Introduction to Number Theory by Examples

Nghia Doan - Math, Chess, and Coding Club

March 18, 2022

Mục lục

Phần I

Unicorn Math Circle 5 - Xuân 2022

Chương 1

Buổi 1 - 12 tháng 3 năm 2022

1.1 Số nguyên, lũy thừa, tính chia hết, bội số, và ước số

Definition (Số nguyên dương, số nguyên âm, và số tự nhiên)**.**

$$\underbrace{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,}_{\text{số nguyên âm}}\ 0,\quad \underbrace{1,\ 2,\ 3,\ldots}_{\text{số nguyên dương}}$$

$$\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ \underbrace{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots}_{\text{số tự nhiên}}$$

Definition (Số đếm)**.** Số đếm là số tự nhiên: $0,\ 1,\ 2,\ldots.$

Definition (Số chính phương)**.** *Số chính phương* là tích số của một số nguyên nhân với chính nó:

$$0 = 0 \times 0,\ 1 = (-1) \times (-1),\ 4 = 2 \times 2,\ 9 = 3 \times 3,\ldots.$$

Số chính phương còn gọi là *lũy thừa bậc hai* của một số nguyên.

Fact. Số chính phương là số tự nhiên. Số chính phương là số luôn lớn hơn hoặc bằng 0.

$$0 = 0 \times 0, 1 = (-1) \times (-1) > 1, 4 = 2 \times 2 > 0, \ldots$$

Definition (Số lập phương)**.** *Số lập phương* là tích số của một số nguyên nhân với chính nó *ba* lần, ví dụ:

$$0 = 0 \times 0 \times 0,\ -1 = (-1) \times (-1) \times (-1),\ 8 = 2 \times 2 \times 2,\ -27 = (-3) \times (-3) \times (-3),\ldots.$$

Fact. Số lập phương của một số âm luôn luôn là số âm.

$$-1 = (-1) \times (-1) \times (-1),\ -8 = (-2) \times (-2) \times (-2)$$

Definition (Số lũy thừa)**.** *Lũy thừa bậc n* của một số nguyên a, a^n, là tích số của a nhân với chính nó n lần:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n},$$

ví dụ $0^2 = 0 \times 0,\ 1^3 = 1 \times 1 \times 1,\ (-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16,\ldots.$

Fact. a^n là số lớn hơn hoặc bằng 0 nếu n là số chẵn. a^n là số âm nếu a là số âm và n là số lẻ.

Definition (Bội số)**.** Số nguyên a được gọi là *bội số* của số nguyên b nếu tồn tại một số nguyên c sao cho

$$a = b \times c,$$

ví dụ 6 *là bội số của* $3 : 6 = 3 \times 2$, *tương tự* 8 *là bội số của* 2, 24 *là bội số của* $1, 2, 3, 4, 6, 8,$ *và* 12.

Fact. Tích số $a \times b$ của hai số nguyên a và b là bội số của cả a và b.

Definition (Chia hết cho)**.** Số nguyên a *chia hết cho* số nguyên b, ký hiệu là $b \mid a$, nếu thương số trong phép chia a cho b là môt số nguyên c.

$$a = b \times c,$$

ví dụ 6 *chia hết cho* 1 *và* 2, *viết tắt là* $1 \mid 6,\ 2 \mid 6$.

Definition (Chia hết)**.** Số nguyên b *chia hết* số nguyên a tương đương với a là bội số của b. *Ví dụ* 1 *chia hết* 6 *và* 2 *chia hết* 6.

Definition (Ước số)**.** Số nguyên b là *ước số* của số nguyên a khi và chỉ khi a chia hết cho b. *Ví dụ* $1, 2, 3,$ *và* 6 *là các ước số của* 6.

Fact. Nếu số nguyên $b \neq 0$ thì bốn phát biểu sau là tương đương,

i. a là bội số của b.
ii. a chia hết cho b.
iii. b chia hết a.
iv. b là ước số của a.

Fact (Tính chất bắc cầu)**.** Nếu số nguyên a là bội số của số nguyên b, và số nguyên b là bội số của số nguyên c, thì số nguyên a là bội số của số nguyên c.

Nếu số nguyên c là ước số của số nguyên b, và số nguyên b là ước số của số nguyên a, thì số nguyên c là ước số của số nguyên a.

Nếu số nguyên a chia hết cho số nguyên b, và số nguyên b chia hết cho số nguyên c, thì số nguyên a chia hết cho số nguyên c.

$$c \mid b \text{ và } b \mid a \Rightarrow c \mid a$$

Definition (Ước số không tầm thường)**.** Một ước số b của một số a được gọi là *ước số không tầm thường* nếu như $b \neq \pm 1$ và $b \neq \pm a$. *Ví dụ* 2 *và* 3 *là các ước số không tầm thường của* 6.

Definition (Ước số thực sự)**.** Một ước số nguên dương b của một số nguyên dương a được gọi là *ước số thực sự* hoặc *ước số chân chính* nếu như $b < a$. *Ví dụ* 2 *và* 3 *là các ước số thực sự của* 6.

Example 1.1.1 (2022-UMC-5-1-1)

Tìm số nguyên dương lớn nhất mà lũy thừa bậc ba của nó không vượt quá 10000.

Example (2022-UMC-5-1-1)
Tìm số nguyên dương lớn nhất mà lũy thừa bậc ba của nó không vượt quá 10000.

Solution. 2022-UMC-5-1-1 Bài toàn đòi hỏi tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho $n \leq 10000$.

Trước hết lưu ý rằng:

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000,\ 10000 = \underline{10} \times 10^3,\ \text{và } 2 \times 2 \times 2 = 8 < 10$$

Do đó

$$2 \times 2 \times 2 \times 1000 = 20 \times 20 \times 20 = 20^3 = 8000 < 10000.$$

Vì 8000 khá gần 10000, ta sẽ thử với các số lập phương lớn hơn 20^3,

$$20^3 = 8000 < 21^3 = 9261 < 10000 < 22^3 = 10648.$$

Từ đây dễ thấy rằng số cần tìm là $\boxed{21.}$ □

Example 1.1.2 (2022-UMC-5-1-2)

Mạnh, Minh, Mơ, và Mỹ tham dự một kỳ thi toán. Mạnh được 94, Minh được 81, và Mơ được 95 điểm. Số điểm của Mỹ là một số nguyên nằm giữa 91 và 97. Nếu điểm trung bình của cả bốn bạn là một số nguyên, hỏi Mỹ được bao nhiêu điểm?

Definition. *Giá trị trung bình* của một dãy các số là tổng của các số chia cho số lượng các số đó. *Ví dụ, giá trị trung bình của* $1, 12, 4,$ *và* $5,$ *là*

$$\frac{1+12+4+5}{4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}.$$

Example (2022-UMC-5-1-2)

Mạnh, Minh, Mơ, và Mỹ tham dự một kỳ thi toán. Mạnh được 94, Minh được 81, và Mơ được 95 điểm. Số điểm của Mỹ là một số nguyên nằm giữa 91 và 97. Nếu điểm trung bình của cả bốn bạn là một số nguyên, hỏi Mỹ được bao nhiêu điểm?

Definition. *Giá trị trung bình* của một dãy các số là tổng của các số chia cho số lượng các số đó. *Ví dụ, giá trị trung bình của* $1, 12, 4,$ *và* $5,$ *là*

$$\frac{1+12+4+5}{4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}.$$

Solution. 2022-UMC-5-1-2 Tổng số điểm của các bạn bằng bốn lần điểm trung bình của cả bốn bạn. Vì điểm trung bình của cả bốn bạn là một số nguyên, cho nên tổng số điểm của các bạn là bội số của 4.

Tổng điểm của Mạnh, Minh, và Mơ là $94 + 81 + 95 = 270 = 4 \times 67 + 2$. Đây là một số khi chia 4 có dư 2. Để cho tổng số điểm của các bạn chia hết cho 4, thì số điểm của Mỹ là một số nguyên chia 4 dư 2. Vì điểm số của Mỹ nằm giữa 91 và 97, và giữa các số này chỉ có một số 94 chia 4 dư 2, nên $\boxed{94}$ là điểm số của Mỹ. □

Problem 1.1.3 (2022-UMC-5-1-3)**.** Catherine, Erica, and Tiana cùng giải một số bài toán để ôn tập cho kỳ thi. Họ thách nhau là mỗi lần cả ba cùng bắt đầu giải một bài, người xong trước đợi cho đến khi những người còn lại giải xong, rồi cả ba cùng chuyển sang bài tiếp theo. Với mỗi bài,

i. người đầu tiên giải được 4 viên kẹo,

ii. người thứ hai giải được 2 viên, và

iii. người thứ ba được 1 viên.

Kết quả là cả ba đều giải được tất cả các bài. Ngoài ra không có bài nào có hai người giải xong cùng lúc. Tổng số kẹo cả ba thu được là 20 viên. Ai được mấy viên?

1.2 Số nguyên tố và hợp số

Definition (Số nguyên tố)**.** *Số nguyên tố* là số tự nhiên lớn hơn 1 chỉ chia hết cho 1 và chính nó. *Ví dụ* $2, 3, 5,$ *và* 7 *là bốn số nguyên tố nhỏ nhất.*

Definition (Hợp số)**.** *Hợp số* là số tự nhiên có ước số khác 1 và khác chính nó. *Ví dụ* $4, 6, 8,$ *và* 9 *là bốn hợp số nhỏ nhất.*

Remark. Lưu ý rằng số 1 chia hết cho 1 và chính nó nhưng không phải là số nguyên tố.

Algorithm (Sàng Eratosthenes) — Thuật toán Sàng Eratosthenes được sử dụng để lọc ra các số nguyên tố. Thuật toán được thực hiện như sau đối với bảng các số từ 1 đến 100.

i. Bỏ số 1. Chọn số 2.
ii. Bỏ đi tất cả các bội số của 2.
iii. Chọn số nhỏ nhất chưa bị bỏ đi.
iv. Bỏ đi tất cả các bội số của số được chọn trong bước iii.
v. Lặp lại bước iii. và iv. cho đến khi hết các số trong bảng.

1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Hình 1.1: Bỏ 1. Chọn 2. Bỏ các bội số của 2

1	**2**	**3**	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Hình 1.2: Chọn 3. Bỏ các bội số của 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Hình 1.3: Sau khi kết thúc

Fact. Nếu số nguyên dương n không có ước số nào nhỏ hơn căn bậc hai của n, $\sqrt{n}$, thì n là số nguyên tố.

Example 1.2.1 (2022-UMC-5-1-4)

Có bao nhiêu số nguyên dương lẻ có ba chữ số khác nhau mà mỗi chữ số cũng là số nguyên tố.

Ví dụ số có ba chữ số 257 *là số lẻ và cả ba chữ số của* 257 *là* $2, 5$, *và* 7 *đều khác nhau. Trong khi đó số* 372 *có ba chữ số* $3, 7$, *và* 2 *đều đôi một khác nhau, nhưng không phải là số lẻ.*

Example (2022-UMC-5-1-4)

Có bao nhiêu số nguyên dương lẻ có ba chữ số khác nhau mà mỗi chữ số cũng là số nguyên tố.

