Eötvös Loránd Tudományegyetem

Informatikai Kar

Programozási Nyelvek és Fordítóprogramok Tanszék

Osztott rendszerek szintézise

IPM-08sztORSZE

Konzultációs segédanyag

Kopácsi László, Szabó Miklós

Utolsó módosítás: 2018. március 23.

Tartalomjegyzék

Tisztelt Hallgatók! Ez a dokumentum azért készült, hogy az ELTE-IK hallgatóinak megkönnyítse a tanulást és a ZH-ra való felkészülést. Az alapból kollokvium számonkérésű tárgyhoz tartozik egy konzultációs óra, melynek mi vagyunk a demonstrátorai.

Ez az óra arra hivatott, hogy az előadáson elhangzott ismereteket megerősítse, az esetleges kérdésekre választ adjon. A tárgyra két zárthelyi (előre meghatározott szint fölötti) teljesítésével megajánlott jegyet lehet szerezni, ám ehhez nem elegendőek véleményünk szerint az előadások, a konzultáción sokkal mélyebben, a gyakorlati példák pontos ismertetésével és a szükséges definíciók és tételek körbejárásával foglalkozunk.

Az itt leírtak bár gondos odafigyelés mellett készültek, ám előfordulhat, hogy egy-egy helyen helyesírási vagy egyéb hiba található. Amennyiben úgy érzitek, hogy valamilyen elírásra bukkantatok, feltétlenül szóljatok nekünk, hogy minél hamarabb javíthassuk azokat.

Ugyan ezen okból ez a PDF nem minősül hivatalos jegyzetnek, hiszen nem került (még) lektorálásra és olykor a megfogalmazás is pontatlan lehet (matematikailag). Ennek oka, hogy nem egy tétel/definíció-gyűjteményt kívántunk összeírni, hanem egy olyan jegyzetet, ami elsősorban azok megértését segíti.

A vizsgára való felkészülést csupán segíti és megkönnyíti, nem helyettesíti a konzultáció. Kérünk mindenkit, hogy ne vegye fél vállról a készülést, mivel itt rengeteg, sokotok számára új definíció, tétel és bizonyítási módszer kerül tárgyalásra, melyet a vizsga előtti napokban olvasva nagyon nehezen fogad be a hallgató, ha előtte még nem találkozott ezekkel.

A példákban ismertetett feladatok során, ha csak explicit nem jelezzük, az állapottéren általában a változóink az egész számok ($\mathbb{Z}$) típusába tartoznak. A logikai értékeket ($\mathbb{L}$), tehát az $\{igaz, hamis\}$ halmaz elemeit több helyen a $\uparrow, \downarrow$ jelekkel helyettesítjük, ahol a felfelé mutató nyíl felel meg az *igaz*, a lefelé irányuló pedig a *hamis* értéknek.

Mindenkinek eredményes félévet és sikeres készülést kívánunk!
Laci, Miki

1. konzultáció

1.1. Áttekintés

Az előadás során több, temporális logikai relációval találkoztunk, nézzük ezeket át informálisan, kezdve a biztonsági tulajdonságokkal.

- Az első, melyet "háromszög"-ként említünk ($\rhd$), bizonyos állapot-átmeneteket megenged, másokat pedig megtilt. A ($P \rhd Q$) azt jelenti, hogy a P állapotot **ha** elhagyjuk, akkor ezt csak a Q-n keresztül tehetjük meg. A háromszög azonban nem tesz semmiféle kikötést arról, hogy a P-t el kell hagynunk, csupán biztosít minket arról, hogy ha ez mégis megtörténik, akkor milyen irányba (nem) mozdulhatunk.

- Másik biztonsági tulajdonság az *invariáns*. Ha egy K állítás invariáns, akkor ennek minden állapot-átmenet előtt és után teljesülnie kell.

- A harmadik említett kikötés a *fixpont*. Ezzel leírhatjuk, hogy ha egy rendszerben már nem figyelhetünk meg további állapot-átmeneteket, akkor milyen tulajdonságoknak kell teljesülnie. ($FP \Rightarrow R$) estén például egy R-el jelölt állítás igaz, amennyiben fixpontba jutottunk. Fixpontba azonban nem csak a kívánt befejezési állapot tartozhat, ha holtpont helyzet alakul ki, azt is tekinthetjük fixpontnak.

Természetesen nem csak biztonsági tulajdonságokra van szükségünk - azaz mit (ne) csinálhasson a rendszer -, hanem haladásira is (azért csináljon valamit).

- Az "egyenes nyíl" ($\mapsto$) néven nevezett reláció egy szigorú kikötés arra vonatkozóan, hogy egy állapotból milyen másik helyzetbe **kell** lépnünk. Míg $\rhd$ esetén csupán azt mondtuk, hogy *ha* elhagyunk egy állapotot, akkor azt milyen irányba tegyük, a ($P \mapsto Q$) azt mondja, hogy a P állapotból a Q állapotba kell, hogy kerüljünk (véges időn belül).

- Ennél megengedőbb a "görbe nyíl"-ként ($\hookrightarrow$) ismert reláció. Ebben az esetben a ($A \hookrightarrow B$) feltétel csupán annyit mond, hogy az A állapotot előbb-utóbb a B állapot fogja követni (azaz A-ból elkerülhetetlenül B-be fogunk érkezni), de itt nincs semmilyen megkötés arra, hogy a két állapot egymás után következzen be. Legális állapot-átmenet sorozat az ($A \hookrightarrow B$)-ra az $< A, G, F, D, F, E, C, D, B >$ is.

1.2. Étkező filozófusok

Tekintsük az előadáson is ismertetett *étkező filozófusok* feladatot (jegyzet[1] 1.1). Próbáljuk meg kiegészíteni a feltételeket további megkötések formalizálásával:

- Ha a rendszer nyugalmi állapotban van, akkor egy filozófus sem eszik.

- Mindegyik filozófusra igaz, hogy ha hazament, akkor utána már nem kerülhet más állapotba.

1.3. Moziterem

A következő példában egy mozira vonatkozó feladatot fogunk ismertetni, ahol a nézők tevékenységére szeretnénk megkötéseket tenni. A jelölést megkönnyítendő vezessük be az alábbiakat: $n(i)$ jelölje az i-ik nézőt. A moziba látogatók állapotait az alábbiak alapján jelöljük:

a) megérkezik a moziba - a

b) jegyet vesz - j

c) üdítőt és nasit vásárol - b

d) érvényes jeggyel rendelkezik - t

e) filmet néz - f

f) hazamegy - h

Próbáljuk formalizálni az alábbi feltételeket:

- A moziba érkező néző filmet fog nézni.
- Ha valaki érvényes jeggyel rendelkezik, akkor megnézi a filmet.
- Ha a moziban nincs mozgás, akkor minden néző már otthon van.
- A moziba érkező néző jegyet vásárol, vagy a büfébe megy.
- A film után a néző hazamegy.
- Senki nem nézhet filmet úgy, hogy nincs érvényes jegye. (Tipp: próbáljunk invariánst megfogalmazni.)
- Ha valaki hazament, akkor már nem csinál semmit a moziban.

2. konzultáció

2.1. Áttekintés

Ahhoz, hogy a későbbiekben biztos módon számolhassunk programokkal , elkerülhetetlen a számunkra szükséges (alap)fogalmakat tisztázni a halmazelmélet és a relációk témakörében.

Legyenek A és B tetszőleges halmazok. A és B *direkt*-, vagy *Descartes*-szorzatán azt a halmazt értjük, melyben olyan párok találhatóak, melynek első eleme A-, második eleme pedig B-beli.

$$A \times B ::= \{(a,b) | a \in A \text{ és } b \in B\}$$

Jelölje $r \subseteq A \times B$ azt a bináris relációt, mely A elemeihez rendel értékeket a B halmazból (A és B tetszőleges halmazok). A reláció elemeit $(a,b) \in r$ módon fogjuk jelölni.

$$\text{Az } r \text{ reláció értelmezési tartománya: } \mathcal{D}_r ::= \{a \in A | \exists b \in B : (a,b) \in r\} \subseteq A$$

$$\text{Az } r \text{ reláció értékkészlete: } \mathcal{R}_r ::= \{b \in B | \exists a \in A : (a,b) \in r\} \subseteq B$$

$$r(a) \text{ jelölje azt a halmazt, melynek elemei: } \{b \in B | (a,b) \in r\}$$

Világos, hogy az értelmezési tartományban olyan elemek vannak, amikhez rendel valamit r, míg az értékkészletben olyanokat találhatunk, amik valamilyen elemhez hozzá lettek rendelve. Egy elem képe a hozzá rendelt elemek halmazából áll elő.

Egy g relációt *parciális függvény*nek (vagy determinisztikus relációnak) nevezhetünk, amennyiben az alábbi teljesül:

$$\forall a \in A : |g(a)| \leq 1,$$

azaz minden elemhez *legfeljebb* egy másikat társítunk. Jelölésünk ekkor: $g \in A \to B$. Ha minden elemhez pontosan egy értéket rendelünk, akkor az f reláció függvény, azaz:

$$\forall a \in A : |f(a)| = 1.$$

Jelölésünk ekkor: $f : A \to B$. Ebben az esetben általában $f(a)$ nem az egy elemű halmazt, hanem annak képét jelenti.

