Revisão Matemática

Ney Lemke

Mecânica Quântica

2012

Outline

Outline

Espaço Vetorial

Formalmente definimos vetor como sendo um elemento de um espaço vetorial.
Um espaço vetorial é um conjunto que possui duas operações, chamadas de soma e multiplicação por escalar. Estas operações obedecem estas propriedades:

1. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
2. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
3. $\vec{x} + 0 = \vec{x}$
4. $\forall \vec{x} \exists \vec{y} \quad \text{tq} \quad \vec{x} + \vec{y} = 0$

Espaço Vetorial

Sejam α e β quantidades escalares:

1. $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$
2. $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$
3. $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

Exercício

Mostre que os números complexos formam um espaço vetorial, se considerarmos multiplicação por escalar, multiplicação por real.

Combinação Linear

$$\alpha_i \vec{x}_i + \ldots + \alpha_n \vec{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$$

Vetores linearmente independentes

n vetores são considerados linearmente independentes se e somente se:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = 0$$

implicar que $\forall i \quad \alpha_i = 0$.

Subespaço Vetorial

Considere k vetores $\vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_k$ e o conjunto de vetores na forma:

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{x}_i$$

Este conjunto é chamado de sub-espaço vetorial. Observe que este conjunto é um espaço vetorial.

Subespaço Vetorial

Se os vetores $\vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_k$ forem linearmente independentes dizemos que eles formam uma base para o sub-espaço vetorial. Se k for a dimensionalidade do espaço dizemos que o conjunto é uma base para o espaço vetorial.

Subespaço Vetorial

Suponha que os vetores $\vec{e}_i$ sejam uma base para um espaço vetorial, ou seja

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$$

Representamos o vetor usando o vetor coluna:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Operadores

Um operador é uma função que associa um elemento do espaço vetorial a outro elemento do espaço vetorial:

$$\vec{y} = F(\vec{x})$$

Operador Linear

Um operador Linear deve satisfazer asseguintes condições:

1. $L(\alpha\vec{x}) = \alpha L\vec{x}$
2. $L(\vec{x} + \vec{y}) = L\vec{x} + L\vec{y}$
3. $L(0) = 0$

Operador Linear

$$L(\vec{e}_i) = \vec{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\vec{e}_j$$

$$\vec{y} = L\vec{x}$$

$$\vec{y} = L\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i = \sum_{ij} x_i a_{ji}\vec{e}_j$$

$$y_k = \sum_{i} a_{ki}x_i$$

Composição de Operadores Lineares

$$\vec{y} = A\vec{x} \quad \vec{z} = B\vec{y} \quad \vec{z} = C\vec{x}$$

$$y_i = \sum_j a_{ij} x_j \quad z_k = \sum_j b_{ki} y_i$$

$$z_k = \sum_{ij} a_{ij} b_{ki} x_j$$

$$c_{kj} = \sum_i b_{ki} a_{ij}$$

Exemplos de Operadores Lineares

- I: $I\vec{x} = \vec{x}$
- N: $N\vec{x} = -\vec{x}$
- Rotação

Mudança de Base

$$\vec{x} = \sum_i x_i \vec{e}_i \quad \vec{x} = \sum_i x_i' \vec{g}_i$$

$$\vec{g} = \sum_j g_{ji} \vec{e}_j \quad G = [g_{ij}]$$

$$\vec{e}_j = \sum_i t_{ij} \vec{g}_i \quad T = [t_{ij}]$$

$$\vec{x} = \sum_j x_j \vec{e}_j = \sum_{ji} x_j t_{ij} \vec{g}_i = \sum_i \vec{g}_i \sum_j t_{ij} x_j$$

$$x_i' = \sum_j t_{ij} x_j$$

$$x_i = \sum_j g_{ij} x_j$$

Mudança de Base

$$\vec{x} = G\vec{x'}$$

$$\vec{x'} = T\vec{x}$$

$$\vec{x} = TG\vec{x}$$

$$TG = I$$

Mudança de Base

$$\vec{y} = A\vec{x} \quad \vec{y'} = A'\vec{x'}$$

$$\vec{y'} = T\vec{y} \quad \vec{x'} = T\vec{x}$$

$$T\vec{y} = A'T\vec{x}$$

$$\vec{y} = T^{-1}A'T\vec{x}$$

$$A = T^{-1}A'T$$

$$A' = TAT^{-1}$$

Matriz Transposta

Seja uma matriz:

$$A = [A_{ij}]$$

a matriz transposta A^T é dada por:

$$A^T_{ij} = A_{ji}$$

Determinantes

Definição O determinante de uma matriz quadrada é definido por:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma_i}$$

a soma é calculada sobre todas as permutações σ , o sinal de uma permutação está relacionado ao número de trocas a partir da seq. ordenada $\{1, \ldots, n\}$, se o número de trocas for par o sinal é positivo e negativo caso contrário.

