



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Informatikai Kar

Programozási Nyelvek és Fordítóprog-  
ramok Tanszék

---

# Osztott rendszerek szintézise

IPM-08sztORSZE

## Konzultációs segédanyag

Kopácsi László, Szabó Miklós

Utolsó módosítás: 2018. március 5.

# Tartalomjegyzék

<b>1. konzultáció</b>	<b>2</b>
1.1. Áttekintés . . . . .	2
1.2. Étkező filozófusok . . . . .	2
1.3. Moziterem . . . . .	3
<b>2. konzultáció</b>	<b>4</b>
2.1. Áttekintés . . . . .	4
2.2. Program . . . . .	7
2.3. Leggyengébb előfeltétel . . . . .	8
2.4. Feladatok . . . . .	10
<b>3. konzultáció</b>	<b>11</b>
3.1. Gyakorlás . . . . .	11
3.2. Stabilitási tulajdonság . . . . .	12
<b>4. konzultáció</b>	<b>16</b>
4.1. Haladási tulajdonság . . . . .	16
<b>5. Megoldások</b>	<b>18</b>

# 1. konzultáció

## 1.1. Áttekintés

Az előadás során több, temporális logikai relációval találkoztunk, nézzük ezeket át informálisan, kezdve a biztonsági tulajdonságokkal.

- Az első, melyet "háromszög"-ként említünk ( $\triangleright$ ), bizonyos állapot-átmeneteket megenged, másokat pedig megtilt. A  $(P \triangleright Q)$  azt jelenti, hogy a  $P$  állapotot **ha** elhagyjuk, akkor ezt csak a  $Q$ -n keresztül tehetjük meg. A háromszög azonban nem tesz semmiféle kikötést arról, hogy a  $P$ -t el kell hagynunk, csupán biztosít minket arról, hogy ha ez mégis megtörténik, akkor milyen irányba (nem) mozdulhatunk.
- Másik biztonsági tulajdonság az *invariáns*. Ha egy  $K$  állítás invariáns, akkor ennek minden állapot-átmenet előtt és után teljesülnie kell.
- A harmadik említett kikötés a *fixpont*. Ezzel leírhatjuk, hogy ha egy rendszerben már nem figyelhetünk meg további állapot-átmeneteket, akkor milyen tulajdonságoknak kell teljesülnie.  $(FP \Rightarrow R)$  estén például egy  $R$ -el jelölt állítás igaz, amennyiben fixpontba jutottunk. Fixpontba azonban nem csak a kívánt befejezési állapot tarthat, ha holtpont helyzet alakul ki, azt is tekinthetjük fixpontnak.

Természetesen nem csak biztonsági tulajdonságokra van szükségünk - azaz mit (ne) csinálhasson a rendszer -, hanem haladásra is (azért csináljon valamit).

- Az "egyenes nyíl" ( $\mapsto$ ) néven nevezett reláció egy szigorú kikötés arra vonatkozóan, hogy egy állapotból milyen másik helyzetbe **kell** lépnünk. Míg  $\triangleright$  esetén csupán azt mondtuk, hogy *ha* elhagyunk egy állapotot, akkor azt milyen irányba tegyük, a  $(P \mapsto Q)$  azt mondja, hogy a  $P$  állapotból a  $Q$  állapotba kell, hogy kerüljünk (véges időn belül).
- Ennél megengedőbb a "görbe nyíl"-ként ( $\hookrightarrow$ ) ismert reláció. Ebben az esetben a  $(A \hookrightarrow B)$  feltétel csupán annyit mond, hogy az  $A$  állapotot előbb-utóbb a  $B$  állapot fogja követni (azaz  $A$ -ból elkerülhetetlenül  $B$ -be fogunk érkezni), de itt nincs semmilyen megkötés arra, hogy a két állapot egymás után következzen be. Legális állapot-átmenet sorozat az  $(A \hookrightarrow B)$ -ra az  $\langle A, G, F, D, F, E, C, D, B \rangle$  is.

## 1.2. Étkező filozófusok

Tekintsük az előadáson is ismertetett *étkező filozófusok* feladatot (jegyzet<sup>[1]</sup> 1.1). Próbáljuk meg kiegészíteni a feltételeket további megkötések formalizálásával:

- Ha a rendszer nyugalmi állapotban van, akkor egy filozófus sem eszik.
- Mindegyik filozófusra igaz, hogy ha hazament, akkor utána már nem kerülhet más állapotba.

### 1.3. Moziterem

A következő példában egy mozira vonatkozó feladatot fogunk ismertetni, ahol a nézők tevékenységére szeretnénk megkötéseket tenni. A jelölést megkönnyítendő vezessük be az alábbiakat:  $n(i)$  jelölje az  $i$ -ik nézőt. A moziba látogatók állapotait az alábbiak alapján jelöljük:

- a) megérkezik a moziba - a
- b) jegyet vesz - j
- c) üdítőt és nasit vásárol - b
- d) érvényes jeggyel rendelkezik - t
- e) filmet néz - f
- f) hazamegy - h

Próbáljuk formalizálni az alábbi feltételeket:

- A moziba érkező néző filmet fog nézni.
- Ha valaki érvényes jeggyel rendelkezik, akkor megnézi a filmet.
- Ha a moziban nincs mozgás, akkor minden néző már otthon van.
- A moziba érkező néző jegyet vásárol, vagy a büfébe megy.
- A film után a néző hazamegy.
- Senki nem nézhet filmet úgy, hogy nincs érvényes jegye. (Tipp: próbáljunk invariánst megfogalmazni.)
- Ha valaki hazament, akkor már nem csinál semmit a moziban.

## 2. konzultáció

### 2.1. Áttekintés

Ahhoz, hogy a későbbiekben biztos módon számolhassunk programokkal, elkerülhetetlen a számunkra szükséges (alap)fogalmakat tisztázni a halmazelmélet és a relációk témakörében.

Legyenek  $A$  és  $B$  tetszőleges halmazok.  $A$  és  $B$  *direkt*-, vagy *Descartes*-szorzatán azt a halmazt értjük, melyben olyan párok találhatók, melynek első eleme  $A$ -ban, második eleme pedig  $B$ -ben.

$$A \times B ::= \{(a, b) | a \in A \text{ és } b \in B\}$$

Jelölje  $r \subseteq A \times B$  azt a bináris relációt, mely  $A$  elemeihez rendel értékeket a  $B$  halmazból ( $A$  és  $B$  tetszőleges halmazok). A reláció elemeit  $(a, b) \in r$  módon fogjuk jelölni.

$$\text{Az } r \text{ reláció értelmezési tartománya: } \mathcal{D}_r ::= \{a \in A | \exists b \in B : (a, b) \in r\} \subseteq A$$

$$\text{Az } r \text{ reláció értékkészlete: } \mathcal{R}_r ::= \{b \in B | \exists a \in A : (a, b) \in r\} \subseteq B$$

$$r(a) \text{ jelölje azt a halmazt, melynek elemei: } \{b \in B | (a, b) \in r\}$$

Világos, hogy az értelmezési tartományban olyan elemek vannak, amikhez rendel valamit  $r$ , míg az értékkészletben olyanokat találhatunk, amik valamilyen elemhez hozzá lettek rendelve. Egy elem képe a hozzá rendelt elemek halmazából áll elő.

