 19              | 28       |

| Convergence Status                            |  |  |  |
|---|--|--|--|
| Convergence criterion (GCONV=1E-8) satisfied. |  |  |  |

| Model Fit Statistics |                    |                 |
|----------------------|--------------------|-----------------|
| Criterion            | Without Covariates | With Covariates |
| -2 LOG L             | 466.621            | 455.384         |
| AIC                  | 466.621            | 461.384         |
| SBC                  | 466.621            | 467.460         |

| Testing Global Null Hypothesis:<br>BETA=0 |            |    |            |
|---|------------|----|------------|
| Test                                      | Chi-Square | DF | Pr > ChiSq |
| Wald                                      | 11.5295    | 3  | 0.0092     |

| Analysis of Maximum Likelihood Estimates |    |                    |                |            |            |              |                     |
|--|----|--------------------|----------------|------------|------------|--------------|---------------------|
| Parameter                                | DF | Parameter Estimate | Standard Error | Chi-Square | Pr > ChiSq | Hazard Ratio | Label               |
| YEAR                                     | 1  | -0.07235           | 0.07127        | 1.0306     | 0.3100     | 0.930        | Year of Acceptance  |
| AGE                                      | 1  | 0.03702            | 0.01765        | 4.3978     | 0.0360     | 1.038        | Age                 |
| SURGERY                                  | 1  | -0.86888           | 0.44883        | 3.7477     | 0.0529     | 0.419        | Surgery (e.g. CABG) |

*Modèle logistique multinomial à temps discret*

```
data td; set trans;
do t=1 to mois;
    output;
    end;
run;
data td; set td;
if t<mois then compet=0;
t2=t*t
run;

proc logistic data=td;
model compet(ref="0") = t t2 year age surgery / link=glogit;
run;
```

| Model Information         |                   |
|---------------------------|-------------------|
| Data Set                  | WORK.TD           |
| Response Variable         | COMPET            |
| Number of Response Levels | 3                 |
| Model                     | generalized logit |
| Optimization Technique    | Newton-Raphson    |

|                             |      |
|-----------------------------|------|
| Number of Observations Read | 1127 |
| Number of Observations Used | 1127 |

| Response Profile |        |                 |
|------------------|--------|-----------------|
| Ordered Value    | COMPET | Total Frequency |
| 1                | 0      | 1052            |
| 2                | 1      | 56              |
| 3                | 2      | 19              |

Logits modeled use COMPET='0' as the reference category.

| Model Convergence Status                      |  |  |
|---|--|--|
| Convergence criterion (GCONV=1E-8) satisfied. |  |  |

| Model Fit Statistics |                |                          |
|----------------------|----------------|--------------------------|
| Criterion            | Intercept Only | Intercept and Covariates |
| AIC                  | 640.263        | 574.011                  |
| SC                   | 650.318        | 634.339                  |
| -2 Log L             | 636.263        | 550.011                  |

| Testing Global Null Hypothesis: BETA=0 |            |    |            |
|--|------------|----|------------|
| Test                                   | Chi-Square | DF | Pr > ChiSq |
| Likelihood Ratio                       | 86.2526    | 10 | <.0001     |
| Score                                  | 83.7257    | 10 | <.0001     |
| Wald                                   | 65.8555    | 10 | <.0001     |

| Type 3 Analysis of Effects |    |                 |            |
|----------------------------|----|-----------------|------------|
| Effect                     | DF | Wald Chi-Square | Pr > ChiSq |
| t                          | 2  | 31.5814         | <.0001     |
| t2                         | 2  | 15.8351         | 0.0004     |
| YEAR                       | 2  | 4.3364          | 0.1144     |
| AGE                        | 2  | 6.4002          | 0.0408     |
| SURGERY                    | 2  | 5.0701          | 0.0793     |

| Analysis of Maximum Likelihood Estimates |        |    |          |                |                 |            |
|--|--------|----|----------|----------------|-----------------|------------|
| Parameter                                | COMPET | DF | Estimate | Standard Error | Wald Chi-Square | Pr > ChiSq |
| Intercept                                | 1      | 1  | 5.6442   | 5.9110         | 0.9118          | 0.3396     |
| Intercept                                | 2      | 1  | 11.3083  | 9.8625         | 1.3147          | 0.2516     |
| t  | 1      | 1  | -0.2034  | 0.0415         | 24.0681         | <.0001     |
| t  | 2      | 1  | -0.2023  | 0.0691         | 8.5693          | 0.0034     |
| t2                                       | 1      | 1  | 0.00317  | 0.000896       | 12.4905         | 0.0004     |
| t2                                       | 2      | 1  | 0.00298  | 0.00153        | 3.7775          | 0.0519     |
| YEAR                                     | 1      | 1  | -0.1284  | 0.0817         | 2.4734          | 0.1158     |
| YEAR                                     | 2      | 1  | -0.2036  | 0.1382         | 2.1710          | 0.1406     |
| AGE                                      | 1      | 1  | 0.0439   | 0.0175         | 6.3108          | 0.0120     |
| AGE                                      | 2      | 1  | 0.0110   | 0.0246         | 0.2005          | 0.6543     |
| SURGERY                                  | 1      | 1  | -1.1465  | 0.5387         | 4.5305          | 0.0333     |
| SURGERY                                  | 2      | 1  | -0.6139  | 0.7799         | 0.6196          | 0.4312     |

| Odds Ratio Estimates |        |                |                            |       |
|----------------------|--------|----------------|----------------------------|-------|
| Effect               | COMPET | Point Estimate | 95% Wald Confidence Limits |       |
| t                    | 1      | 0.816          | 0.752                      | 0.885 |
| t                    | 2      | 0.817          | 0.713                      | 0.935 |
| t2                   | 1      | 1.003          | 1.001                      | 1.005 |
| t2                   | 2      | 1.003          | 1.000                      | 1.006 |
| YEAR                 | 1      | 0.879          | 0.749                      | 1.032 |
| YEAR                 | 2      | 0.816          | 0.622                      | 1.070 |
| AGE                  | 1      | 1.045          | 1.010                      | 1.081 |
| AGE                  | 2      | 1.011          | 0.964                      | 1.061 |
| SURGERY              | 1      | 0.318          | 0.111                      | 0.913 |
| SURGERY              | 2      | 0.541          | 0.117                      | 2.496 |

# R

## Librairies utilisés pour l'analyse

- *Non Paramétrique:* **survival**, **survRM2**
- *Semi paramétrique, temps discret:* **survival**, fonction **uncount** (package **tidyverse**) , fonction **glm**, fonction **quantcut** (package **jtools**)
- *Paramétrique :* **survival** , **flexsurv**
- *Risques concurrents:* **cmprsk**

Autres: **survminer** et **jtools** (+ *RecordLinkage*) **gtsummary** pour améliorer certains outputs (graphiques et résultats de régression).

## Installations des librairies

Les dernières versions de certains packages peuvent être installées via Github (ex: **survminer**).

```
#install.packages("survival")
#install.packages("survminer")
#install.packages("flexsurv")
#install.packages("survRM2")
#install.package(tidyverse)
#install.packages("jtools")
#install.packages("miceadds")
#install.packages("RecordLinkage")
#install.packages("gtsummary")
#install.packages("cmprsk")
library(survival)
library(survminer)
library(flexsurv)
library(survRM2)
library(tidyverse)
library(jtools)
library(gtsummary)
library(RecordLinkage)
library(cmprsk)
```

## Chargement de la base transplantation

```
library(readr)
trans =
read_csv("https://raw.githubusercontent.com/mthevenin/analyse_duree/master/bases")
```

## Survival : v2 versus v3

Important : Se reporter à l'index ou à la partie sur les risques proportionnels concernant le test de proportionnalité des risques avec le changement de version.

Pour avoir des résultats cohérents avec les autres applications, j'ai conservé la version 2 de la librairie **survival**. J'ai donné une alternative au test avec une ancienne méthode, consistant à faire une régression linéaire entre les résidus standardisés de Schoenfeld et une fonction de la durée, à ce jour limité à  $f(t) = t$ . Le code n'est pas trop compliqué, manque juste la récupération des noms des variables. Ici ce n'est pas trop grave car il y a seulement 3 variables pour autant de degrés de liberté, mais cela risque de devenir un peu plus lourd pour un modèle plus riche.

```
# installation survival 2.44-1 (30 mars 2019)
require(remotes)
install_version("survival", version = "2.44-1", repos = "http://cran.us.r-project.org")
```

## Analyse non paramétrique

### *Méthode actuarielle*

La fonction disponible du paquet *discsurv*, *lifetable* ne permet pas de définir des intervalles, contrairement à Sas ou Stata. Les estimateurs sont systématiquement calculés sur des largeurs égales à 1, et il n'y a pas de calcul des durées sur les différents quantiles de la courbe de survie. Elle ne sera donc pas présentée.

### *Méthode Kaplan-Meier*

Le package **survival** est le principal outil d'analyse des durées. Le package **survminer** permet d'améliorer la présentation des graphiques.

**MAJ avril 2022 :** j'ai trouvé une fonction, cela peut être utile, pour représenter une courbe de risque (instantané). Je n'ai pas eu le temps de mettre à jour le doc, mais il s'agit de la librairie **muhaz** avec la fonction du même nom (voir le document de Simon Quantin, la fonction est traitée).

## *Estimation des fonctions de survie*

Dans l'ordre, on indique la variable de durée puis la variable de censure. En l'absence de comparaison de groupes, x=1.

### Fonction *survfit*

```
fit <- survfit(Surv(time, status) ~ x, data = base)
```

On peut renseigner les variables permettant de calculer la durée et non la variable de durée elle-même.

```
fit <- survfit(Surv(variable_start, variable_end, status) ~ x, data = nom_base)
```

Estimation sans comparaison de groupes :

```
fit <- survfit(Surv(stime, died) ~ 1, data = trans)
fit

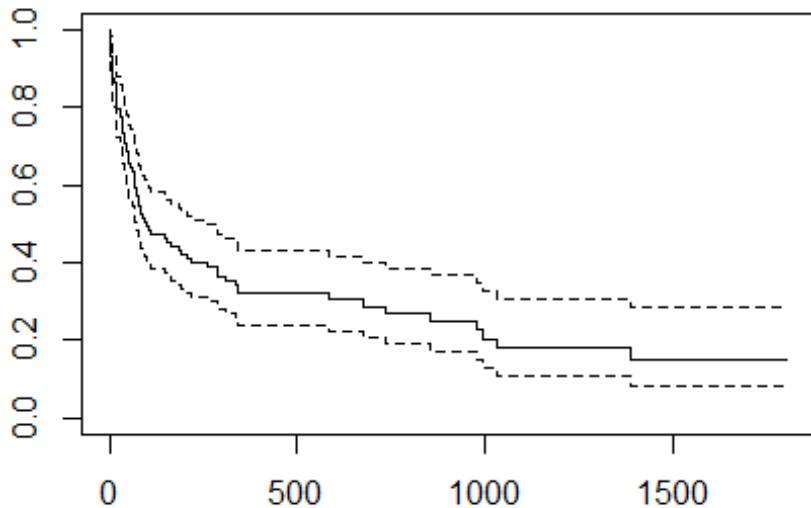
## Call: survfit(formula = Surv(stime, died) ~ 1, data = trans)
##
##      n  events  median 0.95LCL 0.95UCL
##    103      75      100      72      263

summary(fit)

## Call: survfit(formula = Surv(stime, died) ~ 1, data = trans)
##
##   time n.risk n.event survival std.err lower 95% CI upper 95% CI
##     1    103      1  0.990 0.00966    0.9715  1.000
##     2    102      3  0.961 0.01904    0.9246  0.999
##     3     99      3  0.932 0.02480    0.8847  0.982
##     5     96      2  0.913 0.02782    0.8597  0.969
##     6     94      2  0.893 0.03043    0.8355  0.955
##     8     92      1  0.883 0.03161    0.8237  0.948
##     9     91      1  0.874 0.03272    0.8119  0.940
##    12     89      1  0.864 0.03379    0.8002  0.933
##    16     88      3  0.835 0.03667    0.7656  0.910
##    17     85      1  0.825 0.03753    0.7543  0.902
##    18     84      1  0.815 0.03835    0.7431  0.894
##    21     83      2  0.795 0.03986    0.7208  0.877
##    28     81      1  0.785 0.04056    0.7098  0.869
##    30     80      1  0.776 0.04122    0.6989  0.861
##    32     78      1  0.766 0.04188    0.6878  0.852
##    35     77      1  0.756 0.04250    0.6769  0.844
##    36     76      1  0.746 0.04308    0.6659  0.835
##    37     75      1  0.736 0.04364    0.6551  0.827
##    39     74      1  0.726 0.04417    0.6443  0.818
##    40     72      2  0.706 0.04519    0.6225  0.800
##    43     70      1  0.696 0.04565    0.6117  0.791
##    45     69      1  0.686 0.04609    0.6009  0.782
##    50     68      1  0.675 0.04650    0.5902  0.773
##    51     67      1  0.665 0.04689    0.5796  0.764
```

|    |      |    |   |                      |               |              |
|----|------|----|---|----------------------|---------------|--------------|
| ## | 53   | 66 | 1 | 0.655 0.04725        | 0.5690        | 0.755        |
| ## | 58   | 65 | 1 | 0.645 0.04759        | 0.5584        | 0.746        |
| ## | 61   | 64 | 1 | 0.635 0.04790        | 0.5479        | 0.736        |
| ## | 66   | 63 | 1 | 0.625 0.04819        | 0.5374        | 0.727        |
| ## | 68   | 62 | 2 | 0.605 0.04870        | 0.5166        | 0.708        |
| ## | 69   | 60 | 1 | 0.595 0.04892        | 0.5063        | 0.699        |
| ## | 72   | 59 | 2 | 0.575 0.04929        | 0.4857        | 0.680        |
| ## | 77   | 57 | 1 | 0.565 0.04945        | 0.4755        | 0.670        |
| ## | 78   | 56 | 1 | 0.554 0.04958        | 0.4654        | 0.661        |
| ## | 80   | 55 | 1 | 0.544 0.04970        | 0.4552        | 0.651        |
| ## | 81   | 54 | 1 | 0.534 0.04979        | 0.4451        | 0.641        |
| ## | 85   | 53 | 1 | 0.524 0.04986        | 0.4351        | 0.632        |
| ## | 90   | 52 | 1 | 0.514 0.04991        | 0.4251        | 0.622        |
| ## | 96   | 51 | 1 | 0.504 0.04994        | 0.4151        | 0.612        |
| ## | 100  | 50 | 1 | <b>0.494 0.04995</b> | <b>0.4052</b> | <b>0.602</b> |
| ## | 102  | 49 | 1 | 0.484 0.04993        | 0.3953        | 0.592        |
| ## | 110  | 47 | 1 | 0.474 0.04992        | 0.3852        | 0.582        |
| ## | 149  | 45 | 1 | 0.463 0.04991        | 0.3749        | 0.572        |
| ## | 153  | 44 | 1 | 0.453 0.04987        | 0.3647        | 0.562        |
| ## | 165  | 43 | 1 | 0.442 0.04981        | 0.3545        | 0.551        |
| ## | 186  | 41 | 1 | 0.431 0.04975        | 0.3440        | 0.541        |
| ## | 188  | 40 | 1 | 0.420 0.04966        | 0.3336        | 0.530        |
| ## | 207  | 39 | 1 | 0.410 0.04954        | 0.3233        | 0.519        |
| ## | 219  | 38 | 1 | 0.399 0.04940        | 0.3130        | 0.509        |
| ## | 263  | 37 | 1 | 0.388 0.04923        | 0.3027        | 0.498        |
| ## | 285  | 35 | 2 | 0.366 0.04885        | 0.2817        | 0.475        |
| ## | 308  | 33 | 1 | 0.355 0.04861        | 0.2713        | 0.464        |
| ## | 334  | 32 | 1 | 0.344 0.04834        | 0.2610        | 0.453        |
| ## | 340  | 31 | 1 | 0.333 0.04804        | 0.2507        | 0.442        |
| ## | 342  | 29 | 1 | 0.321 0.04773        | 0.2401        | 0.430        |
| ## | 583  | 21 | 1 | 0.306 0.04785        | 0.2252        | 0.416        |
| ## | 675  | 17 | 1 | 0.288 0.04830        | 0.2073        | 0.400        |
| ## | 733  | 16 | 1 | 0.270 0.04852        | 0.1898        | 0.384        |
| ## | 852  | 14 | 1 | 0.251 0.04873        | 0.1712        | 0.367        |
| ## | 979  | 11 | 1 | 0.228 0.04934        | 0.1491        | 0.348        |
| ## | 995  | 10 | 1 | 0.205 0.04939        | 0.1279        | 0.329        |
| ## | 1032 | 9  | 1 | 0.182 0.04888        | 0.1078        | 0.308        |
| ## | 1386 | 6  | 1 | 0.152 0.04928        | 0.0804        | 0.287        |

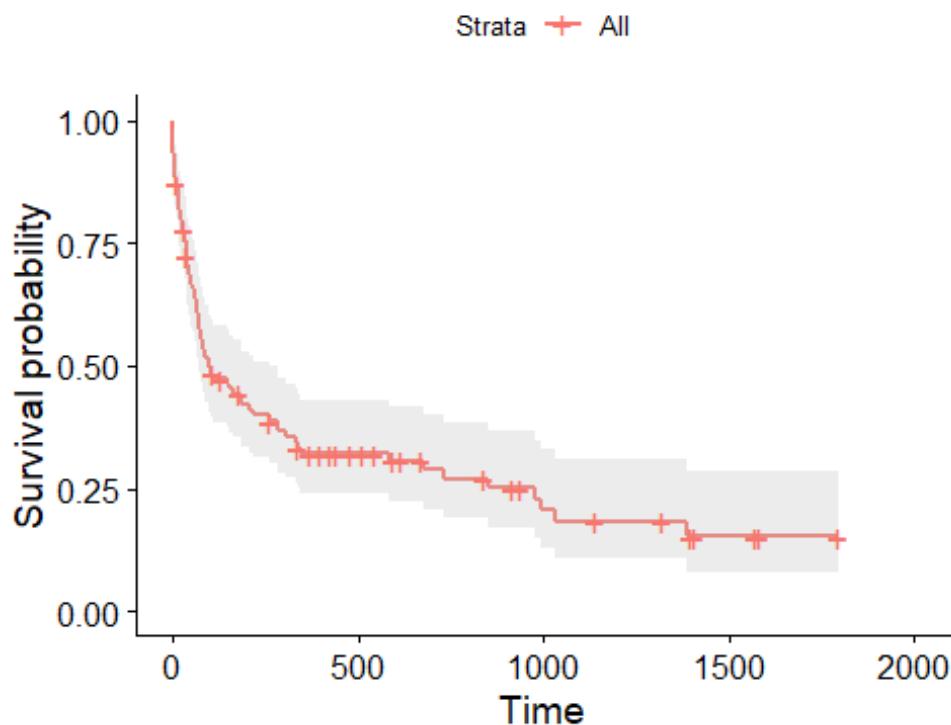
```
plot(fit)
```



Le premier output *fit* permet d'obtenir la durée médiane, ici égale à 100 ( $p=0.494$ ). Le second output, avec la fonction *summary* permet d'obtenir une table des estimateurs. La fonction de survie peut être tracée avec la fonction *plot* (en pointillés les intervalles de confiance).