Ví dụ số có ba chữ số 257 *là số lẻ và cả ba chữ số của* 257 *là* $2, 5,$ *và* 7 *đều khác nhau. Trong khi đó số* 372 *có ba chữ số* $3, 7,$ *và* 2 *đều đôi một khác nhau, nhưng không phải là số lẻ.*

Solution. 2022-UMC-5-1-4 Trước hết trong các chữ số từ 0 đến 9 có bốn chữ số $2, 3, 5, 7$ là số nguyên tố. Các chữ số của số có ba chữ số cần phải được chọn từ bốn chữ số này. Để ý rằng 2 không thể là chữ số hàng đơn vị vì khi này số có ba chữ số là số chẵn.

Như vậy có ba cách để chọn chữ số hàng đơn vị từ $3, 5, 7$. Sau khi chọn xong chữ số hàng đơn vị (ví dụ 3), có ba cách để chọn chữ số hàng chục từ hai số còn lại $(5, 7)$ và 2. Sau đó có hai các để chọn chữ số hàng trăm.

Từ đây suy ra số các số cần tìm là $\boxed{3 \times 3 \times 2 = 18.}$ □

Example 1.2.2 (2022-UMC-5-1-5)

$(3, 5, 13)$ *và* $(5, 3, 13)$ *là hai bộ ba số nguyên tố đều có tổng là* $3 + 5 + 13 = 21$, *nhưng được coi là hai bộ khác nhau do cách hoán vị hai số khác nhau là* 3 *và* 5. Có bao nhiêu bộ ba số nguyên tố có tổng là 21?

Example (2022-UMC-5-1-5)

$(3,5,13)$ *và* $(5,3,13)$ *là hai bộ ba số nguyên tố đều có tổng là* $3+5+13=21$, *nhưng được coi là hai bộ khác nhau do cách hoán vị hai số khác nhau là* 3 *và* 5. Có bao nhiêu bộ ba số nguyên tố có tổng là 21?

Solution. 2022-UMC-5-1-5 Trước hết, 21 là số lẻ. Ngoại trừ 2, tất cả các số nguyên tố đều là số lẻ. Tổng của ba số nguyên tố chỉ có thể là lẻ nếu có hai số chẵn một số lẻ hoặc cả ba số đều lẻ.

Trường hợp 1: Có hai số chẵn và một số lẻ. Dễ thấy rằng hai số chẵn đều là 2 và số lẻ là $21-2\times 2=17$. Với ba số $2,2,17$, có ba cách hoán vị số 17 để tạo ra ba bộ ba số.

Trường hợp 2: Cả ba số đều là lẻ.

Trường hợp 2a: Nếu số nguyên tố bé nhất là 3 thì tổng hai số còn lại là $21-3=18$. Chỉ có hai trường hợp $5+13=7+11=18$. Mỗi bộ ba số $\{(3,5,13),(3,7,11)\}$ đều có ba số khác nhau, do đó từ mỗi bộ sau $3!=6$ hoán vị sẽ có được 6 bộ ba số.

Trường hợp 2b: Nếu số nguyên tố bé nhất là 5 thì tổng hai số còn lại là $21-5=16$. Chỉ có một trường hợp $5+11=16$. Như trường hợp 1, vì có hai số giống nhau, nên sẽ có 3 bộ khác nhau từ các cách hoán vị.

Trường hợp 2c: Nếu số nguyên tố bé nhất là 7 thì tổng hai số còn lại là $21-7=14$. Chỉ có một trường hợp $7+7=14$. Trong trường hợp này chỉ có một bộ ba.

Do đó, tổng cộng có $\boxed{3+6+6+3+1=19}$ bộ ba số. □

Definition (Ước số nguyên tố)**.** Một ước số p của một số n được gọi là *ước số nguyên tố* nếu như p là số nguyên tố.

Problem 1.2.3 (2022-UMC-5-1-6)**.** Trong số các số hợp số lớn hơn 1 và không vượt quá 200, có bao nhiêu số không có ước số nguyên tố nào bé hơn 5?

Definition (Cấp số cộng)**.** Một *cấp số cộng* là một dãy số mà bất kỳ hai phần tử liên tiếp nhau sai khác nhau một hằng số. *Dãy* $1,4,7$ *là một cấp số cộng* $4-1=7-4=3$. *Dãy* $2,0,-2,-4$ *cũng là một cấp số cộng.*

Problem 1.2.4 (2022-UMC-5-1-7)**.** Có bao nhiêu bộ ba số nguyên tố khác nhau, mỗi số nhỏ hơn 20, và lập thành một cấp số cộng tăng dần? *Ví dụ* $3,5,7$ *là bộ ba số nguyên tố khác nhau, tăng dần* $3<5<7$, *và lập thành một cấp số cộng.*

1.3 Bội số chung, ước số chung, và cặp số nguyên tố cùng nhau

Definition (Ước số chung)**.** Nếu một số nguyên là ước số của mỗi số trong một nhóm các số nguyên thì số nguyên đó là *ước số chung* của nhóm các số đó. *Ví dụ* 3 *là ước số chung của* $3, 6$, *và* 12.

Definition (Ước số chung lớn nhất)**.** Số lớn nhất trong các ước số chung của một nhóm các số nguyên được gọi là *ước số chung lớn nhất* của nhóm các số đó. *Ví dụ* 6 *là ước số chung của* $12, 18$ *và* 30.

Ký hiệu: ước số chung lớn nhất của hai số nguyên m và n là $\gcd(m, n)$.

Definition (Cặp số nguyên tố cùng nhau)**.** Nếu hai số nguyên chỉ có một ước số chung duy nhất là 1 thì hai số đó được gọi là *cặp số nguyên tố cùng nhau. Ví dụ* $(12, 35)$ *là cặp số nguyên tố cùng nhau.*

Ký hiệu thường dùng: cặp số nguyên m và n là nguyên tố cùng nhau tương đương với $\gcd(m, n) = 1$.

Definition (Bội số chung)**.** Nếu một số nguyên là bội số của mỗi số trong một nhóm các số nguyên thì số nguyên đó là *bội số chung* của nhóm các số đó. *Ví dụ* 12 *là bội số chung của* $2, 3$, *và* 6.

Definition (Bội số chung nhỏ nhất)**.** Số lớn nhất trong các bội số chung của một nhóm các số nguyên được gọi là *bội số chung nhỏ nhất* của nhóm các số đó. *Ví dụ* 6 *và* 12 *đều là bội số chung của* $2, 3$, *và* 6, *nhưng* 6 *là bội số chung nhỏ nhất.*

Ký hiệu: bội số chung nhỏ của hai số nguyên m và n là $\operatorname{lcm}(m, n)$.

Fact. Mỗi ước số chung của hai số m và n đều là ước số của $\gcd(m, n)$.

Mỗi bội số chung của hai số m và n đều là bội số của $\operatorname{lcm}(m, n)$.

Fact. Mỗi ước số chung của hai số m và n đều là ước số của $\gcd(m, n)$.

Mỗi bội số chung của hai số m và n đều là bội số của $\operatorname{lcm}(m, n)$.

Fact. Cho a, b, và n là các số tự nhiên, khi đó:

i. Tổng và hiệu của các bội số của n đều là bội số của n.

ii. Ước số chung của a và b đều là ước số của $a + b$ và $a - b$.

iii. $n \mid a, n \mid b$, thì $n \mid a + b, n \mid a - b$.

> **Remark.** Ước số chung lớn nhất của hai số cũng là ước số chung lớn nhất của số nhỏ nhất trong hai số đó và hiệu số của hai số.

Theorem (Định lý về phép chia có dư)

Cho a, b là hai số nguyên $(b \neq 0)$, khi đó tồn tại duy nhất hai số nguyên q, r sao cho

$$a = bq + r, \text{ với } 0 \leq r < |b|.$$

a được gọi là *số bị chia,* b là *số chia,* q là *thương số* và r là *số dư.* Khi chia a cho b có thể có số dư là $0,\ 1,\ 2,\ \ldots, |b| - 1$.

Ký hiệu $|b|$ là giá trị tuyệt đối của b.

Algorithm (Thuật toán Euclid) — *Thuật toán Euclid* được dùng để tìm ước số chung lớn nhất của hai số nguyên m và n, bằng cách áp dụng liên tiếp tính chất $\gcd(m,n) = \gcd(m-n,n)$.

Cho a và b là hai số nguyên dương, $a > b$. Để tìm $\gcd(a,b)$ định lý về phép chia có dư được áp dụng nhiều lần liên tiếp:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1 \\ b &= r_1q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3 \\ &\cdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1} \end{aligned}$$

Khi đó

$$\gcd(a,b) = \gcd(b,r_1) = \gcd(r_1,r_2) = \cdots = \gcd(r_{n-1},r_n) = r_n.$$

Algorithm (Thuật toán Euclid mở rộng) — Cho m and n là hai số nguyên dương sao cho $m = qn + r$, với $0 \le r < n$, khi đó

$$\gcd(m,n) = \gcd(r,n).$$

Thuật toán được áp dụng nhiều lần liên tiếp để đơn giản hoá việc tìm ước số chung lớn nhất.

Example 1.3.1 (2022-UMC-5-1-8)

Hai hình chữ nhật khác nhau có cùng chiều ngang. Cả bốn cạnh của mỗi hình chữ nhật đều có độ dài là một số nguyên. Diện tích của hai hình chữ nhật là 1818 và 1746. Tìm độ dài lớn nhất có thể của chiều ngang của hai hình chữ nhật.

Example (2022-UMC-5-1-8)

Hai hình chữ nhật khác nhau có cùng chiều ngang. Cả bốn cạnh của mỗi hình chữ nhật đều có độ dài là một số nguyên. Diện tích của hai hình chữ nhật là 1818 và 1746. Tìm độ dài lớn nhất có thể của chiều ngang của hai hình chữ nhật.

Solution. 2022-UMC-5-1-8 Vì chiều ngang của mỗi hình chữ nhật đều là ước số của 1818 và 1746, do đó chiều ngang lớn nhất có thể chính là ước số chung lớn nhất của 1818 và 1746.

Do $\gcd(1818, 1746) = \gcd(2 \cdot 3^2 \cdot 101, 2 \cdot 3^2 \cdot 97) = 2 \cdot 3^2 = 18$, nên độ dài lớn nhất có thể của chiều ngang của hai hình chữ nhật là $\boxed{18.}$ □

Example 1.3.2 (2022-UMC-5-1-9)

Bi, Chi, và Ni chạy bộ vòng quanh sân vận động. Bi chạy với tốc độ 120 mét mỗi phút, Chi chạy 80 mét một phút, và Ni 70 mét trên phút. Cả ba cùng bắt đầu lúc 9:00 sáng tại cùng vạch xuất phát.

Biết rằng độ dài của một vòng chạy quanh sân là 400 mét, hỏi sau đúng bao nhiêu phút họ cùng gặp nhau ở vạch xuất phát lần đầu tiên? *Chú ý rằng số phút trong câu hỏi là số nguyên.*

Example (2022-UMC-5-1-9)

Bi, Chi, và Ni chạy bộ vòng quanh sân vận động. Bi chạy với tốc độ 120 mét mỗi phút, Chi chạy 80 mét một phút, và Ni 70 mét trên phút. Cả ba cùng bắt đầu lúc 9:00 sáng tại cùng vạch xuất phát.

Biết rằng độ dài của một vòng chạy quanh sân là 400 mét, hỏi sau đúng bao nhiêu phút họ cùng gặp nhau ở vạch xuất phát lần đầu tiên? *Chú ý rằng số phút trong câu hỏi là số nguyên.*

Solution. 2022-UMC-5-1-9 Gọi n là số phút đã qua kể từ 9:00 sáng cho đến lúc Bi, Chi, và Ni cùng gặp lại nhau ở vạch xuất phát lần đầu tiên. Bi chạy được $\frac{120n}{400} = \frac{3n}{10}$, Chi $\frac{80n}{400} = \frac{n}{5}$, và Ni $\frac{70n}{400} = \frac{7n}{40}$ vòng quanh sân.

