Eötvös Loránd Tudományegyetem

Informatikai Kar

Programozási Nyelvek és Fordítóprogramok Tanszék

Osztott rendszerek szintézise

IPM-08sztORSZE

Konzultációs segédanyag

Kopácsi László, Szabó Miklós

Utolsó módosítás: 2018. február 22.

Tartalomjegyzék

1. konzultáció

1.1. Áttekintés

Az előadás során több, temporális logikai relációval találkoztunk, nézzük ezeket át informálisan, kezdve a biztonsági tulajdonságokkal.

- Az első, melyet "háromszög"-ként említünk ($\rhd$), bizonyos állapot-átmeneteket megenged, másokat pedig megtilt. A ($P \rhd Q$) azt jelenti, hogy a P állapotot **ha** elhagyjuk, akkor ezt csak a Q-n keresztül tehetjük meg. A háromszög azonban nem tesz semmiféle kikötést arról, hogy a P-t el kell hagynunk, csupán biztosít minket arról, hogy ha ez mégis megtörténik, akkor milyen irányba (nem) mozdulhatunk.
- Másik biztonsági tulajdonság az *invariáns*. Ha egy K állítás invariáns, akkor ennek minden állapot-átmenet előtt és után teljesülnie kell.
- A harmadik említett kikötés a *fixpont*. Ezzel leírhatjuk, hogy ha egy rendszerben már nem figyelhetünk meg további állapot-átmeneteket, akkor milyen tulajdonságoknak kell teljesülnie. ($FP \Rightarrow R$) estén például egy R-el jelölt állítás igaz, amennyiben fixpontba jutottunk. Fixpontba azonban nem csak a kívánt befejezési állapot tartozhat, ha holtpont helyzet alakul ki, azt is tekinthetjük fixpontnak.

Természetesen nem csak biztonsági tulajdonságokra van szükségünk - azaz mit (ne) csinálhasson a rendszer -, hanem haladásira is (azért csináljon valamit).

- Az "egyenes nyíl" ($\mapsto$) néven nevezett reláció egy szigorú kikötés arra vonatkozóan, hogy egy állapotból milyen másik helyzetbe **kell** lépnünk. Míg $\rhd$ esetén csupán azt mondtuk, hogy *ha* elhagyunk egy állapotot, akkor azt milyen irányba tegyük, a ($P \mapsto Q$) azt mondja, hogy a P állapotból a Q állapotba kell, hogy kerüljünk (véges időn belül).
- Ennél megengedőbb a "görbe nyíl"-ként ($\hookrightarrow$) ismert reláció. Ebben az esetben a ($A \hookrightarrow B$) feltétel csupán annyit mond, hogy az A állapotot előbb-utóbb a B állapot fogja követni (azaz A-ból elkerülhetetlenül B-be fogunk érkezni), de itt nincs semmilyen megkötés arra, hogy a két állapot egymás után következzen be. Legális állapot-átmenet sorozat az ($A \hookrightarrow B$)-ra az $< A, G, F, D, F, E, C, D, B >$ is.

1.2. Étkező filozófusok

Tekintsük az előadáson is ismertetett *étkező filozófusok* feladatot (jegyzet[1] 1.1). Próbáljuk meg kiegészíteni a feltételeket további megkötések formalizálásával:

- Ha a rendszer nyugalmi állapotban van, akkor egy filozófus sem eszik.
- Mindegyik filozófusra igaz, hogy ha hazament, akkor utána már nem kerülhet más állapotba.

1.3. Moziterem

A következő példában egy mozira vonatkozó feladatot fogunk ismertetni, ahol a nézők tevékenységére szeretnénk megkötéseket tenni. A jelölést megkönnyítendő vezessük be az alábbiakat: $n(i)$ jelölje az i-ik nézőt. A moziba látogatók állapotait az alábbiak alapján jelöljük:

a) megérkezik a moziba - a

b) jegyet vesz - j

c) üdítőt és nasit vásárol - b

d) érvényes jeggyel rendelkezik - t

e) filmet néz - f

f) hazamegy - h

Próbáljuk formalizálni az alábbi feltételeket:

- A moziba érkező néző filmet fog nézni.
- Ha valaki érvényes jeggyel rendelkezik, akkor megnézi a filmet.
- Ha a moziban nincs mozgás, akkor minden néző már otthon van.
- A moziba érkező néző jegyet vásárol, vagy a büfébe megy.
- A film után a néző hazamegy.
- Senki nem nézhet filmet úgy, hogy nincs érvényes jegye. (Tipp: próbáljunk invariánst megfogalmazni.)
- Ha valaki hazament, akkor már nem csinál semmit a moziban.