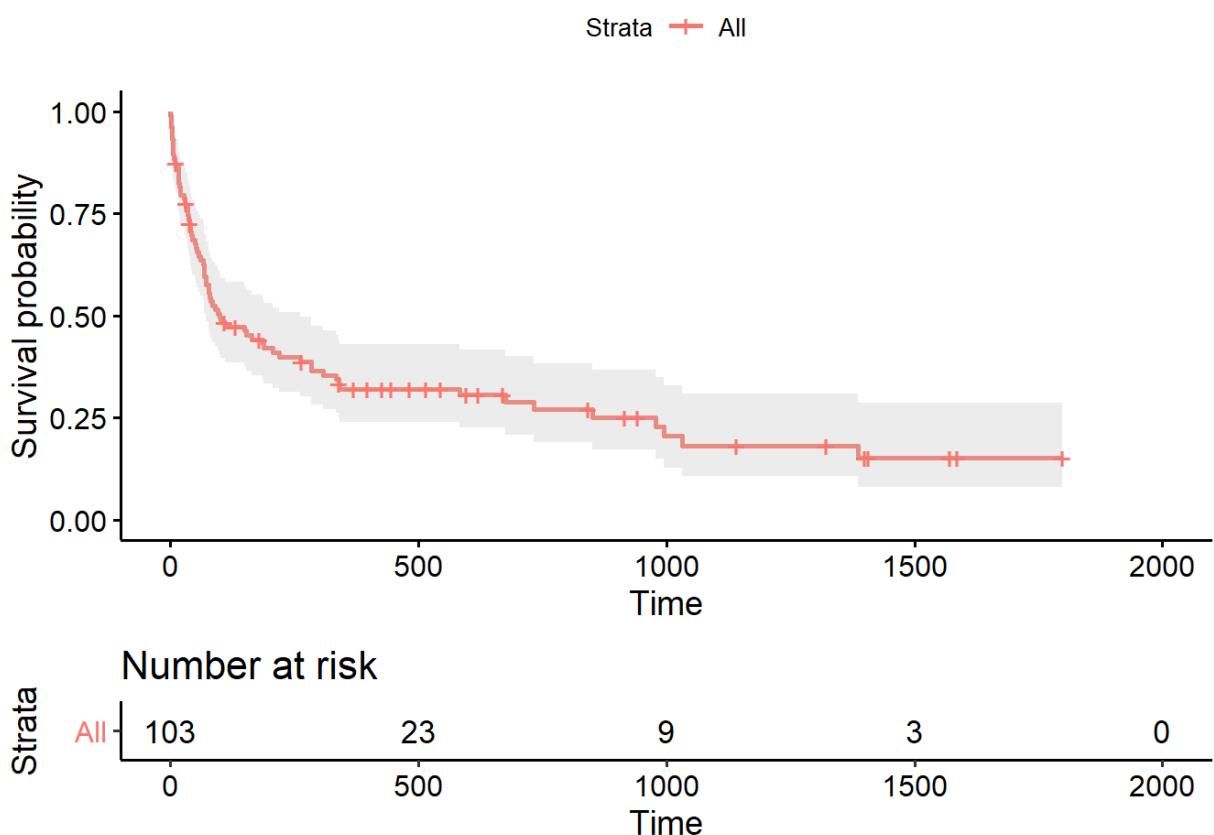
On peut obtenir des graphes de meilleure qualité avec les fonctions du package *survminer*. Avec la fonction *ggsurvplot* :

```
ggsurvplot(fit, conf.int = TRUE)
```



On peut ajouter la population encore soumise au risque pour plusieurs points de la durée.

```
ggsurvplot(fit, conf.int = TRUE, risk.table = TRUE)
```



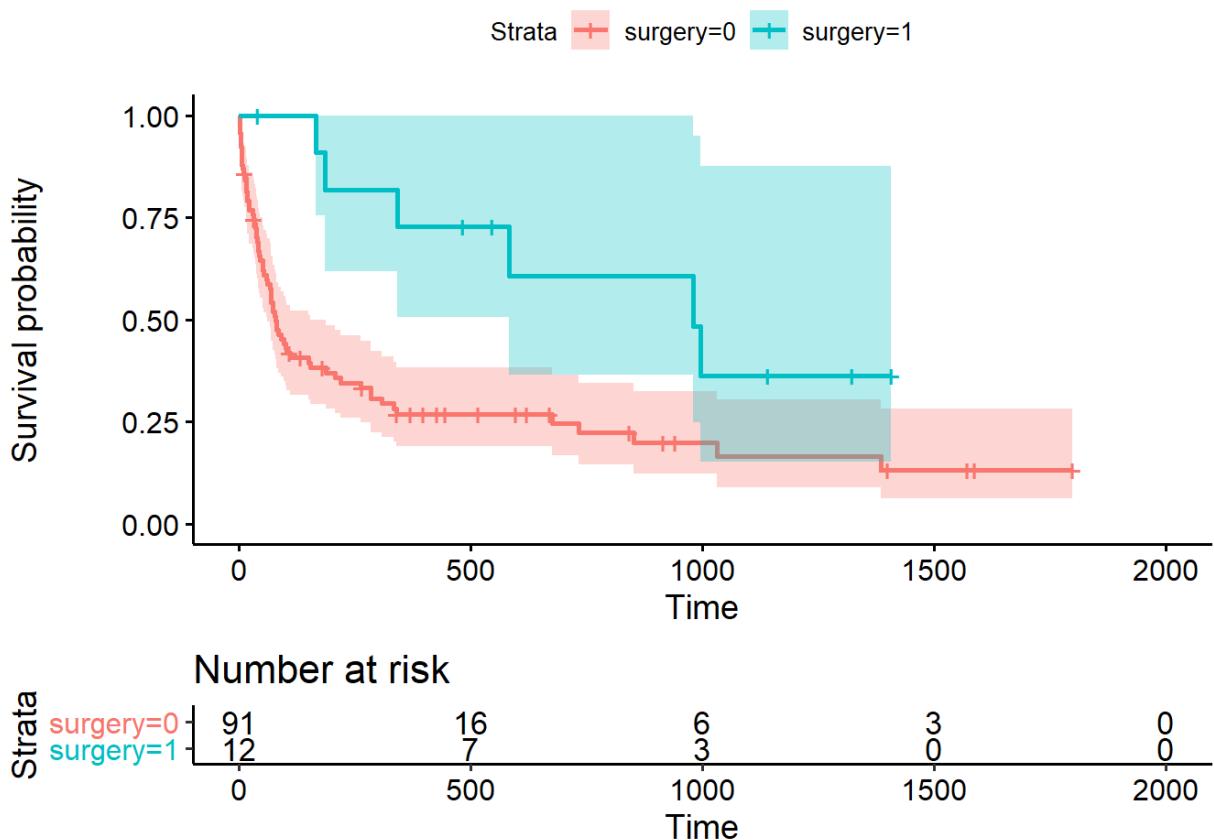
## Comparaison des fonctions de survie

On va comparer les fonctions de survie pour la variable *surgery*.

```
fit <- survfit(Surv(stime, died) ~ surgery, data = trans)
fit

## Call: survfit(formula = Surv(stime, died) ~ surgery, data = trans)
##
##      n events median 0.95LCL 0.95UCL
## surgery=0 91      69      78      61     153
## surgery=1 12       6     979     583      NA

ggsurvplot(fit, conf.int = TRUE, risk.table = TRUE)
```



### Tests du log-rank

On utilise la fonction `survdiff`, et on sélectionne le test de Peto-Peto (`rho=1`). La syntaxe est quasiment identique à la fonction `survfit`.

```
survdiff(Surv(stime, died) ~ surgery, rho=1, data = trans)

## Call:
## survdiff(formula = Surv(stime, died) ~ surgery, data = trans,
##           rho = 1)
##
##          N Observed Expected (O-E)^2/E (O-E)^2/V
## surgery=0 91     45.28    39.12     0.968     8.65
## surgery=1 12      2.03     8.18     4.630     8.65
##
##  Chisq= 8.7 on 1 degrees of freedom, p= 0.003
```

Ici la variable est binaire. Si on veut tester deux à deux les niveaux d'une variable catégorielle à plus de deux modalité, on peut utiliser la fonction `pairwise_survdiff` (syntaxe identique que `survdiff`) de la librairie `survminer`.

### Comparaison des RMST

La fonction `rmst2` du package `survRM2` permet de comparer les RMST entre 2 groupes (et pas plus). La strate pour les comparaisons doit être renommée `arm` (mot tiré de la médecine pour comparer deux traitement il me semble). La commande, issue d'une commande de Stata, n'est franchement pas très souple.

```
trans$arm=trans$surgery

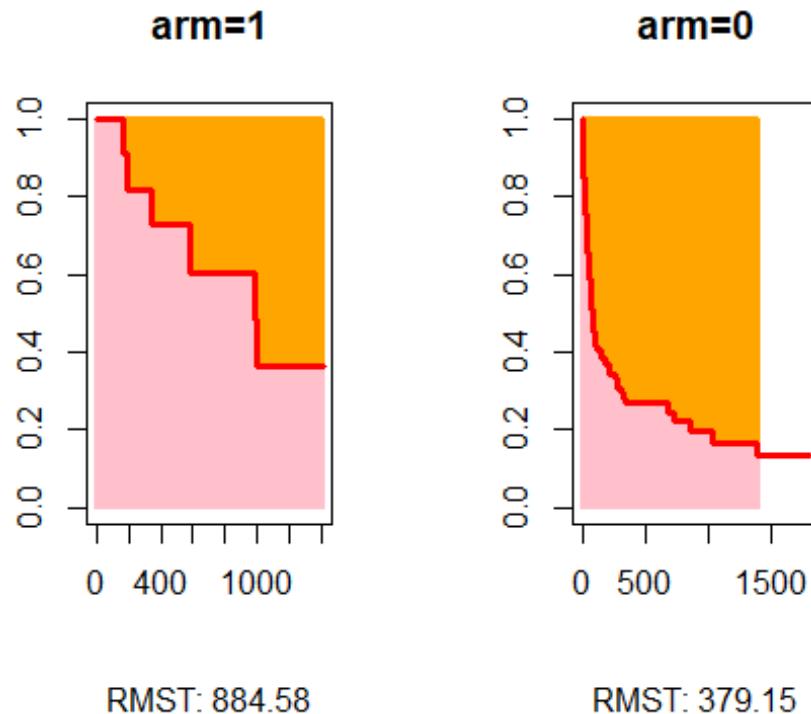
a=rmst2(trans$stime, trans$died, trans$arm, tau=NULL)
print(a)

##
## The truncation time, tau, was not specified. Thus, the default tau
## 1407 is used.
##
## Restricted Mean Survival Time (RMST) by arm
##             Est.      se lower .95 upper .95
## RMST (arm=1) 884.576 151.979   586.702 1182.450
## RMST (arm=0) 379.148  58.606   264.283  494.012
##
## 
## Restricted Mean Time Lost (RMTL) by arm
##             Est.      se lower .95 upper .95
## RMTL (arm=1) 522.424 151.979   224.550  820.298
## RMTL (arm=0) 1027.852  58.606   912.988 1142.717
##
## 
## Between-group contrast
```

```

##                               Est. lower .95 upper .95      p
## RMST (arm=1)-(arm=0) 505.428   186.175   824.682 0.002
## RMST (arm=1)/(arm=0)  2.333     1.483     3.670 0.000
## RMTL (arm=1)/(arm=0)  0.508     0.284     0.909 0.022
plot(a)

```



Attention le graphique trace seulement les fonctions de survie, en faisant apparaitre clairement les aires. Les Rmst sont non décroissantes avec la durée.

## Modèle semi paramétrique de Cox

Ici tout est estimé avec des fonctions du package *survival*:

- Estimation du modèle: *coxph*
- Création d'une variable dynamique: *survspli*.

### *Estimation du modèle*

Par défaut, R utilise la correction d'Efron pour les évènements simultanés. Il est préférable de ne pas la modifier. Syntaxe quasiment identique à *survfit* et *survdiff*.

Syntaxe:

```
coxph(Surv(time, status) ~ x1 + x2 + ...., data=base, ties="nom_correction")
```

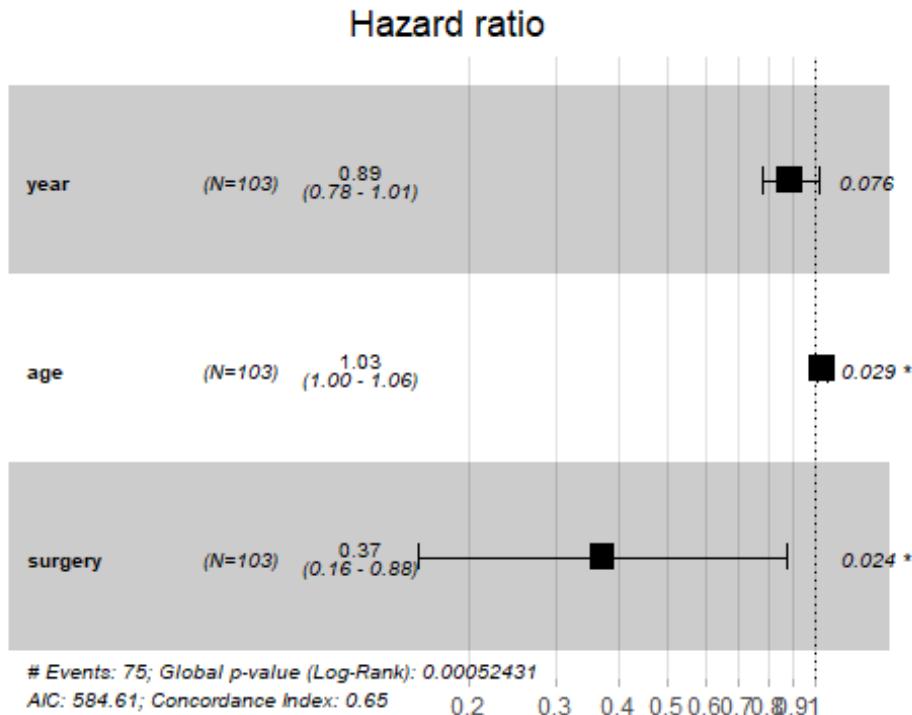
```
coxfit = coxph(formula = Surv(stime, died) ~ year + age + surgery,
data = trans)
summary(coxfit)

## Call:
## coxph(formula = Surv(stime, died) ~ year + age + surgery, data = t
rans)
##
##      n= 103, number of events= 75
##
##              coef exp(coef) se(coef)     z Pr(>|z| )
## year     -0.11963   0.88725  0.06734 -1.776  0.0757 .
## age      0.02958   1.03002  0.01352  2.187  0.0287 *
## surgery -0.98732   0.37257  0.43626 -2.263  0.0236 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
##          exp(coef) exp(-coef) lower .95 upper .95
## year      0.8872     1.1271    0.7775    1.0124
## age       1.0300     0.9709    1.0031    1.0577
## surgery   0.3726     2.6840    0.1584    0.8761
##
## Concordance= 0.653  (se = 0.032 )
## Likelihood ratio test= 17.63  on 3 df,  p=5e-04
## Wald test           = 15.76  on 3 df,  p=0.001
## Score (logrank) test = 16.71  on 3 df,  p=8e-04
```

La table des résultats reporte le logarithme des RR (coef) ainsi que les RR (exp(coef)). Il est intéressant de regarder la valeur de concordance (Harrel's) qui donne des indications sur la qualité de l'ajustement (proche de l'AUC/ROC).

On peut représenter sous forme graphique les résultats avec la fonction `ggforest` de `survminer`

`ggforest(coxfit)`



### Tests de l'hypothèse PH

Attention aux résultats entre la v2 et la v3 de survival. Les deux sont présentés, avec un test reposant sur une régression linéaire entre les résidus de Schoenfeld et une fonction de la durée (ici  $f(t) = t$ ), et fait rapidement le 17 mai. Pour illustrer la question les résultats du test de Grambsch-Therneau sont donnés pour les deux versions.

### Résidus de Schoenfeld

Test de Grambsch-Therneau On utilise la fonction `cox.zph` pour le test de Grambsch-Therneau.

Le test peut utiliser plusieurs fonctions de la durée, pour réaliser le test. Par défaut la fonction utilise 1-KM, soit le complémentaire de l'estimateur de Kaplan-Meier (option `transform="km"`).

## Résultat du test avec la v2 de survival

Avec *transform*="km"

```
cox.zph(coxfit)

##          rho chisq      p
## year     0.159  1.96 0.1620
## age      0.109  1.15 0.2845
## surgery  0.251  3.96 0.0465
## GLOBAL    NA   7.99 0.0462
```

Avec *transform*="identity" ( $f(t) = t$ )

```
cox.zph(coxfit, transform="identity")

##          rho chisq      p
## year     0.102  0.797 0.3720
## age      0.129  1.612 0.2043
## surgery  0.297  5.539 0.0186
## GLOBAL    NA   8.756 0.0327
```

## Résultat du test avec la v3 de survival

Avec *transform*="km" (défaut)

```
cox.zph(coxfit)

            chisq df      p
year      3.309  1 0.069
age       0.922  1 0.337
surgery   5.494  1 0.019
GLOBAL    8.581  3 0.035
```

Avec *transform*="identity" ( $f(t) = t$ )

```
cox.zph(coxfit, transform="identity")

            chisq df      p
year      4.54   1 0.033
age       1.71   1 0.191
surgery   4.92   1 0.027
GLOBAL    9.47   3 0.024
```

La différence est flagrante, en particulier pour la variable *year*.

Remarque : avec la v3 de survival, quelques options ont été ajoutées tel que **terms** qui permet pour une variable catégorielle à plus de deux modalités de choisir entre un sous test multiple sur la variable (k modalités => k-1 degré de liberté) et une série

de tests à 1 degré de liberté sur chaque modalité ( $k-1$  tests). De mon point de vue préférer la seconde solution avec `terms=FALSE`.

### Régression linéaire entre les résidus standardisés et la durée

- Seulement eu le temps pour  $f(t) = t$
- Pas trop pénalisant pour cette application, mais trouver un moyen de récupérer les noms des variables du modèle
- Testé parallèlement avec Stata: ok

Etapes:

- Récupérer les résidus standardisés de Schoenfeld avec la fonction `resid()`
- Transformer la matrice en base, basculer les valeurs des rangs en variable (librairie `tibble`)
- Transformer cette dernière variable en variable de durée (librairie `stringr`: extraction de la durée)
- Exécuter une régression linéaire sur chaque variable:  $\text{resid}_{x_i} = a_0 + b \times t$

```
# Récupération des résidus
resid= resid(coxfit, type="scaledsch")
resid = data.frame(resid)

library(tibble)
library(stringr)

# Récupération des rangs en variable pour générer la durée

resid= rownames_to_column(resid, var = "Z")

# Création de la variable de durée
resid$t = str_sub(resid$Z, 2, )
resid$t=as.numeric(resid$t)
resid$t=round(resid$t, digits=0)

# ols entre les résidus et la durée
year    = summary(lm(X1~t, data=resid))
age     = summary(lm(X2~t, data=resid))
surgery = summary(lm(X3~t, data=resid))

year$coefficients[,4]
## (Intercept)          t
##  0.05664549  0.38565337

age$coefficients[,4]
```

```

## (Intercept)      t
## 0.2953778  0.2686404

surgery$coefficients[,4]

## (Intercept)      t
## 0.00065017  0.00975821

```

On retrouve des résultats très proches du test original (survival v2).