Vì họ cùng gặp lại ở vạch xuất phát, nên số các vòng xung quanh sân này đều phải là số nguyên. Do họ cùng gặp lại nhau lần đầu tiên nên n là bội số chung nhỏ nhất của $10, 5$, và 40, $n = \text{lcm}(5, 10, 40) = 40$. Do đó, học gặp lại nhau sau $\boxed{40}$ phút (vào lúc 9:40 sáng). $\square$

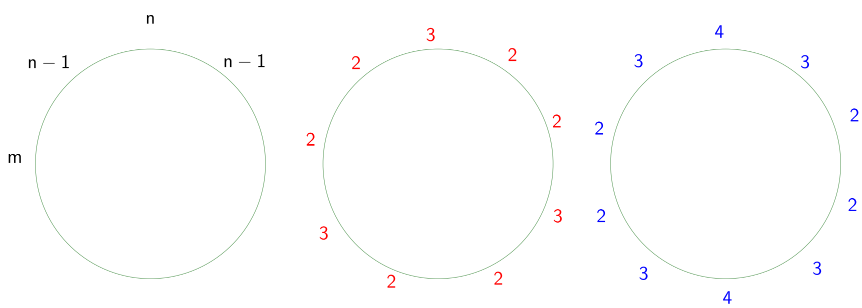
Example 1.3.3 (2022-UMC-5-1-10)

Mười số nguyên dương được xếp xung quanh một vòng tròn. Mỗi số hơn ước số chung lớn nhất của hai số hai bên là 1. Tìm tổng của mười số này.

Example (2022-UMC-5-1-10)
Mười số nguyên dương được xếp xung quanh một vòng tròn. Mỗi số hơn ước số chung lớn nhất của hai số hai bên là 1. Tìm tổng của mười số này.

Solution. 2022-UMC-5-1-10 Trước hết lưu ý rằng theo điều kiện đề bài, mỗi số hơn ước số chung lớn nhất của hai số hai bên là 1, do đó mỗi số đều lớn hơn hoặc bằng 2.

Giả sử n là số nguyên lớn nhất trong hình tròn (xem hình tròn ngoài cùng bên trái.) Khi đó ước số chung lớn nhất của hai số hai bên n là $n-1$. Vì cả hai số hai bên đều không thể vượt quá n, cho nên cả hai số đều bằng $n-1$ Giả sử m là số kề bên $n-1$ nhưng khác bên với n. Theo đề bài $\gcd(n,m) = n-2$. Do đó $n-2 \mid n = (n-2)+2$, suy ra $n-2 \mid 2$. Như vậy $n \in \{3,4\}$.



Trường hợp 1: $n = 3$, khi đó $\gcd(3,m) = 1$, và $m \geq 2$, do đó $m = 2$. Số bên cạnh m không thể là 2, do đó số này phải là 3. Tiếp tục như vậy ta sẽ có một dãy số xung quanh hình tròn (xem hình tròn giữa)

$$\underbrace{3,2,2},3,2,2,3,2,2$$

Dãy số này bao gồm các bộ ba số $3,2,2$ liên tiếp nên không thể tạo thành 10 số được.

Trường hợp 2: $n = 4$, khi đó $\gcd(3,m) = 1$, và $m \geq 2, m \neq 4$, do đó $m = 2$. Lý luận tương tự như trường hợp trên và để ý rằng $\gcd(4,2) = \gcd(2,2) = 2$, ta nhận được dãy mười số (xem hình tròn ngoài cùng bên phải)

$$\underbrace{4,3,2,2,3},4,3,2,2,3.$$

Tổng của mười số này là $\boxed{28.}$ □

Problem 1.3.4 (2022-UMC-5-1-11)**.** Tìm số nguyên dương n sao cho bội số chung nhỏ nhất của n và $n-30$ là $n+1320$.

Problem 1.3.5 (2022-UMC-5-1-12)**.** Có bao nhiêu số nguyên dương, nhỏ hơn 200, là bội số của 5 hoặc 7, nhưng không phải là bội số của cả 5 và 7.

Problem 1.3.6 (2022-UMC-5-1-13)**.** Tìm số nguyên dương nhỏ nhất khi chia cho $2,3,5,7$, hoặc 11 đều có số dư là 1.

Problem 1.3.7 (2022-UMC-5-1-14)**.** Tìm tất cả các số nguyên tố p, nếu như tồn tại các số nguyên dương a,b,c, và d sao cho:

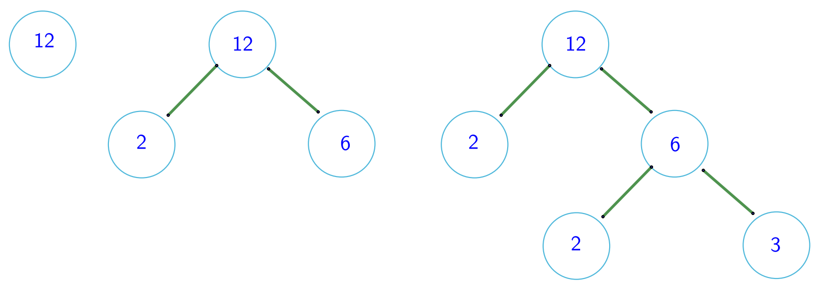
$$\begin{cases} a+b+c = p-3 \\ a+b+d = p+1 \\ a+c+d = 2p+2 \\ b+c+d = p \end{cases}$$

1.4 Phân tích ra thừa số nguyên tố

Algorithm (Cây hệ số nguyên tố) — Để phân tích một số nguyên ra thành thừa số nguyên tố, thuật toán xây dựng một *cây hệ số nguyên tố* như sau:

i. Bắt đầu bằng việc viết số cần phân tích. Nếu đây là số nguyên tố thì dừng lại.
ii. Tìm một ước số nguyên tố của số này và viết vào phía dưới bên trái.
iii. Chia số đang có cho ước số nguyên tố, viết thương số vào phía dưới bên phải.
iv. Coi thương số như số đang cần phân tích. Lặp lại bước i.

Ví dụ số 12 được phân tích thành cây hệ số nguyên tố trong hình Figure 1.4 qua ba bước.



Hình 1.4: Cây hệ số nguyên tố của 12, $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$.

Definition (Phân tích ra thừa số nguyên tố)**.** Phân tích ra thừa số nguyên tố của một số nguyên là tích của các thừa số nguyên tố và là chính nó.

Theorem (Định lý Cơ bản của Số học)

Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích được thành tích những thừa số nguyên tố, và sự phân tích này là *duy nhất* nếu không kể đến thứ tự của các thừa số.

Fact. Nếu trong phân tích ra thừa số nguyên tố của một số tự nhiên m có lũy thừa bậc n của một số nguyên tố p, $p^n \mid m$; thì trong phân tích ra thừa số nguyên tố của một bội số của m cũng chứa lũy thừa của p với bậc ít nhất là n.

Ví dụ $12 = 2^2 \times 3$ *có chứa* 2^2. *Bội số của* 12 *như* $36 = 2^2 \times 3^2$ *và* $48 = 2^4 \times 3$ *có chứa lũy thừa* 2^2 *và* 2^4, *với bậc* 2 *và* 4 *đều ít nhất là* 2.

Fact. Nếu trong phân tích ra thừa số nguyên tố của một số tự nhiên m có lũy thừa bậc n của một số nguyên tố p, $p^n \mid m$; thì trong phân tích ra thừa số nguyên tố của một ước số của m chỉ có thể chứa lũy thừa của p với bậc cao nhất nhất là n.

Ví dụ $12 = 2^2 \times 3$ *có chứa* 2^2. *Ước số của* 12 *như* $4 = 2^2$ *và* $6 = 2 \times 3$ *có chứa lũy thừa* 2^2 *và* 2^1, *với bậc* 2 *và* 1 *đều không vượt quá hơn* 2.

Fact. Các số nguyên tố trong phân tích ra thừa số nguyên tố của bội số chung nhỏ nhất của một nhóm các số nguyên là những số nguyên tố có mặt trong ít nhất một phân tích ra thừa số nguyên tố của các số trong nhóm. Số mũ của mỗi số nguyên tố như vậy trong phân tích ra thừa số nguyên tố của bội số chung nhỏ nhất là số mũ lớn nhất của số nguyên tố đó hiện diện trong các phân tích ra thừa số nguyên tố của các số trong nhóm.

Ví dụ $6 = 2 \times 3$ *có chứa* 2^1, $20 = 2^2 \times 5$ *có chứa* 2^2. *Bội số chung nhỏ nhất của* 6 *và* 20 *là* $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ *có chứa* 2^2 *là lũy thừa với số mũ lớn nhất trong* 2^1 *và* 2^2.

Fact. Các số nguyên tố trong phân tích ra thừa số nguyên tố của ước số chung lớn nhất của một nhóm các số nguyên là những số nguyên tố có mặt trong tất cả phân tích ra thừa số nguyên tố của các số trong nhóm. Số mũ của mỗi số nguyên tố như vậy trong phân tích ra thừa số nguyên tố của ước số chung lớn nhất là số mũ nhỏ nhất của số nguyên tố đó hiện diện trong các phân tích ra thừa số nguyên tố của các số trong nhóm.

Ví dụ $12 = 2^2 \times 3$ *có chứa* $2^2, 5^0$; $30 = 2 \times 3 \times 5$ *có chứa* $2^1, 5^1$. *Ước số chung lớn nhất của* 12 *và* 30 *là* $6 = 2 \times 3$ *có chứa* 2^1 *và* 5^0 *là các lũy thừa với số mũ nhỏ nhất trong* $2^2, 2^1$ *và* $5^0, 5^1$.

Lemma

Giả sử $a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n},\ b = p_1^{f_1} \cdot p_2^{f_2} \cdots p_n^{f_n}$, khi đó:

$$\gcd(a,b) = p_1^{\min\{e_1,f_1\}} \cdot p_2^{\min\{e_2,f_2\}} \cdots p_n^{\min\{e_n,f_n\}}$$

Lemma

Giả sử $a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n},\ b = p_1^{f_1} \cdot p_2^{f_2} \cdots p_n^{f_n}$, khi đó:

$$\operatorname{lcm}[a,b] = p_1^{\max\{e_1,f_1\}} \cdot p_2^{\max\{e_2,f_2\}} \cdots p_n^{\max\{e_n,f_n\}}$$

Fact. Tất cả các số mũ trong thừa số nguyên tố của các số chính phương đều là số chẵn.

Fact. Tất cả các số mũ trong thừa số nguyên tố của các số lập phương đều là bội số của 3.

Corollary

Cho a, b, và c là các số nguyên dương, khi đó:

$$\gcd(ac, bc) = c \times \gcd(a,b),\ \operatorname{lcm}(ac, bc) = c \times \operatorname{lcm}(a,b).$$

Corollary

Cho m và n là các số nguyên dương, khi đó:

$$\gcd(m,n) \times \operatorname{lcm}(m,n) = m \times n.$$

Definition (Phân số)**.** *Phân số* là sự biểu diễn số hữu tỷ dưới dạng tỷ lệ của hai số nguyên, trong đó số ở trên được gọi là *tử số*, còn số ở dưới được gọi là *mẫu số*. Điều kiện bắt buộc là mẫu số phải khác 0.

$$\frac{\underbrace{a}_{\text{tử số}}}{\underbrace{b}_{\text{mẫu số}}},\ b \neq 0$$

Definition (Phân số tối giản)**.** *Phân số tối giản* là phân số mà tử số và mẫu số không thể cùng chia hết cho số nào ngoại trừ số 1 (hoặc -1 nếu lấy các số âm). Nói cách khác phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản nếu a và b là nguyên tố cùng nhau, nghĩa là a và b có ước số chung lớn nhất là 1.