Ahhoz, hogy állításokat fogalmazhassunk meg a későbbiekben, szükségünk lesz logikai relációkra is.

$$\text{A } h \subseteq A \times \mathbb{L} \text{ logikai relációnak nevezzük, ahol } \mathbb{L} ::= \{igaz, hamis\}.$$

Ha h függvény, akkor *logikai függvény*nek nevezzük.

Egy reláció inverzét az alábbi módon definiálhatjuk:

$$R^{(-1)} ::= \{(b, a) \in B \times A | (a, b) \in R\}$$

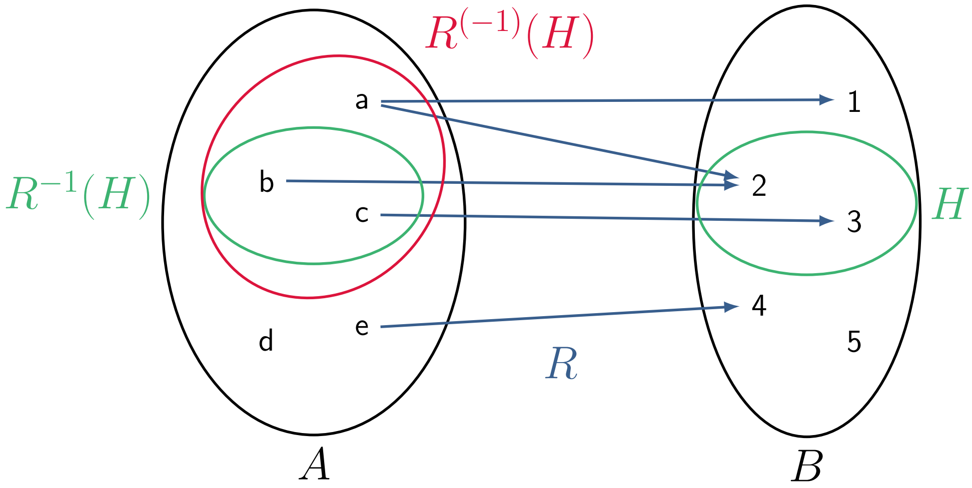
A továbbiakban szükségünk lesz egy reláció adott halmazra vonatkozó inverz- és őskép definíciójára.
A $H \subseteq B$ halmaz R reláció szerinti *inverz*képe:

$$R^{(-1)}(H) ::= \{a \in A | R(a) \cap H \neq \varnothing\}$$

A $H \subseteq B$ halmaz R reláció szerinti *ős*képe:

$$R^{-1}(H) ::= \{a \in A | R(a) \subseteq H\}$$

Meggondolva látható, hogy az *inverzkép* megengedőbb, hisz csak annyit kér, hogy egy adott elemhez *létezzen* H-beli elem az R hozzárendelésben, az *őskép* viszont megköveteli, hogy *minden* ilyen elem a H halmazban legyen.



1. ábra. Nézzünk egy példát a korábban említett fogalmakra. Legyen $A = \{a, b, c, d, e\}$ és $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazok, valamint $R \subseteq A \times B, R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 3), (e, 4)\}$ reláció. Ekkor R *értelmezési tartománya* $\mathcal{D}_R = \{a, b, c, e\}$, *értékkészlete* pedig $\mathcal{R}_R = \{1, 2, 3, 4\}$. Továbbá legyen $H \subseteq B, H = \{2, 3\}$. Ekkor a H halmaz R reláció szerinti *ősképe* $R^{-1}(H) = \{b, c\}$, *inverzképe* pedig $R^{(-1)}(H) = \{a, b, c\}$. Itt jól látszik, hogy az *inverzkép* megengedőbb, mint az *őskép*, hiszen $R^{-1}(H) \subseteq R^{(-1)}(H) = \{b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$.

Legyen $R \subseteq A \times \mathbb{L}$ logikai reláció, R igazsághalmaza ekkor:

$$\lceil R \rceil ::= R^{-1}(\{igaz\}) \text{ azaz: } \lceil R \rceil = \{a \in \mathcal{D}_R | R(a) \subseteq \{igaz\}\}$$

Az igazsághalmazt tehát az $\{igaz\}$ halmazra vett őskép szerint definiáljuk.

Ha inverzképet számolunk, akkor juthatunk a *gyenge igazsághalmaz* fogalmához:

$$\lfloor R \rfloor ::= R^{(-1)}(\{igaz\}) \text{ azaz: } \lfloor R \rfloor = \{a \in \mathcal{D}_R | R(a) \cap \{igaz\} \neq \varnothing\}$$

A későbbiekben nagyban megkönnyíti a dolgunkat, ha bevezetjük az *azonosan igaz*, és az *azonosan hamis* logikai függvényeket.

$$Igaz : A \to \mathbb{L} : \forall a \in A : Igaz(a) = \{igaz\}$$

$$Hamis : A \to \mathbb{L} : \forall a \in A : Hamis(a) = \{hamis\}$$

Könnyű meggondolni, hogy ekkor $\lceil Igaz \rceil = A$ és $\lceil Hamis \rceil = \varnothing$.
Az igazsághalmazzal kapcsolatban fontos megemlíteni néhány tulajdonságot, melyeket a későbbiekben kihasználunk.

Legyenek P, $Q \subseteq A \times \mathbb{L}$, ekkor:

- $\lceil P \wedge Q \rceil = \lceil P \rceil \cap \lceil Q \rceil$
- $\lceil P \vee Q \rceil = \lceil P \rceil \cup \lceil Q \rceil$
- $\lceil \neg P \rceil = A \setminus \lceil P \rceil$
- $\lceil P \to Q \rceil = \lceil \neg P \vee Q \rceil = (A \setminus \lceil P \rceil) \cup \lceil Q \rceil$
- $P \Rightarrow Q = \lceil P \rceil \subseteq \lceil Q \rceil$

Egyszerűbben megfogalmazhatóak állítások, ha tudjuk, hogy $A \Rightarrow B$. Ekkor ugyanis:

- $A \vee B = B$
- $A \wedge B = A$

Nézzünk erre egy példát, legyenek A, $B : \mathbb{N} \times \mathbb{L}$ úgy, hogy:
$\lceil A \rceil$:={10-nél nagyobb szám} és
$\lceil B \rceil$:= {pozitív szám}.
Világos, hogy $A \Rightarrow B$, hiszen ha egy egész szám 10-nél nagyobb, akkor pozitív. Az $A \vee B$ állítást úgy fogalmazhatjuk meg, hogy azokat az egész számokat keressük, melyek 10-nél nagyobbak, **vagy** pozitívak. Érződik, hogy a *vagy* kapcsolat miatt a gyengébb feltétellel is megelégszünk, így a bővebb halmaz, azaz a pozitív számok halmazát kapjuk ($= B$). Ha azonban a 10-nél nagyobb **és** pozitív számokra vagyunk kíváncsiak, akkor a szigorítás miatt a szűkebb halmazt kapjuk, tehát a 10-nél nagyobb számokat kell vizsgálnunk ($= A$).

2.2. Program

Röviden tekintsük át, hogy a Fóthi[2]-Horváth - féle modellben hogyan is definiáltuk a programot és annak hatásrelációját.

Jelölje A^* az A elemeiből képzett véges, A^∞ pedig a végtelen sorozatokat. A későbbiekben A^{**} jelenti az $A^* \cup A^\infty$ halmazt, azaz a véges és végtelen sorozatok halmazát. Ha alaphalmaznak a természetes számokat választjuk, akkor az $< 1, 5, 3, 2 >\in A^*$ egy véges, míg az $< 1, 2, 3, 4, ... >\in A^\infty$ végtelen sorozatot jelöl.

Utasítás alatt egy olyan $s \subseteq A \times A^{**}$ relációt értünk, melyre:

1. $\mathcal{D}_s = A$
2. $\forall a \in A : \forall \alpha \in s(a) : |\alpha| \neq 0 \wedge \alpha_1 = a$
3. $(\alpha \in \mathcal{R}_s \wedge \alpha \in A^*) \Rightarrow (\forall i(1 \leq i < |\alpha|) : \alpha_i \neq \alpha_{i+1})$
4. $(\alpha \in \mathcal{R}_s \wedge \alpha \in A^\infty) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N} : (\alpha_i = \alpha_{i+1} \rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}^+ : \alpha_i = \alpha_{i+k}))$

A fenti definíció a *működés* fogalmát próbálja absztrakt módon szemléltetni. A négy pont jól jellemzi az utasítást: elsőként szeretnénk, ha az utasítás minden állapottér-beli pontban értelmezve lenne (azaz az utasítás mindenhonnan el tud indulni).
Második pontban azt fogalmazzuk meg, hogy egy sorozat a működése teljes történetét írja le, kezdve a kiindulási állapottal.
A harmadik pontunk a *redukáltságra* vonatkozik: ha véges hosszú sorozattal dolgozunk, akkor egymás után kétszer ne szerepelhessen ugyanaz az elem (hiszen az nem egy jó véges utasítás, amelyik úgy lép egy következő állapotba, hogy nem történt állapotváltozás - ez a megfogalmazáson is érződik).
A negyedik pont a végtelen utasításra utal: ha egy utasítás futása nem fejeződik be (végtelen ciklus, stb.), akkor ezt a hozzárendelt sorozatban úgy jelzi, hogy egy adott ponttól kezdve nem történik állapotváltozás, folyton ugyan abban az állapotban ragad (pl. $s(4) =< 4, 3, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ... >$)

Egy $s \subseteq A \times A^{**}$ utasítás *hatásrelációja* az a $p(s) \subseteq A \times A$ reláció, melyre:

1. $\mathcal{D}_{p(s)} = \{a \in A | s(a) \subseteq A^*\}$
2. $p(s)(a) = \{b \in A | \exists \alpha \in s(a) : \tau(\alpha) = b\}$

ahol $\tau : A^* \rightarrow A; \tau(\alpha) ::= \alpha_{|\alpha|}$, azaz a *tau* függvény egy véges sorozathoz annak utolsó tagját rendeli.