Egy  $g$  relációt *parciális függvénynek* (vagy determinisztikus relációnak) nevezhetünk, amennyiben az alábbi teljesül:

$$\forall a \in A : |g(a)| \leq 1,$$

azaz minden elemhez *legfeljebb* egy másikat társítunk. Jelölésünk ekkor:  $g \in A \rightarrow B$ . Ha minden elemhez pontosan egy értéket rendelünk, akkor az  $f$  reláció függvény, azaz:

$$\forall a \in A : |f(a)| = 1.$$

Jelölésünk ekkor:  $f : A \rightarrow B$ . Ebben az esetben általában  $f(a)$  nem az egy elemű halmazt, hanem annak képét jelenti.

Ahhoz, hogy állításokat fogalmazhassunk meg a későbbiekben, szükségünk lesz logikai relációkra is.

$$\text{A } h \subseteq A \times \mathbb{L} \text{ logikai relációnak nevezzük, ahol } \mathbb{L} ::= \{igaz, hamis\}.$$

Ha  $h$  függvény, akkor *logikai függvénynek* nevezzük.

Egy reláció inverzét az alábbi módon definiálhatjuk:

$$R^{(-1)} ::= \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$$

A továbbiakban szükségünk lesz egy reláció adott halmazra vonatkozó inverz- és ősképfé definíciójára.

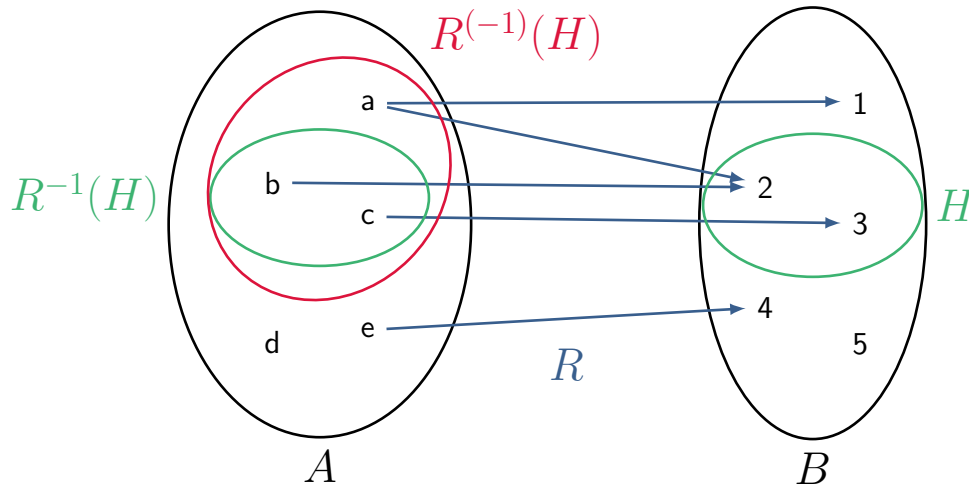
A  $H \subseteq B$  halmaz  $R$  reláció szerinti *inverzképe*:

$$R^{(-1)}(H) ::= \{a \in A \mid R(a) \cap H \neq \emptyset\}$$

A  $H \subseteq B$  halmaz  $R$  reláció szerinti *ősképe*:

$$R^{-1}(H) ::= \{a \in A \mid R(a) \subseteq H\}$$

Meggondolva látható, hogy az *inverzkép* megengedőbb, hisz csak annyit kér, hogy egy adott elemhez *létezzon*  $H$ -beli elem az  $R$  hozzárendelésben, az *ősképe* viszont megköveteli, hogy *minden* ilyen elem a  $H$  halmazban legyen.



1. ábra. Nézzünk egy példát a korábban említett fogalmakra. Legyen  $A = \{a, b, c, d, e\}$  és  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  halmazok, valamint  $R \subseteq A \times B$ ,  $R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 3), (e, 4)\}$  reláció. Ekkor  $R$  értelmezési tartománya  $\mathcal{D}_R = \{a, b, c, e\}$ , értékkészlete pedig  $\mathcal{R}_R = \{1, 2, 3, 4\}$ . Továbbá legyen  $H \subseteq B$ ,  $H = \{2, 3\}$ . Ekkor a  $H$  halmaz  $R$  reláció szerinti ősképe  $R^{-1}(H) = \{b, c\}$ , inverzképe pedig  $R^{(-1)}(H) = \{a, b, c\}$ . Itt jól látszik, hogy az *inverzkép* megengedőbb, mint az *ősképe*, hiszen  $R^{-1}(H) \subseteq R^{(-1)}(H) = \{b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$ .

Legyen  $R \subseteq A \times \mathbb{L}$  logikai reláció,  $R$  igazsághalmaza ekkor:

$$\lceil R \rceil ::= R^{-1}(\{igaz\}) \text{ azaz: } \lceil R \rceil = \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq \{igaz\}\}$$

Az igazsághalmazt tehát az  $\{igaz\}$  halmazra vett ősképe szerint definiáljuk.

Ha inverzképet számolunk, akkor juthatunk a *gyenge igazsághalmaz* fogalmához:

$$\lfloor R \rfloor ::= R^{(-1)}(\{igaz\}) \text{ azaz: } \lfloor R \rfloor = \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \cap \{igaz\} \neq \emptyset\}$$

A későbbiekben nagyban megkönnyíti a dolgunkat, ha bevezetjük az *azonosan igaz*, és az *azonosan hamis* logikai függvényeket.

$$Igaz : A \rightarrow \mathbb{L} : \forall a \in A : Igaz(a) = \{igaz\}$$

$$Hamis : A \rightarrow \mathbb{L} : \forall a \in A : Hamis(a) = \{hamis\}$$

Könnyű meggondolni, hogy ekkor  $\lceil Igaz \rceil = A$  és  $\lceil Hamis \rceil = \emptyset$ .

Az igazsághalmazzal kapcsolatban fontos megemlíteni néhány tulajdonságot, melyeket a későbbiekben kihasználunk.

Legyenek  $P, Q \subseteq A \times \mathbb{L}$ , ekkor:

- $\lfloor P \wedge Q \rfloor = \lfloor P \rfloor \cap \lfloor Q \rfloor$
- $\lfloor P \vee Q \rfloor = \lfloor P \rfloor \cup \lfloor Q \rfloor$
- $\lfloor \neg P \rfloor = A \setminus \lfloor P \rfloor$
- $\lfloor P \rightarrow Q \rfloor = \lfloor \neg P \vee Q \rfloor = (A \setminus \lfloor P \rfloor) \cup \lfloor Q \rfloor$
- $P \Rightarrow Q = \lfloor P \rfloor \subseteq \lfloor Q \rfloor$

Egyszerűbben megfogalmazhatóak állítások, ha tudjuk, hogy  $A \Rightarrow B$ . Ekkor ugyanis:

- $A \vee B = B$
- $A \wedge B = A$

Nézzünk erre egy példát, legyenek  $A, B : \mathbb{N} \times \mathbb{L}$  úgy, hogy:

$\lceil A \rceil := \{10\text{-nél nagyobb szám}\}$  és

$\lceil B \rceil := \{\text{pozitív szám}\}$ .

