Eötvös Loránd Tudományegyetem

Informatikai Kar

Programozási Nyelvek és Fordítóprogramok Tanszék

Osztott rendszerek szintézise

IPM-08sztORSZE

Konzultációs segédanyag

Kopácsi László, Szabó Miklós

Utolsó módosítás: 2018. március 1.

Tartalomjegyzék

1. konzultáció

1.1. Áttekintés

Az előadás során több, temporális logikai relációval találkoztunk, nézzük ezeket át informálisan, kezdve a biztonsági tulajdonságokkal.

- Az első, melyet "háromszög"-ként említünk ($\triangleright$), bizonyos állapot-átmeneteket megenged, másokat pedig megtilt. A $(P \triangleright Q)$ azt jelenti, hogy a P állapotot **ha** elhagyjuk, akkor ezt csak a Q-n keresztül tehetjük meg. A háromszög azonban nem tesz semmiféle kikötést arról, hogy a P-t el kell hagynunk, csupán biztosít minket arról, hogy ha ez mégis megtörténik, akkor milyen irányba (nem) mozdulhatunk.

- Másik biztonsági tulajdonság az *invariáns*. Ha egy K állítás invariáns, akkor ennek minden állapot-átmenet előtt és után teljesülnie kell.

- A harmadik említett kikötés a *fixpont*. Ezzel leírhatjuk, hogy ha egy rendszerben már nem figyelhetünk meg további állapot-átmeneteket, akkor milyen tulajdonságoknak kell teljesülnie. $(FP \Rightarrow R)$ estén például egy R-el jelölt állítás igaz, amennyiben fixpontba jutottunk. Fixpontba azonban nem csak a kívánt befejezési állapot tartozhat, ha holtpont helyzet alakul ki, azt is tekinthetjük fixpontnak.

Természetesen nem csak biztonsági tulajdonságokra van szükségünk - azaz mit (ne) csinálhasson a rendszer -, hanem haladásira is (azért csináljon valamit).

- Az "egyenes nyíl" ($\mapsto$) néven nevezett reláció egy szigorú kikötés arra vonatkozóan, hogy egy állapotból milyen másik helyzetbe **kell** lépnünk. Míg $\triangleright$ esetén csupán azt mondtuk, hogy *ha* elhagyunk egy állapotot, akkor azt milyen irányba tegyük, a $(P \mapsto Q)$ azt mondja, hogy a P állapotból a Q állapotba kell, hogy kerüljünk (véges időn belül).

- Ennél megengedőbb a "görbe nyíl"-ként ($\hookrightarrow$) ismert reláció. Ebben az esetben a $(A \hookrightarrow B)$ feltétel csupán annyit mond, hogy az A állapotot előbb-utóbb a B állapot fogja követni (azaz A-ból elkerülhetetlenül B-be fogunk érkezni), de itt nincs semmilyen megkötés arra, hogy a két állapot egymás után következzen be. Legális állapot-átmenet sorozat az $(A \hookrightarrow B)$-ra az $< A, G, F, D, F, E, C, D, B >$ is.

1.2. Étkező filozófusok

Tekintsük az előadáson is ismertetett *étkező filozófusok* feladatot (jegyzet[1] 1.1). Próbáljuk meg kiegészíteni a feltételeket további megkötések formalizálásával:

- Ha a rendszer nyugalmi állapotban van, akkor egy filozófus sem eszik.

- Mindegyik filozófusra igaz, hogy ha hazament, akkor utána már nem kerülhet más állapotba.

1.3. Moziterem

A következő példában egy mozira vonatkozó feladatot fogunk ismertetni, ahol a nézők tevékenységére szeretnénk megkötéseket tenni. A jelölést megkönnyítendő vezessük be az alábbiakat: $n(i)$ jelölje az i-ik nézőt. A moziba látogatók állapotait az alábbiak alapján jelöljük:

a) megérkezik a moziba - a

b) jegyet vesz - j

c) üdítőt és nasit vásárol - b

d) érvényes jeggyel rendelkezik - t

e) filmet néz - f

f) hazamegy - h

Próbáljuk formalizálni az alábbi feltételeket:

- A moziba érkező néző filmet fog nézni.
- Ha valaki érvényes jeggyel rendelkezik, akkor megnézi a filmet.
- Ha a moziban nincs mozgás, akkor minden néző már otthon van.
- A moziba érkező néző jegyet vásárol, vagy a büfébe megy.
- A film után a néző hazamegy.
- Senki nem nézhet filmet úgy, hogy nincs érvényes jegye. (Tipp: próbáljunk invariánst megfogalmazni.)
- Ha valaki hazament, akkor már nem csinál semmit a moziban.

2. konzultáció

2.1. Áttekintés

Ahhoz, hogy a későbbiekben biztos módon számolhassunk programokkal , elkerülhetetlen a számunkra szükséges (alap)fogalmakat tisztázni a halmazelmélet és a relációk témakörében.

Legyenek A és B tetszőleges halmazok. A és B *direkt-*, vagy *Descartes*-szorzatán azt a halmazt értjük, melyben olyan párok találhatóak, melynek első eleme A-, második eleme pedig B-beli.

$$A \times B ::= \{(a,b) | a \in A \text{ és } b \in B\}$$

Jelölje $r \subseteq A \times B$ azt a bináris relációt, mely A elemeihez rendel értékeket a B halmazból (A és B tetszőleges halmazok). A reláció elemeit $(a,b) \in r$ módon fogjuk jelölni.

$$\text{Az } r \text{ reláció értelmezési tartománya: } \mathcal{D}_r ::= \{a \in A | \exists b \in B : (a,b) \in r\} \subseteq A$$

$$\text{Az } r \text{ reláció értékkészlete: } \mathcal{R}_r ::= \{b \in B | \exists a \in A : (a,b) \in r\} \subseteq B$$

$$r(a) \text{ jelölje azt a halmazt, melynek elemei: } \{b \in B | (a,b) \in r\}$$

Világos, hogy az értelmezési tartományban olyan elemek vannak, amikhez rendel valamit r, míg az értékkészletben olyanokat találhatunk, amik valamilyen elemhez hozzá lettek rendelve. Egy elem képe a hozzá rendelt elemek halmazából áll elő.