A hatásrelációt tehát csak olyan pontokban definiáljuk, ahol a program *megáll*, azaz véges sorozatot rendel, a hozzárendelési szabály pedig az, ahová az utasítás eljut, tehát az adott sorozatok utolsó eleme.

Az *absztrakt program*ot egy $S = (s_0, \{s_1, s_2, \dots, s_n\})$ párként tudjuk megadni, ami egy párhuzamos programot takar. Az első tagja (s_0) a kezdeti utasítás, ami a program indulásakor hajtódik végre. A második tagja ($\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$) pedig *atomi* (vagyis párhuzamos futás során nem akadnak össze, szekvenciális futás eredményét adó) utasítások halmaza. Ezeket valamilyen *feltétlenül pártatlan ütemezés* szerint (kiéheztetés nélkül, azaz az egyes végrehajtások során minden utasítást végtelen sokszor véve) végtelen sokáig futtatunk. A programra pedig akkor mondjuk, hogy terminált (befejeződött), ha fixpontba jut, azaz már nem történik állapotváltozás.

Nézzünk erre egy egyszerű példát:
Legyen $S = (x := 0, \{x := 2 \cdot x, x := x + 1\})$. Ekkor az alábbi sorozatot ennek egy lehetséges kiértékelésének tekintjük:

$$\begin{array}{ccccccc} x := 0, & x := x+1, & x := 2*x, & x := 2*x, & x := x+1, & x := x+1, & \dots \\ 0, & 1, & 2, & 4, & 5, & 6, & \dots \end{array}$$

2.3. Leggyengébb előfeltétel

Érezhető, hogy a fenti definíciókkal történő számolások nagyon nehézzé fogják tenni a későbbiekben a feladatok és az azt megoldó programok közötti kapcsolat megteremtését, ezért bevezetünk egy új fogalmat, a *leggyengébb előfeltétel*t.

Legyen $s \subseteq A \times A^{**}$ utasítás, $R : A \to \mathbb{L}$ állítás. Az s utasítás R utófeltételhez tartozó *leggyengébb előfeltétele* az az $lf(s, R) : A \to \mathbb{L}$ **függvény**, melyre:

$$\lceil lf(s, R) \rceil = \{a \in \mathcal{D}_{p(s)} | p(s)(a) \subseteq \lceil R \rceil\}.$$

Az *lf* tehát egy olyan függvény, mely pontosan azokhoz a pontokhoz rendel igazat, melyből elindítva az s utasítást az biztosan megáll, és az összes ilyen állapotban az R tulajdonság teljesül. Magának a függvénynek a definícióját legtöbbször nehéz megadni, de az igazsághalmazát könnyedén kifejezhetjük. Az igazsághalmaz definícióját, a kompozíció és az őskép tulajdonságait felhasználva kapjuk, hogy:

$$\lceil lf(s, R) \rceil = \lceil R \circ p(s) \rceil.$$

Az *lf*-et tehát az utófeltételbe helyettesítés módszerével tudjuk kifejezni (ennek bizonyítása megtalálható a *tankönyv*[2] 44-ik oldalán, a 3.1-es definíciónál).

Mivel a leggyengébb előfeltételt nem csak utasításokra, hanem programokra is ki szeretnénk tudni számolni, a fenti definíciót picit általánosítani kell. Tehát legyen $S = (s_0, \{s_1, s_2, \dots, s_n\})$ program, $R : A \to \mathbb{L}$ állítás. Ekkor az S program R utófeltételhez tartozó *leggyengébb előfeltétele* az egyes utasításai által adott leggyengébb előfeltételek konjugáltja lesz:

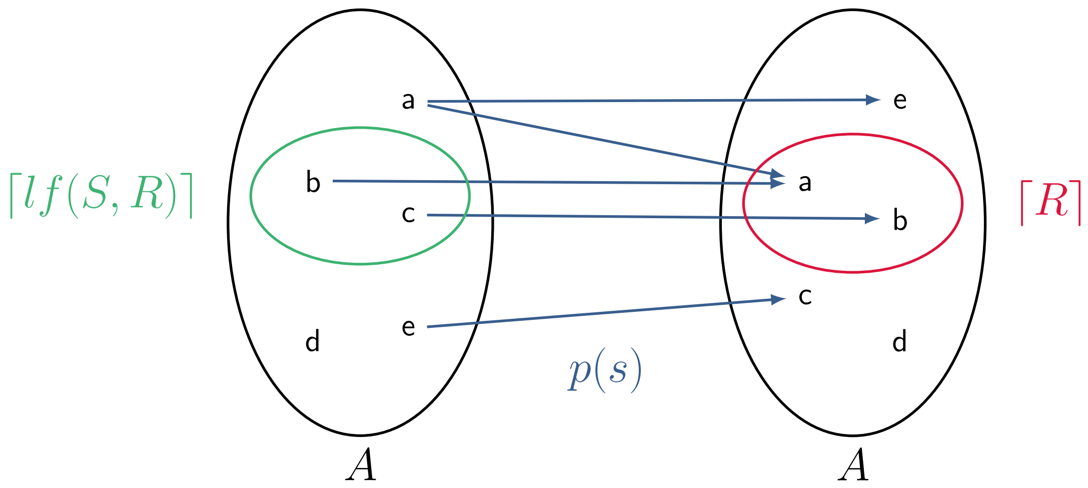
$$lf(S,R) = \bigwedge_{i=1}^{n} lf(s_i,R).$$

A későbbiekben több alaptulajdonságra is szükségünk lesz, ha az *lf*-fel akarunk számolni. Nézzük ezeket:

Legyen $S = (s_0, \{s_1, s_2, \ldots, s_n\})$ program, $Q, R : A \to \mathbb{L}$ állítások. Ekkor:

1. $lf(S, Hamis) = Hamis$ (csoda kizárásának elve),
2. Ha $Q \Rightarrow R$, akkor $lf(S,Q) \Rightarrow lf(S,R)$ (monotonitás),
3. $lf(S,Q) \vee lf(S,R) \Rightarrow lf(S, Q \vee R)$ (gyenge additivitás),
4. $lf(S,Q) \wedge lf(S,R) = lf(S, Q \wedge R)$ (multiplikativitás)

A bizonyításokat szintén a jegyzetben lehet olvasni.



2. ábra. Legyen $A = \{a,b,c,d,e\}$ halmaz és $p(s) := \{(a,a),(a,e),(b,a),(c,b),(e,c)\}$ hatásreláció, $\lceil R \rceil = \{a,b\}$. $lf(s,R)$ ekkor azokban a pontokban lesz igaz, melyben $p(s)$ értelmezve van és minden ezekhez rendelt elem R igazsághalmazában található. Végiggondolva tehát $\lceil lf(S,R) \rceil$ ekkor $= \{b,c\}$.

Kiszámítása: Az *lf* kiszámolását a már fentebb említett utófeltételbe helyettesítés módszerével tudjuk megtenni.

Az **egyszerű értékadás**ok során ez a következőt jelenti:

$$lf(x := y, R) = R^{x \leftarrow y}$$

Például az $s = (x := 3), R = (1 \le x \le 5)$ esetben:
$lf(s,R) = lf(x := 3, (1 \le x \le 5)) = R^{x \leftarrow y} = (1 \le x \le 5)^{x \leftarrow 3} = (1 \le 3 \le 5)$. Az s utasítás tehát olyan állapotokban tudjuk biztonságosan végrehajtani úgy, hogy R-be

érkezzen, melyre teljesül az, hogy $1 \leq 3 \leq 5 \equiv igaz$, azaz tetszőleges pontból indítva helyesen működő utasítást kaphatunk.

