Spin

Ney Lemke

Mecânica Quântica

2012

Operadores

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k$$

$$\langle l' m' | L_\pm | l m \rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} \delta_{ll'} \delta_{mm\pm 1}$$

$$L_x = \frac{L_+ + L_-}{2}$$

$$L_y = \frac{-i(L_+ - L_-)}{2}$$

Matrizes

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizes de Pauli

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Propriedades

- $$[\sigma_i, \sigma_j] = 2\epsilon_{ijk}\sigma_z$$
- $$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I$$
- $$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 0$$

Nota $\{A, B\} = AB + BA$ chamado de anticomutador.

Spinores

$$S_z \chi_\pm = \pm\hbar\chi_\pm$$

$\chi_\pm$ são chamados de spinores.
Em termos matriciais:

$$\hbar \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\pm\hbar}{2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Spinores

Qualquer spinor pode ser escrito como:

$$\chi = \alpha_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix}$$

Caso Geral

$$S = S_x \cos\phi + S_y \sin\phi$$

$$S\chi = \frac{\hbar}{2}\lambda\chi$$

Em termos matriciais:

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \cos\phi - i\sin\phi \\ \cos\phi + i\sin\phi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\hbar\lambda}{2}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Caso Geral-Solução

$$\lambda_{\pm} = \pm 1$$

$$\chi_{+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \\ e^{i\phi/2} \end{pmatrix} \quad \chi_{-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} \\ -e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}$$

Valores Esperados

$$\langle\alpha|\vec{S}|\alpha\rangle = \sum_{ij}\langle\alpha|i\rangle\langle i|\vec{S}|j\rangle\langle j|\alpha\rangle$$

Na forma vetorial:

$$\langle\alpha|\vec{S}|\alpha\rangle = (\alpha_+^*, \alpha_-^*).\vec{S}.\begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix}$$

Valores Esperados

$$\langle S_x \rangle = \langle \alpha | S_x | \alpha \rangle = (\alpha_+^*, \alpha_-^*).\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix}$$

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2}(\alpha_+^* \alpha_- + \alpha_-^* \alpha_+)$$

Valores Esperados

$$\langle S_y \rangle = \langle \alpha | S_y | \alpha \rangle = (\alpha_+^*, \alpha_-^*) . \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix}$$

$$\langle S_y \rangle = \frac{i\hbar}{2} (\alpha_+^* \alpha_- - \alpha_-^* \alpha_+)$$

Valores Esperados

$$\langle S_z \rangle = \langle \alpha | S_y | \alpha \rangle = (\alpha_+^*, \alpha_-^*).\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix}$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2}(\alpha_+^* \alpha_+ - \alpha_-^* \alpha_-) = \frac{\hbar}{2}(|\alpha_+|^2 - |\alpha_-|^2)$$

Exemplo

Uma medida de S_x obtém o valor $\frac{\hbar}{2}$. Uma medida subsequente de $S_x \cos\phi + S_y \sin\phi$ é realizada qual é a probabilidade de se obter $\hbar/2$?

Resposta

$$P_+ = \cos^2 \frac{\phi}{2}$$

Momento Magnético

$$\vec{M} = \frac{-eg}{2m_e}\vec{S}$$

onde $g = 2 \times (1{,}0011596)$

Momento Magnético

Classicamente:

$$\vec{M} = -\frac{e\vec{L}}{2m}$$

A corrente I é dada por e/τ onde τ é o período.

$$L = rp = m_e rv \quad v = \frac{2\pi r}{\tau}$$

$$L = \frac{2\pi m_e r^2}{\tau}$$

Momento Magnético

O momento magnético é dado por

$$M = IS$$

onde S é a área do circuito.

$$M = \frac{e}{\tau}\pi r^2$$

Usando o valor de L temos que:

$$M = \frac{eL}{2m_e}$$

Spin em um Campo Magnético

$$H = -\vec{M}.\vec{B} = \frac{eg\hbar}{4m_e}\vec{\sigma}.\vec{B}$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \frac{eg\hbar}{4m_e}\vec{\sigma}.\vec{B}|\psi(t)\rangle$$

$$\vec{B} = B_o\vec{a_z}$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\omega t}\begin{pmatrix} \alpha_+^* \\ \alpha_-^* \end{pmatrix}$$

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} ae^{i\omega_o t} \\ be^{-i\omega_o t} \end{pmatrix}$$

Exemplo

Em $t = 0$ ψ é o autoestado de S_x com autovalor $\hbar/2$.

