

1 Вычислимость

Теорема Поста. Множество $A \subseteq \mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда оба множества A и $\mathbb{N} \setminus A$ перечислимы.

Определение Универсальная вычислимая функция. Функция $U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ называется универсальной вычислимой функцией для класса вычислимых функций от одной переменной, если

1. U вычислима;
2. для всякой вычислимой функции $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ существует такое n , что для всякого x верно $f(x) = U(n, x)$.

Она существует.

Теорема Функция без всюду определённого вычислимого продолжения. Существует вычислимая функция $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, не имеющая всюду определённого вычислимого продолжения.

Это функция $f(n) = U(n, n) + 1$.

Теорема Перечислимое неразрешимое множество. Существует перечислимое неразрешимое множество $K \subseteq \mathbb{N}$.

Это область определения $U(n, n)$.

Определение Проблема остановки Рассмотрим множество $Halt \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, состоящее из таких пар (n, x) , что $U(n, x)$ определено. Проблема остановки состоит в выяснении того, принадлежит ли данная пара множеству $Halt$.

Определение УВФ Универсальная вычислимая функция $U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ для класса вычислимых функций от одной переменной называется главной (или гёделевой), если для любой вычислимой функции $V : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ существует такая всюду определённая вычислимая функция $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ и для всякого $x \in \mathbb{N}$ верно $U(s(n), x) = V(n, x)$, или, другими словами, для всякого $n \in \mathbb{N}$ верно $U_{s(n)} = V_n$.

Примеры изменения аргументов и значений:

- $U(n, x) = U(n, f(x)) \Rightarrow \exists s(n) : \forall n \in \mathbb{N}$ выполн $U_{s(n)} = V_n = U_n \circ f$
- $V(n, x) = f(U(n, x)) \Rightarrow \exists s(n) : \forall n \in \mathbb{N}$ выполн $U_{s(n)} = V_n = f \circ U_n$

Теорема Райса – Успенского. Пусть $U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — главная универсальная функция. Пусть A — нетривиальное свойство вычислимых функций. Тогда множество $N = \{n \mid U_n \in A\}$ не разрешимо

Теорема Неглавная УФ. Существует неглавная универсальная функция для класса вычислимых функций одной переменной.

Теорема Неподвижная точка. Пусть $U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — главная универсальная функция. Тогда для всякой всюду определённой вычислимой функции $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ существует $n \in \mathbb{N}$, при котором $U_n = U_{h(n)}$.

Определение Следствие из неп точки. Пусть $U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — главная универсальная функция. Тогда для всякой вычислимой функции $V : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ существует n , при котором $U_n = V_n$.

2 МТ

Определение МТ МТ состоит из

- бесконечной в две стороны ленты, в ячейках которой могут быть записаны символы алфавита A (некоторого конечного множества);
- головки, которая может двигаться вдоль ленты, обзореая в каждый данный момент времени одну из ячеек;
- оперативной памяти, которая имеет конечный размер (другими словами, состояние оперативной памяти — это элемент некоторого конечного множества, которое называется множеством состояний МТ Q);
- таблицы переходов (или программы), которая задаёт функцию

$$\delta : A \times Q \rightarrow A \times Q \times \{-1, 0, +1\}$$

Определение Проблема остановки Даны описание машины Тьюринга и её входа, нужно узнать, останавливается ли эта машина на этом входе.

Определение Граф подстановок. Мы выберем такой способ задания (ор)графа. Множество вершин — это множество слов в некотором алфавите Σ . А рёбра задаются правилами подстановки. Каждое правило имеет вид $L \rightarrow R$, где L, R — слова в алфавите Σ . Из слова x ведёт ребро в слово y по правилу подстановки $L \rightarrow R$, если $x = uLv$, $y = uRv$.

Определение Проблема остановки. Задача достижимости. Задан граф на множестве слов в алфавите Σ набором правил подстановки $R = L_i \rightarrow R_i$ и два слова $u, v \in \Sigma^*$. Верно ли, что $u \xrightarrow{*} v$.

3 Игры

Определение Согласованность. Стратегия для Макса гарантирует результат не менее c , если во всех партиях, согласованных этой стратегией, результат игры (число в последней позиции этой партии – напомним, что она заключительная по определению партии) не меньше c . Симметричное определение для Мина: стратегия для Мина гарантирует результат не более c , если во всех партиях, согласованных этой стратегией, результат игры не больше c .

Определение Конечная комб игра Чтобы задать конечную комбинаторную игру, надо:

- Задать конечное множество S , элементы которого называют позициями игры.
- Присвоить каждой позиции один из трёх типов: в одних ходит Макс, в других ходит Мин, в третьих игра закончена. Позиции третьего типа называют заключительными. Будем обозначать множества позиций первого типа S_M , второго типа S_m (по именам игроков), а множество заключительных позиций S_f .
- Указать начальную позицию $s_0 \in S$;
- Для каждой незаключительной позиции указать, в какие вершины может из неё попасть игрок, которой в ней ходит
- Задать функцию выигрыша $v : S_f \rightarrow R$, которая в каждой заключительной позиции определяет результат игры (выигрыш Макса, как мы договорились).

Определение Цена игры. Число C называется ценой игры, если у Макса и у Мина есть стратегии, гарантирующие выигрыш C .

Теорема Существование цены.. Для любой антагонистической игры на ациклическом графе существует цена.

Теорема Ним. Позиция выигрышна $\Leftrightarrow \oplus \neq 0$.

Что делать с играми:

- симметричность
- с конца
- можно использовать для доказательства сложности вычислений (рассуждение с противником)

4 Оценки на цешки

- $\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{2n+1}$
- $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} < \left(\frac{en}{k}\right)^k$

5 Прочее

Здесь пока ничего нет, но там все изи, я верю, что вы справитесь.