Feltételes értékadás esetén figyelembe kell venni a feltételt is, hiszen ha ez nem teljesül, abban az esetben nem kell az értékadást végrehajtanunk.

$$lf(\{x := y, \text{ha } \pi\}, R) = (\pi \rightarrow R^{x \leftarrow y}) \wedge (\neg\pi \rightarrow R^{SKIP})$$

Például az $s = (x := -x, ha\ x < 0), R = (x > 0)$ esetben:

$$\begin{aligned} lf(s, R) = lf((x := -x, ha\ x < 0), x > 0) &= (x < 0 \rightarrow (x > 0)^{x \leftarrow -x}) \wedge (x \geq 0 \rightarrow x > 0) \\ &= (x < 0 \rightarrow -x > 0) \wedge (x \geq 0 \rightarrow x > 0) \end{aligned}$$

Ekkor az $A \rightarrow B = \neg A \vee B$ logikai szabályt alkalmazva az alábbit kapjuk:

$$(x \geq 0 \vee -x > 0) \wedge (x < 0 \vee x > 0) = (x \geq 0 \vee x < 0) \wedge (x \neq 0) = (\uparrow) \wedge (x \neq 0) = (x \neq 0)$$

Vagyis az s utasítást minden $x \neq 0$ állapotban biztonságosan végre tudjuk hajtani úgy, hogy R-be érkezzen.

Szimultán értékadás során egyszerre hajtjuk végre az adott értékadásokat:

$$lf(\{x_1, ..., x_n := y_1, ..., y_n\}, R) = lf(\{\mathop{\|}_{i=1}^{n} x_i := y_i\}, R) = R^{\substack{x_1 \leftarrow y_1 \\ \cdots \\ x_n \leftarrow y_n}}$$

Például az $s = (x, y := x + 1, y - 1), R = (2|x + y)$ esetben:

$$\begin{aligned} lf(s, R) &= lf((x, y := x + 1, y - 1), (2|x + y)) \\ &= (2|x + y)^{\substack{x \leftarrow x+1 \\ y \leftarrow y-1}} \\ &= (2|(x + 1) + (y - 1)) = (2|x + y) \end{aligned}$$

Azaz az s utasítást olyan x, y állapotokban tudjuk biztonságosan végrehajtani úgy, hogy R-be érkezzen, melyre teljesül az, hogy $2|x + y$.

A **feltételes szimultán értékadás** kiszámításának módja ezek után egyértelműen megállapítható az előzőek alapján:

$$lf(\{x_1, ..., x_n := y_1, ..., y_n, \text{ha } \pi\}, R) = lf(\{\mathop{\|}_{i=1}^{n} x_i := y_i, \text{ha } \pi\}, R) =$$

$$= (\pi \rightarrow R^{\substack{x_1 \leftarrow y_1 \\ \cdots \\ x_n \leftarrow y_n}}) \wedge (\neg\pi \rightarrow R^{SKIP})$$

2.4. Feladatok

A következő példákkal a leggyengébb előfeltétel számítását tudjuk gyakorolni.

1. Legyen $S = (SKIP, \{x := x \cdot 2, ha\ 2 \nmid x,$
$$x := x + 1, ha\ x < 10\}),$$
és $R = (2|x)$. Számoljuk ki az S program R-hez tartozó leggyengébb előfeltételét.

2. Legyen $S = (m, n := 0, 0,\ \{m, n := m + 1, n - 1,$
$$n := n + 1, ha\ n < m\}).$$
Számoljuk ki az S program R-hez tartozó leggyengébb előfeltételét.

   a) Ha $R = (m = n)$.

   b) Ha $R = (n > m)$.

3. konzultáció

3.1. Gyakorlás

Először gyakoroljunk pár további *lf* számolást.

1. Legyen
$$\begin{aligned} s &= \{x := -x, \text{ha } x > 0\}, \text{ és} \\ R &= (x > 1). \\ lf(s, R) &=? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lceil lf(s, R) \rceil &= (x > 0 \to (x > 1)^{x \leftarrow -x}) \wedge (x \leq 0 \to x > 1) \\ &= (x > 0 \to -x > 1) \wedge (x \leq 0 \to x > 1) \\ &= (x \leq 0 \vee -x > 1) \wedge (x > 0 \vee x > 1) \\ &= (x \leq 0 \vee x < 1) \wedge (x > 0) \\ &= (x \leq 0) \wedge (x > 0) \equiv Hamis. \end{aligned}$$

Átgondolva mit is akartunk kiszámolni, milyen állapotból indulva teljesíthető az a követelmény, hogy $(x > 1)$, ha a programunk a pozitív számokon előjelet vált, a negatívakat (és nullát) pedig nem változtatja?
Ha pozitív bemenetet kap, akkor negatívat csinál belőle, negatívakra pedig nem csinál semmit, tehát sehogy sem tudjuk elérni, hogy tetszőleges bemenetre elérjünk a kívánt állapotba, ezért az azonosan $Hamis$ az eredmény.

2. Legyen $S = (SKIP, \{x := 0,\ \text{ha } y \neq 0,$
$$\begin{aligned} &x := x * z,\ \text{ha } z = 0\}) \\ R &= (x = 0) \\ lf(S, R) &=? \ldots \#magic \\ lf(S, R) &= (x = 0) \vee (y \neq 0 \wedge z = 0) \end{aligned}$$

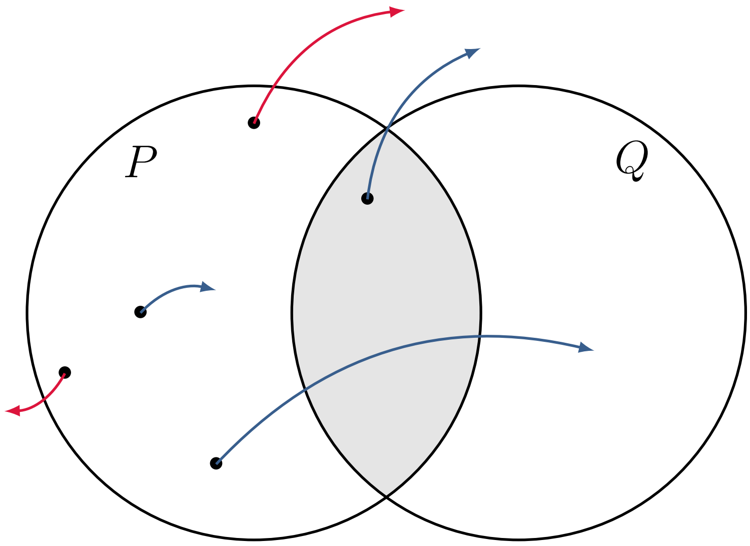
3.2. Stabilitási tulajdonság

Biztonsági tulajdonságot már néztünk a feladatok kapcsán, ám utasításokra (és programokra) is szeretnénk ilyet definiálni.

$$\text{Legyenek } P, Q : A \to \mathbb{L} \text{ állítások, és } s \subseteq A \times A^{**} \text{ utasítás.}$$

$$P \rhd_s Q ::= (P \wedge \neg Q) \Rightarrow lf(s, P \vee Q)$$

A P állapotot az utasítás ekkor *ha* elhagyja, akkor ezt csak Q-n keresztül teheti meg.



3. ábra. Nézzünk egy szemléletesebb példát a háromszög tulajdonságra. $P \rhd_s Q$ akkor és csak akkor teljesül, ha $(P \wedge \neg Q)$-ból bárhogy választunk állapotokat, az s utasítás hatására ugyanúgy $(P \wedge \neg Q)$-ban maradunk, vagy pedig Q-ba jutunk. Jó átmeneteknek számítanak a kék nyilak, viszont a piros nyilakról ez nem mondható el.

A *háromszögre* fontos néhány tulajdonságot megjegyezni, melyet a definíció alapján igazolhatunk.

- $P \rhd_s P = P \wedge \neg P \Rightarrow lf(s, P \vee P) = \downarrow \Rightarrow lf(s, P) = \uparrow \vee lf(s, P) = \uparrow$
- $P \rhd_s \neg P = P \wedge P \Rightarrow lf(s, P \vee \neg P) = P \Rightarrow lf(s, Igaz) = \uparrow$
- $Igaz \rhd_s P = Igaz \wedge \neg P \Rightarrow lf(s, Igaz \vee P) = \neg P \Rightarrow lf(s, Igaz) = \uparrow$
- $Hamis \rhd_s P = Hamis \wedge \neg P \Rightarrow lf(s, Hamis \vee P) = Hamis \Rightarrow lf(s, P) = \uparrow$
- $P \rhd_s Igaz = P \wedge Hamis \Rightarrow lf(s, P \vee Igaz) = Hamis \Rightarrow lf(s, Igaz) = \uparrow$

Fontos megjegyezni, hogy általános esetben a $P \rhd_s Hamis$ nem teljesül.
$P \rhd_s Hamis = P \wedge Igaz \Rightarrow lf(s, P \vee Hamis) = P \Rightarrow lf(s, P)$, de erről nem tudunk tetszőleges program és állítás esetén semmit garantálni.
Egy példa erre, mikor nem teljesül:

$s = (x := x+1)$ és $P = (2|x)$
$P \rhd_s Hamis = P \Rightarrow lf(s,P) = (2|x) \Rightarrow lf(x := x+1, 2|x) = (2|x) \Rightarrow (2|x)^{x \leftarrow x+1} = (2|x) \Rightarrow (2|x+1)$, ami nyilvánvaló ellentmondás, hiszen ha egy szám páros, akkor a nála eggyel nagyobb szám nem lehet szintén páros (mivel az páratlan).

Abban az esetben azonban, *ha* $P \rhd_s Hamis$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy s rendelkezik a P stabil tulajdonsággal, azaz P-ből nem tud kivezetni a program. Jelölésünk erre: $Pstabil_s$ (triviálisan stabil tulajdonság az $Igaz$, hiszen $Igaz \Rightarrow lf(s, Igaz)$ tetszőleges utasításra teljesül).

