

Санкт-Петербургский государственный университет  
Прикладная математика и информатика  
Статистическое моделирование

Лекции Голяндиной Нины Эдуардовны для магистров первого курса<sup>1</sup>

МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ: SVD, PCA, FA  
Черновой вариант, просьба сообщать об опечатках

# Оглавление

<b>Введение</b>	4
1. Генеральный язык	4
2. Выборочный язык	4
3. Примеры данных до стандартизации и после	5
4. Многомерное нормальное распределение	6
5. Переход к новым признакам	9
5.1. Две интерпретации новых признаков. Факторные нагрузки	11
5.2. Вклад новых признаков	12
6. Пара фактов из линейной алгебры	13
 <b>Глава 1. Сингулярное разложение</b>	
<b>(SVD — Singular Value Decomposition)</b>	15
1.1. Как строится сингулярное разложение	15
1.2. Матричный вид сингулярного разложения	16
1.3. Единственность сингулярного разложения	17
1.4. Оптимальные свойства сингулярного разложения	18
1.5. Главные направления	19
 <b>Глава 2. Анализ главных компонент (АГК)</b>	
<b>(PCA — principal component analysis)</b>	20
2.1. Анализ главных компонент на выборочном языке	20
2.1.1. Изменение нормы в пространстве признаков	20
2.1.2. Связь между SVD и АГК. Общее и различия	20
2.2. Чему АГК соответствует на статистическом языке?	22
2.3. Вклад главных компонент	22
2.4. АГК с точки зрения построения базиса в пространстве индивидов и в пространстве признаков	23
2.5. Интерпретация главных компонент. Смысл первой главной компоненты в случае положительных ковариаций	25
2.6. Выбор числа главных компонент	26
2.7. Оптимизация в АГК в терминах ковариационных матриц	27

### Глава 3. Факторный анализ

(EFA — exploratory factor analysis) . . . . .	28
3.1. Модель в факторном анализе . . . . .	28
3.2. Общности и уникальности . . . . .	29
3.3. Корректность поставленной задачи . . . . .	30
3.4. Задача оценивания параметров . . . . .	31
3.4.1. Метод наименьших квадратов (OLS) . . . . .	31
3.4.2. Взвешенный метод наименьших квадратов (WLS) . . . . .	32
3.4.3. Метод максимального правдоподобия (MLE) . . . . .	32
3.5. Разница между АГК и факторным анализом . . . . .	32
3.6. Проверка гипотез . . . . .	33
3.6.1. Проверка значимости модели . . . . .	33
3.6.2. Тест сферичности Бартлетта . . . . .	33
3.7. Ортогональные вращения . . . . .	34
3.8. Косоугольные вращения . . . . .	35
3.9. Факторная структура и факторный паттерн . . . . .	36
3.10. Методы нахождения факторных значений . . . . .	36

# Введение

## 1. Генеральный язык

Пусть случайная величина  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_p)^T \in \mathbb{R}^p$ , где  $p$  — количество признаков. Обозначим

- *вектор средних*  $\boldsymbol{\mu} = (\mathbb{E}\xi_1, \dots, \mathbb{E}\xi_p)^T \in \mathbb{R}^p$ ;
- *ковариационную матрицу*  $\boldsymbol{\Sigma} = \text{Cov } \boldsymbol{\xi} = \mathbb{E}(\boldsymbol{\xi} - \mathbb{E}\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} - \mathbb{E}\boldsymbol{\xi})^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ .

Рассмотрим два случая:

- *Центрированные данные*:  $\boldsymbol{\xi}^{(c)} = \boldsymbol{\xi} - \mathbb{E}\boldsymbol{\xi}$ . Тогда ковариационная матрица будет иметь вид:  $\text{Cov}\boldsymbol{\xi}^{(c)} = \mathbb{E}\boldsymbol{\xi}^{(c)}(\boldsymbol{\xi}^{(c)})^T$ .
- *Стандартизованные данные*:  $\xi_i^{(s)} = \frac{\xi_i - \mathbb{E}\xi_i}{\sqrt{\mathbb{D}\xi_i}}$  для каждой  $\xi_i$ ,  $i$ -ой компоненты вектора  $\boldsymbol{\xi}$ . Запишем теперь это в матричном виде: введём  $\boldsymbol{\Delta}$  — диагональную матрицу, состоящую из элементов  $\sqrt{\mathbb{D}\xi_i}$  для  $i = 1, \dots, p$ . Тогда  $\boldsymbol{\xi}^{(s)} = \boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\xi}^{(c)} \Rightarrow \text{Corr}(\boldsymbol{\xi}) = \text{Cov}(\boldsymbol{\xi}^{(s)})$ , то есть  $\text{Cov}(\boldsymbol{\xi}^{(s)})$  — это корреляционная матрица до стандартизации.

## 2. Выборочный язык

Перейдём теперь на выборочный язык. Пусть  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^p$  — выборка объёма  $n$ . Можем задать эмпирическое распределение как  $\{\mathbf{x}_i$  с вероятностью  $1/n\}$ . Возникает вопрос: как задать *матрицу данных*? Удобно было бы ее задать как матрицу размера  $p \times n$ :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_n \\ \hline \end{array}.$$

Но в книгах встречается следующий вариант *матрицы данных*:

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^T \end{pmatrix} = [X_1 : \dots : X_p] \in \mathbb{R}^{n \times p}.$$

Теперь знаем, как написать все характеристики, упомянутые выше, на выборочном языке.

- $\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_j)_i$  — выборочное среднее,  $j = 1, \dots, p$ .

$$\bar{X}_j = (\bar{x}_j, \dots, \bar{x}_j)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Центрированная матрица данных  $\mathbb{X}^{(c)}$  <sup>2</sup>:

$$\mathbb{X}^{(c)} = [X_1 - \bar{X}_1 : \dots : X_p - \bar{X}_p] = [X_1^{(c)} : \dots : X_p^{(c)}].$$

- $s_j^2 = \frac{1}{n} \|X_j^{(c)}\|^2$  — выборочная дисперсия.

Матрица из стандартизованных признаков  $\mathbb{X}^{(s)}$ :

$$X_j^{(s)} = \frac{X_j - \bar{X}_j}{s_j} = \frac{X_j^{(c)}}{s_j}, \quad \frac{1}{n} \|X_j^{(s)}\|^2 = 1 \quad \forall j = 1, \dots, p.$$

- $\mathbb{S} = \frac{1}{n} (\mathbb{X}^{(c)})^T \mathbb{X}^{(c)}$  — выборочная ковариационная матрица.
- $\widehat{\text{Corr}\xi} = \frac{1}{n} (\mathbb{X}^{(s)})^T \mathbb{X}^{(s)}$  — выборочная корреляционная матрица.

### 3. Примеры данных до стандартизации и после

Зададимся вопросом, как выглядят данные до стандартизации и после неё?

1. Данные с ненулевой корреляцией:

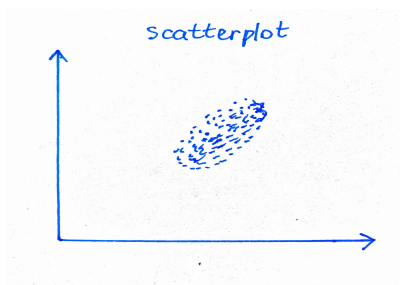


Рис. 1. Данные до стандартизации

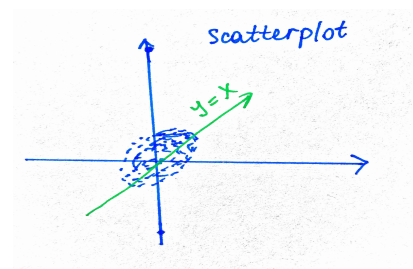


Рис. 2. Данные после стандартизации

<sup>2</sup> Посчитали среднее по каждому признаку и вычли. Таким образом, среднее по каждому признаку нулевое.

## 2. Данные с нулевой корреляцией:

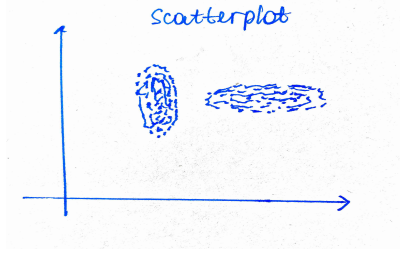


Рис. 3. Данные до стандартизации

После стандартизации — круг.

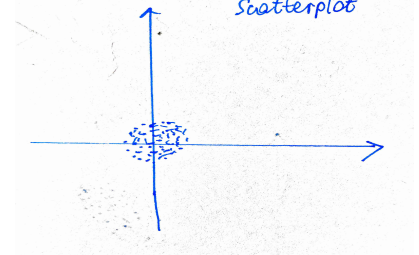


Рис. 4. Данные после стандартизации

## 4. Многомерное нормальное распределение

Рассмотрим  $\xi \sim N_p(\mu, \Sigma)$ , где  $\mu = E\xi$  — вектор из средних значений  $\xi$ ,  $\Sigma = \text{Cov}\xi$  — ковариационная матрица. Предположим, что  $\Sigma$  — невырожденная матрица.<sup>3</sup>

Плотность многомерного нормального распределения задаётся формулой:

$$p(\mathbf{x}, \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu)\right\} \text{ для } \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p, \text{ где}$$

$p$  — количество признаков. Очевидно, что в одномерном случае плотность будет иметь следующий вид:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \text{ где}$$

$\mu, \sigma$  — числа. Введём следующее понятие — *расстояние Махаланобиса*:

$$r_M^2(\mathbf{x}, \mu, \Sigma) = (\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu).$$

Отметим, что  $\Sigma$  в данном случае является неотрицательно определённой симметричной матрицей. Но так как ковариационная матрица удовлетворяет данному условию, то получаем, что если расстояния Махаланобиса совпадают, то и плотности многомерного нормального распределения тоже. Посмотрим, что будет являться расстоянием Махаланобиса в одномерном случае ( $p = 1$ ):

$$\sqrt{\frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}} = \frac{|x - \mu|}{\sigma} = r_M(x, \mu, \sigma^2) \text{ — расстояние до мат.ож., измеренное в } \sigma.$$

---

<sup>3</sup>  $|\Sigma| \neq 0$ .

