Livre du professeur - Mathématiques Chapitre 1 - Nombres complexes, point de vue algébrique

Table des matières

Document sous licence libre Creative Commons
CC BY NC SA

1 Informations sur ce chapitre

Le B.O. précise que l'étude des nombres complexes est menée suivant deux lignes directrices : la résolution des équations algébriques et l'étude de problèmes de géométrie et de trigonométrie.
Du point de vue algébrique, les nombres complexes sont introduits pour permettre la résolution des équations du second degré à discriminant négatif.
Les automatismes de calcul de somme et de produit de nombres complexes sont travaillés dans une première partie afin de s'approprier les notions de partie réelle et de partie imaginaire.
Dans une seconde partie, la notion de nombres complexes conjugués permet de définir l'inverse d'un nombre complexe non nul et le quotient de deux nombres complexes.
La troisième partie du chapitre aborde la résolution des équations du second degré à discriminant négatif, puis la résolution des équations polynomiales de degré supérieurs à 2 grâce à la factorisation.
Les exercices proposés sont au départ très calculatoires pour permettre aux élèves de bien maîtriser les techniques de calcul. Une fois les automatismes acquis, les problèmes de modélisation, présents plutôt en fin de chapitre, pourront être abordés pour découvrir plusieurs utilisations des nombres complexes.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

$A(x) = 2 + 4x - 3x - 6x^2 = -6x^2 + x + 2$
$B(x) = 4x^2 - 3x - 6x + \dfrac{9}{2} = 4x^2 - 9x + \dfrac{9}{2}$
$C = 6\sqrt{2} + 3 - 4 - \sqrt{2} = -1 + 5\sqrt{2}$

Corrigé exercice 2 :

$A = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times 3 + 3^2 = 2^2 \times \left(\sqrt{3}\right)^2 = 12 + 12\sqrt{3} + 9 = 21 + 12\sqrt{3}$
$B = \left(\sqrt{5}\right)^2 - 2 \times \sqrt{5} \times 1 + 1^2 = 5 - 2\sqrt{5} + 1 = 6 - 2\sqrt{5}$
$C = \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2 = 1$
$D = 1^4 - 4 \times 1^3 \times 2\sqrt{3} + 6 \times 1^2 \times \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times \left(2\sqrt{3}\right)^3 + \left(2\sqrt{3}\right)^4$
$= 1 - 8\sqrt{3} + 72 - 96\sqrt{3} + 144 = 217 - 104\sqrt{3}.$

Corrigé exercice 3 :

$A(x) = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2 = 9x^2 - 30x + 25$
$B(x) = x^2 + 2 \times x \times \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = x^2 + x + \dfrac{1}{4}$
$C(x) = (2 - 3x)(2 + 3x) = 2^2 - (3x)^2 = 4 - 9x^2$
$D(x) = (x+1)^2 \times (x+1) = (x^2 + 2 \times x \times 1)(x+1) = (x^2 + 2x + 1)(x+1)$
$= x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
$E(x) = (2x)^4 - 4 \times (2x)^3 \times 1 + 6 \times (2x)^2 \times 1^2 - 4 \times 2x \times 1^3 + 1^4$
$= 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$

Corrigé exercice 4 :

$A(x) = (x+2)^2 - 2(x+2)(x-1) = (x+2)(4-x)$
$B(x) = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = (2x-3)^2$
$C(x) = [(x+1) - (3x+2)]\,[(x+1) + (3x+2)] = (x + 1 - 3x - 2)(4x+3)$ donc $C(x) = -(2x+1)(4x+3)$.

Corrigé exercice 5 :

1. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 - x = 3 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ d'où $S = \{(2; -1)\}$.

2. $\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ 3x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x = -7 \\ y = -3 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$ d'où $S = \left\{\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)\right\}$.

3. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ d'où $S = \{(1; -1)\}$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

4. $\begin{cases} 3x+4y=-7 \\ 2x+3y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases}$ d'où $S=\{(3;-4)\}$.

Corrigé exercice 6 :

1. $(x-2)^2=(1-3x)^2 \Leftrightarrow (x-2)^2-(1-3x)^2=0$
$\Leftrightarrow [(x-2)-(1-3x)]\,[(x-2)+(1-3x)]=0$
$\Leftrightarrow (4x-3)(-2x-1)=0 \Leftrightarrow 4x-3=0$ ou $-2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{4}$ ou $x=-\dfrac{1}{2}$.
D'où $S=\left\{\dfrac{3}{4};-\dfrac{1}{2}\right\}$.

2. Le discriminant du trinôme $5x^2+9x-2$ vaut $\Delta=9^2-4\times5\times(-2)=121=11^2>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-9-11}{2\times5}=-2$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-9+11}{2\times5}=\dfrac{1}{5}$. D'où $S=\left\{-2;\dfrac{1}{5}\right\}$.

3. $x^2+1=2x \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$. D'où $S=\{1\}$.

4. $x^2-3x+1=3x^2-8x-2 \Leftrightarrow 2x^2-5x-3=0$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta=49=7^2>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{5-7}{2\times2}=-\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{5+7}{2\times2}=3$.
D'où $S=\left\{-\dfrac{1}{2};3\right\}$.

Corrigé exercice 7 :

-1 est une racine évidente du polynôme car $(-1)^2-6\times(-1)-7=0$. On sait que, pour un trinôme de la forme ax^2+bx+c, les racines x_1 et x_2 vérifient $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ et $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$. Ainsi, puisque $x_1=-1$, alors $-x_2=\dfrac{-7}{1} \Leftrightarrow x_2=7$. D'où $S_{\mathbb{R}}=\{-1;7\}$.

Corrigé exercice 8 :

1. $P(-1)=15\times(-1)^3-(-1)^2-12\times(-1)+4=-15-1+12+4=0$ donc -1 est une racine de P.

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(x+1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b+a)x^2+(x+b)x+c$ et $ax^3+(b+a)x^2+(x+b)x+c=15x^3-x^2-12x+4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=15 \\ b+a=-1 \\ c+b=-12 \\ c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=15 \\ b=-1-a=-16 \\ c=-12-b=4 \\ c=4 \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=(x+1)(15x^2-16x+4)$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

3. $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(15x^2 - 16x + 4) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $5x^2 - 16x + 4 = 0$.

   Cette deuxième expression est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = (-16)^2 - 4 \times 15 \times 4 = 16 = 4^2 > 0$ donc l'équation $5x^2 - 16x + 4 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{16 - 4}{2 \times 15} = \frac{2}{5} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{16 + 4}{2 \times 15} = \frac{2}{3}.$$

   D'où $S = \left\{-1; \frac{2}{5}; \frac{2}{3}\right\}$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

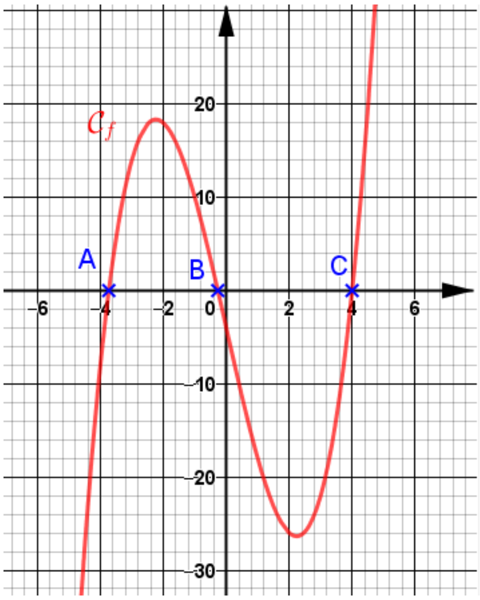
3 Activités

3.1 Corrigé activité A : Introduction aux nombres complexes : équation de Bombelli

Questions :

Partie A : Résolution graphique

1. Graphiquement, on observe que la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 15x - 4$ admet trois points d'intersection avec l'axe des abscisses. On peut donc conjecturer que l'équation (1) : $x^3 - 15x - 4 = 0$ admet trois solutions réelles.



2. Il semble que 4 soit une solution entière de (1). On le vérifie par le calcul : $4^3 - 15 \times 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0$. 4 est donc bien solution de (1).

Partie B : Résolution algébrique

1. a. Si $q = 0$ alors (2) $\Leftrightarrow x^3 + px = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + p) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 + p = 0$.
   On distingue alors trois cas suivant les valeurs de p.
   - 1er cas : $p > 0$
     Dans ce cas $x^2 + p = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
     D'où (2) $\Leftrightarrow x = 0$ et $S_{\mathbb{R}} = \{0\}$.
   - 2ème cas : $p = 0$
     Dans ce cas $x^2 + p = 0 \Leftrightarrow x = 0$. D'où (2) $\Leftrightarrow x = 0$ et $S_{\mathbb{R}} = \{0\}$.
   - 3ème cas : $p < 0$
     Alors $-p > 0$ et on a ainsi (2) $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{|p|}$ ou $x = -\sqrt{|p|}$. D'où $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\sqrt{|p|}; 0; \sqrt{|p|}\right\}$.

   b. Soit $f(x) = x^3 + px + q$. Pour tout réel x non nul, on a $f(x) = x(x^2 + p) + q$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + p = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + p = +\infty$ alors, par limite d'un produit, puis d'une somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

cc BY NC SA

c. f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable, et donc continue, sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in]-\infty; +\infty[$ qui contient la valeur 0. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution réelle.

2. a. Dans ce cas, $p = -15$ et $q = -4$ donc $\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} = \dfrac{(-4)^2}{4} + \dfrac{(-15)^3}{27} = -121 < 0$. Comme ce nombre est négatif, sa racine carrée n'est pas définie. La formule de Cardan ne peut donc pas être utilisée pour l'équation de Bombelli.

b. Provisoirement, on note $\sqrt{-1}$ le nombre non réel tel que $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$. Ainsi le calcul effectué à la question précédente donne $\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} = -121 = \left(11\sqrt{-1}\right)^2$ et on obtient alors $x_0 = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$.

c. $\left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 - 3 \times 2^2 \times \sqrt{-1} + 3 \times 2 \times \left(\sqrt{-1}\right)^2 - \left(\sqrt{-1}\right)^3$
$= 8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1} = 2 - 11\sqrt{-1}$ car $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$
donc $\left(\sqrt{-1}\right)^3 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 \times \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$.
Et $\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 \times \sqrt{-1} + 3 \times 2 \times \left(\sqrt{-1}\right)^2 + \left(\sqrt{-1}\right)^3$
$= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$.
Ainsi $x_0 = 2 - \sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-1} = 4$ est une solution entière de l'équation de Bombelli.

Bilan :

Par définition $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$. Or $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1 \times (-1)}$ (car la racine carrée d'un produit est le produit des racines carrées) d'où $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = \sqrt{1} = 1$.
On aboutit donc à l'égalité « $-1 = 1$ » qui est absurde. On ne peut donc pas écrire ce nombre de cette manière (d'où la nécessité d'avoir recours à une autre écriture : i, en l'occurrence).

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

3.2 Corrigé activité B : Résolution dans $\mathbb{C}$ d'une équation du second degré à coefficients réels

Questions :

1. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -96 < 0$ donc le polynôme P n'admet pas de racines réelles.

2. a. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(z-2)^2 + 9 = z^2 - 4z + 4 + 9 = z^2 - 4z + 13 = P(z)$.
   b. $(3\mathrm{i})^2 = 3^2 \times \mathrm{i}^2 = 9 \times (-1) = -9$. Donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-2)^2 - (-9) = (z-2)^2 - (3\mathrm{i})^2 = (z - 2 - 3\mathrm{i})(z - 2 + 3\mathrm{i})$.
   c. $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2-3\mathrm{i})(z-2+3\mathrm{i}) = 0 \Leftrightarrow z - 2 - 3\mathrm{i} = 0$ ou $z - 2 + 3\mathrm{i} = 0$ $\Leftrightarrow z = 2 + 3\mathrm{i}$ ou $z = 2 - 3\mathrm{i}$. Ainsi $S_{\mathbb{C}} = \{2+3\mathrm{i}; 2-3\mathrm{i}\}$.