A háromszög azonban nem tranzitív, azaz $P \rhd_s Q$ és $Q \rhd_s R$-re általában **nem igaz**, hogy $P \rhd_s R$.

Feladat Számoljuk ki $P \rhd_S Q$-t, ha:

$$S = (SKIP, \{s_1 : x : = x+2,\ \text{ha } x < 50,\ \text{és}$$
$$s_2 : x : = x+1,\ \text{ha } x \geq 50\}$$
$$P = (2|x)$$
$$Q = (x \geq 50)$$

$$P \rhd_S Q = lf(S, P \vee Q)$$
$$(2|x) \wedge (x < 50) \Rightarrow lf(S, (2|x \vee x \geq 50))$$

Az lf multiplikativitását felhasználva:

$$lf(S, P \vee Q) = lf(s_1, P \vee Q) \wedge lf(s_2, P \vee Q)$$
$$s_1 : lf(x := x+2,\ \text{ha } x < 50, (2|x \vee x \geq 50)) =$$
$$(x < 50 \rightarrow (2|x \vee x \geq 50)^{x \leftarrow x+2}) \wedge$$
$$\wedge (x \geq 50 \rightarrow (2|x \vee x \geq 50))$$
$$= (x \geq 50 \vee 2|x+2 \vee x+2 \geq 50) = (x \geq 50 \vee 2|x \vee x \geq 48) = (x \geq 48 \vee 2|x)$$
$$s_2 : lf(x := x+1,\ \text{ha } x \geq 50, (2|x \vee x \geq 50)) =$$
$$(x \geq 50 \rightarrow (2|x \vee x \geq 50)^{x \leftarrow x+1}) \wedge$$
$$\wedge (x < 50 \rightarrow (2|x \vee x \geq 50))$$
$$= (x \geq 50 \rightarrow 2|(x+1) \vee x+1 \geq 50) \wedge (x < 50 \rightarrow 2|x \vee x \geq 50)$$
$$= (x < 50 \vee 2|x+1 \vee x \geq 49) \wedge (x \geq 50 \vee 2|x \vee x \geq 50)$$
$$= (\uparrow) \wedge (2|x \vee x \geq 50)$$

A két eredményt éselve: $lf(S, P \vee Q) = lf(s_1, P \vee Q) \wedge (s_2, P \vee Q)$

$$= (x \geq 48 \vee 2|x) \wedge (x \geq 50 \vee 2|x) = 2|x \vee x \geq 50$$

$P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(S, P \vee Q)$ behelyettesítve ekkor:

$(2|x \wedge x < 50) \Rightarrow (2|x \vee x \geq 50)$ pedig igaz $2|x$ miatt,

hiszen ha $2|x$ igaz a bal oldalon, akkor a jobb oldal is igaz.

Háromszög esetén szerencsére lehetőségünk van egyszerűsítések használatára, mellyel valamennyire megkönnyíthetjük a számolást.

$$
\begin{aligned}
& P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(S, P \vee Q) \\
= & P \wedge \neg Q \Rightarrow \bigwedge_{s_i \in S} \left[\left(\pi_i \to (P \vee Q)^{s_i} \right) \wedge \left(\neg\pi_i \to (P \vee Q)^{SKIP} \right) \right] \\
= & P \wedge \neg Q \Rightarrow \bigwedge_{s_i \in S} \left[\left(\pi_i \to (P \vee Q)^{s_i} \right) \wedge \left(\pi_i \vee (P \vee Q)^{SKIP} \right) \right] \\
& \text{felhasználva, hogy } A \Rightarrow (B \wedge C) = (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \\
= & \left(P \wedge \neg Q \Rightarrow \bigwedge_{s_i \in S} \left[\pi_i \to (P \vee Q)^{s_i} \right] \right) \wedge \\
& \left(P \wedge \neg Q \Rightarrow \bigwedge_{s_i \in S} \left[\pi_i \vee (P \vee Q)^{SKIP} \right] \right) \text{ (skip ág)}
\end{aligned}
$$

A skip ágat tovább tudjuk egyszerűsíteni. Ebben az esetben meggondolható, hogy ha a bal oldal hamis, akkor az implikáció igaz lesz. Ha a bal oldal igaz, akkor P értéke igaz és $\neg Q$ is teljesül, tehát Q hamis. A következtetés jobb oldalán álló nagy konjunkciót triviálisan igazzá tudjuk tenni, hiszen ha P igaz a bal oldalt, akkor minden esetben szintén igaz lesz a jobb oldalon is, és *igaz* feltétel mellé bármit ”vagyolhatunk”, az igazat ad, emellett igaz állítások *és*elve is igazat adnak, tehát a "skip" ágra biztosan igaz a feltétel. A későbbiekben ezt a ”skip ág elhagyása”-ként említjük (ez nem azt jelenti, hogy az lf-ben a skippel sosem kell foglalkozni, csupán azt, hogy *háromszög* számolása esetén a SKIP ág minden esetben igazat ad). Visszatérve az eredeti lf-hez ekkor:

$$
\begin{aligned}
= & \left(P \wedge \neg Q \Rightarrow \bigwedge_{s_i \in S} \left[\pi_i \to (P \vee Q)^{s_i} \right] \right) \wedge \uparrow \\
= & P \wedge \neg Q \Rightarrow \bigwedge_{s_i \in S} \left[\pi_i \to (P \vee Q)^{s_i} \right] \\
= & \forall s_i \in S : (P \wedge \neg Q) \Rightarrow (\pi_i \to (P \vee Q)^{s_i})
\end{aligned}
$$

A mostani formulát ”Ha igaz A, és akkor ha igaz B, teljesül -e C?” módon tudjuk értelmezni, amit szóban (és logikában is) át tudunk fogalmazni ”Ha igaz A és B, igaz -e C?” módra. Ezt fogjuk a későbbiekben *feltétel átvitelének* nevezni.

$$P \rhd_S Q = \forall s_i \in S : (P \wedge \neg Q \wedge \pi_i) \Rightarrow (P \vee Q)^{s_i}$$

Ismét kiemelnénk, hogy a *”skip+feltétel”* módszerrel való számolás csak és kizárólag a *háromszög* számolása esetén használható.

Teljesül -e a stabilitási tulajdonság az itt megadott állításokra és programra nézve? (Azaz számoljuk ki $P \rhd_S Q$-t, ha:)

$$S = (SKIP, \{s_1 : x := x+2, \text{ ha } x < 50, \text{ és}$$
$$s_2 : x := x+1, \text{ ha } x \geq 50\})$$
$$P = (2|x)$$
$$Q = (x \geq 50)$$

SKIP + feltétel miatt:

$$P \rhd_S Q = \forall s_i \in S : (P \wedge \neg Q \wedge \pi_i) \Rightarrow (P \vee Q)^{s_i}$$
$$s_1 : (2|x) \wedge (x < 50) \wedge (x < 50) \Rightarrow (2|x \vee x \geq 50)^{x \leftarrow x+2} =$$
$$(2|x \wedge x < 50) \Rightarrow (2|x \vee x \geq 48) = \uparrow$$
$$s_2 : (2|x) \wedge (x < 50) \wedge (x \geq 50) \Rightarrow (2|x \vee x \geq 50) =$$
$$\downarrow \Rightarrow (2|x \vee x \geq 50) = \uparrow$$
$$P \rhd_S Q = \uparrow \wedge \uparrow = \uparrow$$

Látszik, hogy így mennyivel egyszerűbben megkapjuk ugyan azt az eredményt, amit korábban egy oldalon keresztül kellett számolni.

A biztonság kedvéért nézzünk meg még egy példát.
Legyen $S = (SKIP, \{s_1 : x := x+1,$
$s_2 : x := x-1, \text{ ha } 2|x\}),$
valamint $P = (x = 3)$ és $Q = (x = 4)$. Számoljuk ki $P \rhd_S Q$-t! Ekkor

$$P \rhd_S Q = (P \rhd_{s_1} Q) \wedge (P \rhd_{s_2} Q)$$
$$P \rhd_{s_1} Q = (P \wedge \neg Q) \Rightarrow lf(s_1, P \vee Q)$$
$$= (x = 3 \wedge x \neq 4) \Rightarrow (x = 3 \vee x = 4)^{x \leftarrow x+1}$$
$$= (x = 3 \wedge x \neq 4) \Rightarrow (x+1 = 3 \vee x+1 = 4)$$
$$= (x = 3) \Rightarrow (x = 2 \vee x = 3)$$
Mivel $\{3\} \subseteq \{2, 3\}$:
$$= \uparrow$$
$$P \rhd_{s_2} Q = (P \wedge \neg Q) \Rightarrow lf(s_2, P \vee Q)$$
SKIP + feltétel miatt:
$$= (P \wedge \neg Q \wedge \pi_2) \Rightarrow (P \vee Q)^{s_2}$$
$$= (x = 3 \wedge x \neq 4 \wedge 2|x) \Rightarrow (x = 3 \vee x = 4)^{x \leftarrow x-1}$$
$$= (x = 3 \wedge x \neq 4 \wedge 2|x) \Rightarrow (x-1 = 3 \vee x-1 = 4)$$
$$= (x = 3 \wedge 2|x) \Rightarrow (x = 4 \vee x = 5)$$
$$= \downarrow \Rightarrow (x = 4 \vee x = 5)$$
$$= \uparrow$$
$$P \rhd_S Q = (P \rhd_{s_1} Q) \wedge (P \rhd_{s_2} Q) = \uparrow \;\wedge\; \uparrow = \uparrow$$

4. konzultáció

4.1. Biztosítja tulajdonság

A korábbiakban egy biztonsági tulajdonságot néztünk a *háromszög* definíciójában. Ez azonban nem követelte meg, hogy haladjon is a programunk, így érezhető, hogy ez még kevés lesz ahhoz, hogy egy programot jól működését jellemezhessük. Pont ezért bevezetjük az *egyenes nyíl* definícióját:

$$P \mapsto_S Q ::= P \rhd_S Q \wedge \exists s_i \in S : P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(s_i, Q)$$

Az *egyenes nyíl* tehát egy biztonsági és haladási ("biztosítja") tulajdonságot garantál egyszerre nekünk: a P állapotot csak Q-n keresztül hagyhatjuk el, viszont kell léteznie (legalább egy, de lehet több) olyan utasításnak az absztrakt programban, mely egy lépésben átvisz minket tetszőleges P-beli állapotból Q-ba.