Világos, hogy  $A \Rightarrow B$ , hiszen ha egy egész szám 10-nél nagyobb, akkor pozitív. Az  $A \vee B$  állítást úgy fogalmazhatjuk meg, hogy azokat az egész számokat keressük, melyek 10-nél nagyobbak, **vagy** pozitívak. Érződik, hogy a *vagy* kapcsolat miatt a gyengébb feltétellel is megelégszünk, így a bővebb halmaz, azaz a pozitív számok halmazát kapjuk ( $= B$ ). Ha azonban a 10-nél nagyobb **és** pozitív számokra vagyunk kíváncsiak, akkor a szigorítás miatt a szűkebb halmazt kapjuk, tehát a 10-nél nagyobb számokat kell vizsgálnunk ( $= A$ ).

## 2.2. Program

Röviden tekintsük át, hogy a Fóthi<sup>[2]</sup>-Horváth - féle modellben hogyan is definiáltuk a programot és annak hatásrelációját.

Jelölje  $A^*$  az  $A$  elemeiből képzett véges,  $A^\infty$  pedig a végtelen sorozatokat. A későbbiekben  $A^{**}$  jelenti az  $A^* \cup A^\infty$  halmazt, azaz a véges és végtelen sorozatok halmazát. Ha alaphalmaznak a természetes számokat választjuk, akkor az  $\langle 1, 5, 3, 2 \rangle \in A^*$  egy véges, míg az  $\langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle \in A^\infty$  végtelen sorozatot jelöl.

*Utasítás* alatt egy olyan  $s \subseteq A \times A^{**}$  relációt értünk, melyre:

1.  $\mathcal{D}_s = A$
2.  $\forall a \in A : \forall \alpha \in s(a) : |\alpha| \neq 0 \wedge \alpha_1 = a$
3.  $(\alpha \in \mathcal{R}_s \wedge \alpha \in A^*) \Rightarrow (\forall i(1 \leq i < |\alpha|) : \alpha_i \neq \alpha_{i+1})$
4.  $(\alpha \in \mathcal{R}_s \wedge \alpha \in A^\infty) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N} : (\alpha_i = \alpha_{i+1} \rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}^+ : \alpha_i = \alpha_{i+k})))$

A fenti definíció a *működés* fogalmát próbálja absztrakt módon szemléltetni. A négy pont jól jellemzi az utasítást: elsőként szeretnénk, ha az utasítás minden állapotér-beli pontban értelmezve lenne (azaz az utasítás mindenhol el tud indulni).

Második pontban azt fogalmazzuk meg, hogy egy sorozat a működése teljes történetét írja le, kezdve a kiindulási állapottal.

A harmadik pontunk a *redukáltságra* vonatkozik: ha véges hosszú sorozattal dolgozunk, akkor egymás után kétszer ne szerepelhessen ugyanaz az elem (hiszen az nem egy jó véges utasítás, amelyik úgy lép egy következő állapotba, hogy nem történt állapotváltozás - ez a megfogalmazáson is érződik).

A negyedik pont a végtelen utasításra utal: ha egy utasítás futása nem fejeződik be (végtelen ciklus, stb.), akkor ezt a hozzárendelt sorozatban úgy jelzi, hogy egy adott ponttól kezdve nem történik állapotváltozás, folyton ugyan abban az állapotban ragad (pl.  $s(4) = \langle 4, 3, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots \rangle$ )

Egy  $s \subseteq A \times A^{**}$  utasítás *hatásrelációja* az a  $p(s) \subseteq A \times A$  reláció, melyre:

1.  $\mathcal{D}_{p(s)} = \{a \in A \mid s(a) \subseteq A^*\}$
2.  $p(s)(a) = \{b \in A \mid \exists \alpha \in s(a) : \tau(\alpha) = b\}$

ahol  $\tau : A^* \rightarrow A; \tau(\alpha) ::= \alpha_{|\alpha|}$ , azaz a *tau* függvény egy véges sorozathoz annak utolsó tagját rendeli.

A hatásrelációt tehát csak olyan pontokban definiáljuk, ahol a program *megáll*, azaz véges sorozatot rendel, a hozzárendelési szabály pedig az, ahová az utasítás eljut, tehát az adott sorozatok utolsó eleme.



Az *absztrakt programot* egy  $S = (s_0, \{s_1, s_2, \dots, s_n\})$  párként tudjuk megadni, ami egy párhuzamos programot takar. Az első tagja ( $s_0$ ) a kezdeti utasítás, ami a program indulásakor hajtódik végre. A második tagja ( $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ) pedig *atomi* (vagyis párhuzamos futás során nem akadnak össze, szekvenciális futás eredményét adó) utasítások halmaza. Ezeket valamilyen *feltétlenül pártatlan ütemezés* szerint (kiéheztetés nélkül, azaz az egyes végrehajtások során minden utasítást végtelen sokszor véve) végtelen sokáig futtatunk. A programra pedig akkor mondjuk, hogy terminált (befejeződött), ha fixpontba jut, azaz már nem történik állapotváltozás.

Nézzünk erre egy egyszerű példát:

Legyen  $S = (x := 0, \{x := 2 \cdot x, x := x + 1\})$ . Ekkor az alábbi sorozatot ennek egy lehetséges kiértékelésének tekintjük:

$$\begin{array}{ccccccc} x := 0, & x := x + 1, & x := 2 * x, & x := 2 * x, & x := x + 1, & x := x + 1, & \dots \\ 0, & 1, & 2, & 4, & 5, & 6, & \dots \end{array}$$

### 2.3. Leggyengébb előfeltétel

Érezhető, hogy a fenti definíciókkal történő számolások nagyon nehézzé fogják tenni a későbbiekben a feladatok és az azt megoldó programok közötti kapcsolat megteremtését, ezért bevezetünk egy új fogalmat, a *leggyengébb előfeltételt*.

Legyen  $s \subseteq A \times A^{**}$  utasítás,  $R : A \rightarrow \mathbb{L}$  állítás. Az  $s$  utasítás  $R$  utófeltételhez tartozó *leggyengébb előfeltétele* az az  $lf(s, R) : A \rightarrow \mathbb{L}$  **függvény**, melyre:

$$\lceil lf(s, R) \rceil = \{a \in \mathcal{D}_{p(s)} \mid p(s)(a) \subseteq \lceil R \rceil\}.$$

Az  $lf$  tehát egy olyan függvény, mely pontosan azokhoz a pontokhoz rendel igazat, melyből elindítva az  $s$  utasítást az biztosan megáll, és az összes ilyen állapotban az  $R$  tulajdonság teljesül. Magának a függvénynek a definícióját legtöbbször nehéz megadni, de az igazsághalmazát könnyedén kifejezhetjük. Az igazsághalmaz definícióját, a kompozíció és az öskép tulajdonságait felhasználva kapjuk, hogy:

$$\lceil lf(s, R) \rceil = \lceil R \circ p(s) \rceil.$$

Az  $lf$ -et tehát az utófeltételbe helyettesítés módszerével tudjuk kifejezni (ennek bizonyítása megtalálható a *tankönyv*<sup>[2]</sup> 44-ik oldalán, a 3.1-es definíciónál).