Bilan :

1. Soient a, b et c des réels tels que $a \neq 0$ et soit l'équation (1) : $az^2 + bz + c = 0$.

   Comme $a \neq 0$, alors (1) $\Leftrightarrow a\left(z^2 + \frac{b}{a}z\right) + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c = 0$

   $\Leftrightarrow a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = 0 \Leftrightarrow a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$

   $\Leftrightarrow a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$ avec $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow |\Delta| = -\Delta > 0$.

   On écrit alors $\Delta = -(-\Delta) = -1 \times |\Delta| = \mathrm{i}^2 \times \left(\sqrt{|\Delta|}\right)^2 = \left(\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}\right)^2$.

   Et alors (1) $\Leftrightarrow a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

   $\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \frac{\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ ou $z + \frac{b}{2a} = -\frac{\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

   $\Leftrightarrow z = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ ou $z = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

   Ainsi, si $\Delta < 0$ alors $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \overline{z_1}$.

2. On peut ainsi en conclure que toute équation du second degré à coefficients réels admet des solutions dans $\mathbb{C}$: deux solutions réelles distinctes lorsque $\Delta > 0$, une solution lorsque $\Delta = 0$ et deux solutions complexes conjuguées lorsque $\Delta < 0$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

3.3 Corrigé activité C : Équation polynomiale de degré 4

Questions

1. a. $P(1) = 1 - 3 - 9 + 63 - 52 = 0$ donc 1 est une racine de P.

   b. Puisque 1 est une racine de P, alors l'expression de P se factorise par $(z-1)$ et donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-1)(az^3 + bz^2 + cz + d)$ avec a, b, c et d des réels tels que $a \neq 0$. Ainsi, il existe bien un polynôme Q de degré 3 à coefficients réels tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-1)Q(z)$.

   c. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
   $(z-1)(z^3 - 2z^2 - 11z + 52) = z^4 - 2z^3 - 11z^2 + 52z - z^3 + 2z^2 + 11z - 52$
   $= z^4 - 3z^3 - 9z^2 + 63z - 52 = P(z)$.
   D'où, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $Q(z) = z^3 - 2z^2 - 11z + 52$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de Q. On a alors $Q(\alpha) = 0$.

   Ainsi, $Q(\overline{\alpha}) = (\overline{\alpha})^3 - 2\,(\overline{\alpha})^2 - 11 \times \overline{\alpha} + 52 = \overline{(\alpha)^3} - \overline{2} \times \overline{(\alpha)^2} - \overline{11} \times \overline{\alpha} + \overline{52}$ par compatibilité de la conjugaison avec les puissances, d'où $Q(\overline{\alpha}) = \overline{(\alpha)^3} - \overline{2 \times (\alpha)^2} - \overline{11 \times \alpha} + \overline{52}$ par compatibilité de la conjugaison avec la multiplication, et ainsi $Q(\overline{\alpha}) = \overline{\alpha^3 - 2\alpha^2 - 11\alpha + 52}$ par compatibilité de la conjugaison avec l'addition. En conclusion, $Q(\overline{\alpha}) = \overline{Q(\alpha)} = \overline{0} = 0$ et donc $\overline{\alpha}$ est aussi racine de Q.

3. a. On trouve $Q(-4) = 0$.

   b. On cherche les réels a, b et c avec $a \neq 0$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $Q(z) = (z+4)(az^2 + bz + c) \Leftrightarrow az^3 + (b+4a)z^2 + (c+4b)z + 4c = z^3 - 2z^2 - 11z + 52$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + 4a = -2 \\ c + 4b = -11 \\ 4c = 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 13 \end{cases}$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $R(z) = z^2 - 6z + 13$ et donc $Q(z) = (z+4)(z^2 - 6z + 13)$.

4. a. $R(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 - 6z + 13 = 0$. Cette expression est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 13$ $\Delta = -16 = (4\mathrm{i})^2 < 0$ donc R admet deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{6 - 4\mathrm{i}}{2} = 3 - 2\mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 3 + 2\mathrm{i}$.
   Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $R(z) = (z - 3 + 2\mathrm{i})\,(z - 3 - 2\mathrm{i})$.

   b. En conclusion, on en déduit que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-1)Q(z) = (z-1)(z+4)R(z) = (z-1)(z+4)\,(z - 3 + 2\mathrm{i})\,(z - 3 - 2\mathrm{i})$.

Bilan :

On peut conjecturer qu'un polynôme P de degré n, avec n un entier naturel non nul, peut s'écrire en un produit d'au maximum n facteurs de degré 1. Et si chacun des n facteurs de P a une racine distincte de celles de ses autres facteurs alors P a au plus n racines distinctes.

Document sous licence libre Creative Commons
CC BY NC SA

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 9 :

$z_2 \times z_2 = (2+3\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}) = 2+6+\mathrm{i}(-4+3) = 8-\mathrm{i}$

Réponse : b

Corrigé exercice 10 :

$$\frac{2+3\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = \frac{(2+3\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})} = \frac{2-6+\mathrm{i}(4+3)}{5} = -\frac{4}{5}+\frac{7}{5}\mathrm{i}$$

Réponse : d

Corrigé exercice 11 :

$\overline{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})^3} = \left(\overline{1-\mathrm{i}}\right)\left(\overline{1+\mathrm{i}}\right)^3 = (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})^3 = (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) \times (1-\mathrm{i})^2$
$= (1-\mathrm{i}^2)(1-1-2\mathrm{i}) = 2 \times (-2\mathrm{i}) = -4\mathrm{i}$.

Réponse : a

Corrigé exercice 12 :

On reconnaît un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 10 = -36 = (6\mathrm{i})^2 < 0$. Le polynôme admet donc deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{2-6\mathrm{i}}{2} = 1-3\mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1+3\mathrm{i}$.

Réponse : b

Corrigé exercice 13 :

Tout d'abord $\mathrm{i}^5 = (\mathrm{i}^2)^2 \times \mathrm{i} = (-1)^2 \times \mathrm{i} = \mathrm{i}$ donc $\dfrac{1}{\mathrm{i}^5} = \dfrac{1}{\mathrm{i}} = \dfrac{-\mathrm{i}}{0^2+1^2} = -\mathrm{i}$. C'est donc un imaginaire pur. D'autre part $\mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2 \times \mathrm{i} = -\mathrm{i}$ donc $\dfrac{1}{\mathrm{i}^5} = -\mathrm{i} = \mathrm{i}^3$.

Réponses : b et c

Corrigé exercice 14 :

$\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{1^2+1^2} = \dfrac{1-1+2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}$. C'est donc un imaginaire pur et son conjugué est $\overline{i} = -\mathrm{i}$.

Réponses : b, c et d

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 15 :

$z^3-1=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow z-1=0$ ou $z^2+z+1=0$. Or $z^2+z+1=0$ est un trinôme du second degré admettant pour discriminant $\Delta=1^2-4\times1\times1=-3=\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2<0$, il admet donc deux racines complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\overline{z_1}=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi $z^3-1=0 \Leftrightarrow z=1$ ou $z=-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Réponses : a, c et d

Corrigé exercice 16 :

On a $P(1)=1^4+3\times1^2-4=0$ donc P se factorise par $z-1$.
On a $P(-1)=(-1)^4+3\times(-1)^2-4=0$ donc P se factorise par $z+1$.
On a $P(-2\mathrm{i})=(-2\mathrm{i})^4+3\times(-2\mathrm{i})^2-4=16-12-4=0$ donc P se factorise par $z+2\mathrm{i}$.
Or P est un polynôme de degré 4, il admet donc au plus quatre racines. L'une d'entre elle est une racine complexe, puisque égale à $-2\mathrm{i}$, donc P ne peut pas admettre quatre racines réelles.

Réponses : a, b et c

Corrigé exercice 17 :

1. a. $z_1+z_2=z_1+\overline{z_1}=2$ et $z_1\times z_2=(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=1-\mathrm{i}^2=2$.

   b. z_1 et z_2 sont racines du polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^2-(z_1+z_2)z+z_1z_2=z^2-2z+2$.

2. a. $Q(1+\mathrm{i})=(1+\mathrm{i})^3-6\,(1+\mathrm{i})^2+10\,(1+\mathrm{i})-8=0$ donc $z_1=1+\mathrm{i}$ est une racine de Q.

   De même $Q(1-\mathrm{i})=(1-\mathrm{i})^3-6\,(1-\mathrm{i})^2+10\,(1-\mathrm{i})-8=0$ donc $z_2=1-\mathrm{i}$ est une racine de Q.

   Ainsi, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $Q(z)$ se factorise par $(z-z_1)(z-z_2)$, c'est-à-dire $P(z)$.

   On cherche maintenant $\alpha\in\mathbb{C}$ tel que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $(z-\alpha)(z^2-2z+2)=z^3-6z^2+10z-8$

   $\Leftrightarrow z^3-(2+\alpha)z^2+(2\alpha+2)z-2\alpha=z^3-6z^2+10z-8$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases}1=1\\-(2+\alpha)=-6\\2\alpha+2=10\\-2\alpha=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-(2+4)=-6\\2\times4+2=10\\\alpha=4\end{cases} \Leftrightarrow \alpha=4.$$

   Ainsi, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $Q(z)=(z-4)P(z)$.

   b. $Q(z)=0 \Leftrightarrow z-4=0$ ou $P(z)=0 \Leftrightarrow z=4$ ou $z=z_1$ ou $z=z_2$. D'où $S_{\mathbb{C}}=\{4;1+\mathrm{i};1-\mathrm{i}\}$.

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1 : Suite de nombres complexes

Questions préliminaires

1. a. On obtient les résultats ci-dessous.

n	0	1	2	3	4
z_n	1	i	–1	i	1
u_n	1	1	1	1	1

b. On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $z_n = a_n + \mathrm{i}b_n$ et $u_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.
D'autre part, $z_{n+1} = \mathrm{i}z_n = \mathrm{i}\left(a_n + \mathrm{i}b_n\right) = \mathrm{i}a_n - b_n = -b_n + \mathrm{i}a_n$ donc
$u_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2} = \sqrt{\left(-b_n\right)^2 + a_n^2} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = u_n$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.
De plus, comme $u_0 = 1$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.
Ainsi, la suite (u_n) est constante égale à 1, donc elle converge vers 1.

2. Dans ce cas, on obtient les résultats ci-dessous.

n	0	1	2	3	4
z_n	1	2i	–4	–8i	16
u_n	1	2	4	8	16

On peut donc conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.

Pour le démontrer, on va tout d'abord montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$.

Soit donc $n \in \mathbb{N}$. On a $z_n = a_n + \mathrm{i}b_n$ et $u_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Et, d'autre part, $z_{n+1} = 2\mathrm{i}z_n = 2\mathrm{i}\left(a_n + \mathrm{i}b_n\right) = 2\mathrm{i}a_n - 2b_n = -2b_n + 2\mathrm{i}a_n$ donc $u_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2} = \sqrt{\left(-2b_n\right)^2 + 2a_n^2} = \sqrt{4a_n^2 + 4b_n^2} = \sqrt{4} \times \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et donc $u_{n+1} = 2u_n$.

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $\rho = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times \rho^n = 1 \times 2^n = 2^n$.

Ainsi, comme $\rho = 2 > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ et donc la suite (u_n) est divergente.

Méthode 1 : Tableur

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) z_n$ d'où :

$$a_{n+1} + \mathrm{i}b_{n+1} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(a_n + \mathrm{i}b_n\right) = \left(-\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2}\right) + \mathrm{i}\left(-\frac{b_n}{2} - \frac{a_n}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2} \\ b_{n+1} = -\dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}.$$

Document sous licence libre Creative Commons

2. a. On entre en B3 la formule = (C2-B2)/2 et en C3 la formule = -(B2+C2)/2.
   b. On entre en D2 la formule = RACINE(B2ˆ2+C2ˆ2).
   On obtient alors les résultats ci-dessous.