Example 1.4.1 (2022-UMC-5-1-15)

Có bao nhiêu ước số của 72, chia hết cho 3, nhưng không chia hết cho 9?

Example (2022-UMC-5-1-15)

Có bao nhiêu ước số của 72, chia hết cho 3, nhưng không chia hết cho 9?

Solution. 2022-UMC-5-1-15 Ta có $72 = 2^3 \times 3^2$. Do đó một ước số của 72, chia hết cho 3, nhưng không chia hết cho 9, có dạng $2^n \cdot 3$, trong đó $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Có $\boxed{4}$ số như vậy. □

Example 1.4.2 (2022-UMC-5-1-16)

Tìm số nguyên dương nhỏ nhất có bốn chữ số, chia hết cho mỗi số trong bốn số nguyên tố nhỏ nhất, và không chia hết cho bất kỳ số nguyên tố nào khác.

Example (2022-UMC-5-1-16)

Tìm số nguyên dương nhỏ nhất có bốn chữ số, chia hết cho mỗi số trong bốn số nguyên tố nhỏ nhất, và không chia hết cho bất kỳ số nguyên tố nào khác.

Solution. 2022-UMC-5-1-16 Trước hết lưu ý rằng số cần tìm phải chia hết cho bội số chung nhỏ nhất của bốn số nguyên tố nhỏ nhất, $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$. Như vậy số cần tìm là một bội số của 210, và có thể viết dưới dạng $210 \times n$. Do $210 \times n$ chỉ chia hết cho $2, 3, 5$, và 7, nên n cũng chỉ chia hết cho $2, 3, 5$, hoặc 7. Từ điều kiện đề bài,

$$210n \geq 1000 \Rightarrow n \geq \frac{100}{21} = 4.761\ldots,$$

$n \geq 4.761$ và vì n là số nguyên nên $n \geq 5$. Do đó giá trị bé nhất của n là 5. Số cần tìm là $\boxed{210 \cdot 5 = 1050.}$ □

Example 1.4.3 (2022-UMC-5-1-17)

$\overline{HE}$ là một số có hai chữ số và $\overline{SHE}$ là một số có ba chữ số. Tìm các số này, nếu biết rằng,

$$\overline{HE} \times \overline{HE} = \overline{SHE}.$$

Chú ý rằng các chữ số được ký hiệu bằng các ký tự giống nhau là các chữ số khác nhau, Các chữ số được ký hiệu bằng các ký tự khác nhau là các chữ số khác nhau.

Example (2022-UMC-5-1-17)
$\overline{HE}$ là một số có hai chữ số và $\overline{SHE}$ là một số có ba chữ số. Tìm các số này, nếu biết rằng,

$$\overline{HE} \times \overline{HE} = \overline{SHE}.$$

Chú ý rằng các chữ số được ký hiệu bằng các ký tự giống nhau là các chữ số khác nhau, Các chữ số được ký hiệu bằng các ký tự khác nhau là các chữ số khác nhau.

Solution. 2022-UMC-5-1-17 Trước hết lưu ý rằng $\overline{SHE} = S \times 100 + \overline{HE}$. Do đó

$$\overline{HE} \times \overline{HE} = \overline{SHE} = S \times 100 + \overline{HE}. \Rightarrow \overline{HE}(\overline{HE} - 1) = S \times 100$$

Để ý rằng $100 = 5 \times 5 \times 2 \times 2$, như vậy tích số $\overline{HE}(\overline{HE} - 1)$ có hai thừa số nguyên tố 5.

Mặt khác, $\overline{HE}$ và $\overline{HE} - 1$ là hai số nguyên liên tiếp nên nếu một số chia hết cho 5 và số kia không chia hết cho 5. Do có hai thừa số nguyên tố 5 nên một trong hai số chia hết cả hai thừa số 5, tức là chia hết cho 5×5.

Vì vậy $\overline{HE}$ là một trong các giá trị $25, 50, 75$ hoặc $26, 51, 76$. Dễ dàng kiểm tra 6 trường hợp này. Số cần tìm là $\boxed{\overline{HE} = 25, \overline{SHE} = 625.}$ □

Problem 1.4.4 (2022-UMC-5-1-18)**.** Tìm số nguyên dương n sao cho bội số chung nhỏ nhất của n và $n - 30$ là $n + 1320$.

Problem 1.4.5 (2022-UMC-5-1-19)**.** Ước số chung lớn nhất của n và 480 is 12. Bội số chung nhỏ nhất của n and 120 is 480. Tìm n.

Problem 1.4.6 (2022-UMC-5-1-20)**.** Để trồng hoa cho công viên công cộng, những người ở xung quanh công viên được lấy ý kiến. Có tổng cộng n người được hỏi. Có đúng $\frac{9}{14}$ số người trả lời cho là màu của hoa không quan trọng. Có đúng $\frac{7}{12}$ số người trả lời cho là mùi của hoa không quan trọng. Có tổng cộng 753 người trả lời là cả màu lẫn mùi của hoa là quan trọng. Hỏi n có thể có bao nhiêu giá trị khác nhau?

1.5 Số các ước số của một số tự nhiên

Theorem

Nếu $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$, khi đó số các ước số của n, bao gồm cả 1 và chính nó là:

$$t(n) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_k + 1)$$

Fact (Số các ước số của một số chính phương)**.** Một số tự nhiên $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ là số chính phương tương đương với các số $e_1, e_2, \ldots, e_k$ đều chẵn, có nghĩa là $t(n)$, số các ước số của n, là một số lẻ,

$$t(n) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_k + 1)$$

Một số tự nhiên là số chính phương và chỉ khi số các ước số của nó là một số lẻ.

Example 1.5.1 (2022-UMC-5-1-21)

Linh và Lan cùng chơi một trò chơi. Khi trò chơi bắt đầu, một số nguyên dương được chọn và được viết lên trên bảng. Sau đó họ thay phiên nhau để đi. Đến lượt của mình, người được chơi chọn ra một số từ các ước số của số trên bảng, bao gồm cả 1 và chính số đó, mà chưa có trên bảng, rồi viết số đó lên bảng. Người thua là người không thể chọn được số nào.

Nếu được chọn để làm người đi đầu hoặc đi thứ hai, Linh có chiến thuật gì để luôn luôn thắng, bất kể số được viết lên bảng khi bắt đầu mỗi trò chơi là số nào?

Example (2022-UMC-5-1-21)

Linh và Lan cùng chơi một trò chơi. Khi trò chơi bắt đầu, một số nguyên dương được chọn và được viết lên trên bảng. Sau đó họ thay phiên nhau để đi. Đến lượt của mình, người được chơi chọn ra một số từ các ước số của số trên bảng, bao gồm cả 1 và chính số đó, mà chưa có trên bảng, rồi viết số đó lên bảng. Người thua là người không thể chọn được số nào.

Nếu được chọn để làm người đi đầu hoặc đi thứ hai, Linh có chiến thuật gì để luôn luôn thắng, bất kể số được viết lên bảng khi bắt đầu mỗi trò chơi là số nào?

Solution. 2022-UMC-5-1-21 Từ tính chất của số các ước số, nếu một số là số chính phương thì nó sẽ có một số lẻ các ước số, Linh nên chọn đi trước, vì Linh sẽ là người điền ước số cuối cùng lên bảng. Dễ dàng suy ra, nếu số ban đầu không phải là số chính phương, thì nó sẽ có một số chẵn các ước số, khi này Linh nên chọn đi lượt thứ nhì. □

Example 1.5.2 (2022-UMC-5-1-22)

Có bao nhiêu số là ước số của 30^4 nhưng không là ước số của 30^2?

Example (2022-UMC-5-1-22)

Có bao nhiêu số là ước số của 30^4 nhưng không là ước số của 30^2?

Solution. 2022-UMC-5-1-21 Nếu một số là ước số của $30^2 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$ thì nó cũng là ước số của 30^4, do đó số các ước số của $30^4 = 2^4 \times 3^4 \times 5^4$ nhưng không là ước số của 30^2 là hiệu số của số các ước số của 30^4 với số các ước số của 30^2, $\boxed{(4+1)(4+1)(4+1) - (2+1)(2+1)(2+1) = 125 - 27 = 98.}$ $\square$

Example 1.5.3 (2022-UMC-5-1-23)

Tìm số nguyên dương bé nhất có thể viết thành tích của hai số nguyên dương lớn hơn 1 bằng đúng ba cách khác nhau. *Ví dụ* $70 = 2 \times 35 = 5 \times 14 = 7 \times 10$ *là một số có thể viết như vậy. Chú ý rằng thứ tự của các thừa số là không quan trọng,* 7×10 *và* 10×7 *được coi là một cách viết.*

Example (2022-UMC-5-1-23)

Tìm số nguyên dương bé nhất có thể viết thành tích của hai số nguyên dương lớn hơn 1 bằng đúng ba cách khác nhau. *Ví dụ* $70 = 2 \times 35 = 5 \times 14 = 7 \times 10$ *là một số có thể viết như vậy. Chú ý rằng thứ tự của các thừa số là không quan trọng,* 7×10 *và* 10×7 *được coi là một cách viết.*

Solution. 2022-UMC-5-1-23 Nếu tính cả cách viết $n = n \times 1$ thì số cần tìm có bốn cách viết khác nhau thành tích của hai số. Như vậy nếu n là không phải là số chính phương thì n phải có đúng 8 ước số. Nếu $n = m^2$ là số chính phương thì n phải có đúng 7 ước số, trong đó 3 ước số lớn nhất và 3 ước số bé nhất tạo thành ba cách viết, và $n = m \times m$ là cách thứ tư.

Trường hợp 1: n có đúng 7 ước số. Dễ thấy rằng $n = p^6$. Số bé nhất là $2^6 = 64$.

Trường hợp 2: n có đúng 8 ước số. Vì $8 = 8 = 2\, times 4 = 2 \times 2 \times 2$, cho nên n có ba dạng khác nhau p^7, pq^3, và pqr, trong đó p, q, r là ba số nguyên tố khác nhau. Số p^7, vì lớn hơn 64, nên sẽ không được xét. Giá trị nhỏ nhất của pq^3 là $3 \times 2^3 = 24$. Giá trị nhỏ nhất của pqr là $2 \times 3 \times 5 = 30$.

Như vậy số cần tìm là $\boxed{24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6.}$ □

Problem 1.5.4 (2022-UMC-5-1-24)**.** Let $n = 2^a \cdot 3^b$, where a and b are positive integers. If n has exactly 22 divisors, including 1 and itself, how many divisors does n^2 have?

Problem 1.5.5 (2022-UMC-5-1-25)**.** Tìm tổng của các số nhỏ hơn 10000 mà mỗi số đều có đúng 5 ước số?

Problem 1.5.6 (2022-UMC-5-1-26)**.** Có bao nhiêu các ước số của 28800 có đúng 8 ước số?