Mivel a leggyengébb előfeltételt nem csak utasításokra, hanem programokra is ki szeretnénk tudni számolni, a fenti definíciót picit általánosítani kell. Tehát legyen  $S = (s_0, \{s_1, s_2, \dots, s_n\})$  program,  $R : A \rightarrow \mathbb{L}$  állítás. Ekkor az  $S$  program  $R$  utófeltételhez tartozó *leggyengébb előfeltétele* az egyes utasításai által adott leggyengébb előfeltételek

konjugáltja lesz:

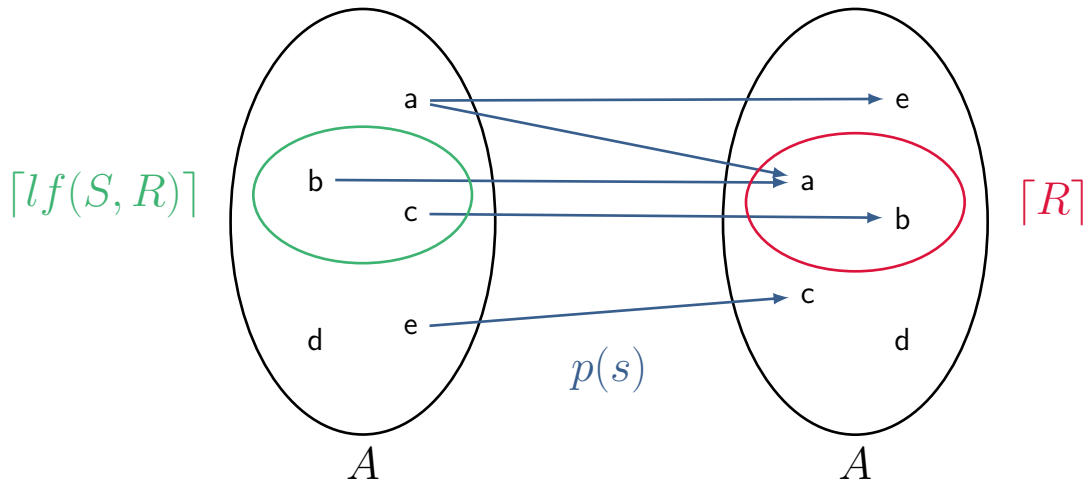
$$lf(S, R) = \bigwedge_{i=1}^n lf(s_i, R).$$

A későbbiekben több alaptulajdonságra is szükségünk lesz, ha az  $lf$ -fel akarunk számolni. Nézzük ezeket:

Legyen  $S = (s_0, \{s_1, s_2, \dots, s_n\})$  program,  $Q, R : A \rightarrow \mathbb{L}$  állítások. Ekkor:

1.  $lf(S, Hamis) = Hamis$  (csoda kizárásának elve),
2. Ha  $Q \Rightarrow R$ , akkor  $lf(S, Q) \Rightarrow lf(S, R)$  (monotonitás),
3.  $lf(S, Q) \vee lf(S, R) \Rightarrow lf(S, Q \vee R)$  (gyenge additivitás),
4.  $lf(S, Q) \wedge lf(S, R) = lf(S, Q \wedge R)$  (multiplikativitás)

A bizonyításokat szintén a jegyzetben lehet olvasni.



2. ábra. Legyen  $A = \{a, b, c, d, e\}$  halmaz és  $p(s) := \{(a, a), (a, e), (b, a), (c, b), (e, c)\}$  hatásreláció,  $[R] = \{a, b\}$ .  $lf(s, R)$  ekkor azokban a pontokban lesz igaz, melyben  $p(s)$  értelmezve van és minden ezekhez rendelt elem  $R$  igazsághalmazában található. Végiggondolva tehát  $[lf(S, R)]$  ekkor  $= \{b, c\}$ .

**Kiszámítása:** Az  $lf$  kiszámolását a már fentebb említett utófeltételbe helyettesítés módszerével tudjuk megtenni.

Az **egyszerű értékadások** során ez a következőt jelenti:

$$lf(x := y, R) = R^{x \leftarrow y}$$

Például az  $s = (x := 3), R = (1 \leq x \leq 5)$  esetben:

$lf(s, R) = lf(x := 3, (1 \leq x \leq 5)) = R^{x \leftarrow y} = (1 \leq x \leq 5)^{x \leftarrow 3} = (1 \leq 3 \leq 5)$ . Az  $s$  utasítás tehát olyan állapotokban tudjuk biztonságosan végrehajtani úgy, hogy  $R$ -be

érkezzen, melyre teljesül az, hogy  $1 \leq 3 \leq 5 \equiv igaz$ , azaz tetszőleges pontból indítva helyesen működő utasítást kaphatunk.

**Feltételes értékadás** esetén figyelembe kell venni a feltételt is, hiszen ha ez nem teljesül, abban az esetben nem kell az értékadást végrehajtanunk.

$$lf(\{x := y, \text{ha } \pi\}, R) = (\pi \rightarrow R^{x \leftarrow y}) \wedge (\neg \pi \rightarrow R^{SKIP})$$

Például az  $s = (x := -x, \text{ha } x < 0), R = (x > 0)$  esetben:

$$\begin{aligned} lf(s, R) &= lf((x := -x, \text{ha } x < 0), x > 0) = (x < 0 \rightarrow (x > 0)^{x \leftarrow -x}) \wedge (x \geq 0 \rightarrow x > 0) \\ &= (x < 0 \rightarrow -x > 0) \wedge (x \geq 0 \rightarrow x > 0) \end{aligned}$$

Ekkor az  $A \rightarrow B = \neg A \vee B$  logikai szabályt alkalmazva az alábbiakat kapjuk:

$$(x \geq 0 \vee -x > 0) \wedge (x < 0 \vee x > 0) = (x \geq 0 \vee x < 0) \wedge (x \neq 0) = (\uparrow) \wedge (x \neq 0) = (x \neq 0)$$

Vagyis az  $s$  utasítást minden  $x \neq 0$  állapotban biztonságosan végre tudjuk hajtani úgy, hogy  $R$ -be érkezzen.

**Szimultán értékadás** során egyszerre hajtjuk végre az adott értékadásokat:

$$lf(\{x_1, \dots, x_n := y_1, \dots, y_n\}, R) = lf(\{\parallel_{i=1}^n x_i := y_i\}, R) = R^{x_1 \leftarrow y_1 \dots x_n \leftarrow y_n}$$

Például az  $s = (x, y := x + 1, y - 1), R = (2|x + y)$  esetben:

$$\begin{aligned} lf(s, R) &= lf((x, y := x + 1, y - 1), (2|x + y)) \\ &= (2|x + y)^{x \leftarrow x+1, y \leftarrow y-1} \\ &= (2|(x + 1) + (y - 1)) = (2|x + y) \end{aligned}$$

Azaz az  $s$  utasítást olyan  $x, y$  állapotokban tudjuk biztonságosan végrehajítani úgy, hogy  $R$ -be érkezzen, melyre teljesül az, hogy  $2|x + y$ .