На выборочном языке:

$$\frac{|x_i - \bar{x}|}{s_i}.$$

Таким образом, если у нас есть нормальное распределение, то в одномерном случае мы можем измерять расстояние в сигмах, а в случае многомерного нормального распределения мы смотрим на линии уровня (точки, находящиеся на одном расстоянии Махаланобиса от центра).

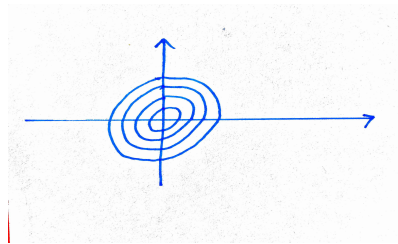


Рис. 5. Линии уровня

Ответим на следующий вопрос: *какое преобразование необходимо сделать со случайной величиной, имеющей нормальное распределение, чтобы из зависимости получить независимость?*

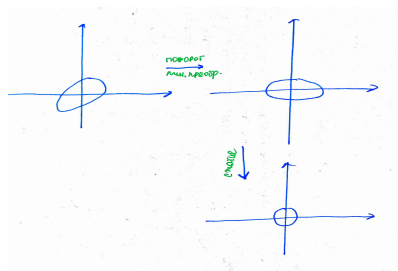


Рис. 6. Отбеливание

Сначала делаем поворот, а затем стандартизуем. Такое преобразование еще называется “отбеливанием”.

Пусть  $\zeta = \Sigma^{-1/2}(\xi - \mu)$  — новая случайная величина, полученная из исходной линейным преобразованием. несложно сосчитать, что  $E\zeta = \mathbb{O}$ , так как

$$E\zeta = \Sigma^{-1/2}(E\xi - \mu) = \mathbb{O}.$$

Посчитаем ковариацию  $\zeta$ :

$$\text{Cov}(\zeta) = E\zeta\zeta^T = \Sigma^{-1/2} \text{Cov}(\xi) \Sigma^{-1/2} = \Sigma^{-1/2} \underbrace{\Sigma^1}_{E\xi\xi^T} \Sigma^{-1/2} = \mathbb{I}.$$

Вспомним несколько свойств, которые характерны для нормально распределённых случайных величин:

1. Если  $\xi \sim N$ , то и всякое линейное преобразование  $\xi$  тоже имеет нормальное распределение.
2. Знаем, что из независимости следует некоррелированность. В случае нормального распределения верно и обратное. В общем случае это неверно. Приведём пример, когда зависимость есть, но корреляция равна 0.

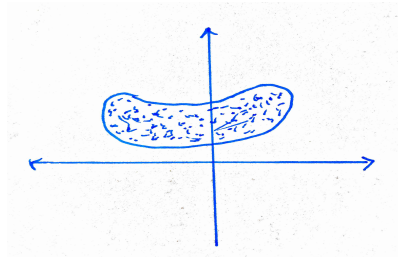


Рис. 7. Пример данных, когда зависимость есть, но корреляция нулевая

3. Условное математическое ожидание является линейной функцией.
4. Ковариационная матрица  $\Sigma$  может быть вырожденной:<sup>4</sup>

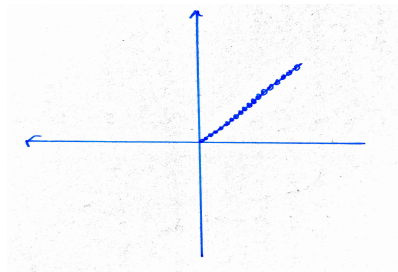


Рис. 8. Ковариационная матрица вырождена

<sup>4</sup> Например, когда двумерное распределение сосредоточено на одной прямой.



## 5. Переход к новым признакам

Пусть  $\xi$  —  $p$ -мерная случайная величина,  $p$  — количество признаков. Считаем, что среднее равно нулю. Хотим образовать новый признак, который является линейной комбинацией старых признаков (смысл в том, чтобы сделать так, чтобы новый признак был в некотором смысле лучше, чем старые):

$$\eta = \mathbf{A}^T \xi = \xi^T \mathbf{A} = a_1 \xi_1 + \dots + a_p \xi_p, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^p,$$

$$\mathrm{D}\eta = \mathbf{A}^T \Sigma \mathbf{A}.$$

Теперь пусть  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_d)^T \in \mathbb{R}^d$  —  $d$ -мерная случайная величина, т.е.  $d$  — число новых признаков, которая получается из исходной как  $\eta = \mathbb{A}^T \xi$ , где  $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{p \times d}$ . Соответствующая ковариационная матрица будет иметь вид  $\mathrm{Cov}(\eta) = \mathbb{A}^T \Sigma \mathbb{A}$ .

**На выборочном языке:**  $Z = \sum_{j=1}^p a_j X_j = \mathbb{X} \mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$  или  $\mathbb{Z} = \mathbb{X} \mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ , где  $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  — матрица данных.

1. Возьмём в качестве индивидов школьников, а в качестве признаков — оценки по четырём школьным предметам:

- $X_1$  — оценка по математике;
- $X_2$  — оценка по физике;
- $X_3$  — оценка по русскому;
- $X_4$  — оценка по литературе.

Сами по себе оценки мало несут информации про общее положение в школе или классе, поэтому давайте создадим новые признаки, которые будут более информативными. Пусть это будут

- $Z_1 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$  — сумма оценок по всем предметам;
- $Z_2 = X_1 + X_2 - (X_3 + X_4)$  — разность между оценками по естественным и гуманитарным наукам.

Выясним, как будет выглядеть матрица  $\mathbb{A}$  в этом случае:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}.$$

2. Рассмотрим два признака: оценки по математике  $X_1$  и физике  $X_2$ .

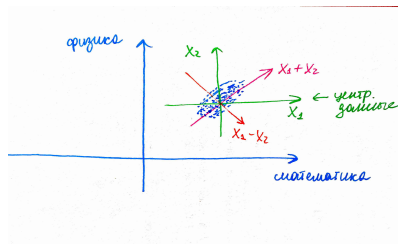


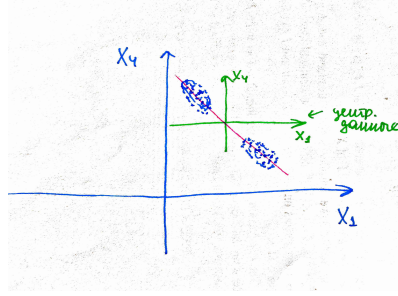
Рис. 9. Scatterplot:  $X_1$  and  $X_2$

В данной ситуации получается, что новый признак  $X_1 + X_2$  лучше всего характеризует данные, то есть это та характеристика, по которой ученики максимально различаются; второй признак —  $X_1 - X_2$ , по нему ученики отличаются меньше. В анализе главных компонент (АГК) необходимо выбрать признак, который бы наилучшим образом характеризовал данные. Такой характеристикой будет тот признак, по которому данные максимально различаются.

3. Рассмотрим два признака: оценки по математике  $X_1$  и литературе  $X_4$ . Максимальное отличие получаем по разности данных признаков.<sup>5</sup>
4. Возможно, что данные неоднородные. Тогда новый признак строится так, чтобы по нему группы максимально различались. Например, если взять математиков и филологов, то данные образуют две группы.

---

<sup>5</sup> Нарисуйте scatterplot в этом случае

Рис. 10. Scatterplot:  $X_1$  and  $X_4$ 

### 5.1. Две интерпретации новых признаков. Факторные нагрузки

Обсудили, зачем необходимы новые признаки. Также до этого мы требовали, чтобы новые признаки были линейной комбинацией старых. Теперь добавим еще условие, что:

- на выборочном языке:  $Z_i \perp Z_j$  (вектора-признаки ортогональны).
- на генеральном языке:  $\rho(\eta_i, \eta_j) = 0$  (случайные величины-признаки некоррелированы).

Зависимость признаков по смыслу означает, что часть одного признака входит в другой, то есть получается некоторая избыточность. Поэтому и требуется независимость (в данном случае, более слабое условие — некоррелированность).

Пусть  $\text{rank}(\mathbb{X}) = d$ ,  $(Z_1, \dots, Z_d)$  — ортогональный базис в подпространстве размерности  $d$  —  $\text{span}(X_1, \dots, X_p) = \text{colspan}(\mathbb{X})$ . Превратим базис в *ортонормированный базис*:  $Q_i = \frac{Z_i}{\|Z_i\|}$ . В ортонормированном базисе удобно вычислять координаты вектора через скалярные произведения с базисными векторами. Если  $U_1, \dots, U_d$  — ортономированный базис в  $\mathbb{R}^d$ , то  $\forall A \in \mathbb{R}^d$  раскладывается по ортонормированному базису:

$$A = \sum_{i=1}^d \langle A, U_i \rangle U_i, \text{ где } \langle A, U_i \rangle - i\text{-ая координата вектора } A \text{ в базисе } \{U_j\}_{j=1}^d.$$

<sup>6</sup> Таким образом,  $\{Q_i\}_{i=1}^d$  — ортонормированный базис в пространстве  $\text{span}(X_1, \dots, X_p)$ .

*Новые признаки на самом деле интерпретируются двумя способами:*

---

<sup>6</sup> Рассмотрим пример: пространство  $\mathbb{R}^2$ , соответствующий базис  $(1, 1)^T/\sqrt{2}$ ,  $(1, -1)^T/\sqrt{2}$ . Это ортонормированный базис, да? Как вычислить координаты вектора  $(5, 4)^T$  в данном базисе?