Determinantes

Propriedades

1. $\det AB = \det A \det B$
2. $detA^T = \det A$
3. $det(\alpha A) = \alpha^n detA$
4. $\det I$=1
5. $detT^{-1} = 1/(detT)$
6. $detTAT^{-1} = detA$

Traço

O Traço de uma matriz quadrada e dado por:

$$\mathrm{Tr}A = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

Propriedades

1. $\mathrm{Tr}A^T = \mathrm{Tr}A$
2. $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}A + \mathrm{Tr}B$
3. $\mathrm{Tr}AB = \mathrm{Tr}BA$ (propriedade circular)
4. $\mathrm{Tr}TAT^{-1} = \mathrm{Tr}A$ (Traços são invariantes a mudanças de base)

Produto Interno

O produto interno é um escalar $(\vec{x},\vec{y})$ obtido a partir de dois vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ e que satisfaz as propriedades:

Espaço Reais

- $(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{y},\vec{x})$
- $(\vec{x},\vec{y}+\vec{z}) = (\vec{x},\vec{y})+(\vec{x},\vec{z})$
- $(\vec{x},\vec{x}) \geq 0$

Espaço Complexos

- $(\vec{x},\vec{y}) = \overline{(\vec{y},\vec{x})}$
- $(\vec{x},\vec{y}+\vec{z}) = (\vec{x},\vec{y})+(\vec{x},\vec{z})$
- $(\vec{x},\vec{x}) \geq 0$

$(\vec{x},\vec{x})$ é denominado a norma do vetor.

Produto Interno

Espaço Reais	Espaço Complexos
• $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \vec{x}^T \vec{y}$	• $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i = \vec{x}^\dagger \vec{y}$

$A^\dagger$ é a matriz transposta e conjugada de A. Lê-se *dagger* ou adaga.

Base ortonormal

Dois vetores são ditos ortogonais se:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

Uma base é dita ortonormal se:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$$

Classes de Matrizes

Unitárias $U^\dagger U = I$

Ortogonais $G^T G = I$

Hermitianas $G^\dagger = G$

Autovalores e Autovetores

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$\vec{x}$ é um autovetor
λ é um autovalor
Equação característica: $\det(A - \lambda I) = 0$

Teorema 1:

Se uma matriz possui m autovalores distintos então a matriz possui m autovetores ortogonais.

Lema

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$(AB)^\dagger = [(AB)^\dagger_{ik}] = (\sum_j A_{ij} B_{jk})^\dagger = \sum_j A^*_{ji} B^*_{kj}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

Teorema 2:

Os autovalores de uma matriz hermitiana são todos reais.
Demonstração:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$$\vec{x}^\dagger A^\dagger = \overline{\lambda}\vec{x}^\dagger$$

$$\vec{x}^\dagger A = \overline{\lambda}\vec{x}^\dagger$$

$$\vec{x}^\dagger A\vec{x} = \overline{\lambda}\vec{x}^\dagger\vec{x}$$

$$\lambda\vec{x}^\dagger\vec{x} = \overline{\lambda}\vec{x}^\dagger\vec{x}$$

$$\overline{\lambda} = \lambda$$

Teorema 3:

Os autovalores de uma matriz hermitiana correspondentes a dois autovalores distintos são ortogonais.
Demonstração:

$$A\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}$$

$$A\vec{y} = \lambda_2 \vec{y}$$

$$\vec{x}^\dagger A = \lambda_1 \vec{x}^\dagger$$

Teorema 3:

$$\vec{y}^{\dagger} A = \lambda_2 \vec{y}^{\dagger}$$

$$\vec{y}^{\dagger} A \vec{x} = \lambda_1 \vec{y}^{\dagger} \vec{x}$$

$$\vec{y}^{\dagger} A \vec{x} = \lambda_2 \vec{y}^{\dagger} \vec{x}$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\vec{y}^{\dagger} \vec{x} = 0$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

1. Encontre os autovetores e os autovalores.
2. A matrix é hermitiana?
3. Mostre que os autovalores são ortogonais.

Exercício:

Considere a mudança de base: $x_1' = x_1 \quad x_2' = x_3 \quad x_3' = x_2$

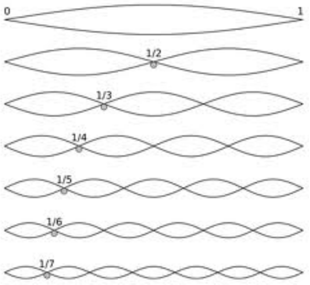
1. Escreva T.
2. Escreva T^{-1}
3. Calcule TT^{-1}
4. Seja:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

um operador linear representado na base x_i escreva A na base x_i'.

