Математическая статистика

Практическое задание 2

В данном задании рассматриваются различные свойства оценок, методы получения оценок, способы сравнения оценок.

Правила:

- Выполненную работу нужно отправить на почту `probability.diht@yandex.ru`, указав тему письма `"[номер группы] Фамилия Имя - Задание 2"`. Квадратные скобки обязательны. Вместо `Фамилия Имя` нужно подставить свои фамилию и имя.
- Прислать нужно ноутбук и его pdf-версию. Названия файлов должны быть такими: `2.N.ipynb` и `2.N.pdf`, где `N` - ваш номер из таблицы с оценками.
- Никакой код из данного задания при проверке запускаться не будет.
- Некоторые задачи отмечены символом *. Эти задачи являются дополнительными. Успешное выполнение большей части таких задач (за все задания) является необходимым условием получения бонусного балла за практическую часть курса.
- Баллы за каждую задачу указаны далее. Если сумма баллов за задание меньше 25% (без учета доп. задач), то все задание оценивается в 0 баллов.

Баллы за задание:

- Задача 1 - 3 балла
- Задача 2 - 3 балла
- Задача 3 - 3 балла
- Задача 4 - 2 балла
- Задача 5 - 2 балла
- Задача 6 - 3 балла
- Задача 7a - 3 балла
- Задача 7b* - 5 баллов
- Задача 8 - 4 балла
- Задача 9* - 4 балла
- Задача 10* - 5 баллов

При выполнении задания рекомендуется пользоваться библиотекой `scipy.stats`. Подробное описание есть в наших инструкциях.

Задача 1. В этой задаче нужно визуализировать свойство несмещенности.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ --- выборка из распределения $U[0, \theta]$. Известно, что в качестве оценки параметра θ можно использовать следующие оценки $X_{(n)}$, $\frac{n+1}{n} X_{(n)}$, $2\overline{X}$.

Вопрос: Какие из этих оценок являются несмещенными?

Ответ: 1. Найдем мат. ожидание $EX_{(n)}$. $X_{(n)} = max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$=max По определению выборки X_i независимы. Поэтому:

$F_{max}(X) = P($max$\leq X) = P(X_1 \leq X, \ldots, X_n \leq X) = F^n(X) = \frac{X^n}{\theta^n}$

$P_{max}(X) = nF^{n-1}(X)F'(x) = nF^{n-1}(x)p(x)$

$EX_{(n)} = \int_0^\theta xP_{max}(x)dx = \int_0^\theta xn\frac{x^{n-1}}{\theta^{n-1}}\frac{1}{\theta}dx = \int_0^\theta nx^n\frac{1}{\theta^n}dx = \frac{n\theta}{n+1} \neq \theta$. Следовательно, оценка является смещенной.

$2.E\frac{n+1}{n}X_{(n)} = \frac{n+1}{n}\frac{n}{n+1}\theta = \theta$. Следовательно, оценка является несмещенной.

$3.E2\overline{X} = \frac{2}{n}E\sum_{i=1}^n x_i = \frac{2}{n}nEX_1 = 2\int_0^\theta \frac{1}{\theta}xdx = \frac{2}{\theta}\frac{\theta^2}{2} = \theta$. Следовательно, оценка является несмещенной.

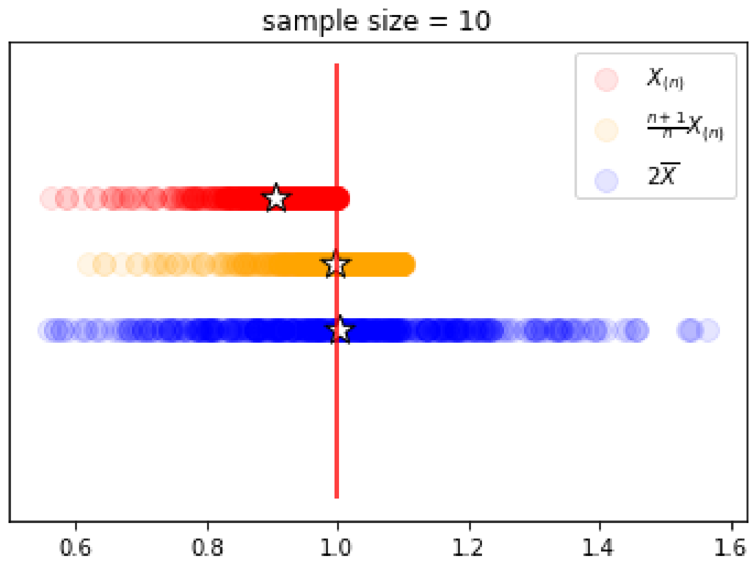
Вам нужно убедиться в этом, сгенерировав множество выборок и посчитав по каждой из них оценку параметра.

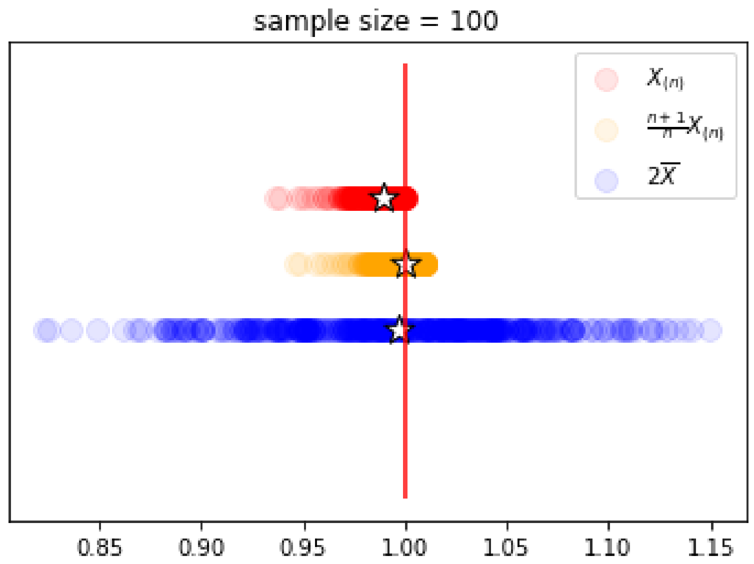
Сгенерируйте 500 выборок $X_1^j, \ldots, X_n^j$ из распределения $U[0, 1]$, по каждой из них посчитайте оценку $\hat{\theta}_j$, получив тем самым 500 независимых оценок параметра. Нанесите их на график с одинаковой *y*-координатой. Отметьте специальным символом среднее этих выборок (см. шаблон ниже). Выполните данную процедуру для $n \in \{10, 100, 500\}$.

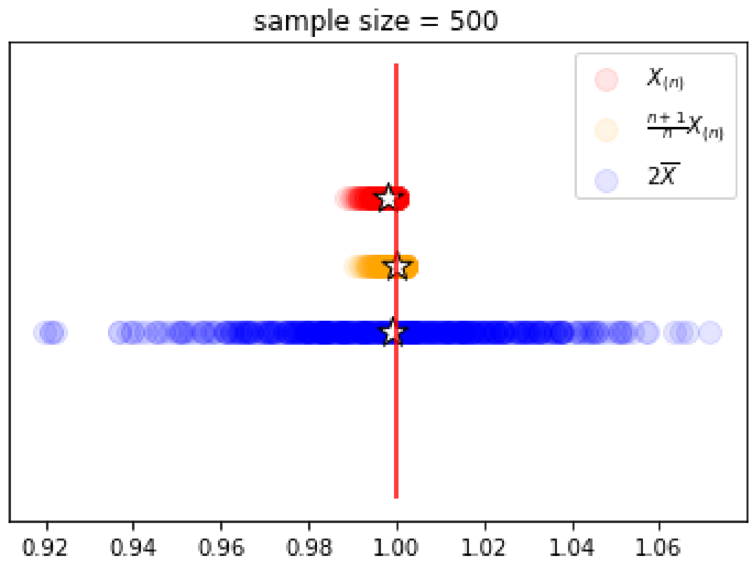
Для нанесения точек на график используйте следующий шаблон. Для каждой оценки выставите разный *уровень*, чтобы реализации разных оценок не слипались. В качестве *метки* используйте latex-код этой оценки, который можно взять выше в условии этой задачи. Постарайтесь не размножать код, а сделать циклы по типам оценок и по размеру выборки. Естественно, все типы оценок должны быть на одном графике, но для разных n должны быть разные графики.