- Новые признаки задаются равенством (новые признаки есть линейная комбинация старых):

$$\mathbb{X}\mathbb{A} = \mathbb{Z}.$$

- Исходные признаки выражаются через новые (есть пространство, в нём базис, каждый вектор этого пространства раскладывается по базису):

$$\forall i = 1, \dots, p \quad X_i = \sum_{j=1}^d \langle X_i, Q_j \rangle Q_j. \quad (1)$$

**Определение 1.**  $f_{ij} = \langle X_i, Q_j \rangle$  — факторные веса, факторные нагрузки.

Составим матрицу  $\mathbb{F} = \{f_{ij}\}_{i=1, j=1}^{p, d} = [F_1, \dots, F_d] \in \mathbb{R}^{p \times d}$  — коэффициенты разложения по ортонормированному базису, тогда можем записать разложение (1) в матричном виде:

$$\mathbb{X} = \sum_{j=1}^d Q_j F_j^T = \mathbb{Q}\mathbb{F}^T. \quad (2)$$

$\|Q_j\| = 1$ ,  $\|F_j\| \neq 1$  в разложении (2). Давайте нормируем  $F$ . Пусть  $\sigma_j = \|F_j\|$ ,  $P_j = \frac{F_j}{\|F_j\|}$ , тогда  $\|Q_j\| = \|P_j\| = 1$  и

$$\mathbb{X} = \sum_{j=1}^d \sigma_j Q_j P_j^T = \mathbb{Q}\Sigma\mathbb{P}^T, \text{ где } \Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_d\}. \quad (3)$$

Что за матрица  $Q_j P_j^T \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ? Можно заметить, что  $\text{rank}(Q_j P_j^T) = 1$ ; действительно, столбцы матрицы пропорциональны; то же самое для строк. Таким образом, у нас была исходная матрица ранга  $d$ , а мы превратили её в сумму  $d$  элементарных матриц ранга 1.

Пусть  $\mathbb{X}^{(j)} = \sigma_j Q_j P_j^T$ , тогда  $\mathbb{X} = \sum_{j=1}^d \mathbb{X}^{(j)}$ .

## 5.2. Вклад новых признаков

Ввели новый признак, теперь хотелось бы понять, какую важную часть информации он в себя включает. Введём скалярное произведение двух матриц, которой соответствует норма Фробениуса ( $\|\mathbb{A}\|_F^2 = \sum_{ij} a_{ij}^2$ ):

$$(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})_F = \sum_{i,j} y_{ij} z_{ij}.$$

Если верно  $\|\mathbb{X}\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^d \mathbb{X}^{(j)} \right\|_F^2 \stackrel{?}{=} \sum_{j=1}^d \|\mathbb{X}^{(j)}\|_F^2$ , то вклад  $j$ -ого признака (вклад  $j$ -ой элементарной матрицы) равен  $\frac{\|\mathbb{X}^{(j)}\|^2}{\|\mathbb{X}\|^2}$ .<sup>7</sup>

**Замечание 1.** Для разложения (3),  $\left\| \sum_{j=1}^d \mathbb{X}^{(j)} \right\|_F^2 = \sum_{j=1}^d \|\mathbb{X}^{(j)}\|_F^2$  (скалярное произведение равно 0, потому что  $Q_i \perp Q_j$ ).

Так как  $Q_j$  и  $P_j$  нормированы, то можем продолжить равенство:

$$\|\mathbb{X}\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^d \mathbb{X}^{(j)} \right\|_F^2 = \sum_{j=1}^d \|\mathbb{X}^{(j)}\|_F^2 = \sum_{j=1}^d \sigma_j^2.$$

**Замечание 2.** Пусть старые признаки  $X_i$  центрированные, тогда новые признаки  $Z_i$  и  $Q_i$  тоже центрированные.

*Доказательство.* Новые признаки — это линейная комбинация старых. Среднее линейной комбинации есть линейная комбинация средних по признакам. Средние по признакам равны 0, получаем центрированные новые признаки.  $\square$

## 6. Пара фактов из линейной алгебры

1. Унитарная матрица  $\mathbb{U}$  — ортогональная матрица в комплексном случае. Ее свойства:

- $\mathbb{U}$  — квадратная матрица:  $\mathbb{U}^T = \mathbb{U}^{-1}$ .
- Столбцы  $\mathbb{U}$  ортонормированы.
- Строки  $\mathbb{U}$  ортонормированы.<sup>8</sup>
- Умножение на матрицу  $\mathbb{U}$  означает *поворот* или *отражение*.
- При умножении на матрицу  $\mathbb{U}$  (и на  $\mathbb{U}^T$ ) не меняются нормы векторов и углы между векторами. Пусть есть вектора  $Y, Z$ , после умножения на матрицу  $\mathbb{U}$  получим  $\tilde{Y} = \mathbb{U}Y, \tilde{Z} = \mathbb{U}Z$  и  $\|Y\| = \|\tilde{Y}\|, \|Z\| = \|\tilde{Z}\|, \langle Y, Z \rangle = \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle$  (почему это означает равенство углов между векторами?).

**Пример 1.**  $\mathbb{U} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$  — матрица поворота на угол  $\phi$ .

<sup>7</sup> Если отношение равно 1/2, то значит, что  $j$ -ый признак измеряет 50% всей информации.

<sup>8</sup> 2 пункт эквивалентен 3. Почему? Если матрица ортогональная, то и транспонированная к ней тоже ортогональная (следует из пункта 1).

Обычно, унитарная матрица строится из ортонормированного базиса, который составляет столбцы матрицы. (Проверьте, что в примере с поворотом на  $\phi$  это так.)

2. Пусть  $\{P_i\}_{i=1}^r$  — система независимых векторов, рассмотрим линейную оболочку  $\mathcal{L}_r = \text{span}\{P_1, \dots, P_r\}$  в  $\mathbb{R}^L$ ,  $\Pi : \mathbb{R}^L \rightarrow \mathcal{L}_r$  — ортогональный проектор на  $\mathcal{L}_r$  (он сопоставляет вектору ближайшую точку из подпространства, что делается опусканием перпендикуляра). Матрица  $\Pi$ :

$$\Pi = \mathbb{P}(\mathbb{P}^T \mathbb{P})^{-1} \mathbb{P}^T.$$

Пусть  $\{P_i\}_{i=1}^r$  — ортонормированный базис  $\mathcal{L}_r$ , т.е.

$$\mathbb{P}^T \mathbb{P} = \mathbb{I}_{r \times r} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times r}.$$

Тогда  $\Pi = \mathbb{P} \mathbb{P}^T$ .

## Сингулярное разложение (SVD — Singular Value Decomposition)

### 1.1. Как строится сингулярное разложение

Пусть  $L$  — число признаков,  $K$  — количество индивидов,  $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^T \in \mathbb{R}^{L \times K}$  — ненулевая матрица. Обозначим  $\mathbb{S} = \mathbb{Y}\mathbb{Y}^T \in \mathbb{R}^{L \times L}$  — симметричная неотрицательно определённая матрица. По определению,

$$\mathbb{S}U_i = \lambda_i U_i, \text{ где}$$

$\{U_i\}_{i=1}^L$  — ортонормированный набор из собственных векторов матрицы  $\mathbb{S}$ ,  
 $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$  — собственные числа матрицы  $\mathbb{S}$ .<sup>1</sup>

Пусть  $d = \text{rank } \mathbb{Y} = \text{colrank } \mathbb{Y} = \text{rowrank } \mathbb{Y}$ . Знаем, что  $d \leq \min(L, K)$ .

**Предложение 1.** 1.  $d = \text{rank } \mathbb{Y}\mathbb{Y}^T$ .

2.  $\lambda_d > 0$ ;  $\lambda_i = 0$  при  $i > d$ .<sup>2</sup>

3.  $\{U_i\}_{i=1}^d$  образуют ортонормированный базис  $\text{colspan } \mathbb{Y}$ .

Введём вектор

$$V_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{Y}^T U_i}{\sqrt{\lambda_i}} \in \mathbb{R}^K, \quad i = 1, \dots, d.$$

**Предложение 2.** 1.  $\{V_i\}_{i=1}^d$  — ортонормированная система векторов.

2.  $V_i$  — собственные вектора  $\mathbb{Y}^T \mathbb{Y}$ , соответствующие тем же собственным числам  $\lambda_i$ . Остальные собственные вектора  $\mathbb{Y}^T \mathbb{Y}$  соответствуют нулевым собственным числам.

3.  $U_i = \frac{\mathbb{Y} V_i}{\sqrt{\lambda_i}}.$

4.  $\mathbb{Y} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$  — SVD (Сингулярное разложение матрицы).<sup>34</sup>

---

<sup>1</sup> Неотрицательные, так как матрица  $\mathbb{S}$  неотрицательно определена.

<sup>2</sup> Упорядочили собственные числа: первые  $d$  строго положительные, а остальные все нули.

<sup>3</sup> Разложение в сумму элементарных матриц.

<sup>4</sup> Самый важный пункт утверждения.

Что здесь считать новыми признаками, если  $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^T$ ?  $V_i$ ,<sup>5</sup> так как  $U_i \in \mathbb{R}^L$ ,  $V_i \in \mathbb{R}^K$ .

- $U_i$  — ортонормированный базис в пространстве столбцов.
- $V_i$  — ортонормированный базис в пространстве строк.<sup>6</sup>
- $\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^d \lambda_i}$  — вклад  $i$ -ого признака.

**Определение 2.**  $\sqrt{\lambda_i}$  — сингулярные числа матрицы  $\mathbb{Y}$ ,  $U_i$  — левые сингулярные вектора,  $V_i$  — правые сингулярные вектора.

Тройка  $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$  называется  $i$ -ой собственной тройкой сингулярного разложения.

**Замечание 3.** Сингулярное разложение — единственное разложение с двумя ортонормированными базисами.

## 1.2. Матричный вид сингулярного разложения

Можно записать двумя способами:

1. Введём  $\mathbb{U}_d = [U_1 : \dots : U_d]$ ,  $\mathbb{V}_d = [V_1 : \dots : V_d]$ ,  $\Lambda_d = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ . Тогда

$$\mathbb{Y} = \mathbb{U}_d \Lambda_d^{1/2} \mathbb{V}_d^T.$$

2. Возьмём  $\mathbb{U} = [U_1 : \dots : U_d : U_{d+1} : \dots : U_L]$  — ортонормированный базис в  $\mathbb{R}^L$ .<sup>7</sup>

$\mathbb{V}^T = [V_1 : \dots : V_d : V_{d+1} : \dots : V_K]$  — ортонормированный базис в  $\mathbb{R}^K$ .

