Cálculo 1: Questões para Peer Learning

Prerequisitas

1. Considere as seguintes afirmações:

    1. Para todo $x \in \mathbb{R}_+$, $x \geqslant \sqrt{x}$.
    2. As inequações $\frac{3x-1}{x+2} \geqslant 5$ e $3x - 1 \geqslant 5x + 10$ possuem o mesmo conjunto solução.
    3. As inequações $\frac{x^2-1}{x^2+1} < 3$ e $x^2 - 1 < 3x^2 + 3$ possuem o mesmo conjunto solução.

    Quais delas valem?

    (a) Só 1
    (b) Só 2
    (c) Só 3 $\quad *$
    (d) Só 1 e 2
    (e) Só 1 e 3
    (f) Só 2 e 3

2. Calcule o conjunto solução da inequação

$$\frac{|x-2|}{|x-1|} < 2.$$

3. Denote por $\lfloor x \rfloor$ a "função piso", que manda x pro maior inteiro menor ou igual a x: assim

$$\lfloor 5,82 \rfloor = 5, \lfloor 3 \rfloor = 3, \lfloor -2,8 \rfloor = -3.$$

    Quais das seguintes funções têm domínios iguais?

    1. $\sqrt{\frac{x}{x-1}}$
    2. $\sqrt{x^2 - x}$
    3. $\frac{3x}{\lfloor x \rfloor}$

    (a) Nenhumas $\quad *$
    (b) Só 1 e 2
    (c) Só 1 e 3
    (d) Só 2 e 3
    (e) Todas

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Mostre que existe uma função par p e uma função ímpar i tal que $f(x) = p(x) + i(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

    [[DICA: a função $x \mapsto f(x) - f(-x)$ é ímpar!]]

5. Usando identidades trigonomêtricas da aula, e os triângulos espertos, calcule o valor exato de $\tan(\pi/12)$. Qual é?

    (a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(b) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

(c) $2+\sqrt{3}$

(d) $2-\sqrt{3}$ $\quad *$

[[DICA: um primeiro passo é calcular $\text{sen}(\pi/12)$ usando uma fórmula para $\text{sen}(\alpha-\beta)$.]]

6. Esboçe os gráficos das seguintes funções:

   (a) $f(x) = x \cdot \text{sen}(x)$

   (b) $g(x) = x + \text{sen}(x)$

7. Mostre que, para todo x no domínio de $\tan(x)$, temos

$$\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x).$$

Funções exponenciais e logaritmos

1. Qual das seguintes opções é o domínio da função

$$f(x) = \log_\pi(\sqrt[5]{2^x} - 4)?$$

   (a) $\mathbb{R}$

   (b) $(0, \infty)$

   (c) $[0, \infty)$

   (d) $(5, \infty)$

   (e) $[5, \infty)$

   (f) $(10, \infty)$ *

   (g) $[10, \infty)$

2. Usando as propriedades da função exponencial, mostre que a função log tem as seguintes propriedades:

   (a) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad \forall x, y > 0,$

   (b) $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y) \quad \forall x, y > 0,$

   (c) $\log_a(x^t) = t \cdot \log_a(x) \quad \forall x > 0, \forall t \in \mathbb{R}.$

Limites

1. Quais das seguintes afirmações estão certas?

   1.
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{3x+2} \quad \text{é finito.}$$

   2. O limite
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{cx^3+12x}{2x^3+8}$$
   pode ser 0, finito ou infinito, dependendo de $c \in \mathbb{R}$.

   3. Se $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$, e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, então necessariamente $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

   (a) Só 1

   (b) Só 2

   (c) Só 3

   (d) Só 1 e 2

   (e) Só 1 e 3 $\quad *$

   (f) Só 2 e 3

(g) Todas

2. 1. Seja a um ponto do domínio de f. Se

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = b \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = b$$

então $f(a) = b$.