In [1]:

```
import numpy as np
import scipy.stats as sps
import matplotlib.pyplot as plt

%matplotlib inline
number = [10, 100, 500]
for n in number:
    sample = sps.uniform.rvs(size=(500, n), loc=0, scale=1)
    evaluation = np.max(sample, axis = 1)
    level = 5
    plt.scatter(evaluation, np.zeros_like(evaluation) + level,
                alpha=0.1, s=100, color='red', label='$X_{(n)}$')
    plt.scatter(evaluation.mean(), level, marker='*', s=200,
                color='w', edgecolors='black')

    evaluation = np.max(sample, axis = 1) * (n + 1) / n
    level = 4
    plt.scatter(evaluation, np.zeros_like(evaluation) + level,
                alpha=0.1, s=100, color='orange', label='$\\frac{n+1}{n}X_{(n)}
$')
    plt.scatter(evaluation.mean(), level, marker='*', s=200,
                color='w', edgecolors='black')

    evaluation = 2 * np.average(sample, axis = 1)
    level = 3
    plt.scatter(evaluation, np.zeros_like(evaluation) + level,
                alpha=0.1, s=100, color='blue', label='$2\overline{X}$')
    plt.scatter(evaluation.mean(), level, marker='*', s=200,
                color='w', edgecolors='black')

    plt.vlines(1, 7, np.average(sample, axis = 1), color='r')
    plt.title('sample size = %d' % n)
    plt.yticks([])
    plt.legend()
    plt.show()
```


sample size = 10
$X_{(n)}$
$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$
$2\overline{X}$
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6


sample size = 100
$X_{(n)}$
$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$
$2\overline{X}$
0.85
0.90
0.95
1.00
1.05
1.10
1.15


sample size = 500
$X_{(n)}$
$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$
$2\overline{X}$
0.92
0.94
0.96
0.98
1.00
1.02
1.04
1.06

Пусть теперь $X_1, \ldots, X_n$ --- выборка из распределения $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Известно, что в качестве оценки параметра σ^2 можно использовать следующие оценки S^2, $\frac{n}{n-1}S^2$.

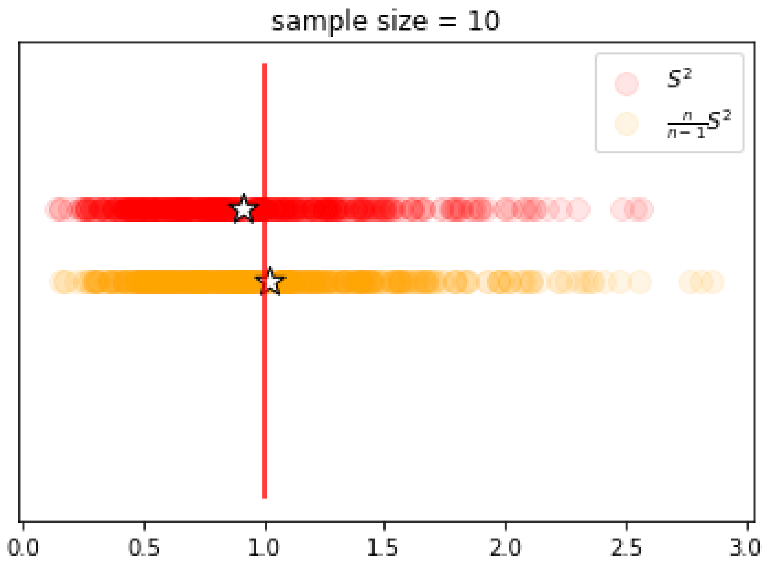
Вопрос: Какие из этих оценок являются несмещенными?

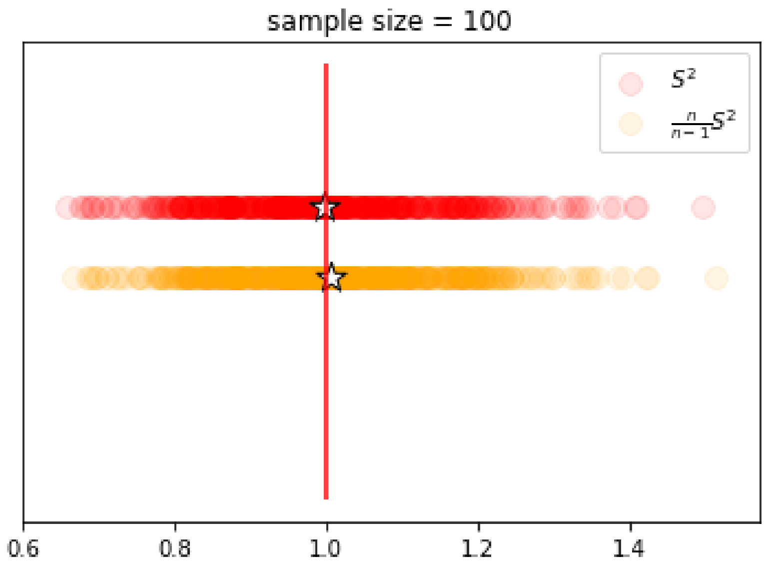
Ответ: Из домашнего задания нам известно, что оценка $\frac{n}{n-1}S^2$ является несмещенной, а оценка S^2 - смещенной.

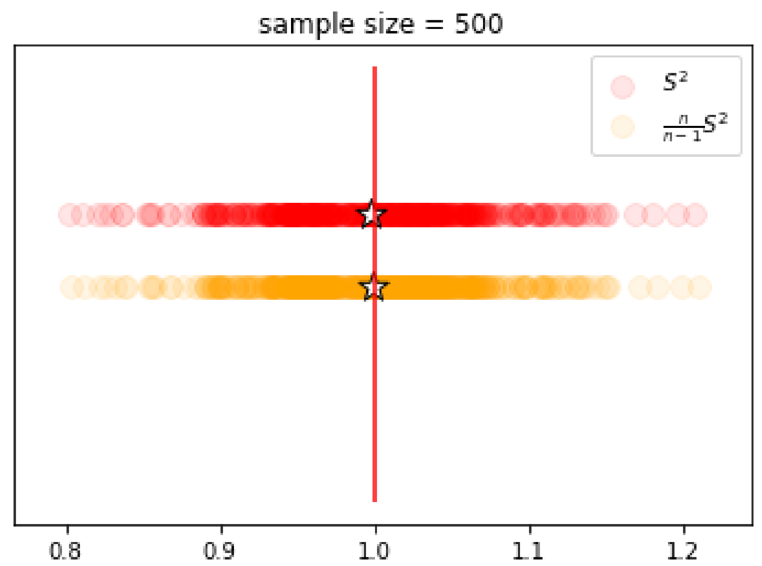
Для данной модели выполните те же действия, что и с предыдущей.

In [2]:

```
for n in number:
    sample = sps.norm.rvs(size=(500, n), loc=0, scale=1)
    avg = np.average(sample, axis = 1)
    evaluation = 1 / n * np.sum((sample - np.hsplit(avg, 500))**2, axis = 1)
    level = 4
    plt.scatter(evaluation, np.zeros_like(evaluation) + level,
                alpha=0.1, s=100, color='red', label='$S^2$')
    plt.scatter(evaluation.mean(), level, marker='*', s=200,
                color='w', edgecolors='black')

    evaluation = 1 / (n - 1) * np.sum((sample - np.hsplit(avg, 500))**2, axis =
 1)
    level = 3
    plt.scatter(evaluation, np.zeros_like(evaluation) + level,
                alpha=0.1, s=100, color='orange', label='$\\frac{n}{n-1}S^2$')
    plt.scatter(evaluation.mean(), level, marker='*', s=200,
                color='w', edgecolors='black')

    plt.vlines(1, 6, np.average(sample, axis = 1), color='r')
    plt.title('sample size = %d' % n)
    plt.yticks([])
    plt.legend()
    plt.show()
```







Сделайте вывод о том, что такое свойство несмещенности. Подтверждают ли сделанные эксперименты свойство несмещенности данных оценок? Поясните, почему в лабораторных по физике при оценке погрешности иногда используют $n - 1$ в знаменателе, а не n.

Вывод: Несмещённость означает отсутствие ошибки "в среднем". Ибо, как нам известно, если оценка θ^* является несмещенной, то $E\theta^* = \theta$. Из усиленного закона больших чисел следует, что истинное значение параметра θ почти наверное равно всреднему значению оценок. Это подтверждают графики проделанных нами экспериментов. Поэтому, в физике при вычислении погрешности(среднеквадратичного отклонения) используют n-1. Оно дает более близкое к истинному значение, чем S^2.

Задача 2. В этой задаче нужно визуализировать свойство состоятельности.

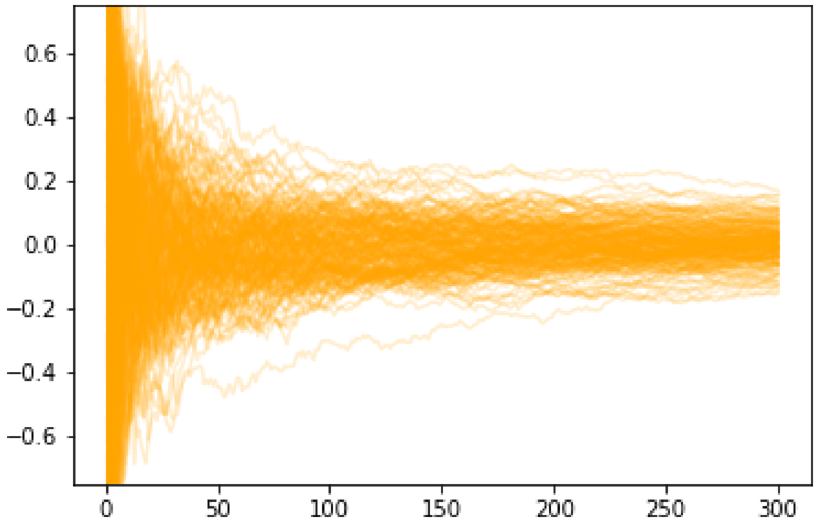
а). Пусть $X_1, \dots, X_n$ --- выборка из распределения $\mathcal{N}(\theta, 1)$. Известно, что $\overline{X}$ является состоятельной оценкой параметра θ. Вам нужно убедиться в этом, сгенерировав множество выборок и посчитав по каждой из них оценку параметра в зависимости от размера выборки.