D2 =RACINE(B2^2+C2^2)

	A	B	C	D	E
1	n	a_n	b_n	u_n	
2	0	1	0	1	
3	1	-0,5	-0,5	0,7071068	
4	2	0	0,5	0,5	
5	3	0,25	-0,25	0,3535534	
6	4	-0,25	0	0,25	
7	5	0,125	0,125	0,1767767	
8	6	0	-0,125	0,125	
9	7	-0,0625	0,0625	0,0883883	
10	8	0,0625	0	0,0625	
11	9	-0,03125	-0,03125	0,0441942	
12	10	0	0,03125	0,03125	
13	11	0,015625	-0,015625	0,0220971	
14	12	-0,015625	0	0,015625	
15	13	0,0078125	0,0078125	0,0110485	
16	14	0	-0,007813	0,0078125	
17	15	-0,003906	0,0039063	0,0055243	
18	16	0,0039063	0	0,0039063	
19	17	-0,001953	-0,001953	0,0027621	
20	18	0	0,0019531	0,0019531	
21	19	0,0009766	-0,000977	0,0013811	
22	20	-0,000977	0	0,0009766	

   c. La suite (u_n) semble donc tendre vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. Lorsque $q = 2 + 2\mathrm{i}$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = (2 + 2\mathrm{i})\, z_n$ et donc

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2\,(a_n - b_n) \\ b_{n+1} = 2\,(a_n + b_n) \end{cases}.$$

On entre donc en B3 la formule = 2*(B2-C2) et en C3 la formule = 2*(B2+C2).

On obtient alors les résultats ci-dessous.

D2 =RACINE(B2^2+C2^2)

	A	B	C	D	E
1	n	a_n	b_n	u_n	
2	0	1	0	1	
3	1	2	2	2,8284271	
4	2	0	8	8	
5	3	-16	16	22,627417	
6	4	-64	0	64	
7	5	-128	-128	181,01934	
8	6	0	-512	512	
9	7	1024	-1024	1448,1547	
10	8	4096	0	4096	
11	9	8192	8192	11585,238	
12	10	0	32768	32768	
13	11	-65536	65536	92681,9	
14	12	-262144	0	262144	
15	13	-524288	-524288	741455,2	
16	14	0	-2097152	2097152	
17	15	4194304	-4194304	5931641,6	
18	16	16777216	0	16777216	
19	17	33554432	33554432	47453133	
20	18	0	134217728	134217728	
21	19	-2,68E+08	268435456	379625062	
22	20	-1,07E+09	0	1,074E+09	

Il semble alors que, dans ce cas, la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

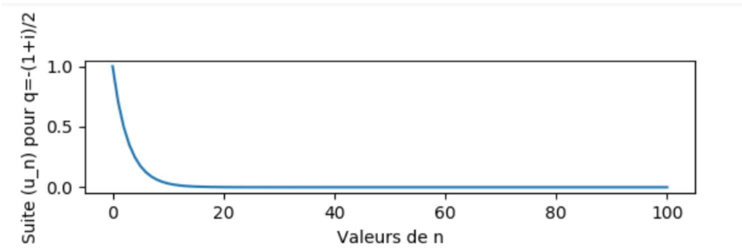
Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Méthode 2 : Python

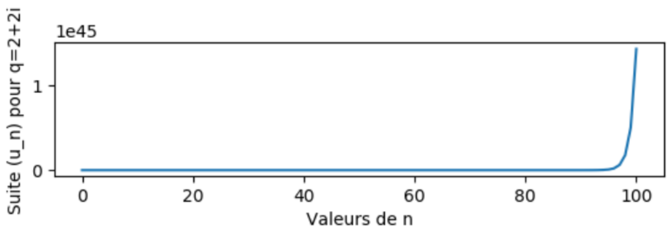
1. La commande Python complex(a,b) définit un nombre complexe de la forme $a+ib$.
2. La fonction z d'arguments n et q calcule z_n pour tout entier naturel n.
3. On peut, par exemple, écrire le programme Python ci-dessous.

```
# On calcule u_n
def U(z):
    a = z.real
    b = z.imag
    return(sqrt(a**2 + b**2))
```

4. On peut conjecturer que la suite (u_n) tend vers 0.



5. Pour $q = 2 + 2i$, on peut conjecturer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.



5.2 Corrigé du TP 2 : Racine carrée d'un nombre complexe

Questions préliminaires

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ solution de (E). Alors $(-z)^2 = z^2 = \alpha$ donc $-z$ est aussi solution de (E).

2. a. $z^2 = -9 \Leftrightarrow z^2 - (-9) = 0 \Leftrightarrow z^2 - (3\mathrm{i})^2 = 0 \Leftrightarrow (z - 3\mathrm{i})(z + 3\mathrm{i}) = 0 \Leftrightarrow z = 3\mathrm{i}$ ou $z = -3\mathrm{i}$. Ainsi $S_{\mathbb{C}} = \{-3\mathrm{i}; 3\mathrm{i}\}$.

   b. Soit a un réel strictement négatif. Alors $z^2 = a \Leftrightarrow z^2 = -|a| \Leftrightarrow z^2 - (-|a|) = 0 \Leftrightarrow z^2 - \left(\mathrm{i}\sqrt{|a|}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(z - \mathrm{i}\sqrt{|a|}\right)\left(z + \mathrm{i}\sqrt{|a|}\right) = 0 \Leftrightarrow z = \mathrm{i}\sqrt{|a|}$ ou $z = -\mathrm{i}\sqrt{|a|}$. Ainsi tout nombre réel a strictement négatif admet deux racines carrées imaginaires pures dans $\mathbb{C}$: $\mathrm{i}\sqrt{|a|}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{|a|}$.

3. a. $z^2 = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$ donc

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ xy = \dfrac{b}{2} \end{cases}.$$

   b. $z^2 = \alpha \Leftrightarrow \overline{(z^2)} = \overline{\alpha}$. Ainsi, $z^2 \times \overline{(z^2)} = \alpha \times \overline{\alpha} \Leftrightarrow z^2 \times (\overline{z})^2 = \alpha \times \overline{\alpha}$ par compatibilité de la conjugaison avec les puissances, et donc $(z \times \overline{z})^2 = \alpha \times \overline{\alpha}$. Or $(z \times \overline{z})^2 = [(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)]^2 = (x^2 + y^2)^2$ et $\alpha \times \overline{\alpha} = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2$. Donc $(z \times \overline{z})^2 = \alpha \times \overline{\alpha} \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ car $a^2 + b^2 > 0$.

   c. D'après les questions précédentes, on a

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a : (L_1) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} : (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (L_1 + L_2) : 2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2} \\ (L_2 - L_1) : 2y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} - a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} \end{cases}.$$

   d. D'après la question 3.a., on a $xy = \dfrac{b}{2}$. D'où :

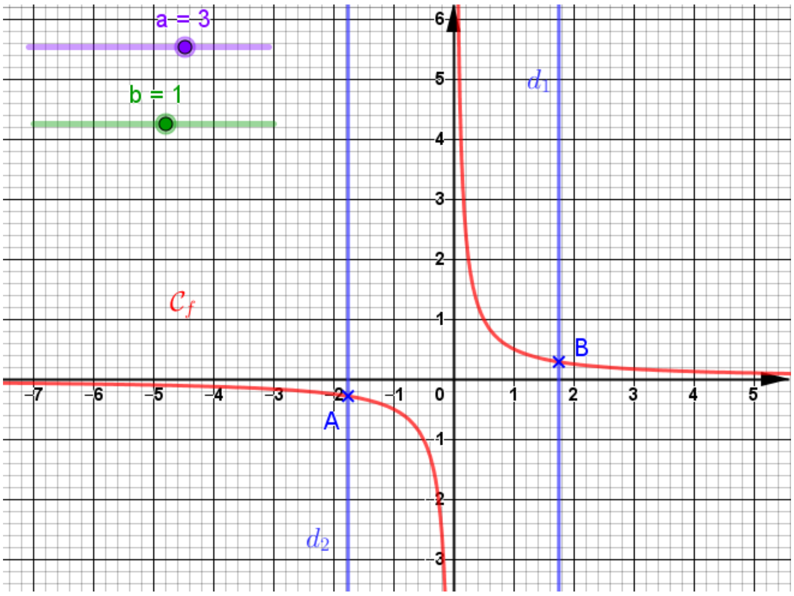
   - si $b > 0$, alors $xy > 0$ et donc x et y sont de même signe ;
   - si $b < 0$, alors $xy < 0$ et donc x et y sont de signes contraires.

Méthode 1 : Geogebra

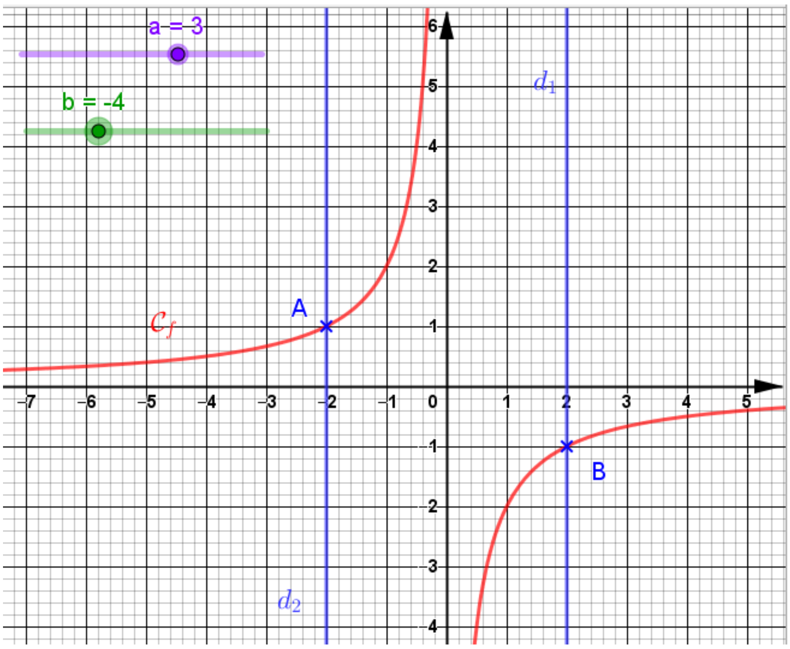
1. a.

   b.

   c. On obtient les courbes ci-dessous.



2. On positionne les curseurs de façon à ce que $a = 3$ et $b = -4$. On lit ensuite les coordonnées des points d'intersection entre chacune des droites d_1 et d_2 et la courbe de f.

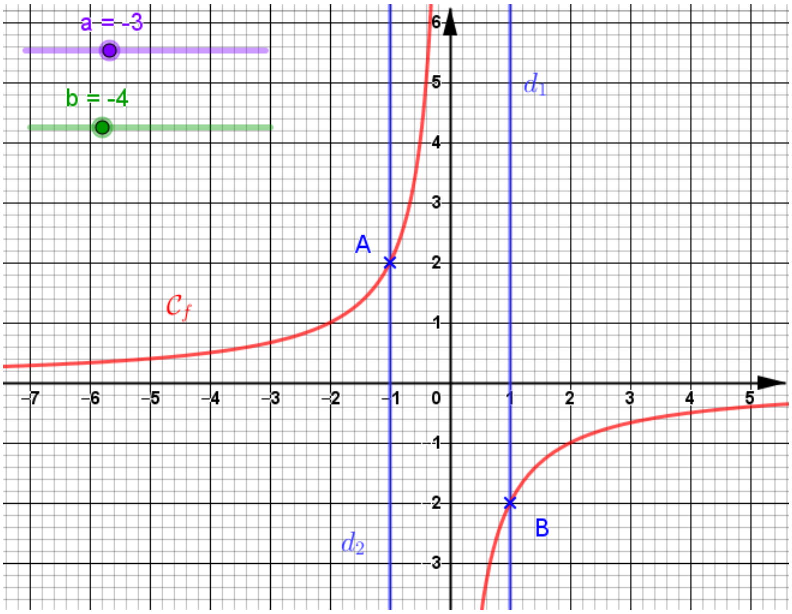


On lit $A(-2;1)$ et $B(2;-1)$.