2. konzultáció

2.1. Áttekintés

Ahhoz, hogy a későbbiekben biztos módon számolhassunk programokkal , elkerülhetetlen a számunkra szükséges (alap)fogalmakat tisztázni a halmazelmélet és a relációk témakörében.

Legyenek A és B tetszőleges halmazok. A és B *direkt-*, vagy *Descartes*-szorzatán azt a halmazt értjük, melyben olyan párok találhatóak, melynek első eleme A-, második eleme pedig B-beli.

$$A \times B ::= \{(a, b) | a \in A \text{ és } b \in B\}$$

Jelölje $r \subseteq A \times B$ azt a bináris relációt, mely A elemeihez rendel értékeket a B halmazból (A és B tetszőleges halmazok). A reláció elemeit $(a, b) \in r$ módon fogjuk jelölni.

$$\text{Az } r \text{ reláció értelmezési tartománya: } D_r = \{a \in A | \exists b \in B : (a, b) \in r\} \subseteq A$$

$$\text{Az } r \text{ reláció értékkészlete: } R_r = \{b \in B | \exists a \in A : (a, b) \in r\} \subseteq B$$

$$r(a) \text{ jelölje azt a halmazt, melynek elemei: } \{b \in B | (a, b) \in r\}$$

Világos, hogy az értelmezési tartományban olyan elemek vannak, amikhez rendel valamit r, míg az értékkészletben olyanokat találhatunk, amik valamilyen elemhez hozzá lettek rendelve. Egy elem képe a hozzá rendelt elemek halmazából áll elő.

Egy g relációt *parciális függvény*nek (vagy determinisztikus relációnak) nevezhetünk, amennyiben az alábbi teljesül:

$$\forall a \in A : |g(a)| \leq 1,$$

azaz minden elemhez *legfeljebb* egy másikat társítunk. Jelölésünk ekkor: $g \in A \to B$. Ha minden elemhez pontosan egy értéket rendelünk, akkor az f reláció függvény, azaz:

$$\forall a \in A : |f(a)| = 1.$$

Jelölésünk ekkor: $f : A \to B$. Ebben az esetben általában $f(a)$ nem az egy elemű halmazt, hanem annak képét jelenti.

Ahhoz, hogy állításokat fogalmazhassunk meg a későbbiekben, szükségünk lesz logikai relációkra is.

$$\text{A } h \subseteq A \times \mathbb{L} \text{ logikai relációnak nevezzük, ahol } \mathbb{L} ::= \{igaz, hamis\}.$$

Ha h függvény, akkor *logikai függvény*nek nevezzük.

Egy reláció inverzét az alábbi módon definiálhatjuk:

$$R^{(-1)} ::= \{(b, a) \in B \times A | (a, b) \in R\}$$

A továbbiakban szükségünk lesz egy reláció adott halmazra vonatkozó inverz- és őskép definíciójára.
A $H \subseteq B$ halmaz R reláció szerinti *inverz*képe:

$$R^{(-1)}(H) ::= \{a \in A | R(a) \cap H \neq \varnothing\}$$

A $H \subseteq B$ halmaz R reláció szerinti *ős*képe:

$$R^{-1}(H) ::= \{a \in A | R(a) \subseteq H\}$$

Meggondolva látható, hogy az *inverzkép* megengedőbb, hisz csak annyit kér, hogy egy adott elemhez *létezzen* H-beli elem az R hozzárendelésben, az *őskép* viszont megköveteli, hogy *minden* ilyen elem a H halmazban legyen.