Az egyenes nyíl teljesülését a korábbiakhoz hasonlóan definíció alapján fogjuk ellenőrözni. Először meg kell vizsgálnunk, hogy a *háromszög* tulajdonság teljesül -e rá. Amennyiben igen, akkor további ellenőrzést kíván annak a programnak a megtalálása, mely biztosítja a haladást. (Ha már a háromszög vizsgálatánál elbukik egy feltétel, akkor biztos, hogy az egyenes nyíl sem fog rá teljesülni.)

Példa:

$$S = (x := 0, \{s_1 : x := x/2, \text{ ha } 2|x, \text{ és}$$
$$s_2 : x := x + 1\})$$
$$P = (2|x)$$
$$Q = (2 \nmid x)$$

SKIP + feltétel alapján:

$$P \rhd_S Q = \forall s_i \in S : (P \wedge \neg Q \wedge \pi_i) \Rightarrow (P \vee Q)^{s_i}$$
$$s_1 : (2|x) \wedge (2|x) \wedge (2|x) \Rightarrow (2|x \vee 2 \nmid x)^{x \leftarrow x/2} =$$
$$(2|x) \Rightarrow (2|x/2 \vee 2 \nmid x/2) = \uparrow$$
$$s_2 : (2|x) \wedge (2|x) \wedge (\uparrow) \Rightarrow (2|x \vee 2 \nmid x)^{x \leftarrow x+1} =$$
$$(2|x) \Rightarrow (2|x+1 \vee 2 \nmid x+1) = \uparrow$$
$$P \rhd_S Q = \uparrow \wedge \uparrow = \uparrow$$

A háromszög tehát igaz. Meg kell azonban vizsgálni, hogy létezik -e s$_i$, amelyre a plusz feltétel teljesül: $P \wedge \neg Q \Rightarrow lf(s_i, Q)$

$$s1 : (2|x) \wedge (2|x) \Rightarrow lf(x := x/2, \text{ ha } 2|x, 2 \nmid x)$$
$$(2|x) \Rightarrow (2|x \to (2 \nmid x)^{x \leftarrow x/2}) \wedge (2 \nmid x \to (2 \nmid x))$$
$$(2|x) \Rightarrow ((2 \nmid x \vee (2 \nmid x/2)) \wedge \uparrow)$$
$$(2|x) \Rightarrow (2 \nmid x/2).$$

Erről azonban nem tudunk semmit sem mondani, hisz $x = 42$ esetén az állítás igaz,

de $x = 44$ esetben nem teljesül. s_1 tehát nem jó választás az egyenes nyílban keresett haladást biztosító programnak.
Vizsgáljuk s_2-t:

$$s_2 : (2|x) \wedge (2|x) \Rightarrow lf(x := x+1, 2 \nmid x)$$

$$(2|x) \Rightarrow (2 \nmid x)^{x \leftarrow x+1} \wedge (\downarrow\rightarrow (2 \nmid x))$$

$$(2|x) \Rightarrow (2 \nmid x+1) \wedge \uparrow)$$

$$(2|x) \Rightarrow (2 \nmid x+1).$$

Ha x páros, akkor nyilvánvalóan $x+1$ páratlan, így ez az következtetés helyes. Összegezve az eddigieket, a fenti programra tehát teljesül a $P \mapsto_S Q$ tulajdonság, ahol a definícióban szereplő s_i-nek s_2-t választjuk.

4.2. Elkerülhetetlen tulajdonság

Az *egyenes nyíl* tulajdonság egy haladási kritériumot fogalmazott meg, ám valahol túl szigorúnak tűnhet, hiszen megköveteli tetszőleges P-beli állapotból egy lépésben történő Q-ba érkezést. Ennek feloldására egy másik tulajdonságot vezetünk be, melyet *görbe nyíl*ként fogunk említeni.
Ennek definíciója az egyenes nyíl **tranzitív, diszjunktív lezárt**jaként áll elő:

$$P \hookrightarrow_S Q \equiv (P \mapsto_S Q)^{TDL}, \text{ azaz:}$$

1)Ha $P \mapsto_S Q$, akkor $P \hookrightarrow_S Q$.

2)Ha $P \hookrightarrow_S Q, Q \hookrightarrow_S R$, akkor $P \hookrightarrow_S R$

3)Ha $P_1 \hookrightarrow_S Q, P_2 \hookrightarrow_S Q$, akkor $P_1 \vee P_2 \hookrightarrow_S Q$

A görbenyíl definíciójának a legszűkebb ilyen relációt tekintjük, melyre az előző 3 pont teljesül.

Önmagában egyenes és görbe nyilat ritkán számolunk, a specifikációnak megfelelésnél lesz szerepük. Ehhez azonban szükség lesz még két további definícióra.

4.3. Invariáns tulajdonság

Invariánsok segítségével megszoríthatjuk a programjainkat, hogy csak bizonyos, mindig teljesülő állítások mellett vizsgáljuk azok jól működését.

Legyenek $P, Q : A \to \mathbb{L}$ állítások és $S : (s_0; \{s_1, \ldots, s_n\})$ program

$$P \in inv_S(Q) ::= Q \Rightarrow lf(s_0, P) \text{ és } P \rhd_S Hamis$$

Az *invariáns* tehát egy olyan tulajdonság, melyet egy kezdeti állapotra vonatkozó állítás (Q) mellett értelmezünk, és két dolgot követel meg:

-A kezdeti értékadás tegye igazzá ($Q \Rightarrow lf(s_0, P)$)
-A program futása során mindig teljesüljön ($P \rhd_S Hamis$, azaz $Pstabil_S$)

Fontos megjegyezni, hogy a sima stabil tulajdonságnál ez szigorúbb, mivel egy tulajdonság úgy is lehet stabil, hogy a program sosem lép olyan állapotba, mely azt teljesítené, így elrontani se tudja - gondoljunk az $S := (x := 0, \{SKIP\})$ és $P = (x = 2)$ párra. Ez a P nyilvánvalóan stabil, hiszen a $SKIP$ program nem fogja elrontani, ám a program nem tud olyan állapotba érni, ahol egyáltalán teljesülne az állítás.

Az *invariáns*t azonban a kezdeti értékadás is igazzá kell, hogy tegye.

Feladat Legyen $S = (x := 0, x := x + 1\})$, valamint $P = (x \geq 0)$.
Igaz -e, hogy: $P \in inv_S(Igaz)$?

Két állítást kell ellenőrizni:

1. $Igaz \Rightarrow lf(s_0, P) = Igaz \Rightarrow (x \geq 0)^{x \leftarrow 0} = Igaz \Rightarrow (0 \geq 0) = \uparrow$
2. $P \Rightarrow lf(s_1, P) = (x \geq 0) \Rightarrow lf(x := x + 1, x \geq 0) = (x \geq 0) \Rightarrow (x + 1 \geq 0) = \uparrow$

Mivel a definíció mind a két pontja teljesül rá, így P állítás invariáns a megadott programban az $Igaz$ állításra nézve.

4.4. Fixpont

Bár a modellünkben a programjaink *végtelen sokáig* futnak, előfordulhat, hogy állapotváltozás már nem következik be. *Fixpont* alatt tehát olyan állapottér-beli pontok halmazát értjük, melyből a program már nem mozdul el.

$$\varphi_S = \bigwedge_{s_i \in S} \left(\pi_i \to x_i = y_i\right), \text{ ahol } s_i = \left(x_i := y_i, \text{ ha } \pi_i\right)$$

Egy utasítás tehát akkor van *fixpont*ban, ha a feltétele nem teljesül, vagy ha az értékadás már nem változtat a változó értékén. Az absztrakt programunk pedig akkor, ha minden egyes utasítása fixpontban van.