Ainsi les racines carrées complexes de $\alpha = 3 - 4\text{i}$ sont $-2 + \text{i}$ et $2 - \text{i}$.

On positionne les curseurs de façon à ce que $a = -3$ et $b = -4$. On lit ensuite les coordonnées des points d'intersection entre chacune des droites d_1 et d_2 et la courbe de f.

Document sous licence libre Creative Commons



On lit $A(-1;2)$ et $B(1;-2)$.

Ainsi les racines carrées complexes de $\alpha = -3-4\text{i}$ sont $-1+2\text{i}$ et $1-2\text{i}$.

3. $z^2 = 3-4\text{i} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{3+\sqrt{3^2+(-4)^2}}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{3^2+(-4)^2}-3}{2} \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Ainsi $S_{\mathbb{C}} = \{2-\text{i}; -2+\text{i}\}$.

De même :

$z^2 = -3-4\text{i} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{-3+\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}+3}{2} \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ xy = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Ainsi, $S_{\mathbb{C}} = \{1-2\text{i}; -1+2\text{i}\}$.

Méthode 2 : Python

1. Le programme ci-dessous fonctionne, par exemple.

Document sous licence libre Creative Commons

```
from lycee import *
from numpy import*

a=float(input("Entrer la partie réelle de Z"))
b=float(input("Entrer la partie imaginaire de Z"))
Z=complex(a,b)


def RacineCarree(a,b):
    if b==0:
        if a>=0:
            print("La racine carrée réelle de",a,"est",sqrt(a))
        else:
            print("Les racines carrées complexes de",Z,"sont",complex(0,-sqrt(-a)),"et",complex(0,sqrt(-a)))
    else:
        X=(a+sqrt(a**2+b**2))/2
        x1=sqrt(X)
        y=b/(2*x1)
        print("Les racines carrées complexes de",Z,"sont",complex(x1,y),"et",-complex(x1,y))


z=RacineCarree(a,b)
```

2. a. On obtient les résultats suivants.

```
>>>
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
...module lycee actif....
Les racines carrées complexes de (3-4j) sont (2-1j) et (-2+1j)
>>>
```

Les racines carrées complexes du nombre $3-4\text{i}$ sont donc $2-\text{i}$ et $-2+\text{i}$.

b. On obtient les résultats suivants.

```
>>>
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
...module lycee actif....
Les racines carrées complexes de (-3-4j) sont (1-2j) et (-1+2j)
>>>
```

Les racines carrées complexes du nombre $-3-4\text{i}$ sont donc $1-2\text{i}$ et $-1+2\text{i}$.

6 Travailler les automatismes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 18 :

1. $\text{Re}(a) = 3$ et $\text{Im}(a) = 2$.
2. $b = -2\text{i} + 4 = 4 - 2\text{i}$ donc $\text{Re}(b) = 4$ et $\text{Im}(b) = -2$.
3. $c = \dfrac{3+5\text{i}}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}\text{i}$ donc $\text{Re}(c) = \dfrac{3}{2}$ et $\text{Im}(c) = \dfrac{5}{2}$.
4. $d = \dfrac{2\text{i}-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{2}{\sqrt{2}}\text{i} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\sqrt{2}$ donc $\text{Re}(d) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\text{Im}(d) = \sqrt{2}$.
5. $e = 4\text{i}$ donc $\text{Re}(e) = 0$ et $\text{Im}(e) = 4$.
6. $f = 0$ donc $\text{Re}(f) = 0 = \text{Im}(f)$.
7. $g = \text{i}^2 = -1$ donc $\text{Re}(g) = -1$ et $\text{Im}(g) = 0$.
8. $h = \text{i}^7 = \text{i}^4 \times \text{i}^3 = -\text{i}$ donc $\text{Re}(h) = 0$ et $\text{Im}(h) = -1$.

Corrigé exercice 19 :

1. z est un réel si, et seulement si, sa partie imaginaire est nulle, c'est-à-dire si, et seulement si, $2(a^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow a = -\sqrt{3}$ ou $a = \sqrt{3}$.
2. z est un imaginaire pur si, et seulement si, sa partie réelle est nulle, c'est-à-dire si, et seulement si, $a^2 + 1 = 0$. Or, comme $a \in \mathbb{R}$, $a^2 + 1 > 0$.

   Donc il n'existe pas de valeur de a telle que z soit un imaginaire pur.

Corrigé exercice 20 :

1. $Z_1 = (2 + 4\text{i})^2 = 4 - 16 + 2 \times 2 \times 4\text{i} = -12 + 16\text{i}$
2. $Z_2 = (3 - 2\text{i})^2 = 9 - 4 - 2 \times 3 \times 2\text{i} = 5 - 12\text{i}$
3. $Z_3 = (1 + \text{i})^3 = 1 + 3\text{i} + 3\text{i}^2 + \text{i}^3 = 1 + 3\text{i} - 3 - \text{i} = -2 + 2\text{i}$

Corrigé exercice 21 :

1. $\overline{A} = \overline{3 + 2\text{i}} = 3 - 2\text{i}$
2. $\overline{B} = \overline{\text{i}} = -\text{i}$
3. $\overline{C} = \overline{3\text{i} - 4} = \overline{-4 + 3\text{i}} = -4 - 3\text{i}$
4. $\overline{D} = \overline{-5 - 6\text{i}} = -5 + 6\text{i}$

Corrigé exercice 22 :

Soient a et b des réels.$\overline{(a + \text{i}b)^2} = \left(\overline{a + \text{i}b}\right)^2 = (a - \text{i}b)^2 = a^2 + b^2 - 2\text{i}ab$.
L'affirmation est donc vraie.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 23 :

On a $z_2 = \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{\overline{1+\mathrm{i}}}{\overline{1-\mathrm{i}}} = \overline{\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)} = \overline{z_1}$ donc $z_1 + z_2 = z_1 + \overline{z_1} = 2\mathrm{Re}(z_1) \in \mathbb{R}$.

Corrigé exercice 24 :

Les solutions de $z^2 - 4z + 5 = 0$ sont $2 - \mathrm{i}$ et $2 + \mathrm{i}$ car leur somme est égale à 4 et leur produit est égal à $(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i}) = 2^2 - \mathrm{i}^2 = 5$.

Corrigé exercice 25 :

On cherche un réel k tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(z-k)(z^2-4z+5) = z^3 - 12z^2 + 37z - 40$
$\Leftrightarrow z^3 - (4+k)z^2 + (5+4k)z - 5k = z^3 - 12z^2 + 37z - 40$.
On compare alors les coefficients de ces deux polynômes et on en déduit que :

$$\begin{cases} -(4+k) = -12 \\ 5+4k = 37 \\ -5k = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(4+8) = -12 \\ 5+4\times 8 = 37 \\ k = 8 \end{cases} \Leftrightarrow k = 8.$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-8)(z^2-4z+5)$. Donc 8 est une racine réelle de P.

6.2 Exercices

Corrigé exercice 26 :

1. $a = 2 + 2\mathrm{i} - 3 - 3\mathrm{i} = -1 - \mathrm{i}$
2. $b = 1 + \mathrm{i} - \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\mathrm{i}\right) = 1 + \mathrm{i} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}\mathrm{i} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$
3. $c = -2 + 3\mathrm{i} - (3 - 3\mathrm{i}) = -2 + 3\mathrm{i} - 3 + 3\mathrm{i} = -5 + 6\mathrm{i}$
4. $d = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i} - \left(-\dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right) = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i} + \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i} = 5 + 3\mathrm{i}$

Corrigé exercice 27 :

1. $a = -(1+\mathrm{i}) + 2\mathrm{i}\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\right) = -1 - \mathrm{i} - \mathrm{i} - 2 = -3 - 2\mathrm{i}$
2. $b = 2\mathrm{i}(1-\mathrm{i}) - 3\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) = 2\mathrm{i} + 2 - 3\mathrm{i} + 3 = 5 - \mathrm{i}$
3. $c = -\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 2\mathrm{i}\sqrt{2}\right) - \sqrt{3}\left(\mathrm{i}\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right) = -2 + 4\mathrm{i} - 3\mathrm{i} + 6 = 4 + \mathrm{i}$
4. $d = \mathrm{i}\sqrt{2}\left(2\sqrt{2} - \mathrm{i}\right) + 2\mathrm{i}\sqrt{3}\left(\mathrm{i} - \sqrt{3}\right) = 4\mathrm{i} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 6\mathrm{i} = \sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 28 :

1. $a = (2 + \mathrm{i})(1 + 3\mathrm{i}) = 2 - 3 + 6\mathrm{i} + \mathrm{i} = -1 + 7\mathrm{i}$
2. $b = \left(\frac{3}{2} - 2\mathrm{i}\right)\left(2 + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right) = 3 + 3 + \frac{9}{4}\mathrm{i} - 4\mathrm{i} = 6 - \frac{7}{4}\mathrm{i}$
3. $c = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)(1 + 2\mathrm{i}) = -\frac{1}{2} + 1 - \mathrm{i} - \frac{1}{2}\mathrm{i} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}$
4. $d = \left(-\frac{2}{3} - \mathrm{i}\right)(3 - 4\mathrm{i}) = -2 - 4 + \frac{8}{3}\mathrm{i} - 3\mathrm{i} = -6 - \frac{1}{3}\mathrm{i}$

Corrigé exercice 29 :

1. $a = (3 + 5\mathrm{i})^2 = 9 - 25 + 30\mathrm{i} = -16 + 30\mathrm{i}$
2. $b = \left(3\mathrm{i} - \frac{1}{3}\right)^2 = -9 + \frac{1}{9} - 2\mathrm{i} = -\frac{80}{9} - 2\mathrm{i}$
3. $c = (2 + 3\mathrm{i})(2 - 3\mathrm{i}) = 4 + 9 = 13$
4. $d = \left(\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{3}\right) = 2 + 3 = 5$

Corrigé exercice 30 :

1. $a = (2 + \mathrm{i})^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 \times \mathrm{i} + 3 \times 2 \times \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 = 8 + 12\mathrm{i} - 6 - \mathrm{i} = 2 + 11\mathrm{i}$
2. $b = (1 - 2\mathrm{i})^4 = 1^4 - 4 \times 2\mathrm{i} + 6 \times (2\mathrm{i})^2 - 4 \times (2\mathrm{i})^3 + (2\mathrm{i})^4 = 1 - 8\mathrm{i} - 24 + 32\mathrm{i} + 16 = -7 + 24\mathrm{i}$
3. $c = (1 - \mathrm{i})^5 = 1 - 5\mathrm{i} + 10\mathrm{i}^2 - 10\mathrm{i}^3 + 5\mathrm{i}^4 - \mathrm{i}^5 = 1 - 5\mathrm{i} - 10 + 10\mathrm{i} + 5 - \mathrm{i} = -4 + 4\mathrm{i}$
4. $d = \left(\overline{1 - \mathrm{i}}\right)^5 = \overline{(1 - \mathrm{i})^5} = \overline{c} = \overline{-4 + 4\mathrm{i}} = -4 - 4\mathrm{i}$

Corrigé exercice 31 :

z_1 et z_2 sont égaux si, et seulement si, leur partie réelle et leur partie imaginaire sont égales.

On cherche donc les réels a et b tels que $\begin{cases} a^2 + a = 3a^2 - 3 \\ b^2 + 1 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - a - 3 = 0 \\ b^2 - 2b + 1 = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - a - 3 = 0 \\ (b - 1)^2 = 0 \end{cases}$. Or le discriminant du polynôme $2a^2 - a - 3$ est égal à $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles $a_1 = -1$ et $a_2 = \frac{3}{2}$. Ainsi $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 1 \end{cases}$.