Сгенерируйте 200 выборок $X_1^j, \dots, X_{300}^j$ из распределения $\mathcal{N}(0, 1)$. По каждой из них посчитайте оценки $\hat{\theta}_{jn} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^j$ для $1 \leqslant n \leqslant 300$, то есть оценка параметра по первым n наблюдениям j-й выборки. При написании кода может помочь вступительное задание.

Для каждого j нанесите на один график зависимость $\hat{\theta}_{jn}$ от n с помощью `plt.plot`. Каждая кривая должна быть нарисована *одним цветом* с прозрачностью `alpha=0.2`. Поскольку при малых n значения оценок могут быть большими, ограничьте область графика по оси *y* с помощью функции `plt.ylim((min, max))`.

In [4]:

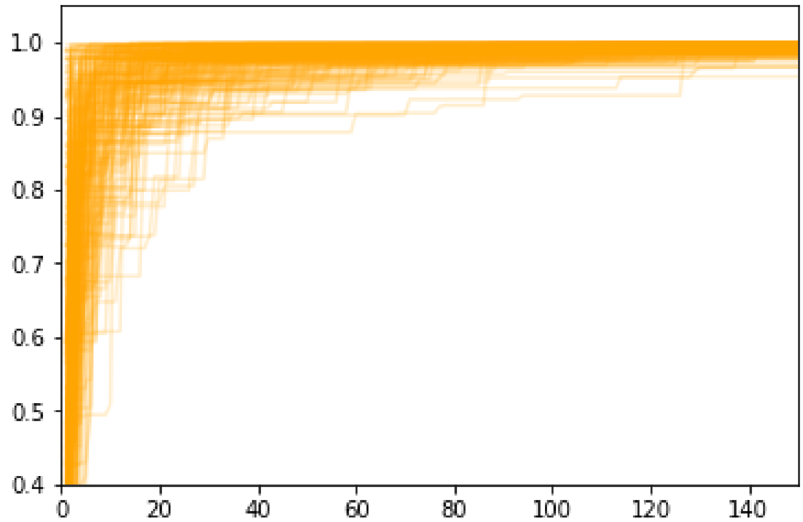
```
n = 300
sample = sps.norm.rvs(size=(200, n), loc=0, scale=1)
evaluation = np.vsplit(np.cumsum(sample, axis = 1), 200) / np.arange(1, n + 1)
plt.figure()
i = 0
while (i < 200):
    plt.plot(np.arange(1, n + 1), evaluation[i].ravel(), color='orange', alpha=
0.2)
    i += 1
plt.ylim(-0.75, 0.75)
plt.show()
```



b). Пусть $X_1, \ldots, X_n$ --- выборка из распределения $U[0, \theta]$. Известно, что $X_{(n)}$ является состоятельной оценкой параметра θ. Выполните исследование, аналогичное пункту *а)*, сгенерировав выборки из распределения $U[0, 1]$ и посчитав оценки $\hat{\theta}_{jn} = \max\limits_{i=1\ldots n} X_i^j$.

In [5]:

```
def get_evaluation(sample, n):
    evaluation = []
    j = 0
    for line in sample:
        i = 0
        cur_line = []
        while i < n:
            cur_line.append(np.max(sample[j][:i+1]))
            i += 1
        evaluation.append(cur_line)
        j += 1
    return evaluation


n = 300
sample = sps.uniform.rvs(size=(200, n), loc=0, scale=1)
evaluation = get_evaluation(sample, n)
plt.figure()
i = 0
while (i < 200):
    plt.plot(np.arange(1, n + 1), evaluation[i], color='orange', alpha=0.2)
    i += 1
plt.ylim(0.4, 1.05)
plt.xlim(-0.1, 150)
plt.show()
```



Сделайте вывод о том, что такое свойство состоятельности. Подтверждают ли сделанные эксперименты свойство состоятельности данных оценок? Как связаны результаты в пункте *а)* с законом больших чисел?

Вывод: Свойство состоятельности означает, что последовательность оценок сходится по вероятности к неизвестному параметру. Из результатов, полученных нами в пункте а) видно, что большинство оценок стремится к $\theta = 1$. И это же следует из закона больших чисел, что при достаточно больших n и при любых θ верн, что $\theta^*_{jn} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_1^j$ сходится почти наверное к $EX_1^j = \theta = 1$. Полученные нами графики подтверждают истинность рассуждений.

Задача 3. В этой задаче нужно визуализировать свойство асимптотической нормальности.

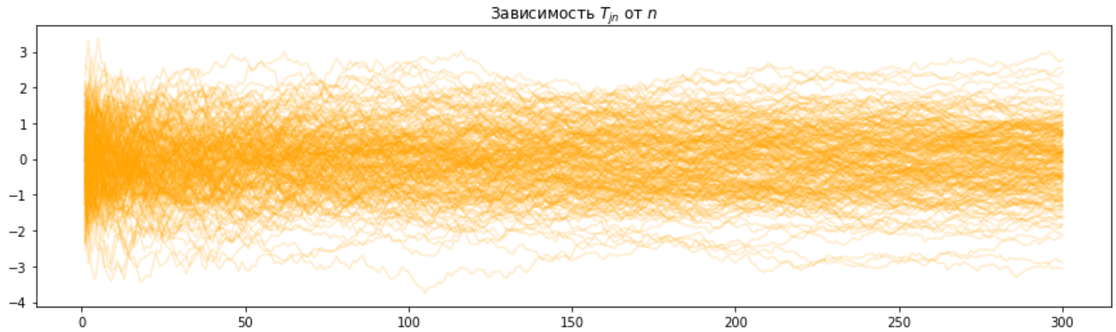
а). Пусть $X_1, \dots, X_n$ --- выборка из распределения $\mathcal{N}(\theta, 1)$. Известно, что $\overline{X}$ является асимптотически нормальной оценкой параметра θ. Вам нужно убедиться в этом, сгенерировав множество выборок и посчитав по каждой из них оценку параметра в зависимости от размера выборки.

Сгенерируйте 200 выборок $X_1^j, \dots, X_{300}^j$ из распределения $\mathcal{N}(0, 1)$. По каждой из них посчитайте оценки $\hat{\theta}_{jn} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^j$ для $1 \leqslant n \leqslant 300$, то есть оценка параметра по первым n наблюдениям j-й выборки. Для этой оценки посчитайте статистику $T_{jn} = \sqrt{n}\left(\hat{\theta}_{jn} - \theta\right)$, где $\theta = 0$.

Для каждого j нанесите на один график зависимость T_{jn} от n с помощью `plt.plot`. Каждая кривая должна быть нарисована *одним цветом* с прозрачностью `alpha=0.2`. Сходятся ли значения T_{jn} к какой-либо константе?

In [55]:

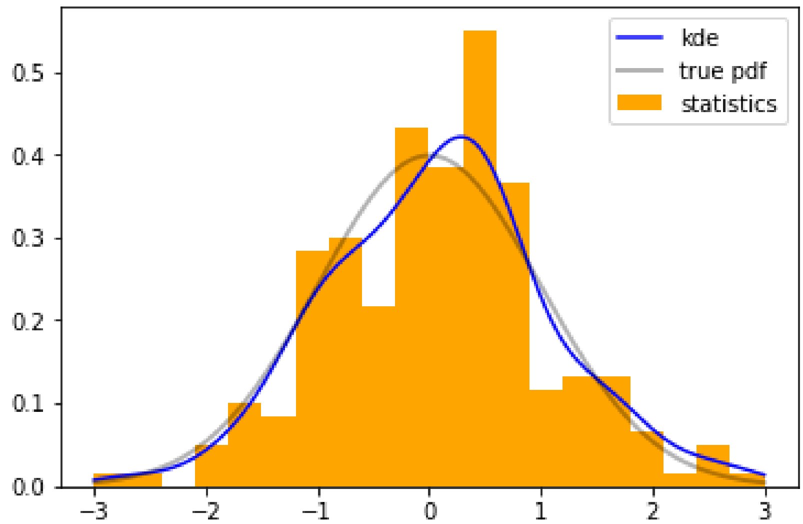
```
n = 300
sample = sps.norm.rvs(size=(200, n), loc=0, scale=1)
statistics = np.vsplit(np.cumsum(sample, axis = 1), 200) / np.sqrt(np.arange(1,
 n + 1))
plt.figure(figsize=(15, 4))
i = 0
while (i < 200):
    plt.plot(np.arange(1, n + 1), statistics[i].ravel(), color='orange', alpha=
0.2)
    i += 1
plt.title('Зависимость $T_{jn}$ от $n$')
plt.show()
```



Для $n = 300$ по выборке $T_{1,300}, \ldots, T_{200,300}$ постройте гистограмму и ядерную оценку плотности. Хорошо ли они приближают плотность распределения $\mathcal{N}(0, 1)$ (ее тоже постройте на том же графике)? Не забудьте сделать легенду.