### *Introduction d'une interaction*

Lorsque la covariable n'est pas continue, elle doit être transformée en indicatrice. Vérifier que les résultats du modèle sont bien identiques avec le modèle estimé précédemment (ne pas oublier d'omettre le niveau en référence). Ici la variable *surgery* est déjà sous forme d'indicatrice {0;1}. La variable d'interaction est *tt(nom-variable)*, la fonction de la durée (ici forme linéaire simple) est indiquée en option de la fonction: *tt = function(x, t, ...) x\*t.*

```

coxfit2 = coxph(formula = Surv(stime, died) ~ year + age + surgery +
  tt(surgery), data = trans, tt = function(x, t, ...) x*t)
summary(coxfit2)

## Call:
## coxph(formula = Surv(stime, died) ~ year + age + surgery + tt(surgery),
##       data = trans, tt = function(x, t, ...) x * t)
##
##     n= 103, number of events= 75
##
##              coef exp(coef)   se(coef)      z Pr(>|z|)
## year      -0.123074  0.884198  0.066835 -1.841  0.06555 .
## age        0.028888  1.029310  0.013449  2.148  0.03172 *
## surgery    -1.754738  0.172953  0.674391 -2.602  0.00927 **
## tt(surgery) 0.002231  1.002234  0.001102  2.024  0.04299 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
##          exp(coef) exp(-coef) lower .95 upper .95
## year        0.8842     1.1310   0.77564   1.0080
## age         1.0293     0.9715   1.00253   1.0568
## surgery     0.1730     5.7819   0.04612   0.6486
## tt(surgery) 1.0022     0.9978   1.00007   1.0044
##
## Concordance= 0.656  (se = 0.032 )
## Likelihood ratio test= 21.58  on 4 df,   p=2e-04

```

```
## Wald test = 16.99 on 4 df, p=0.002
## Score (logrank) test = 19 on 4 df, p=8e-04
```

Rappel (important) : le paramètre estimé pour *tt(surgery)* ne reporte pas un Risques Ratio, mais un rapport de Risques Ratios.

### Introduction d'une variable dynamique (binaire)

La dimension dynamique est le fait d'avoir été opéré pour une greffe du coeur.

- **Etape 1** : créer un vecteur donnant les durées aux temps d'évènement.
- **Etape 2** : appliquer ce vecteur de points de coupure à la fonction *survsplit*.
- **Etape 3** : modifier la variable *transplant* (ou créer une nouvelle) à l'aide de la variable *wait*, qui prend la valeur 1 à partir du jour de la greffe, 0 avant.

#### *Etape 1*

```
cut= unique(trans$stime[trans$died == 1])
```

#### *Etape 2*

```
tvc = survSplit(data = trans, cut = cut, end = "stime", start = "stime0", event = "died")
```

Remarque : On peut estimer le modèle de Cox de départ avec cette base longue.

```
coxph(formula = Surv(stime0, stime, died) ~ year + age + surgery, data = tvc)

## Call:
## coxph(formula = Surv(stime0, stime, died) ~ year + age + surgery,
##        data = tvc)
##
##            coef exp(coef) se(coef)      z      p
## year     -0.11963  0.88725  0.06734 -1.776 0.0757
## age      0.02958  1.03002  0.01352  2.187 0.0287
## surgery -0.98732  0.37257  0.43626 -2.263 0.0236
##
## Likelihood ratio test=17.63 on 3 df, p=0.0005243
## n= 3573, number of events= 75
```

### *Etape 3*

```
tvc$tvc=ifelse(tvc$transplant==1 & tvc$wait<=tvc$stime, 1, 0)
```

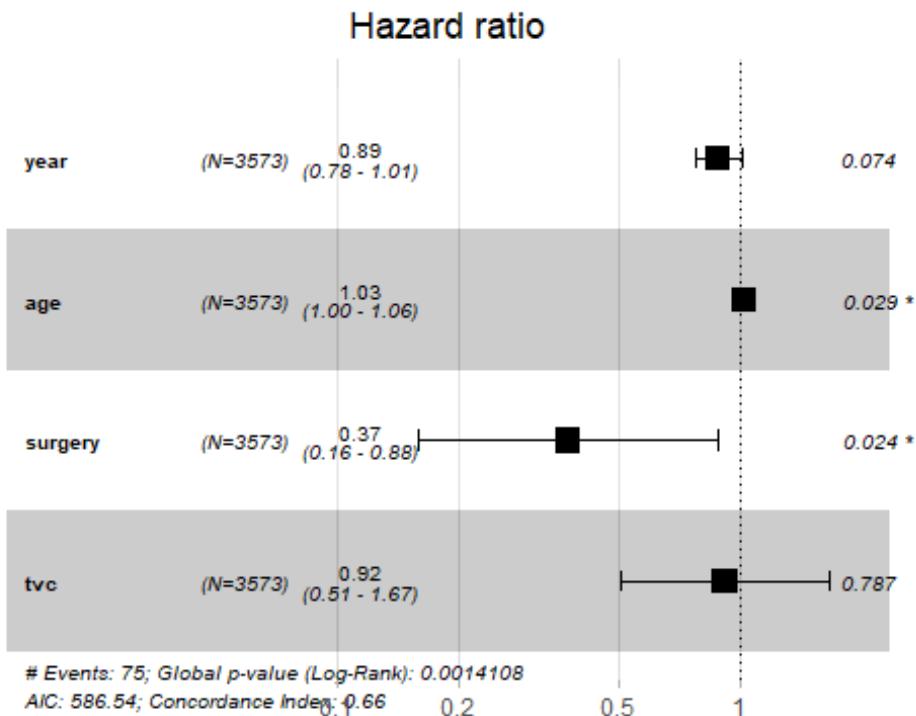
### *Estimation du modèle*

En format long, on doit préciser dans la formule l'intervalle de durée avec les variables *stime0* (début de l'intervalle) et *stime* (fin de l'intervalle).

```
tvcfit = coxph(formula = Surv(stime0, stime, died) ~ year + age + surgery + tvc, data = tvc)
summary(tvcfit)

## Call:
## coxph(formula = Surv(stime0, stime, died) ~ year + age + surgery +
##         tvc, data = tvc)
##
## n= 3573, number of events= 75
##
##           coef exp(coef) se(coef)      z Pr(>|z|)    
## year     -0.12032  0.88664  0.06734 -1.787  0.0740 .  
## age      0.03044  1.03091  0.01390  2.190  0.0285 *  
## surgery -0.98289  0.37423  0.43655 -2.251  0.0244 *  
## tvc      -0.08221  0.92108  0.30484 -0.270  0.7874    
## ---      
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
##           exp(coef) exp(-coef) lower .95 upper .95    
## year      0.8866      1.128    0.7770    1.0117  
## age       1.0309      0.970    1.0032    1.0594  
## surgery   0.3742      2.672    0.1591    0.8805  
## tvc       0.9211      1.086    0.5068    1.6741  
##
## Concordance= 0.659  (se = 0.032 ) 
## Likelihood ratio test= 17.7  on 4 df,  p=0.001
## Wald test          = 15.79  on 4 df,  p=0.003
## Score (logrank) test = 16.74  on 4 df,  p=0.002

ggforest(tvcfit)
```



### Analyse en temps discret (régression logistique)

Pour la durée, on va utiliser la variable mois (en fait regroupement sur 30 jours). La fonction ***uncount*** du package *tidyverse* permettra de splitter la base au temps d'observation.

```
library("tidyverse")

dt = uncount(trans,mois)
dt = dt[order(dt$id),]

## # id| year| age| died| stime| surgery| transplant| wait| compet|
## | --:|----:|---:|---:|----:|-----:|-----:|-----:|----:|----:
## | 1| 67| 30| 1| 50| 0| 0| 0| 1|
## | 1| 67| 30| 1| 50| 0| 0| 0| 1|
## | 2| 68| 51| 1| 6| 0| 0| 0| 1|
## | 3| 68| 54| 1| 16| 0| 1| 1| 1|
## | 4| 68| 40| 1| 39| 0| 1| 36| 2|
## | 4| 68| 40| 1| 39| 0| 1| 36| 2|
## | 5| 68| 20| 1| 18| 0| 0| 0| 1|
## | 6| 68| 54| 1| 3| 0| 0| 0| 2|
## | 7| 68| 50| 1| 675| 0| 1| 51| 1|
## | 7| 68| 50| 1| 675| 0| 1| 51| 1|
## | 7| 68| 50| 1| 675| 0| 1| 51| 1|
```

La variable mois a été supprimée par la fonction, on va générer une variable type compteur pour mesurer la durée à chaque point d'observation. On va également recréer la variable (renommée  $T$ ).

*Remarque : j'utilise ici le code standard de R, on peut faire la même chose avec dplyr de manière plus rapide (mise à jour à prévoir)*

```
dt$x=1
dt$t = ave(dt$x,dt$id, FUN=cumsum)
dt$T = ave(dt$x,dt$id, FUN=sum)

## | id | year | age | died | stime | surgery | transplant | wait | compet | x | t | T |
## | -- | --- | -- | -- | --- | --- | ----- | --- | --- | -- | -: | -: |
## | 1 | 67 | 30 | 1 | 50 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |
## | 1 | 67 | 30 | 1 | 50 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
## | 2 | 68 | 51 | 1 | 6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
## | 3 | 68 | 54 | 1 | 16 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
## | 4 | 68 | 40 | 1 | 39 | 0 | 1 | 36 | 2 | 1 | 1 | 2 |
## | 4 | 68 | 40 | 1 | 39 | 0 | 1 | 36 | 2 | 1 | 2 | 2 |
## | 5 | 68 | 20 | 1 | 18 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
## | 6 | 68 | 54 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 1 |
## | 7 | 68 | 50 | 1 | 675 | 0 | 1 | 51 | 1 | 1 | 1 | 23 |
## | 7 | 68 | 50 | 1 | 675 | 0 | 1 | 51 | 1 | 1 | 2 | 23 |
## | 7 | 68 | 50 | 1 | 675 | 0 | 1 | 51 | 1 | 1 | 3 | 23 |
```

Si un individu est décédé, `died=1` est reporté sur toute les lignes (idem qu'avec la variable dynamique). On va modifier la variable tel que `died=0 si t<T`

```
dt$died[dt$t<dt$T]=0

## | id | year | age | died | stime | surgery | transplant | wait | compet | x | t | T |
## | -- | --- | -- | -- | --- | --- | ----- | --- | --- | -- | -: | -: |
## | 1 | 67 | 30 | 0 | 50 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |
## | 1 | 67 | 30 | 1 | 50 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
## | 2 | 68 | 51 | 1 | 6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
## | 3 | 68 | 54 | 1 | 16 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
## | 4 | 68 | 40 | 0 | 39 | 0 | 1 | 36 | 2 | 1 | 1 | 2 |
## | 4 | 68 | 40 | 1 | 39 | 0 | 1 | 36 | 2 | 1 | 2 | 2 |
## | 5 | 68 | 20 | 1 | 18 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
## | 6 | 68 | 54 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 1 |
## | 7 | 68 | 50 | 0 | 675 | 0 | 1 | 51 | 1 | 1 | 1 | 23 |
## | 7 | 68 | 50 | 0 | 675 | 0 | 1 | 51 | 1 | 1 | 2 | 23 |
## | 7 | 68 | 50 | 0 | 675 | 0 | 1 | 51 | 1 | 1 | 3 | 23 |
```

## ***Estimation avec durée comme variable continue***

Avec un effet quadratique d'ordre 2.

```
dt$t2=dt$t^2
dtfit = glm(died ~ t + t2 + year + age + surgery, data=dt, family="binomial")
summ(dtfit)

## MODEL INFO:
## Observations: 1127
## Dependent Variable: died
## Type: Generalized linear model
##   Family: binomial
##   Link function: logit
##
## MODEL FIT:
## <U+03C7>2(5) = 84.70, p = 0.00
## Pseudo-R2 (Cragg-Uhler) = 0.19
## Pseudo-R2 (McFadden) = 0.15
## AIC = 478.67, BIC = 508.83
##
## Standard errors: MLE
## -----
##           Est.  S.E.    z val.      p
## -----
## (Intercept) 7.74  5.22   1.48  0.14
## t          -0.20  0.04  -5.63  0.00
## t2          0.00  0.00   3.98  0.00
## year        -0.15  0.07  -2.04  0.04
## age          0.03  0.01   2.35  0.02
## surgery     -1.00  0.45  -2.24  0.02
## -----
```

Remarque sur la présentation : la fonction *summ* est intégrée au package *jtools*. Elle ne fonctionne qu'avec le package *Recordlinkage* qui doit être installé et chargé.

### *Estimation avec durée comme variable discrète*

On va créer une variable discrète regroupant la variable t en quartile (pour l'exemple seulement, tous types de regroupement est envisageable).

On va utiliser la fonction *quantcut* du package *gtools*.

```
dt$ct4 <- quantcut(dt$t)
table(dt$ct4)

##
##   [1,4]  (4,11] (11,23] (23,60]
##   299     275     282     271
```

On va générer un compteur et un total d'observations sur la strate regroupant *id* et *ct4*.

```
dt$n = ave(dt$x, dt$id, dt$ct4, FUN=cumsum)
dt$N = ave(dt$x, dt$id, dt$ct4, FUN=sum)
```

On conserve la dernière observation pour chaque id.

```
dt2 = subset(dt, n==N)
```

### *Estimation du modèle*

```
fit = glm(died ~ ct4 + year + age + surgery, data=dt2, family=binomial)
summ(fit)

## MODEL INFO:
## Observations: 197
## Dependent Variable: died
## Type: Generalized linear model
##   Family: binomial
##   Link function: logit
##
## MODEL FIT:
## <U+03C7>2(6) = 39.30, p = 0.00
## Pseudo-R2 (Cragg-Uhler) = 0.25
## Pseudo-R2 (McFadden) = 0.15
## AIC = 236.48, BIC = 259.46
##
## Standard errors: MLE
## -----
##           Est.  S.E.  z val.    p
## -----
```

```

## (Intercept) 12.45 6.65 1.87 0.06
## ct4(4,11] -1.03 0.42 -2.47 0.01
## ct4(11,23] -1.62 0.54 -2.96 0.00
## ct4(23,60] -0.48 0.60 -0.80 0.42
## year -0.20 0.09 -2.18 0.03
## age 0.05 0.02 2.53 0.01
## surgery -1.11 0.50 -2.21 0.03
## -----

```

## Modèles paramétrique usuels

On utilise la fonction `survreg` du package `survival`

### *Modèle de Weibull*

*De type AFT*

```

weibull = survreg(formula = Surv(stime, died) ~ year + age + surgery,
  data = trans, dist="weibull")
summary(weibull)

##
## Call:
## survreg(formula = Surv(stime, died) ~ year + age + surgery, data =
##   trans,
##   dist = "weibull")
##           Value Std. Error      z      p
## (Intercept) -3.0220    8.7284 -0.35  0.729
## year        0.1620    0.1218  1.33  0.184
## age        -0.0615    0.0247 -2.49  0.013
## surgery     1.9703    0.7794  2.53  0.011
## Log(scale)   0.5868    0.0927  6.33 2.5e-10
##
## Scale= 1.8
##
## Weibull distribution
## Loglik(model)= -488.2  Loglik(intercept only)= -497.6
## Chisq= 18.87 on 3 degrees of freedom, p= 0.00029
## Number of Newton-Raphson Iterations: 5
## n= 103

```

### *De type PH (risques proportionnels)*

La paramétrisation PH n'est pas possible avec la fonction `survreg`. Il faut utiliser le package `flexsurv`, qui permet également d'estimer les modèles paramétriques disponibles avec `survival`.

```
library(flexsurv)
```

Pour estimer le modèle de Weibull de type PH, on utilise en option `dist="weibullPH"`.

```
flexsurvreg(formula = Surv(stime, died) ~ year + age + surgery, data = trans, dist="weibullPH")

## Call:
## flexsurvreg(formula = Surv(stime, died) ~ year + age + surgery,
##             data = trans, dist = "weibullPH")
##
## Estimates:
##          data mean   est      L95%     U95%       se    exp(est)
## shape        NA 5.56e-01 4.64e-01 6.67e-01 5.16e-02        NA
## scale        NA 5.37e+00 4.27e-04 6.75e+04 2.59e+01        NA
## year  7.06e+01 -9.01e-02 -2.20e-01 3.97e-02 6.62e-02 9.14e-01
## age   4.46e+01  3.42e-02  7.09e-03 6.13e-02 1.38e-02 1.03e+00
## surgery 1.17e-01 -1.10e+00 -1.95e+00 -2.45e-01 4.34e-01 3.34e-01

##          L95%     U95%
## shape        NA        NA
## scale        NA        NA
## year  8.03e-01 1.04e+00
## age   1.01e+00 1.06e+00
## surgery 1.43e-01 7.83e-01
##
## N = 103, Events: 75, Censored: 28
## Total time at risk: 31938
## Log-likelihood = -488.1683, df = 5
## AIC = 986.3366
```

## Risques concurrents

Package **cmprsk** pour l'analyse non paramétrique et le modèle de Fine-Gray.

La variable de censure/événement, *compet*, correspond à la variable *died* avec une modalité supplémentaire qui a été simulée. On suppose l'existence d'une cause supplémentaire au décès autre qu'une malformation cardiaque et non strictement indépendante de celle-ci.

```
compet <- read_csv("https://raw.githubusercontent.com/mthevenin/analyse_duree/master/bases/transplantation.csv")
# variable compet
table(compet$compet)

##
##  0  1  2
## 28 56 19

# variable died
table(compet$died)

##
##  0  1
## 28 75
```

### Non paramétrique: fonction d'incidence cumulée

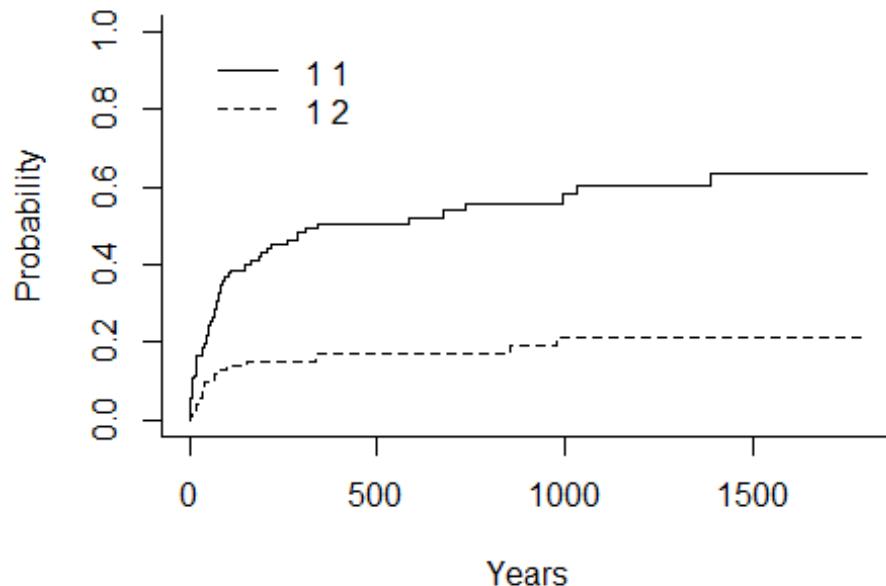
On utilise la fonction **cuminc** du package *cmprsk*.

