Revisão Matemática: Números Complexos

Ney Lemke

Mecânica Quântica

2012

Outline

Bibliografia

- "Física Matemática", E. Butkov, Ed. LTC, 1^a Edição, 1988.
- "An Imaginary Tale: The history of $\sqrt{-1}$", P. J. Nahin, Princeton University Press, 1998.

Outline

Equação Cúbia

Considere uma equação cúbica na forma:

$$x^3 + px = q$$

del Ferro (1465-1526) propôs:

$$x = u + v$$

Equação Cúbica

Neste caso temos:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) = q$$

Escolhendo:

$$3uv + p = 0$$

Temos:

$$u^3 + v^3 = q$$

Equação Cúbica

Essa equações podem ser escritas como:

$$u^6 - qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

Nos restringindo apenas a raiz positiva:

$$u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad v^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$$

Finalmente:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

Equação Cúbica

O que ocorre se:

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$$

Neste caso teremos que manipular raízes de números complexos. O que violava o fato evidente que esses números não existem.
Solução de Cardano (1501-1576) foi assumir que essas aberrações exisitiam e tratá-las como se fossem números.

Surgimento dos Números Complexos

- Descartes
- Argand
- Euler
- Gauss
- Riemann

Números complexos: fato ou mito

- Os números complexos tornam a álgebra mais simples.
- Extendem o conceito de número, mas existem outras possibilidades:
  - Quartenions
  - Números Perplexos
- A função de onda é uma função complexa. Ou seja eles podem ser essenciais para compreender nossa realidade física.

Outline

Operações Fundamentais

O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ satisfaz as propriedades:

- Se $z \in \mathbb{C}$ então $z = x + iy$. Onde $x, y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$.
- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$
- $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 x_1)i$
- $z^* = \overline{z} = x - iy$
- $|z|^2 = x^2 + y^2$

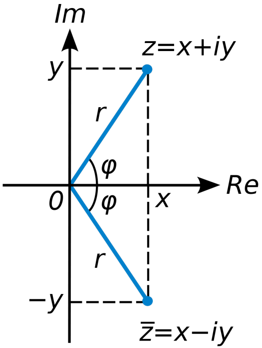
Divisão

Sejam z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

Outline

Plano de Argand



Fórmula de de Moivre

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

onde $r = |z|$

Fórmula de Euler

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

r é o módulo e φ a fase do número complexo.
Mostre que:

$$\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$$

Interpretação das Operações

- Soma de números Complexos é equivalente a soma de dois vetores.
- Multiplicação por números complexos é equivalente a:

  número real positivo é equivalente a uma mudança de escala

  r=**1** é equivalente a rotação por um ângulo φ

Outline

Partes reais e Imaginária

Seja $z \in \mathbb{C}$ e $z = x + iy$

Parte Real $\Re(z) = x = \frac{z+\overline{z}}{2}$

Parte Imaginária $\Im(z) = y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

n-ésima raiz da unidade

Encontre todas as soluções da equação:

$$z^n = 1$$

Fórmulas trigonométricas

Usando a fórmula de Euler mostre que:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

Calcule também:

1. $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{2^n}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{2^n n}$$

Funções Complexas

Toda função real possui uma função complexa equivalente. Por exemplo

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2}$$

As regras de derivação e integração são as mesmas para funções reais e complexas.

Integração: Cauchy Riemann

Existe um resultado importante para funções complexas que é muito explorado na matemática. A integral fechada de uma função analítica é sempre nula.

$$\oint f(z)dz = 0$$

Integração

Calcule a integral:

$$\oint_C \frac{dz}{z}$$

onde C é um círculo de raio r em torno da origem.
Dica: Use a equação de Euler.