Egy g relációt *parciális függvény*nek (vagy determinisztikus relációnak) nevezhetünk, amennyiben az alábbi teljesül:

$$\forall a \in A : |g(a)| \leq 1,$$

azaz minden elemhez *legfeljebb* egy másikat társítunk. Jelölésünk ekkor: $g \in A \to B$. Ha minden elemhez pontosan egy értéket rendelünk, akkor az f reláció függvény, azaz:

$$\forall a \in A : |f(a)| = 1.$$

Jelölésünk ekkor: $f : A \to B$. Ebben az esetben általában $f(a)$ nem az egy elemű halmazt, hanem annak képét jelenti.

Ahhoz, hogy állításokat fogalmazhassunk meg a későbbiekben, szükségünk lesz logikai relációkra is.

$$\text{A } h \subseteq A \times \mathbb{L} \text{ logikai relációnak nevezzük, ahol } \mathbb{L} ::= \{igaz, hamis\}.$$

Ha h függvény, akkor *logikai függvény*nek nevezzük.

Egy reláció inverzét az alábbi módon definiálhatjuk:

$$R^{(-1)} ::= \{(b,a) \in B \times A | (a,b) \in R\}$$

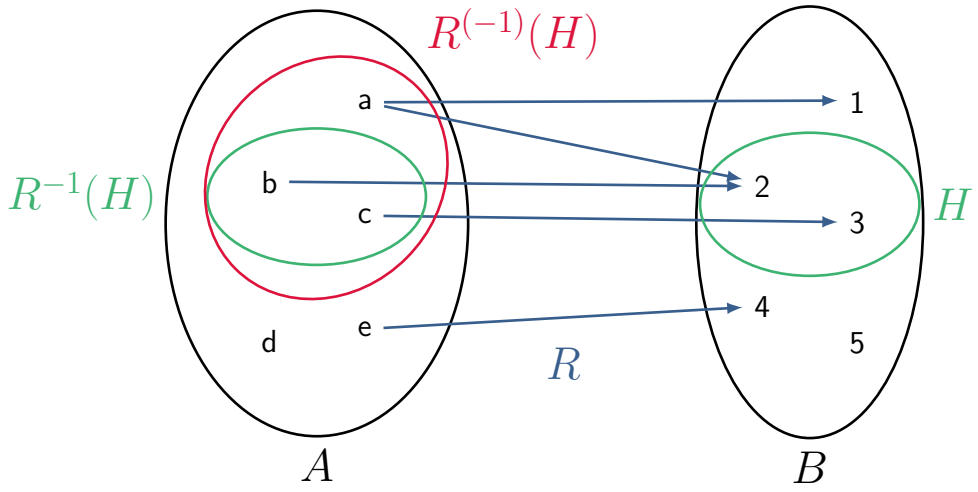
A továbbiakban szükségünk lesz egy reláció adott halmazra vonatkozó inverz- és őskép definíciójára.
A $H \subseteq B$ halmaz R reláció szerinti *inverz*képe:

$$R^{(-1)}(H) ::= \{a \in A | R(a) \cap H \neq \varnothing\}$$

A $H \subseteq B$ halmaz R reláció szerinti *ős*képe:

$$R^{-1}(H) ::= \{a \in A | R(a) \subseteq H\}$$

Meggondolva látható, hogy az *inverzkép* megengedőbb, hisz csak annyit kér, hogy egy adott elemhez *létezzen* H-beli elem az R hozzárendelésben, az *őskép* viszont megköveteli, hogy *minden* ilyen elem a H halmazban legyen.



1. ábra. Nézzünk egy példát a korábban említett fogalmakra. Legyen $A = \{a,b,c,d,e\}$ és $B = \{1,2,3,4,5\}$ halmazok, valamint $R \subseteq A \times B, R = \{(a,1),(a,2),(b,2),(c,3),(e,4)\}$ reláció. Ekkor R *értelmezési tartománya* $\mathcal{D}_R = \{a,b,c,e\}$, *értékkészlete* pedig $\mathcal{R}_R = \{1,2,3,4\}$. Továbbá legyen $H \subseteq B, H = \{2,3\}$. Ekkor a H halmaz R reláció szerinti *ősképe* $R^{-1}(H) = \{b,c\}$, *inverzképe* pedig $R^{(-1)}(H) = \{a,b,c\}$. Itt jól látszik, hogy az *inverzkép* megengedőbb, mint az *őskép*, hiszen $R^{-1}(H) \subseteq R^{(-1)}(H) = \{b,c\} \subseteq \{a,b,c\}$.

Legyen $R \subseteq A \times \mathbb{L}$ logikai reláció, R igazsághalmaza ekkor:

$$\lceil R \rceil ::= R^{-1}(\{igaz\}) \text{ azaz: } \lceil R \rceil = \{a \in \mathcal{D}_R | R(a) \subseteq \{igaz\}\}$$

Az igazsághalmazt tehát az $\{igaz\}$ halmazra vett őskép szerint definiáljuk.

Ha inverzképet számolunk, akkor juthatunk a *gyenge igazsághalmaz* fogalmához:

$$\lfloor R \rfloor ::= R^{(-1)}(\{igaz\}) \text{ azaz: } \lfloor R \rfloor = \{a \in \mathcal{D}_R | R(a) \cap \{igaz\} \neq \varnothing\}$$

A későbbiekben nagyban megkönnyíti a dolgunkat, ha bevezetjük az *azonosan igaz*, és az *azonosan hamis* logikai függvényeket.

$$Igaz : A \to \mathbb{L} : \forall a \in A : Igaz(a) = \{igaz\}$$

$$Hamis : A \to \mathbb{L} : \forall a \in A : Hamis(a) = \{hamis\}$$

Könnyű meggondolni, hogy ekkor $\lceil Igaz \rceil = A$ és $\lceil Hamis \rceil = \varnothing$.
Az igazsághalmazzal kapcsolatban fontos megemlíteni néhány tulajdonságot, melyeket a későbbiekben kihasználunk.