Példa Legyen: $S = (SKIP, \{s_1 : x := |x|, \text{ és}$

$$s_2 : x := x - 1, \text{ ha } x > 10\})$$

$$\text{Ekkor: } \varphi_S = (x = |x|) \wedge (x > 10 \to x = x - 1)$$

$$\varphi_S = (x = |x|) \wedge (x \leq 10 \vee x = x - 1)$$

$$\varphi_S = (x \geq 0) \wedge (x \leq 10)$$

A program fixpontja tehát a $\{0, 1, \ldots, 10\}$ halmaz.

4.5. Specifikáció

Az étkező filozófusok példájánál már fogalmaztunk meg specifikációs feltételeket, mellyel a *feladat*ot próbáltuk matematikai relációkkal megfogalmazni.

Ahhoz azonban, hogy program és feladat megoldási kapcsolatát tudjuk vizsgálni, szükségünk lesz a kettő közötti megfeleltetésre az ellenőrzéshez.

Feltehető, hogy: $\exists K \in inv_S(\bigwedge_{Q \in INIT_h} Q)$ (az $Igaz$ minden esetben invariáns)

Specifikáció	Ellenőrzés
$Q \in INIT_h$	——
$P \in inv_h$	$P \wedge K \in inv_S(Q)$
$P \rhd_h R$	$P \wedge K \rhd_S R \wedge K$
$P \mapsto_h R$	$P \wedge K \mapsto_S R \wedge K$
$P \hookrightarrow_h R$	$P \wedge K \hookrightarrow_S R \wedge K$
$R \in FP_h$(azaz: $FP_h \Rightarrow R$)	$\varphi_S \wedge K \Rightarrow R$
$Q \in TERM_h$(azaz: $Q \hookrightarrow_h FP_h$)	$sp(s_0, Q) \wedge K \hookrightarrow_S \varphi_S$

Jól látszik, hogy a kezdeti feltételt nem ellenőrizzük. Az $INIT_h$ feltételek ugyanis azt írják le, hogy milyen állapotból indul a programunk.

Az invariáns állítással való metszés bár elsőre úgy tűnik, hogy nehezíti a dolgunkat, ám egy invariáns *megkönnyíti* valójában nekünk a megfelelés vizsgálatát. Mivel egy program összes elérhető állapotát tartalmaznia kell az invariánsnak (definíció miatt) és ezt az állapotot nem hagyhatja el a program, így a $(P \wedge K)$ állapotoknak (általában) sokkal kevesebb eleme van, mintha önmagában P-t vizsgálnánk, azaz sokkal kevesebb helyen kell belátni, hogy eleget tesznek-e a definíciónak.

Érdemes lehet még megemlíteni a *fixpont-finomítás*i tételt:

Ha S megfelel a $P \in inv_h$ valamint a $Q \in FP_h$ specifikációs feltételeknek, és $P \wedge Q \Rightarrow R$, akkor megfelel az $FP_h \Rightarrow R$ feltételnek is.

Mit is mond ez? Ha van egy invariáns tulajdonságunk, ami végig fent áll a program futása során, és van olyan fixpontja a programunknak, mely teljesíti a*fixpont*-feltételt, és a két halmaz metszete együtt része R-nek, akkor R is fixpont. (Sokszor ezt a tételt fordítva alkalmazzuk: Egy "nehezebben" számolható fixpontot felbontunk egy invariáns és egy másik fixpont-feltételre, melyek együtt már kiadják az eredeti fixpontot.)

5. konzultáció

Szükségünk lesz még néhány nem alkalmazott, de a későbbiekben fontos jelölés megismerésére. Az állapotterünk eddig szinte minden esetben egyetlen x változót tartalmazott, azonban ezek nagyon speciális eseteket fednek le, egy absztrakt program bőven több, mint egy változót szokott használni.

$V = vektor([1..n], \mathbb{N})$ jelölje azokat a vektorokat, melyet a programozási ismereteink alapján tömbökként képzelhetünk el. Ezeket a már megszokott módon *indexelhetjük*, melyet 1-től kezdünk, valamint az utolsó megengedett index n. A vektornál fel van tüntetve a típusérték-halmaz, azaz hogy milyen elemeket tartalmaz, illetve a mérete is. Egy valós számokat tartalmazó, 6 hosszú vektort ez alapján $V = vektor([1..6], \mathbb{R})$ módon jelölnénk. Lehetőségünk van tetszőleges típus-paraméterezésű vektort definiálni, ám ha nem egyértelmű, milyen típus-műveletek értelmezettek ezeken az elemeken, akkor azokat mindenképp fel kell tüntetni.

Az absztrakt program megadásakor előfordul, hogy pontosan ugyan annyi utasításunk van, mint ahány dimenziójú az állapottérben található vektor, és az összes ilyen utasítás pont a sorszámának megfelelő komponensét módosítaná az vektornak. Ahhoz, hogy ne kelljen mind az n utasítást felsorolni, egy egyedi jelölést fogunk a "vessző" helyett alkalmazni:
Az $S = (s_0, \{\underset{i=1}{\overset{n}{\square}} s_i = v[i] := 0\})$ ekkor azt a programot jelöli, ahol az utasításhalmaz a következő:

$$
\begin{aligned}
\{&s_1 = v[1] := 0,\\
&s_2 = v[2] := 0,\\
&\quad \ldots,\\
&s_n = v[n] := 0\}
\end{aligned}
$$

A "*doboznak*" tehát nincs különleges szerepe, nem jelent semmi olyat, hogy itt az összes utasítás egyszerre hirtelen végbe megy, vagy meghatározott sorrendben futnak le, csupán egyszerűsíti a jelölésünket.
A vektor indexelésére a $v[i]$ formát, vagy a rövidebb, v_i jelölést egyaránt használhatjuk.

Be kell vezetnünk még egy függvényt, hogy a későbbi számításainkat megkönnyítsük.
$\chi : \mathbb{L} \to \{0, 1\}$
$\chi(hamis) = 0$
$\chi(igaz) = 1$

Jól látszik, hogy ez a függvény (*khi*) csupán egy megfeleltetés a $\{hamis, igaz\}$ és a $\{0, 1\}$ halmazok között (ahogy pl. a `C, C++` nyelvekben az implicit típus-konverzió történik), de a formális rendszerünkben szükségünk van egy ilyen függvényre, mely ezt ”elvégzi”, hiszen feltételes szummáknál nagyban megkönnyíti a dolgunkat.

Feladat Tekintsük az alábbi **A** állapotteret, **B** paraméterteret, és a rajta értelmezett **S** programot:

$$\mathbf{A} = \underset{x}{V} \times \underset{p}{\mathbb{N}_0} \qquad \text{ahol V} = vektor([1..n], \mathbb{N}_0)$$

$$S = \Big(p := 1, \{ \underset{i=1}{\overset{n}{\Box}} x_i,\ p := 1,\ p * x_i\ \}\Big)$$

Teljesülnek-e az alábbi tulajdonságok?

a) legyen $k \in [1..n]$ tetszőleges: $(x_k \neq 1) \mapsto_S (x_k = 1)$

b) $\varphi_S \Rightarrow \Big((\forall i \in [1..n] : x_i = 1) \wedge (p > 0)\Big)$

c) $\varphi_S \Rightarrow \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \chi(x_k = 42) = 0\Big)$

a)

$(x_k \neq 1) \mapsto_S (x_k = 1) =$

$(x_k \neq 1) \rhd_S (x_k = 1) \wedge \exists s_i \in S : (x_k \neq 1) \wedge (x_k \neq 1) \Rightarrow lf(s_i, (x = 1)) =$

Külön kell vizsgálnunk, ha $k \neq i$ és $k = i$:

$k \neq i$, azaz a vektor elemet nem módosítjuk:

$(x_k \neq 1) \Rightarrow ((x_k \neq 1) \vee (x_k = 1))^{(x_k \text{ változatlan})} = (x_k \neq 1) \Rightarrow \uparrow = \uparrow$

$k = i$, azaz pont azt a vektor elemet módosítjuk: (SKIP+feltétel):

$(x_k \neq 1) \wedge (x_k \neq 1) \wedge \uparrow \Rightarrow ((x_k \neq 1) \vee (x_k = 1))^{x_k \leftarrow 1} =$

$(x_k \neq 1) \Rightarrow (1 = 1) \vee (1 \neq 1) = \uparrow$

$\exists s_i \in S$-ben legyen (az egyenesnyíl defjében szereplő) $s_i := s_k$

$(x_k \neq 1) \Rightarrow lf\Big((x_k,\ p := 1,\ p * x_k), (x_k = 1)\Big) =$

$(x_k \neq 1) \Rightarrow (x_k = 1)^{x_k \leftarrow 1} =$

$(x_k \neq 1) \Rightarrow (1 = 1) = \uparrow$

$(x_k \neq 1) \mapsto_S (x_k = 1)$ tehát teljesül.

b)

$$\varphi_S = \bigwedge_{s_i \in S} \big(\pi_i \to x_i = y_i\big), \text{ ahol } s_i = (x_i := y_i, \text{ ha } \pi_i)$$

$$\varphi_S = \uparrow \to x_i = 1 \wedge p = p * x_i (\forall i \in [1..n])$$

$$\varphi_S = (x_i = 1) \wedge (p = p * x_i) \qquad (\forall i \in [1..n])$$

$$\varphi_S = (x_i = 1) \qquad (\forall i \in [1..n])$$

Ez a programunk fixpontja. Nézzük meg, mit kér a feladat?