*Pas de comparaison*

```
ic = cuminc(compet$stime, compet$compet)
ic

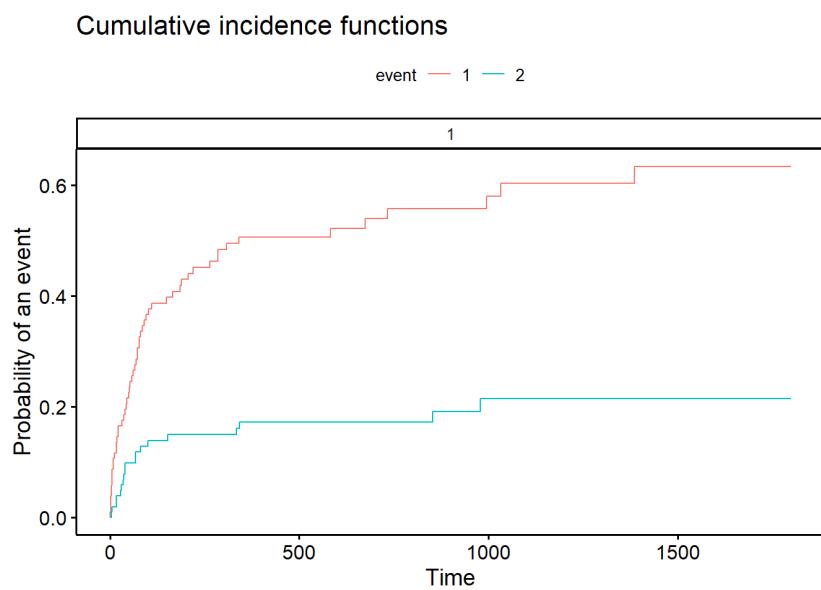
## Estimates and Variances:
## $est
##      500     1000     1500
## 1 1 0.5067598 0.5808345 0.6340038
## 1 2 0.1720161 0.2140841 0.2140841
##
## $var
##      500     1000     1500
## 1 1 0.002619449 0.003131847 0.003676516
## 1 2 0.001473283 0.002203770 0.002203770

plot(ic)
```



Avec survminer

```
ggcompetingrisks(fit = ic)
```



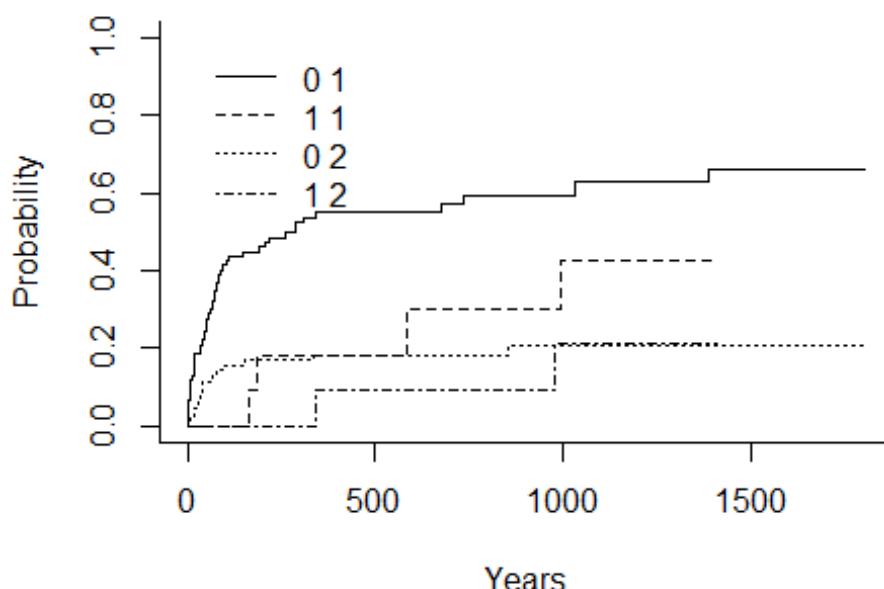
### Comparaison (variable surgery)

Le test de Gray est automatiquement exécuté.

```
ic = cuminc(compet$stime, compet$compet, group=compet$surgery, rho=1)
ic

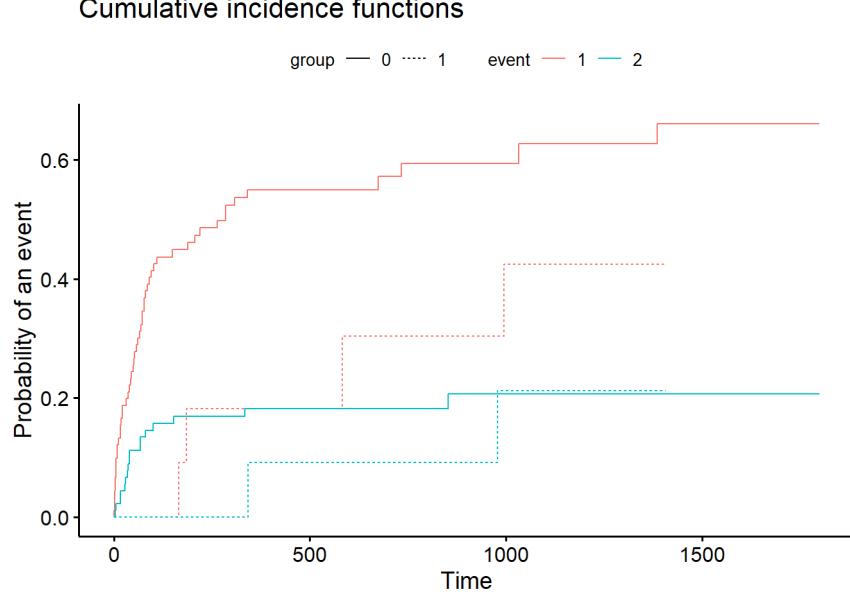
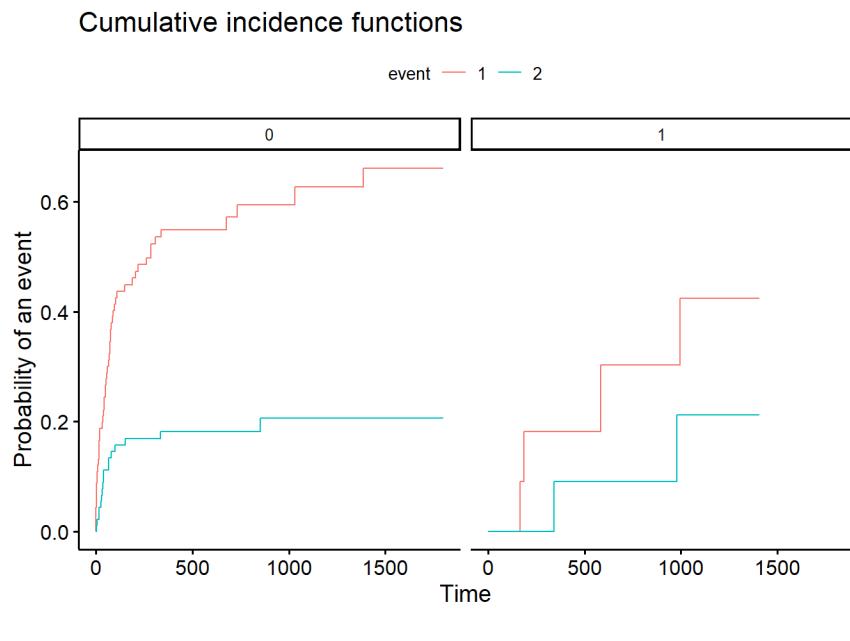
## Tests:
##      stat      pv df
## 1 4.604792 0.03188272 1
## 2 0.272147 0.60189515 1
## Estimates and Variances:
## $est
##      500     1000    1500
## 0 1 0.54917896 0.5940358 0.6604903
## 1 1 0.18181818 0.4242424        NA
## 0 2 0.18168014 0.2066006 0.2066006
## 1 2 0.09090909 0.2121212        NA
##
## $var
##      500     1000    1500
## 0 1 0.002955869 0.003335897 0.004199157
## 1 1 0.014958678 0.033339569        NA
## 0 2 0.001727112 0.002271242 0.002271242
## 1 2 0.008449138 0.022024737        NA

plot(ic)
```



Avec survminer. Pour avoir un seul graphique pour toutes les courbes ajouter l'option **multiple\_panels = F**

```
ggcompetingrisks(fit = ic)
ggcompetingrisks(fit = ic, multiple_panels = F)
```



## Modèles

### Modèle de Fine-Gray

Attention à l'interprétation des « risks ratio ». Modèle plutôt contesté, donne le code tout de même.

Fonction `crr` du package `cmprsk`.

Peu pratique les covariables doivent être introduite sous forme de matrice (n observations \* k variables). Pour les covariables discrètes, prévoir la forme binaire et l'omission de la catégorie de référence.

```
c <- compet[c("year", "age", "surgery")]
c = as.matrix(c)
summary(crr(compet$stime, compet$competing, c))

## Competing Risks Regression
##
## Call:
## crr(ftime = competing$stime, fstatus = competing$competing, cov1 = c)
##
##              coef exp(coef) se(coef)     z p-value
## year      -0.0724    0.930   0.0713 -1.02  0.310
## age       0.0370    1.038   0.0176  2.10  0.036
## surgery   -0.8688    0.419   0.4488 -1.94  0.053
##
##              exp(coef) exp(-coef)   2.5% 97.5%
## year        0.930      1.075 0.809  1.07
## age         1.038      0.964 1.002  1.07
## surgery     0.419      2.384 0.174  1.01
##
## Num. cases = 103
## Pseudo Log-likelihood = -228
## Pseudo likelihood ratio test = 11.2 on 3 df,
```

### Modèle logistique multinomial à temps discret

On va de nouveau utiliser la variable mois (temps discret). Le modèle sera estimé à l'aide la fonction `multinom` du package `nnet`, les p-values doivent-être programmées, l'output ne donnant que les erreurs-types.

```
#install.packages("nnet")
library(nnet)
```

## Transformation de la base

```
compet$T = compet$mois
td      = uncount(compet, mois)
td$x   = 1
td$t   = ave(td$x, td$id, FUN=cumsum)
td$t2  = td$t*td$t
td$e   = ifelse(td$t < td$T, 0, td$compet)
```

## Estimation

Pour estimer le modèle, on utilise la fonction *mlogit* du package *nnet*. Les p-values seront calculées à partir d'un test bilatéral (statistique z).

```
competfit = multinom(formula = e ~ t + t2 + year + age + surgery, data = td)

## # weights: 21 (12 variable)
## initial value 1238.136049
## iter 10 value 579.836377
## iter 20 value 387.824428
## iter 30 value 277.775477
## iter 40 value 275.151304
## iter 50 value 275.005454
## final value 275.005419
## converged

summary(competfit)

## Call:
## multinom(formula = e ~ t + t2 + year + age + surgery, data = td)
##
## Coefficients:
## (Intercept)          t          t2        year         age       surgery
## 1  5.646796 -0.2034545 0.003168301 -0.1284492 0.04389670 -1.1471457
## 2 11.316123 -0.2023134 0.002981492 -0.2036701 0.01100051 -0.6137982
##
## Std. Errors:
## (Intercept)          t          t2        year         age       surgery
## 1 0.007756736 0.04130290 0.0008964768 0.01166713 0.01688253 0.5319373
## 2 0.013113980 0.06898341 0.0015340216 0.01613615 0.02404470 0.7612701
##
## Residual Deviance: 550.0108
## AIC: 574.0108

z = summary(competfit)$coefficients/summary(competfit)$standard.error
s
p <- (1 - pnorm(abs(z), 0, 1)) * 2
p
```

```
## (Intercept)          t          t2 year      age surgery
## 1          0 8.396729e-07 0.0004090588    0 0.009318953 0.03104129
## 2          0 3.359389e-03 0.0519462468    0 0.647310003 0.42008041
```

## Stata

Ouverture de la base.

```
webuse set "https://raw.githubusercontent.com/mthevenin/analyse_duree/master/bases/"
webuse "transplantation_m", clear
webuse set
```

```
list in 1/10
```

|     | id | year | age | died | stime | surgery | transp~t | wait | mois | compet |
|-----|----|------|-----|------|-------|---------|----------|------|------|--------|
| 1.  | 15 | 68   | 53  | 1    | 1     | 0       | 0        | 0    | 1    | 1      |
| 2.  | 43 | 70   | 43  | 1    | 2     | 0       | 0        | 0    | 1    | 1      |
| 3.  | 61 | 71   | 52  | 1    | 2     | 0       | 0        | 0    | 1    | 1      |
| 4.  | 75 | 72   | 52  | 1    | 2     | 0       | 0        | 0    | 1    | 1      |
| 5.  | 6  | 68   | 54  | 1    | 3     | 0       | 0        | 0    | 1    | 2      |
| 6.  | 42 | 70   | 36  | 1    | 3     | 0       | 0        | 0    | 1    | 1      |
| 7.  | 54 | 71   | 47  | 1    | 3     | 0       | 0        | 0    | 1    | 1      |
| 8.  | 38 | 70   | 41  | 1    | 5     | 0       | 1        | 5    | 1    | 1      |
| 9.  | 85 | 73   | 47  | 1    | 5     | 0       | 0        | 0    | 1    | 1      |
| 10. | 2  | 68   | 51  | 1    | 6     | 0       | 0        | 0    | 1    | 1      |

## Analyse non paramétrique

### Méthode actuarielle

Avec des intervalles fixes de 30 jours.

```
ltable stime died, interval(30) graph
```

| Interval | Beg. | Total | Deaths | Lost | Survival | Std. Error | [95% Conf. Int.] |
|----------|------|-------|--------|------|----------|------------|------------------|
| 0        | 30   | 103   | 22     | 1    | 0.7854   | 0.0406     | 0.6926 0.8531    |
| 30       | 60   | 80    | 14     | 2    | 0.6462   | 0.0475     | 0.5449 0.7305    |
| 60       | 90   | 64    | 12     | 0    | 0.5250   | 0.0498     | 0.4232 0.6171    |
| 90       | 120  | 52    | 5      | 1    | 0.4741   | 0.0499     | 0.3738 0.5677    |
| 120      | 150  | 46    | 1      | 1    | 0.4636   | 0.0499     | 0.3637 0.5575    |
| 150      | 180  | 44    | 2      | 0    | 0.4426   | 0.0498     | 0.3435 0.5369    |
| 180      | 210  | 42    | 3      | 1    | 0.4106   | 0.0495     | 0.3132 0.5053    |
| 210      | 240  | 38    | 1      | 0    | 0.3998   | 0.0494     | 0.3030 0.4945    |
| 240      | 270  | 37    | 1      | 1    | 0.3888   | 0.0492     | 0.2928 0.4836    |
| 270      | 300  | 35    | 2      | 0    | 0.3666   | 0.0488     | 0.2720 0.4614    |
| 300      | 330  | 33    | 1      | 0    | 0.3555   | 0.0486     | 0.2618 0.4502    |
| 330      | 360  | 32    | 3      | 1    | 0.3216   | 0.0478     | 0.2308 0.4157    |
| 360      | 390  | 28    | 0      | 1    | 0.3216   | 0.0478     | 0.2308 0.4157    |
| 390      | 420  | 27    | 0      | 1    | 0.3216   | 0.0478     | 0.2308 0.4157    |
| 420      | 450  | 26    | 0      | 2    | 0.3216   | 0.0478     | 0.2308 0.4157    |

|      |      |    |   |   |        |        |        |        |
|------|------|----|---|---|--------|--------|--------|--------|
| 480  | 510  | 24 | 0 | 1 | 0.3216 | 0.0478 | 0.2308 | 0.4157 |
| 510  | 540  | 23 | 0 | 1 | 0.3216 | 0.0478 | 0.2308 | 0.4157 |
| 540  | 570  | 22 | 0 | 1 | 0.3216 | 0.0478 | 0.2308 | 0.4157 |
| 570  | 600  | 21 | 1 | 1 | 0.3059 | 0.0479 | 0.2155 | 0.4010 |
| 600  | 630  | 19 | 0 | 1 | 0.3059 | 0.0479 | 0.2155 | 0.4010 |
| 660  | 690  | 18 | 1 | 1 | 0.2885 | 0.0483 | 0.1982 | 0.3849 |
| 720  | 750  | 16 | 1 | 0 | 0.2704 | 0.0485 | 0.1807 | 0.3681 |
| 840  | 870  | 15 | 1 | 1 | 0.2518 | 0.0486 | 0.1629 | 0.3506 |
| 900  | 930  | 13 | 0 | 1 | 0.2518 | 0.0486 | 0.1629 | 0.3506 |
| 930  | 960  | 12 | 0 | 1 | 0.2518 | 0.0486 | 0.1629 | 0.3506 |
| 960  | 990  | 11 | 1 | 0 | 0.2289 | 0.0493 | 0.1404 | 0.3304 |
| 990  | 1020 | 10 | 1 | 0 | 0.2060 | 0.0494 | 0.1192 | 0.3093 |
| 1020 | 1050 | 9  | 1 | 0 | 0.1831 | 0.0489 | 0.0992 | 0.2873 |
| 1140 | 1170 | 8  | 0 | 1 | 0.1831 | 0.0489 | 0.0992 | 0.2873 |
| 1320 | 1350 | 7  | 0 | 1 | 0.1831 | 0.0489 | 0.0992 | 0.2873 |
| 1380 | 1410 | 6  | 1 | 2 | 0.1465 | 0.0510 | 0.0645 | 0.2602 |
| 1560 | 1590 | 3  | 0 | 2 | 0.1465 | 0.0510 | 0.0645 | 0.2602 |
| 1770 | 1800 | 1  | 0 | 1 | 0.1465 | 0.0510 | 0.0645 | 0.2602 |

### Récupération des quartiles de la durée

Installation de la commande `qlt`

```
net install qlt, from("https://mthevenin.github.io/analyse_duree/ado/qlt/")
replace

help qlt
```

```
ltable stime died, interval(30) saving(base, replace)
use base, clear

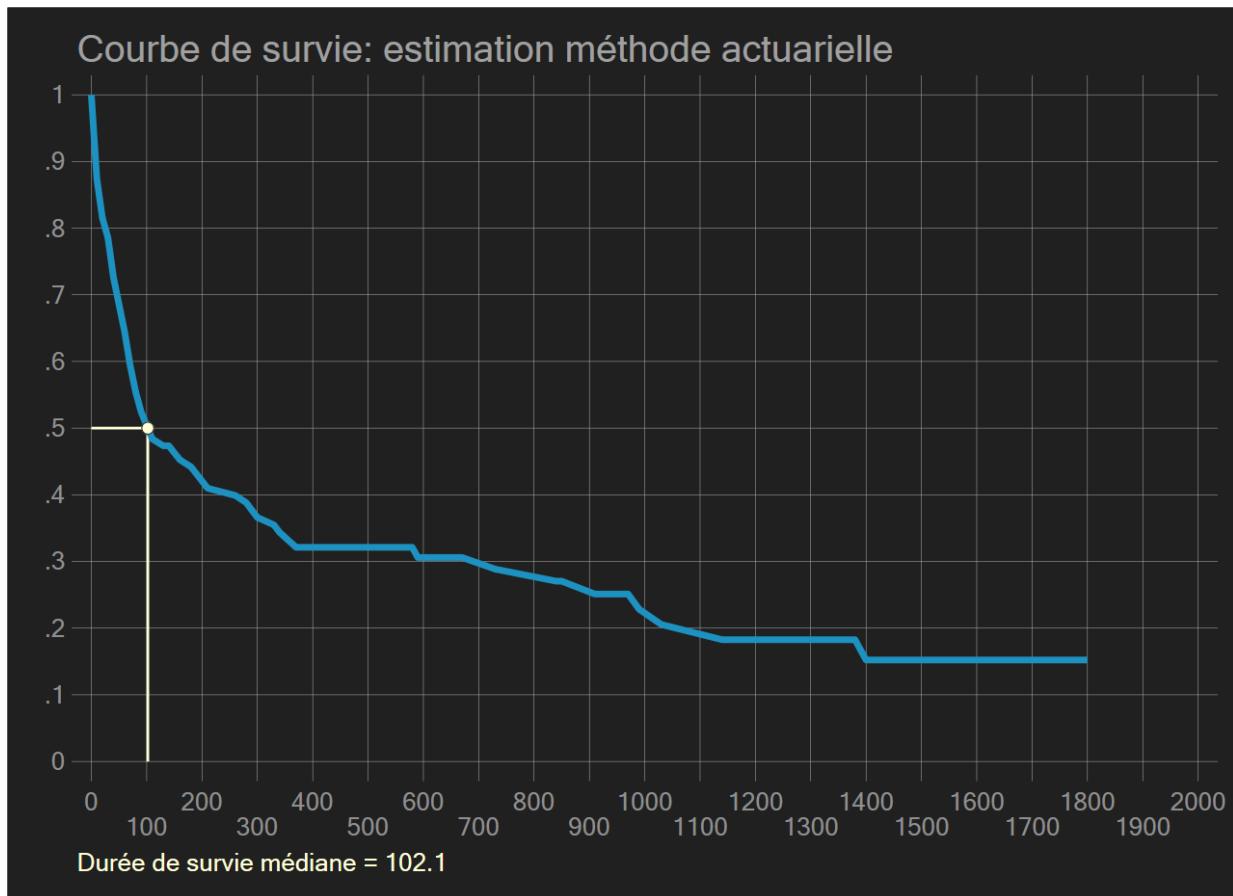
qlt

Durée pour différents quantiles de la fonction de survie
Définition des bornes Stata-ltable
S(t)=0.90: t=      .
S(t)=0.75: t=    7.623
S(t)=0.50: t=   74.729
S(t)=0.25: t= 849.325
S(t)=0.10: t=      .
```

