Continuidade

Uma função $f(x)$ é contínua em um ponto a se:

1. $f(a)$ estiver definido.

2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existir.

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Duas funções f(x) e g(x) serem contínuas implica que

1. $(f + g)(x)$ é contínua

2. $(f - g)(x)$ é contínua

3. $(f \bullet g)(x)$ é contínua

4. $(f/g)(x)$ é contínua se $g(x) \neq 0$

*Se $f(x)$ é contínua, então $f^{-1}(x)$ também é contínua

Diferenciabilidade

Uma função $f(x)$ é derivável/diferenciável em um ponto a se:

1. $f(x)$ for contínua em a.
2. O limite da inclinação da tangente de a existir, ou seja, se a derivada da esquerda for igual a da direita.

i.e. $f'(a^-) = f'(a^+)$

Cálculo de limites

- **Por substituição:** quando não houverem indeterminações ou problemas de domínio, podemos fazer a substituição direta.

e.g. $\lim_{x \to 1} 2x^2 + 3x + 5 = 2 \bullet 1^2 + 3 \bullet 1 + 5 = 10$

- **Por fatoração:** quando o limite der em 0/0 e tiver um fator em comum no numerador e denominador, podemos simplificar e resolver por substituição.

e.g. $\lim_{x \to -4} \frac{2x+8}{x^2+x-12} = \lim_{x \to -4} \frac{2(x+4)}{(x+4)(x-3)} = \lim_{x \to -4} \frac{2}{x-3} = -\frac{2}{7}$

- **Por conjugado:** quando o limite resultar numa indeterminação e não puder ser simplificado, multiplique a fração pelo conjugado do termo que causa a indeterminação, para que o limite possa ser simplificado. Apenas distribua o conjugado no termo que causa a indeterminação.

e.g. $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \bullet \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1} \sqrt{x} + 1 = 2$

- **Por L'Hopital:** quando o limite der em uma indeterminação do tipo 0/0 ou ∞/∞ derive o numerador e o denominador até que a indeterminação desapareça.

e.g. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{6}{e^x} = 0$

Limites tendendo ao infinito

- **∞ - ∞:** resolva por conjugado.

e.g.

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x - 4} - \sqrt{x - 2} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{x - 4} - \sqrt{x - 2} \bullet \frac{\sqrt{x-4}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-4}+\sqrt{x-2}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x-4)-(x-2)}{\sqrt{x-4}+\sqrt{x-2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-2}{\sqrt{x-4}+\sqrt{x-2}} = \frac{-2}{\infty} = 0$$

- **∞/∞:** fatore o termo x de maior grau no numerador e denominador, depois resolva por substituição. Se não tiverem termos de x para fatorar use L'Hopital.

e.g. $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3+x+1}{x^2+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3(1+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty})}{x^2(1-\frac{1}{\infty})}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^3(1+0+0)}{x^2(1-0)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to \infty} x = \infty$$

Limite fundamental trigonométrico

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1-cos(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{tan(x)}{x} = 1$$

*Quando resolver um limite envolvendo funções trigonométricas tente manipular o limite para que vire um dos limites acima.
Ou use o teorema do confronto.

e.g. $\lim\limits_{x \to 0} x^2 sen(\frac{1}{x^3})$, sabendo que $-1 \leq sen(\frac{1}{x^3}) \leq 1$:

$$\text{i.e. } \lim_{x \to 0} x^2 \bullet (-1) \leq \lim_{x \to 0} x^2 sen(\frac{1}{x^3}) \leq \lim_{x \to 0} x^2 \bullet 1$$

$$\lim_{x \to 0} -x^2 \leq \lim_{x \to 0} x^2 sen(\frac{1}{x^3}) \leq \lim_{x \to 0} x^2$$

$$0 \leq \lim_{x \to 0} x^2 sen(\frac{1}{x^3}) \leq 0$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} x^2 sen(\frac{1}{x^3}) = 0$$

Limite fundamental exponencial

$$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

Teoremas

Teorema do confronto

Dadas as funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ definidas em R, temos que:

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$

e $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

então $\lim_{x \to a} g(x) = L$

Teorema de Rolle

Sendo $f(x)$ diferenciável no intervalo (a, b), temos que:

Se $f(a) = f(b)$, então existe um c tal que $f'(c) = 0$

Teorema do valor médio

Generalização do Teorema de Rolle:
Sendo $f(x)$ diferenciável no intervalo (a, b), então existe pelo menos um c tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ou seja, a reta tangente a c tem a mesma inclinação da reta secante de a e b, sendo paralelas.

Regras de Derivação

Funções simples

$[c]' = 0$ $[x]' = 1$ $[x^n]' = nx^{n-1}$

$[cx]' = c$ $[\frac{1}{x}]' = -\frac{1}{x^2}$ $[\sqrt{x}]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$[cf(x)]' = c[f(x)]'$ $[c^{f(x)}]' = c^{f(x)} \bullet ln(c) \bullet f'(x)$

$$[\,|x|\,]' = \frac{|x|}{x}$$

Regras de derivação

- *Derivada da soma*

$$[f(x) + g(x)]' = [f(x)]' + [g(x)]'$$

- *Derivada do produto*

$$[f(x) \bullet g(x)]' = f(x) \bullet [g(x)]' + g(x) \bullet [f(x)]'$$

- *Derivada do quociente*

$$[f(x)/g(x)]' = \frac{g(x) \bullet [f(x)]' - f(x) \bullet [g(x)]'}{[g(x)]^2}$$

- *Regra da cadeia*

$$[(f \circ g)]' = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \bullet g'(x)$$