A **feltételes szimultán értékadás** kiszámításának módja ezek után egyértelműen megállapítható az előzőek alapján:

$$\begin{aligned} lf(\{x_1, \dots, x_n := y_1, \dots, y_n, \text{ha } \pi\}, R) &= lf(\{\parallel_{i=1}^n x_i := y_i, \text{ha } \pi\}, R) = \\ &= (\pi \rightarrow R^{x_1 \leftarrow y_1 \dots x_n \leftarrow y_n}) \wedge (\neg \pi \rightarrow R^{SKIP}) \end{aligned}$$

## 2.4. Feladatok

A következő példákkal a leggyengébb előfeltétel számítását tudjuk gyakorolni.

1. Legyen  $S = (SKIP, \{x := x \cdot 2, \text{ ha } 2 \nmid x, \\ x := x + 1, \text{ ha } x < 10\})$ ,  
és  $R = (2|x)$ . Számoljuk ki az  $S$  program  $R$ -hez tartozó leggyengébb előfeltételét.
2. Legyen  $S = (m, n := 0, 0, \{m, n := m + 1, n - 1, \\ n := n + 1, \text{ ha } n < m\})$ .  
Számoljuk ki az  $S$  program  $R$ -hez tartozó leggyengébb előfeltételét.
  - a) Ha  $R = (m = n)$ .
  - b) Ha  $R = (n > m)$ .

### 3. konzultáció

#### 3.1. Gyakorlás

Először gyakoroljunk pár további  $lf$  számolást.

1. Legyen  $s = \{x := -x, \text{ ha } x > 0\}$ , és  
 $R = (x > 1)$ .  
 $lf(s, R) = ?$

$$\begin{aligned}
 [lf(s, R)] &= (x > 0 \rightarrow (x > 1)^{x \leftarrow -x}) \wedge (x \leq 0 \rightarrow x > 1) \\
 &= (x > 0 \rightarrow -x > 1) \wedge (x \leq 0 \rightarrow x > 1) \\
 &= (x \leq 0 \vee -x > 1) \wedge (x > 0 \vee x > 1) \\
 &= (x \leq 0 \vee x < 1) \wedge (x > 0) \\
 &= (x \leq 0) \wedge (x > 0) \equiv Hamis.
 \end{aligned}$$

Átgondolva mit is akartunk kiszámolni, milyen állapotból indulva teljesíthető az a követelmény, hogy  $(x > 1)$ , ha a programunk a pozitív számokon előjelet vált, a negatívakat (és nullát) pedig nem változtatja?

Ha pozitív bemenetet kap, akkor negatívát csinál belőle, negatívakra pedig nem csinál semmit, tehát sehogy sem tudjuk elérni, hogy tetszőleges bemenetre elérjünk a kívánt állapotba, ezért az azonosan *Hamis* az eredmény.

2. Legyen  $S = (SKIP, \{x := 0, \text{ ha } y \neq 0, \\ x := x * z, \text{ ha } z = 0\})$   
 $R = (x = 0)$   
 $lf(S, R) = ? \dots \#magic$   
 $lf(S, R) = (x = 0) \vee (y \neq 0 \wedge z = 0)$

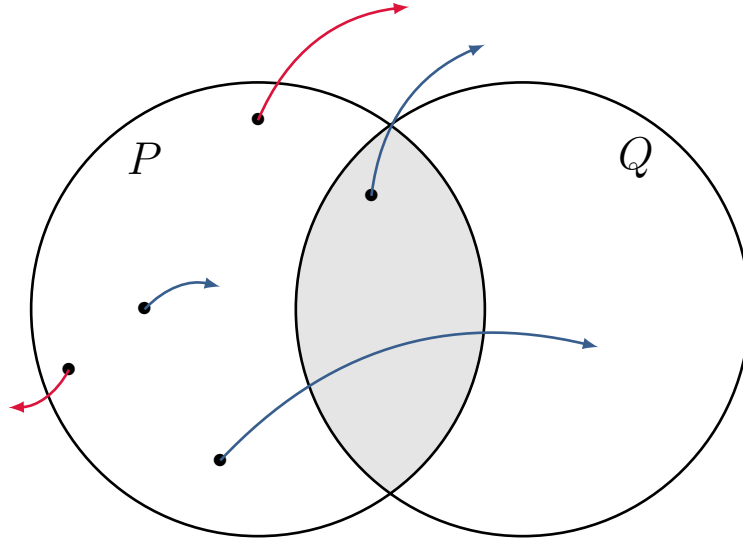
### 3.2. Stabilitási tulajdonság

Biztonsági tulajdonságot már néztünk a feladatok kapcsán, ám utasításokra (és programokra) is szeretnénk ilyen definiálni.

Legyenek  $P, Q : A \rightarrow \mathbb{L}$  állítások, és  $s \subseteq A \times A^{**}$  utasítás.

$$P \triangleright_s Q ::= (P \wedge \neg Q) \Rightarrow lf(s, P \vee Q)$$

A  $P$  állapotot az utasítás ekkor *ha* elhagyja, akkor ezt csak  $Q$ -n keresztül teheti meg.



3. ábra. Nézzünk egy szemléletesebb példát a háromszög tulajdonságra.  $P \triangleright_s Q$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $(P \wedge \neg Q)$ -ból bárhogy választunk állapotokat, az  $s$  utasítás hatására ugyanúgy  $(P \wedge \neg Q)$ -ban maradunk, vagy pedig  $Q$ -ba jutunk. Jó átmeneteknek számítanak a kék nyilak, viszont a piros nyilakról ez nem mondható el.

A *háromszög*re fontos néhány tulajdonságot megjegyezni, melyet a definíció alapján igazolhatunk.

- $P \triangleright_s P = P \wedge \neg P \Rightarrow lf(s, P \vee P) = \downarrow \Rightarrow lf(s, P) = \uparrow \vee lf(s, P) = \uparrow$
- $P \triangleright_s \neg P = P \wedge P \Rightarrow lf(s, P \vee \neg P) = P \Rightarrow lf(s, Igaz) = \uparrow$
- $Igaz \triangleright_s P = Igaz \wedge \neg P \Rightarrow lf(s, Igaz \vee P) = \neg P \Rightarrow lf(s, Igaz) = \uparrow$
- $Hamis \triangleright_s P = Hamis \wedge \neg P \Rightarrow lf(s, Hamis \vee P) = Hamis \Rightarrow lf(s, P) = \uparrow$
- $P \triangleright_s Igaz = P \wedge Hamis \Rightarrow lf(s, P \vee Igaz) = Hamis \Rightarrow lf(s, Igaz) = \uparrow$

Fontos megjegyezni, hogy általános esetben a  $P \triangleright_s Hamis$  nem teljesül.

$P \triangleright_s Hamis = P \wedge Igaz \Rightarrow lf(s, P \vee Hamis) = P \Rightarrow lf(s, P)$ , de erről nem tudunk tetszőleges program és állítás esetén semmit garantálni.