Outline

Equação da Onda



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$u(0) = u(L) = 0$$

Separação de Variáveis

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Aplicando na eq. da onda:

$$c^2 X'' T(t) = X(x) T'' \quad c^2 \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T}$$

A única forma dessa equação ser satisfeita é:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda X$$

$$X = A\cos(\sqrt{|\lambda|}x) + B\sin(\sqrt{|\lambda|}x)$$

Usando as condições de contorno temos que:

$$A = 0 \quad \lambda_n = \frac{-n^2\pi^2}{L^2}$$

Separação de Variáveis

$$\frac{d^2T}{dt^2} = c^2\lambda T$$

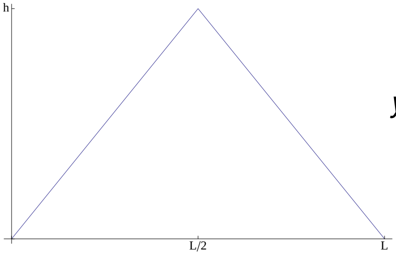
$$T_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

$$u_n(x,t) = \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Qualquer combinação linear dessas funções é uma solução da equação, logo a solução mais geral possível é:

$$y(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Condição Inicial



$$y(x,0) = \begin{cases} \frac{2h}{L}x \text{ se} & x < L/2 \\ 2h - \frac{2h}{L}x \text{ se} & x > L/2 \end{cases}$$

$$\dot{y}(x,0) = 0$$

Solução

Usando as condições iniciais temos que:

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad A_n = ?$$

$$\dot{y}(x,0) = -\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0$$

$$B_n = 0$$

Determinando A_n

Vamos usar a seguinte identidade:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,dx = L/2\delta_{nm}$$

Usando a condição inicial:

$$\int_0^L y(x,0)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$\int_0^L y(x,0)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \frac{LA_m}{2}$$

$$A_m = \frac{2}{L}\int_0^L y(x,0)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

Determinando A_n

Até agora esta solução é geral, particularizando para a nossa função. Temos:

$$A_m = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} \frac{2hx}{L}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,dx + \int_{L/2}^{L}\left(2h - \frac{2hx}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,dx$$

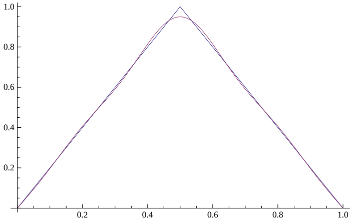
$$A_m = \begin{cases} 0 \text{ se} & m \text{ é par} \\ \frac{8(-1)^{(m+1)/2}}{m^2\pi^2} \text{ se} & m \text{ é impar} \end{cases}$$

Use o resultado:

$$\int x\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,dx = \frac{L^2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{4\pi^2} - \frac{Lx\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{2\pi}$$

Aproximação

Comparação entre a aproximação para 5 termos e o resultado esperado.



Interpretação dos resultados

- “Qualquer” função no intervalo $[0, L]$ pode ser representada como uma soma de senos e cossenos.
- Podemos considerar o espaço de todas as funções que podem ser expressas como a soma de senos e cossenos no intervalo $[0, L]$.
- Este espaço é vetorial. (Mostre!).

Interpretação dos resultados

- As funções

$$\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

formam uma base ortonormal para esse espaço.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_n\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + B_n\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

Note que:

$$\int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0$$

Interpretação dos resultados

Considere duas funções f e g. A integral:

$$\int_0^L f(x)g(x)\,dx$$

pode ser interpretada como um produto interno. Para se convencer disso discretize a função e pense no vetor:

$$(f(x_1), \ldots, f(x_n))$$

Exercício

Considere a base formada pelos senos e cossenos, ignore o caso $n = 0$.

- Escreva o operador paridade $P[f(x)] = f(-x)$.
- Escreva a representação matricial do operador derivada.
- Escreva a representação matricial do operador integral.

Ordene os vetores da base de uma forma conveniente.

Outline

Problemas de Sturm Liouville

Equação característica para λ:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - s(x)y + \lambda r(x)y = 0$$

$$x \in [a, b]$$

Operador linear:

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] - s(x)$$

Autofunções e autovalores:
y_m e λ_m

Problemas de Sturm Liouville

Vamos demonstrar que as autofunções formam uma base ortogonal para as funções em $[a, b]$.