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ 0 & & \lambda_d & & 0 \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{L \times K}. \text{ Тогда}^8$$

$$\mathbb{Y} = \mathbb{U} \Lambda^{1/2} \mathbb{V}^T.$$

---

<sup>5</sup> Они длинные :)

<sup>6</sup> Можем  $\mathbb{X}$  транспонировать, проделать всё то же самое, а поменяются местами только  $U_i$  и  $V_i$ .

<sup>7</sup>  $U_{d+1}, \dots, U_L$  соответствуют нулевому собственному числу матрицы.

<sup>8</sup>  $\mathbb{U}, \mathbb{V}$  — ортогональные матрицы.



### 1.3. Единственность сингулярного разложения

*Насколько единственно разложение SVD (оно одно существует для матрицы или нет)?* Можно подумать, что разложение не единственное, так как

1. Собственные вектора не единственные, то есть если  $U_i$  — собственный вектор, то  $(-U_i)$  — собственный вектор,<sup>9</sup>

$$\mathbb{Y} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} (-U_i) (-V_i)^T.$$

2. Пусть есть два одинаковых собственных числа  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ ,  $U_1$  и  $U_2$  — два ортонормированных вектора, соответствующих собственному числу  $\lambda$ . Тогда любая линейная комбинация  $U_1$  и  $U_2$  будет являться также собственным вектором и будет соответствовать тому же собственному числу, то есть  $\forall \alpha, \beta: \alpha U_1 + \beta U_2$  — с.в. с с.ч.  $\lambda$ . Таким образом, если у нас есть два одинаковых собственных числа, то они порождают подпространство размерности 2, и любой ортонормированный базис в этом подпространстве подходит нам в качестве собственного вектора.<sup>10</sup>

Получаем, что единственности в буквальном смысле не получается. Поэтому формулируем необходимое нам утверждение.

**Предложение 3** (Единственность SVD). Пусть  $L \leq K$ . Пусть  $\mathbb{Y} = \sum_{i=1}^L c_i P_i Q_i^T$  — некоторое разложение в сумму элементарных матриц (биортогональное разложение), такое что:

1.  $c_1 \geq \dots \geq c_L \geq 0$ ;
2.  $\{P_i\}_{i=1}^L$  — ортонормированные,  $\{Q_i\}_{i=1}^L$  — ортонормированные.

Тогда  $\mathbb{Y} = \sum_{i=1}^L c_i P_i Q_i^T$  — SVD, то есть любое биортогональное разложение с неотрицательными коэффициентами является сингулярным.

---

<sup>9</sup> В вещественном случае собственный вектор определяется единственным образом с точностью до константы, модуль которой равен 1 (это всего 1 и -1). Но сингулярное разложение обобщается в комплексном случае, а здесь уже констант, по модулю равных 1, много.

<sup>10</sup> Если у нас есть два одинаковых собственных числа, то мы можем брать любой базис, но сумма двух матриц постоянна, то есть она не меняется от выбора базиса.

**Замечание 4.** В частности:

- $c_d > 0, c_{d+1} = \dots = c_L = 0$ ,
- $c_i^2 = \lambda_i$  — собственные числа  $\mathbb{Y}\mathbb{Y}^T$ ,
- $P_i$  — собственные вектора  $\mathbb{Y}\mathbb{Y}^T$ ,
- $Q_i$  — собственные вектора  $\mathbb{Y}^T\mathbb{Y}$ ,
- $Q_i = \frac{\mathbb{Y}^T P_i}{\sqrt{\lambda_i}}, i = 1, \dots, d$  ( $d = \text{rank } \mathbb{Y}\mathbb{Y}^T$ ).

## 1.4. Оптимальные свойства сингулярного разложения

Обозначим  $M_r \subset \mathbb{R}^{L \times K}$  — пространство матриц ранга, меньшего или равного  $r$ .

**Предложение 4** (Оптимальные свойства сингулярного разложения). Пусть  $r \leq d$ .

1. (Аппроксимация матрицей (Low-rank approximation))

$$\min_{\tilde{\mathbb{Y}} \in M_r} \|\mathbb{Y} - \tilde{\mathbb{Y}}\|_F^2 = \sum_{i=r+1}^d \lambda_i \text{ и достигается на } \tilde{\mathbb{Y}} = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

2. (Аппроксимация подпространством)

Пусть  $\mathcal{L}_r \subset \mathbb{R}^L$  — подпространство размерности  $\leq r$ . Тогда

$$\min_{\mathcal{L}_r} \sum_{i=1}^K \text{dist}^2(Y_i, \mathcal{L}_r) = \sum_{i=r+1}^d \lambda_i$$

и достигается на  $\mathcal{L}_r^{(0)} = \text{span}(U_1, \dots, U_r)$ .

Попробуем ответить на вопрос — что выгоднее хранить в памяти — всю матрицу или ее сингулярное разложение? Чтобы хранить матрицу данных размера  $L \times K$ , требуется хранить  $LK$  элементов. Чтобы хранить вектора сингулярного разложения, требуется  $d(L + K)$  элементов.<sup>11</sup> Таким образом, если, к примеру, матрица близка к квадратной ( $L = K$ ), то при  $L > 2d$ , выгоднее хранить сингулярное разложение.

---

<sup>11</sup> Всего  $d$  сингулярных троек,  $U_i \in \mathbb{R}^L, V_i \in \mathbb{R}^K$ , а сингулярные числа приписываем к одному из векторов.

## 1.5. Главные направления

Пусть  $Y_1, \dots, Y_K \in \mathbb{R}^L$ . Рассмотрим вектор  $P : \|P\| = 1$ . Этот вектор задает направление (прямую, подпространство размерности 1). Проекция на данное направление выглядит следующим образом:  $\langle Y_i, P \rangle P$ , а ее длина равна  $|\langle Y_i, P \rangle|$ . Проекция измеряет то, насколько это направление соответствует нашим данным. Поставим задачу найти направление, которое лучше всего описывает нашу совокупность точек. Чем больше проекция, тем лучше. Задача:

$$\sum_{i=1}^K \langle Y_i, P \rangle^2 \rightarrow \max_P.$$

Вектор  $P_1$ , на котором достигается максимум, задает *первое главное направление*.

Далее будем искать максимум по всевозможным векторам, ортогональным  $P_1$  и так далее.

**Предложение 5.** *Верно следующее:*

1.  $\max_P \sum_{i=1}^K \langle Y_i, P \rangle^2 = \lambda_1$  и достигается на  $P = U_1$ ,
2.  $\max_{P: P \perp U_1} \sum_{i=1}^K \langle Y_i, P \rangle^2 = \lambda_2$  и достигается на  $P = U_2$ ,

...

- $r$ .  $\max_{P: P \perp U_j, j=1, \dots, r-1} \sum_{i=1}^K \langle Y_i, P \rangle^2 = \lambda_r$  и достигается на  $P = U_r$ .

$U_i$  — главные направления.

Разложение  $Y_j$  по главным направлениям:  $Y_j = \sum_{i=1}^r \langle Y_j, U_i \rangle U_i$ .

$\langle Y_j, U_i \rangle$  —  $i$ -я компонента вектора  $Y_j$  (коэффициент разложения вектора по главным направлениям). Составим вектор  $i$ -х главных компонент:

$$Z_i = \begin{pmatrix} \langle Y_1, U_i \rangle \\ \dots \\ \langle Y_K, U_i \rangle \end{pmatrix} = \mathbb{Y}^T U_i = \sqrt{\lambda_i} V_i = \mathbb{X} U_i.$$

## Анализ главных компонент (АГК) (PCA — principal component analysis)

### 2.1. Анализ главных компонент на выборочном языке

#### 2.1.1. Изменение нормы в пространстве признаков

Итак, мы умеем строить сингулярное разложение в виде

$$\mathbb{Y} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

Теперь перейдём на выборочный язык анализа главных компонент. Помним, что  $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^T \in \mathbb{R}^{L \times K}$ , где столбцы — индивиды, строки — признаки; индивидов  $K$ , а признаков  $L$ .<sup>1</sup> В случае анализа главных компонент  $D_1 = \{1, \dots, L\}$ ,  $D_2 = \{1, \dots, K\}$ ,  $\mu_1(\{i\}) = 1$  — считающая мера,  $\mu_2(\{i\}) = \frac{1}{K}$  — вероятностная мера, где  $i$  — номер индивида. Отсюда следует, что квадрат нормы  $\|\cdot\|_1^2$  вектора-индивида из  $\mathbb{R}^L$  равен сумме квадратов его компонент всегда, а норма в квадрате  $\|\cdot\|_2^2$  вектора-признака из  $\mathbb{R}^K$  в анализе главных компонент считается не как сумма, а как среднее арифметическое квадратов компонент вектора. Далее, 1 у нормы вектора означает, что там сумма квадратов, а 2 — что среднее арифметическое. Если индекса у нормы нет, то это означает, что рассматривается вариант 1, т.е., обычная евклидова норма.

Полученное разложение с измененной нормой в пространстве признаков обозначим:

$$\mathbb{Y} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\tilde{\lambda}_i} \tilde{U}_i \tilde{V}_i^T.$$

#### 2.1.2. Связь между SVD и АГК. Общее и различия

Необходимо найти связь между  $\tilde{\lambda}_i$ ,  $\tilde{U}_i$ ,  $\tilde{V}_i$  и  $\lambda_i$ ,  $U_i$ ,  $V_i$  соответственно. Знаем, что

- $U_i$  — ортонормированная система собственных векторов матрицы  $\mathbb{Y}\mathbb{Y}^T = \mathbb{X}^T\mathbb{X}$ ,
- $\tilde{U}_i$  — ортонормированная система собственных векторов матрицы  $\frac{1}{K}\mathbb{Y}\mathbb{Y}^T = \frac{1}{K}\mathbb{X}^T\mathbb{X}$ .

---

<sup>1</sup> Визуально:  $\mathbb{Y}$  — горизонтальная матрица, а  $\mathbb{X}$  — вертикальная.

Таким образом, получаем следующие соотношения:

- $U_i = \tilde{U}_i$ ,
- $\lambda_i = K\tilde{\lambda}_i$ ,
- $V_i = \frac{\tilde{V}_i}{\sqrt{K}}$ .
- Так как коэффициент (веса)  $1/K$  не влияет на равенство нулю скалярного произведения, то условие ортогональности векторов  $V_i$  то же самое.