On obtient alors $z_1 = z_2 = 2\mathrm{i}$ ou $z_1 = z_2 = \frac{15}{4} + 2\mathrm{i}$.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 32 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $z_1 + z_2 = 3x - 3 + \mathrm{i}\,(x^2+1) + x^2 - x + \mathrm{i}\,(x^2-1) = x^2 + 2x - 3 + 2\mathrm{i}x^2$.

1. $z_1 + z_2 \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -3$.
   En effet, si $x = 1$, alors $z_1 + z_2 = 2\mathrm{i} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ et si $x = -3$, alors $z_1 + z_2 = 18\mathrm{i} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.
2. $z_1 + z_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. En effet, si $x = 0$ alors $z_1 + z_2 = -3 \in \mathbb{R}$.

Corrigé exercice 33 :

1. $3z - 2\mathrm{i} + 4 = \mathrm{i} - 2z \Leftrightarrow 5z = -4 + 3\mathrm{i} \Leftrightarrow z = -\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}\mathrm{i}$
2. $3\mathrm{i} - 2z + 1 = \mathrm{i}(\mathrm{i}z + 4) - 2 \Leftrightarrow 3\mathrm{i} - 2z + 1 = -z + 4\mathrm{i} - 2 \Leftrightarrow z = 3 - \mathrm{i}$
3. $3(z + \mathrm{i}) - 2z = \mathrm{i} + z \Leftrightarrow 3z + 3\mathrm{i} - 2z = \mathrm{i} + z \Leftrightarrow 0 = -2\mathrm{i}$ ce qui est impossible donc cette équation n'admet aucune solution.
4. $(1 + 5\mathrm{i})\overline{z} - 2 = 2 + \mathrm{i}\overline{z} + \overline{z} \Leftrightarrow 4\mathrm{i}\overline{z} = 4 \Leftrightarrow \overline{z} = -\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \mathrm{i}$.

Corrigé exercice 34 :

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.

1. $2z - 3\mathrm{i}\overline{z} = -5 - \mathrm{i} \Leftrightarrow 2(x + \mathrm{i}y) - 3\mathrm{i}(x - \mathrm{i}y) = -5 - \mathrm{i} \Leftrightarrow (2x - 3y) + \mathrm{i}(2y - 3x) = -5 - \mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 2y - 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{13}{5} \\ y = \dfrac{17}{5} \end{cases}$ donc $S = \left\{\dfrac{13}{5} + \mathrm{i}\dfrac{17}{5}\right\}$.
2. $\mathrm{i}z + \overline{z} - 3 = 7 - \overline{z} + 5\mathrm{i} \Leftrightarrow \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + x - \mathrm{i}y - 3 = x + \mathrm{i}y - x + \mathrm{i}y + 5\mathrm{i} \Leftrightarrow x - y - 3 + \mathrm{i}(x - y) = \mathrm{i}(2y - 5) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x - y = 2y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ donc $S = \{2 - \mathrm{i}\}$.
3. $2z - \mathrm{i}\overline{z} = \mathrm{i}(3 + z) + \overline{z} \Leftrightarrow 2(x + \mathrm{i}y) - \mathrm{i}(x - \mathrm{i}y) = \mathrm{i}(3 + x + \mathrm{i}y) + x - \mathrm{i}y \Leftrightarrow 2x + 2\mathrm{i}y - \mathrm{i}x - y = 3\mathrm{i} + \mathrm{i}x - y + x - \mathrm{i}y \Leftrightarrow 2x - y + \mathrm{i}(2y - x) = x - y + \mathrm{i}(x - y + 3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = x - y \\ 2y - x = x - y + 3 \end{cases}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ donc $S = \{\mathrm{i}\}$.
4. $2\mathrm{i}(z + 1) + 3\overline{z} + 1 = 3z - \mathrm{i}\left(\overline{z} + \dfrac{5}{2}\right) \Leftrightarrow 2\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y + 1) + 3(x - \mathrm{i}y) + 1 = 3(x + \mathrm{i}y) - \mathrm{i}\left(x - \mathrm{i}y + \dfrac{5}{2}\right) \Leftrightarrow 2\mathrm{i}x - 2y + 2\mathrm{i} + 3x - 3\mathrm{i}y + 1 = 3x + 3\mathrm{i}y - \mathrm{i}x - y - \dfrac{5}{2}\mathrm{i} \Leftrightarrow$
   $\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 3x - y \\ 2x - 3y + 2 = -x + 3y - \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$ donc $S = \left\{\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\right\}$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 35 :

1. $a = \dfrac{1}{3+2\mathrm{i}} = \dfrac{3-2\mathrm{i}}{3^2+2^2} = \dfrac{3}{13} - \dfrac{2}{13}\mathrm{i}$
2. $b = \dfrac{4}{-2-\mathrm{i}} = \dfrac{4\,(-2+\mathrm{i})}{(-2)^2+(-1)^2} = -\dfrac{8}{5} + \dfrac{4}{5}\mathrm{i}$
3. $c = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = 1$
4. $d = \dfrac{6+4\mathrm{i}}{-5-3\mathrm{i}} = \dfrac{(6+4\mathrm{i})\,(-5+3\mathrm{i})}{(-5)^2+(-3)^2} = \dfrac{-30-12+\mathrm{i}(18-20)}{34} = -\dfrac{21}{17} - \dfrac{1}{17}\mathrm{i}$

Corrigé exercice 36 :

1. $3z - \mathrm{i} = \mathrm{i}z - 2 \Leftrightarrow (3-\mathrm{i})z = \mathrm{i} - 2 \Leftrightarrow z = \dfrac{-2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{(-2+\mathrm{i})\,(3+\mathrm{i})}{3^2+(-1)^2}$
   $\Leftrightarrow z = \dfrac{-6-1+\mathrm{i}(-2+3)}{10} \Leftrightarrow z = -\dfrac{7}{10} + \dfrac{1}{10}\mathrm{i}$
2. $2(1+z) - \mathrm{i} = (1+\mathrm{i})z \Leftrightarrow 2 + 2z - (1+\mathrm{i})z = \mathrm{i} \Leftrightarrow (1-\mathrm{i})z = \mathrm{i} - 2 \Leftrightarrow z = \dfrac{-2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$
   $\Leftrightarrow z = \dfrac{(-2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{1^2+(-1)^2} \Leftrightarrow z = \dfrac{-2-1+\mathrm{i}(-2+1)}{2} \Leftrightarrow z = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$
3. $(1+\mathrm{i})z = 2 - \mathrm{i}z \Leftrightarrow (1+2\mathrm{i})z = 2 \Leftrightarrow z = \dfrac{2}{1+2\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{2(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2} \Leftrightarrow z = \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5}\mathrm{i}$
4. $z(1+2\mathrm{i}) + 3 = 3(\mathrm{i}z - 1) \Leftrightarrow z + 2\mathrm{i}z + 3 = 3\mathrm{i}z - 3 \Leftrightarrow (1-\mathrm{i})z = -6 \Leftrightarrow z = -\dfrac{6}{1-\mathrm{i}} \Leftrightarrow$
   $z = -\dfrac{6(1+\mathrm{i})}{1^2+(-1)^2} \Leftrightarrow z = -3 - 3\mathrm{i}$

Corrigé exercice 37 :

1. $\overline{z} = \overline{\mathrm{i}(2+2\mathrm{i}) - 3\mathrm{i}(1+2\mathrm{i})} = \overline{4-\mathrm{i}} = 4 + \mathrm{i}$
2. $\overline{z} = \overline{-2\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}(2-4\mathrm{i})} = \overline{8+\mathrm{i}} = 8 - \mathrm{i}$
3. $\overline{z} = \overline{(2+\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})} = (2-\mathrm{i})(1-3\mathrm{i}) = 2 - 3 + \mathrm{i}(-6-1) = -1 - 7\mathrm{i}$
4. $\overline{z} = \overline{(2\mathrm{i}-3)(3+\mathrm{i})} = (-2\mathrm{i}-3)(3-\mathrm{i}) = -2 - 9 + \mathrm{i}(-6+3) = -11 - 3\mathrm{i}$

Corrigé exercice 38 :

1. $\overline{z} = \overline{(1+\mathrm{i})^2} = (1-\mathrm{i})^2 = 1 - 1 - 2\mathrm{i} = -2\mathrm{i}$
2. $\overline{z} = \overline{(2+\mathrm{i})^3} = (2-\mathrm{i})^3 = 2^3 - 3\times 2^2 \times \mathrm{i} + 3 \times 2 \times \mathrm{i}^2 - \mathrm{i}^3 = 8 - 12\mathrm{i} - 6 + \mathrm{i} = 2 - 11\mathrm{i}$
3. $\overline{z} = \overline{(1-\mathrm{i})^4} = (1+\mathrm{i})^4 = 1 + 4\mathrm{i} + 6\mathrm{i}^2 + 4\mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^4 = 1 + 4\mathrm{i} - 6 - 4\mathrm{i} + 1 = -4$
4. $\overline{z} = \overline{(3+2\mathrm{i})^3} = (3-2\mathrm{i})^3 = 3^3 - 3\times 3^2 \times 2\mathrm{i} + 3 \times 3 \times (2\mathrm{i})^2 - (2\mathrm{i})^3 = -9 - 46\mathrm{i}.$

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 39 :

1. $\overline{z} = \overline{\left(\dfrac{1}{\mathrm{i}}\right)} = \overline{-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$
2. $\overline{z} = \overline{\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}\right)} = \dfrac{1}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1^2+(-1)^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$
3. $\overline{z} = \overline{\left(\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right)} = \dfrac{2-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = \dfrac{(2-\mathrm{i})\,(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2} = \dfrac{2-2+\mathrm{i}(-4-1)}{5} = -\mathrm{i}$
4. $\overline{z} = \overline{\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-1}\right)} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}-1} = \dfrac{(1+\mathrm{i})(2\mathrm{i}-1)}{(-1)^2+(-2)^2} = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}\mathrm{i}$
5. $\overline{z} = \overline{\left(\dfrac{3+2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-3}\right)} = \dfrac{3-2\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}-3} = \dfrac{(3-2\mathrm{i})\,(2\mathrm{i}-3)}{(-3)^2+(-2)^2} = \dfrac{-9+4+\mathrm{i}(6+6)}{13} = -\dfrac{5}{13} + \dfrac{12}{13}\mathrm{i}$
6. $\overline{z} = \overline{\left(\dfrac{-1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}\right)} = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \dfrac{(-1+\mathrm{i})\,(2+\mathrm{i})}{2^2+(-1)^2} = \dfrac{-2-1+\mathrm{i}(-1+2)}{5} = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}\mathrm{i}$

Corrigé exercice 40 :

L'affirmation est fausse. On peut par exemple prendre comme contre-exemple $z = \mathrm{i}$. On a alors, d'un côté, $\overline{2+\mathrm{i}\times\mathrm{i}} = 1$ et, de l'autre, $2-\mathrm{i}\times\mathrm{i} = 3$. D'où $\overline{2+\mathrm{i}\times\mathrm{i}} \neq 2-\mathrm{i}\times\mathrm{i}$.

Corrigé exercice 41 :

$\dfrac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} - \dfrac{2-\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} = \dfrac{2\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} = \dfrac{2\mathrm{i}(3+\mathrm{i})}{3^2+(-1)^2} = \dfrac{-2+6\mathrm{i}}{10} = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}\mathrm{i} \notin \mathrm{i}\mathbb{R}$. L'affirmation est donc fausse.

Corrigé exercice 42 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(4+2\mathrm{i})^n + (4-2\mathrm{i})^n = (4+2\mathrm{i})^n + (\overline{4+2\mathrm{i}})^n = (4+2\mathrm{i})^n + \overline{(4+2\mathrm{i})^n}$ $= \mathrm{Re}\left((4+2\mathrm{i})^n\right) \in \mathbb{R}$. Donc l'affirmation est vraie.