Avec la définition des bornes des intervalles de Sas (**préférable**)

```
qlt, sas

Duree pour differents quantiles de la fonction de survie
Definition des bornes Sas-lifetest
S(t)=0.90: t= 13.977
S(t)=0.75: t= 37.623
S(t)=0.50: t= 104.729
S(t)=0.25: t= 906.993
S(t)=0.10: t=      .
```



### **Méthode Kaplan-Meier**

Les données doivent être mises en mode analyse de durée (*help stset*). Dans son expression la plus simple :

```
stset variable_durée, failure(variable_événement)
```

```
stset stime, f(died)

    failure event:  (assumed to fail at time=stime)
obs. time interval:  (0, stime]
exit on or before:  failure

-----
103  total observations
    0  exclusions

-----
103  observations remaining, representing
    103  failures in single-record/single-failure data
31,938  total analysis time at risk and under observation
                    at risk from t =      0
                    earliest observed entry t =      0
                    last observed exit t =  1,799
```

list in 1/10

|     | id | year | age | died | stime | surgery | transpt | wait | _st | _d | _t  | _t0 |
|-----|----|------|-----|------|-------|---------|---------|------|-----|----|-----|-----|
| 1.  | 1  | 67   | 30  | 1    | 50    | 0       | 0       | 0    | 1   | 1  | 50  | 0   |
| 2.  | 2  | 68   | 51  | 1    | 6     | 0       | 0       | 0    | 1   | 1  | 6   | 0   |
| 3.  | 3  | 68   | 54  | 1    | 16    | 0       | 1       | 1    | 1   | 1  | 16  | 0   |
| 4.  | 4  | 68   | 40  | 1    | 39    | 0       | 1       | 36   | 1   | 1  | 39  | 0   |
| 5.  | 5  | 68   | 20  | 1    | 18    | 0       | 0       | 0    | 1   | 1  | 18  | 0   |
| 6.  | 6  | 68   | 54  | 1    | 3     | 0       | 0       | 0    | 1   | 1  | 3   | 0   |
| 7.  | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1       | 51   | 1   | 1  | 675 | 0   |
| 8.  | 8  | 68   | 45  | 1    | 40    | 0       | 0       | 0    | 1   | 1  | 40  | 0   |
| 9.  | 9  | 68   | 47  | 1    | 85    | 0       | 0       | 0    | 1   | 1  | 85  | 0   |
| 10. | 10 | 68   | 42  | 1    | 58    | 0       | 1       | 12   | 1   | 1  | 58  | 0   |

### Estimation de la fonction de survie

sts list

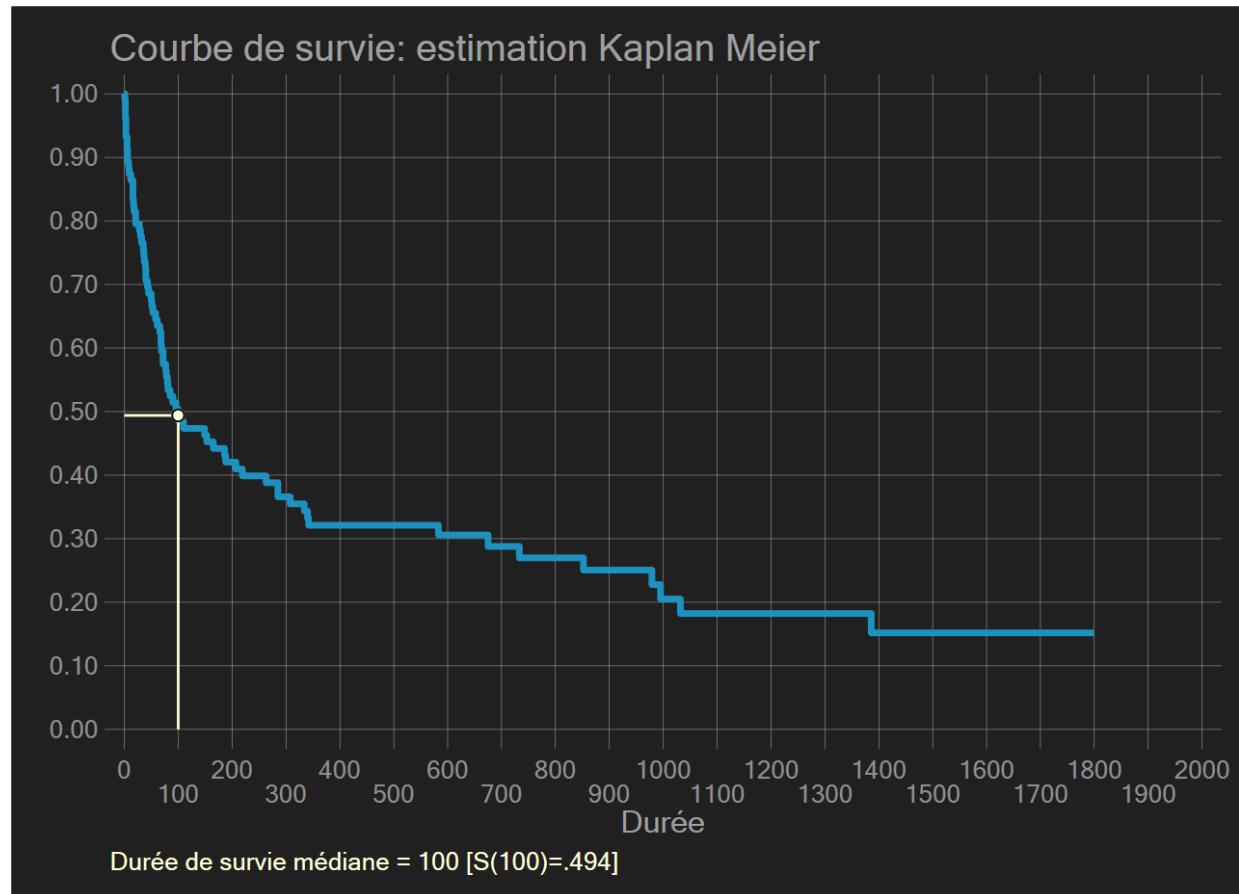
failure \_d: died  
analysis time \_t: stime

| Time | At   |      |      | Survivor Function | Std. Error | [95% Conf. Int.] |        |
|------|------|------|------|-------------------|------------|------------------|--------|
|      | Risk | Fail | Lost |                   |            |                  |        |
| 1    | 103  | 1    | 0    | 0.9903            | 0.0097     | 0.9331           | 0.9986 |
| 2    | 102  | 3    | 0    | 0.9612            | 0.0190     | 0.8998           | 0.9852 |
| 3    | 99   | 3    | 0    | 0.9320            | 0.0248     | 0.8627           | 0.9670 |
| 5    | 96   | 2    | 0    | 0.9126            | 0.0278     | 0.8388           | 0.9535 |
| 6    | 94   | 2    | 0    | 0.8932            | 0.0304     | 0.8155           | 0.9394 |
| 8    | 92   | 1    | 0    | 0.8835            | 0.0316     | 0.8040           | 0.9321 |
| 9    | 91   | 1    | 0    | 0.8738            | 0.0327     | 0.7926           | 0.9247 |
| 11   | 90   | 0    | 1    | 0.8738            | 0.0327     | 0.7926           | 0.9247 |
| 12   | 89   | 1    | 0    | 0.8640            | 0.0338     | 0.7811           | 0.9171 |
| 16   | 88   | 3    | 0    | 0.8345            | 0.0367     | 0.7474           | 0.8937 |
| 17   | 85   | 1    | 0    | 0.8247            | 0.0375     | 0.7363           | 0.8857 |
| 18   | 84   | 1    | 0    | 0.8149            | 0.0383     | 0.7253           | 0.8777 |
| 21   | 83   | 2    | 0    | 0.7952            | 0.0399     | 0.7034           | 0.8614 |
| 28   | 81   | 1    | 0    | 0.7854            | 0.0406     | 0.6926           | 0.8531 |
| 30   | 80   | 1    | 0    | 0.7756            | 0.0412     | 0.6819           | 0.8448 |
| 31   | 79   | 0    | 1    | 0.7756            | 0.0412     | 0.6819           | 0.8448 |
| 32   | 78   | 1    | 0    | 0.7657            | 0.0419     | 0.6710           | 0.8363 |
| 35   | 77   | 1    | 0    | 0.7557            | 0.0425     | 0.6603           | 0.8278 |
| 36   | 76   | 1    | 0    | 0.7458            | 0.0431     | 0.6495           | 0.8192 |
| 37   | 75   | 1    | 0    | 0.7358            | 0.0436     | 0.6388           | 0.8106 |
| 39   | 74   | 1    | 1    | 0.7259            | 0.0442     | 0.6282           | 0.8019 |
| 40   | 72   | 2    | 0    | 0.7057            | 0.0452     | 0.6068           | 0.7842 |
| 43   | 70   | 1    | 0    | 0.6956            | 0.0457     | 0.5961           | 0.7752 |
| 45   | 69   | 1    | 0    | 0.6856            | 0.0461     | 0.5855           | 0.7662 |
| 50   | 68   | 1    | 0    | 0.6755            | 0.0465     | 0.5750           | 0.7572 |
| 51   | 67   | 1    | 0    | 0.6654            | 0.0469     | 0.5645           | 0.7481 |
| 53   | 66   | 1    | 0    | 0.6553            | 0.0472     | 0.5541           | 0.7390 |
| 58   | 65   | 1    | 0    | 0.6452            | 0.0476     | 0.5437           | 0.7298 |

|      |    |   |   |        |        |        |        |
|------|----|---|---|--------|--------|--------|--------|
| 61   | 64 | 1 | 0 | 0.6352 | 0.0479 | 0.5333 | 0.7206 |
| 66   | 63 | 1 | 0 | 0.6251 | 0.0482 | 0.5230 | 0.7113 |
| 68   | 62 | 2 | 0 | 0.6049 | 0.0487 | 0.5026 | 0.6926 |
| 69   | 60 | 1 | 0 | 0.5948 | 0.0489 | 0.4924 | 0.6832 |
| 72   | 59 | 2 | 0 | 0.5747 | 0.0493 | 0.4722 | 0.6643 |
| 77   | 57 | 1 | 0 | 0.5646 | 0.0494 | 0.4621 | 0.6548 |
| 78   | 56 | 1 | 0 | 0.5545 | 0.0496 | 0.4521 | 0.6453 |
| 80   | 55 | 1 | 0 | 0.5444 | 0.0497 | 0.4422 | 0.6357 |
| 81   | 54 | 1 | 0 | 0.5343 | 0.0498 | 0.4323 | 0.6261 |
| 85   | 53 | 1 | 0 | 0.5243 | 0.0499 | 0.4224 | 0.6164 |
| 90   | 52 | 1 | 0 | 0.5142 | 0.0499 | 0.4125 | 0.6067 |
| 96   | 51 | 1 | 0 | 0.5041 | 0.0499 | 0.4027 | 0.5969 |
| 100  | 50 | 1 | 0 | 0.4940 | 0.0499 | 0.3930 | 0.5872 |
| 102  | 49 | 1 | 0 | 0.4839 | 0.0499 | 0.3833 | 0.5773 |
| 109  | 48 | 0 | 1 | 0.4839 | 0.0499 | 0.3833 | 0.5773 |
| 110  | 47 | 1 | 0 | 0.4736 | 0.0499 | 0.3733 | 0.5673 |
| 131  | 46 | 0 | 1 | 0.4736 | 0.0499 | 0.3733 | 0.5673 |
| 149  | 45 | 1 | 0 | 0.4631 | 0.0499 | 0.3632 | 0.5571 |
| 153  | 44 | 1 | 0 | 0.4526 | 0.0499 | 0.3531 | 0.5468 |
| 165  | 43 | 1 | 0 | 0.4421 | 0.0498 | 0.3430 | 0.5364 |
| 180  | 42 | 0 | 1 | 0.4421 | 0.0498 | 0.3430 | 0.5364 |
| 186  | 41 | 1 | 0 | 0.4313 | 0.0497 | 0.3327 | 0.5258 |
| 188  | 40 | 1 | 0 | 0.4205 | 0.0497 | 0.3225 | 0.5152 |
| 207  | 39 | 1 | 0 | 0.4097 | 0.0495 | 0.3123 | 0.5045 |
| 219  | 38 | 1 | 0 | 0.3989 | 0.0494 | 0.3022 | 0.4938 |
| 263  | 37 | 1 | 0 | 0.3881 | 0.0492 | 0.2921 | 0.4830 |
| 265  | 36 | 0 | 1 | 0.3881 | 0.0492 | 0.2921 | 0.4830 |
| 285  | 35 | 2 | 0 | 0.3660 | 0.0488 | 0.2714 | 0.4608 |
| 308  | 33 | 1 | 0 | 0.3549 | 0.0486 | 0.2612 | 0.4496 |
| 334  | 32 | 1 | 0 | 0.3438 | 0.0483 | 0.2510 | 0.4383 |
| 340  | 31 | 1 | 1 | 0.3327 | 0.0480 | 0.2409 | 0.4270 |
| 342  | 29 | 1 | 0 | 0.3212 | 0.0477 | 0.2305 | 0.4153 |
| 370  | 28 | 0 | 1 | 0.3212 | 0.0477 | 0.2305 | 0.4153 |
| 397  | 27 | 0 | 1 | 0.3212 | 0.0477 | 0.2305 | 0.4153 |
| 427  | 26 | 0 | 1 | 0.3212 | 0.0477 | 0.2305 | 0.4153 |
| 445  | 25 | 0 | 1 | 0.3212 | 0.0477 | 0.2305 | 0.4153 |
| 482  | 24 | 0 | 1 | 0.3212 | 0.0477 | 0.2305 | 0.4153 |
| 515  | 23 | 0 | 1 | 0.3212 | 0.0477 | 0.2305 | 0.4153 |
| 545  | 22 | 0 | 1 | 0.3212 | 0.0477 | 0.2305 | 0.4153 |
| 583  | 21 | 1 | 0 | 0.3059 | 0.0478 | 0.2156 | 0.4008 |
| 596  | 20 | 0 | 1 | 0.3059 | 0.0478 | 0.2156 | 0.4008 |
| 620  | 19 | 0 | 1 | 0.3059 | 0.0478 | 0.2156 | 0.4008 |
| 670  | 18 | 0 | 1 | 0.3059 | 0.0478 | 0.2156 | 0.4008 |
| 675  | 17 | 1 | 0 | 0.2879 | 0.0483 | 0.1976 | 0.3844 |
| 733  | 16 | 1 | 0 | 0.2699 | 0.0485 | 0.1802 | 0.3676 |
| 841  | 15 | 0 | 1 | 0.2699 | 0.0485 | 0.1802 | 0.3676 |
| 852  | 14 | 1 | 0 | 0.2507 | 0.0487 | 0.1616 | 0.3497 |
| 915  | 13 | 0 | 1 | 0.2507 | 0.0487 | 0.1616 | 0.3497 |
| 941  | 12 | 0 | 1 | 0.2507 | 0.0487 | 0.1616 | 0.3497 |
| 979  | 11 | 1 | 0 | 0.2279 | 0.0493 | 0.1394 | 0.3295 |
| 995  | 10 | 1 | 0 | 0.2051 | 0.0494 | 0.1183 | 0.3085 |
| 1032 | 9  | 1 | 0 | 0.1823 | 0.0489 | 0.0985 | 0.2865 |
| 1141 | 8  | 0 | 1 | 0.1823 | 0.0489 | 0.0985 | 0.2865 |
| 1321 | 7  | 0 | 1 | 0.1823 | 0.0489 | 0.0985 | 0.2865 |
| 1386 | 6  | 1 | 0 | 0.1519 | 0.0493 | 0.0713 | 0.2606 |
| 1400 | 5  | 0 | 1 | 0.1519 | 0.0493 | 0.0713 | 0.2606 |
| 1407 | 4  | 0 | 1 | 0.1519 | 0.0493 | 0.0713 | 0.2606 |
| 1571 | 3  | 0 | 1 | 0.1519 | 0.0493 | 0.0713 | 0.2606 |
| 1586 | 2  | 0 | 1 | 0.1519 | 0.0493 | 0.0713 | 0.2606 |

```
1799      1      0      1    0.1519    0.0493    0.0713    0.2606
```

```
sts graph
```

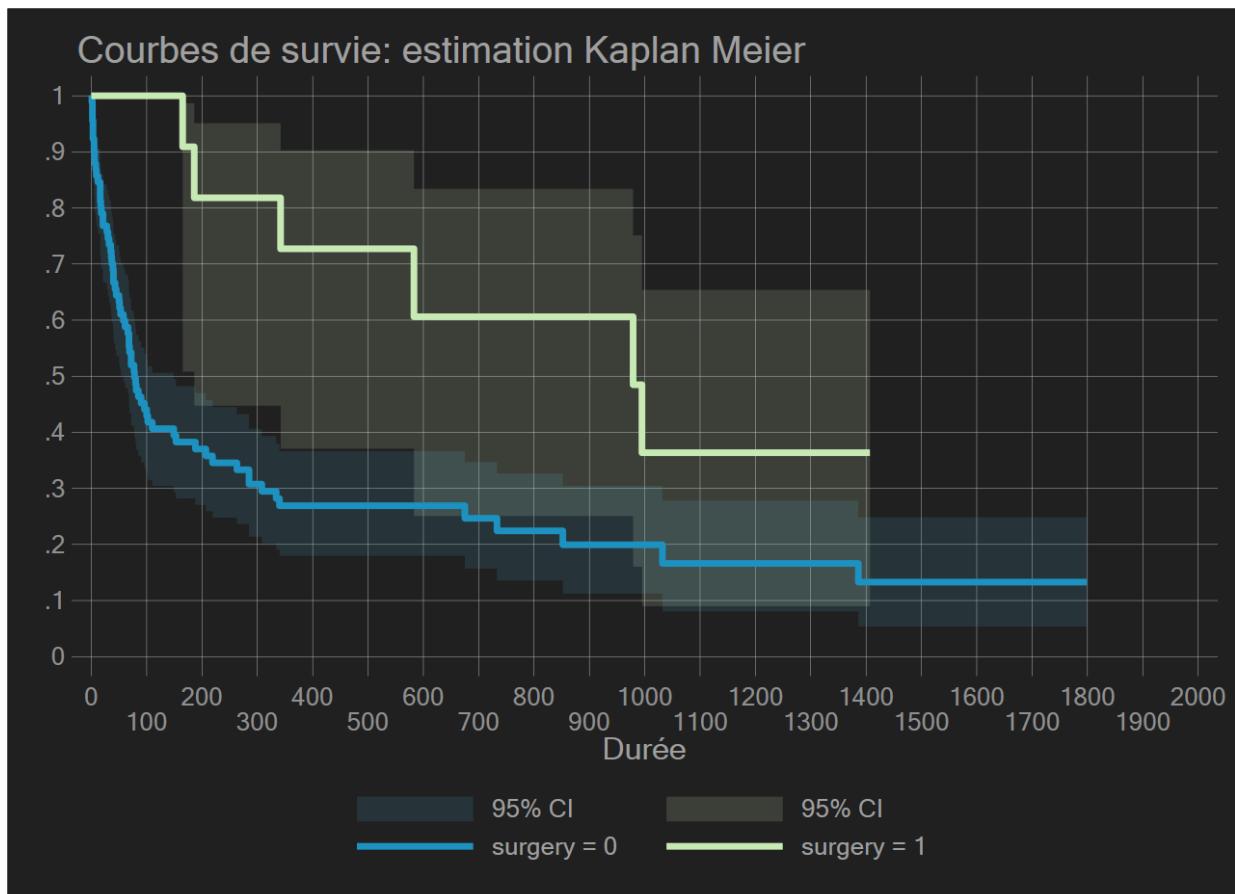


### Comparaison des fonctions de survie

#### Tests du log rank

On va comparer les fonctions de survie pour la variable *surgery*

```
sts graph, by(surgery)
```