Problemas de Sturm Liouville

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_n}{dx}\right] - s(x)y_n + \lambda_n r(x)y_n = 0$$
$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_m}{dx}\right] - s(x)y_m + \lambda_m r(x)y_m = 0$$

Temos que:

$$y_n\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_m}{dx}\right] - s(x)y_ny_m + \lambda_m r(x)y_ny_m = 0$$
$$y_m\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_n}{dx}\right] - s(x)y_ny_m + \lambda_n r(x)y_ny_m = 0$$

Subtraindo as eqs. acima:

$$y_m\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_n}{dx}\right] - y_n\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_m}{dx}\right]$$
$$= -(\lambda_m - \lambda_n)r(x)y_ny_m$$

Problemas de Sturm Liouville

Integrando:

$$\int_a^b y_m \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_n}{dx}\right] - y_n \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_m}{dx}\right]\, dx =$$

$$= \int_a^b (-\lambda_m + \lambda_n) r(x) y_n y_m \, dx$$

Realizando a integração por partes:

$$\left\{ y_n p(x)\frac{dy_m}{dx} - y_m p(x)\frac{dy_n}{dx} \right\}_a^b - p(x)\frac{dy_m}{dx}\frac{dy_n}{dx} + p(x)\frac{dy_m}{dx}\frac{dy_n}{dx}$$

$$= -\int_a^b (\lambda_m - \lambda_n) r(x) y_n y_m \, dx$$

Problemas de Sturm Liouville

$$\left\{ p(x) \left[y_n \frac{dy_m}{dx} - y_m \frac{dy_n}{dx} \right] \right\}_a^b = -(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r(x) y_n y_m \, dx$$

Assumindo $\lambda_n \neq \lambda_m$, para que tenhamos:

$$\int_a^b r(x) y_n y_m = 0$$

Basta que:

- $y(a) = y(b) = 0$ ou
- $y'(a) = y'(b) = 0$

Neste caso dizemos que as funções y_m e y_n são ortogonais com peso $r(x)$.

Problemas de Sturm Liouville

Além disso:

$$f(x) = \sum_m a_m y_m(x)$$

$$\int_a^b f(x)r(x)y_n(x) = \sum_m \int_a^b y_m y_n r(x)\,dx = a_n \int_a^b y_m^2(x)r(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)r(x)y_n(x)\,dx}{\int_a^b y_n^2(x)r(x)\,dx}$$

Membrana Circular

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$u(a) = 0$$
$$u'(r, \theta; 0) = 0$$
$$u(r, \theta; 0) = f(r, \theta)$$

Membrana Circular

$$u(r,\theta,t) = \Lambda(r,\theta)T(t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$$

$$\nabla^2 u(r,\theta,t) = T\nabla^2\Lambda = \frac{1}{c^2}T''\Lambda(r,\theta)$$

$$\frac{T''}{T} = -\omega^2 \quad \frac{\nabla^2\Lambda}{\Lambda} = -\frac{\omega^2}{c^2}$$

$$T = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Parte Espacial

$$\nabla^2\lambda = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right] R\Theta = -\frac{\omega^2}{c^2}R\Theta$$

$$\left[R''\Theta + \frac{1}{r}\Theta R + \frac{1}{r^2}R\Theta''\right] = -\frac{\omega^2}{c^2}R\Theta$$

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = r^2\left[-\frac{R''}{R} - \frac{1}{r}\frac{R'}{R} - \frac{\omega^2}{c^2}\right]$$

Parte Angular

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -n^2$$

$$\Theta = A \sin n\theta + B \cos n\theta$$

Para que Θ seja periódica:
$n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Parte Radial

$$-n^2R = -r^2R'' - rR' - c^2\omega^2r^2R$$

$$r^2R'' + rR' + (c^2\omega^2r^2 - n^2)R = 0$$

Esta é a equação de Bessel.