Corrigé exercice 43 :

1. $z^2-2z+5=0$ admet pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times5 = -16 = (4\mathrm{i})^2 < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{2+4\mathrm{i}}{2} = 1+2\mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1-2\mathrm{i}$.
2. $z^2-4z+13=0$ admet pour discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4\times1\times13 = -36 = (6\mathrm{i})^2 < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{4+6\mathrm{i}}{2} = 2+3\mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2-3\mathrm{i}$.
3. $4z^2+4z+5=0$ admet pour discriminant $\Delta = 4^2-4\times4\times5 = -64 = (8\mathrm{i})^2 < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-4+8\mathrm{i}}{8} = -\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = -\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}$.

Document sous licence libre Creative Commons

4. $2z^2+6z+5=0$ admet pour discriminant $\Delta=6^2-4\times2\times5=-4=(2\mathrm{i})^2<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{-6+2\mathrm{i}}{4}=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et $z_2=\overline{z_1}=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

Corrigé exercice 44 :

1. $z^2+z=3z-3 \Leftrightarrow z^2-2z+3=0$ admet pour discriminant $\Delta=(-2)^2-4\times1\times3=-8=\left(2\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{2+2\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}=1+\mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_2=\overline{z_1}=1-\mathrm{i}\sqrt{2}$.
2. $(z+1)^2-2z=0 \Leftrightarrow z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2=-1$ admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\mathrm{i}$ et $z_2=\overline{z_1}=-\mathrm{i}$.
3. $z+6=-\dfrac{13}{z}$ est définie si, et seulement si, $z\neq0$.

   Par ailleurs, pour $z\neq0$, $z+6=-\dfrac{13}{z} \Leftrightarrow z^2+6z+13=0$. On calcule alors le discriminant $\Delta=6^2-4\times1\times13=-16=(4\mathrm{i})^2<0$. Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{-6+4\mathrm{i}}{2}=-3+2\mathrm{i}$ et $z_2=\overline{z_1}=-3-2\mathrm{i}$.
4. $z=1-\dfrac{1}{z}$ est définie si, et seulement si, $z\neq0$.

   Par ailleurs, pour $z\neq0$, $z=1-\dfrac{1}{z} \Leftrightarrow z^2-z+1=0$ qui admet pour discriminant $\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=-3=\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2<0$. Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\overline{z_1}=\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Corrigé exercice 45 :

1. $z^3-1=z^3-1^3=(z-1)(z^2+z+1)=(z-1)\left(z+\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ car z^2+z+1 a pour discriminant $\Delta=1^2-4\times1\times1=-3=\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2<0$ et admet donc deux racines complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\overline{z_1}=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $z^3+27=z^3-(-3)^3=(z-(-3))\left(z^2+(-3)z+(-3)^2\right)=(z+3)(z^2-3z+9)=(z+3)\left(z-\dfrac{3}{2}+\mathrm{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\dfrac{3}{2}-\mathrm{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ car z^2-3z+9 admet pour discriminant $\Delta=(-3)^2-4\times1\times9=-27=\left(3\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2<0$ et admet donc deux racines complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{3-3\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{3}{2}-\mathrm{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\overline{z_1}=\dfrac{3}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Document sous licence libre Creative Commons

3. $z^4 - 16 = z^4 - 2^4 = (z^2)^2 - (2^2)^2 = (z^2 - 2^2)(z^2 + 2^2) = (z-2)(z+2)(z^2+4)$ $= (z-2)(z+2)(z-2\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})$.

4. $z^5 - \mathrm{i} = z^5 - \mathrm{i}^5 = (z-\mathrm{i})(z^4 + \mathrm{i}z^3 + \mathrm{i}^2z^2 + \mathrm{i}^3z + \mathrm{i}^4) = (z-\mathrm{i})(z^4 + \mathrm{i}z^3 - z^2 - \mathrm{i}z + 1)$.

Corrigé exercice 46 :

P se factorise par $(z - \mathrm{i})$ si, et seulement si, i est une racine de P.
Or $P(\mathrm{i}) = \mathrm{i}^4 + \mathrm{i}^3 + 2\mathrm{i}^2 + \mathrm{i} + 1 = 1 - \mathrm{i} - 2 + \mathrm{i} + 1 = 0$ donc i est une racine de P. Ainsi, P se factorise bien par $(z - \mathrm{i})$.

Corrigé exercice 47 :

$P(-2) = (-2)^3 + 4 \times (-2)^2 + 6 \times (-2) + 4 = -8 + 16 - 12 + 4 = 0$ donc -2 est une racine de P et P se factorise par $(z+2)$.
On cherche maintenant les réels a, b et c tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z+2)(az^2 + bz + c)$

$$\Leftrightarrow az^3 + (b+2a)z^2 + (c+2b)z + 2c = z^3 + 4z^2 + 6z + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = 4 \\ c + 2b = 6 \\ 2c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z+2)(z^2 + 2z + 2)$.
Or le discriminant de z^2+2z+2 vaut $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 = (2\mathrm{i})^2 < 0$ donc z^2+2z+2 admet deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-2-2\mathrm{i}}{2} = -1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = -1 + \mathrm{i}$.
En conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z+2)(z+1+\mathrm{i})(z+1-\mathrm{i})$.

Corrigé exercice 48 :

$P(1) = 2 - 14 + 38 - 26 = 0$ donc 1 est une racine de P et P se factorise donc par $(z-1)$.
On cherche maintenant les réels a, b et c tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$

$$\Leftrightarrow az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c = 2z^3 - 14z^2 + 38z - 26 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - a = -14 \\ c - b = 38 \\ -c = -26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -12 \\ c = 26 \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-1)(2z^2 - 12z + 26) = 2(z-1)(z^2 - 6z + 13)$.
Soit Δ le discriminant du trinôme. Alors $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -16 = (4\mathrm{i})^2 < 0$ donc $z^2 - 6z + 13$ admet deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{6-4\mathrm{i}}{2} = 3 - 2\mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 3 + 2\mathrm{i}$.
En conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 2(z-1)(z-3+2\mathrm{i})(z-3-2\mathrm{i})$.

Corrigé exercice 49 :

$P(-1) = 1 + 2 + 1 - 2 - 2 = 0$ donc -1 est une racine de P. Ainsi, P se factorise par $(z+1)$. On cherche maintenant les réels a, b, c et d tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z+1)(az^3 + bz^2 + cz + d)$

$\Leftrightarrow az^4 + (b+a)z^3 + (c+b)z^2 + (d+c)z + d = z^4 - 2z^3 + z^2 + 2z - 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + a = -2 \\ c + b = 1 \\ d + c = 2 \\ d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 4 \\ d = -2 \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z+1)(z^3 - 3z^2 + 4z - 2)$.
On remarque que 1 est une racine évidente de $z^3 - 3z^2 + 4z - 2$ car $1 - 3 + 4 - 2 = 0$.
On en déduit que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = (z-1)(az^2 + bz + c)$ avec a, b et c réels $\Leftrightarrow az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - a = -3 \\ c - b = 4 \\ -c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z+1)(z-1)(z^2 - 2z + 2)$.
Soit Δ le discriminant du trinôme $z^2 - 2z + 2$. Alors $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 = (2\mathrm{i})^2 < 0$ donc $z^2 - 2z + 2$ admet deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{2 - 2\mathrm{i}}{2} = 1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 + \mathrm{i}$.
En conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z+1)(z-1)(z-1+\mathrm{i})(z-1-\mathrm{i})$.

Corrigé exercice 50 :

$P(\mathrm{i}) = \mathrm{i}^4 - \mathrm{i}^3 - 5\mathrm{i}^2 - \mathrm{i} - 6 = 1 + \mathrm{i} + 5 - \mathrm{i} - 6 = 0$ donc i est une racine de P. Ainsi P se factorise par $(z - \mathrm{i})$. On cherche maintenant les nombres complexes a, b, c et d tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - \mathrm{i})(az^3 + bz^2 + cz + d)$
$\Leftrightarrow az^4 + (b - \mathrm{i}a)z^3 + (c - \mathrm{i}b)z^2 + (d - \mathrm{i}c)z - \mathrm{i}d = z^4 - z^3 - 5z^2 - z - 6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - \mathrm{i}a = -1 \\ c - \mathrm{i}b = -5 \\ d - \mathrm{i}c = -1 \\ -\mathrm{i}d = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 + \mathrm{i} \\ c = -6 - \mathrm{i} \\ d = -6\mathrm{i} \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - \mathrm{i})(z^3 + (\mathrm{i} - 1)z^2 - (6 + \mathrm{i})z - 6\mathrm{i})$.
On remarque que $-\mathrm{i}$ est une racine de $z^3 + (\mathrm{i}-1)z^2 - (6+\mathrm{i})z - 6\mathrm{i}$ car $(-\mathrm{i})^3 + (\mathrm{i}-1)(-\mathrm{i})^2 - (6+\mathrm{i})(-\mathrm{i}) - 6\mathrm{i} = \mathrm{i} - \mathrm{i} + 1 + 6\mathrm{i} - 1 - 6\mathrm{i} = 0$.
On en déduit que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^3 + (\mathrm{i}-1)z^2 - (6+\mathrm{i})z - 6\mathrm{i} = (z + \mathrm{i})(az^2 + bz + c)$ avec a, b et c nombres complexes. Ainsi,
$az^3 + (b + \mathrm{i}a)z^2 + (c + \mathrm{i}b)z + \mathrm{i}c = z^3 + (\mathrm{i} - 1)z^2 - (6 + \mathrm{i})z - 6\mathrm{i}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + \mathrm{i}a = \mathrm{i} - 1 \\ c + \mathrm{i}b = -(6 + \mathrm{i}) \\ \mathrm{i}c = -6\mathrm{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -6 \end{cases}.$$

D'où, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})(z^2 - z - 6)$. Soit enfin Δ le discriminant du trinôme $z^2 - z - 6$. Alors $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$ donc $z^2 - 2z + 2$ admet

Document sous licence libre Creative Commons

deux racines réelles distinctes :$z_1 = \dfrac{1-5}{2} = -2$ et $z_2 = \dfrac{1+5}{2} = 3$.
En conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})(z+2)(z-3)$.

Corrigé exercice 51 :

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $z_1 + z_2 = S$ et $z_1 \times z_2 = P$. Alors z_1 et z_2 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - Sz + P = 0$.

1. z_1 et z_2 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -9 \Leftrightarrow z = -3\mathrm{i}$ ou $z = 3\mathrm{i}$. Ainsi $z_1 = -3\mathrm{i}$ et $z_2 = 3\mathrm{i}$, ou $z_1 = 3\mathrm{i}$ et $z_2 = -3\mathrm{i}$.

2. z_1 et z_2 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 25z + 26 = 0$ de discriminant $\Delta = (-25)^2 - 4 \times 1 \times 26 = 521 > 0$. Donc $z^2 - 25z + 26 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes : $z_1 = \dfrac{25-\sqrt{521}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{25+\sqrt{521}}{2}$.
   Ainsi, $z_1 = \dfrac{25-\sqrt{521}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{25+\sqrt{521}}{2}$ ou $z_1 = \dfrac{25+\sqrt{521}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{25-\sqrt{521}}{2}$.

3. z_1 et z_2 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - z + \dfrac{13}{2} = 0 \Leftrightarrow 2z^2 - 2z + 13 = 0$ de discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 13 = -100 = (10\mathrm{i})^2 < 0$. Donc $2z^2 - 2z + 13 = 0$ a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{2-10\mathrm{i}}{4} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}\mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\mathrm{i}$.
   Ainsi, $z_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}\mathrm{i}$ et $z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\mathrm{i}$ ou $z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\mathrm{i}$ et $z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}\mathrm{i}$.

4. z_1 et z_2 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 2\sqrt{2}z + 3 = 0$ de discriminant $\Delta = \left(-2\sqrt{2}\right)^2 - 4 \times 2 \times 3 = -4 = (2\mathrm{i})^2 < 0$. Donc $z^2 - 2\sqrt{2}z + 3 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{2\sqrt{2}-2\mathrm{i}}{2} = \sqrt{2} - \mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{2} + \mathrm{i}$. Ainsi, $z_1 = \sqrt{2} - \mathrm{i}$ et $z_2 = \sqrt{2} + \mathrm{i}$ ou $z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}$ et $z_2 = \sqrt{2} - \mathrm{i}$.

