VIII Fehlerbetrachtungen , Ungenauigkeiten , Variationen

VIII.1. Die Genauigkeit der Dämmerungszeit ist bestimmt durch die Genauigkeit der einzelnen berechneten und festgelegten Größen in den entsprechenden Bestimmungsformeln bzw. Tabellen. Da keine Ensembles von Daten vorliegen , sind die Genauigkeiten der berechneten Größen einfach durch die Differentialformeln des Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes festgelegt. Für die Genauigkeiten der tabellierten Größen wird die letzte angegebene Stelle als sicher angenommen.
Die Bestimmung der Genauigkeit des Refraktionswinkels Θ würde sehr viele aufwendige Differentialterme erfordern. Hierbei wird daher durch Variation einzelner Eingabegrößen in das → Rechenprogramm in mehreren Rechengängen die Änderung bzgl. jeder dieser Störungen bestimmt , und daraus die Genauigkeit bzgl. Θ abgeleitet. Die durch die zahlreichen Näherungen entstehenden Ungenauigkeiten können quantitativ schwer bestimmt werden. In diesem Zusammenhang müssen dann Abschätzungen oder Literaturangaben für die Fehlerbestimmung genügen.
Alle Genauigkeiten können konkret nur für das spezielle Rechenbeispiel VII. berechnet werden. Für andere Daten kann aber angenommen werden , daß sich die berechneten Fehler nicht wesentlich von diesen unterscheiden.

VIII.1.1. Das Gauss'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz

Sei eine berechnete Ergebnisgröße χ von mehreren Eingangs - bzw. Meßgrößen s_1 , s_2 , ... abhängig , die jeweils mit einem absoluten Fehler Δs_1 , Δs_2 , ... behaftet sind , welche aber statistisch verteilt und voneinander unabhängig seien. Sei weiterhin $\bar{\chi}$ der durch die Fehler entstandene statistische Mittelwert von χ . Die Abhängigkeit des zu berechnenden Ergebnisses χ von den Meßgrößen in der Umgebung von $\bar{\chi}$ kann durch eine Taylor'sche Entwicklung mit linearer Näherung (d.h. Abbruch der Entwicklung nach dem zweiten Term) beschrieben werden :

$$\chi(s_1 , s_2 , ...) = \bar{\chi} + \left(\frac{\partial\chi}{\partial s_1} \cdot ds_1\right) + \left(\frac{\partial\chi}{\partial s_2} \cdot ds_2\right) + . . .$$

Da die Abweichungen statistisch verteilt sein sollen (s.o.) , und die absolute Abweichung des Ergebnisses vom Mittelwert natürlich gegeben ist durch : $\Delta\chi = \chi - \bar{\chi}$, kann dann das Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauss verwendet werden :

$$\Delta\chi = \sqrt{\left(\frac{\partial\chi}{\partial s_1} \cdot \Delta s_1\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial s_2} \cdot \Delta s_2\right)^2 + . . .} \qquad (51)$$

VIII.2. Berechnungen der Genauigkeit mit der der Zeitpunkt $UT1_P$ des in P beobachteten Sonnenunterganges aus dem Beispiel VII.2. berechnet werden kann

VIII.2.1. Es wurden in VII.3.1. die geographischen Koordinaten von P_F durch die Formeln (37) - (44) bestimmt.

VIII.2.1.1. Für die absoluten Fehler der berechneten Größen wird dann mit (51)

aus (16) : $$\Delta R_B = (- 21385.11 \cdot \sin(2 \cdot \varphi_B) + 89.78 \cdot \sin(4 \cdot \varphi_B) - 0.31 \cdot \sin(6 \cdot \varphi_B)) \cdot \Delta\varphi_B \qquad (16F)$$

aus (37) : $$\Delta e = e \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\alpha_1}{\tan(\alpha_1 - \alpha_2)}\right)^2 + \left(\frac{\sin\alpha_1 \cdot \Delta\alpha_2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \sin\alpha_2}\right)^2} \qquad (37F)$$