Egy példa erre, mikor nem teljesül:

$s = (x := x + 1)$  és  $P = (2|x)$

$P \triangleright_s \text{Hamis} = P \Rightarrow lf(s, P) = (2|x) \Rightarrow lf(x := x + 1, 2|x) = (2|x) \Rightarrow (2|x)^{x \leftarrow x+1} = (2|x) \Rightarrow (2|x + 1)$ , ami nyilvánvaló ellentmondás, hiszen ha egy szám páros, akkor a nála eggyel nagyobb szám nem lehet szintén páros (mivel az páratlan).

Abban az esetben azonban, ha  $P \triangleright_s \text{Hamis}$  teljesül, akkor azt mondjuk, hogy  $s$  rendelkezik a  $P$  stabil tulajdonsággal, azaz  $P$ -ből nem tud kivezetni a program. Jelölésünk erre:  $Pstabil_s$  (triviálisan stabil tulajdonság az  $Igaz$ , hiszen  $Igaz \Rightarrow lf(s, Igaz)$  tetszőleges utasításra teljesül).

A háromszög azonban nem tranzitív, azaz  $P \triangleright_s Q$  és  $Q \triangleright_s R$ -re általában **nem igaz**, hogy  $P \triangleright_s R$ .

**Feladat** Számoljuk ki  $P \triangleright_s Q$ -t, ha:

$S = (SKIP, \{s_1 : x := x + 2, \text{ ha } x < 50, \text{ és}$

$s_2 : x := x + 1, \text{ ha } x \geq 50\}$

$P = (2|x)$

$Q = (x \geq 50)$

$$P \triangleright_s Q = lf(S, P \vee Q)$$

$$(2|x) \wedge (x < 50) \Rightarrow lf(S, (2|x \vee x \geq 50))$$

Az  $lf$  multiplikativitását felhasználva:

$$lf(S, P \vee Q) = lf(s_1, P \vee Q) \wedge lf(s_2, P \vee Q)$$

$$s_1 : lf(x := x + 2, \text{ ha } x < 50, (2|x \vee x \geq 50)) =$$

$$(x < 50 \rightarrow (2|x \vee x \geq 50)^{x \leftarrow x+2}) \wedge$$

$$\wedge (x \geq 50 \rightarrow (2|x \vee x \geq 50))$$

$$= (x \geq 50 \vee 2|x + 2 \vee x + 2 \geq 50) = (x \geq 50 \vee 2|x \vee x \geq 48) = (x \geq 48 \vee 2|x)$$

$$s_2 : lf(x := x + 1, \text{ ha } x \geq 50, (2|x \vee x \geq 50)) =$$

$$(x \geq 50 \rightarrow (2|x \vee x \geq 50)^{x \leftarrow x+1}) \wedge$$

$$\wedge (x < 50 \rightarrow (2|x \vee x \geq 50))$$

$$= (x \geq 50 \rightarrow 2|(x + 1) \vee x + 1 \geq 50) \wedge (x < 50 \rightarrow 2|x \vee x \geq 50)$$

$$= (x < 50 \vee 2|x + 1 \vee x \geq 49) \wedge (x \geq 50 \vee 2|x \vee x \geq 50)$$

$$= (\uparrow) \wedge (2|x \vee x \geq 50)$$

A két eredményt észelve:  $lf(S, P \vee Q) = lf(s_1, P \vee Q) \wedge (s_2, P \vee Q)$

$$= (x \geq 48 \vee 2|x) \wedge (x \geq 50 \vee 2|x) = 2|x \vee x \geq 50$$

$P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(S, P \vee Q)$  behelyettesítve ekkor:

$$(2|x \wedge x < 50) \Rightarrow (2|x \vee x \geq 50) \text{ pedig igaz } 2|x \text{ miatt,}$$

hiszen ha  $2|x$  igaz a bal oldalon, akkor a jobb oldal is igaz.

Háromszög esetén szerencsére lehetőségünk van egyszerűsítések használatára, mellyel valamennyire megkönnyíthetjük a számolást.

$$\begin{aligned}
& P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(S, P \vee Q) \\
& = P \wedge \neg Q \Rightarrow \bigwedge_{s_i \in S} \left[ \left( \pi_i \rightarrow (P \vee Q)^{s_i} \right) \wedge \left( \neg \pi_i \rightarrow (P \vee Q)^{SKIP} \right) \right] \\
& = P \wedge \neg Q \Rightarrow \bigwedge_{s_i \in S} \left[ \left( \pi_i \rightarrow (P \vee Q)^{s_i} \right) \wedge \left( \pi_i \vee (P \vee Q)^{SKIP} \right) \right] \\
& \text{felhasználva, hogy } A \Rightarrow (B \wedge C) = (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \\
& = \left( P \wedge \neg Q \Rightarrow \bigwedge_{s_i \in S} \left[ \pi_i \rightarrow (P \vee Q)^{s_i} \right] \right) \wedge \\
& \quad \left( P \wedge \neg Q \Rightarrow \bigwedge_{s_i \in S} \left[ \pi_i \vee (P \vee Q)^{SKIP} \right] \right) \text{ (skip ág)}
\end{aligned}$$

A skip ágot tovább tudjuk egyszerűsíteni. Ebben az esetben meggondolható, hogy ha a bal oldal hamis, akkor az implikáció igaz lesz. Ha a bal oldal igaz, akkor  $P$  értéke igaz és  $\neg Q$  is teljesül, tehát  $Q$  hamis. A következtetés jobb oldalán álló nagy konjunkciót triviálisan igazgá tudjuk tenni, hiszen ha  $P$  igaz a bal oldalt, akkor minden esetben szintén igaz lesz a jobb oldalon is, és *igaz* feltétel mellé bármit "vagyolhatunk", az igazat ad, emellett igaz állítások és is igazat adnak, tehát a "skip" ágra biztosan igaz a feltétel. A későbbiekben ezt a "skip ág elhagyása"-ként említjük (ez nem azt jelenti, hogy az lf-ben a skippel sosem kell foglalkozni, csupán azt, hogy *háromszög* számolása esetén a SKIP ág minden esetben igazat ad). Visszatérve az eredeti lf-hez ekkor:

$$\begin{aligned}
& = \left( P \wedge \neg Q \Rightarrow \bigwedge_{s_i \in S} \left[ \pi_i \rightarrow (P \vee Q)^{s_i} \right] \right) \wedge \uparrow \\
& = P \wedge \neg Q \Rightarrow \bigwedge_{s_i \in S} \left[ \pi_i \rightarrow (P \vee Q)^{s_i} \right] \\
& = \forall s_i \in S : (P \wedge \neg Q) \Rightarrow (\pi_i \rightarrow (P \vee Q)^{s_i})
\end{aligned}$$

A mostani formulát "Ha igaz  $A$ , és akkor ha igaz  $B$ , teljesül -e  $C$ ?" módon tudjuk értelmezni, amit szóban (és logikában is) át tudunk fogalmazni "Ha igaz  $A$  és  $B$ , igaz -e  $C$ ?" módra. Ezt fogjuk a későbbiekben *feltétel átvitelének* nevezni.

$$P \triangleright_S Q = \forall s_i \in S : (P \wedge \neg Q \wedge \pi_i) \Rightarrow (P \vee Q)^{s_i}$$

Ismét kiemelnénk, hogy a "*skip+feltétel*" módszerrel való számolás csak és kizárólag a *háromszög* számolása esetén használható.