Legyenek P, $Q \subseteq A \times \mathbb{L}$, ekkor:

- $\lceil P \wedge Q \rceil = \lceil P \rceil \cap \lceil Q \rceil$
- $\lceil P \vee Q \rceil = \lceil P \rceil \cup \lceil Q \rceil$
- $\lceil \neg P \rceil = A \setminus \lceil P \rceil$
- $\lceil P \to Q \rceil = \lceil \neg P \vee Q \rceil = (A \setminus \lceil P \rceil) \cup \lceil Q \rceil$
- $P \Rightarrow Q = \lceil P \rceil \subseteq \lceil Q \rceil$

Egyszerűbben megfogalmazhatóak állítások, ha tudjuk, hogy $A \Rightarrow B$. Ekkor ugyanis:

- $A \vee B = B$
- $A \wedge B = A$

Nézzünk erre egy példát, legyenek A, $B : \mathbb{N} \times \mathbb{L}$ úgy, hogy:
$\lceil A \rceil$:={10-nél nagyobb szám} és
$\lceil B \rceil$:= {pozitív szám}.
Világos, hogy $A \Rightarrow B$, hiszen ha egy egész szám 10-nél nagyobb, akkor pozitív. Az $A \vee B$ állítást úgy fogalmazhatjuk meg, hogy azokat az egész számokat keressük, melyek 10-nél nagyobbak, **vagy** pozitívak. Érződik, hogy a *vagy* kapcsolat miatt a gyengébb feltétellel is megelégszünk, így a bővebb halmaz, azaz a pozitív számok halmazát kapjuk ($= B$). Ha azonban a 10-nél nagyobb **és** pozitív számokra vagyunk kíváncsiak, akkor a szigorítás miatt a szűkebb halmazt kapjuk, tehát a 10-nél nagyobb számokat kell vizsgálnunk ($= A$).

2.2. Program

Röviden tekintsük át, hogy a Fóthi[2]-Horváth - féle modellben hogyan is definiáltuk a programot és annak hatásrelációját.

Jelölje A^* az A elemeiből képzett véges, A^∞ pedig a végtelen sorozatokat. A későbbiekben A^{**} jelenti az $A^* \cup A^\infty$ halmazt, azaz a véges és végtelen sorozatok halmazát. Ha alaphalmaznak a természetes számokat választjuk, akkor az $< 1, 5, 3, 2 > \in A^*$ egy véges, míg az $< 1, 2, 3, 4, ... > \in A^\infty$ végtelen sorozatot jelöl.

Utasítás alatt egy olyan $s \subseteq A \times A^{**}$ relációt értünk, melyre:

1. $\mathcal{D}_s = A$
2. $\forall a \in A : \forall \alpha \in s(a) : |\alpha| \neq 0 \wedge \alpha_1 = a$
3. $(\alpha \in \mathcal{R}_s \wedge \alpha \in A^*) \Rightarrow (\forall i (1 \leq i < |\alpha|) : \alpha_i \neq \alpha_{i+1})$
4. $(\alpha \in \mathcal{R}_s \wedge \alpha \in A^\infty) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N} : (\alpha_i = \alpha_{i+1} \rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}^+ : \alpha_i = \alpha_{i+k}))$

A fenti definíció a *működés* fogalmát próbálja absztrakt módon szemléltetni. A négy pont jól jellemzi az utasítást: elsőként szeretnénk, ha az utasítás minden állapottér-beli pontban értelmezve lenne (azaz az utasítás mindenhonnan el tud indulni).
Második pontban azt fogalmazzuk meg, hogy egy sorozat a működése teljes történetét írja le, kezdve a kiindulási állapottal.
A harmadik pontunk a *redukáltságra* vonatkozik: ha véges hosszú sorozattal dolgozunk, akkor egymás után kétszer ne szerepelhessen ugyanaz az elem (hiszen az nem egy jó véges utasítás, amelyik úgy lép egy következő állapotba, hogy nem történt állapotváltozás - ez a megfogalmazáson is érződik).
A negyedik pont a végtelen utasításra utal: ha egy utasítás futása nem fejeződik be (végtelen ciklus, stb.), akkor ezt a hozzárendelt sorozatban úgy jelzi, hogy egy adott ponttól kezdve nem történik állapotváltozás, folyton ugyan abban az állapotban ragad (pl. $s(4) =< 4, 3, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ... >$)

Egy $s \subseteq A \times A^{**}$ utasítás *hatásrelációja* az a $p(s) \subseteq A \times A$ reláció, melyre:

1. $\mathcal{D}_{p(s)} = \{a \in A | s(a) \subseteq A^*\}$
2. $p(s)(a) = \{b \in A | \exists \alpha \in s(a) : \tau(\alpha) = b\}$

ahol $\tau : A^* \rightarrow A; \tau(\alpha) ::= \alpha_{|\alpha|}$, azaz a *tau* függvény egy véges sorozathoz annak utolsó tagját rendeli.

A hatásrelációt tehát csak olyan pontokban definiáljuk, ahol a program *megáll*, azaz véges sorozatot rendel, a hozzárendelési szabály pedig az, ahová az utasítás eljut, tehát az adott sorozatok utolsó eleme.

Az *absztrakt program*ot egy $S = (s_0, \{s_1, s_2, \ldots, s_n\})$ párként tudjuk megadni, ami egy párhuzamos programot takar. Az első tagja (s_0) a kezdeti utasítás, ami a program indulásakor hajtódik végre. A második tagja ($\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$) pedig *atomi* (vagyis párhuzamos futás során nem akadnak össze, szekvenciális futás eredményét adó) utasítások halmaza. Ezeket valamilyen *feltétlenül pártatlan ütemezés* szerint (kiéheztetés nélkül, azaz az egyes végrehajtások során minden utasítást végtelen sokszor véve) végtelen sokáig futtatunk. A programra pedig akkor mondjuk, hogy terminált (befejeződött), ha fixpontba jut, azaz már nem történik állapotváltozás.

