

## TP4 – Détection d’objets dans une image

L’objectif de ce TP est de détecter et de compter les individus d’une colonie de flamants roses à partir d’une image aérienne (cf. figure 1). Ce comptage, qui permet aux écologues d’étudier l’évolution des populations de flamants roses, se faisait « à la main » jusqu’à une date récente. Une idée simple consiste à positionner  $N$  disques dans l’image de telle sorte que le niveau de gris moyen à l’intérieur des disques soit le plus élevé possible. Tous les disques ont le même rayon  $R$ . Les coordonnées (réelles) des centres des disques sont tirées selon une loi uniforme. Une fois les  $N$  disques positionnés dans l’image, on tente de **maximiser** la somme des niveaux de gris moyens à l’intérieur des disques en procédant comme suit : pour chaque disque traité à tour de rôle, on tire de nouvelles coordonnées ; on accepte la proposition si elle fait croître le niveau de gris moyen. Lancez le script `exercice_0` qui vous est fourni. Quel est manifestement son défaut vis-à-vis de la détection ?



FIGURE 1 – Image aérienne d’une colonie de flamants roses.

### Exercice 1 : détection de flamants roses par un champ de Markov

Ce problème permet d’illustrer une autre application des champs de Markov pour lequel, contrairement à ce qui a été vu jusqu’à présent, les variables aléatoires du champ (aléatoire) de Markov ne sont pas associées aux pixels de l’image, mais aux  $N$  disques positionnés dans l’image. Une réalisation de la variable aléatoire  $\mathbf{C}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , associée au  $i^{\text{ème}}$  disque, est la position  $\mathbf{c}_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$  de son centre.

Comme pour le script `exercice_0`, le terme d’attache aux données de l’énergie, qui correspond à la vraisemblance  $p(\mathbf{C}_i = \mathbf{c}_i)$  de la réalisation  $\mathbf{c}_i$ , est égal à l’opposé du niveau de gris moyen  $\bar{I}(\mathbf{c}_i)$  à l’intérieur du disque de rayon  $R$  centré en  $\mathbf{c}_i$ . Cela correspond à l’intuition suivante : la probabilité qu’un flamant rose se trouve en  $\mathbf{c}_i$  est d’autant plus élevée que l’image est localement plus claire.

Par ailleurs, s’il est pertinent de modéliser un flamant rose par un disque de rayon  $R$  fixé, il n’est pas envisageable d’autoriser n’importe quel recouvrement entre disques. Nous introduisons donc un a priori global sur une réalisation  $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$  du champ de Markov  $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$ , qui pénalise toute paire de disques dont les centres sont trop proches (les flamants ne pouvant être empilés les uns sur les autres !). L’énergie correspondant à la probabilité a posteriori (MAP) du modèle complet s’écrit donc ( $\beta > 0$  est un paramètre) :

$$U(\mathbf{c}) = - \sum_{1 \leq i \leq N} \bar{I}(\mathbf{c}_i) + \beta \sum_{1 \leq i < j \leq N} \delta(\|\mathbf{c}_j - \mathbf{c}_i\| \leq \sqrt{2} R) \quad (1)$$

Faites une copie du script `exercice_0`, de nom `exercice_1`, que vous modifierez de manière à trouver la configuration qui minimise cette énergie, en supposant que  $\beta \rightarrow +\infty$ . Il est donc inutile de calculer explicitement l’énergie  $U(\mathbf{c})$ . En revanche, vous devez vérifier, pour tout nouveau disque  $\mathbf{c}_i$  tiré aléatoirement, que les inégalités  $\|\mathbf{c}_j - \mathbf{c}_i\| \leq \sqrt{2} R$  sont fausses,  $\forall j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$ , **y compris lors du tirage de la configuration initiale.**

S'il permet effectivement de localiser les  $N$  taches les plus claires de l'image ne présentant pas de fort recouvrement, vous constatez en revanche que ce script n'est pas adapté au *comptage* des flamants roses. La notion de *processus ponctuel marqué* permet de remédier à ce défaut.