Teljesül -e a stabilitási tulajdonság az itt megadott állításokra és programra nézve? (Azaz számoljuk ki  $P \triangleright_S Q$ -t, ha:)

$S = (SKIP, \{s_1 : x := x + 2, \text{ ha } x < 50, \text{ és}$

$s_2 : x := x + 1, \text{ ha } x \geq 50\})$

$P = (2|x)$

$Q = (x \geq 50)$

SKIP + feltétel miatt:

$$P \triangleright_S Q = \forall s_i \in S : (P \wedge \neg Q \wedge \pi_i) \Rightarrow (P \vee Q)^{s_i}$$

$$s_1 : (2|x) \wedge (x < 50) \wedge (x < 50) \Rightarrow (2|x \vee x \geq 50)^{x \leftarrow x+2} =$$

$$(2|x \wedge x < 50) \Rightarrow (2|x \vee x \geq 48) = \uparrow$$

$$s_2 : (2|x) \wedge (x < 50) \wedge (x \geq 50) \Rightarrow (2|x \vee x \geq 50) =$$

$$\downarrow \Rightarrow (2|x \vee x \geq 50) = \uparrow$$

$$P \triangleright_S Q = \uparrow \wedge \uparrow = \uparrow$$

Látszik, hogy így mennyivel egyszerűbben megkapjuk ugyan azt az eredményt, amit korábban egy oldalon keresztül kellett számolni.

A biztonság kedvéért nézzünk meg még egy példát.

Legyen  $S = (SKIP, \{s_1 : x := x + 1,$

$s_2 : x := x - 1, \text{ ha } 2|x\})$ ,

valamint  $P = (x = 3)$  és  $Q = (x = 4)$ . Számoljuk ki  $P \triangleright_S Q$ -t! Ekkor

$$P \triangleright_S Q = (P \triangleright_{s_1} Q) \wedge (P \triangleright_{s_2} Q)$$

$$P \triangleright_{s_1} Q = (P \wedge \neg Q) \Rightarrow lf(s_1, P \vee Q)$$

$$= (x = 3 \wedge x \neq 4) \Rightarrow (x = 3 \vee x = 4)^{x \leftarrow x+1}$$

$$= (x = 3 \wedge x \neq 4) \Rightarrow (x + 1 = 3 \vee x + 1 = 4)$$

$$= (x = 3) \Rightarrow (x = 2 \vee x = 3)$$

Mivel  $\{3\} \subseteq \{2, 3\}$ :

$$= \uparrow$$

$$P \triangleright_{s_2} Q = (P \wedge \neg Q) \Rightarrow lf(s_2, P \vee Q)$$

SKIP + feltétel miatt:

$$= (P \wedge \neg Q \wedge \pi_2) \Rightarrow (P \vee Q)^{s_2}$$

$$= (x = 3 \wedge x \neq 4 \wedge 2|x) \Rightarrow (x = 3 \vee x = 4)^{x \leftarrow x-1}$$

$$= (x = 3 \wedge x \neq 4 \wedge 2|x) \Rightarrow (x - 1 = 3 \vee x - 1 = 4)$$

$$= (x = 3 \wedge 2|x) \Rightarrow (x = 4 \vee x = 5)$$

$$= \downarrow \Rightarrow (x = 4 \vee x = 5)$$

$$= \uparrow$$

$$P \triangleright_S Q = (P \triangleright_{s_1} Q) \wedge (P \triangleright_{s_2} Q) = \uparrow \wedge \uparrow = \uparrow$$



## 4. konzultáció

### 4.1. Haladási tulajdonság

A korábbiakban egy biztonsági tulajdonságot néztünk a *háromszög* definíciójában. Ez azonban nem követelte meg, hogy haladjon is a programunk, így érezhető, hogy ez még kevés lesz ahhoz, hogy egy programot jól működését jellemezhessük. Pont ezért bevezetjük az *egyenes nyíl* definícióját:

$$P \mapsto_S Q ::= P \triangleright_S Q \wedge \exists s_i \in S : P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(s_i, Q)$$

Az *egyenes nyíl* tehát egy biztonsági és haladási tulajdonságot garantál egyszerre nekünk: a  $P$  állapotot csak  $Q$ -n keresztül hagyhatjuk el, viszont kell léteznie (legalább egy, de lehet több) olyan utasításnak az absztrakt programban, mely egy lépésben átvisz minket tetszőleges  $P$ -beli állapotból  $Q$ -ba.

Az egyenes nyíl teljesülését a korábbiakhoz hasonlóan definíció alapján fogjuk ellenőrizni. Először meg kell vizsgálnunk, hogy a *háromszög* tulajdonság teljesül-e rá. Amennyiben igen, akkor további ellenőrzést kíván annak a programnak a megtalálása, mely biztosítja a haladást. (Ha már a háromszög vizsgálatánál elbukik egy feltétel, akkor biztos, hogy az egyenes nyíl sem fog rá teljesülni.)

Példa:  $S = (x := 0, \{s_1 : x := x/2, \text{ ha } 2|x, \text{ és}$

$$s_2 : x := x + 1\})$$

$$P = (2|x)$$

$$Q = (2 \nmid x)$$

SKIP + feltétel alapján:

$$P \triangleright_S Q = \forall s_i \in S : (P \wedge \neg Q \wedge \pi_i) \Rightarrow (P \vee Q)^{s_i}$$

$$s_1 : (2|x) \wedge (2|x) \wedge (2|x) \Rightarrow (2|x \vee 2 \nmid x)^{x \leftarrow x/2} =$$

$$(2|x) \Rightarrow (2|x/2 \vee 2 \nmid x/2) = \uparrow$$

$$s_2 : (2|x) \wedge (2|x) \wedge (\uparrow) \Rightarrow (2|x \vee 2 \nmid x)^{x \leftarrow x+1} =$$

$$(2|x) \Rightarrow (2|x+1 \vee 2 \nmid x+1) = \uparrow$$

$$P \triangleright_S Q = \uparrow \wedge \uparrow = \uparrow$$

A háromszög tehát igaz. Meg kell azonban vizsgálni, hogy létezik-e  $s_i$ , amelyre a plusz feltétel teljesül:  $P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(s_i, Q)$

$$s_1 : (2|x) \wedge (2|x) \Rightarrow lf(x := x/2, \text{ ha } 2|x, 2 \nmid x)$$

$$(2|x) \Rightarrow (2|x \rightarrow (2 \nmid x)^{x \leftarrow x/2}) \wedge (2 \nmid x \rightarrow (2 \nmid x))$$

$$(2|x) \Rightarrow ((2 \nmid x \vee (2 \nmid x/2)) \wedge \uparrow)$$

$$(2|x) \Rightarrow (2 \nmid x/2).$$

Erről azonban nem tudunk semmit sem mondani, hisz  $x = 42$  esetén az állítás igaz,

de  $x = 44$  esetben nem teljesül.  $s_1$  tehát nem jó választás az egyenes nyílban keresett haladást biztosító programnak.