Legyen $R \subseteq A \times \mathbb{L}$ logikai reláció, R igazsághalmaza ekkor:

$$\lceil R \rceil ::= R^{-1}(\{igaz\}) \text{ azaz: } \lceil R \rceil = \{a \in D_R | R(a) \subseteq \{igaz\}\}$$

Az igazsághalmazt tehát az $\{igaz\}$ halmazra vett őskép szerint definiáljuk.
Ha inverzképet számolunk, akkor juthatunk a *gyenge igazsághalmaz* fogalmához:

$$\lfloor R \rfloor ::= R^{(-1)}(\{igaz\}) \text{ azaz: } \lfloor R \rfloor = \{a \in D_R | R(a) \cap \{igaz\} \neq \varnothing\}$$

A későbbiekben nagyban megkönnyíti a dolgunkat, ha bevezetjük az *azonosan igaz*, és az *azonosan hamis* logikai függvényeket.

$$Igaz : A \to \mathbb{L} : \forall a \in A : Igaz(a) = \{igaz\}$$

$$Hamis : A \to \mathbb{L} : \forall a \in A : Hamis(a) = \{hamis\}$$

Könnyű meggondolni, hogy ekkor $\lceil Igaz \rceil = A$ és $\lceil Hamis \rceil = \varnothing$.
Az igazsághalmazzal kapcsolatban fontos megemlíteni néhány tulajdonságot, melyeket a későbbiekben kihasználunk.

Legyenek P, $Q \subseteq A \times \mathbb{L}$, ekkor:

- $\lceil P \wedge Q \rceil = \lceil P \rceil \cap \lceil Q \rceil$
- $\lceil P \vee Q \rceil = \lceil P \rceil \cup \lceil Q \rceil$
- $\lceil \neg P \rceil = A \setminus \lceil P \rceil$

- $\lceil P \Rightarrow Q \rceil = \lceil \neg P \vee Q \rceil = (A \setminus P) \cup \lceil Q \rceil$
- $P \Rightarrow Q = \lceil P \rceil \subseteq \lceil Q \rceil$

  Egyszerűbben megfogalmazhatóak állítások, ha tudjuk, hogy $A \Rightarrow B$. Ekkor ugyanis:

- $A \vee B = B$
- $A \wedge B = A$

Nézzünk erre egy példát, legyenek A, $B : \mathbb{N} \times \mathbb{L}$ úgy, hogy:
$\lceil A \rceil :=${10-nél nagyobb szám} és
$\lceil B \rceil :=$ {pozitív szám}.
Világos, hogy $A \Rightarrow B$, hiszen ha egy egész szám 10-nél nagyobb, akkor pozitív. Az $A \vee B$ állítást úgy fogalmazhatjuk meg, hogy azokat az egész számokat keressük, melyek 10-nél nagyobbak, **vagy** pozitívak. Érződik, hogy a *vagy* kapcsolat miatt a gyengébb feltétellel is megelégszünk, így a bővebb halmaz, azaz a pozitív számok halmazát kapjuk ($= B$). Ha azonban a 10-nél nagyobb **és** pozitív számokra vagyunk kíváncsiak, akkor a szigorítás miatt a szűkebb halmazt kapjuk, tehát a 10-nél nagyobb számokat kell vizsgálnunk ($= A$).

3. Megoldások

1.2 - Étkező filozófusok

- $FP \Rightarrow (\forall i : \neg f(i).e)$
- $f(i).o \rhd \bot$

1.3 - Moziterem

- $n(i).a \hookrightarrow n(i).f$
- $n(i).t \hookrightarrow n(i).f$
- $FP \Rightarrow \forall i : n(i).h$
- $n(i).a \rhd (n(i).j \vee n(i).b)$
- $n(i).f \mapsto n(i).h$
- $(\forall i : n(i).f \Rightarrow n(i).t) \in inv$
- $n(i).h \rhd \bot$

Hivatkozások

[1] dr. Horváth Zoltán: Párhuzamos és elosztott programozás (http://people.inf.elte.hu/hz/parh/jegyzet.ps)