1.6 Challenging Puzzles

Problem 1.6.1 (HC-2021-SM2-R1-P4)**.** (*Beginner Level*) Some cookies were stolen from the kitchen. Anna and Hannah were questioned by their mother. Here were their answers,

- Anna: Hannah did not steal the cookies.
- Hannah: Anna stole the cookies.

Their mother knew that *only one of them stole the cookies* and *that one was lying.*

Which one stole the cookies? Did Anna tell the truth? How about Hannah?

How to provide your answer:

- If you think that Anna stole the cookies, Anna told the truth, and Hannah lied, then submit A10.
- If you think that Hannah stole the cookies, Anna lied, and Hannah told the truth, then submit H01.

Problem (HC-2021-SM2-R1-P4)**.** (*Beginner Level*) Some cookies were stolen from the kitchen. Anna and Hannah were questioned by their mother. Here were their answers,

- Anna: Hannah did not steal the cookies.
- Hannah: Anna stole the cookies.

Their mother knew that *only one of them stole the cookies* and *that one was lying.*

Which one stole the cookies? Did Anna tell the truth? How about Hannah?

How to provide your answer:

- If you think that Anna stole the cookies, Anna told the truth, and Hannah lied, then submit A10.
- If you think that Hannah stole the cookies, Anna lied, and Hannah told the truth, then submit H01.

Solution. HC-2021-SM2-R1-P4 Suppose that Anna stole the cookies. The she lied, which means that what she said about Hanna not stealing the cookies was false. In other words, Hannah stole the cookies. It is impossible, because only one of them stole the cookies. Therefore, Anna did not stole the cookies. Hannah did. Furthermore Anna lied, and Hannah lied, too.

Thus, the answer is $\boxed{\text{H00.}}$ □

Problem 1.6.2 (HC-2021-SM2-R1-P7)**.** (*Intermediate Level*) Ha Anh and a friend of hers are playing a two-player game using a number of coins. The players take turns to divide the coins into a number of piles of at least 1 coin each. In each turn, the player of that turns chooses as many piles as they want and divides each of them into two smaller piles. It is obvious that a pile consisting of only 1 coin cannot be chosen. The loser is the one who cannot move.

Initially there are 20 coins are in one pile. Ha Anh has a strategy to win the game. Should she go first or second? *Atmost* how many moves does Ha Anh need to make in order to *always* win the game?

How to provide your answer:

- If you think that Ha Anh wins by going first and she can win in atmost 10 moves, regardless whatever moves her friend makes, then submit F10.
- If you think that Ha Anh wins by going second and she can win in atmost 9 moves, regardless whatever moves her friend makes, then submit S9.

Problem (HC-2021-SM2-R1-P7)**.** (*Intermediate Level*) Ha Anh and a friend of hers are playing a two-player game using a number of coins. The players take turns to divide the coins into a number of piles of at least 1 coin each. In each turn, the player of that turns chooses as many piles as they want and divides each of them into two smaller piles. It is obvious that a pile consisting of only 1 coin cannot be chosen. The loser is the one who cannot move.

Initially there are 20 coins are in one pile. Ha Anh has a strategy to win the game. Should she go first or second? *Atmost* how many moves does Ha Anh need to make in order to *always* win the game?

How to provide your answer:

- If you think that Ha Anh wins by going first and she can win in atmost 10 moves, regardless whatever moves her friend makes, then submit F10.
- If you think that Ha Anh wins by going second and she can win in atmost 9 moves, regardless whatever moves her friend makes, then submit S9.

Solution. HC-2021-SM2-R1-P7 A strategy that guarantees a win for Ha Anh is as follows. In her turn, she splits every pile with an even number of coins (say $2k$) in two piles with an odd number of coins: the 1 coin pile and the $2k-1$ coin pile respectively.

$$\underbrace{2k}_{\text{even}} \to \underbrace{1}_{\text{odd}} + \underbrace{2k-1}_{\text{odd}}.$$

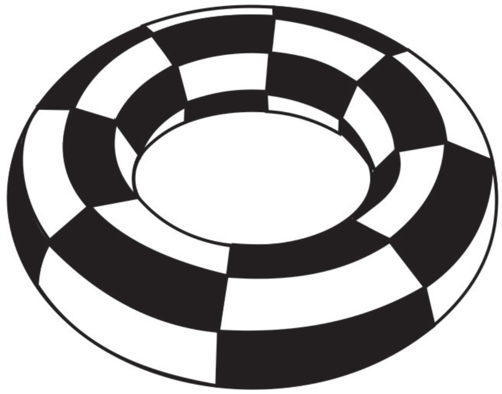
So, in her first turn, she created one pile with 1 coin and one with 19 coins. When her friend gets to make a move, all piles will have an odd number of coins. Her friend is therefore forced to split an odd pile, creating a new pile with an even number of coins.

$$\text{odd} \to \text{odd} + \text{even}.$$

This implies that Ha Anh, in the next turn, can continue her strategy, since there will be at least one even pile. She does not touch the piles with an odd number of coins. With each turn, the number of piles increases, so after at most 19 turns, the game is over. Since her friend always creates an even pile, the game cannot end during that turn. Therefore, it will be Ha Anh who wins the game.

Thus, Ha Anh should go first, and she will win after at most 10 moves. The answer is $\boxed{\text{F10.}}$ □

Problem 1.6.3 (HC-2021-SM2-R1-P9)**.** (*Intermediate Level*) Samuel glue the top and bottom edges, then the left and the right sides of a chessboard together, creating a torus. See Figure 1.6.



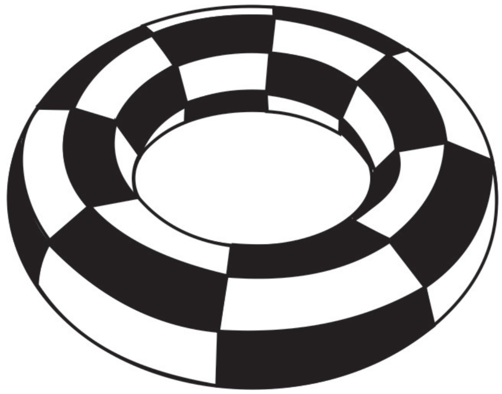
Hình 1.5: HC-2021-SM2-R1-P9

How many knights which can be placed so that *no two attack each other?*

How to provide your answer:

- If you think that Samuel can put 8 knights so that no two attack each other, then submit 8.
- If you think that it is impossible to determine, submit 0.

Problem (HC-2021-SM2-R1-P9)**.** (*Intermediate Level*) Samuel glue the top and bottom edges, then the left and the right sides of a chessboard together, creating a torus. See Figure 1.6.



Hình 1.6: HC-2021-SM2-R1-P9

How many knights which can be placed so that *no two attack each other?*

How to provide your answer:

- If you think that Samuel can put 8 knights so that no two attack each other, then submit 8.
- If you think that it is impossible to determine, submit 0.

Solution. HC-2021-SM2-R1-P9 It is easy to see that 32 knights can be placed on 32 black squares of the torus so that no two attack each other.

This cannot be improved. Let suppose that n knights can be placed so that no two attack each other. Since each knight attacks 8 squares, and an unoccupied square can be attacked by no more than 8 knights. Therefore,

$$8n \leq 8(64 - n) \Rightarrow n \leq 32$$

Thus, the answer is $\boxed{32.}$ □

Chương 2

Buổi 2 - 19 tháng 3 năm 2022

2.1 Số Nguyên tố Đặc biệt, Giai thừa, và các Số hoàn hảo

Definition (Số nguyên tố Mersenne)**.** Với p là số nguyên tố, nếu $2^p - 1$ là số nguyên tố, thì nó được gọi là số nguyên tố Mersenne.

$$2^2 - 1 = 3,\ 2^3 - 1 = 7,\ 2^5 - 1 = 32,\ 2^7 - 1 = 127,$$

đều là các số nguyên tố Mersenne.

Tuy nhiên, $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ không phải là số nguyên tố.

Definition (Số nguyên tố Fermat)**.** Với p là số nguyên tố, nếu $2^{2^n} + 1$ là số nguyên tố, thì nó được gọi là số nguyên tố Fermat.

$$2^{2^0} + 1 = 3,\ 2^{2^1} + 1 = 5,\ 2^{2^2} + 1 = 17,\ 2^{2^3} + 1 = 257,\ 2^{2^4} + 1 = 65537,$$

đều là các số nguyên tố Fermat.

Tuy nhiên, $2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$ không phải là số nguyên tố.

Definition (Cặp số nguyên tố sinh đôi)**.** Nếu p và $p + 2$ đều là số nguyên tố thì $(p, p + 2)$ được gọi là cặp số nguyên tố sinh đôi.

Definition (Giai thừa)**.** n là số tự nhiên. $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ là *giai thừa* của n.

Fact (Quan hệ đệ quy của giai thừa)**.** n là số tự nhiên. $(n + 1)!$ có thể tính được dựa trên giá trị của $n!$.

$$(n + 1)! = (n + 1) \times n!.$$

Definition (Tổng các ước số)**.** Tổng các ước số của một số tự nhiên n, bao gồm cả 1 và chính nó, được ký hiệu là $\sigma(n)$.

Definition (Số hoàn hảo)**.** *Số hoàn hảo* là số có tổng các ước số của nó bằng hai lần chính nó $\sigma(n) = 2n$.

Ví dụ $6, 28, 496$ *là các số hoàn hảo.*

Theorem

Nếu $2^p - 1$ là số nguyên tố Mersenne thì $2^{p-1}(2^p - 1)$ là số hoàn hảo.

Definition (Số dư)**.** *Số dư* (abundant number) là số có tổng các ước số của nó lớn hơn hai lần chính nó $\sigma(n) > 2n$.

Ví dụ $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28 > 24$.

Definition (Số thiếu)**.** *Số thiếu* (deficient number) là số có tổng các ước số của nó nhỏ hơn hai lần chính nó $\sigma(n) < 2n$.

Ví dụ $\sigma(44) = 1 + 2 + 4 + 11 + 22 + 44 = 84 < 88$.

Definition (Số palindrome)**.** *Palindrome* là số đọc xuôi hay ngược đều như nhau.

ví dụ $7, 22, 434, 9229,$ *và* 13731.

Example 2.1.1 (2022-UMC-5-2-1)

Tìm tổng của mười một số palindrome nhỏ nhất, mỗi số có 5 chữ số.

Example (2022-UMC-5-2-1)
Tìm tổng của mười một số palindrome nhỏ nhất, mỗi số có 5 chữ số.

Solution. 2022-UMC-5-2-1 Mười một số palindrom nhỏ nhất có 5 chữ số là:

$$10001, 10101, 10201, 10301, 10401, 10501, 10601, 10701, 10801, 10901, 11011$$

Tổng của chúng là $\boxed{115521.}$ □

Example 2.1.2 (2022-UMC-5-2-2)

Tìm ước số nguyên tố lớn nhất của $21! + 22! + 23!$

Example (2022-UMC-5-2-2)

Tìm ước số nguyên tố lớn nhất của $21! + 22! + 23!$

Solution. 2022-UMC-5-2-2

$$21! + 22! + 23! = 21! + 21! \times 22 + 21! \times 22 \times 23 = 21!(1 + 22 + 22 \times 23) = 21!(23 + 22 \times 23) = 21! \times 23^2$$

Từ đây dễ thấy rằng số cần tìm là $\boxed{23.}$ □

Example 2.1.3 (2022-UMC-5-2-3)

Bỏ đi một trong các thừa số $2!, 3!, 4!, 5!, 6!, 7!$, hoặc $8!$ ra khỏi tích số

$$P = 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 8!$$

để nó trở thành một số chính phương.