Tests du log rank: fonction ***sts test***. On affichera ici plusieurs variantes du test.

```
local test `" "l" "w" "tw" "p" ""
foreach test2 of local test {
sts test surgery, `test2'
}
```

Log-rank test for equality of survivor functions

| surgery | Events   | Events   |
|---------|----------|----------|
|         | observed | expected |
| 0       | 69       | 60.34    |
| 1       | 6        | 14.66    |
| Total   | 75       | 75.00    |

chi2(1) = 6.59  
Pr>chi2 = 0.0103

failure \_d: died  
analysis time \_t: stime

Wilcoxon (Breslow) test for equality of survivor functions

| surgery | Events observed | Events expected | Sum of ranks |
|---------|-----------------|-----------------|--------------|
| 0       | 69              | 60.34           | 623          |
| 1       | 6               | 14.66           | -623         |
| Total   | 75              | 75.00           | 0            |

chi2(1) = 8.99  
 Pr>chi2 = 0.0027

failure \_d: died  
 analysis time \_t: stime

#### Tarone-Ware test for equality of survivor functions

| surgery | Events observed | Events expected | Sum of ranks |
|---------|-----------------|-----------------|--------------|
| 0       | 69              | 60.34           | 73.105398    |
| 1       | 6               | 14.66           | -73.105398   |
| Total   | 75              | 75.00           | 0            |

chi2(1) = 8.46  
 Pr>chi2 = 0.0036

failure \_d: died  
 analysis time \_t: stime

#### Peto-Peto test for equality of survivor functions

| surgery | Events observed | Events expected | Sum of ranks |
|---------|-----------------|-----------------|--------------|
| 0       | 69              | 60.34           | 6.0505875    |
| 1       | 6               | 14.66           | -6.0505875   |
| Total   | 75              | 75.00           | 0            |

chi2(1) = 8.66  
 Pr>chi2 = 0.0032

### *Comparaison des rmst*

Installation de la commande strmst2:

```
ssc install strmst2
```

arm1 = opération  
 arm0 = pas d'opération

## strmst2 surgery

Restricted Mean Survival Time (RMST) by arm

| Group | Estimate | Std. Err. | [95% Conf. Interval] |
|-------|----------|-----------|----------------------|
| arm 1 | 734.758  | 133.478   | 473.145 996.370      |
| arm 0 | 310.168  | 43.160    | 225.576 394.760      |

Between-group contrast (arm 1 versus arm 0)

| Contrast             | Estimate | [95% Conf. Interval] | P> z  |
|----------------------|----------|----------------------|-------|
| RMST (arm 1 - arm 0) | 424.590  | 149.641 699.539      | 0.002 |
| RMST (arm 1 / arm 0) | 2.369    | 1.513 3.710          | 0.000 |

## Risques proportionnels

*Modèle semi paramétrique de Cox*

*Estimation du modèle*

Avec la correction d'Efron

**stcox year age surgery, nolog noshow efron**

Cox regression -- Efron method for ties

|                   |            |               |   |        |
|-------------------|------------|---------------|---|--------|
| No. of subjects = | 103        | Number of obs | = | 103    |
| No. of failures = | 75         |               |   |        |
| Time at risk =    | 31938      | LR chi2(3)    | = | 17.63  |
| Log likelihood =  | -289.30639 | Prob > chi2   | = | 0.0005 |

| _t      | Haz. Ratio | Std. Err. | z     | P> z  | [95% Conf. Interval] |
|---------|------------|-----------|-------|-------|----------------------|
| year    | 0.8872     | 0.0597    | -1.78 | 0.076 | 0.7775 1.0124        |
| age     | 1.0300     | 0.0139    | 2.19  | 0.029 | 1.0031 1.0577        |
| surgery | 0.3726     | 0.1625    | -2.26 | 0.024 | 0.1584 0.8761        |

**stcox year age surgery, nolog noshow efron nohr**

Cox regression -- Efron method for ties

|                   |            |               |   |        |
|-------------------|------------|---------------|---|--------|
| No. of subjects = | 103        | Number of obs | = | 103    |
| No. of failures = | 75         |               |   |        |
| Time at risk =    | 31938      | LR chi2(3)    | = | 17.63  |
| Log likelihood =  | -289.30639 | Prob > chi2   | = | 0.0005 |

| _t      | Coef.   | Std. Err. | z     | P> z  | [95% Conf. Interval] |         |
|---------|---------|-----------|-------|-------|----------------------|---------|
| year    | -0.1196 | 0.0673    | -1.78 | 0.076 | -0.2516              | 0.0124  |
| age     | 0.0296  | 0.0135    | 2.19  | 0.029 | 0.0031               | 0.0561  |
| surgery | -0.9873 | 0.4363    | -2.26 | 0.024 | -1.8424              | -0.1323 |

### Test de l'hypothèse PH

#### Test Grambsch-Therneau sur les résidus de Schoenfeld

\* f(t)=t - par défaut -

**estat phtest, detail**

Test of proportional-hazards assumption

Time: Time

|             | rho     | chi2 | df | Prob>chi2 |
|-------------|---------|------|----|-----------|
| year        | 0.10162 | 0.80 | 1  | 0.3720    |
| age         | 0.12937 | 1.61 | 1  | 0.2043    |
| surgery     | 0.29664 | 5.54 | 1  | 0.0186    |
| global test |         | 8.76 | 3  | 0.0327    |

\* f(t)= 1-km - solution par défaut de R

**estat phtest, detail km**

Test of proportional-hazards assumption

Time: Kaplan-Meier

|             | rho     | chi2 | df | Prob>chi2 |
|-------------|---------|------|----|-----------|
| year        | 0.15920 | 1.96 | 1  | 0.1620    |
| age         | 0.10907 | 1.15 | 1  | 0.2845    |
| surgery     | 0.25096 | 3.96 | 1  | 0.0465    |
| global test |         | 7.99 | 3  | 0.0462    |

*Intéraction avec une fonction de la durée :  $f(t) = t$*

```
stcox year age surgery, nolog noshow efron nohr tvc(surgery) texp(_t)

Cox regression -- Efron method for ties

No. of subjects =           103                      Number of obs     =      103
No. of failures =          75                       LR chi2(4)       =     21.58
Time at risk    =      31938                      Prob > chi2      =  0.0002
Log likelihood  = -287.32903

-----+-----[95% Conf. Interval]
_t | Coef.   Std. Err.      z   P>|z|
-----+
main |
  year | -0.1231   0.0668   -1.84   0.066   -0.2541   0.0079
        age |  0.0289   0.0134    2.15   0.032   0.0025   0.0552
        surgery | -1.7547   0.6744   -2.60   0.009   -3.0765  -0.4330
-----+
tvc  |
  surgery |  0.0022   0.0011    2.02   0.043   0.0001   0.0044
-----+
Note: Variables in tvc equation interacted with _t.
```

### ***Introduction d'une variable dynamique (binaire)***

Transformation de la base en format long aux temps d'évènement :

#### ***Modèle de Cox***

##### **Etape 1**

```
stset stime, f(died) id(id)

      id: id
failure event: died != 0 & died < .
obs. time interval: (stime[_n-1], stime]
exit on or before: failure

-----+
103  total observations
  0  exclusions
-----+
103  observations remaining, representing
103  subjects
  75  failures in single-failure-per-subject data
31,938 total analysis time at risk and under observation
                     at risk from t =      0
                     earliest observed entry t =      0
                     last observed exit t =  1,799
```

## Etape 2

```
stssplit, at(failure)
(62 failure times)
(3,470 observations (episodes) created)
```

```
sort id _t
```

```
list in 1/23
```

|     | id | year | age | died | stime | surgery | transpt~t | wait | mois | compet | _st | _d | _t | _t0 |
|-----|----|------|-----|------|-------|---------|-----------|------|------|--------|-----|----|----|-----|
| 1.  | 1  | 67   | 30  | .    | 1     | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 1  | 0   |
| 2.  | 1  | 67   | 30  | .    | 2     | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 2  | 1   |
| 3.  | 1  | 67   | 30  | .    | 3     | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 3  | 2   |
| 4.  | 1  | 67   | 30  | .    | 5     | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 5  | 3   |
| 5.  | 1  | 67   | 30  | .    | 6     | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 6  | 5   |
| 6.  | 1  | 67   | 30  | .    | 8     | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 8  | 6   |
| 7.  | 1  | 67   | 30  | .    | 9     | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 9  | 8   |
| 8.  | 1  | 67   | 30  | .    | 12    | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 12 | 9   |
| 9.  | 1  | 67   | 30  | .    | 16    | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 16 | 12  |
| 10. | 1  | 67   | 30  | .    | 17    | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 17 | 16  |
| 11. | 1  | 67   | 30  | .    | 18    | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 18 | 17  |
| 12. | 1  | 67   | 30  | .    | 21    | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 21 | 18  |
| 13. | 1  | 67   | 30  | .    | 28    | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 28 | 21  |
| 14. | 1  | 67   | 30  | .    | 30    | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 30 | 28  |
| 15. | 1  | 67   | 30  | .    | 32    | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 32 | 30  |
| 16. | 1  | 67   | 30  | .    | 35    | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 35 | 32  |
| 17. | 1  | 67   | 30  | .    | 36    | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 36 | 35  |
| 18. | 1  | 67   | 30  | .    | 37    | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 37 | 36  |
| 19. | 1  | 67   | 30  | .    | 39    | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 39 | 37  |
| 20. | 1  | 67   | 30  | .    | 40    | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 40 | 39  |
| 21. | 1  | 67   | 30  | .    | 43    | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 43 | 40  |
| 22. | 1  | 67   | 30  | .    | 45    | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 0  | 45 | 43  |
| 23. | 1  | 67   | 30  | 1    | 50    | 0       | 0         | 0    | 2    | 1      | 1   | 1  | 50 | 45  |

## Etape 3

```
gen tvc = transplant==1 & wait<=_t
sort id _t
list id transplant wait tvc _d _t _t0 if id==10 , noobs
```

|  | id | transplant | wait | tvc | _d | _t | _t0 |
|--|----|------------|------|-----|----|----|-----|
|  | 10 | 1          | 12   | 0   | 0  | 1  | 0   |
|  | 10 | 1          | 12   | 0   | 0  | 2  | 1   |
|  | 10 | 1          | 12   | 0   | 0  | 3  | 2   |
|  | 10 | 1          | 12   | 0   | 0  | 5  | 3   |
|  | 10 | 1          | 12   | 0   | 0  | 6  | 5   |
|  | 10 | 1          | 12   | 0   | 0  | 8  | 6   |
|  | 10 | 1          | 12   | 0   | 0  | 9  | 8   |
|  | 10 | 1          | 12   | 1   | 0  | 12 | 9   |
|  | 10 | 1          | 12   | 1   | 0  | 16 | 12  |
|  | 10 | 1          | 12   | 1   | 0  | 17 | 16  |
|  | 10 | 1          | 12   | 1   | 0  | 18 | 17  |
|  | 10 | 1          | 12   | 1   | 0  | 21 | 18  |

|             |   |    |   |   |    |    |
|-------------|---|----|---|---|----|----|
| 10          | 1 | 12 | 1 | 0 | 28 | 21 |
| 10          | 1 | 12 | 1 | 0 | 30 | 28 |
| 10          | 1 | 12 | 1 | 0 | 32 | 30 |
| -----       |   |    |   |   |    |    |
| 10          | 1 | 12 | 1 | 0 | 35 | 32 |
| 10          | 1 | 12 | 1 | 0 | 36 | 35 |
| 10          | 1 | 12 | 1 | 0 | 37 | 36 |
| 10          | 1 | 12 | 1 | 0 | 39 | 37 |
| 10          | 1 | 12 | 1 | 0 | 40 | 39 |
| -----       |   |    |   |   |    |    |
| 10          | 1 | 12 | 1 | 0 | 43 | 40 |
| 10          | 1 | 12 | 1 | 0 | 45 | 43 |
| 10          | 1 | 12 | 1 | 0 | 50 | 45 |
| 10          | 1 | 12 | 1 | 0 | 51 | 50 |
| 10          | 1 | 12 | 1 | 0 | 53 | 51 |
| -----       |   |    |   |   |    |    |
| 10          | 1 | 12 | 1 | 1 | 58 | 53 |
| -----+----- |   |    |   |   |    |    |

### Estimation du modèle

```
stcox year age surgery tvc, nolog noshow efron nohr
```

Cox regression -- Efron method for ties

|                   |            |                 |        |
|-------------------|------------|-----------------|--------|
| No. of subjects = | 103        | Number of obs = | 3,573  |
| No. of failures = | 75         |                 |        |
| Time at risk =    | 31938      | LR chi2(4) =    | 17.70  |
| Log likelihood =  | -289.27014 | Prob > chi2 =   | 0.0014 |

| _t          | Coef.   | Std. Err. | z     | P> z  | [95% Conf. Interval] |
|-------------|---------|-----------|-------|-------|----------------------|
| -----+----- |         |           |       |       |                      |
| year        | -0.1203 | 0.0673    | -1.79 | 0.074 | -0.2523 0.0117       |
| age         | 0.0304  | 0.0139    | 2.19  | 0.029 | 0.0032 0.0577        |
| surgery     | -0.9829 | 0.4366    | -2.25 | 0.024 | -1.8385 -0.1273      |
| tvc         | -0.0822 | 0.3048    | -0.27 | 0.787 | -0.6797 0.5153       |

## Modèle (logistique) à temps discret

Variable de durée = mois

Mise en forme

```
expand mois
bysort id: gen t=_n
gen e = died
replace e=0 if t<mois

* list in 1/31
```

|     | id | year | age | died | stime | surgery | transp~t | wait | mois | compet | t  | e |
|-----|----|------|-----|------|-------|---------|----------|------|------|--------|----|---|
| 1.  | 1  | 67   | 30  | 1    | 50    | 0       | 0        | 0    | 2    | 1      | 1  | 0 |
| 2.  | 1  | 67   | 30  | 1    | 50    | 0       | 0        | 0    | 2    | 1      | 2  | 1 |
| 3.  | 2  | 68   | 51  | 1    | 6     | 0       | 0        | 0    | 1    | 1      | 1  | 1 |
| 4.  | 3  | 68   | 54  | 1    | 16    | 0       | 1        | 1    | 1    | 1      | 1  | 1 |
| 5.  | 4  | 68   | 40  | 1    | 39    | 0       | 1        | 36   | 2    | 2      | 1  | 0 |
| 6.  | 4  | 68   | 40  | 1    | 39    | 0       | 1        | 36   | 2    | 2      | 2  | 1 |
| 7.  | 5  | 68   | 20  | 1    | 18    | 0       | 0        | 0    | 1    | 1      | 1  | 1 |
| 8.  | 6  | 68   | 54  | 1    | 3     | 0       | 0        | 0    | 1    | 2      | 1  | 1 |
| 9.  | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 1  | 0 |
| 10. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 2  | 0 |
| 11. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 3  | 0 |
| 12. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 4  | 0 |
| 13. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 5  | 0 |
| 14. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 6  | 0 |
| 15. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 7  | 0 |
| 16. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 8  | 0 |
| 17. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 9  | 0 |
| 18. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 10 | 0 |
| 19. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 11 | 0 |
| 20. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 12 | 0 |
| 21. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 13 | 0 |
| 22. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 14 | 0 |
| 23. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 15 | 0 |
| 24. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 16 | 0 |
| 25. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 17 | 0 |
| 26. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 18 | 0 |
| 27. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 19 | 0 |
| 28. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 20 | 0 |
| 29. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 21 | 0 |
| 30. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 22 | 0 |
| 31. | 7  | 68   | 50  | 1    | 675   | 0       | 1        | 51   | 23   | 1      | 23 | 1 |

## Paramétrisation avec durée continue

### Les critères d'information

```
gen t2=t^2
gen t3=t^3

logit e t      , nolog

Logistic regression                               Number of obs     =     1,127
                                                LR chi2(1)      =      50.85
                                                Prob > chi2     =     0.0000
Log likelihood = -250.26058                      Pseudo R2       =     0.0922

-----+
          e |   Coef.    Std. Err.      z    P>|z|   [95% Conf. Interval]
-----+
          t |  -0.1007    0.0185    -5.45   0.000    -0.1370    -0.0645
_cons |  -1.6436    0.1724    -9.53   0.000    -1.9815    -1.3057
-----+



estat ic

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

-----+
      Model |        N    ll(null)    ll(model)      df        AIC        BIC
-----+
          . |    1,127  -275.6841  -250.2606      2    504.5212  514.5758
-----+


Note: BIC uses N = number of observations. See [R] BIC note.

logit e t t2      , nolog

Logistic regression                               Number of obs     =     1,127
                                                LR chi2(2)      =      65.25
                                                Prob > chi2     =     0.0000
Log likelihood = -243.05761                      Pseudo R2       =     0.1183

-----+
          e |   Coef.    Std. Err.      z    P>|z|   [95% Conf. Interval]
-----+
          t |  -0.2172    0.0357    -6.08   0.000    -0.2872    -0.1471
          t2 |   0.0034    0.0008     4.50   0.000     0.0019    0.0049
_cons |  -1.2326    0.1925    -6.40   0.000    -1.6098    -0.8554
-----+
```

```
estat ic
```

```
Akaike's information criterion and Bayesian information criterion
```

| Model | N     | ll(null)  | ll(model) | df | AIC      | BIC      |
|-------|-------|-----------|-----------|----|----------|----------|
| .     | 1,127 | -275.6841 | -243.0576 | 3  | 492.1152 | 507.1972 |

Note: BIC uses N = number of observations. See [R] BIC note.

**logit e t t2 t3 , nolog**

Logistic regression

|               |   |        |
|---------------|---|--------|
| Number of obs | = | 1,127  |
| LR chi2(3)    | = | 72.86  |
| Prob > chi2   | = | 0.0000 |
| Pseudo R2     | = | 0.1321 |

Log likelihood = -239.25267

| e     | Coef.   | Std. Err. | z     | P> z  | [95% Conf. Interval] |
|-------|---------|-----------|-------|-------|----------------------|
| t     | -0.4038 | 0.0819    | -4.93 | 0.000 | -0.5643 -0.2434      |
| t2    | 0.0157  | 0.0050    | 3.14  | 0.002 | 0.0059 0.0254        |
| t3    | -0.0002 | 0.0001    | -2.31 | 0.021 | -0.0003 -0.0000      |
| _cons | -0.8250 | 0.2406    | -3.43 | 0.001 | -1.2965 -0.3536      |

**estat ic**

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

| Model | N     | ll(null)  | ll(model) | df | AIC      | BIC      |
|-------|-------|-----------|-----------|----|----------|----------|
| .     | 1,127 | -275.6841 | -239.2527 | 4  | 486.5053 | 506.6146 |

Note: BIC uses N = number of observations. See [R] BIC note.