Nézzünk erre egy egyszerű példát:
Legyen $S = (x := 0, \{x := 2 \cdot x, x := x + 1\})$. Ekkor az alábbi sorozatot ennek egy lehetséges kiértékelésének tekintjük:

$x := 0,$	$x := x + 1,$	$x := 2 * x,$	$x := 2 * x,$	$x := x + 1,$	$x := x + 1,$	$\ldots$
$0,$	$1,$	$2,$	$4,$	$5,$	$6,$	$\ldots$

2.3. Leggyengébb előfeltétel

Érezhető, hogy a fenti definíciókkal történő számolások nagyon nehézzé fogják tenni a későbbiekben a feladatok és az azt megoldó programok közötti kapcsolat megteremtését, ezért bevezetünk egy új fogalmat, a *leggyengébb előfeltétel*t.

Legyen $s \subseteq A \times A^{**}$ utasítás, $R : A \to \mathbb{L}$ állítás. Az s utasítás R utófeltételhez tartozó *leggyengébb előfeltétele* az az $lf(s, R) : A \to \mathbb{L}$ **függvény**, melyre:

$$\lceil lf(s, R) \rceil = \{a \in \mathcal{D}_{p(s)} | p(s)(a) \subseteq \lceil R \rceil\}.$$

Az *lf* tehát egy olyan függvény, mely pontosan azokhoz a pontokhoz rendel igazat, melyből elindítva az s utasítást az biztosan megáll, és az összes ilyen állapotban az R tulajdonság teljesül. Magának a függvénynek a definícióját legtöbbször nehéz megadni, de az igazsághalmazát könnyedén kifejezhetjük. Az igazsághalmaz definícióját, a kompozíció és az őskép tulajdonságait felhasználva kapjuk, hogy:

$$\lceil lf(s, R) \rceil = \lceil R \circ p(s) \rceil.$$

Az *lf*-et tehát az utófeltételbe helyettesítés módszerével tudjuk kifejezni (ennek bizonyítása megtalálható a *tankönyv*[2] 44-ik oldalán, a 3.1-es definíciónál).

Mivel a leggyengébb előfeltételt nem csak utasításokra, hanem programokra is ki szeretnénk tudni számolni, a fenti definíciót picit általánosítani kell. Tehát legyen $S = (s_0, \{s_1, s_2, \ldots, s_n\})$ program, $R : A \to \mathbb{L}$ állítás. Ekkor az S program R utófeltélhez tartozó *leggyengébb előfeltétele* az egyes utasításai által adott leggyengébb előfeltételek

konjugáltja lesz:

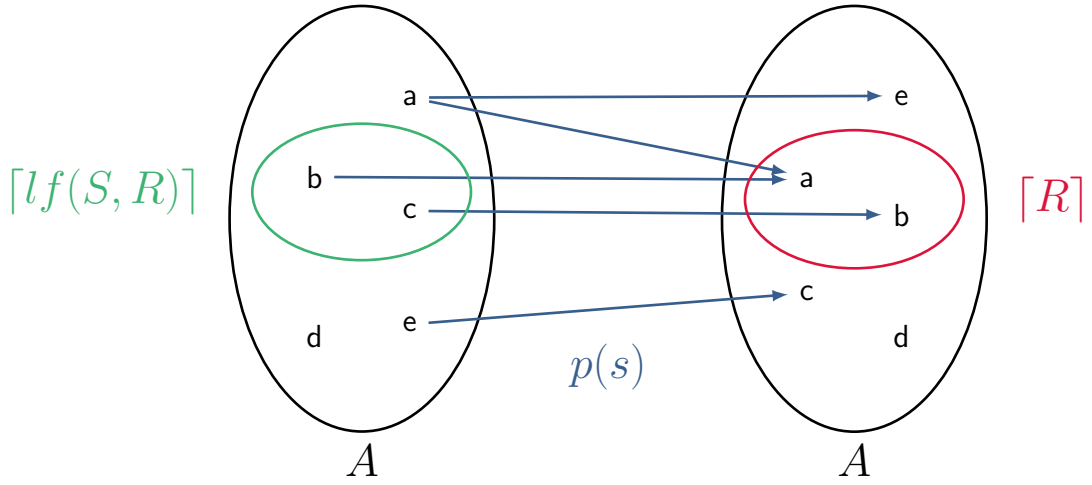
$$lf(S,R) = \bigwedge_{i=1}^{n} lf(s_i,R).$$

A későbbiekben több alaptulajdonságra is szükségünk lesz, ha az lf-fel akarunk számolni. Nézzük ezeket:

Legyen $S = (s_0, \{s_1, s_2, \ldots, s_n\})$ program, $Q, R : A \to \mathbb{L}$ állítások. Ekkor:

1. $lf(S, Hamis) = Hamis$ (csoda kizárásának elve),
2. Ha $Q \Rightarrow R$, akkor $lf(S,Q) \Rightarrow lf(S,R)$ (monotonitás),
3. $lf(S,Q) \vee lf(S,R) \Rightarrow lf(S, Q \vee R)$ (gyenge additivitás),
4. $lf(S,Q) \wedge lf(S,R) = lf(S, Q \wedge R)$ (multiplikativitás)

A bizonyításokat szintén a jegyzetben lehet olvasni.



2. ábra. Legyen $A = \{a,b,c,d,e\}$ halmaz és $p(s) := \{(a,a),(a,e),(b,a),(c,b),(e,c)\}$ hatásreláció, $\lceil R \rceil = \{a,b\}$. $lf(s,R)$ ekkor azokban a pontokban lesz igaz, melyben $p(s)$ értelmezve van és minden ezekhez rendelt elem R igazsághalmazában található. Végiggondolva tehát $\lceil lf(S,R) \rceil$ ekkor $= \{b,c\}$.

Kiszámítása: Az lf kiszámolását a már fentebb említett utófeltételbe helyettesítés módszerével tudjuk megtenni.