Example (2022-UMC-5-2-3)
Bỏ đi một trong các thừa số $2!, 3!, 4!, 5!, 6!, 7!,$ hoặc $8!$ ra khỏi tích số

$$P = 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 8!$$

để nó trở thành một số chính phương.

Solution. 2022-UMC-5-2-3 Lưu ý rằng $2 = 1 \cdot 2,\ 4 = 2 \cdot 2,\ 6 = 3 \cdot 2,\ 8 = 4 \cdot 2,$

$$2! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 8! = (1! \cdot 1 \cdot 2)(3! \cdot 2 \cdot 2)(5! \cdot 3 \cdot 2)(7! \cdot 4 \cdot 2) = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 7!) \cdot 2^4 \cdot \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}_{4!}$$

$$P = 1! \cdot 2! \cdot \cdots \cdot 8! = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 7!) \cdot (2! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 8!) = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 7! \cdot 2^2)^2 \cdot 4!$$

Do đó nếu bỏ đi $\boxed{4!,}$ P trở thành số chính phương. □

Example 2.1.4 (2022-UMC-5-2-4)

Chứng minh rằng với mọi n tự nhiên, phân số $\dfrac{(2n)!}{n!2^n}$ là một số nguyên.

Example (2022-UMC-5-2-4)

Chứng minh rằng với mọi n tự nhiện, phân số $\dfrac{(2n)!}{n!2^n}$ là một số nguyên.

Solution. 2022-UMC-5-2-4 Lưu ý rằng $n!2^n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot 2^n = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n$, cho nên

$$\frac{(2n)!}{n!2^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) = (2n-1)!!.$$

□

Example 2.1.5 (2022-UMC-5-2-5)

Tìm luỹ thừa cao nhất của 2 chia hết 10!.

Example (2022-UMC-5-2-5)
Tìm luỹ thừa cao nhất của 2 chia hết $1! \times 2! \times \cdots \times 10!$.

Solution. 2022-UMC-5-2-5

$$1! \times 2! \times \cdots \times 10! = (2) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3 \times 4) \cdots (2 \times 3 \cdots \times 9 \times 10) = 2^9 \times 3^8 \times 4^7 \cdots 9^2 \times 10.$$

Trong tích số trên, chỉ có các số chẵn chia hết cho 2. $4^7 = 2^{14}, 6^5 = 2^5 \times 3^5, 8^3 = 2^9, 10 = 2^1 \times 5^1$. Như vậy số thừa số nguyên tố 2 trong 20! là $\boxed{9 + 14 + 5 + 9 + 1 = 38.}$ □

Problem 2.1.6 (2022-UMC-5-2-6)**.** Số nào sau đây là số nguyên tố $2^{13} - 1$ hay $2^{15} - 1$?

Problem 2.1.7 (2022-UMC-5-2-7)**.** $3, 5, 7$ là ba số lẻ liên tiếp tạo nên hai cặp số nguyên tố sinh đôi $(3, 5)$ và $(5, 7)$. Có ba số lẻ nào khác cũng có tính chất này?

Problem 2.1.8 (2022-UMC-5-2-8)**.** Tìm ước số chung lớn nhất của 100! và $50! \times 50!$.

2.2 Ứng dụng Đại số trong Số học

Example 2.2.1 (2022-UMC-5-2-9)

Tìm k nếu

$$2^{2019} - 2^{2018} - 2^{2017} + 2^{2016} = k \cdot 2^{2015}$$

Example (2022-UMC-5-2-9)
Tìm k nếu
$$2^{2019} - 2^{2018} - 2^{2017} + 2^{2016} = k \cdot 2^{2015}$$

Solution. 2022-UMC-5-2-9 Để ý rằng $2^{n+1} - 2^n = 2 \cdot 2^n - 2^n = 2^n$, do đó:
$$2^{2019} - 2^{2018} - 2^{2017} + 2^{2016} = 2^{2018} - 2^{2017} + 2^{2016} = 2^{2017} + 2^{2016} = 4 \cdot 2^{2015} + 2 \cdot 2^{2015} = 6 \cdot 2^{2015}$$

Vì thế $\boxed{k = 6.}$ □

Example 2.2.2 (2022-UMC-5-2-10)

Tích của hai số nguyên dương bằng 48 lần tổng của chúng và bằng 80 lần hiệu của số lớn với số bé. Tìm tổng của hai số.

Example (2022-UMC-5-2-10)

Tích của hai số nguyên dương bằng 48 lần tổng của chúng và bằng 80 lần hiệu của số lớn với số bé. Tìm tổng của hai số.

Solution. 2022-UMC-5-2-10 Giả sử $m > n$ là hai số đã cho,

$$mn = 48(m+n) = 80(m-n) \Rightarrow 48m + 48n = 80m - 80n \Rightarrow 32m = 128n \Rightarrow m = 4n$$

Thay $m = 4n$ vào $mn = 48(m+n)$, ta có $4n^2 = 48 \times 5n$, do đó $n = 60, m = 240$. Từ đó $\boxed{m+n = 300.}$ □

Example 2.2.3 (2022-UMC-5-2-11)

Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (x, y) sao cho $x^2 - y^2 = 45$?

Example (2022-UMC-5-2-11)
Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (x, y) sao cho $x^2 - y^2 = 45$?

Solution. 2022-UMC-5-2-11

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 45 \cdot 1 = 15 \cdot 3 = 9 \cdot 5 \Rightarrow \begin{cases} x+y = 45, x-y = 1 \Rightarrow x = 23, y = 22 \\ x+y = 15, x-y = 3 \Rightarrow x = 9, y = 6 \\ x+y = 9, x-y = 5 \Rightarrow x = 7, y = 2 \end{cases}$$

Như vậy tổng cộng có $\boxed{3}$ cặp. □

Problem 2.2.4 (2022-UMC-5-2-12)**.** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7}.$$

Problem 2.2.5 (2022-UMC-5-2-13)**.** Giả sử rằng a, b và c là các số nguyên dương sao cho:

$$\frac{a}{77} + \frac{b}{91} + \frac{c}{143} = 1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $a + b + c$.

Problem 2.2.6 (2022-UMC-5-2-14)**.** a và b là các số nguyên dương, $a > b$, và nguyên tố cùng nhau $\gcd(a, b) = 1$, sao cho:

$$2a^2 + a = 3b^2 + b.$$

Chứng minh rằng $a - b$ và $2a + 2b + 1$ đều là các số chính phương.

2.3 Các phép tính cơ bản trong Hệ cơ số

Example 2.3.1 (2022-UMC-5-2-15)

Tính tổng, hiệu, và tích hai số trong hệ cơ số 6 : $22_6, 14_6$.

Example (2022-UMC-5-2-15)

Tính tổng, hiệu, và tích hai số trong hệ cơ số 6 : $22_6, 14_6$.

Solution. 2022-UMC-5-2-15 Có hai cách thực hiện.

Cách 1: chuyển đổi cả hai số sang hệ thập phân (cơ số 10), tính tổng, hiệu, hoặc tích của chúng, rồi chuyển về hệ cơ số 6. $22_6 = 2 \times 6^1 + 2 = 14,\ 14_6 = 1 \times 6^1 + 4 = 10$, $14 + 10 = 24 = 4 \times 6^1 + 0 = 40_6$, $14 - 10 = 4_6$, $14 \times 10 = 352_6$

Cách 2: cộng/trừ trực tiếp như trong hệ cơ số 10. ☐

$$\begin{array}{rr} & 22_6 \\ + & 14_6 \\ \hline & 40_6 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 22_6 \\ - & 14_6 \\ \hline & 4_6 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 22_6 \\ \times & 14_6 \\ \hline & 132_6 \\ & 22_6 \\ \hline & 352_6 \end{array}$$

Example 2.3.2 (2022-UMC-5-2-16)

Tính $(10101_2 + 1011_2) \cdot (110011_2 + 1101_2) \div (1000_2 + 100_2 + 10_2 + 1_2 + 1_2)$.

Example (2022-UMC-5-2-16)

Tính $(10101_2 + 1011_2) \cdot (110011_2 + 1101_2) \div (1000_2 + 100_2 + 10_2 + 1_2 + 1_2)$.

Solution. 2022-UMC-5-2-16

$$(10101_2 + 1011_2) \cdot (110011_2 + 1101_2) \div (1000_2 + 100_2 + 10_2 + 1_2 + 1_2) = 100000_2 \cdot 1000000_2 \div 10000_2$$
$$= 2^5 \cdot 2^6 \div 2^4 = 2^7 = 10000000_2$$

□

Example 2.3.3 (2022-UMC-5-2-17)

p, q, r là các số nguyên dương sao cho $2^p + 2^q + 2^r = 2336$. Tìm $p + q + r$.

Example (2022-UMC-5-2-17)

p, q, r là các số nguyên dương sao cho $2^p + 2^q + 2^r = 2336$. Tìm $p + q + r$.

Solution. 2022-UMC-5-2-17 Chú ý rằng p, q, và r đều không thể giống nhau vì 2336 không chia hết cho 3. Nếu có hai trong sô p, q, và r giống nhau, ví dụ $p = q$, thì $2^{p+1} + 2^r = 2336$. Vì $2236 = 2^5 \cdot 73$, nên sau khi chia 2236 cho số nhỏ hơn trong hai số $2^{p+1}, 2^r$, thì 73 sẽ là tổng của 1 và một luỹ thừa của 2, điều này vô lý.

Do đó ba số p, q, và r là ba số khác nhau. Điều này có nghĩa rằng $2^p + 2^q + 2^r = 2336$ tương đương với biểu diễn của 2336 trong hệ nhị phân (cơ số hai),

$$2336 = \overline{100100100000}_2$$

Như vậy (p, q, r) là một trong các hoán vị của bộ ba $(11, 8, 5)$ và $\boxed{p + q + r = 24.}$ □

Problem 2.3.4 (2022-UMC-5-2-18)**.** Chia hai số trong hệ cơ số 7 : $536_7 \div 4_7$.

Problem 2.3.5 (2022-UMC-5-2-19)**.** Tìm hệ cơ số b sao cho

$$6651_b + 115_b = 10066_b$$

Problem 2.3.6 (2022-UMC-5-2-20)**.** Số $\overline{x123456}_7$, là một số trong hệ cơ số 7, và chia hết cho 6. Tìm tổng của tất cả các giá trị có thể có của x.

2.4 Chữ số hàng đơn vị

Fact. Chữ số hàng đơn vị của tổng một số các số bằng chữ số hàng đơn vị của tổng các chữ số hàng đơn vị của các số đó.

Ví dụ, chữ số hàng đơn vị của $2 + 13 + 456 = 471$ *bằng chữ số hàng đơn vị của* $2 + 3 + 6 = 11$, *và là* 1.

Fact. Chữ số hàng đơn vị của tích một số các số bằng chữ số hàng đơn vị của tích các chữ số hàng đơn vị của các số đó.

Ví dụ, chữ số hàng đơn vị của $2 \times 13 \times 456 = 11856$ *bằng chữ số hàng đơn vị của* $2 \times 3 \times 6 = 36$, *và là* 6.

Fact. Chữ số hàng đơn vị của hiệu hai số bằng chữ số hàng đơn vị của hiệu các chữ số hàng đơn vị của các số đó (có nhớ nếu cần).