Также заметим, что

$$\|\mathbb{Y}\|_{1,2}^2 = \frac{1}{K} \sum_{ij} y_{ij}^2 = \frac{\|\mathbb{Y}\|_F^2}{K}.$$

Далее будем предполагать, что признаки центрированы, т.е. среднее по строкам  $\mathbb{Y}$  (или, что то же самое, среднее по столбцам  $\mathbb{X}$ ) равно 0.

Подытожим отличия сингулярного разложения от анализа главных компонент.

1. Столбцы в матрице  $\mathbb{Y}$  неравноправны, то есть SVD полностью симметрично, а АГК нет. В частности, это из-за разных норм в пространстве признаков.
2. В АГК предполагается, что признаки центрированы, а индивиды нет.
3. В АГК рекомендована нормировка признаков.

*Когда нормируем признаки?* Когда признаки измерены в разных шкалах.<sup>2</sup>

- Нормируем признаки, если есть, например, данные в сантиметрах и метрах.
- Не нормируем признаки, если есть, например, баллы за задачи и хотим, чтобы главная компонента отражала уровень по результатам задач. Пусть есть сложные (от 0 до 10) и простые (от 0 до 5) задачи. Ясно, что получить 2.5 балла за простую задачу и 5 баллов за сложную — это разные вещи, но если мы нормируем данные, то мы сравниваем эти две вещи.

---

<sup>2</sup> Если что-то измерено в шкале от 0 до 1, а что-то от 0 до 100, то результат АГК будет неинтересным. Всегда первое главное направление будет перетягиваться тем признаком, которые принимает значения с существенно большим разбросом.

## 2.2. Чему АГК соответствует на статистическом языке?

Перейдём к  $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  ( $L \rightarrow p$  — количество признаков,  $K \rightarrow n$  — число индивидов). Пусть столбцы  $\mathbb{X}$  (признаки) центрированы. *Берём признак, какую норму нужно рассматривать?* Вероятностную норму. *Что означает характеристика  $\|X_i\|_2^2$  на статистическом языке?*

$$\|X_i\|_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n ((X_i)_j - \bar{X}_i)^2 = s^2(X_i) — \text{выборочная дисперсия } X_i.$$

*Что означает норма матрицы данных  $\|\mathbb{X}\|_{1,2}^2$  на статистическом языке?* Используем верхнюю строчку и предполагаем, что  $\mathbb{X}$  центрированы.

$$\|\mathbb{X}^T\|_{1,2}^2 = \sum_{i=1}^p \|X_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^p s^2(X_i) — \text{total variance.}$$

Посчитаем норму вектора главных компонент (считаем, что АГК:  $\mathbb{Y} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$ ):  $Z_i = \mathbb{X} U_i = \sqrt{\lambda_i} V_i$ , где  $Z_i$  — вектор проекций индивидов на  $i$ -ое направление и  $i = 1 \dots, n$ .

Знаем, что  $\|Z_i\|_2^2 = s^2(Z_i)$ . Учитывая, что  $V_i$  нормированы, то

$$\|Z_i\|_2^2 = s^2(Z_i) = \|\mathbb{X} U_i\|_2^2 = \|\sqrt{\lambda_i} V_i\|_2^2 = \lambda_i.$$

Разложение можем записать следующим образом:

$$\mathbb{X}^T = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T = \sum_{i=1}^d F_i V_i^T = \sum_{i=1}^d U_i Z_i^T,$$

где  $F_i = \sqrt{\lambda_i} U_i$  — вектор  $i$ -х факторных весов (нагрузок),  $Z_i = \sqrt{\lambda_i} V_i$  — вектор главных компонент.

## 2.3. Вклад главных компонент

Вычислим норму  $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^T$ .

$$\|\mathbb{X}^T\|_{1,2}^2 = \sum_{i=1}^p s^2(X_i) = \sum_{i=1}^d \|\sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T\|_{1,2}^2 = \sum_{i=1}^d \lambda_i = \sum_{i=1}^d s^2(Z_i).$$

Получилось, что total variance не меняется при переходе к новым признакам (при повороте норма векторов не меняется).

$\frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^d \lambda_i}$  — вклад  $j$ -ой главной компоненты в общую дисперсию.<sup>3</sup>

$s^2(X_i)$  — информативность  $i$ -ого признака,  $s^2(Z_i)$  — информативность  $i$ -ой главной компоненты. Таким образом, чем больше разброс, тем больше эта характеристика информативна. Первая главная компонента имеет наибольшую норму, поэтому эта компонента самая информативная.

Напомним, что  $Z_i = \mathbb{X}U_i$ , то есть  $Z_i$  — линейная комбинация  $X_j$  с коэффициентами, взятыми из  $U_i$ . Таким образом, *главные компоненты* — это ортогональные между собой линейные комбинации исходных признаков, обладающие свойством оптимальности.

*Возможны варианты:*

1. Матрица  $\mathbb{X}$  — центрирована. Тогда  $U_i$  — это собственные векторы матрицы  $\frac{1}{n}\mathbb{Y}\mathbb{Y}^T = \frac{1}{n}\mathbb{X}^T\mathbb{X}$  (выборочная ковариационная матрица).
2. Матрица  $\mathbb{X}$  — центрирована и нормирована. Тогда  $U_i$  — собственные векторы матрицы  $\frac{1}{n}\mathbb{Y}\mathbb{Y}^T = \frac{1}{n}\mathbb{X}^T\mathbb{X}$  (выборочная корреляционная матрица).

## 2.4. АГК с точки зрения построения базиса в пространстве индивидов и в пространстве признаков

Анализ главных компонент на выборочном языке:  $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $U_i \in \mathbb{R}^p$ ,  $V_i \in \mathbb{R}^n$ .

$$\mathbb{X}^T = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T = \sum_{i=1}^d F_i V_i^T = \sum_{i=1}^d U_i Z_i^T,$$

$F_i = \sqrt{\lambda_i} U_i$  — вектор  $i$ -х факторных весов (нагрузок),

$Z_i = \sqrt{\lambda_i} V_i$  — вектор главных компонент.

1.  $\mathbb{X}^T = \sum_{i=1}^d F_i V_i^T$ , где  $\{V_i\}_{i=1}^d$  — ортонормированный базис в пространстве признаков.

Пусть  $\mathbb{F} = \{f_{ij}\}_{i=1, j=1}^{p, d} = [F_1 : \dots, F_d]$ . Тогда

$$f_{ij} = \underbrace{\langle X_i, V_j \rangle_2}_{\substack{j\text{-я коорд. } i\text{-ого признака} \\ \text{в базисе новых признаков}}} = \begin{cases} \text{Cov}(X_i, V_j), & \text{если АГК по ковариационной матрице.} \\ \rho(X_i, V_j) = \rho(X_i, Z_j), & \text{если АГК по корреляционной матрице.} \end{cases}$$

---

<sup>3</sup> В числителе — дисперсия нового признака, в знаменателе — общая дисперсия.

2.  $\mathbb{X}^T = \sum_{i=1}^d U_i Z_i^T$ , где  $\{U_i\}_{i=1}^d$  — ортонормированный базис в пространстве индивидов.

Пусть  $\mathbb{Z} = \{z_{ij}\}_{i=1, j=1}^{n, d} = [Z_1 : \dots, Z_d]$ . Тогда

$$z_{ij} = \underbrace{\langle \mathbf{x}_i, U_j \rangle_1}_{\substack{j\text{-я коорд. } i\text{-ого индивида} \\ \text{в новом базисе}}}.$$

Так как индивиды не центрированы и не нормированы, это равенство продолжить по аналогии с предыдущим пунктом не можем. Но можем выписать следующее.

Пусть  $\alpha(\mathbf{x}_i, U_j)$  — угол между  $\mathbf{x}_i$  и  $U_j$ . Тогда

$$\cos(\alpha(\mathbf{x}_i, U_j)) = \frac{\langle \mathbf{x}_i, U_j \rangle_1}{\|\mathbf{x}_i\| \|U_j\|} = \frac{\langle \mathbf{x}_i, U_j \rangle_1}{\|\mathbf{x}_i\|}.$$

Эти два пункта помогают ответить на вопрос — *как выявить индивидов, которые плохо описываются плоскостью первых двух компонент?*

Чтобы посчитать, как хорошо индивид описывается плоскостью, надо посчитать косинус угла между плоскостью и индивидом. Очевидно, что индивиды, перпендикулярные плоскости, плохо описываются этой плоскостью. Если есть ортогональный базис, то верно следующее:  $\cos^2(\text{угла между вектором и проекцией на плоскость}) = \cos^2(\text{угла между вектором и 1-ым элементом базиса}) + \cos^2(\text{угла между вектором и 2-ым элементом базиса})$ .

Пусть  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p$  — индивид. Тогда косинус угла между ним и плоскостью первых двух главных компонент:

$$\cos^2(\alpha(\mathbf{x}_i, \text{span}(U_1, U_2))) = \frac{\overbrace{\langle \mathbf{x}_i, U_1 \rangle^2}^{z_{i1}^2}}{\|\mathbf{x}_i\|^2} + \frac{\overbrace{\langle \mathbf{x}_i, U_2 \rangle^2}^{z_{i2}^2}}{\|\mathbf{x}_i\|^2} = \frac{z_{i1}^2}{\sum_{j=1}^d z_{ij}^2} + \frac{z_{i2}^2}{\sum_{j=1}^d z_{ij}^2}.$$

Мы получили, что, складывая квадраты нормированных строк  $\mathbb{Z}$ , мы можем получать квадраты косинусов углов между индивидами и плоскостью.

Вернемся к признакам. Пусть признаки стандартизованы. Аналогично можем получить, что

$$\cos^2(\alpha(X_j, \text{span}(V_1, V_2))) = f_{j1}^2 + f_{j2}^2.$$

Если все центрировано, то косинус можно назвать корреляцией (формулы для косинуса и коэффициента корреляции совпадут). Тогда получим, что множественный коэффициент корреляции равен сумме квадратов обычных корреляций, то есть

$$R^2(X_j; V_1, V_2) = \rho^2(X_j, V_1) + \rho^2(X_j, V_2),$$



так как квадрат множественного коэффициента корреляции между вектором-признаком и набором векторов-признаков — это косинус угла между центрированным вектором-признаком и подпространством, натянутым на вектора-признаки из набора. Интерпретация множественного коэффициента корреляции — мера зависимости между одним признаком и набором признаков.