- *Regra geral da potência*

$$[(f(x))^n]' = n \bullet (f(x))^{n-1} \bullet f'(x)$$

Funções exponenciais e logarítmicas

$$[e^x]' = e^x \qquad [e^{f(x)}]' = e^{f(x)} \bullet f'(x)$$

$$[log_a x]' = \frac{1}{x \bullet ln(a)} \qquad [log_a f(x)] = \frac{1}{x \bullet ln(a)} \bullet f'(x)$$

$[ln(x)]' = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $[ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Funções trigonométricas

$[sen(x)]' = cos(x)$ $\qquad$ $[cos(x)]' =- sen(x)$

$[tan(x)]' = sec^2(x)$ $\qquad$ $[sec(x)]' = sec(x) \bullet tan(x)$

$[cossec(x)]' =- cossec(x) \bullet cotan(x)$

$[cotan(x)]' =- cossec^2(x)$

Funções trigonométricas inversas

$[arcsen(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $[arccos(x)]' =- \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$[arctan(x)]' = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $[arcsec(x)]' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

$[arccsc(x)]' =- \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad$ $[arcotg(x)]' =- \frac{1}{1+x^2}$

Funções trigonométricas hiperbólicas

$[senh(x)]' = cosh(x)$ $\qquad$ $[cosh(x)]' = senh(x)$

$[tgh(x)]' = sech^2(x)$ $\qquad$ $[sech(x)]' =- sech(x) \bullet tgh(x)$

$[csch(x)]' =- csch(x) \bullet cotgh(x)$

$[cotgh(x)]' =- cossech^2(x)$

Derivação implícita

Para derivar equações implícitas, ou seja, que não estão definidas na forma $y = f(x)$, ou que tem mais de uma solução, como $y =\pm \sqrt{4 - x^2}$, é preciso derivar os 2 lados da equação em relação a uma variável.

e.g. $x^3 + y^3 = 5 \quad i.e.\ y = \sqrt[3]{5 - x^3}$

$\frac{d}{dx}[x^3 + y^3] = \frac{d}{dx}[5]$

$\frac{d}{dx}[x^3] + \frac{d}{dx}[y^3] = 0$ ← Regra da cadeia

$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} =- \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{5-x^3}}$

Taxa de variação

Dada uma função $f(x)$ contínua no intervalo (a, b):

1. Se $f'(x) > 0$ no intervalo (a, b), então $f(x)$ é crescente.

2. Se $f'(x) < 0$ no intervalo (a, b), então $f(x)$ é decrescente.

3. Se $f'(x) = 0$ então $f(x)$ é constante.

*Lembrando que $f'(x)$ é a taxa de variação de $f(x)$ que nos dá a inclinação da reta tangente em um ponto de $f(x)$.

Pontos críticos

Pontos críticos são pontos em que $f'(x) = 0$, ou seja, quando a tangente é horizontal.

Máximo relativo: ponto em que a função para de crescer e começa a diminuir.

Mínimo relativo: ponto em que a função para de diminuir e começa a crescer.

*$f'(x) = 0$ não necessariamente implica em um ponto de máximo ou mínimo.

Concavidade

Dada uma função $f(x)$ contínua no intervalo (a, b):

1. Se $f''(x) > 0$, a concavidade de $f(x)$ é pra cima.

2. Se $f''(x) < 0$, a concavidade de $f(x)$ é pra baixo.

3. Se $f''(x) = 0$, possível ponto de inflexão.

*Lembrando que $f''(x)$ é a taxa de variação de $f'(x)$, que nos dá a taxa de variação da inclinação da reta tangente a $f(x)$.

Pontos de inflexão

Ponto de inflexão é um ponto em que $f''(x) = 0$, ou seja, quando a concavidade da função muda de sinal.

Esboço de gráfico

1. Encontre os interceptadores dos eixos x e y.
i.e. $f(x) = 0$ e $f(0)$ respectivamente.

2. Encontre as assíntotas horizontais e verticais, se existirem.

3. Faça o teste da 1ª derivada: encontre os pontos críticos e as taxas de crescimento e decrescimento.
i.e. $f'(x) = 0$.

4. Faça o teste da 2ª derivada: encontre os pontos de inflexão e as concavidades.
i.e. $f''(x) = 0$.

5. Mapeie todos os pontos encontrados no plano cartesiano e esboce o gráfico.

Otimização

1. Encontre a fórmula geral que define o problema a ser otimizado.

2. Estabeleça as limitações do problema.

3. Derive a fórmula geral e encontre o máximo e/ou mínimo com base nas limitações e informações dadas no enunciado.

e.g. A aresta de um cubo cresce a uma taxa de 10/3 cm/s. Qual vai ser a área superficial do cubo quando a aresta medir 7/4 cm?

Área superficial(S): $6x^2$ Taxa de variação da aresta($\frac{dx}{dt}$): 10/3

Taxa de variação da superfície: $\frac{dS}{dt} = [6x^2]' = 12x\frac{dx}{dt}$

Quando x = 7/4:

$\frac{dS}{dt} = 12 \bullet \frac{7}{4} \bullet \frac{10}{3} = 70\ cm^2/s$