$$\varphi_S \Rightarrow R = \varphi_S \Rightarrow \big((\forall i \in [1..n] : x_i = 1) \wedge (p > 0)\big) =$$
$$\forall i \in [1..n] : (x_i = 1) \Rightarrow \big((\forall i \in [1..n] : x_i = 1) \wedge (p > 0)\big)$$

Ez azonban nem teljesül. A bal oldalon lévő állítás (a vektor minden eleme 1) semmit nem mond nekünk p értékéről. Gondoljunk bele, ha a vektorban előfordul a 0, mint elem. Ebben az esetben a program futása során a p értékét egyszer 0-val fogja szorozni, így a fixpontban a p értéke is 0 lesz.

c) A fixpontot az előző részfeladatban már kiszámoltuk, így azt most nem kell újra megtenni.

$$\varphi_S \Rightarrow R = \varphi_S \Rightarrow \Big(\sum_{k=1}^{n} \chi(x_k = 42) = 0\Big) =$$
$$\forall i \in [1..n] : (x_i = 1) \Rightarrow \Big(\sum_{k=1}^{n} \chi(x_k = 42) = 0\Big)$$

A kérdés tehát az, hogy ha a vektor minden eleme 1, akkor a $k \in [1..n]$ intervallumon összegzett a $\chi(x_k = 42)$ függvény értéke vajon 0-e. Ez viszont igaz, mivel a χ definíció szerint csak igaz értékekhez rendel 1-et, a bal oldal alapján viszont $\forall k$ értékre a χ függvény paramétere hamis (ha $x_k = 1$, akkor nem lehet 42), azaz eredménye tetszőleges helyen 0, így a vektor minden elemére véve, és ezeket összegezve is 0.

Az a) feladatrészben fontos megjegyezni, hogy a kérdés egy konkrét (tetszőleges) k értékre kérdez rá, míg a programunkban i csak egy futóindex az összes program könnyebb jelölésére. Külön kell tehát kezelni az $i = k$ és az $i \neq k$ eseteket, mivel más történik, ha az adott értéket pont módosítjuk és más, ha nem. (Ugyanis ha nem módosul, akkor nincs állapotváltozás, de ha igen, akkor kérdés, hogy jó irányba változik-e.)

Házi

$$V = vektor([1..n], \mathbb{N}^+)$$

$$\mathbf{A} = \underset{v}{V}$$

$$\mathbf{B} = \underset{v'}{V}$$

$$S = (SKIP, \{\mathop{\Box}_{i=1}^{n} v_i := 2 * v_i,\ \text{ha } 2 \nmid v_i\})$$

Teljesülnek-e az alábbi tulajdonságok?

- $\varphi_S \Rightarrow (\forall i \in [1..n] : 2|v_i)$
- $\varphi_S \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \chi(2 \nmid v_k) = 0$
- $(2|v_j)$ $stabil_S$ (tetszőleges $j \in [1..n]$-re)
- legyen $j \in [1..n]$ tetszőleges: $\big((2 \nmid v_j) \wedge (t = \sum_{k=1}^{n} v_k)\big) \mapsto_S (t < \sum_{k=1}^{n} v_k)$

6. Megoldások

1.2 - Étkező filozófusok

- $FP \Rightarrow (\forall i : \neg f(i).e)$
- $f(i).o \rhd \bot$

1.3 - Moziterem

- $n(i).a \hookrightarrow n(i).f$
- $n(i).t \hookrightarrow n(i).f$
- $FP \Rightarrow \forall i : n(i).h$
- $n(i).a \rhd (n(i).j \vee n(i).b)$
- $n(i).f \mapsto n(i).h$
- $(\forall i : n(i).f \Rightarrow n(i).t) \in inv$
- $n(i).h \rhd \bot$

2.4 - Feladatok

1. Ahogy korábban láttuk 2.4 bekezdésben, egy program leggyengébb előfeltétele az utasításai által adott leggyengébb előfeltételek konjugáltja. Az egyszerűség kedvéért nevezzük el az $x := x \cdot 2, ha\ 2 \nmid x$ utasítást s_1-nek, az $x := x + 1, ha\ x < 10$ utasítást

pedig s_2-nek. Ekkor

$$
\begin{aligned}
lf(s_1, R) &= lf(x := x \cdot 2, ha\ 2 \nmid x;\ (2|x)) \\
&= (2 \nmid x \to (2|x)^{x \leftarrow x \cdot 2}) \land (2|x \to 2|x) \\
&= (2 \nmid x \to 2|x \cdot 2) \land (2|x \to 2|x) \\
&\text{Alkalmazva a } A \to B = \neg A \lor B \text{ szabályt a következőt kapjuk:} \\
&= (2|x \lor 2|x \cdot 2) \land (2 \nmid x \lor 2|x) \\
&\text{Mivel } A \lor \neg A = \uparrow\text{, valamint egy szám kétszeresét véve osztható lesz} \\
&\text{kettővel:} \\
&= (2|x \lor \uparrow) \land (\uparrow) \\
&= (\uparrow) \land (\uparrow) \\
&= \uparrow \\
lf(s_2, R) &= lf(x := x + 1, ha\ x < 10;\ (2|x)) \\
&= (x < 10 \to (2|x)^{x \leftarrow x+1}) \land (x \geq 10 \to 2|x) \\
&= (x < 10 \to 2|x + 1) \land (x \geq 10 \to 2|x) \\
&= (x \geq 10 \lor 2|x + 1) \land (x < 10 \lor 2|x) \\
&\text{Picit tovább alakítva a pedig a következő kifejezést kapjuk:} \\
&= (x \geq 10 \lor 2|x + 1) \land (x < 10 \lor 2|x) \\
lf(S, R) &= lf(s_1, R) \land lf(s_2, R) \\
&= (\uparrow) \land ((x \geq 10 \lor 2|x + 1) \land (x < 10 \lor 2|x)) \\
&\text{Mivel } \uparrow \land\ A = A: \\
&= (x \geq 10 \lor 2|x + 1) \land (x < 10 \lor 2|x)
\end{aligned}
$$

2. Hasonlóan az előző feladathoz, nevezzük el $m, n := m+1, n-1$ és $n := n+1, ha\ n < m$ utasításokat rendre s_1-nek és s_2-nek.

a) $R = (m = n)$

$$\begin{aligned}
lf(s_1, R) &= lf(m, n := m+1, n-1;\ (m = n)) \\
&= (m = n)^{m \leftarrow m+1}_{n \leftarrow n-1} \\
&= (m + 1 = n - 1) \\
&= (m = n - 2) \\
lf(s_2, R) &= lf(n := n+1, ha\ n < m;\ (m = n)) \\
&= (n < m \rightarrow (m = n)^{m \leftarrow m+1}_{n \leftarrow n-1}) \wedge (n \geq m \rightarrow m = n) \\
&= (n < m \rightarrow m + 1 = n - 1) \wedge (n \geq m \rightarrow m = n) \\
&= (n \geq m \vee m + 1 = n - 1) \wedge (n < m \vee m = n) \\
&= (n \geq m \vee m = n - 2) \wedge (n \leq m) \\
&\text{Alkalmazva a } (A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \text{ szabályt:} \\
&= (n \geq m \wedge n \leq m) \vee (m = n - 2 \wedge n \leq m) \\
&= (n = m) \vee \downarrow \\
&\text{Mivel } A \vee \downarrow = A: \\
&= (n = m) \\
lf(S, R) &= lf(s_1, R) \wedge lf(s_2, R) \\
&= (m = n - 2) \wedge (n = m) \\
&= \downarrow
\end{aligned}$$

b) $R = (m < n)$

$$\begin{aligned}
lf(s_1, R) &= lf(m, n := m+1, n-1;\ (m < n)) \\
&= (m < n)^{m \leftarrow m+1}_{n \leftarrow n-1} \\
&= (m+1 < n-1) \\
&= (m+2 < n) \\
lf(s_2, R) &= lf(n := n+1, ha\ n < m;\ (m < n)) \\
&= (n < m \rightarrow (m < n)^{m \leftarrow m+1}_{n \leftarrow n-1}) \wedge (n \geq m \rightarrow m < n) \\
&= (n < m \rightarrow m+1 < n-1) \wedge (n \geq m \rightarrow m < n) \\
&= (n \geq m \vee m+1 < n-1) \wedge (n < m \vee m < n) \\
&= (n \geq m \vee m+2 < n) \wedge (n \neq m) \\
&= (n \geq m) \wedge (n \neq m) \\
&= (n > m) \\
lf(S, R) &= lf(s_1, R) \wedge lf(s_2, R) \\
&= (m+2 < n) \wedge (n > m) \\
&= (m+2 < n) \wedge (m < n) \\
&= (m+2 < n)
\end{aligned}$$

Hivatkozások

[1] dr. Horváth Zoltán: Párhuzamos és elosztott programozás (http://people.inf.elte.hu/hz/parh/jegyzet.ps)

[2] Fóthi Ákos: Bevezetés a programozáshoz (http://bzsr.web.elte.hu/progmod2/konyv.pdf)