## Processus ponctuel marqué

Contrairement à un champ de Markov, qui est un champ aléatoire, un *processus ponctuel marqué* est un *processus aléatoire*, pour lequel la dimension temporelle entre en jeu. L'énergie à minimiser s'écrit sous une forme très similaire à (1) :

$$U(\mathbf{c}) = \sum_{1 \leq i \leq N} U_i(\mathbf{c}_i) + \beta \sum_{1 \leq i < j \leq N} \delta \left( \|\mathbf{c}_j - \mathbf{c}_i\| \leq \sqrt{2} R \right) \quad (2)$$

mais le nombre  $N$  de disques, c'est-à-dire de variables aléatoires, peut désormais varier au cours du temps. Pour une configuration  $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$  à  $N$  individus, l'espace des configurations est  $\mathbb{R}^{2N}$ . Par conséquent, l'espace complet des configurations, dans lequel le processus ponctuel marqué est défini, est  $\emptyset \cup \bigcup_{N=1}^{+\infty} \mathbb{R}^{2N}$ .

D'autre part, l'énergie individuelle  $U_i(\mathbf{c}_i)$  d'un disque ne s'écrit plus  $-\bar{I}(\mathbf{c}_i)$ , comme dans le modèle (1), car cette énergie doit vérifier les trois contraintes suivantes :

- Elle doit décroître lorsque le niveau de gris moyen  $\bar{I}(\mathbf{c}_i)$  croît.
- Elle doit être négative pour un disque  $\mathbf{c}_i$  bien positionné, sans quoi la suppression d'un disque bien positionné pourrait faire décroître l'expression (2) de  $U(\mathbf{c})$ , ce qui serait absurde.
- Elle doit être positive pour un disque  $\mathbf{c}_i$  mal positionné, sans quoi l'ajout d'un disque mal positionné pourrait faire décroître  $U(\mathbf{c})$ , ce qui serait tout aussi absurde.

Une façon de respecter ces trois contraintes consiste à utiliser la fonction *sigmoïde* suivante :

$$U_i(\mathbf{c}_i) = 1 - \frac{2}{1 + \exp \left\{ -\gamma \left[ \frac{\bar{I}(\mathbf{c}_i)}{S} - 1 \right] \right\}} \quad (3)$$

où  $S$  est un seuil indiquant à partir de quelle valeur du niveau de gris moyen  $\bar{I}(\mathbf{c}_i)$  le disque  $\mathbf{c}_i$  peut être considéré comme « bien positionné ». Un exemple de sigmoïde du type (3) est représenté sur le graphe de la figure 2.

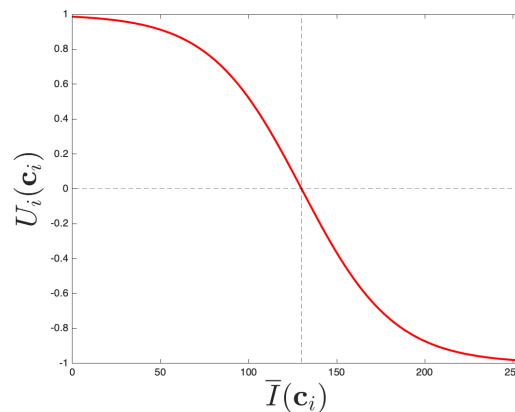


FIGURE 2 – Graphe de la sigmoïde (3), pour  $S = 130$  et  $\gamma = 5$  :  $U_i(\mathbf{c}_i)$  change de signe en  $\bar{I}(\mathbf{c}_i) = S$  ; la dérivée en ce point vaut  $-\gamma/2$ .

## Optimisation par naissances/morts multiples

Pour minimiser l'expression (2) de l'énergie  $U(\mathbf{c})$ , vous allez utiliser un algorithme de *naissances/morts multiples*. Le principe de cet algorithme est d'alterner les phases de naissances, où de nouveaux disques sont ajoutés aléatoirement à la configuration courante, et les phases de morts, où les disques les moins pertinents, au sens de l'énergie, sont supprimés. Cette dynamique, intégrée dans un schéma de recuit simulé, converge vers le minimum global de l'énergie. La configuration initiale est l'ensemble vide. L'algorithme consiste à initialiser la température  $T \leftarrow T_0$  et le « taux de naissances »  $\lambda \leftarrow \lambda_0$ , puis à itérer la séquence suivante :