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} e^{i\omega_o t} \\ e^{-i\omega_o t} \end{array} \right)$$

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos 2\omega_o t$$

$$\langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin 2\omega_o t$$

$$2\omega_o = \frac{egB}{2m_e}$$

$$B = 1\,T$$

$$\omega_c = 0.9 \times 10^{11}\, rad/s$$

Ressonância

Em sólidos g depende do campo na proximidade dos núcleos. Vamos supor que temos um campo aplicado na direção z, B_o, e um campo perpendicular $B_x = B_1 \cos \omega t$.
A eq. de Schrödinger neste caso é:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \frac{eg\hbar}{4m_e} \begin{pmatrix} B_o & B_1 \cos \omega t \\ B_1 \cos \omega t & -B_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Anzätz

$$A(t) = a(t)e^{i\omega_o t} \quad B(t) = b(t)e^{i\omega_o t}$$

$$\omega_1 = \frac{egB_1}{4m_e} \quad \omega_o = \frac{egB_o}{4m_e}$$

$$i\frac{dA(t)}{dt} = -\omega_o a(t) + \frac{da(t)}{dt}e^{i\omega_o t}$$

$$= -\omega_o a(t) + (\omega_o a(t) + \omega_1 \cos\omega t)e^{i\omega_o t}$$

$$= \omega_1 B(t) e^{2i\omega_o t} \cos\omega t$$

Anzätz

$$i\frac{dB(t)}{dt} = \omega_1 A(t) e^{-2i\omega_o t}\cos\omega t$$

Desprezamos os termos que oscilam rápido, pois vamos estar interessados em valores médios.

$$i\frac{dA(t)}{dt} = \frac{\omega_1}{2} A(t) e^{2i\omega_o t - i\omega t}$$

$$i\frac{dB(t)}{dt} = \frac{\omega_1}{2} B(t) e^{-(2i\omega_o t - \omega t)}$$

$$\frac{d^2 A(t)}{dt^2} = i(2\omega_o - \omega)\frac{dA}{dt} - \frac{\omega_1^2}{4} A(t)$$

$$A(t) = A(0) e^{i\Omega t}$$

Solução

$$\Omega_{\pm} = \left(\omega_o \pm \frac{\omega}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\omega_o - \frac{\omega}{2}\right)^2 + \frac{\omega_1^2}{4}}$$

$$A(t) = A_+ e^{i\Omega_+ t} + A_- e^{i\Omega_- t}$$

$$B(t) = \frac{-2}{\omega_1}\left(A_+\Omega_+ e^{i\Omega_+ t} + A_-\Omega_- e^{i\Omega_- t}\right)$$

Solução

Suponha que em $t = 0$ $a(0) = 1$ e $b(0) = 0$. Lembrando que:

$$A(t) = a(t)e^{i\omega_o t} \quad B(t) = b(t)e^{i\omega_o t}$$

$$A_+ + A_- = 1 \quad \Omega_+ A_+ + \Omega_- A_- = 0$$

Resolvendo temos que:

$$A_+ = \frac{\Omega_-}{\Omega_- - \Omega_+} \quad A_- = \frac{-\Omega_+}{\Omega_- - \Omega_+}$$

Solução

Qual é a probabilidade de ficar na posição reversa?

$$P_-(t) = |b(t)|^2 = \frac{4}{\omega_1^2}\left|\frac{\Omega_+\Omega_-}{\Omega_+ - \Omega_-}\right|^2 (2 - 2\cos(\Omega_+ - \Omega_-)t)$$

Na ressonância:

$$\omega = 2\omega_o$$

$$\Omega_\pm = \frac{\pm\omega_1}{2}$$

$$P_{res} = \frac{1}{2}(1 - \cos\omega_1 t)$$

Solução

Fora da ressonância:

$$P_{-}(t) = \frac{1}{2}\frac{\omega_1^2}{(2\omega_o - \omega)^2 + \omega_1^2}(1 - \cos\sqrt{(2\omega_o - \omega)^2 + \omega_1^2 t})$$