Az **egyszerű értékadás**ok során ez a következőt jelenti:

$$lf(x := y, R) = R^{x \leftarrow y}$$

Például az $s = (x := 3), R = (1 \leq x \leq 5)$ esetben:
$lf(s,R) = lf(x := 3, (1 \leq x \leq 5)) = R^{x \leftarrow y} = (1 \leq x \leq 5)^{x \leftarrow 3} = (1 \leq 3 \leq 5)$. Az s utasítás tehát olyan állapotokban tudjuk biztonságosan végrehajtani úgy, hogy R-be

érkezzen, melyre teljesül az, hogy $1 \leq 3 \leq 5 \equiv igaz$, azaz tetszőleges pontból indítva helyesen működő utasítást kaphatunk.

Feltételes értékadás esetén figyelembe kell venni a feltételt is, hiszen ha ez nem teljesül, abban az esetben nem kell az értékadást végrehajtanunk.

$$lf(\{x := y, \text{ha } \pi\}, R) = (\pi \to R^{x \leftarrow y}) \wedge (\neg\pi \to R^{SKIP})$$

Például az $s = (x := -x, ha\ x < 0), R = (x > 0)$ esetben:

$$\begin{aligned} lf(s, R) = lf((x := -x, ha\ x < 0), x > 0) &= (x < 0 \to (x > 0)^{x \leftarrow -x}) \wedge (x \geq 0 \to x > 0) \\ &= (x < 0 \to -x > 0) \wedge (x \geq 0 \to x > 0) \end{aligned}$$

Ekkor az $A \to B = \neg A \vee B$ logikai szabályt alkalmazva az alábbit kapjuk:

$$(x \geq 0 \vee -x > 0) \wedge (x < 0 \vee x > 0) = (x \geq 0 \vee x < 0) \wedge (x \neq 0) = (\uparrow) \wedge (x \neq 0) = (x \neq 0)$$

Vagyis az s utasítást minden $x \neq 0$ állapotban biztonságosan végre tudjuk hajtani úgy, hogy R-be érkezzen.

Szimultán értékadás során egyszerre hajtjuk végre az adott értékadásokat:

$$lf(\{x_1, ..., x_n := y_1, ..., y_n\}, R) = lf(\{\mathop{\Vert}_{i=1}^{n} x_i := y_i\}, R) = R^{\substack{x_1 \leftarrow y_1 \\ \cdots \\ x_n \leftarrow y_n}}$$

Például az $s = (x, y := x + 1, y - 1), R = (2|x + y)$ esetben:

$$\begin{aligned} lf(s, R) &= lf((x, y := x + 1, y - 1), (2|x + y)) \\ &= (2|x + y)^{\substack{x \leftarrow x+1 \\ y \leftarrow y-1}} \\ &= (2|(x + 1) + (y - 1)) = (2|x + y) \end{aligned}$$

Azaz az s utasítást olyan x, y állapotokban tudjuk biztonságosan végrehajtani úgy, hogy R-be érkezzen, melyre teljesül az, hogy $2|x + y$.

A **feltételes szimultán értékadás** kiszámításának módja ezek után egyértelműen megállapítható az előzőek alapján:

$$lf(\{x_1, ..., x_n := y_1, ..., y_n, \text{ha } \pi\}, R) = lf(\{\mathop{\Vert}_{i=1}^{n} x_i := y_i, \text{ha } \pi\}, R) =$$

$$= (\pi \to R^{\substack{x_1 \leftarrow y_1 \\ \cdots \\ x_n \leftarrow y_n}}) \wedge (\neg\pi \to R^{SKIP})$$

2.4. Feladatok

A következő példákkal a leggyengébb előfeltétel számítását tudjuk gyakorolni.

1. Legyen $S = (SKIP, \{x := x \cdot 2, ha\ 2 \nmid x,$
$x := x + 1, ha\ x < 10\})$,
és $R = (2|x)$. Számoljuk ki az S program R-hez tartozó leggyengébb előfeltételét.

2. Legyen $S = (m, n := 0, 0,\ \{m, n := m + 1, n - 1,$
$n := n + 1, ha\ n < m\})$.
Számoljuk ki az S program R-hez tartozó leggyengébb előfeltételét.

   a) Ha $R = (m = n)$.

   b) Ha $R = (n > m)$.

3. konzultáció

3.1. Gyakorlás

Először gyakoroljunk pár további *lf* számolást.

1. Legyen $s = \{x := -x, \text{ha } x > 0\},$ és
$R = (x > 1).$
$lf(s, R) =?$

$$\begin{aligned}\lceil lf(s,R)\rceil &= (x > 0 \to (x > 1)^{x \leftarrow -x}) \wedge (x \leq 0 \to x > 1)\\ &= (x > 0 \to -x > 1) \wedge (x \leq 0 \to x > 1)\\ &= (x \leq 0 \vee -x > 1) \wedge (x > 0 \vee x > 1)\\ &= (x \leq 0 \vee x < 1) \wedge (x > 0)\\ &= (x \leq 0) \wedge (x > 0) \equiv Hamis.\end{aligned}$$

Átgondolva mit is akartunk kiszámolni, milyen állapotból indulva teljesíthető az a követelmény, hogy $(x > 1)$, ha a programunk a pozitív számokon előjelet vált, a negatívakat (és nullát) pedig nem változtatja?
Ha pozitív bemenetet kap, akkor negatívat csinál belőle, negatívakra pedig nem csinál semmit, tehát sehogy sem tudjuk elérni, hogy tetszőleges bemenetre elérjünk a kívánt állapotba, ezért az azonosan $Hamis$ az eredmény.