2. Se $\lim_{x\to 1^-} |f(x)| = 2$, então $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ necessariamente existe e

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 \text{ ou } \lim_{x\to 1^-} f(x) = -2$$

3. Suponha que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f\left(1/10^n\right) = 3$. Então $\lim_{n\to 0^+} f(x)$ existe e $\lim_{n\to 0^+} f(x) = 3$

(a) Só 1
(b) Só 2
(c) Só 3
(d) Só 1 e 2
(e) Só 1 e 3
(f) Só 2 e 3
(g) Nenhuma ou todas $\quad *$

3. Seja $c \in \mathbb{N}$ fixo. Quais são os possíveis valores de

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + 9x + 5}{\sqrt{x^c + 9x + 5}}?$$

Para quais c estes valores são obtidos?

4. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \text{ racional}, \\ -x^2 & x \text{ irracional}. \end{cases}$$

O limite $\lim_{x\to a} f(x)$:

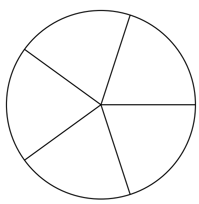
(a) Existe para todo $a \in \mathbb{R}$
(b) Existe para infinitos $a \in \mathbb{R}$ mas nem todos
(c) Existe para somente um $a \in \mathbb{R}$ $\quad *$
(d) Não existe para nenhum $a \in \mathbb{R}$

[[DICA: faça desenho!]]

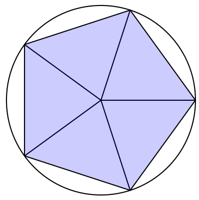
5. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas.

(a) Mostre que, se $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(b) Mostre que, se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, então $f = g$.

6. Considere o círculo com raio 1. Divida ele em n partes iguais por colocar uma reta do centro pro círculo. O caso com $n = 5$ é esse:



Aproxime a área de cada parte por um triângulo assim:



Seja $A(n)$ a área da união dos n triângulos acima.

(a) Calcule $A(n)$.

(b) Use o limite $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$ para calcular $\lim_{n\to\infty} A(n)$.

7. Para quais das seguintes funções f, o valor $f'(0)$ está definida?

   1. $f(x) = x$
   2. $f(x) = |x|$
   3. $f(x) = x|x|$

   (a) Só 1
   (b) Só 2
   (c) Só 3
   (d) Só 1 e 2
   (e) Só 1 e 3 $\quad *$
   (f) Só 2 e 3
   (g) Nenhuma ou todas

8. Use o Teorema do Valor Intermediário para justificar a seguinte afirmação:

   "Neste momento, existem dois pontos do equador, diametricamente opostos, tendo exatamente a mesma temperatura."

   [[DICA: contrua uma função usando a *diferença*!]]

Derivada

1. Quais das seguintes afirmações valem?

   1. $\lim_{x\to 1} \frac{x^{10}-1}{x-1} = 1$
   2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^{10}-1}{x-1} = 10$
   3. $\frac{d}{dx} e^7 = 7e^6$

   (a) Só 1
   (b) Só 2 *
   (c) Só 3
   (d) Só 1 e 2
   (e) Só 1 e 3
   (f) Só 2 e 3
   (g) Nenhuma ou todas

2. Provamos já um dos limites trigonométricas fundamentais: $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$. Prove outro:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0.$$

   Dica: multiplique por $\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1}$, e coloque a expressão como um produto de fatores cujos limites a gente sabe.

3. Prove usando limites que $\cos(x)' = -\operatorname{sen}(x)$.
4. Quais das seguintes afirmações valem?
   1. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(2x) = \cos(2x)$.
   2. Sabendo que $f(1) = 1, f'(1) = 3$, podemos concluir que $\frac{d}{dx} f(x)/x^2$ no ponto $x = 1$ é 1.
   3. A equação $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$ quer dizer que a reta tangente de $\operatorname{sen}(x)$ no ponto 0 é $y = x$.

   (a) Só 1
   (b) Só 2
   (c) Só 3
   (d) Só 1 e 2
   (e) Só 1 e 3
   (f) Só 2 e 3 *
   (g) Nenhuma ou todas
5. Aplique a regra do constante e a regra do produto pra função $c \cdot f(x)$. Confirme que a resposta é a mesma.