In [40]:

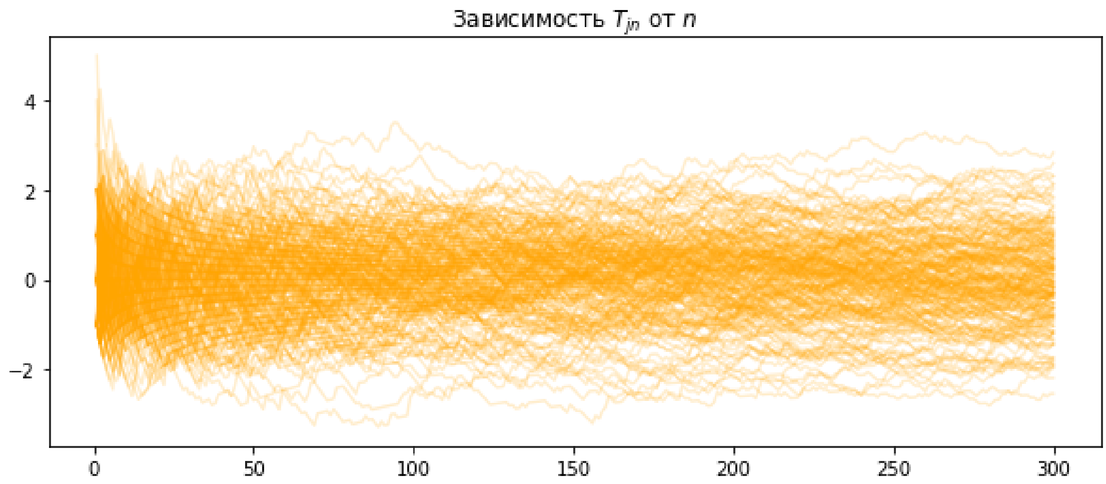
```
from statsmodels.distributions.empirical_distribution import ECDF
from statsmodels.nonparametric.kde import KDEUnivariate


plt.figure()
grid = np.linspace(-3, 3, 200)
plt.hist((statistics.T)[-1].ravel(), bins=20,
         range=(grid.min(), grid.max()), color='orange',
         normed=True, label='statistics')
kernel_density = KDEUnivariate((statistics.T)[-1].ravel())
kernel_density.fit()
plt.plot(grid, kernel_density.evaluate(grid), color='blue', label='kde')
pdf = sps.norm(loc=0, scale=1).pdf
plt.plot(grid, pdf(grid), color='black', alpha=0.3, lw=2, label='true pdf')
plt.legend()
plt.show()
```

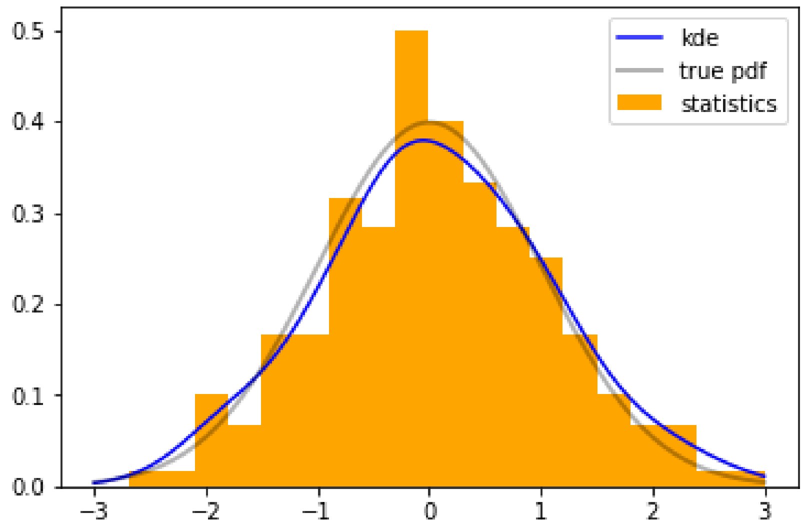


b). Пусть $X_1, \dots, X_n$ --- выборка из распределения $Pois(\theta)$. Известно, что $\overline{X}$ является асимптотически нормальной оценкой параметра θ. Выполните исследование, аналогичное пункту *a).*

In [58]:

```
n = 300
sample = sps.poisson.rvs(mu=1, loc=0, size=(200, n))
evaluations = np.vsplit(np.cumsum(sample, axis = 1), 200) / np.arange(1, n + 1)
statistics = (evaluations - 1) * np.sqrt(np.arange(1, n + 1))
plt.figure(figsize=(10, 4))
i = 0
while (i < 200):
    plt.plot(np.arange(1, n + 1), statistics[i].ravel(), color='orange', alpha=
0.2)
    i += 1
plt.title('Зависимость $T_{jn}$ от $n$')
plt.show()

plt.figure()
grid = np.linspace(-3, 3, 200)
plt.hist((statistics.T)[-1].ravel(), bins=20,
        range=(grid.min(), grid.max()), color='orange',
        normed=True, label='statistics')
kernel_density = KDEUnivariate((statistics.T)[-1].ravel())
kernel_density.fit()
plt.plot(grid, kernel_density.evaluate(grid), color='blue', label='kde')
pdf = sps.norm(loc=0, scale=1).pdf
plt.plot(grid, pdf(grid), color='black', alpha=0.3, lw=2, label='true pdf')
plt.legend()
plt.show()
```





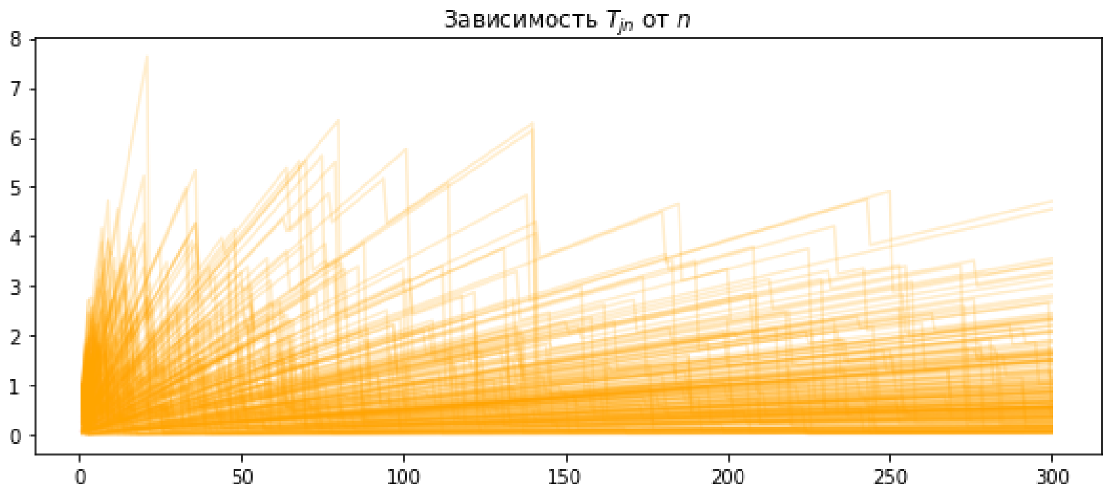
Сделайте вывод о том, что такое свойство асимптотической нормальности. Подтверждают ли сделанные эксперименты свойство асимптотической нормальности данных оценок? Как связаны результаты с центральной предельной теоремой?

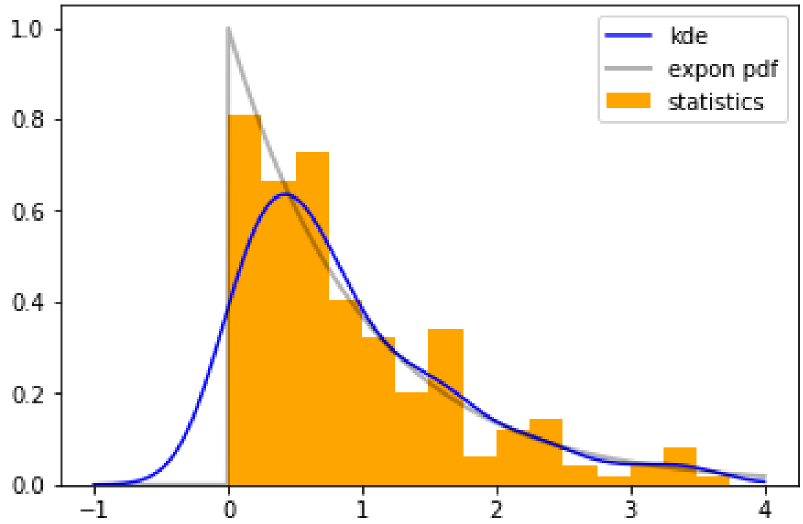
Вывод: Асимптотическая нормальность означает, что для оценки θ^* параметра θ с коэффициентом $\sigma^2(\theta)$ выполняется сходимость по распределению $\sqrt{n}(\theta^* - \theta)$ к $N_{0,\sigma^2(\theta)}$. Этот же вывод мы получаем и из центральной предельной теоремы. Истинность рассуждений наглядно показывают полученные нами графики.