Vizsgáljuk  $s_2$ -t:

$$s_2 : (2|x) \wedge (2|x) \Rightarrow lf(x := x + 1, 2 \nmid x)$$

$$(2|x) \Rightarrow (2 \nmid x)^{x \leftarrow x+1} \wedge (\downarrow \rightarrow (2 \nmid x))$$

$$(2|x) \Rightarrow (2 \nmid x + 1) \wedge \uparrow$$

$$(2|x) \Rightarrow (2 \nmid x + 1).$$

Ha  $x$  páros, akkor nyilvánvalóan  $x + 1$  páratlan, így ez az következtetés helyes. Összegezve az eddigieket, az alábbi programra igaz, hogy  $P \mapsto_S Q$ , ahol a definícióban szereplő  $s_i$ -nek  $s_2$ -t választjuk.

## 5. Megoldások

### 1.2 - Étkező filozófusok

- $FP \Rightarrow (\forall i : \neg f(i).e)$
- $f(i).o \triangleright \perp$

### 1.3 - Moziterem

- $n(i).a \hookrightarrow n(i).f$
- $n(i).t \hookrightarrow n(i).f$
- $FP \Rightarrow \forall i : n(i).h$
- $n(i).a \triangleright (n(i).j \vee n(i).b)$
- $n(i).f \mapsto n(i).h$
- $(\forall i : n(i).f \Rightarrow n(i).t) \in inv$
- $n(i).h \triangleright \perp$

### 2.4 - Feladatok

1. Ahogy korábban láttuk 2.4 bekezdésben, egy program leggyengébb előfeltétele az utasításai által adott leggyengébb előfeltételek konjugáltja. Az egyszerűség kedvéért nevezzük el az  $x := x \cdot 2$ , ha  $2 \nmid x$  utasítást  $s_1$ -nek, az  $x := x + 1$ , ha  $x < 10$  utasítást

pedig  $s_2$ -nek. Ekkor

$$\begin{aligned} lf(s_1, R) &= lf(x := x \cdot 2, ha\ 2 \nmid x; (2|x)) \\ &= (2 \nmid x \rightarrow (2|x)^{x \leftarrow x \cdot 2}) \wedge (2|x \rightarrow 2|x) \\ &= (2 \nmid x \rightarrow 2|x \cdot 2) \wedge (2|x \rightarrow 2|x) \end{aligned}$$

Alkalmazva a  $A \rightarrow B = \neg A \vee B$  szabályt a következőt kapjuk:

$$= (2|x \vee 2|x \cdot 2) \wedge (2 \nmid x \vee 2|x)$$

Mivel  $A \vee \neg A = \uparrow$ , valamint egy szám kétszeresét véve osztható lesz kettővel:

$$\begin{aligned} &= (2|x \vee \uparrow) \wedge (\uparrow) \\ &= (\uparrow) \wedge (\uparrow) \\ &= \uparrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} lf(s_2, R) &= lf(x := x + 1, ha\ x < 10; (2|x)) \\ &= (x < 10 \rightarrow (2|x)^{x \leftarrow x+1}) \wedge (x \geq 10 \rightarrow 2|x) \\ &= (x < 10 \rightarrow 2|x + 1) \wedge (x \geq 10 \rightarrow 2|x) \\ &= (x \geq 10 \vee 2|x + 1) \wedge (x < 10 \vee 2|x) \end{aligned}$$

Picit tovább alakítva a pedig a következő kifejezést kapjuk:

$$= (x \geq 10 \vee 2|x + 1) \wedge (x < 10 \vee 2|x)$$

$$\begin{aligned} lf(S, R) &= lf(s_1, R) \wedge lf(s_2, R) \\ &= (\uparrow) \wedge ((x \geq 10 \vee 2|x + 1) \wedge (x < 10 \vee 2|x)) \end{aligned}$$

Mivel  $\uparrow \wedge A = A$ :

$$= (x \geq 10 \vee 2|x + 1) \wedge (x < 10 \vee 2|x)$$

2. Hasonlóan az előző feladathoz, nevezzük el  $m, n := m + 1, n - 1$  és  $n := n + 1, ha\ n < m$  utasításokat rendre  $s_1$ -nek és  $s_2$ -nek.

$$\text{a) } R = (m = n)$$

$$\begin{aligned} lf(s_1, R) &= lf(m, n := m + 1, n - 1; (m = n)) \\ &= (m = n)_{n \leftarrow n-1}^{m \leftarrow m+1} \\ &= (m + 1 = n - 1) \\ &= (m = n - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} lf(s_2, R) &= lf(n := n + 1, \text{ha } n < m; (m = n)) \\ &= (n < m \rightarrow (m = n)_{n \leftarrow n-1}^{m \leftarrow m+1}) \wedge (n \geq m \rightarrow m = n) \\ &= (n < m \rightarrow m + 1 = n - 1) \wedge (n \geq m \rightarrow m = n) \\ &= (n \geq m \vee m + 1 = n - 1) \wedge (n < m \vee m = n) \\ &= (n \geq m \vee m = n - 2) \wedge (n \leq m) \end{aligned}$$

Alkalmazva a  $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$  szabályt:

$$\begin{aligned} &= (n \geq m \wedge n \leq m) \vee (m = n - 2 \wedge n \leq m) \\ &= (n = m) \vee \downarrow \end{aligned}$$

Mivel  $A \vee \downarrow = A$ :

$$= (n = m)$$

$$\begin{aligned} lf(S, R) &= lf(s_1, R) \wedge lf(s_2, R) \\ &= (m = n - 2) \wedge (n = m) \\ &= \downarrow \end{aligned}$$

b)  $R = (m < n)$

$$\begin{aligned} lf(s_1, R) &= lf(m, n := m + 1, n - 1; (m < n)) \\ &= (m < n)_{n \leftarrow n-1}^{m \leftarrow m+1} \\ &= (m + 1 < n - 1) \\ &= (m + 2 < n) \\ lf(s_2, R) &= lf(n := n + 1, ha\ n < m; (m < n)) \\ &= (n < m \rightarrow (m < n)_{n \leftarrow n-1}^{m \leftarrow m+1}) \wedge (n \geq m \rightarrow m < n) \\ &= (n < m \rightarrow m + 1 < n - 1) \wedge (n \geq m \rightarrow m < n) \\ &= (n \geq m \vee m + 1 < n - 1) \wedge (n < m \vee m < n) \\ &= (n \geq m \vee m + 2 < n) \wedge (n \neq m) \\ &= (n \geq m) \wedge (n \neq m) \\ &= (n > m) \\ lf(S, R) &= lf(s_1, R) \wedge lf(s_2, R) \\ &= (m + 2 < n) \wedge (n > m) \\ &= (m + 2 < n) \wedge (m < n) \\ &= (m + 2 < n) \end{aligned}$$

## Hivatkozások

- [1] dr. Horváth Zoltán: Párhuzamos és elosztott programozás  
(<http://people.inf.elte.hu/hz/parh/jegyzet.ps>)
- [2] Fóthi Ákos: Bevezetés a programozáshoz  
(<http://bzsr.web.elte.hu/progmod2/konyv.pdf>)