Ví dụ, chữ số hàng đơn vị của $202 - 101 = 101$ *bằng chữ số hàng đơn vị của* $2 - 1 = 1$, *và là* 1; *chữ số hàng đơn vị của* $202 - 103 = 99$ *bằng chữ số hàng đơn vị của* $12 - 3 = 9$, *và là* 9.

Example 2.4.1 (2022-UMC-5-2-21)

Tìm chữ số hàng đơn vị của 24^{2022}.

Example (2022-UMC-5-2-21)
Tìm chữ số hàng đơn vị của 24^{2022}.

Solution. 2022-UMC-5-2-21 Để ý rằng chữ số hàng đơn vị của 24^{2022} cũng là chữ số hàng đơn vị của 4^{2022}, và

- Chữ số hàng đơn vị của 4^1 là 4.
- Chữ số hàng đơn vị của $4^2 = 4^1 \times 4$ là chữ số hàng đơn vị của tích 4^1 với 4. $4 \cdot 4 = 1\underline{6}$, tức là 6.
- Chữ số hàng đơn vị của $4^3 = 4^2 \times 4$ là chữ số hàng đơn vị của tích 4^2 với 4. $6 \cdot 4 = 2\underline{4}$, tức là 4.

Dễ thấy rằng dãy số

$$\underbrace{4, 6}_{\text{chu kỳ 2}}, \underbrace{4, 6}_{\text{chu kỳ 2}}, 4, \ldots$$

là dãy số tuần hoàn. Do đó chữ số hàng đơn vị của 24^{2022} cũng như chữ số hàng đơn vị của 4^{2022}, là $\boxed{6.}$ □

Example 2.4.2 (2022-UMC-5-2-22)

Mai nhân hai số nguyên dương trong hệ cơ số 11 với nhau. Cô bé nhận thấy rằng chữ số hàng đơn vị của tích số là 3. Tìm tổng của hai chữ số hàng đơn vị của hai số này.

Example (2022-UMC-5-2-22)

Mai nhân một số nguyên dương trong hệ cơ số 11 với 7_{11}. Cô bé nhận thấy rằng chữ số hàng đơn vị của tích số là 3. Tìm tổng của hai chữ số hàng đơn vị của số này với 7_{11}.

Solution. 2022-UMC-5-2-22 Để ý rằng tích các chữ số hàng đơn vị có thể có trong hệ cơ số 7 là (A đại diện cho chữ số 10 trong hệ cơ số 11)

$$\begin{aligned}
1_{11}\cdot 7_{11} &= 7_{11} & 6_{11}\cdot 7_{11} &= 39_{11}\\
2_{11}\cdot 7_{11} &= 13_{11} & 7_{11}\cdot 7_{11} &= 45_{11}\\
3_{11}\cdot 7_{11} &= 1A_{11} & 8_{11}\cdot 7_{11} &= 51_{11}\\
4_{11}\cdot 7_{11} &= 26_{11} & 9_{11}\cdot 7_{11} &= 58_{11}\\
5_{11}\cdot 7_{11} &= 32_{11} & A_{11}\cdot 7_{11} &= 64_{11}
\end{aligned}$$

Chỉ có duy nhất một cặp 2_{11} và 7_{11} có tích số tận cùng bằng 13_{11}. Tổng của chúng là $\boxed{2_{11}+7_{11}=9_{11}.}$ □

Example 2.4.3 (2022-UMC-5-2-23)

Có bao nhiêu hệ cơ số b, sao cho tổng

$$31_b + 31_b + 31_b + 31_b + 31_b + 31_b + 31_b$$

có chữ số hàng đơn vị là 2?

Example (2022-UMC-5-2-23)
Có bao nhiêu hệ cơ số b, sao cho tổng

$$31_b + 31_b + 31_b + 31_b + 31_b + 31_b + 31_b$$

có chữ số hàng đơn vị là 2?

Solution. 2022-UMC-5-2-23 Để ý rằng b phải lớn hơn hoặc bằng 4 vì 3 là một chữ số của hệ cơ số b. Vì

$$31_b + 31_b + 31_b + 31_b + 31_b + 31_b + 31_b = 7 \times 31_b,$$

Do đó chữ số hàng đơn vị của tổng này là chữ số hàng đơn vị trong hệ cơ số b của tích $7 \times 1 = 7$. Vì chữ số hàng đơn vị là 2 cho nên 7 khi chia cho b sẽ dư 2,

$$7 = q \times b + 2 \Rightarrow 5 = qb \Rightarrow b \mid 5.$$

Do đó $\boxed{b = 5,}$ thử lại $31_5 + 31_5 + 31_5 + 31_5 + 31_5 + 31_5 + 31_5 = 7 \times 31_5 = 12_5 \times 31_5 = 422_5$. □

Example 2.4.4 (2022-UMC-5-2-24)

Có bao nhiêu ước số của 6^{2022} có chữ số hàng đơn vị là 9?

Example (2022-UMC-5-2-24)

Có bao nhiêu ước số của 6^{2022} có chữ số hàng đơn vị là 9?

Solution. 2022-UMC-5-2-24 Để ý rằng nếu một số có chữ số hàng đơn vị là 9 thì số đó không chia hết cho 2. Do đó, vì phân tích ra thừa số nguyên tố của 6^{2022} là $2^{2022} \times 3^{2022}$ cho nên ước số cần tìm là ước số của 3^{2022}, tức là một trong số các luỹ thừa của $3 : 3^1,\ 3^2,\ \ldots,\ 3^{2022}$. Mặt khác các chữ số hàng đơn vị của các luỹ thừa của 3,

$$3^1 = 3, 3 \times 3 = 9, 9 \times 3 = 27, 7 \times 3 = 21, 1 \times 3 = 3$$

Vì thế dãy số của các chữ số hàng đơn vị của $3^1, 3^2, \ldots$ là một dãy số tuần hoàn:

$$\underbrace{3, 9, 7, 1}_{\text{chu kỳ } 4}, 3, 9, 7, 1, 3 \ldots$$

Do $2022 = 4 \times 505 + 2$. Như vậy số ước số cần tìm là $\boxed{505 + 1 = 506}$. ☐

Problem 2.4.5 (2022-UMC-5-2-25)**.** Nguyệt là một cô bé vị thành niên. Số nhà của cô bé bằng bình phương tuổi của cô, và có cùng chữ số hàng đơn vị với tuổi của cô bé. Ngoài ra, chữ số hàng đơn vị của tổng Hai chữ số hàng đơn vị này không phải là 0. Tìm tuổi của Nguyệt.

Vị thành niên là thuật ngữ để chỉ người chưa tròn 18 tuổi.

Problem 2.4.6 (2022-UMC-5-2-26)**.** Tìm chữ số hàng đơn vị của $\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{222}$.

Problem 2.4.7 (2022-UMC-5-2-27)**.** Tìm chữ số hàng đơn vị của $(416_7)^{416}$ trong hệ cơ số 7.

Problem 2.4.8 (2022-UMC-5-2-28)**.** Một số nguyên dương có các tính chất sau:

- Số này có đúng 4 chữ số,
- Chữ số đầu tiên bên trái khác 0,
- Số này chia hết cho 5,
- Số này là số chẵn,
- Số này chia hết cho 9 và 11, $6 \cdot 4 = 2\underline{4}$, tức là 4.

Có bao nhiêu số như vậy?

2.5 Chữ số thập phân và Phân số

Definition (Biểu diễn thập phân)**.** *Biểu diễn thập phân* của một số thực r là một biểu hiện dưới hình thức một chuỗi số,

$$r = n, a_1a_2a_3\ldots$$

trong đó n là một số nguyên, $0 \leq a_1, a_2, a_3, \ldots \leq 9$ là các *chữ số thập phân*, và dấu , được gọi là *dấu thập phân.*

Ví dụ, $12;\ 13,02,\ 1,333\ldots$ là các biểu diễn thập phân.

Definition (Biểu diễn thập phân hữu hạn)**.** *Biểu diễn thập phân* của một số thực r được gọi là hữu hạn nếu chỉ có hữu hạn các số $0 \leq a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m \leq 9$ sau dấu phẩy.

$$r = n, a_1a_2a_3\ldots a_m.$$

Ví dụ, $12;\ 13,02;\ 1,333$ là các biểu diễn thập phân hữu hạn.

Definition (Biểu diễn thập phân tái diễn)**.** *Biểu diễn thập phân tái diễn* của một số thực r nếu từ một chữ số thập phân trở đi các chữ số thập phân lập thành nhóm xuất hiện tái diễn vô hạn lần,

$$r = n, a_1a_2\ldots a_m\underbrace{b_1b_2\ldots b_k}b_1b_2\ldots b_k\ldots$$

Ký hiệu $r = n, a_1a_2\ldots a_m\overline{b_1b_2\ldots b_k}$.

Ví dụ, $12,\overline{3}; 0,3\overline{12}$ là các biểu diễn thập phân tái diễn.

Fact. Nếu a và b là hai số nguyên tố cùng nhau thì biểu diễn thập phân của $\frac{a}{b}$ là hữu hạn nếu như b chỉ có các ước số là 2 hoặc 5.

Ví dụ, $\frac{12}{5} = 2,4$ *và* $\frac{7}{20} = 0,35$ *nhưng* $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$.

Example 2.5.1 (2022-UMC-5-2-29)
n là số nguyên dương. Có bao nhiêu chữ số trong biểu diễn thập phân của $\frac{1}{2^n}$?

Example (2022-UMC-5-2-29)
n là số nguyên dương. Có bao nhiêu chữ số trong biểu diễn thập phân của $\frac{1}{2^n}$?

Solution. 2022-UMC-5-2-29 Trước hết, ta kiểm tra một số trường hợp khi $n = 1, 2, 3,$

$$\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0,5 \qquad \text{1 chữ số thập phân}$$
$$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25 \qquad \text{2 chữ số thập phân}$$
$$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125 \qquad \text{3 chữ số thập phân}$$

Phải chăng $\frac{1}{2^n}$ có n chữ số thập phân? Ta có:

$$\frac{1}{2^n} = \frac{5^n}{10^n} = 5^n \times \frac{1}{10^n} = 5^n \times (0,1)^n$$

Để ý rằng khi nhân một số với $0,1$ thì các chữ số dịch chuyển sang phải một bước so với dấu thập phân,

$$123 \times 0,1 = 12,3 \qquad 12,3 \times 0,1 = 1,23 \qquad 1,23 \times 0,1 = 0,123$$

Do đó 5^n sau khi nhân n lần với $0,1$ thì các chữ số của nó được dịch chuyển sang phải n lần so với dấu thập phân. Vì thế $\frac{1}{2^n}$ có đúng $\boxed{n}$ chữ số thập phân. □

Example 2.5.2 (2022-UMC-5-2-30)

Tìm chữ số thập phân thứ 2022 của $\frac{15}{14}$.

Example (2022-UMC-5-2-30)

Tìm chữ số thập phân thứ 2022 của $\frac{15}{14}$.

Solution. 2022-UMC-5-2-30 Do

$$\frac{15}{14} = \frac{75}{7} \times \frac{1}{10} = 75 \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{10} = 75 \times 0,\overline{142857} \times 0.1 = 1,0\overline{714285}$$

Như vậy chữ số thập phân thứ $2022 = 1 + 336 \times 6 + 5$ là $\boxed{8.}$ □

Example 2.5.3 (2022-UMC-5-2-31)

Chuyển đổi biểu diễn thập phân $1,0\overline{714285}$ thành phân số.