### Estimation du modèle

**logit e t t2 t3 year age surgery, nolog**

Logistic regression

|               |   |        |
|---------------|---|--------|
| Number of obs | = | 1,127  |
| LR chi2(6)    | = | 90.69  |
| Prob > chi2   | = | 0.0000 |
| Pseudo R2     | = | 0.1645 |

Log likelihood = -230.33671

| e       | Coef.   | Std. Err. | z     | P> z  | [95% Conf. Interval] |
|---------|---------|-----------|-------|-------|----------------------|
| t       | -0.3721 | 0.0824    | -4.52 | 0.000 | -0.5335 -0.2106      |
| t2      | 0.0142  | 0.0050    | 2.83  | 0.005 | 0.0044 0.0241        |
| t3      | -0.0002 | 0.0001    | -2.11 | 0.035 | -0.0003 -0.0000      |
| year    | -0.1327 | 0.0738    | -1.80 | 0.072 | -0.2773 0.0119       |
| age     | 0.0333  | 0.0147    | 2.27  | 0.023 | 0.0046 0.0621        |
| surgery | -1.0109 | 0.4486    | -2.25 | 0.024 | -1.8902 -0.1317      |

|       |        |        |      |       |         |         |
|-------|--------|--------|------|-------|---------|---------|
| _cons | 7.0827 | 5.3077 | 1.33 | 0.182 | -3.3203 | 17.4856 |
|-------|--------|--------|------|-------|---------|---------|

### Paramétrisation avec durée discrète

Pour l'exemple seulement, on prendra des intervalles découpés sur les quartiles de la durée.

```
xtile ct4=t, n(4)
bysort id ct4: keep if _n==_N
```

```
tab ct4 e
```

| quantiles<br>of t | 0   | 1  | Total |
|-------------------|-----|----|-------|
| 1                 | 50  | 53 | 103   |
| 2                 | 35  | 11 | 46    |
| 3                 | 27  | 5  | 32    |
| 4                 | 10  | 6  | 16    |
| Total             | 122 | 75 | 197   |

```
logit e i.ct4 year age surgery, nolog
```

```
Logistic regression                               Number of obs      =      197
                                                LR chi2(6)        =     39.30
                                                Prob > chi2       =     0.0000
Log likelihood = -111.23965                      Pseudo R2        =     0.1501
```

| e       | Coef.   | Std. Err. | z     | P> z  | [95% Conf. Interval] |
|---------|---------|-----------|-------|-------|----------------------|
| ct4     |         |           |       |       |                      |
| 2       | -1.0334 | 0.4189    | -2.47 | 0.014 | -1.8543 -0.2124      |
| 3       | -1.6152 | 0.5449    | -2.96 | 0.003 | -2.6831 -0.5473      |
| 4       | -0.4789 | 0.5993    | -0.80 | 0.424 | -1.6535 0.6957       |
| year    | -0.2032 | 0.0932    | -2.18 | 0.029 | -0.3859 -0.0206      |
| age     | 0.0469  | 0.0185    | 2.53  | 0.011 | 0.0106 0.0831        |
| surgery | -1.1102 | 0.5026    | -2.21 | 0.027 | -2.0952 -0.1252      |
| _cons   | 12.4467 | 6.6537    | 1.87  | 0.061 | -0.5943 25.4877      |

## Modèles paramétriques

Commande *streg*

### Modèle AFT

#### Weibull

Par défaut, le modèle de Weibull est exécuté sous paramétrisation PH. Pour une paramétrisation type AFT, ajouter l'option *time*.

```
webuse set "https://raw.githubusercontent.com/mthevenin/analyse_duree/master/bases/"
webuse "transplantation_m", clear
webuse set

stset stime, f(died)
streg year age surgery , dist(weibull) time nolog noshow
estat ic

Weibull AFT regression

No. of subjects =           103                      Number of obs     =      103
No. of failures =          75
Time at risk     =      31938
                                         LR chi2(3)      =      18.87
Log likelihood   =    -188.6278
                                         Prob > chi2     =     0.0003

-----
          _t |     Coef.    Std. Err.      z     P>|z|    [95% Conf. Interval]
-----+
       year |    0.1620    0.1218     1.33    0.184    -0.0768    0.4008
        age |   -0.0615    0.0247    -2.49    0.013    -0.1100   -0.0130
      surgery |    1.9703    0.7794     2.53    0.011     0.4427    3.4980
      _cons |   -3.0220    8.7284    -0.35    0.729   -20.1294   14.0854
-----+
      /ln_p |   -0.5868    0.0927    -6.33    0.000    -0.7685   -0.4051
-----+
         p |    0.5561    0.0516
        1/p |   1.7983    0.1667
-----+
Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

-----+
      Model |      N    ll(null)    ll(model)      df      AIC      BIC
-----+
       . |    103   -198.0632   -188.6278      5    387.2556   400.4292
-----+
Note: BIC uses N = number of observations. See [R] BIC note.
```

## Loglogistique

```
streg year age surgery , dist(loglog) nolog noshow  
estat ic
```

Loglogistic AFT regression

|                   |            |                 |        |
|-------------------|------------|-----------------|--------|
| No. of subjects = | 103        | Number of obs = | 103    |
| No. of failures = | 75         |                 |        |
| Time at risk =    | 31938      | LR chi2(3) =    | 21.69  |
| Log likelihood =  | -183.03937 | Prob > chi2 =   | 0.0001 |

| _t       | Coef.    | Std. Err. | z     | P> z  | [95% Conf. Interval] |
|----------|----------|-----------|-------|-------|----------------------|
| <hr/>    |          |           |       |       |                      |
| year     | 0.2408   | 0.1172    | 2.05  | 0.040 | 0.0110 0.4705        |
| age      | -0.0427  | 0.0213    | -2.00 | 0.045 | -0.0845 -0.0010      |
| surgery  | 2.2747   | 0.6913    | 3.29  | 0.001 | 0.9198 3.6296        |
| _cons    | -10.4034 | 8.3410    | -1.25 | 0.212 | -26.7515 5.9446      |
| <hr/>    |          |           |       |       |                      |
| /lngamma | 0.1805   | 0.0970    | 1.86  | 0.063 | -0.0095 0.3706       |
| <hr/>    |          |           |       |       |                      |
| gamma    | 1.1979   | 0.1161    |       |       | 0.9906 1.4486        |
| <hr/>    |          |           |       |       |                      |

Akaike's information criterion and Bayesian information criterion

| Model | N   | ll(null)  | ll(model) | df | AIC      | BIC      |
|-------|-----|-----------|-----------|----|----------|----------|
| .     | 103 | -193.8865 | -183.0394 | 5  | 376.0787 | 389.2524 |

## Risques concurrents

*Non paramétrique: estimation des IC*

Installer les commandes *stcompet* et *stcomlist*

```
ssc install stcompet  
ssc install stcomlist
```

Le risque d'intérêt est *compet=1*, le risque concurrent est *compet=2*

```
stset stime, failure(compet==1)
stcomlist, compet1(2)
```

failure: competit == 1  
competing failures: competit == 2

| Time | CIF    | SE     | [95% Conf. Int.] |
|------|--------|--------|------------------|
| 1    | 0.0097 | 0.0097 | 0.0009 0.0477    |
| 2    | 0.0388 | 0.0190 | 0.0127 0.0892    |
| 3    | 0.0583 | 0.0231 | 0.0239 0.1149    |
| 5    | 0.0777 | 0.0264 | 0.0363 0.1395    |
| 6    | 0.0874 | 0.0278 | 0.0429 0.1515    |
| 8    | 0.0971 | 0.0292 | 0.0497 0.1634    |
| 9    | 0.1068 | 0.0304 | 0.0566 0.1751    |
| 12   | 0.1166 | 0.0316 | 0.0638 0.1868    |
| 16   | 0.1362 | 0.0338 | 0.0785 0.2099    |
| 18   | 0.1461 | 0.0349 | 0.0860 0.2212    |
| 21   | 0.1657 | 0.0367 | 0.1014 0.2437    |
| 32   | 0.1756 | 0.0376 | 0.1093 0.2550    |
| 37   | 0.1856 | 0.0384 | 0.1173 0.2662    |
| 40   | 0.1957 | 0.0393 | 0.1254 0.2775    |
| 43   | 0.2058 | 0.0400 | 0.1337 0.2888    |
| 45   | 0.2158 | 0.0408 | 0.1420 0.2999    |
| 50   | 0.2259 | 0.0415 | 0.1503 0.3110    |
| 51   | 0.2360 | 0.0422 | 0.1588 0.3221    |
| 53   | 0.2461 | 0.0428 | 0.1673 0.3330    |
| 58   | 0.2562 | 0.0434 | 0.1759 0.3439    |
| 61   | 0.2662 | 0.0440 | 0.1845 0.3548    |
| 66   | 0.2763 | 0.0445 | 0.1932 0.3656    |
| 69   | 0.2864 | 0.0450 | 0.2020 0.3763    |
| 72   | 0.3066 | 0.0459 | 0.2197 0.3976    |
| 77   | 0.3167 | 0.0464 | 0.2286 0.4082    |
| 78   | 0.3267 | 0.0467 | 0.2376 0.4187    |
| 81   | 0.3368 | 0.0471 | 0.2466 0.4292    |
| 85   | 0.3469 | 0.0475 | 0.2556 0.4396    |
| 90   | 0.3570 | 0.0478 | 0.2648 0.4500    |
| 96   | 0.3671 | 0.0481 | 0.2739 0.4604    |
| 102  | 0.3771 | 0.0484 | 0.2831 0.4707    |
| 110  | 0.3874 | 0.0487 | 0.2925 0.4812    |
| 149  | 0.3980 | 0.0489 | 0.3021 0.4920    |
| 165  | 0.4085 | 0.0492 | 0.3118 0.5027    |
| 186  | 0.4193 | 0.0495 | 0.3217 0.5137    |
| 188  | 0.4301 | 0.0497 | 0.3316 0.5246    |
| 207  | 0.4408 | 0.0499 | 0.3417 0.5354    |
| 219  | 0.4516 | 0.0501 | 0.3517 0.5462    |
| 263  | 0.4624 | 0.0502 | 0.3618 0.5570    |
| 285  | 0.4846 | 0.0505 | 0.3826 0.5791    |
| 308  | 0.4957 | 0.0506 | 0.3931 0.5900    |
| 340  | 0.5068 | 0.0507 | 0.4037 0.6009    |
| 583  | 0.5221 | 0.0514 | 0.4171 0.6168    |
| 675  | 0.5401 | 0.0524 | 0.4322 0.6361    |
| 733  | 0.5580 | 0.0532 | 0.4477 0.6548    |
| 995  | 0.5808 | 0.0548 | 0.4659 0.6795    |
| 1032 | 0.6036 | 0.0559 | 0.4851 0.7031    |
| 1386 | 0.6340 | 0.0583 | 0.5083 0.7357    |

|      | failure: compete == 2 | competing failures: compete == 1 |                  |        |  |
|------|-----------------------|----------------------------------|------------------|--------|--|
| Time | CIF                   | SE                               | [95% Conf. Int.] |        |  |
| 3    | 0.0097                | 0.0097                           | 0.0009           | 0.0477 |  |
| 6    | 0.0194                | 0.0136                           | 0.0038           | 0.0619 |  |
| 16   | 0.0292                | 0.0166                           | 0.0079           | 0.0761 |  |
| 17   | 0.0391                | 0.0191                           | 0.0128           | 0.0897 |  |
| 28   | 0.0489                | 0.0213                           | 0.0182           | 0.1029 |  |
| 30   | 0.0587                | 0.0232                           | 0.0240           | 0.1157 |  |
| 35   | 0.0686                | 0.0250                           | 0.0302           | 0.1286 |  |
| 36   | 0.0786                | 0.0267                           | 0.0367           | 0.1411 |  |
| 39   | 0.0885                | 0.0282                           | 0.0435           | 0.1534 |  |
| 40   | 0.0986                | 0.0296                           | 0.0504           | 0.1658 |  |
| 68   | 0.1188                | 0.0322                           | 0.0650           | 0.1901 |  |
| 80   | 0.1288                | 0.0334                           | 0.0724           | 0.2020 |  |
| 100  | 0.1389                | 0.0345                           | 0.0800           | 0.2138 |  |
| 153  | 0.1495                | 0.0356                           | 0.0880           | 0.2261 |  |
| 334  | 0.1605                | 0.0368                           | 0.0964           | 0.2392 |  |
| 342  | 0.1720                | 0.0381                           | 0.1052           | 0.2526 |  |
| 852  | 0.1913                | 0.0417                           | 0.1175           | 0.2787 |  |
| 979  | 0.2141                | 0.0460                           | 0.1320           | 0.3094 |  |

### Modèle cause-specific (Cox)

Attention: non relié aux IC

**stcox year age surgery, nohr**

Cox regression -- Breslow method for ties

|                   |            |                 |        |
|-------------------|------------|-----------------|--------|
| No. of subjects = | 103        | Number of obs = | 103    |
| No. of failures = | 56         |                 |        |
| Time at risk =    | 31938      | LR chi2(3) =    | 15.88  |
| Log likelihood =  | -214.46905 | Prob > chi2 =   | 0.0012 |

| _t      | Coef.   | Std. Err. | z     | P> z  | [95% Conf. Interval] |
|---------|---------|-----------|-------|-------|----------------------|
| year    | -0.1033 | 0.0774    | -1.33 | 0.182 | -0.2550 0.0485       |
| age     | 0.0385  | 0.0163    | 2.36  | 0.018 | 0.0065 0.0704        |
| surgery | -1.1099 | 0.5290    | -2.10 | 0.036 | -2.1468 -0.0730      |

## Modèle de Fine-Gray

La commande **stcrreg** est installée avec les commandes de base. Relié directement aux IC, la définition du risque diffère du risque instantané usuel (risque de sous répartition).

```
stcrreg year age surgery, compete(compet=2) nohr

failure _d: compet == 1
analysis time _t: stime

Competing-risks regression
No. of obs = 103
No. of subjects = 103
Failure event : compet == 1
No. failed = 56
Competing event: compet == 2
No. competing = 19
No. censored = 28

Wald chi2(3) = 11.42
Log pseudolikelihood = -227.69531 Prob > chi2 = 0.0097

-----
| Robust
_t | Coef. Std. Err. z P>|z| [95% Conf. Interval]
-----+
year | -0.0724 0.0716 -1.01 0.312 -0.2128 0.0679
age | 0.0370 0.0177 2.09 0.037 0.0022 0.0718
surgery | -0.8688 0.4510 -1.93 0.054 -1.7528 0.0153
-----+
```

## Modèle logistique multinomial

Attention: non relié aux IC. Pour la variable de durée on utilise la variable *mois*

```
expand mois
bysort id: gen t=_n
gen t2=t*t

gen e = competit
replace e=0 if t<mois

mlogit e t t2 year age surgery

Multinomial logistic regression
Number of obs = 1,127
LR chi2(10) = 86.25
Prob > chi2 = 0.0000
Pseudo R2 = 0.1356

Log likelihood = -275.00542

-----
e | RRR Std. Err. z P>|z| [95% Conf. Interval]
-----+
0 | (base outcome)
-----+
1 |
t | 0.8159 0.0338 -4.91 0.000 0.7522 0.8850
t2 | 1.0032 0.0009 3.53 0.000 1.0014 1.0049
year | 0.8795 0.0718 -1.57 0.116 0.7494 1.0321
-----+
```



# Python

Deux paquets d'analyse : *lifelines* (km, cox, aft...) et *statsmodels* (estimation logit en temps discret, kaplan-Meier, Cox). Le package *statsmodels* est également en mesure d'estimer des courbes de séjour de type Kaplan-Meier et des modèles à risque proportionnel de Cox. Le package *lifelines* couvre la quasi totalité des méthodes standards, à l'exception des risques concurrents.

## *Chargement des librairies*

```
import numpy as np
import pandas as pd
import patsy as pt
import lifelines as lf
import matplotlib.pyplot as plt
```

## *Importation de la base*

```
trans = pd.read_csv("https://raw.githubusercontent.com/mthevenin/analyse_duree/master/bases/transplantation.csv")
trans.head(10)
trans.info()
```

## Package *lifelines*

<https://lifelines.readthedocs.io/en/latest/>

### Non Paramétrique: Kaplan Meier

#### *Estimateur KM et durée médiane*

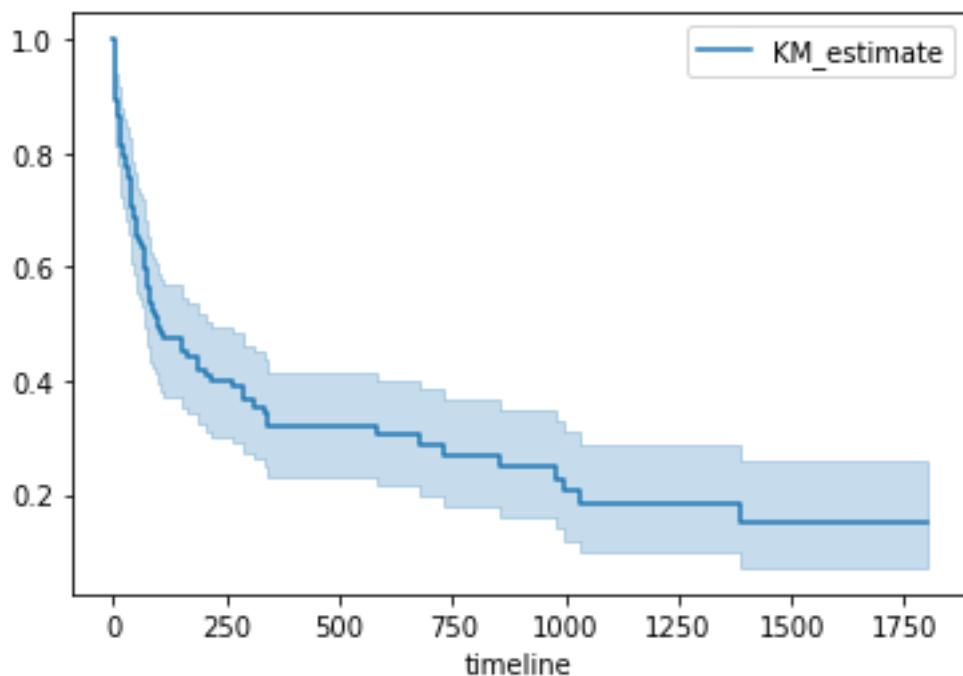
```
T = trans['stime']
E = trans['died']

from lifelines import KaplanMeierFitter
kmf = KaplanMeierFitter()
kmf.fit(T,E)
print(kmf.survival_function_)
a = "DUREE MEDIANE:"
b = kmf.median_survival_time_
print(a,b)
```

```
kmf.plot()
```