Equação de Bessel é SL

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - s(x)y + \lambda r(x)y = 0$$

$$(rR')' + (k^2 r - n^2/r)R = 0$$

$$p(x) = x \quad s(x) = -n^2/r \quad r(x) = r \quad \lambda = k^2$$

Equação de Bessel

$$r^2 R'' + rR' + (k^2 r^2 - n^2)R = 0$$

$$x = kr$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} = k\frac{\partial R}{\partial x}$$

Equação de Bessel

$$x^2 R'' + xR' + (x^2 - n^2)R = 0$$

Método das séries:

$$R(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^{l+s}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l(l+s)(l+s-1)x^{l+s} + \sum_{l=0}^{\infty} a_l(l+s)x^{l+s} + \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^{l+s+2} +$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}(-n^2)a_l x^{l+s} = 0$$

Equação de Bessel

Drible da Vaca:

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l x^{l+s+2} = \sum_{l=2}^{\infty} a_{l-2} x^{l+s}$$

$$\sum_{l=2}^{\infty} [a_l(l+s)^2 + a_{l-2} - n^2 a_l] x^{l+s} +$$

$$[a_o s^2 - n^2 a_o] x^s + [a_1(s+1)^2 - n^2 a_1] x^{s+1} = 0$$

$$s^2 = n^2 \quad s = \pm n$$

Equação de Bessel $s = n$

$$a_l = \frac{a_{l-2}}{n^2 - (l+n)^2} = \frac{a_{l-2}}{n^2 - n^2 - 2ln - l^2}$$

$$a_l = \frac{-a_{l-2}}{l(l+2n)}$$

$$a_1[(n+1)^2 - n^2] = a_1(2n+1) = 0 \quad a_1 = 0$$

Equação de Bessel $s = n$

$$a_{2k} = -\frac{a_{2(k-1)}}{2k(2k+2n)} = \frac{-a_{2(k-1)}}{2^2 k(k+n)}$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(n+1)(n+2)\dots(n+k)}$$

Padronização:

$$a_o = \frac{1}{2^n n!} \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{n+2k} k!(n+k)!}$$

$$J_n(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l x^{n+2l}}{2^{n+2l}(n+l)!l!}$$

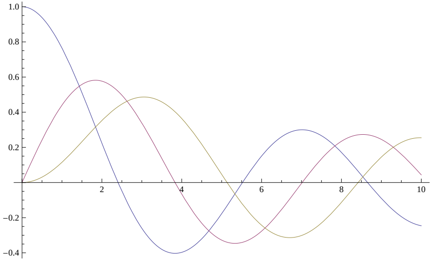
Equação de Bessel $s = -n$

$$a_l = \frac{-a_{l-2}}{n^2 - (l^2 - 2ln + n^2)} = \frac{-a_{l-2}}{l(l-2n)}$$

$$a_{2k} = \frac{-a_{2(k-1)}}{2^2 k(k-n)} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(-n).(-n+1)\dots(-n+k)}$$

Problemas se n é inteiro. Este caso deveria ser analisado com mais cuidado. Se procedessemos nesta direção iríamos obter as funções de von Neumann que não nos interessam pois estas divergem na origem.

Equação de Bessel



Lembrando que $x = kr$.

$R(a) = 0 \quad J_n(ka) = 0$

$ka = \gamma_{n,m}$

m-ésima raiz da n-ésima função de Bessel.

Solução Geral

$$\omega_{nm} = \frac{\gamma_{n,m} c}{a}$$

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\gamma_{n,m} r}{a}\right)\left(A_{nm}\cos(n\theta) + B_{nm}\sin(n\theta)\right)$$

$$\times\left(C_{nm}\cos\omega_{nm}t + D_{nm}\sin(\omega_{nm}t)\right)$$

Caso Particular

$$u(r,\theta,0) = f(r,\theta)$$

$$\dot{u}(r,\theta,0) = 0$$

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\gamma_{n,m}r}{a}\right)\left(A_{nm}\sin(n\theta) + B_{nm}\cos(n\theta)\right)$$

$$A_{nm} = \frac{2\int_0^a\int_0^{2\pi} f(r,\theta) r J_n\left(\frac{\gamma_{n,m}r}{a}\right)\sin(n\theta)}{\int_0^a rJ_n^2\left(\frac{\gamma_{n,m}r}{a}\right)}$$

Caso Particular

$n > 0$

$$B_{nm} = \frac{2\int_0^a \int_0^{2\pi} f(r,\theta) r J_n\left(\frac{\gamma_{n,m} r}{a}\right)\cos(n\theta)}{\int_0^a r J_n^2\left(\frac{\gamma_{n,m} r}{a}\right)}$$

$n = 0$

$$B_{nm} = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} f(r,\theta) r J_n\left(\frac{\gamma_{n,m} r}{a}\right)}{2\pi \int_0^a r J_n^2\left(\frac{\gamma_{n,m} r}{a}\right)}$$

Exercício

Considere $f(r,\theta)$ como sendo um cone de altura h e raio a centrado na origem. Considere apenas os 10 primeiros termos da expansão de Fourier generalizada.