Example (2022-UMC-5-2-31)
Chuyển đổi biểu diễn thập phân $1,0\overline{714285}$ thành phân số.

Solution. [Phương pháp 1] 2022-UMC-5-2-30 Để ý rằng,

$$\begin{aligned}
&1,0\overline{714285} \times 10^1 = 10,\overline{714285},\ 10,\overline{714285} \times 10^6 = 10714285,\overline{714285} \\
\Rightarrow\ & 10,\overline{714285} \times 10^6 - 1,0\overline{714285} \times 10^1 = 10714285,\overline{714285} - 10,\overline{714285} = 10714275 \\
\Rightarrow\ & 1,0\overline{714285} = \frac{10714275}{10^7 - 10} = \frac{10714275}{9999990} = \frac{3^4 \times 5^2 \times 11 \times 13 \times 37}{2 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37} = \frac{3 \times 5}{2 \times 7} = \frac{15}{14}
\end{aligned}$$

□

Definition (Cấp số nhân)**.** Dãy số $a, a \times r, a \times r^2, \ldots$ được gọi là một *cấp số nhân*, với a là *số hạng ban đầu* và r là *công bội.*

Fact. Nếu cấp số nhân $a, a \times r, a \times r^2, \ldots$ có công bội $0 < r < 1$, thì

$$a + ar + \ldots + ar^{n-1} + \ldots = \frac{a}{1-r}$$

Solution. [Phương pháp 2] 2022-UMC-5-2-30 Dựa trên tính chất của cấp số nhân với công bội $\frac{1}{10^6}$,

$$\begin{aligned}
1,0\overline{714285} &= 1 + 0,0714285 + 0,\underbrace{00\ldots0}_{7}714285 + 0,\underbrace{00\ldots0}_{13}714285 + \ldots \\
&= 1 + \frac{714285}{10^7}\left(1 + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{12}} + \ldots\right) = 1 + \frac{714285}{10^7}\frac{1}{1 - \frac{1}{10^6}} = 1 + \frac{714285}{10(10^6 - 1)} = \frac{10714275}{9999990} = \frac{15}{14}
\end{aligned}$$

□

Problem 2.5.4 (2022-UMC-5-2-31)**.** n và m là hai số nguyên dương. Có bao nhiêu chữ số trong biểu diễn thập phân của $\frac{1}{2^n \times 5^m}$?

Problem 2.5.5 (2022-UMC-5-2-32)**.** Khi dấu thập phân trong một biểu diễn thập phân được dịch chuyển sang phải bốn vị trí, số thu được bằng chín lần giá trị nghịch đảo của số ban đầu. Tìm số ban đầu.

Ghi chú: giá trị nghịch đảo của một số $a \neq 0$ là $\frac{1}{a}$.

Problem 2.5.6 (2022-UMC-5-2-33)**.** Biểu diễn $\frac{1}{10}$ trong hệ cơ số 11.

2.6 Challenging Puzzles

Problem 2.6.1 (HC-2021-SM2-R2-P2). (*Beginner Level*)

Karl was captured while sneaking into the Kingdom of the Hungry Tigers. He was lead in front of three rooms, each with a separate door marked with a sign, as shown below in Figure 2.1.

I	II	III
Room III is empty	The tiger is in Room I	This room is empty

Hình 2.1: HC-2021-SM2-R2-P2

A large treasure chest was placed in one of the rooms and a hungry tiger in another. There is no princess in any of the rooms. A beautiful girl told him that,

- the sign on the door of the room containing the treasure was true,
- the sign on the door of the room with the tiger was false, and
- the sign on the door of the empty room could be either true or false.

If he opens the room with the tiger, he will be eaten. If he opens the room with the chest, they will set him free and give him the chest.

Which room has the tiger? Are the signs true or false?

How to provide your answer:

- If you think that the room I containing the tiger, the signs on room I, II, and III are true, true, and false, respectively, then submit 1110.
- If you think that the room II containing the tiger, the signs on room I, II, and III are false, false, and true, respectively, then submit 2001.
- If you cannot determine that, submit 0.

Problem (HC-2021-SM2-R2-P2). (*Beginner Level*)

Karl was captured while sneaking into the Kingdom of the Hungry Tigers. He was lead in front of three rooms, each with a separate door marked with a sign, as shown below in Figure 2.2.

I	II	III
Room III is empty	The tiger is in Room I	This room is empty

Hình 2.2: HC-2021-SM2-R2-P2

A large treasure chest was placed in one of the rooms and a hungry tiger in another. There is no princess in any of the rooms. A beautiful girl told him that,

- the sign on the door of the room containing the treasure was true,
- the sign on the door of the room with the tiger was false, and
- the sign on the door of the empty room could be either true or false.

If he opens the room with the tiger, he will be eaten. If he opens the room with the chest, they will set him free and give him the chest.

Which room has the tiger? Are the signs true or false?

How to provide your answer:

- If you think that the room I containing the tiger, the signs on room I, II, and III are true, true, and false, respectively, then submit 1110.
- If you think that the room II containing the tiger, the signs on room I, II, and III are false, false, and true, respectively, then submit 2001.
- If you cannot determine that, submit 0.

Solution. HC-2021-SM2-R2-P2 Instead of looking for the tiger, we look for the treasure, because the sign on its room is true.

It cannot be in room II, because then according to the sign, room I has the tiger, room III is empty. Thus, the sign on room I is true, which contradicts that the sign on the room with the tiger is false.

It cannot be in room III, because the according to the sign, room III is empty. Therefore the treasure is in room I, room III is empty, so the tiger is in room II.

The answer is $\boxed{2101.}$ □

Problem 2.6.2 (HC-2021-SM2-R2-P4). (*Beginner Level*)

My Linh has some $10 bills and $20 bills.

- If she uses all her $10 bills, she is $60 short of buying 4 guinea pigs.
- If she uses all her $20 bills, she is $60 short of buying 5 guinea pigs.
- If she uses all her $10 bills and $20 bills, she is $60 short of buying 6 guinea pigs.

What is the price of one guinea pig?

How to provide your answer:

- If you think that the price of one guinea pig is $5, then submit 5.
- If you think that it is not possible to determine, then submit 0.

Problem (HC-2021-SM2-R2-P4). (*Beginner Level*)

My Linh has some \$10 bills and \$20 bills.

- If she uses all her \$10 bills, she is \$60 short of buying 4 guinea pigs.
- If she uses all her \$20 bills, she is \$60 short of buying 5 guinea pigs.
- If she uses all her \$10 bills and \$20 bills, she is \$60 short of buying 6 guinea pigs.

What is the price of one guinea pig?

How to provide your answer:

- If you think that the price of one guinea pig is \$5, then submit 5.
- If you think that it is not possible to determine, then submit 0.

Solution. HC-2021-SM2-R2-P4 Let the price of a guinea pig be a.

Then the amount she has in \$10 bills is equal to $4a - 60$. The amount she has in \$20 bills is $5a - 60$. The total amount she has in 10's and 20's is $6a - 60$. The sum of the first two quantities must be equal to the third one.

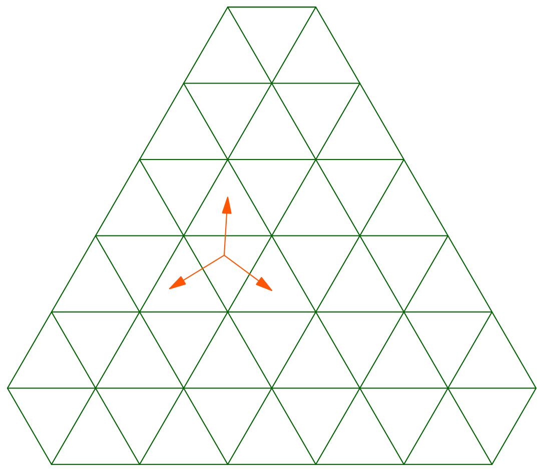
Thus, we have the equation,

$$6a - 60 = 5a - 60 + 4a - 60 \Rightarrow 3a = 60 \Rightarrow a = 20.$$

Thus, the price of a guinea pig is $\boxed{\$20.}$ □

Problem 2.6.3 (HC-2021-SM2-R2-P5). (*Beginner Level*)

A palace has a number of rooms in equilateral triangle shapes. You can move from one room to an adjacent room if the two rooms share a common wall. The Figure 2.3 below shows a room and its three adjacent rooms.



Hình 2.3: HC-2021-SM2-R2-P5

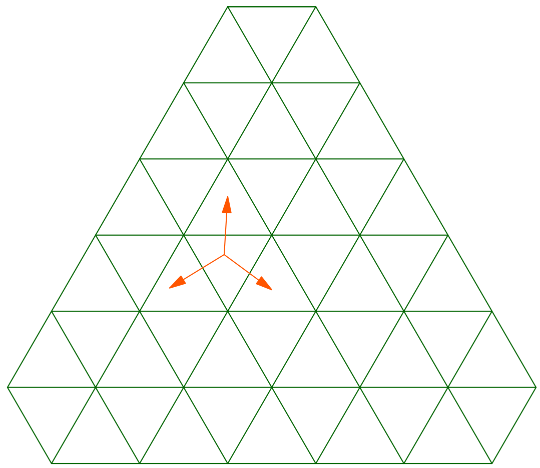
What is the *maximum* number of rooms in a path you can travel on, never visiting a room twice, and returning to the starting room at the end?

How to provide your answer:

- If you think that you can draw such a path with 40 rooms, submit 40.
- If you think that you cannot make such a path, submit 0.

Problem (HC-2021-SM2-R2-P5)**.** (*Beginner Level*)

A palace has a number of rooms in equilateral triangle shapes. You can move from one room to an adjacent room if the two rooms share a common wall. The Figure 2.4 below shows a room and its three adjacent rooms.



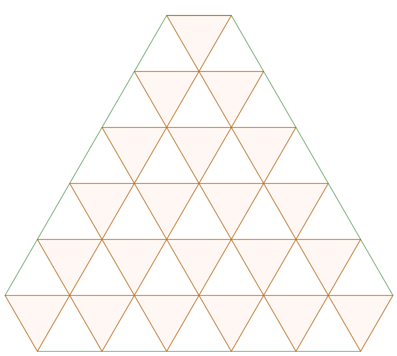
Hình 2.4: HC-2021-SM2-R2-P5

What is the *maximum* number of rooms in a path you can travel on, never visiting a room twice, and returning to the starting room at the end?

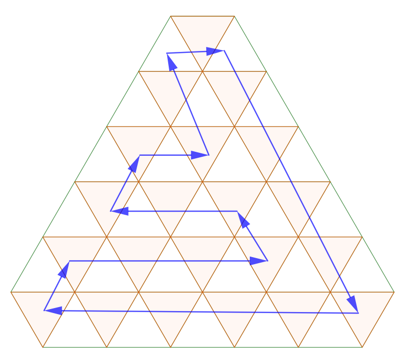
How to provide your answer:

- If you think that you can draw such a path with 40 rooms, submit 40.
- If you think that you cannot make such a path, submit 0.

Solution. HC-2021-SM2-R2-P5 We alternate colour the rooms as shown in Figure 2.5. It is easy to see that the consecutive rooms on the path have alternate colourings. Since it is a close path, so the number of shaded and unshaded rooms are the same. Because there are 21 shaded rooms, so the longest possible path can have ony 42 rooms. The figure Figure 2.6 shows one of such paths with maximal length. The answer is $\boxed{42.}$ □



Hình 2.5: Alternate colouring



Hình 2.6: Maximal path