Задача 4. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ --- выборка из распределения $U[0, \theta]$. Из домашнего задания известно, что $n\left(\theta - X_{(n)}\right) \xrightarrow{d_\theta} Exp\left(1/\theta\right)$. Проведите исследование, аналогичное заданию 3 для $\theta = 1$.

In [73]:

```
def get_evaluations(sample, n):
    evaluation = []
    j = 0
    for line in sample:
        i = 0
        cur_line = []
        while i < n:
            cur_line.append(np.max(sample[j][:i+1]))
            i += 1
        evaluation.append(cur_line)
        j += 1
    return evaluation


n = 300
sample = sps.uniform.rvs(size=(200, n), loc=0, scale=1)
evaluations = np.array(get_evaluations(sample, n))
statistics = np.arange(1, n + 1) * (1 - evaluations)
plt.figure(figsize=(10,4))
i = 0
while (i < 200):
    plt.plot(np.linspace(1, 300, 300), statistics[i], color='orange', alpha=0.2
)
    i += 1
plt.title('Зависимость $T_{jn}$ от $n$')
plt.show()

plt.figure()
grid = np.linspace(-1, 4, 1000)
plt.hist((statistics.T)[-1], bins=20,
        range=(grid.min(), grid.max()), color='orange',
        normed=True, label='statistics')
kernel_density = KDEUnivariate((statistics.T)[-1].ravel())
kernel_density.fit()
plt.plot(grid, kernel_density.evaluate(grid), color='blue', label='kde')
pdf = sps.expon(loc=0, scale=1).pdf
plt.plot(grid, pdf(grid), color='black', alpha=0.3, lw=2, label='expon pdf')
plt.legend()
plt.show()
```





Вывод: С помощью построенных графиков, мы убедились, что $n\left(\theta - X_{(n)}\right) \xrightarrow{d_\theta} Exp\left(1/\theta\right)$.

Задача 5. Дана параметрическая модель и несколько выборок из двух или трех наблюдений (для удобства они даются в виде python-кода). Нужно для каждой выборки построить график функции правдоподобия.

a). Параметрическая модель $\mathcal{N}(\theta, 1)$, выборки: [-1, 1], [-5, 5], [-1, 5]

b). Параметрическая модель $Exp(\theta)$, выборки: [1, 2], [0.1, 1], [1, 10]

c). Параметрическая модель $U[0, \theta]$, выборки: [0.2, 0.8], [0.5, 1], [0.5, 1.3]

d). Параметрическая модель $Bin(5, \theta)$, выборки: [0, 1], [5, 5], [0, 5]

e). Параметрическая модель $Pois(\theta)$, выборки: [0, 1], [0, 10], [5, 10]

f). Параметрическая модель C$auchy(\theta)$, где θ --- параметр сдвига, выборки: [-0.5, 0.5], [-2, 2], [-4, 0, 4]

Выполнить задание, не создавая много кода, поможет следующая функция.

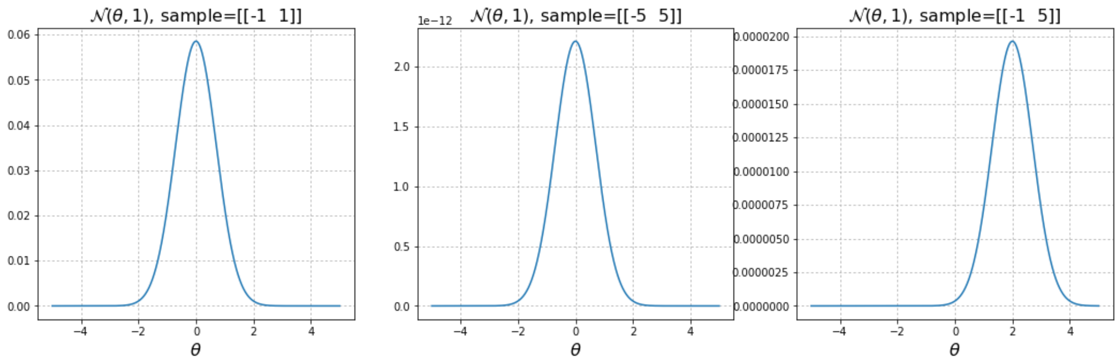
In [88]:

```
def draw_likelihood(density_function, grid, samples, label):
    ''' density_function --- функция, считающая плотность (обычную или дискретн
ую)
        grid --- сетка для построения графика
        samples --- три выборки
        label --- latex-код параметрической модели
    '''

    plt.figure(figsize=(18, 5))
    for i, sample in enumerate(samples):
        sample = np.array(sample)[np.newaxis, :]
        likelihood = []
        for line in sample:
            likelihood.append(density_function(line[0]) * density_function(line
[1]))

        likelihood = np.array(likelihood).ravel().T
        plt.subplot(1, 3, i+1)
        plt.plot(grid, likelihood)
        plt.xlabel('$\\theta$', fontsize=16)
        plt.grid(ls=':')
        plt.title(label + ', sample=' + str(sample), fontsize=16)
    plt.show()
```

Первый пункт можно выполнить с помощью следующего кода

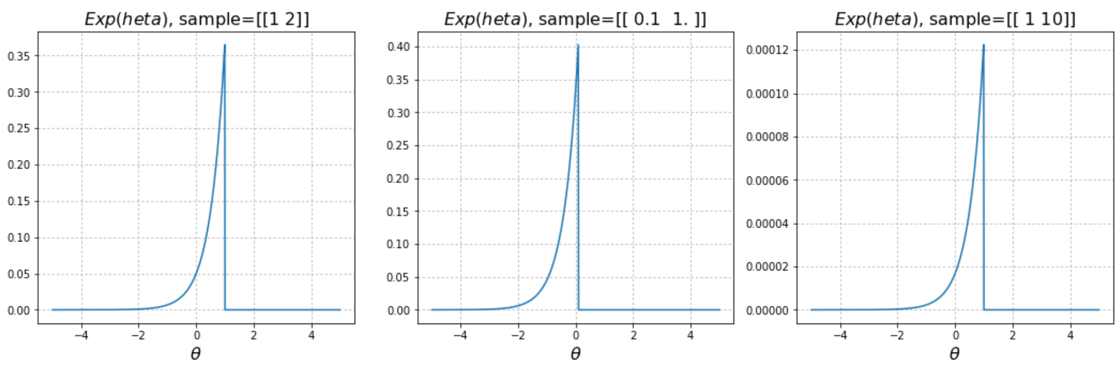
In [89]:

```
grid = np.linspace(-5, 5, 1000).reshape((-1, 1))
draw_likelihood(sps.norm(loc=grid).pdf, grid,
                [[-1, 1], [-5, 5], [-1, 5]], '$\\mathcal{N}(\\theta, 1)$')
```



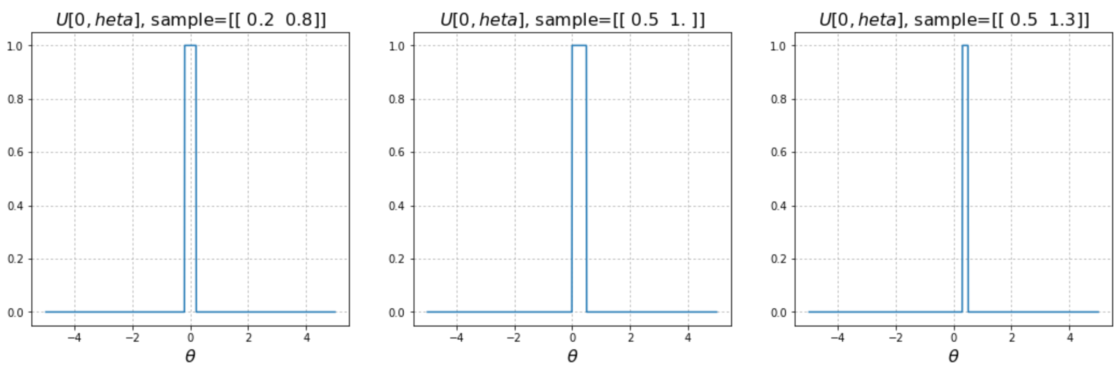
In [90]:

```
grid = np.linspace(-5, 5, 1000).reshape((-1, 1))
draw_likelihood(sps.expon(loc=grid).pdf, grid,
                [[1, 2], [0.1, 1], [1, 10]], '$Exp(\theta)$')
```