1. **Naissances.** Tirer le nombre  $\tilde{N}$  de nouveaux disques suivant une *loi de Poisson* de moyenne  $\lambda$  :

$$p(\tilde{N}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{\tilde{N}}}{\tilde{N}!} \quad (4)$$

Ces  $\tilde{N}$  nouveaux disques, qui sont positionnés dans l'image de façon aléatoire suivant une loi uniforme, sont ajoutés à la configuration courante. La fonction `poissrnd` de Matlab permet de tirer un nombre aléatoire suivant une loi de Poisson.

2. **Tri des disques.** Une fois la phase de naissances terminée, calculer l'énergie individuelle  $U_i(\mathbf{c}_i)$  de chaque disque  $\mathbf{c}_i$  de la configuration courante  $\mathbf{c}$ , puis classer les disques par valeurs décroissantes de  $U_i(\mathbf{c}_i)$ .
3. **Morts.** Pour chaque disque  $\mathbf{c}_i$  de la configuration courante  $\mathbf{c}$ , lue dans cet ordre, calculer la probabilité :

$$p(\mathbf{c}_i|\mathbf{c}) = \frac{\lambda}{\lambda + \exp \left\{ \frac{U(\mathbf{c} \setminus \{\mathbf{c}_i\}) - U(\mathbf{c})}{T} \right\}} \quad (5)$$

et supprimer  $\mathbf{c}_i$ , c'est-à-dire faire  $\mathbf{c} \leftarrow \mathbf{c} \setminus \{\mathbf{c}_i\}$ , avec la probabilité  $p(\mathbf{c}_i|\mathbf{c})$ .

4. **Test de convergence.** Si le processus n'a pas convergé, c'est-à-dire si la configuration après l'étape de morts a changé par rapport à l'itération précédente, modifier la température  $T$  et le taux de naissances  $\lambda$  en les multipliant par un même coefficient de décroissance  $0 < \alpha < 1$ . Retourner à l'étape de naissances.

## Exercice 2 : détection de flamants roses par processus ponctuel marqué

Faites une copie du script `exercice_1`, de nom `exercice_2`, que vous modifierez de manière à détecter les flamants roses en utilisant l'algorithme ci-dessus, avec les valeurs suivantes ses paramètres du modèle :  $\beta = 1$ ,  $S = 130$ ,  $\gamma = 5$ ,  $T_0 = 0.1$ ,  $\lambda_0 = 100$ ,  $\alpha = 0.99$ . La condition d'arrêt de l'algorithme (étape 4) pourra être simplifiée, en fixant par exemple le nombre d'itérations à `k_max = 300`. Par ailleurs, le graphique de droite (`subplot(1,2,2)`) devra montrer l'évolution de l'énergie  $U(\mathbf{c})$  de la configuration courante en fonction du nombre  $k$  d'itérations (l'échelle de cette courbe pourra être fixée à `[0 k_max -400 0]`).

Jouez sur les paramètres, de manière à compter « au plus juste » le nombre  $N_{\text{lim}}$  d'individus de l'image `colonie.png`. Enfin, relancez le script `exercice_1` en fixant  $N$  à la valeur  $N_{\text{lim}}$ . Comparez les résultats.

## Exercice 3 : modification de la marque (facultatif)

La détection de flamants roses par le script `exercice_2` peut être améliorée en modifiant la « marque ». Il semble en effet plus pertinent de modéliser un flamant par une ellipse que par un disque. En utilisant comme demi-axes  $a = R$  et  $b = R/\sqrt{2}$ , cela ajoute quand même une variable, à savoir l'orientation  $\theta$  du grand axe.

Faites une copie du script `exercice_2`, de nom `exercice_3`, que vous modifierez de manière à tirer aléatoirement la position du centre et l'orientation du grand axe de chaque flamant rose. Comme il est difficile de déterminer si deux ellipses s'intersectent, vous pourrez simplifier ce test en calculant la distance entre les centres de deux ellipses, et en comparant cette distance à  $\sqrt{2}R$ , comme vous l'avez fait jusqu'à présent.