2. Legyen $S = (SKIP, \{x := 0,\ \text{ha } y \neq 0,$
$x := x * z,\ \text{ha } z = 0\})$
$R = (x = 0)$
$lf(S, R) =? \ldots \#magic$
$lf(S, R) = (x = 0) \vee (y \neq 0 \wedge z = 0)$

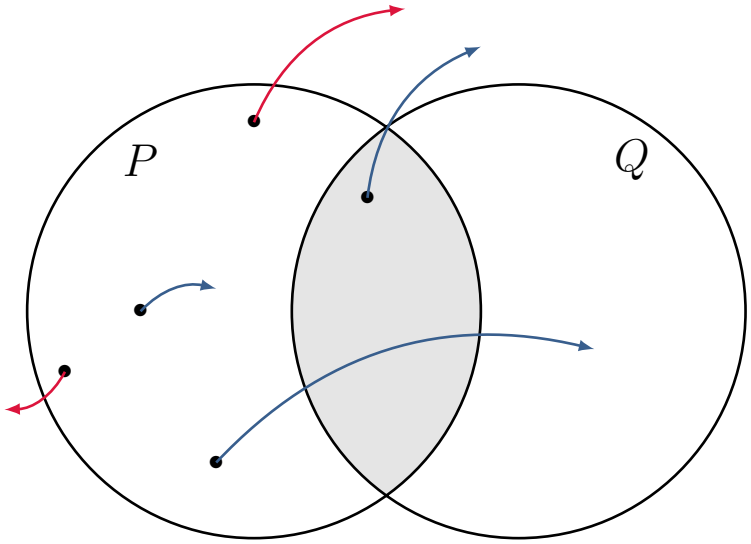
3.2. Stabilitási tulajdonság

Biztonsági tulajdonságot már néztünk a feladatok kapcsán, ám utasításokra (és programokra) is szeretnénk ilyet definiálni.

Legyenek $P, Q : A \to \mathbb{L}$ állítások, és $s \subseteq A \times A^{**}$ utasítás.

$$P \rhd_s Q ::= (P \wedge \neg Q) \Rightarrow lf(s, P \vee Q)$$

A P állapotot az utasítás ekkor *ha* elhagyja, akkor ezt csak Q-n keresztül teheti meg.



3. ábra. Nézzünk egy szemléletesebb példát a háromszög tulajdonságra. $P \rhd_s Q$ akkor és csak akkor teljesül, ha $(P \wedge \neg Q)$-ból bárhogy választunk állapotokat, az s utasítás hatására ugyanúgy $(P \wedge \neg Q)$-ban maradunk, vagy pedig Q-ba jutunk. Jó átmenetnek számítanak a kék nyilak, viszont a piros nyilakról ez nem mondható el.

A *háromszögre* fontos néhány tulajdonságot megjegyezni, melyet a definíció alapján igazolhatunk.

- $P \rhd_s P = P \wedge \neg P \Rightarrow lf(s, P \vee P) = \downarrow \Rightarrow lf(s, P) = \uparrow \vee lf(s, P) = \uparrow$
- $P \rhd_s \neg P = P \wedge P \Rightarrow lf(s, P \vee \neg P) = P \Rightarrow lf(s, Igaz) = \uparrow$
- $Igaz \rhd_s P = Igaz \wedge \neg P \Rightarrow lf(s, Igaz \vee P) = \neg P \Rightarrow lf(s, Igaz) = \uparrow$
- $Hamis \rhd_s P = Hamis \wedge \neg P \Rightarrow lf(s, Hamis \vee P) = Hamis \Rightarrow lf(s, P) = \uparrow$
- $P \rhd_s Igaz = P \wedge Hamis \Rightarrow lf(s, P \vee Igaz) = Hamis \Rightarrow lf(s, Igaz) = \uparrow$

Fontos megjegyezni, hogy általános esetben a $P \rhd_s Hamis$ nem teljesül.
$P \rhd_s Hamis = P \wedge Igaz \Rightarrow lf(s, P \vee Hamis) = P \Rightarrow lf(s, P)$, de erről nem tudunk tetszőleges program és állítás esetén semmit garantálni.
Egy példa erre, mikor nem teljesül:

$s = (x := x + 1)$ és $P = (2|x)$
$P \rhd_s Hamis = P \Rightarrow lf(s, P) = (2|x) \Rightarrow lf(x := x + 1, 2|x) = (2|x) \Rightarrow (2|x)^{x \leftarrow x+1} = (2|x) \Rightarrow (2|x + 1)$, ami nyilvánvaló ellentmondás, hiszen ha egy szám páros, akkor a nála eggyel nagyobb szám nem lehet szintén páros (mivel az páratlan).

Abban az esetben azonban, *ha* $P \rhd_s Hamis$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy s rendelkezik a P stabil tulajdonsággal, azaz P-ből nem tud kivezetni a program. Jelölésünk erre: $Pstabil_s$ (triviálisan stabil tulajdonság az $Igaz$, hiszen $Igaz \Rightarrow lf(s, Igaz)$ tetszőleges utasításra teljesül).

A háromszög azonban nem tranzitív, azaz $P \rhd_s Q$ és $Q \rhd_s R$-re általában **nem igaz**, hogy $P \rhd_s R$.

Feladat Sszámoljuk ki $P \rhd_S Q$-t, ha:

$$S = (SKIP, \{s_1 : x := x + 2, \text{ ha } x < 50, \text{ és}$$
$$s_2 : x := x + 1, \text{ ha } x \geq 50\}$$
$$P = (2|x)$$
$$Q = (x \geq 50)$$

$$P \rhd_S Q = lf(S, P \vee Q)$$
$$(2|x) \wedge (x < 50) \Rightarrow lf(S, (2|x \vee x \geq 50))$$

Az lf multiplikativitását felhasználva:

$$lf(S, P \vee Q) = lf(s_1, P \vee Q) \wedge lf(s_2, P \vee Q)$$
$$s1 : lf(x := x + 2, \text{ ha } x < 50, (2|x \vee x \geq 50)) =$$
$$(x < 50 \rightarrow (2|x \vee x \geq 50)^{x \leftarrow x+2}) \wedge$$
$$\wedge (x \geq 50 \rightarrow (2|x \vee x \geq 50))$$
$$= (x \geq 50 \vee 2|x + 2 \vee x + 2 \geq 50) = (x \geq 50 \vee 2|x \vee x \geq 48) = (x \geq 48 \vee 2|x)$$
$$s2 : lf(x := x + 1, \text{ ha } x \geq 50, (2|x \vee x \geq 50)) =$$
$$(x \geq 50 \rightarrow (2|x \vee x \geq 50)^{x \leftarrow x+1}) \wedge$$
$$\wedge (x < 50 \rightarrow (2|x \vee x \geq 50))$$
$$= (x \geq 50 \rightarrow 2|(x + 1) \vee x + 1 \geq 50) \wedge (x < 50 \rightarrow 2|x \vee x \geq 50)$$
$$= (x < 50 \vee 2|x + 1 \vee x \geq 49) \wedge (x \geq 50 \vee 2|x \vee x \geq 50)$$
$$= (\uparrow) \wedge (2|x \vee x \geq 50)$$