5. z_1 et z_2 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - \dfrac{5}{3}z - \dfrac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow 3z^2 - 5z - 2 = 0$ de discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 49 > 0$. Donc $3z^2 - 5z - 2 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes : $z_1 = \dfrac{5-7}{6} = -\dfrac{1}{3}$ et $z_2 = \dfrac{5+7}{6} = 2$.
   Ainsi, $z_1 = -\dfrac{1}{3}$ et $z_2 = 2$ ou $z_1 = 2$ et $z_2 = -\dfrac{1}{3}$.

6. z_1 et z_2 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow z = -\mathrm{i}$ ou $z = \mathrm{i}$. Ainsi, $z_1 = -\mathrm{i}$ et $z_2 = \mathrm{i}$ ou $z_1 = \mathrm{i}$ et $z_2 = -\mathrm{i}$.

Document sous licence libre Creative Commons

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 52 :

1. $\mathrm{Re}(z_1) = 2$ et $\mathrm{Im}(z_1) = 0$.
2. $\mathrm{Re}(z_2) = 0$ et $\mathrm{Im}(z_2) = -3$.
3. $\mathrm{Re}(z_3) = -3$ et $\mathrm{Im}(z_3) = 1$ car $z_3 = -3 + \mathrm{i}$.
4. $z_4 = z_1 + z_3 = 2 - 3 + \mathrm{i} = -1 + \mathrm{i}$ donc $\mathrm{Re}(z_4) = -1$ et $\mathrm{Im}(z_4) = 1$.
5. $z_5 = z_2 \times z_3 = -3\mathrm{i}(-3 + \mathrm{i}) = 9\mathrm{i} + 3 = 3 + 9\mathrm{i}$ donc $\mathrm{Re}(z_5) = 3$ et $\mathrm{Im}(z_5) = 9$.

Corrigé exercice 53 :

1. $a + 3\mathrm{i} = 2 + \mathrm{i}(1 - b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 3 = 1 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$.
2. $2 + a + \mathrm{i}(b^2 + b) = \mathrm{i}(2b - \mathrm{i}a^2) + 3a + 3 \Leftrightarrow 2 + a + \mathrm{i}(b^2 + b) = a^2 + 3a + 3 + 2\mathrm{i}b \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 2 + a = a^2 + 3a + 3 \\ b^2 + b = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a + 1 = 0 \\ b^2 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 = 0 \\ b(b-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$
ou $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$.

Corrigé exercice 54 :

1. $z_1 = 3 - 2\mathrm{i} - 3 - 2\mathrm{i} = -4\mathrm{i}$
2. $z_2 = -2 + 2\mathrm{i} - 2 - \mathrm{i} = \mathrm{i}$
3. $z_3 = 3 - 2 + \mathrm{i}(2 + 3) = 1 + 5\mathrm{i}$
4. $z_4 = 1^3 - 3\mathrm{i} + 3\mathrm{i}^2 - \mathrm{i}^3 = 1 - 3\mathrm{i} - 3 + \mathrm{i} = -2 - 2\mathrm{i}$
5. $z_5 = 1^5 - 5\mathrm{i} + 10\mathrm{i}^2 - 10\mathrm{i}^3 + 5\mathrm{i}^4 - \mathrm{i}^5 = 1 - 5\mathrm{i} - 10 + 10\mathrm{i} + 5 - \mathrm{i} = -4 + 4\mathrm{i}$

Corrigé exercice 55 :

1. $z = 1 - 2\mathrm{i}$
2. $z = -4$
3. $z = -1 + \frac{3}{2}\mathrm{i} + \frac{1}{2}\mathrm{i} + 2 = 1 + 2\mathrm{i}$
4. $z = 3 - \frac{2}{3}\mathrm{i} - 2 - \frac{1}{3}\mathrm{i} = 1 - \mathrm{i}$

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 56 :

1. $z = -3 + 2\text{i} + 2 - 5\text{i} = -1 - 3\text{i}$
2. $z = \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2}\text{i} - \text{i} = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\text{i}$
3. $z = -2 + \frac{1}{4}\text{i} + \frac{1}{3}\text{i} - 1 = -3 + \frac{7}{12}\text{i}$
4. $z = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\text{i} - \frac{2}{3}\text{i} = \frac{7}{12} + \frac{1}{12}\text{i}$

Corrigé exercice 57 :

1. $z = -2 + \text{i}\sqrt{3}$
2. $z = 2\sqrt{2} + 2\text{i}\sqrt{3} - 3\text{i}\sqrt{3} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} - \text{i}\sqrt{3}$
3. $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}\text{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} - \text{i}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\text{i}$
4. $z = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\text{i}\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}\text{i}$

Corrigé exercice 58 :

1. $z = 2 - 6\text{i} - 3 + 6\text{i} = -1$
2. $z = -2 - 2\text{i} + 6 - 3\text{i} = 4 - 5\text{i}$
3. $z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\text{i} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\text{i} = \frac{11}{6} - \frac{5}{6}\text{i}$
4. $z = -\frac{3}{2}\text{i} - \frac{3}{2} - \text{i} - 2 = -\frac{7}{2} - \frac{5}{2}\text{i}$

Corrigé exercice 59 :

1. $z = 3 - 4 + \text{i}(12 + 1) = -1 + 13\text{i}$
2. $z = -2 - 6 + \text{i}(4 - 3) = -8 + \text{i}$
3. $z = 10 - 2 + \text{i}(-10 - 2) = 8 - 12\text{i}$
4. $z = -\frac{9}{4} + \frac{2}{9} + \text{i}\left(-1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{73}{36} - \frac{3}{2}\text{i}$

Corrigé exercice 60 :

1. $z = \left(3 + \text{i}\sqrt{3}\right)\left(2\text{i}\sqrt{3} + 5\right) = 15 - 6 + \text{i}\left(6\sqrt{3} + 5\sqrt{3}\right) = 9 + 11\text{i}\sqrt{3}$
2. $z = \left(2\sqrt{2} + \text{i}\sqrt{3}\right)\left(3\text{i}\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = -4 - 9 + \text{i}\left(6\sqrt{6} - \sqrt{6}\right) = -13 + 5\text{i}\sqrt{6}$
3. $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} + \text{i}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} + \text{i}\frac{2 - \sqrt{2}}{4}$

Document sous licence libre Creative Commons

4. $z = \left(2\sqrt{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{6} - \dfrac{\sqrt{6}}{2} + \mathrm{i}\left(-4 - \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{6}}{2} - \dfrac{11}{2}\mathrm{i}$

5. $z = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{6}}{4} + \mathrm{i}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Corrigé exercice 61 :

1. $a = \mathrm{i}^2 = -1$, $b = \mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2 \times \mathrm{i} = -1 \times \mathrm{i} = -\mathrm{i}$, $c = \mathrm{i}^4 = \left(\mathrm{i}^2\right)^2 = (-1)^2 = 1$, $d = \mathrm{i}^5 = \mathrm{i}^4 \times \mathrm{i} = 1 \times \mathrm{i} = \mathrm{i}$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. $a' = \mathrm{i}^{4k} = \left(\mathrm{i}^4\right)^k = 1^k = 1$, $b' = \mathrm{i}^{4k+1} = \mathrm{i}^{4k} \times \mathrm{i} = 1 \times \mathrm{i} = \mathrm{i}$, $c' = \mathrm{i}^{4k+2} = \mathrm{i}^{4k} \times \mathrm{i}^2 = 1 \times (-1) = -1$, $d' = \mathrm{i}^{4k+3} = \mathrm{i}^{4k} \times \mathrm{i}^3 = 1 \times (-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$.

Corrigé exercice 62 :

1. a. $z_1 = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 = 1 + \mathrm{i} - 1 - \mathrm{i} = 0$
   b. $z_2 = \mathrm{i}^{2020} + \mathrm{i}^{2021} + \mathrm{i}^{2022} + \mathrm{i}^{2023} = \mathrm{i}^{2020}\left(1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3\right) = 0$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $z = \mathrm{i}^n + \mathrm{i}^{n+1} + \mathrm{i}^{n+2} + \mathrm{i}^{n+3} = \mathrm{i}^n\left(1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3\right) = 0$.

Corrigé exercice 63 :

1. $z = (2 + 3\mathrm{i})^2 = 4 - 9 + 12\mathrm{i} = -5 + 12\mathrm{i}$
2. $z = \left(1 - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2 = 1 - 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{2} = -1 - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$
3. $z = \left(\dfrac{1}{2}\mathrm{i} - 1\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{4} - \mathrm{i} = \dfrac{3}{4} - \mathrm{i}$
4. $z = \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)^2 = \dfrac{4}{9} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3}\mathrm{i} = \dfrac{7}{36} + \dfrac{2}{3}\mathrm{i}$

Corrigé exercice 64 :

1. $z = \left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. $z = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} - \mathrm{i} = -\mathrm{i}$
3. $z = \left(2\sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2 = 12 - 2 - 4\mathrm{i}\sqrt{6} = 10 - 4\mathrm{i}\sqrt{6}$

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 65 :

1. $\left(3+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(3-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=9+\frac{1}{4}=\frac{37}{4}$

2. $\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\mathrm{i}\right)=\left(\frac{2}{5}\mathrm{i}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\mathrm{i}+\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{25}-\frac{1}{9}=-\frac{61}{225}.$

3. $\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

4. $\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-1$

5. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

6. $\left(2\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-2\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+2\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(2\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+2\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-2\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{3}{4}+\frac{4\times 3}{9}=\frac{75}{36}=\frac{25}{12}$

Corrigé exercice 66 :

1. $z=(1-\mathrm{i})^3=1^3-3\times 1^2\times\mathrm{i}+3\times 1\times\mathrm{i}^2-\mathrm{i}^3=1-3\mathrm{i}-3-(-\mathrm{i})=-2-2\mathrm{i}$

2. $z=\left(\frac{1}{3}-\mathrm{i}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\mathrm{i}+3\times\frac{1}{3}\times\mathrm{i}^2-\mathrm{i}^3=\frac{1}{27}-\frac{1}{3}\mathrm{i}-1+\mathrm{i}=-\frac{26}{27}+\frac{2}{3}\mathrm{i}$

3. $z=(1+2\mathrm{i})^4=1^4+4\times 1^3\times 2\mathrm{i}+6\times 1^2\times(2\mathrm{i})^2+4\times 1\times(2\mathrm{i})^3+(2\mathrm{i})^4=1+8\mathrm{i}-24-32\mathrm{i}+16=-7-24\mathrm{i}$

4. $z=\left(\sqrt{2}-\mathrm{i}\right)^4=\left(\sqrt{2}\right)^4-4\times\left(\sqrt{2}\right)^3\times\mathrm{i}+6\times\left(\sqrt{2}\right)^2\times\mathrm{i}^2-4\times\sqrt{2}\times\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4$
$=4-8\mathrm{i}\sqrt{2}-12+4\mathrm{i}\sqrt{2}+1=-7-4\mathrm{i}\sqrt{2}$

Corrigé exercice 67 :

1. $z=(1+\mathrm{i})^5=1+5\mathrm{i}+10\mathrm{i}^2+10\mathrm{i}^3+5\mathrm{i}^4+\mathrm{i}^5=1+5\mathrm{i}-10-10\mathrm{i}+5+\mathrm{i}=-4-4\mathrm{i}$

2. $z=(1-2\mathrm{i})^5=1-5\times 2\mathrm{i}+10(2\mathrm{i})^2-10(2\mathrm{i})^3+5(2\mathrm{i})^4-(2\mathrm{i})^5=1-10\mathrm{i}-40+80\mathrm{i}+80-32\mathrm{i}=41+38\mathrm{i}$

3. $z=(1+\mathrm{i})^5(1-\mathrm{i})^5=((1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}))^5=(1-\mathrm{i}^2)^5=2^5=32$

4. $z=(2+\mathrm{i})^5=2^5+5\times 2^4\times\mathrm{i}+10\times 2^3\times\mathrm{i}^2+10\times 2^2\times\mathrm{i}^3+5\times 2\times\mathrm{i}^4+\mathrm{i}^5$
$=32+80\mathrm{i}-80-40\mathrm{i}+10+\mathrm{i}=-38+41\mathrm{i}$

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

5. $z = (2-2\mathrm{i})^5 = 2^5 - 5\times 2^4\times 2\mathrm{i} + 10\times 2^3\times(2\mathrm{i})^2 - 10\times 2^2\times(2\mathrm{i})^3 + 5\times 2\times(2\mathrm{i})^4 - (2\mathrm{i})^5$
$= 32 - 160\mathrm{i} - 320 + 320\mathrm{i} + 160 - 32\mathrm{i} = -128 + 128\mathrm{i}$

6. $z = (2+\mathrm{i})^5(2-\mathrm{i})^5 = \left((2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})\right)^5 = (2^2-\mathrm{i}^2)^5 = (4+1)^5 = 5^5 = 3125$

Corrigé exercice 68 :

1. $(u+v)^0 = 1$ et $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}u^{0-0}v^0 = 1$ donc R_0 est vraie.