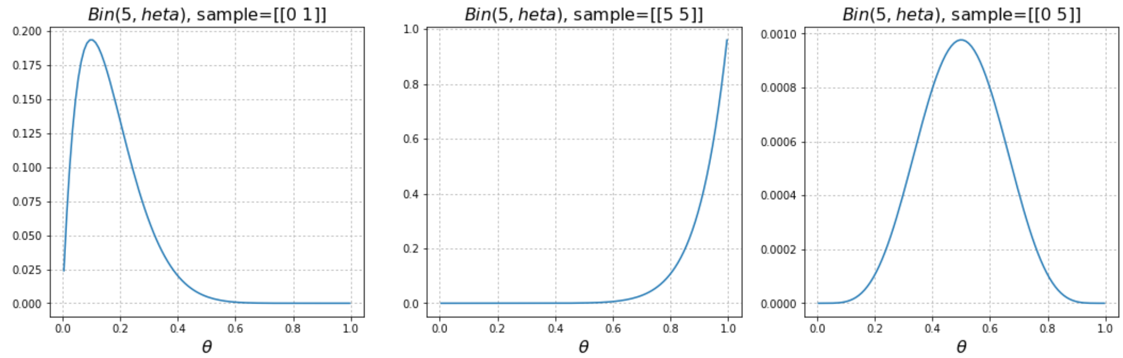
In [114]:

```
grid = np.linspace(-5, 5, 1000).reshape((-1, 1))
draw_likelihood(sps.uniform(grid).pdf, grid,
                [[0.2, 0.8], [0.5, 1], [0.5, 1.3]], '$U[0, \theta]$')
```



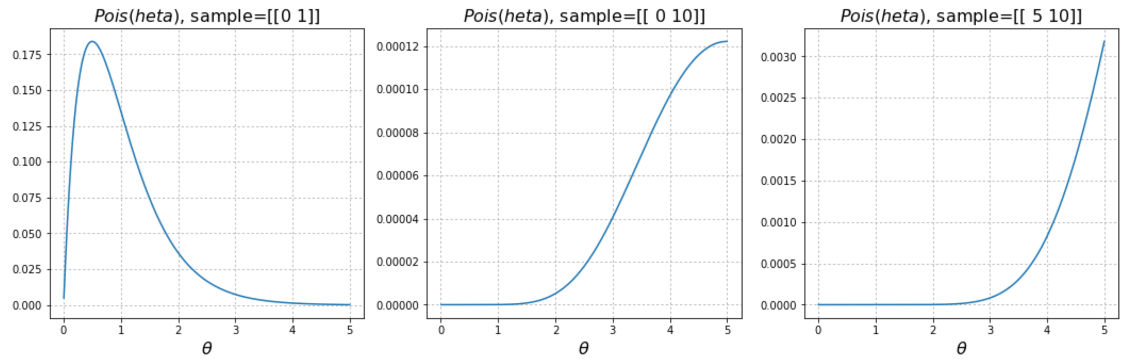
In [113]:

```
grid = np.linspace(-5, 5, 1000).reshape((-1, 1))
draw_likelihood(sps.binom(5,grid).pmf, grid,
                [[0, 1], [5, 5], [0, 5]], '$Bin(5, \theta)$')
```



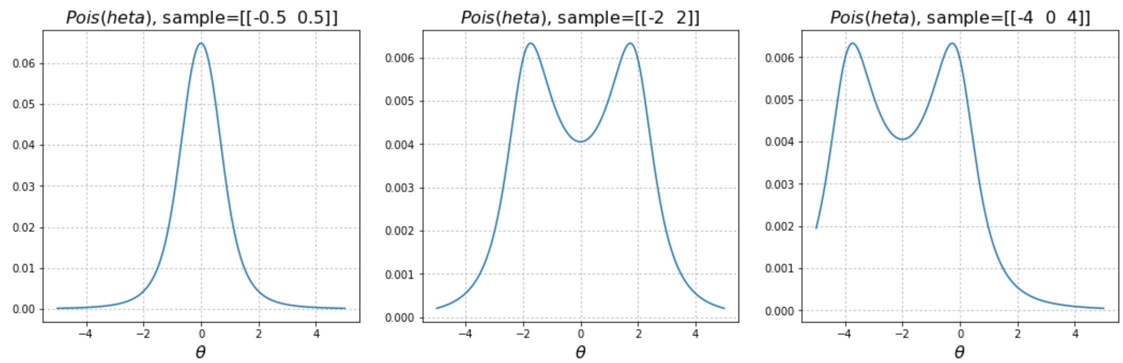
In [115]:

```
grid = np.linspace(-5, 5, 1000).reshape((-1, 1))
draw_likelihood(sps.poisson(grid).pmf, grid,
                [[0, 1], [0, 10], [5, 10]], '$Pois(\theta)$')
```



In [117]:

```
grid = np.linspace(-5, 5, 1000).reshape((-1, 1))
draw_likelihood(sps.cauchy(grid).pdf, grid,
                [[-0.5, 0.5], [-2, 2], [-4, 0, 4]], '$Pois(\theta)$')
```



Сделайте вывод о том, как функция правдоподобия для каждой модели зависит от выборки. Является ли функция правдоподобия плотностью?

Вывод: Выборка является последовательностью независимых случайных величин. Следовательно, функция правдоподобия является произведением плотнойстей независимых случайных величин. Следовательно, она является плотностью совместного распределения.

Сгенерируем выборку большого размера из стандартного нормального распределения и посчитаем ее функцию правдоподобия в модели $\mathcal{N}(\theta, 1)$. Выполните код ниже

In [118]:

```
sample = sps.norm.rvs(size=10**5)
likelihood = sps.norm.pdf(sample).prod()
print(likelihood)
```

```
0.0
```

Мы пытаемся перемножить очень большое количество чисел, стремящихся к нулю. Поэтому при округлении, в произведении получается ноль. Чтобы этого избежать, возьмем сумму по логарифмам этих чисел.

In [203]:

```
sample = sps.norm.rvs(size=10**5)
likelihood = sps.norm.logpdf(sample).sum()
print(likelihood)
```

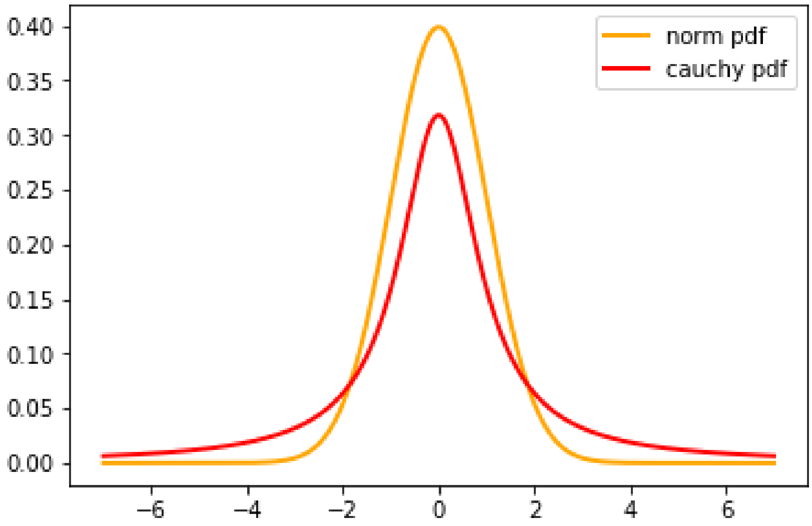
```
-142094.088596
```

Задача 6. На высоте 1 метр от точки θ находится источник γ-излучения, причем направления траекторий γ-квантов случайны, т.е. равномерно распределены по полуокружности. Регистрируются координаты $X_i, i = 1, \ldots, n$точек пересечения γ-квантов с поверхностью детекторной плоскости. Известно, что X_i имеет распределение Коши.

а). На отрезке $[-7, 7]$ постройте плотность стандартного нормального распределения и стандартного распределения Коши. Не забудьте добавить легенду.

In [123]:

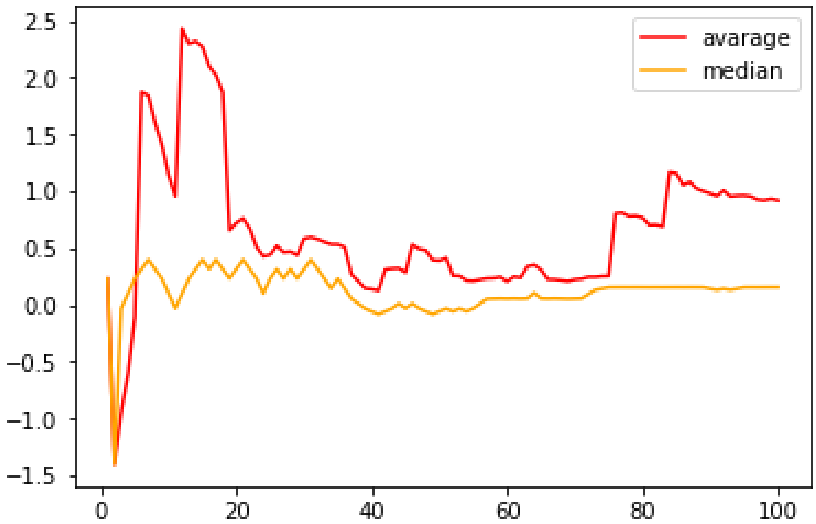
```
plt.figure()
grid = np.linspace(-7, 7, 1000)
plt.plot(grid, sps.norm(loc=0, scale=1).pdf(grid), color='orange', lw=2, label=
'norm pdf')
plt.plot(grid, sps.cauchy.pdf(grid), color='red', lw=2, label='cauchy pdf')
plt.legend()
plt.show()
```



b). Сгенерируйте выборку размера 100 из стандартного распределения Коши. Для всех $n \leqslant 100$ по первым n элементам выборки посчитайте значения $\overline{X}$ и $\widehat{\mu}$ (выборочное среднее и выборочная медиана). На одном графике изобразите зависимость значений этих оценок от n. Сделайте вывод.