A két eredményt éselve: $lf(S, P \vee Q) = lf(s_1, P \vee Q) \wedge (s_2, P \vee Q)$

$$= (x \geq 48 \vee 2|x) \wedge (x \geq 48 \vee 2|x) = 2|x \vee x \geq 50$$
$$P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(S, P \vee Q) =$$
$$(2|x \wedge x < 50) \Rightarrow (2|x \vee x \geq 50) \text{ pedig igaz.}$$

Háromszög esetén szerencsére lehetőségünk van egyszerűsítések használatára, mellyel valamennyire megkönnyíthetjük a számolást.

$$
\begin{aligned}
& P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(S, P \vee Q) \\
= & P \wedge \neg Q \Rightarrow \bigwedge_{s_i \in S} \left[\pi_i \rightarrow (P \vee Q)^{s_i} \wedge (\neg \pi_i \rightarrow (P \vee Q)^{SKIP}) \right] \\
= & P \wedge \neg Q \Rightarrow \bigwedge_{s_i \in S} \left[\pi_i \rightarrow (P \vee Q)^{s_i} \wedge (\pi_i \vee (P \vee Q)^{SKIP}) \right] \\
\text{felhasználva, hogy } & A \Rightarrow (B \wedge C) = A \Rightarrow B \wedge A \Rightarrow C \\
= & P \wedge \neg Q \Rightarrow \bigwedge_{s_i \in S} \left(\left[\pi_i \rightarrow (P \vee Q)^{s_i} \right] \right) \wedge \\
& (P \wedge \neg Q) \Rightarrow \bigwedge_{s_i \in S} (\pi_i \vee (P \vee Q)^{SKIP}) \text{ (skip ág)}
\end{aligned}
$$

A skip ágat tovább tudjuk egyszerűsíteni. Ebben az esetben meggondolható, hogy ha a bal oldal hamis, akkor az implikáció igaz lesz. Ha a bal oldal igaz, akkor P értéke igaz és $\neg Q$ is teljesül, tehát Q hamis. A következtetés jobb oldalán álló nagy konjunkciót triviálisan igazzá tudjuk tenni, hiszen ha P igaz a bal oldalt, akkor minden esetben szintén igaz lesz a jobb oldalon is, és *igaz* feltétel mellé bármit "vagyolhatunk", az igazat ad, emellett igaz állítások *és*elve is igazat adnak, tehát a "skip" ágra biztosan igaz a feltétel. A későbbiekben ezt a "skip ág elhagyása"-ként említjük (ez nem azt jelenti, hogy az lf-ben a skippel sosem kell foglalkozni, csupán azt, hogy *háromszög* számolása esetén a SKIP ág minden esetben igazat ad). Visszatérve az eredeti lf-hez ekkor:

$$
\begin{aligned}
& = P \wedge \neg Q \Rightarrow \bigwedge_{s_i \in S} \left(\left[\pi_i \rightarrow (P \vee Q)^{s_i} \right] \right) \wedge \uparrow \\
& = P \wedge \neg Q \Rightarrow \bigwedge_{s_i \in S} \left(\left[\pi_i \rightarrow (P \vee Q)^{s_i} \right] \right) \\
= & \forall s_i \in S : P \wedge \neg Q \Rightarrow \left[\pi_i \rightarrow (P \vee Q)^{s_i} \right]
\end{aligned}
$$

A mostani formulát "Ha igaz A, és akkor ha igaz B, teljesül -e C?" módon tudjuk értelmezni, amit szóban (és logikában is) át tudunk fogalmazni "Ha igaz A és B, igaz -e C?" módra. Ezt fogjuk a későbbiekben *feltétel átvitelének* nevezni.

$$P \rhd_S Q = \forall s_i \in S : (P \wedge \neg Q \wedge \pi_i) \Rightarrow (P \vee Q)^{s_i}$$

Ismét kiemelnénk, hogy a *"skip+feltétel"* módszerrel való számolás csak és kizárólag a *háromszög* számolása esetén használható.

Teljesül -e a stabilitási tulajdonság az itt megadott állításokra és programra nézve? (Azaz számoljuk ki $P \rhd_S Q$-t, ha:)

$$S = (SKIP, \{s_1 : x := x + 2, \text{ ha } x < 50, \text{ és}$$
$$s_2 : x := x + 1, \text{ ha } x \geq 50\}$$
$$P = (2|x)$$
$$Q = (x \geq 50)$$

SKIP + feltétel miatt:

$$P \rhd_S Q = \forall s_i \in S : (P \wedge \neg Q \wedge \pi_i) \Rightarrow (P \vee Q)^{s_i}$$
$$s1 : (2|x) \wedge (x < 50) \wedge (x < 50) \Rightarrow (2|x \vee x \geq 50)^{x \leftarrow x+2} =$$
$$(2|x \wedge x < 50) \Rightarrow (2|x \vee x \geq 48) = \uparrow$$
$$s2 : (2|x) \wedge (x < 50) \wedge (x \geq 50) \Rightarrow (2|x \vee x \geq 50) =$$
$$\downarrow \Rightarrow (2|x \vee x \geq 50) = \uparrow$$
$$P \rhd_S Q = \uparrow \wedge \uparrow = \uparrow$$

Látszik, hogy így mennyivel egyszerűbben megkapjuk ugyan azt az eredményt, amit korábban egy oldalon keresztül kellett számolni.

