cheatsheet Дискра (краткий копипаст из учебника.)

1 Вычислимость

Т Поста. Множество $A \subseteq \mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда оба множества A и $\mathbb{N} \setminus A$ перечислимы.

О Универсальная вычислимая функция. Функция $U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется универсальной вычислимой функцией для класса вычислимых функций от одной переменной, если

1. U вычислима;
2. для всякой вычислимой функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ существует такое n, что для всякого x верно $f(x) = U(n, x)$.

   Она существует.

Т Функция без всюду определённого вычислимого продолжения. Существует вычислимая функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, не имеющая всюду определённого вычислимого продолжения.
Это функция $f(n) = U(n, n) + 1$.

Т Перечислимое неразрешимое множество. Существует перечислимое неразрешимое множество $K \subseteq N$.
Это область определения $U(n, n)$.

О Проблема остановки Рассмотрим множество $Halt \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, состоящее из таких пар (n, x), что $U(n, x)$ определено. Проблема остановки состоит в выяснении того, при- надлежит ли данная пара множеству $Halt$.

О УВФ Универсальная вычислимая функция $U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ для класса вычислимых функций от одной переменной называется главной (или гёделевой), если для любой вычислимой функции $V : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ существует такая всюду определённая вычислимая функция $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ и для всякого $x \in N$ верно $U(s(n), x) = V(n, x)$, или, другими словами, для всякого $n \in N$ верно $U_{s(n)} = V_n$.
Примеры изменения аргументов и значений:

- $U(n, x) = U(n, f(x)) \Rightarrow \exists s(n) : \forall n \in \mathbb{N}$ выполн $U_{s(n)} = V_n = U_n \circ f$
- $V(n, x) = f(U(n, x)) \Rightarrow \exists s(n) : \forall n \in \mathbb{N}$ выполн $U_{s(n)} = V_n = f \circ U_n$

Т Райса – Успенского. Пусть $U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — главная универсальная функция. Пусть A — нетривиальное свойство вычислимых функций. Тогда множество $N = \{n \mid U_n \in A\}$ не разрешимо

Т Неглавная УФ. Существует неглавная универсальная функция для класса вычислимых функций одной переменной.

Т Неподвижная точка. Пусть $U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — главная универсальная функция. Тогда для всякой всюду определённой вычислимой функции $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ существует $n \in \mathbb{N}$, при котором $U_n = U_{h(n)}$.

О Следствие из неп точки. Пусть $U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — главная универсальная функция. Тогда для всякой вычислимой функции $V : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ существует n, при котором $U_n = V_n$.

2 МТ

О МТ МТ состоит из

- бесконечной в две стороны ленты, в ячейках которой могут быть записаны символы алфавита A (некоторого конечного множества);
- головки, которая может двигаться вдоль ленты, обозревая в каждый данный момент времени одну из ячеек;
- оперативной памяти, которая имеет конечный размер (другими словами, со- стояние оперативной памяти — это элемент некоторого конечного множества, которое называется множеством состояний МТ Q);
- таблицы переходов (или программы), которая задаёт функцию

$$\delta : A \times \mathbb{Q} \to A \times \mathbb{Q} \times \{-1, 0, +1\}$$

О Проблема остановки Даны описание машины Тьюринга и её входа, нужно узнать, останавливается ли эта машина на этом входе.

О Граф подстановок. Мы выберем такой способ задания (ор)графа. Множество вершин — это множе- ство слов в некотором алфавите Σ. А рёбра задаются правилами подстановки. Каждое правило имеет вид $L \to R$, где L, R — слова в алфавите Σ. Из слова x ведёт ребро в слово y по правилу подстановки $L \to R$, если $x = uLv$, $y = uRv$.

О Проблема остановки. Задача достижимости. Задан граф на множестве слов в алфавите Σ набором правил подстановки $R = L_i \to R_i$ и два слова $u, v \in \Sigma^*$. Верно ли, что $u \xrightarrow{*} v$.

3 Разрешаюшие деревья

О Сложность Сложностью протокола называется глубина дерева

4 Булевы схемы

О Размер кол-во присваиваний

О Схемная сложность Схемная сложность булева отображения $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ (в частности, булевой функции) — это наименьший размер схемы, вычисляющей это отображение

5 Игры

О Согласованность. Стратегия для Макса гарантирует результат не менее c, если во всех партиях, согласованных этой стратегией, результат игры (число в последней позиции этой партии – напомним, что она заключительная по определению партии) не меньше c. Симметричное определение для Мина: стратегия для Мина гарантирует результат не более c, если во всех партиях, согласованных этой стратегией, результат игры не больше c.

О Конечная комб игра Чтобы задать конечную комбинаторную игру, надо:

- Задать конечное множество S, элементы которого называют позициями игры.
- Присвоить каждой позиции один из трёх типов: в одних ходит Макс, в дру- гих ходит Мин, в третьих игра закончена. Позиции третьего типа называют заключительными. Будем обозначать множества позиций первого типа S_M, второго типа S_m (по именам игроков), а множество заключительных позиций S_f.
- Указать начальную позицию $s_0 \in S$;
- Для каждой незаключительной позиции указать, в какие вершины может из неё попасть игрок, которой в ней ходит
- Задать функцию выигрыша $v : S_f \to R$, которая в каждой заключительной позиции определяет результат игры (выигрыш Макса, как мы договорились).

О Цена игры. Число C называется ценой игры, если у Макса и у Мина есть стратегии, гарантирующие выигрыш C.

Т Существование цены.. Для любой антагонистической игры на ациклическом графе суще- ствует цена.

Т Ним. Позиция выйгрышна $\Leftrightarrow \oplus \neq 0$.

Что делать с играми:

- симметричность
- с конца
- можно использовать для доказательства сложности вычеслений (рассуждение с противником)

6 Оценки на цешки

$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n}}{2n+1}$; $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqslant \binom{n}{k} < \left(\frac{en}{k}\right)^k$

7 Вероятность

*Вероятностным пространством*называется конечное множество U, его элементы называются возможными *исходами.* На вероятностном пространстве задана функция $Pr : U \to [0,1]$, такая что $\sum_{x \in U} Pr[x] = 1$. Функция Pr называется *вероятностным распределением*, а число $Pr[x]$ называется *вероятностью* исхода $x \in U$. *Событием* называется произвольное подмножество $A \subseteq U$. Исходы, входящие в событие A, называются *благоприятными* (для события A). *Вероятностью* события A называется число $Pr[A] = \sum_{x \in A} Pr[x]$.

Работает формула вкл-выкл. Следствие: $Pr[\bigcup_i A_i] \leqslant \sum_i Pr[A_i]$.

Условной вероятностью события A при условии B называется число $Pr[A|B] = \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}$.

Т Байеса. Если вероятность событий A и B положительна: $Pr[A|B] \cdot Pr[B] = Pr[A] \cdot Pr[B|A]$.

Полная вероятность: $Pr[A] = \sum_i Pr[A|B_i] \cdot Pr[B_i]$.

О Мат. ожидание. $E[\xi] = \sum_i a_i \cdot Pr[\xi = a_i]$. Оно линейно.

Л Неравенство Маркова. $Pr[\xi \geqslant \alpha] \leqslant \frac{E[\xi]}{\alpha}$