In [210]:

```
sample = sps.cauchy.rvs(size=100)
avarage = np.cumsum(sample) / np.arange(1, 101)
medians = []
i = 0
while i < 100:
    medians.append(np.median(sample[:i+1]))
    i += 1
medians = np.array(medians)
plt.figure()
plt.plot(np.arange(1, 101), avarage, color='red', label='avarage')
plt.plot(np.arange(1, 101), medians, color='orange', label='median')
plt.legend()
plt.show()
```



Вывод: По построенным графикам мы видим, что значения выборочной медианы и выборочного среднего довольно близки друг к другу. Но выборочная медиана дает оценку на x_0 в распределении, в отличии от выборочного среднего.

Задача 7. На сегодняшний день возобновляемые источники энергии становятся все более востребованными. К таким источникам относятся, например, ветрогенераторы. Однако, их мощность очень трудно прогнозировать. В частности, выработка энергии при помощи ветрогенераторы сильно зависит от скорости ветра. Поэтому предсказание скорости ветра является очень важной задачей. Скорость ветра часто моделируют с помощью распределения Вейбулла, которое имеет плотность

$$p_\theta(x) = \frac{kx^{k-1}}{\lambda^k} e^{-(x/\lambda)^k},$$

где $\theta = (k, \lambda)$ --- двумерный параметр. К сожалению, найти точную оценку максимального правдоподобия на θ не получится. В данном задании нужно найти оценку максимального правдоподобия приближенно с помощью поиска по сетке.

Выборка. Создайте выборку по значению скорости ветра для некоторой местности для не менее чем 100 дней. Помочь в этом может дневник погоды (https://www.gismeteo.ru/diary/). Однако, данные там округлены до целого, поэтому вы можете попробовать найти другие данные.

а). Найдите оценку максимального правдоподобия параметра $\theta = (k, \lambda)$ с точностью 10^{-5} при помощи поиска по двумерной сетке.

За распределение Вейбулла отвечает класс `weibull_min` из `scipy.stats`, которое задается так: `weibull_min(c=`k `, scale=`λ `)`.

Двумерную сетку можно создать с помощью `numpy.mgrid[from:to:step, from:to:step]`. Если попробовать сразу создать сетку с шагом 10^{-5}, то может не хватить памяти. Поэтому найдите сначала максимум по сетке с большим шагом, а потом сделайте сетку с маленьким шагом в окрестности найденной точки. При вычислении без циклов, возможно, придется создавать четырехмерные объекты.

Функция `numpy.argmax` выдает не очень информативный индекс, поэтому пользуйтесь следующей функцией.

In [ ]:

```
def cool_argmax(array):
    return np.unravel_index(np.argmax(array), array.shape)
```

Нарисуйте график плотности с параметрами, соответствующим найденным ОМП, а так же нанесите на график гистограмму.

In [ ]:

```
...
```

*b).** На самом деле, при помощи дифференцирования можно перейти к задаче поиска ОМП для параметра k. Выполните такое преобразование и найдите ОМП приближенно с помощью метода Ньютона, основываясь на параграфе 35 книги А.А. Боровкова "Математическая статистика", 2007.

Задача 8.

a). Пусть $X_1, \dots, X_n$ --- выборка из распределения $U[0, \theta]$. Рассмотрим оценки $2\overline{X}, (n+1)X_{(1)}, X_{(1)} + X_{(n)}, \frac{n+1}{n} X_{(n)}$. Вам необходимо сравнить эти оценки в равномерном подходе с квадратичной и линейной функциями потерь, построив графики функций риска при помощи моделирования.

Для каждого $\theta \in (0, 2]$ с шагом 0.01 сгенерируйте 2000 выборок $X_1^j, \dots, X_{100}^j$ из распределения $U[0, \theta]$. По каждой из этих выборок посчитайте значение всех четырех оценок. Тем самым для данного θ и оценки θ^* получится 2000 реализаций этой оценки $\theta_1^*, \dots, \theta_{2000}^*$, где значение θ_j^* посчитано по реализации выборки $X_1^j, \dots, X_{100}^j$. Теперь можно оценить функцию потерь этой оценки с помощью усреднения

$$\widehat{R}\left(\theta^*, \theta\right) = \frac{1}{2000} \sum_{j=1}^{2000} g\left(\theta_j^*, \theta\right),$$

где $g(x, y) = (x - y)^2$ и $g(x, y) = |x - y|$.

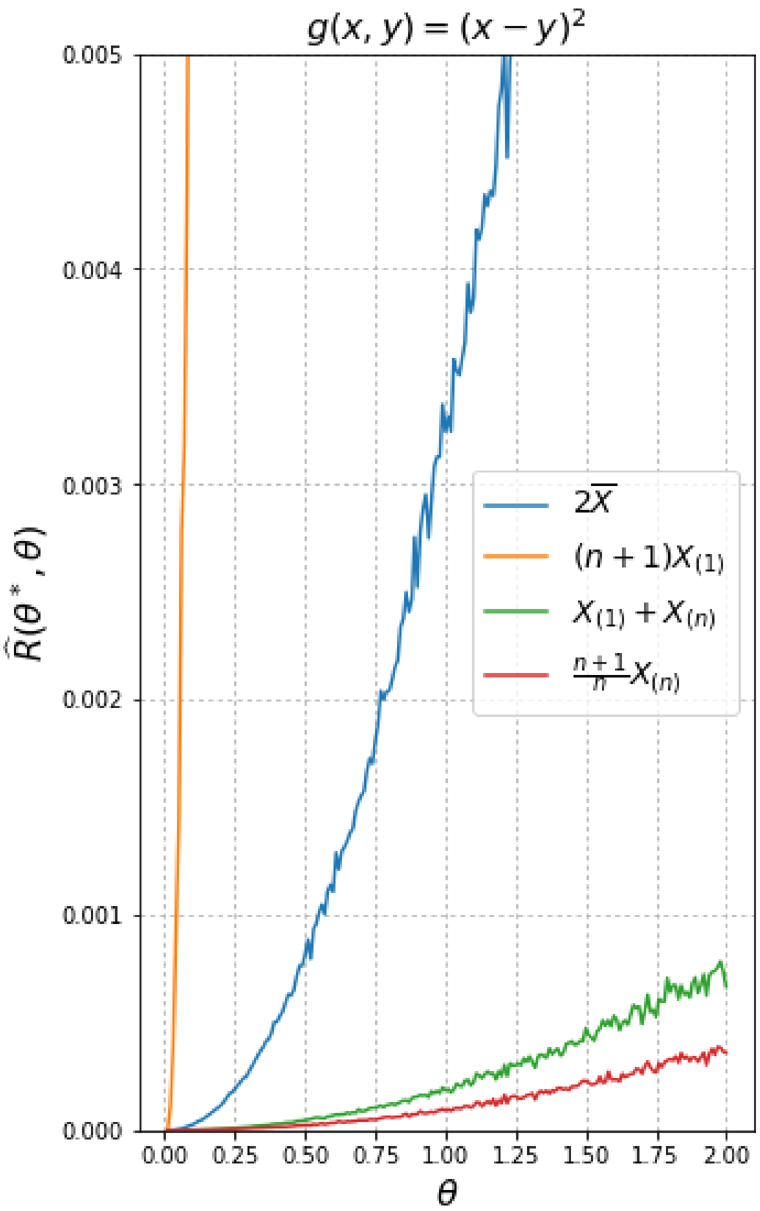
Нанесите на один график все четыре функции риска. Для каждого типа функции потерь должен быть свой график. Пользуйтесь следующим шаблоном. Ограничение сверху по оси *y* ставьте таким, чтобы графики функции риска с малыми значениями четко различались.