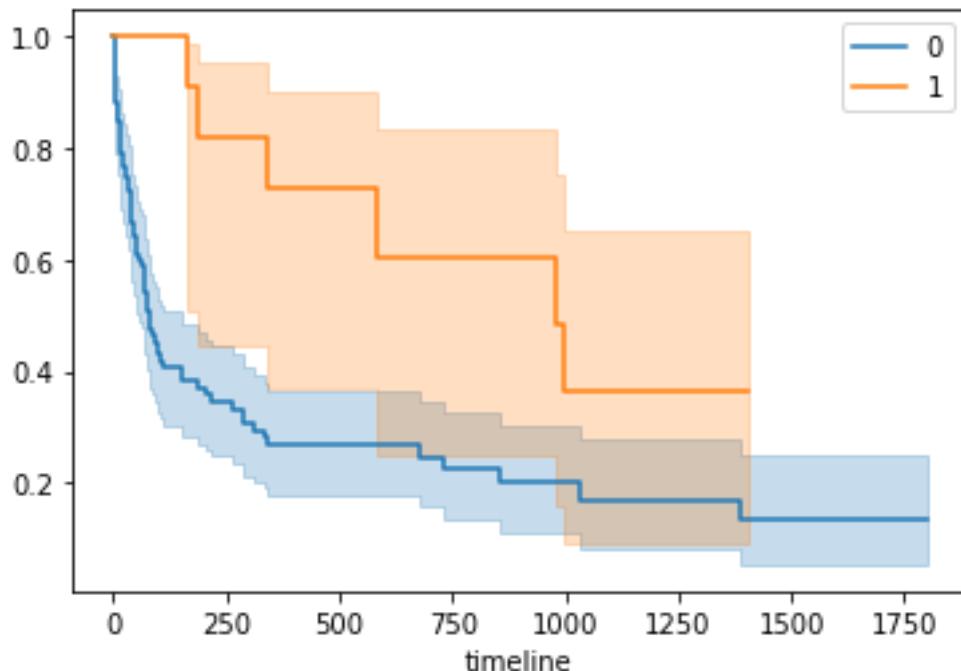
```
KM_estimate  
timeline  
0.0      1.000000  
1.0      0.990291  
2.0      0.961165  
3.0      0.932039  
5.0      0.912621  
...       ...  
1400.0    0.151912  
1407.0    0.151912  
1571.0    0.151912  
1586.0    0.151912  
1799.0    0.151912
```

[89 rows x 1 columns]  
DUREE MEDIANE: 100.0



## Comparaison des fonctions de survie

```
ax = plt.subplot(111)
kmf = KaplanMeierFitter()
for name, grouped_df in trans.groupby('surgery'):
    kmf.fit(grouped_df['stime'], grouped_df['died'], label=name)
    kmf.plot(ax=ax)
```



```
from lifelines.statistics import multivariate_logrank_test
results = multivariate_logrank_test(trans['stime'], trans['surgery'],
                                     trans['died'])
results.print_summary()

<lifelines.StatisticalResult: multivariate_logrank_test>
    t_0 = -1
    null_distribution = chi squared
    degrees_of_freedom = 1
        test_name = multivariate_logrank_test

---
test_statistic      p   -log2(p)
      6.59  0.01      6.61
```

## Semi paramétrique: Cox

### *Estimation*

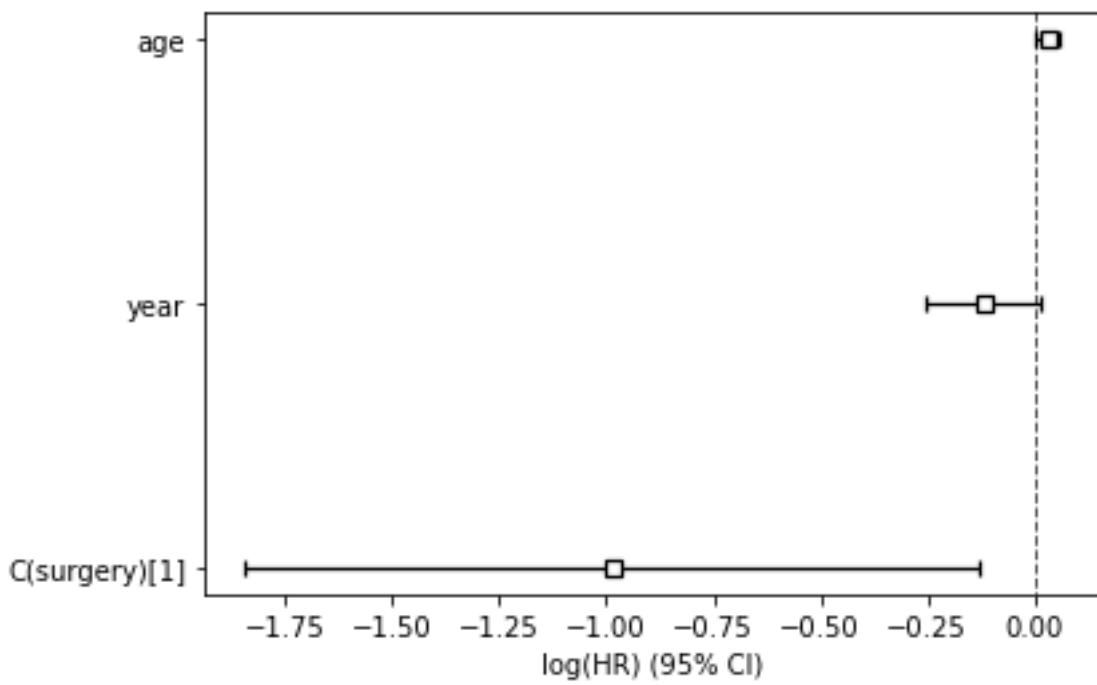
```
model = 'year + age + C(surgery) -1'
X = pt.dmatrix(model, trans, return_type='dataframe')
design_info = X.design_info
YX = X.join(trans[['stime','died']])
YX.drop(['C(surgery)[0]'], axis=1, inplace=True)
YX.head()

from lifelines import CoxPHFitter
cph = CoxPHFitter()
cph.fit(YX, duration_col='stime', event_col='died')
cph.print_summary()
cph.plot()

<lifelines.CoxPHFitter: fitted with 103 total observations, 28 right-censored observations>
    duration col = 'stime'
    event col = 'died'
    baseline estimation = breslow
    number of observations = 103
    number of events observed = 75
    partial log-likelihood = -289.31
    time fit was run = 2021-04-21 13:24:52 UTC

    ---
            coef  exp(coef)   se(coef)
C(surgery)[1] -0.99      0.37      0.44
year          -0.12      0.89      0.07
age           0.03      1.03      0.01

            z     p   -log2(p)
C(surgery)[1] -2.26  0.02      5.40
year          -1.78  0.08      3.72
age           2.19  0.03      5.12
    --
Concordance = 0.65
Partial AIC = 584.61
log-likelihood ratio test = 17.63 on 3 df
-log2(p) of ll-ratio test = 10.90
```



### Tests hypothèse PH

*Test PH: Résidus de Schoenfeld Méthode 1*

```
cph.check_assumptions(YX,p_value_threshold=0.05)
```

The ```p_value_threshold``` is set at 0.05. Even under the null hypothesis of no violations, some covariates will be below the threshold by chance. This is compounded when there are many covariates. Similarly, when there are lots of observations, even minor deviances from the proportional hazard assumption will be flagged.

With that in mind, it's best to use a combination of statistical tests and visual tests to determine the most serious violations. Produce visual plots using ```check_assumptions(..., show_plots=True)``` and looking for non-constant lines. See link [A] below for a full example.

```
<lifelines.StatisticalResult: proportional_hazard_test>
  null_distribution = chi squared
  degrees_of_freedom = 1
    test_name = proportional_hazard_test
```

```
---
              test_statistic      p   -log2(p)
C(surgery)[1] km            4.01 0.05     4.47
                rank          3.74 0.05     4.23
age           km            1.18 0.28     1.86
                rank          1.06 0.30     1.72
```

|      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| year | km   | 2.07 | 0.15 | 2.73 |
|      | rank | 2.08 | 0.15 | 2.75 |

1. Variable 'C(surgery)[1]' failed the non-proportional test: p-value is 0.0452.

*Test PH: Résidus de Schoenfeld Méthode 2*

```
from lifelines.statistics import proportional_hazard_test
zph = proportional_hazard_test(cph, YX, time_transform='all')
zph.print_summary()
```

```
<lifelines.StatisticalResult: proportional_hazard_test>
  null_distribution = chi squared
degrees_of_freedom = 1
    test_name = proportional_hazard_test

---
                                         test_statistic      p   -log2(p)
C(surgery)[1] identity                  5.54 0.02      5.75
               km                      4.01 0.05      4.47
               log                     3.69 0.05      4.19
               rank                    3.74 0.05      4.23
age          identity                  1.61 0.20      2.29
               km                      1.18 0.28      1.86
               log                     0.61 0.44      1.20
               rank                    1.06 0.30      1.72
year         identity                  0.80 0.37      1.43
               km                      2.07 0.15      2.73
               log                     1.34 0.25      2.02
               rank                    2.08 0.15      2.75
```

*Test PH: interaction avec une fonction de la durée*

```
from lifelines.utils import to_episodic_format
from lifelines import CoxTimeVaryingFitter
```

*Transformation de la base YX*

```
long = to_episodic_format(YX, duration_col='stime', event_col='died')
```

*Création de la variable d'interaction*

```
long['surgery_t'] = long['C(surgery)[1]'] * long['stop']
```

## *Estimation*

```
ctv = CoxTimeVaryingFitter()
ctv.fit(long,
        id_col='id',
        event_col='died',
        start_col='start',
        stop_col='stop',)
ctv.print_summary(4)

<lifelines.CoxTimeVaryingFitter: fitted with 31938 periods, 103 subjects, 75 events>
    event col = 'died'
number of subjects = 103
    number of periods = 31938
    number of events = 75
partial log-likelihood = -287.3290
    time fit was run = 2021-04-21 13:32:40 UTC

---
            coef      exp(coef)      se(coef)
C(surgery)[1] -1.7547      0.1730      0.6743
age             0.0289      1.0293      0.0134
year            -0.1231      0.8842      0.0668
surgery_t       0.0022      1.0022      0.0011

            z          p      -log2(p)
C(surgery)[1] -2.6022  0.0093      6.7542
age             2.1479  0.0317      4.9785
year            -1.8415  0.0656      3.9312
surgery_t       2.0239  0.0430      4.5402
---
Partial AIC = 582.6581
log-likelihood ratio test = 21.5846 on 4 df
-log2(p) of ll-ratio test = 12.0103
```

## Modèle à temps discret (régression logistique)

### *Ajustement continu*

La fonction *to\_episodic\_format* de *lifelines* permet de mettre en forme la base. Pour la durée, on utilisera ici la variable **mois** (regroupement de stime par intervalle de 30 jours).

```
#type R formule => ce qu'on utilisera
import statsmodels.formula.api as smf
#type python#
import statsmodels.api as sm
```

*Transformation de la base en format long*

```
trans = pd.read_csv("https://raw.githubusercontent.com/mthevenin/analyse_duree/master/bases/transplantation.csv")

td.drop(['id'], axis=1, inplace=True)
td['dur'] = td['mois']
td = to_episodic_format(td, duration_col='mois', event_col='died')
```

*Recherche de la fonction d'ajustement*

```
td['t2'] = td['stop']**2
td['t3'] = td['stop']**3

fit1 = smf.glm(formula= "died ~ stop", data=td, family=sm.families.Binomial()).fit()

fit2 = smf.glm(formula= "died ~ stop + t2", data=td, family=sm.families.Binomial()).fit()

fit3 = smf.glm(formula= "died ~ stop + t2 + t3", data=td, family=sm.families.Binomial()).fit()
```

*Comparaison des AIC*

```
print("AIC pour ajustement t1")
print(fit1.aic)
print("AIC pour ajustement durée t1 + t2")
print(fit2.aic)
print("AIC pour ajustement durée t1 + t2 + t3")
print(fit3.aic)
```

AIC pour ajustement t1  
512.1039235968562

AIC pour ajustement durée t1 + t2  
508.1014573009212

AIC pour ajustement durée t1 + t2 + t3  
506.1882809518765

## *Estimation du modèle*

```
tdfit = smf.glm(formula= "died ~ stop + t2 + t3 + year + age + surgery", da  
ta=td, family=sm.families.Binomial()).fit()  
tdfit.summary()  
  
<class 'statsmodels.iolib.summary.Summary'>  
"""  
Generalized Linear Model Regression Results  
=====  
Dep. Variable: died No. Observations: 1164  
Model: GLM Df Residuals: 1157  
Model Family: Binomial Df Model: 6  
Link Function: logit Scale: 1.0000  
Method: IRLS Log-Likelihood: -240.20  
Date: Wed, 21 Apr 2021 Deviance: 480.39  
Time: 15:44:21 Pearson chi2: 1.30e+03  
No. Iterations: 7  
Covariance Type: nonrobust  
=====  
coef std err z P>|z| [0.025 0.975]  
-----  
Intercept 6.3097 5.201 1.213 0.225 -3.884 16.503  
stop -0.2807 0.077 -3.635 0.000 -0.432 -0.129  
t2 0.0096 0.005 2.083 0.037 0.001 0.019  
t3 -0.0001 6.97e-05 -1.493 0.135 -0.000 3.26e-05  
year -0.1263 0.072 -1.747 0.081 -0.268 0.015  
age 0.0337 0.014 2.330 0.020 0.005 0.062  
surgery -1.0050 0.447 -2.250 0.024 -1.880 -0.130  
=====  
"""
```

## *Ajustement discret*

*Création des intervalles pour l'exemple (quantile de la durée en mois)*

```
td['ct4'] = pd.qcut(td['stop'],[0, .25, .5, .75, 1.])  
td['ct4'].value_counts(normalize=True)*100  
td.ct4 = pd.Categorical(td.ct4)  
td['ct4'] = td.ct4.cat.codes  
  
(0.999, 4.0] 27.233677  
(11.0, 23.0] 24.484536  
(4.0, 11.0] 24.398625  
(23.0, 61.0] 23.883162  
Name: ct4, dtype: float64
```

Pour chaque individu, on conserve une seule observation par intervalle.

```
td2 = td  
td2['t'] = td2['ct4']  
td2 = td2.sort_values(['id', 'stop'])
```

```
td2 = td2.groupby(['id','ct4']).last()
td2.head(20)
```

### Estimation

```
td2fit = smf.glm(formula= "died ~ C(t) + year + age + surgery", dat
a=td2, family=sm.families.Binomial()).fit()
td2fit.summary()
```

```
<class 'statsmodels.iolib.summary.Summary'>
"""
Generalized Linear Model Regression Results
=====
Dep. Variable:          died    No. Observations:             200
Model:                 GLM     Df Residuals:                  200
Model Family:           Binomial     Df Model:                      -1
Link Function:          logit     Scale:                   1.0000
Method:                IRLS     Log-Likelihood:        -112.26
Date:      Wed, 21 Apr 2021   Deviance:                  224.52
Time:          15:54:03     Pearson chi2:                  229.
No. Iterations:          5
Covariance Type:         nonrobust
=====
            coef      std err       z     P>|z|      [0.025]     [0.975]
-----
Intercept    11.8018     6.617     1.784     0.074     -1.167     24.770
C(t)[T.1]    -0.9078     0.408    -2.227     0.026     -1.707    -0.109
C(t)[T.2]    -1.8451     0.587    -3.141     0.002     -2.996    -0.694
C(t)[T.3]    -0.3224     0.578    -0.557     0.577     -1.456     0.811
year        -0.1947     0.093    -2.104     0.035     -0.376    -0.013
age          0.0468     0.018     2.543     0.011      0.011     0.083
surgery     -1.1025     0.503    -2.192     0.028     -2.088    -0.117
=====
"""
"""

```

### Modèle paramétrique de type AFT

```
from lifelines import WeibullAFTFitter, LogLogisticAFTFitter
```

### Weibull

```
aftw = WeibullAFTFitter()
aftw.fit(YX, duration_col='stime', event_col='died')
aftw.print_summary()

<lifelines.WeibullAFTFitter: fitted with 103 total observations, 28 r
ight-censored observations>
    duration col = 'stime'
    event col = 'died'
```

```

number of observations = 103
number of events observed = 75
    log-likelihood = -488.17
    time fit was run = 2021-04-21 13:55:14 UTC

---
            coef  exp(coef)   se(coef)
lambda_ C(surgery)[1]  1.97      7.17     0.78
              year      0.16      1.18     0.12
              age     -0.06      0.94     0.02
              _intercept -3.02      0.05     8.73
rho_    _intercept     -0.59      0.56     0.09

            z      p   -log2(p)
lambda_ C(surgery)[1] 2.53  0.01     6.45
              year     1.33  0.18     2.44
              age     -2.49  0.01     6.28
              _intercept -0.35  0.73     0.46
rho_    _intercept     -6.33 <0.005   31.93
---
Concordance = 0.65
AIC = 986.34
log-likelihood ratio test = 18.87 on 3 df
-log2(p) of ll-ratio test = 11.75

```

### *Loglogistique*

```

aftl = LogLogisticAFTFitter()
aftl.fit(YX, duration_col='stime', event_col='died')
aftl.print_summary()

<lifelines.LogLogisticAFTFitter: fitted with 103 total observations,
28 right-censored observations>
    duration col = 'stime'
        event col = 'died'
    number of observations = 103
number of events observed = 75
    log-likelihood = -482.58
    time fit was run = 2021-04-21 13:55:58 UTC

---
            coef  exp(coef)   se(coef)
alpha_ C(surgery)[1]  2.27      9.72     0.69
              year      0.24      1.27     0.12

```

```

age           -0.04      0.96      0.02
intercept     -10.41     0.00      8.34
beta_ _intercept -0.18      0.83      0.10
                           z      p   -log2(p)
alpha_ C(surgery)[1] 3.29 <0.005    9.96
year          2.05   0.04      4.65
age           -2.01   0.04      4.49
_intercept    -1.25   0.21      2.24
beta_ _intercept -1.86   0.06      4.00
---
Concordance = 0.66
AIC = 975.16
log-likelihood ratio test = 21.69 on 3 df
-log2(p) of ll-ratio test = 13.69

```

## Package statsmodels

<https://www.statsmodels.org/dev/duration.html>

Le package permet d'estimer des fonction de séjour de type Kaplan-Meier et des modèles de Cox.

### Fonctions de séjour Kaplan-Meier

```

km = sm.SurvfuncRight(trans["stime"], trans["died"])
km.summary()

      Surv prob  Surv prob SE  num at risk  num events
Time
1      0.990291  0.009661      103      1.0
2      0.961165  0.019037      102      3.0
3      0.932039  0.024799      99      3.0
5      0.912621  0.027825      96      2.0
6      0.893204  0.030432      94      2.0
...
852    0.250655  0.048731      14      1.0
979    0.227868  0.049341      11      1.0
995    0.205081  0.049390      10      1.0
1032   0.182295  0.048877       9      1.0
1386   0.151912  0.049277       6      1.0

```

Les test du log-rank sont disponibles avec la fonction *survdiff* (nom idem R). Au niveau graphique, la programmation semble un peu lourde et mériterait d'être simplifiée (donc non traitée).

### Comparaison de S(t) à partir des tests du log-rank

Résultat: (statistique de test, p-value)

*Test non pondéré*

```
sm.duration.survdiff(trans.stime, trans.died, trans.surgery)  
(6.590012323234387, 0.010255246157888975)
```

*Breslow*

```
sm.duration.survdiff(trans.stime, trans.died, trans.surgery, weight_type='gb')  
(8.989753779902495, 0.0027149757927903417)
```

*Tarone-Ware*

```
sm.duration.survdiff(trans.stime, trans.died, trans.surgery, weight_type='tw')  
(8.462352726451392, 0.0036257256194570653)
```

**Modèle de Cox**

```
mod = smf.phreg("stime ~ year + age + surgery ",trans, status='died'  
, ties="efron")  
rslt = mod.fit()  
print(rslt.summary())
```

Results: PHReg

```
=====
```

|         | log HR  | HR     | SE     | t       | P> t   | [0.025 0.975] |
|---------|---------|--------|--------|---------|--------|---------------|
| year    | -0.1196 | 0.0673 | 0.8872 | -1.7765 | 0.0757 | 0.7775 1.0124 |
| age     | 0.0296  | 0.0135 | 1.0300 | 2.1872  | 0.0287 | 1.0031 1.0577 |
| surgery | -0.9873 | 0.4363 | 0.3726 | -2.2632 | 0.0236 | 0.1584 0.8761 |

```
=====
```

Confidence intervals are for the hazard ratios