

1 Вычислимость

**Теорема Поста.** Множество  $A \subseteq \mathbb{N}$  разрешимо тогда и только тогда, когда оба множества  $A$  и  $\mathbb{N} \setminus A$  перечислимы.

**Определение Универсальная вычислимая функция.** Функция  $U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  называется универсальной вычислимой функцией для класса вычислимых функций от одной переменной, если

- 1.  $U$  вычислима;
- 2. для всякой вычислимой функции  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  существует такое  $n$ , что для всякого  $x$  верно  $f(x) = U(n, x)$ .

Она существует.

**Теорема Функция без всюду определённого вычислимого продолжения.** Существует вычислимая функция  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , не имеющая всюду определённого вычислимого продолжения.  
Это функция  $f(n) = U(n, n) + 1$ .

**Теорема Перечислимое неразрешимое множество.** Существует перечислимое неразрешимое множество  $K \subseteq \mathbb{N}$ .  
Это область определения  $U(n, n)$ .

**Определение Проблема остановки** Рассмотрим множество  $Halt \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , состоящее из таких пар  $(n, x)$ , что  $U(n, x)$  определено. Проблема остановки состоит в выяснении того, принадлежит ли данная пара множеству  $Halt$ .

**Определение УВФ** Универсальная вычислимая функция  $U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  для класса вычислимых функций от одной переменной называется главной (или гёделевой), если для любой вычислимой функции  $V : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  существует такая всюду определённая вычислимая функция  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , что для всякого  $n \in \mathbb{N}$  и для всякого  $x \in \mathbb{N}$  верно  $U(s(n), x) = V(n, x)$ , или, другими словами, для всякого  $n \in \mathbb{N}$  верно  $U_{s(n)} = V_n$ .

Примеры изменения аргументов и значений:

- $U(n, x) = U(n, f(x)) \Rightarrow \exists s(n) : \forall n \in \mathbb{N}$  выполн  $U_{s(n)} = V_n = U_n \circ f$
- $V(n, x) = f(U(n, x)) \Rightarrow \exists s(n) : \forall n \in \mathbb{N}$  выполн  $U_{s(n)} = V_n = f \circ U_n$

**Теорема Райса – Успенского.** Пусть  $U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  — главная универсальная функция. Пусть  $A$  — нетривиальное свойство вычислимых функций. Тогда множество  $N = \{n \mid U_n \in A\}$  не разрешимо

**Теорема Неглавная УФ.** Существует неглавная универсальная функция для класса вычислимых функций одной переменной.

**Теорема Неподвижная точка.** Пусть  $U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  — главная универсальная функция. Тогда для всякой всюду определённой вычислимой функции  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  существует  $n \in \mathbb{N}$ , при котором  $U_n = U_{h(n)}$ .

**Определение Следствие из неп точки.** Пусть  $U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  — главная универсальная функция. Тогда для всякой вычислимой функции  $V : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  существует  $n$ , при котором  $U_n = V_n$ .