In [162]:

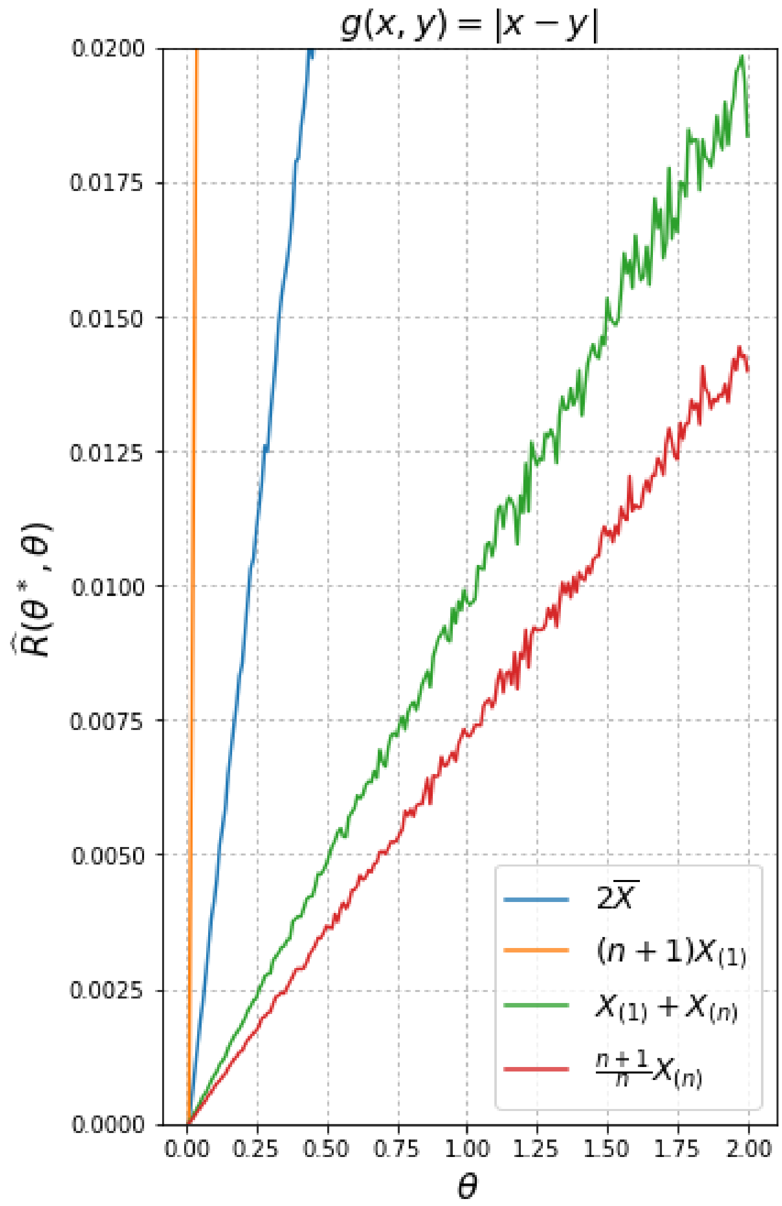
```
q = 0.0
risk1 = [[], []]
risk2 = [[], []]
risk3 = [[], []]
risk4 = [[], []]
while q < 2:
    sample = sps.uniform.rvs(loc=0, scale=q, size=(2000, 100))
    evaluation = 2 * np.average(sample, axis=1)
    risk1[0].append(1/2000 * np.sum((evaluation - q)**2))
    risk1[1].append(1/2000 * np.sum(np.absolute(evaluation - q)))
    evaluation = 101 * np.min(sample, axis=1)
    risk2[0].append(1/2000 * np.sum((evaluation - q)**2))
    risk2[1].append(1/2000 * np.sum(np.absolute(evaluation - q)))
    evaluation = np.max(sample, axis=1) + np.min(sample, axis=1)
    risk3[0].append(1/2000 * np.sum((evaluation - q)**2))
    risk3[1].append(1/2000 * np.sum(np.absolute(evaluation - q)))
    evaluation = 101/100 * np.max(sample, axis=1)
    risk4[0].append(1/2000 * np.sum((evaluation - q)**2))
    risk4[1].append(1/2000 * np.sum(np.absolute(evaluation - q)))
    q += 0.01
```

In [202]:

```
plt.figure(figsize=(5,9))
plt.plot(np.arange(0.01, 2.01, 0.01),  risk1[0], label='$2\\overline{X}$')
plt.plot(np.arange(0.01, 2.01, 0.01),  risk2[0], label='$(n+1)X_{(1)}$')
plt.plot(np.arange(0.01, 2.01, 0.01),  risk3[0], label='$X_{(1)}+X_{(n)}$')
plt.plot(np.arange(0.01, 2.01, 0.01),  risk4[0], label='$\\frac{n+1}{n} X_{(n)}
$')
plt.grid(ls=':')
plt.xlabel('$\\theta$', fontsize=16)
plt.ylabel('$\\widehat{R}\\left(\\theta^*, \\theta\\right)$', fontsize=16)
plt.legend(fontsize=14)
plt.title('$g(x, y)=(x-y)^2$', fontsize=16)
plt.ylim((0, 0.005))
plt.show()

plt.figure(figsize=(5,9))
plt.plot(np.arange(0.01, 2.01, 0.01),  risk1[1], label='$2\\overline{X}$')
plt.plot(np.arange(0.01, 2.01, 0.01),  risk2[1], label='$(n+1)X_{(1)}$')
plt.plot(np.arange(0.01, 2.01, 0.01),  risk3[1], label='$X_{(1)}+X_{(n)}$')
plt.plot(np.arange(0.01, 2.01, 0.01),  risk4[1], label='$\\frac{n+1}{n} X_{(n)}
$')
plt.grid(ls=':')
plt.xlabel('$\\theta$', fontsize=16)
plt.ylabel('$\\widehat{R}\\left(\\theta^*, \\theta\\right)$', fontsize=16)
plt.legend(fontsize=14)
plt.title('$g(x, y)=\\left|x-y\\right|$', fontsize=16)
plt.ylim((0, 0.02))
plt.show()
```



$g(x, y) = (x - y)^2$
$\widehat{R}(\theta^*, \theta)$
θ
0.005
0.004
0.003
0.002
0.001
0.000
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
$2\overline{X}$
$(n+1)X_{(1)}$
$X_{(1)} + X_{(n)}$
$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$



$g(x, y) = |x - y|$
$\widehat{R}(\theta^*, \theta)$
0.0200
0.0175
0.0150
0.0125
0.0100
0.0075
0.0050
0.0025
0.0000
0.00 0.25 0.50 0.75 1.00 1.25 1.50 1.75 2.00
θ
$2\overline{X}$
$(n+1)X_{(1)}$
$X_{(1)} + X_{(n)}$
$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$

Сделайте вывод о том, какая оценка лучше и в каком подходе.

Вывод: По графикам мы видим, что квадратичный подход дает более хорошие результаты, чем линейный. В обоих подходах наилучший результат дает оценка $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$.

b). Пусть $X_1, \dots, X_n$ --- выборка из распределения $Exp(\theta)$. Для $1 \leqslant k \leqslant 5$ рассмотрим оценки $\left(k!/\overline{X^k}\right)^{1/k}$, которые вы получили в домашнем задании. Проведите исследование, аналогичное пункту *a)*. Используйте цикл по k, чтобы не размножать код. Факториалы есть гамма-функция, которая реализована в `scipy.special.gamma`.

Задача 9*. Пусть θ^* --- оценка параметра θ и $R\left(\theta^*, \theta\right) = \mathsf{E}_\theta(\theta^* - \theta)^2$ --- функция риска с квадратичной функцией потерь. Тогда справедливо bias-variance разложение

$$R\left(\theta^*, \theta\right) = bias^2(\theta^*, \theta) + variance(\theta^*, \theta),$$
$$bias(\theta^*, \theta) = \mathsf{E}_\theta\theta^* - \theta,$$
$$variance(\theta^*, \theta) = \mathsf{D}_\theta\theta^*.$$

a). Пусть $X_1, \dots, X_n$ --- выборка из распределения $U[0, \theta]$. Рассмотрим класс оценок $\mathscr{K} = \left\{cX_{(n)}, c \in \mathbb{R}\right\}$. Выпишите bias-variance разложение для таких оценок.

...

Заметим, что каждая компонента bias-variance разложения пропорциональна θ^2. Это означает, достаточно рассмотреть поведение компонент при изменении c только для одного значения θ.

Постройте график зависимости компонент bias-variance разложения от c для $n = 5$ и $\theta = 1$. С помощью функций `plt.xlim` и `plt.ylim` настройте видимую область графика так, чтобы четко была отобажена информативная часть графика (по оси *x* примерно от 0.9 до 1.3). Не забудьте добавить сетку и легенду, а так же подписать оси.

Сделайте выводы. Какая c дает минимум функции риска? Является ли соответствующая оценка смещеной? Что можно сказать про несмещенную оценку?

b). Пусть $X_1, \dots, X_n$ --- выборка из распределения $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Рассмотрим класс оценок $\mathscr{K} = \left\{\frac{1}{c}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2, c \in \mathbb{R}\right\}$. Выпишите bias-variance разложение для таких оценок. Можно использовать то, что величина $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ имеет распределение хи-квадрат с $n-1$ степенью свободы (это будет доказано в нашем курсе позже) и ее дисперсия равна $2(n-1)$.

...

Повторите исследование, аналогичное пункту *а)* для $sigma^2 = 1$ и $n \in \{5, 10\}$. Для экономии места нарисуйте два графика в строчку. Не забудьте сделать выводы.

Задача 10*. Разберитесь с теорией параграфа 4 главы 6 книжки М.Б. Лагутина "Наглядная математическая статистика", 2009. Проведите соответствующее исследование.