**Замечание 5.**  $\mathbb{U} = [U_1 : \dots : U_p]$ ,  $\mathbb{F} = [F_1 : \dots : F_d]$

$$1. \sum_{i=1}^p u_{ij}^2 = \|U_j\|^2 = 1$$

$$2. \sum_{j=1}^p u_{ij}^2 = 1 \text{ (так как } \mathbb{U} \text{ — тоже ортогональная матрица)}$$

$$3. \sum_{i=1}^p f_{ij}^2 = \|F_j\|^2 = \lambda_j$$

$$4. \sum_{j=1}^d f_{ij}^2 = \sum_{j=1}^d \langle X_i, V_j \rangle_2^2 = \|X_i\|_2^2 = \begin{cases} s^2(X_i), & \text{если АГК по ковариаци. matr.} \\ 1, & \text{если АГК по корреляц. matr.} \end{cases}$$

Скалярное произведение  $\langle X_i, V_1 \rangle_2^2$  характеризует то, насколько 1-ый новый признак описывает исходный. Если рассмотреть  $\langle X_i, V_1 \rangle_2^2 + \langle X_i, V_2 \rangle_2^2$ , то это то, насколько первых два новых признака описывают старый.

## 2.5. Интерпретация главных компонент. Смысл первой главной компоненты в случае положительных ковариаций

Формула, на основе которой происходит интерпретация главных компонент — это  $Z_i = \mathbb{X}U_i$ . Т.е.,  $i$ -й собственный вектор задает коэффициенты линейной комбинации исходных признаков. Таким образом, мы получаем новые признаки, на основе собственных векторов их интерпретируем и знаем, что первый признак имеет максимально возможную дисперсию (информативность), второй с ним не коррелирует и имеет среди некоррелирующих также максимально возможную дисперсию, и т.д.

**Теорема 1** (Перрона-Фробениуса). Пусть  $\mathbb{A}$  — симметричная, неотрицательно определенная матрица, ее элементы положительны. Тогда все компоненты ее первого собственного вектора  $U_1$  будут одного знака.

Таким образом, *если все корреляции (ковариации) положительны, то все компоненты  $U_1$  одного знака*. Это определяет смысл первой главной компоненты (в случае положительных ковариаций). Тогда первая главная компонента является линейной комбинацией старых признаков с коэффициентами одинакового знака. Это можно проинтерпретировать как некий общий уровень чего-либо (например, общий уровень ученика, если признаки — оценки в школе). От того, какой знак, положительный или отрицательный, зависит то, с какой стороны по оси первой главной компоненты находятся в среднем большие значения исходных признаков, а с какой — меньшие.

Остальные главные компоненты можно также интерпретировать исходя из коэффициентов перед старыми признаками.<sup>4</sup>

## 2.6. Выбор числа главных компонент

Приведем некоторые варианты выбора числа главных компонент.

1. Задается процент  $P$  и берется  $\tau$  компонент:

$$\frac{\sum_{i=1}^{\tau} \lambda_i}{\sum_{i=1}^d \lambda_i} > P\%,$$

то есть чтобы компоненты несли в себе не менее  $P\%$  информации.

2. Правило Кайзера. Выбираются главные компоненты, информативность которых больше средней информативности:

$$i : \lambda_i > \frac{\sum_{i=1}^p s^2(X_i)}{p} = \frac{\sum_{i=1}^d \lambda_i}{p}.$$

Если АГК по корреляционной матрице, то  $i : \lambda_i > 1$ .

3. Правило сломанной трости. Пусть  $\mu_k = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{\sum_{i=1}^d \lambda_i}$ . Числа  $\mu_i$  делят отрезок  $[0, 1]$  на неравные части. Получаем разбиение  $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_{d-1} < 1$ . Но это же разбиение можно построить, случайно бросая  $d - 1$  точку на единичный отрезок (как бы случайно ломаем трость на  $d$  кусочков). Выбираются те компоненты, длины которых больше средней длины кусочка случайно сломанной трости.

---

<sup>4</sup> Напомним, что коэффициентами линейной комбинации являются элементы векторов  $U_i$ .

4. Правило каменной осыпи. Строим график упорядоченных по убыванию собственных чисел (scree plot). С какого-то момента собственные числа начинают медленно меняться. Берем компоненты до этого момента, то есть пока собственные числа существенно отличаются друг от друга.

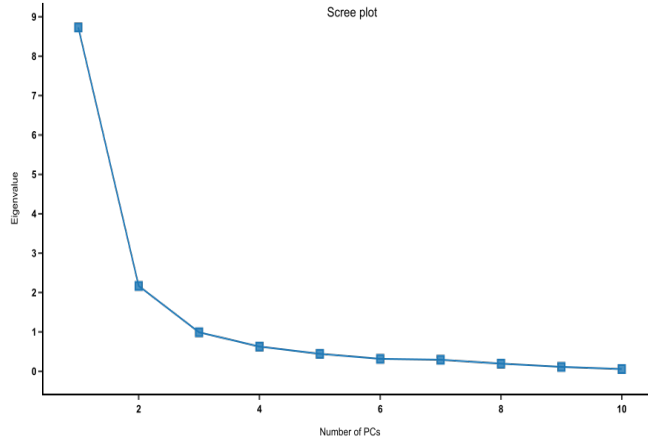


Рис. 2.1. Scree plot

5. Интерпретируем столько компонент, сколько можем.

## 2.7. Оптимизация в АГК в терминах ковариационных матриц

Напомним, что  $Y = X^T$ , где  $X$  — матрица данных.

**Предложение 6.** Задача  $\|Y - \tilde{Y}\| \rightarrow \min_{\tilde{Y}: \text{rank } \tilde{Y} \leq r}$  эквивалентна задаче  $\|YY^T - \tilde{Y}\tilde{Y}^T\| \rightarrow \min_{\tilde{Y}: \text{rank } \tilde{Y} \leq r}$ . Решение этой задачи  $\tilde{Y}^*$  строится как сумма собственных троек, соответствующих первым  $r$  главным компонентам.

Если матрица центрирована, то задача  $\|YY^T - \tilde{Y}\tilde{Y}^T\| \rightarrow \min_{\tilde{Y}: \text{rank } \tilde{Y} \leq r}$  эквивалентна следующей задаче:

$$\|S - \tilde{S}\| \rightarrow \min_{\tilde{S}: \text{rank } \tilde{S} \leq r},$$

где  $S$  — ковариационная матрица для наших данных, а  $\tilde{S}$  — какая-то ковариационная матрица (симметричная, неотрицательно определенная).

## Глава 3

### Факторный анализ

#### (EFA — exploratory factor analysis)

##### 3.1. Модель в факторном анализе

Главное отличие факторного анализа от анализа главных компонент — это наличие модели в факторном анализе.

Пусть  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_p)^T \in \mathbb{R}^p$ ,  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_r)^T \in \mathbb{R}^r$ ,  $r < p$ . Предполагаем, что  $\mathbb{E}\xi_i = 0$ ,  $\mathbb{E}\eta_i = 0$ ,  $\mathbb{D}\eta_i = 1$ ,  $\eta_i$  и  $\eta_j$  некоррелированы. Пусть  $\mathbb{F}_r = [F_1 : \dots : F_r] \in \mathbb{R}^{p \times r}$ . (Помните — у нас есть  $p$  старых признаков и мы строим новых. Новые  $r$  признаков будут в каком-то смысле самыми лучшими.)

Итак, *модель в факторном анализе*:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbb{F}_r \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

где ковариационная матрица  $\text{Cov } \boldsymbol{\varepsilon} = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2)$  диагональная,  $\boldsymbol{\eta}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  некоррелированы. Случайному вектору  $\boldsymbol{\xi}$  соответствует матрица данных  $\mathbb{X}^T$  (признаки, которые мы наблюдаем), а  $\boldsymbol{\eta}$  соответствует  $\mathbb{V}_r^T$  (скрытые признаки, которые мы не наблюдаем). Получаем соотношение

$$\mathbb{X} = \mathbb{V}_r \mathbb{F}_r^T + \mathbb{E}.$$

Перед нами стоит задача выявить эти скрытые признаки (задача факторного анализа). Причем, даже нет цели найти значения факторов. Цель — найти их смысл.

Заметим, что модель очень похожа на то, что можно получить с помощью АГК:

$$\mathbb{X} = \mathbb{V}_{1,r} \mathbb{F}_{1,r}^T + \mathbb{V}_{r+1,d} \mathbb{F}_{r+1,d}^T,$$

но есть разница (увидим позже).

Модель можно переписать в следующем виде:

$$\Sigma = \text{Cov}(\boldsymbol{\xi}) = \text{Cov}(\mathbb{F}_r \boldsymbol{\eta}) + \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{F}_r \mathbb{F}_r^T + \Psi,$$

где  $\Psi = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2)$ ,  $\text{rank } \mathbb{F}_r \mathbb{F}_r^T \leq r$ . Тогда данные — это выборочная ковариационная матрица.

Вообще, факторный анализ всегда делается на основе стандартизованных данных. Т.е. всегда мы получаем модель корреляционной матрицы. Тогда  $f_{ij} = \rho(\xi_i, \eta_j)$  и матрица факторных нагрузок выглядит следующим образом:

	$\eta_1$	$\dots$	$\eta_r$
$\xi_1$	$f_{11}$	$\dots$	$f_{1r}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\xi_p$	$f_{p1}$	$\dots$	$f_{pr}$

Модель:

$$\xi_1 = f_{11}\eta_1 + \dots + f_{1i}\eta_i + \dots + f_{1r}\eta_r + (\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + \dots + 0\varepsilon_p)$$

$$\xi_2 = f_{21}\eta_1 + \dots + f_{2i}\eta_i + \dots + f_{2r}\eta_r + (0\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + 0\varepsilon_p)$$

$\dots$

$$\xi_p = f_{p1}\eta_1 + \dots + f_{pi}\eta_i + \dots + f_{pr}\eta_r + (0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_p)$$

Мы предполагаем, что в каждом столбце (и строчке) перед  $\varepsilon_i$  только один из коэффициентов не равен нулю, а среди  $f_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , хотя бы два не равны нулю.

