выполняется неравенство

$$|f'(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad (6.14)$$

Если число δ можно выбрать не зависящим от точки x, так, чтобы при выполнении условия (6.13) выполнилось условие(6.14), то функция f называется равномерно непрерывной. Сформулируем определние этого важного понятия более подробно.

Определение3. *Функция f, заданная на отрезке* $[a, b]$, *называется равномерно непрерывной на нем, если для любого* $\epsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что для любых двух то - чек* $x \in [a, b]$ *и* $x' \in [a, b]$ *таких,что* $|x' - x| < \delta$, *выполняется неравенство* $|f'(x) - f(x)| < \epsilon$.

В символической записи определение непрерывности функции на отрезке выглядит следующим образом:

$$\forall\, x \,\forall\, \epsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 \,\forall\, x', |x' - x| < \delta : |f(x') - f(x)| < \epsilon,$$

а определение равномерноей непрерывности так:

$$\forall\, \epsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 \,\forall\, x, x', |x' - x| < \delta : |f(x') - f(x)| < \epsilon. \qquad (6.15)$$

Здесь точки x и x' принадлежат отрезку, на котором рассматривается функция f.

Ясно,что всякая равномерно непрерывная на отрезке функция непрерывна на нём: если в определении равномерной непрерывности зафиксировать точку x, то получится определение непрерывности в этой точке.

Примеры. 1. Функция$f(x) = x$ равномерно непрерывна на всей числовой оси, так как, если задано $\epsilon > 0$,достаточно взять $\delta = \epsilon$;тогда если $|x - x'| < \delta$,то,в силу равенств $f(x) = x$,$f(x') = x'$,получим $|f(x) - f(x')| < \epsilon$.

2.Функция $f(x) = sin(\frac{1}{x}), x \neq 0$,будучи непрерывной на своей области определения, т.е. на числовой оси,из которой удалена точка $x = 0$,не будет на ней равномерно непрерывна.

В самом деле,если взять,например, $\epsilon = 1$,то при любом сколь угодно малом $\delta > 0$ найдутся точки x и x',например точки вида $x = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$ и $x = \frac{1}{3\pi/2 + 2\pi n}$ (n - достаточно большое натуральное число) такие,что $|x - x'| < \delta$, а вместе с тем $|f(x) - f(x')| > 1$.

3.Функция $f(x) = x^2$ не равномерное непрерывна на всей числовой оси $\mathbf{R}$.Это следует из того, что для любого фиксированного $h \neq 0$ имеет место равенство

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+h) - f(x)] = \lim_{x\to\infty}[(x+h)^2 - x^2] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}(2xh + h^2) = \infty.$$

Поэтому если задано $\epsilon > 0$, то, каково бы ни было $\delta > 0$, зафиксировав $h \neq 0, |h| < \delta$, можно так выбрать x,что ,будет выполняться неравенство $|f(x+h) - f(x)| > \epsilon$.

Т Е О Р Е М А 5 (Кантора) *Функция, непрерывная на отрезке ,равномерно непрерывна на нем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем теорему от противного. Допустим, что на некотором отрезке $[a, b]$ существует непрерывная,однако не равномерно непрерывная на нем функция f.Это означает(см.(6.15)),что существует такое $\epsilon_0 > 0$,что для любого $\delta > 0$ найдутся такие точки $x \in [a, b]$ и $x' \in [a, b]$,что $|x' - x| < \delta$,но $|f(x') - f(x)| \geq \epsilon_0$.В частности, для $\delta = 1/n$ найдутся такие точки, обозначим их x_n и x'_n,что

$$|x'_n - x_n| < \frac{1}{n}, \tag{6.16}$$

но

$$|f(x'_n) - f(x_n)| \geq \epsilon_0, \tag{6.17}$$

Из последовательности точек x_n в силу свойства компактности(см. теорему 4 в п. 4.6) можно выделить сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}. Обозначим ее предел x_0:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) == x_0, \tag{6.18}$$

Поскольку $a \leq x_{n_k} \leq b, k = 1, 2, ...,$ то $a \leq x_0 \leq b$ (см. п. 4.3). Функция f непрерывна в точке x_0, поэтому

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \underset{(6.18)}{=} f(x_0), \tag{6.19}$$

Подпоследовательность x'_{n_k} подпоследовательности x'_n также сходится к точке x_0,ибо при $k \to \infty$.

$$|x'_{n_k} - x_0| \leq |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| \underset{(6.16)}{<} \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0| \to 0.$$