4. Megoldások

1.2 - Étkező filozófusok

- $FP \Rightarrow (\forall i : \neg f(i).e)$
- $f(i).o \rhd \bot$

1.3 - Moziterem

- $n(i).a \hookrightarrow n(i).f$
- $n(i).t \hookrightarrow n(i).f$
- $FP \Rightarrow \forall i : n(i).h$
- $n(i).a \rhd (n(i).j \vee n(i).b)$
- $n(i).f \mapsto n(i).h$
- $(\forall i : n(i).f \Rightarrow n(i).t) \in inv$
- $n(i).h \rhd \bot$

2.4 - Feladatok

1. Ahogy korábban láttuk 2.4 bekezdésben, egy program leggyengébb előfeltétele az utasításai által adott leggyengébb előfeltételek konjugáltja. Az egyszerűség kedvéért nevezzük el az $x := x \cdot 2, ha\ 2 \nmid x$ utasítást s_1-nek, az $x := x + 1, ha\ x < 10$ utasítást

pedig s_2-nek. Ekkor

$$
\begin{aligned}
lf(s_1, R) &= lf(x := x \cdot 2, ha\ 2 \nmid x;\ (2|x)) \\
&= (2 \nmid x \to (2|x)^{x \leftarrow x \cdot 2}) \wedge (2|x \to 2|x) \\
&= (2 \nmid x \to 2|x \cdot 2) \wedge (2|x \to 2|x) \\
&\text{Alkalmazva a } A \to B = \neg A \vee B \text{ szabályt a következőt kapjuk:} \\
&= (2|x \vee 2|x \cdot 2) \wedge (2 \nmid x \vee 2|x) \\
&\text{Mivel } A \vee \neg A = \uparrow \text{, valamint egy szám kétszeresét véve osztható lesz} \\
&\text{kettővel:} \\
&= (2|x \vee \uparrow) \wedge (\uparrow) \\
&= (\uparrow) \wedge (\uparrow) \\
&= \uparrow \\
lf(s_2, R) &= lf(x := x + 1, ha\ x < 10;\ (2|x)) \\
&= (x < 10 \to (2|x)^{x \leftarrow x+1}) \wedge (x \geq 10 \to 2|x) \\
&= (x < 10 \to 2|x + 1) \wedge (x \geq 10 \to 2|x) \\
&= (x \geq 10 \vee 2|x + 1) \wedge (x < 10 \vee 2|x) \\
&\text{Picit tovább alakítva a pedig a következő kifejezést kapjuk:} \\
&= (x \geq 10 \vee 2|x + 1) \wedge (x < 10 \vee 2|x) \\
lf(S, R) &= lf(s_1, R) \wedge lf(s_2, R) \\
&= (\uparrow) \wedge ((x \geq 10 \vee 2|x + 1) \wedge (x < 10 \vee 2|x)) \\
&\text{Mivel } \uparrow \wedge A = A : \\
&= (x \geq 10 \vee 2|x + 1) \wedge (x < 10 \vee 2|x)
\end{aligned}
$$

2. Hasonlóan az előző feladathoz, nevezzük el $m, n := m+1, n-1$ és $n := n+1, ha\ n < m$ utasításokat rendre s_1-nek és s_2-nek.

a) $R = (m = n)$

$$
\begin{aligned}
lf(s_1, R) &= lf(m, n := m+1, n-1;\ (m = n)) \\
&= (m = n)^{\substack{m \leftarrow m+1 \\ n \leftarrow n-1}} \\
&= (m+1 = n-1) \\
&= (m = n-2) \\
lf(s_2, R) &= lf(n := n+1, ha\ n < m;\ (m = n)) \\
&= (n < m \rightarrow (m = n)^{\substack{m \leftarrow m+1 \\ n \leftarrow n-1}}) \wedge (n \geq m \rightarrow m = n) \\
&= (n < m \rightarrow m+1 = n-1) \wedge (n \geq m \rightarrow m = n) \\
&= (n \geq m \vee m+1 = n-1) \wedge (n < m \vee m = n) \\
&= (n \geq m \vee m = n-2) \wedge (n \leq m) \\
&\text{Alkalmazva a } (A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \text{ szabályt:} \\
&= (n \geq m \wedge n \leq m) \vee (m = n-2 \wedge n \leq m) \\
&= (n = m) \vee \downarrow \\
&\text{Mivel } A \vee \downarrow = A: \\
&= (n = m) \\
lf(S, R) &= lf(s_1, R) \wedge lf(s_2, R) \\
&= (m = n-2) \wedge (n = m) \\
&= \downarrow
\end{aligned}
$$

b) $R = (m < n)$

$$
\begin{aligned}
lf(s_1, R) &= lf(m, n := m+1, n-1;\ (m < n)) \\
&= (m < n)^{\substack{m \leftarrow m+1 \\ n \leftarrow n-1}} \\
&= (m+1 < n-1) \\
&= (m+2 < n) \\
lf(s_2, R) &= lf(n := n+1, ha\ n < m;\ (m < n)) \\
&= (n < m \rightarrow (m < n)^{\substack{m \leftarrow m+1 \\ n \leftarrow n-1}}) \wedge (n \geq m \rightarrow m < n) \\
&= (n < m \rightarrow m+1 < n-1) \wedge (n \geq m \rightarrow m < n) \\
&= (n \geq m \vee m+1 < n-1) \wedge (n < m \vee m < n) \\
&= (n \geq m \vee m+2 < n) \wedge (n \neq m) \\
&= (n \geq m) \wedge (n \neq m) \\
&= (n > m) \\
lf(S, R) &= lf(s_1, R) \wedge lf(s_2, R) \\
&= (m+2 < n) \wedge (n > m) \\
&= (m+2 < n) \wedge (m < n) \\
&= (m+2 < n)
\end{aligned}
$$

Hivatkozások

[1] dr. Horváth Zoltán: Párhuzamos és elosztott programozás (http://people.inf.elte.hu/hz/parh/jegyzet.ps)

[2] Fóthi Ákos: Bevezetés a programozáshoz (http://bzsr.web.elte.hu/progmod2/konyv.pdf)