### 3.2. Общности и уникальности

В этом пункте введем понятие общности и уникальности признаков.

Обозначим  $\xi' = \mathbb{F}_r \eta$ , тогда  $\xi = \xi' + \varepsilon$ . То есть  $\xi'$  — это та часть данных, которая описывается факторами. Предполагаем, что  $D\xi_i = 1$ ,  $D\varepsilon_i = \sigma_i^2$ , тогда  $D\xi'_i = D\xi_i - D\varepsilon_i = 1 - \sigma_i^2$ .

Можно заметить, что  $\text{Cov}(\xi_i, \xi_j) = \text{Cov}(\xi'_i + \varepsilon_i, \xi'_j + \varepsilon_j) = \text{Cov}(\xi'_i, \xi'_j)$ , так как остальные слагаемые обнуляются из-за некоррелированности. Получаем, что  $\text{Cov}(\xi'_i, \xi'_j) = \rho_{ij}$ . Также известно, что ковариационная матрица  $\xi'$  равна  $\text{Cov}(\xi') = \mathbb{F}_r \text{Cov}(\eta) \mathbb{F}_r^T = \mathbb{F}_r \mathbb{F}_r^T$ .

Тогда

$$\mathbb{F}_r \mathbb{F}_r^T = \text{Cov}(\xi') = \begin{pmatrix} 1 - \sigma_1^2 & \dots & \rho_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p1} & \dots & 1 - \sigma_p^2 \end{pmatrix}.$$

Мы получили, что

$$1 = D\xi_i = D\xi'_i + D\varepsilon_i = \underbrace{(1 - \sigma_i^2)}_{\substack{\text{commonality,} \\ \text{общность признака}}} + \underbrace{\sigma_i^2}_{\substack{\text{uniqueness,} \\ \text{уникальность}}}.$$

**Замечание 6.** *Общность является множественным коэффициентом корреляции:*

$$\underbrace{D\xi'_i}_{\text{общность}} = (\mathbb{F}_r \mathbb{F}_r^T)_{ii} = f_{i1}^2 + f_{i2}^2 + \dots + f_{ir}^2 = \sum_{j=1}^r f_{ij}^2 = \sum_{j=1}^r (\rho(\xi_i, \eta_j))^2 = R^2(\xi_i | \eta_1, \dots, \eta_r),$$

т.к.  $\eta_i$  и  $\eta_j$  некоррелированы.

Таким образом, общность — это то, что описывается факторами, а уникальность признака — то, что не описывается факторами.

### 3.3. Корректность поставленной задачи

Теперь посмотрим, корректно ли поставлена задача?

Во-первых, напомним, что в матрице  $\mathbb{F}$  не может быть такого столбца, где только один элемент не равен нулю, то есть это факторы, соответствующие хотя бы двум признакам. Случайные величины из вектора  $\varepsilon$  в каком-то смысле тоже факторы, но каждый из них соответствует только одному признаку. Факторный анализ ищет общие факторы.

Определим  $\tilde{\mathbb{F}}_r = \mathbb{F}_r \mathbb{W}$ , где  $\mathbb{W} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  — ортогональная матрица. Тогда

$$\tilde{\mathbb{F}}_r \tilde{\mathbb{F}}_r^T = \mathbb{F}_r \mathbb{W} \mathbb{W}^T \mathbb{F}_r^T = \mathbb{F}_r \mathbb{F}_r^T,$$

то есть решение не единственно, и любое вращение — тоже решение. Необходимо добавить ограничения, чтобы как-то зафиксировать решение. Матрица  $\mathbb{W}$  содержит  $\frac{r(r-1)}{2}$  параметров (известный факт — ортогональную матрицу размерности  $r \times r$  можно задать таким количеством параметров). Следовательно, для однозначности модели необходимо добавить столько же ограничений, чтобы убрать свободу.

**Пример 2.** Пусть  $\mathbb{S}$  — выборочная ковариационная матрица.

Тогда ограничение:  $\mathbb{F}_r^T \mathbb{S} \mathbb{F}_r$  — диагональная матрица  $r \times r$ . Тут  $\frac{r(r-1)}{2}$  ограничений (из-за симметричности число ограничений равно числу нулей под диагональю матрицы).

Теперь посчитаем число параметров в модели  $\Sigma = \mathbb{F}_r \mathbb{F}_r^T + \Psi$ . Тут

$$\underbrace{pr}_{\text{для } \mathbb{F}_r} + \underbrace{p}_{\text{для } \Psi} - \underbrace{\frac{r(r-1)}{2}}_{\text{вычитаем число ограничений}}$$

параметров с учетом ограничений.

Модель задается  $\frac{p(p+1)}{2}$  равенствами. Тогда нужно требовать, чтобы число параметров не превосходило число уравнений, то есть

$$pr + p - \frac{r(r-1)}{2} \leq \frac{p(p+1)}{2}.$$

Если записать это неравенство в другом виде, то получим

$$\frac{(p-r)^2 - (p+r)}{2} \geq 0.$$

### 3.4. Задача оценивания параметров

Теперь можем перейти к задаче оценивания параметров. Можно оценивать несколькими методами.

#### 3.4.1. Метод наименьших квадратов (OLS)

Пусть  $\mathbb{S} = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^p$  — выборочная ковариационная матрица.

Решаем задачу  $\|\mathbb{S} - \tilde{\mathbb{S}}\|_2^2 \rightarrow \min_{\tilde{\mathbb{S}}: \tilde{\mathbb{S}} = \tilde{\mathbb{F}}_r \tilde{\mathbb{F}}_r^T + \tilde{\Psi}}$ , что эквивалентно задаче

$$\sum_{i,j=1}^p (s_{ij} - \tilde{s}_{ij})^2 \rightarrow \min_{\tilde{\mathbb{S}}: \tilde{\mathbb{S}} = \tilde{\mathbb{F}}_r \tilde{\mathbb{F}}_r^T + \tilde{\Psi}}$$

**Алгоритм MINRES** (OLS для ковариационной матрицы):

1. Рассматриваем не всю матрицу, а ее часть, и решаем следующую задачу:<sup>1</sup>

$$\sum_{i \neq j} \underbrace{(s_{ij} - \tilde{s}_{ij})^2}_{\text{residuals}} \rightarrow \min_{\tilde{\mathbb{S}}: \tilde{\mathbb{S}} = \tilde{\mathbb{F}}_r \tilde{\mathbb{F}}_r^T}.$$

2. Находим  $\hat{\mathbb{F}}_r$ .

$$3. \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \vdots \\ \sigma_p^2 \end{pmatrix}}_{\text{Диагональ } \mathbb{S}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Диагональ } \tilde{\mathbb{S}}} - (\text{Диагональ } \tilde{\mathbb{F}}_r \tilde{\mathbb{F}}_r^T)$$

---

<sup>1</sup> Матрицу  $\Psi$  убрали, т.к. она диагональна, а мы суммируем по всем  $i \neq j$ .

### 3.4.2. Взвешенный метод наименьших квадратов (WLS)

Решается задача

$$\sum_{i,j=1}^p \frac{(s_{ij} - \tilde{s}_{ij})^2}{\hat{\sigma}_i^2 \hat{\sigma}_j^2} \rightarrow \min_{\tilde{\mathbf{S}}: \tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{F}}_r \tilde{\mathbf{F}}_r^T + \tilde{\Psi}}$$

Получаем, что чем меньше уникальность, тем больше вес слагаемого.

### 3.4.3. Метод максимального правдоподобия (MLE)

Выписывается распределение ковариационной матрицы данных в модели факторного анализа и находятся оценки параметров ее максимизацией. Результат примерно такой же, как в WLS.

## 3.5. Разница между АГК и факторным анализом

Первое отличие между факторным анализом и анализом главных компонент заключается в наличии модели в факторном анализе.

Второе отличие состоит в том, что у АГК и факторного анализа разные оптимизационные задачи. **Задача факторного анализа:**

$$\sum_{i \neq j} (s_{ij} - \tilde{s}_{ij})^2 \rightarrow \min_{\tilde{\mathbf{S}}: \tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{F}}_r \tilde{\mathbf{F}}_r^T},$$

где минимизируется сумма по всем элементам, кроме диагональных,  $\tilde{\mathbf{S}}$  — симметричная, неотрицательно определенная матрица ранга, не превосходящего  $r$ .

**Задача в анализе главных компонент:**

$$\sum_{i,j} (s_{ij} - \tilde{s}_{ij})^2 \rightarrow \min_{\tilde{\mathbf{S}}: \tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{F}}_r \tilde{\mathbf{F}}_r^T},$$

минимизируется сумма по всем элементам,  $\tilde{\mathbf{S}}$  — симметричная, неотрицательно определенная матрица ранга, не превосходящего  $r$ .

Таким образом, цель факторного анализа — как можно лучше воспроизвести ковариации. В анализе главных компонент стоит аппроксимизационная задача, и АГК не решает именно задачу факторного анализа, хотя все равно используется для поиска факторов на практике.

Есть еще третье различие, которое рассмотрим ниже — в факторном анализе порядок факторов не важен (в АГК они упорядочены по вкладу), а важен их смысл.



### 3.6. Проверка гипотез

#### 3.6.1. Проверка значимости модели

Рассмотрим гипотезу  $H_0 : \Sigma = \mathbb{F}_r \mathbb{F}_r^T + \Psi$  о том, что  $\Sigma$  действительно имеет такой вид. Статистика критерия

$$t = (n - 1 - \frac{2p + 4r - 5}{6}) \log \frac{\overbrace{|\widehat{\mathbb{F}}_r \widehat{\mathbb{F}}_r^T + \widehat{\Psi}|}^{\text{То, что ожидаем}}}{\underbrace{|\mathbb{S}|}_{\text{То, что есть}}} \sim \chi^2\left(\frac{(p-r)^2 - (p+r)}{2}\right)$$

(в нормальной модели).

Идеальное значение равно 0 (логарифм будет равен нулю, если данные идеально соответствуют гипотезе, критическая область справа).

#### 3.6.2. Тест сферичности Бартлетта

Для начала необходимо проверить, есть ли вообще структура. Гипотеза о том, что общей структуры нет:  $H_0 : \Sigma = \mathbb{I}_{p \times p}$  (единичная матрица).

Тест сферичности Бартлетта: статистика критерия

$$t = (n - 1 - \frac{2p - 5}{6})(-\log |\mathbb{S}|) \sim \chi^2\left(\frac{p(p-1)}{2}\right)$$

(в нормальной модели).

Для выбора порядка модели можно применять информационные критерии AIC, BIC (в нормальной модели) — подход со штрафом за число параметров. Можно промоделировать, посчитать вклады (несколько раз) и строить доверительный интервал.

### 3.7. Ортогональные вращения

Имеем  $\mathbb{F}_r = \{f_{ij}\} = \{\rho(\xi_i, \eta_j)\}$ . Мы интерпретируем признаки в факторном анализе, смотря на элементы  $f_{ij}$  (как исходные признаки выражаются через факторы). Нам хотелось бы, чтобы матрица  $\mathbb{F}_r$  имела простую структуру (то есть чтобы в ней было много нулей).

Заметим, что если  $\mathbb{F}_r$  — решение, то вращение  $\tilde{\mathbb{F}}_r = \mathbb{F}_r \mathbb{W}$  — тоже решение, только будут другие корреляции между исходными признаками и факторами, так как меняется  $\mathbb{F}_r$ . (Матрица вращения  $\mathbb{W}$  ортогональна.)

На выборочном языке:  $\mathbb{X}'$  — та часть исходных данных, которая описывается факторами (соответствует  $\xi' = \mathbb{F}_r \eta$ ).

$$\mathbb{X}' = \mathbb{V} \mathbb{F}_r^T = \underbrace{\mathbb{V} \mathbb{W}}_{\tilde{\mathbb{V}}} \underbrace{\mathbb{W}^T \mathbb{F}_r^T}_{\tilde{\mathbb{F}}_r},$$

$\tilde{\mathbb{V}}$  — новые факторы,  $\tilde{\mathbb{F}}_r$  — новые факторные нагрузки. Хотелось бы найти такую  $\mathbb{W}$ , чтобы интерпретация была как можно проще.

**Пример 3.** Пусть у нас какие-то признаки отвечают за знание математики, а другие за знание физики.

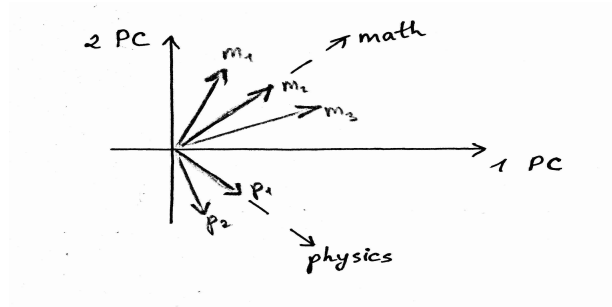


Рис. 3.1. Вращение в факторном анализе

Мы можем повернуть данные так, что у нас одна ось совпадет, к примеру, с признаком  $m_2$ , а другая с признаком  $p_1$ . Тогда интерпретировать станет проще.

**Метод вращений Varimax:** Хотим получить более понятную интерпретацию, для этого нам будет удобно, если в каждом столбце матрицы  $\mathbb{F}_r$  было как можно больше нулей. Задача выглядит следующим образом:

$$\sum_{j=1}^r \left[ \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (\tilde{f}_{ij}^2)^2 - \left( \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \tilde{f}_{ij}^2 \right)^2 \right] \rightarrow \max_{\mathbb{W}: \tilde{\mathbb{F}}_r = \mathbb{F}_r \mathbb{W}},$$

где мы рассматриваем  $f_{ij}^2$ , так как  $f_{ij}$  могут быть отрицательны, и считаем разброс значений  $f_{ij}^2$ ,  $i = 1, \dots, p$ , как выборочную дисперсию, так как чем больше разброс, тем больше шансов, что значения будут разными, т.е. маленькие (почти нулевые) и большие.

**На выборочном языке:**  $\mathbb{V} = [V_1 : \dots : V_r]$ ,  $V_1, \dots, V_r \in \mathbb{R}^n$  — факторные вектора. На выборочном языке  $\boldsymbol{\xi}$  переходит в  $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $\boldsymbol{\xi}'$  переходит в  $\mathbb{X}' \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $\boldsymbol{\eta}$  (соответствует факторам) переходит в  $\mathbb{V} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ . Тогда  $\mathbb{F}\boldsymbol{\eta}$  соответствует  $\mathbb{V}\mathbb{F}^T$ .

Поворачиваем факторы:  $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \mathbb{W}\boldsymbol{\eta}$  — факторы после вращения,  $\tilde{\mathbb{F}} = \mathbb{F}\mathbb{W}^{-1}$ , где  $\mathbb{W} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  — матрица поворота. Что означает на языке векторов то, что мы поворачиваем факторы? Это значит, что  $\tilde{\mathbb{V}} = \mathbb{V}\mathbb{W} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ .

Идея: мы хотим, чтобы  $\mathbb{F}\boldsymbol{\eta} = \tilde{\mathbb{F}}\tilde{\boldsymbol{\eta}}$  (то есть  $\boldsymbol{\xi}'$  не должно меняться). И действительно,

$$\tilde{\mathbb{F}}\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \mathbb{F}\mathbb{W}^{-1}\mathbb{W}\boldsymbol{\eta} = \mathbb{F}\boldsymbol{\eta},$$

мы поменяли факторные веса и получили то же самое (условно можно сказать, что в одну сторону поворачиваем факторы и в другую сторону поворачиваем  $\mathbb{F}$ ).

В случае ортогональных вращений:  $\mathbb{W}^{-1} = \mathbb{W}^T$  и тоже является матрицей поворота.

### 3.8. Косоугольные вращения

Если мы допускаем косоугольные вращения, то, вообще говоря,  $\mathbb{W}^{-1} \neq \mathbb{W}^T$ . Мы хотим, чтобы новые факторы после вращения были по-прежнему нормированы (то есть дисперсия была равна 1 на языке случайных величин). Мы предполагаем, что все центрировано. Тогда

$$\text{Cov}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) = \mathbb{E}\tilde{\boldsymbol{\eta}}\tilde{\boldsymbol{\eta}}^T = \mathbb{E}(\mathbb{W}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^T\mathbb{W}^T) = \mathbb{W} \underbrace{\text{Cov}\boldsymbol{\eta}}_{\mathbb{I}_{r \times r}} \mathbb{W}^T = \mathbb{W}\mathbb{W}^T,$$

будем требовать, чтобы на диагонали этой матрицы стояли единицы.

**Замечание 7.** *Необходимо проверять, чтобы в корреляционной матрице новых факторов были не очень большие по модулю корреляции, так как чем больше корреляции между новыми признаками, тем более подозрительный результат.*

Интерпретация после косоугольных вращений уже становится непонятна.

### 3.9. Факторная структура и факторный паттерн

Введем определения для двух матриц.

**Определение 3.** *Факторная структура (factor structure) — это матрица корреляций исходных признаков с новыми, то есть  $\Phi = \{\rho(\xi_i, \tilde{\eta}_j)\}_{i=1, j=1}^{p, r}$ .*

**Определение 4.** *Факторный паттерн (factor pattern, factor loadings) — это матрица  $\tilde{\mathbb{F}}$ , коэффициенты линейной комбинации в  $\boldsymbol{\xi}' = \tilde{\mathbb{F}}\tilde{\boldsymbol{\eta}}$  (коэффициенты линейной комбинации, с которыми исходные признаки выражаются через новые).*

**Предложение 7.** *В случае ортогональных вращений факторная структура совпадает с факторным паттерном.*

*Доказательство.* Распишем, чему равно  $\Phi$ :

$$\Phi = \text{Cov}(\boldsymbol{\xi}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) = \mathbb{E}(\boldsymbol{\xi}'\tilde{\boldsymbol{\eta}}^T) = \mathbb{E}(\tilde{\mathbb{F}}\tilde{\boldsymbol{\eta}}\tilde{\boldsymbol{\eta}}^T) = \tilde{\mathbb{F}}\text{Cov}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) = \tilde{\mathbb{F}}\mathbb{W}\mathbb{W}^T.$$

В случае ортогональных вращений  $\mathbb{W}^{-1} = \mathbb{W}^T$ , следовательно  $\Phi = \tilde{\mathbb{F}}\underbrace{\mathbb{W}\mathbb{W}^T}_{\mathbb{I}_{r \times r}} = \tilde{\mathbb{F}}$ .  $\square$

### 3.10. Методы нахождения факторных значений

Перейдем на выборочный язык.  $\mathbb{X} = \mathbb{V}\mathbb{F}^T + \mathcal{E}$ . Пусть мы уже оценили  $\mathbb{F}$ . Возникает вопрос — как найти  $\mathbb{V}$  (factor scores)? Есть несколько методов.

1. (OLS) Распишем по индивидам  $Y_i \in \mathbb{R}^p$ , получим  $n$  уравнений

$$Y_i = \mathbb{F} \begin{pmatrix} v_{i1} \\ \vdots \\ v_{ir} \end{pmatrix} + \mathcal{E}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Факторные значения для  $i$ -ого индивида можно найти по методу наименьших квадратов, тогда решение выглядит следующим образом:

$$(v_{i1}, \dots, v_{ir})^T = (\mathbb{F}^T \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^T Y_i.$$

2. (Метод Бартлетта (WLS)) Пусть  $\Psi = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2)$  — диагональная матрица, в которой на диагонали стоят уникальности. Тогда решение:

$$(v_{i1}, \dots, v_{ir})^T = (\mathbb{F}^T \Psi^{-1} \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^T \Psi^{-1} Y_i.$$

3. (Regression method) В нормальной модели, основываясь на ОМП,

$$(v_{i1}, \dots, v_{ir})^T = \mathbb{F}^T \mathbb{S}^{-1} Y_i.$$