2. a. $(u+v)^{k+1} = (u+v)(u+v)^k = (u+v)\sum_{p=0}^{k}\begin{pmatrix}k\\p\end{pmatrix}u^{k-p}v^p$ par hypothèse de récurrence, d'où $(u+v)^{k+1} = u\sum_{p=0}^{k}\begin{pmatrix}k\\p\end{pmatrix}u^{k-p}v^p + v\sum_{p=0}^{k}\begin{pmatrix}k\\p\end{pmatrix}u^{k-p}v^p$.

b. On en déduit alors que $(u+v)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k}\begin{pmatrix}k\\p\end{pmatrix}u^{k-p+1}v^p + \sum_{p=0}^{k}\begin{pmatrix}k\\p\end{pmatrix}u^{k-p}v^{p+1}$ d'où

$(u+v)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k}\begin{pmatrix}k\\p\end{pmatrix}u^{k+1-p}v^p + \sum_{p=0}^{k}\begin{pmatrix}k\\p\end{pmatrix}u^{k-p}v^{p+1}$.

c. On procède à un changement d'indice (p par $p-1$) dans la deuxième somme et on remarque que si $p-1$ varie de 0 à k, alors p varie de 1 à $k+1$.

Ainsi $(u+v)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k}\begin{pmatrix}k\\p\end{pmatrix}u^{k+1-p}v^p + \sum_{p=1}^{k+1}\begin{pmatrix}k\\p-1\end{pmatrix}u^{k-(p-1)}v^{(p-1)+1}$

$= \sum_{p=0}^{k}\begin{pmatrix}k\\p\end{pmatrix}u^{k+1-p}v^p + \sum_{p=1}^{k+1}\begin{pmatrix}k\\p-1\end{pmatrix}u^{k+1-p}v^p$.

d. D'après la question précédente, on a :

$(u+v)^{k+1} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}u^{k+1}v^0 + \sum_{p=1}^{k}\begin{pmatrix}k\\p\end{pmatrix}u^{k+1-p}v^p + \sum_{p=1}^{k}\begin{pmatrix}k\\p-1\end{pmatrix}u^{k+1-p}v^p + \begin{pmatrix}k\\k\end{pmatrix}u^0v^{k+1}$.

Or $\begin{pmatrix}k\\k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k+1\\k+1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k+1\\0\end{pmatrix}$, d'où :

$(u+v)^{k+1} = \begin{pmatrix}k+1\\0\end{pmatrix}u^{k+1}v^0 + \sum_{p=1}^{k}\left(\begin{pmatrix}k\\p\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k\\p-1\end{pmatrix}\right)u^{k+1-p}v^p + \begin{pmatrix}k+1\\k+1\end{pmatrix}u^0v^{k+1}$.

Enfin, comme $\begin{pmatrix}k+1\\p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k\\p\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k\\p-1\end{pmatrix}$ (formule de Pascal),

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

alors $(u+v)^{k+1} = \begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \end{pmatrix} u^{k+1}v^0 + \sum_{p=1}^{k} \begin{pmatrix} k+1 \\ p \end{pmatrix} u^{k+1-p}v^p + \begin{pmatrix} k+1 \\ k+1 \end{pmatrix} u^0 v^{k+1}$,
c'est-à-dire $(u+v)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k+1} \begin{pmatrix} k+1 \\ p \end{pmatrix} u^{k+1-p}v^p$.

3. Ainsi, R_0 est vraie et, lorsque R_k est vraie pour un entier naturel non nul k, alors R_{k+1} est vraie aussi. On en déduit par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est vraie.

Corrigé exercice 69 :

R et I sont des variables qui contiennent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $z_1 + z_2$. Un algorithme en langage naturel permettant de déterminer la valeur de ces variables est le suivant.

$$R \leftarrow a_1 + a_2$$
$$I \leftarrow b_1 + b_2$$

Corrigé exercice 70 :

R et I sont des variables qui contiennent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $z_1 \times z_2$. Un algorithme en langage naturel permettant de déterminer la valeur de ces variables est le suivant.

$$R \leftarrow a_1a_2 - b_1b_2$$
$$I \leftarrow a_1b_2 + a_2b_1$$

Corrigé exercice 71 :

1. L'affirmation est fausse car $\mathrm{i}^2 = -1$.
2. C'est vrai car $(1+\mathrm{i})(3+3\mathrm{i}) = 3(1+\mathrm{i})^2 = 3(1-1+2\mathrm{i}) = 3 \times 2\mathrm{i} = 6\mathrm{i}$.
3. C'est vrai car $(2\mathrm{i}-1)^2 + 2(2\mathrm{i}-1) + 5 = -3 - 4\mathrm{i} - 2 + 4\mathrm{i} + 5 = 0$.
4. L'affirmation est fausse car $\left(2-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 + 4\left(2-\mathrm{i}\sqrt{3}\right) + 7 = 1 - 4\mathrm{i}\sqrt{3} + 4 - 16\mathrm{i}\sqrt{3} + 7 = 12 - 20\mathrm{i}\sqrt{3} \neq 0$.

Corrigé exercice 72 :

1. L'affirmation est vraie car $z = (2-\mathrm{i}) + 3\mathrm{i}(\mathrm{i}-2) = 2 - \mathrm{i} - 3 - 6\mathrm{i} = -1 - 7\mathrm{i}$, d'où $\mathrm{Re}(z) = -1$.
2. C'est vrai car $z_1 = -1 - 7\mathrm{i}$, $z_2 = -2 + \mathrm{i} + 6\mathrm{i} - 3 = -5 + 7\mathrm{i}$ et $\mathrm{Im}(z_1) = -7$ et $\mathrm{Im}(z_2) = 7$ sont bien opposés.
3. C'est faux car $z_1 = (2+\mathrm{i})(3-\mathrm{i}) = 6 + 1 + \mathrm{i}(-2+3) = 7 + \mathrm{i}$, $z_2 = (\mathrm{i}-2)(\mathrm{i}+3) = -1 - 6 + \mathrm{i}(3-2) = -7 + \mathrm{i}$, et $\mathrm{Re}(z_1) = 7 \neq -7 = \mathrm{Re}(z_2)$.
4. C'est faux car $z = (2+\mathrm{i})^2 = 4 - 1 + 4\mathrm{i} = 3 + 4\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 73 :

1. C'est faux car $z_1 = -z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z_1) = -\mathrm{Re}(z_2) \\ \mathrm{Im}(z_1) = -\mathrm{Im}(z_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-1) = -a+1 \\ b^2+1 = -2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a = -a+1 \\ b^2+2b+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ (b+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$.
   Il existe donc deux couples remplissant cette condition.

2. C'est vrai car, pour tout $b \in \mathbb{R}$, $z = (2+\mathrm{i}b)(2b+\mathrm{i}) = 4b - b + \mathrm{i}(2+2b^2) = 3b + 2\mathrm{i}(b^2+1)$ et $b^2+1 \neq 0$.

3. C'est vrai car $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \\ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - a - 1 = 3a - 2 \\ b(b-1) = b-1 \end{cases}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 4a + 1 = 0 \\ (b-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2a-1)^2 = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$.
   Il existe donc bien un unique couple respectant cette condition.

4. C'est faux car $z = (a+\mathrm{i})^3 = a^3 + 3a^2 \times \mathrm{i} + 3a \times \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 = a^3 - 3a + \mathrm{i}(3a^2 - 1)$. Ainsi, si $a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ou $a = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, alors z est un nombre réel.

Corrigé exercice 74 :

1. $8z + 5\mathrm{i} = 3 - z + 2\mathrm{i} \Leftrightarrow 9z = 3 - 3\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$
2. $2\mathrm{i} + 3z = \mathrm{i}(4 - \mathrm{i}z) \Leftrightarrow 2\mathrm{i} + 3z = 4\mathrm{i} + z \Leftrightarrow 2z = 2\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \mathrm{i}$
3. $3z + 2\mathrm{i} = 2\mathrm{i}(\mathrm{i}z - 1) + 1 \Leftrightarrow 3z + 2\mathrm{i} = -2z - 2\mathrm{i} + 1 \Leftrightarrow 5z = -4\mathrm{i} + 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{5} - \dfrac{4}{5}\mathrm{i}$
4. $(1+\mathrm{i})z - \mathrm{i} = (2\mathrm{i}+1)(1+\mathrm{i}z) + 2 \Leftrightarrow z + \mathrm{i}z - \mathrm{i} = 2\mathrm{i} - 2z + 1 + \mathrm{i}z + 2 \Leftrightarrow 3z = 3\mathrm{i} + 3 \Leftrightarrow z = 1 + \mathrm{i}$

Corrigé exercice 75 :

1. $\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 2 - 4\mathrm{i} (L_1) \\ 2z_1 - z_2 = -1 + 7\mathrm{i} (L_2) \end{cases}$. On résout par combinaison. $(L_1) + 2 \times (L_2) \Leftrightarrow 5z_1 = 10\mathrm{i} \Leftrightarrow z_1 = 2\mathrm{i}$ et $-2 \times (L_1) + (L_2) \Leftrightarrow -5z_2 = -5 + 15\mathrm{i} \Leftrightarrow z_2 = 1 - 3\mathrm{i}$. D'où $S = \{(2\mathrm{i}; 1 - 3\mathrm{i})\}$.

2. $\begin{cases} 3z_1 + 2z_2 = -4 + 11\mathrm{i} (L_1) \\ 5z_1 - z_2 = -\dfrac{9}{2} + 14\mathrm{i} (L_2) \end{cases}$. On résout par combinaison. $(L_1) + 2 \times (L_2) \Leftrightarrow 13z_1 = -13 + 39\mathrm{i} \Leftrightarrow z_1 = -1 + 3\mathrm{i}$ et $5 \times (L_1) - 3 \times (L_2) \Leftrightarrow 13z_2 = -\dfrac{13}{2} + 13\mathrm{i} \Leftrightarrow z_2 = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}$.
   D'où $S = \left\{ \left(-1 + 3\mathrm{i}; -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i} \right) \right\}$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

3. $\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 3 - \mathrm{i}(L_1) \\ 3z_1 + 5z_2 = 5 - \mathrm{i}(L_2) \end{cases}$. On résout par combinaison. $5\times(L_1) - 3\times(L_2) \Leftrightarrow z_1 = -2\mathrm{i}$ et $3 \times (L_1) - 2 \times (L_2) \Leftrightarrow -z_2 = -1 - \mathrm{i} \Leftrightarrow z_2 = 1 + \mathrm{i}$. D'où $S = \{(-2\mathrm{i}; 1 + \mathrm{i})\}$.

4. $\begin{cases} 3z_1 + 2z_2 = \dfrac{3}{2}(L_1) \\ 2z_1 + z_2 = 1 - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}(L_2) \end{cases}$. On résout par combinaison. $(L_1) - 2 \times (L_2) \Leftrightarrow -z_1 = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i} \Leftrightarrow z_1 = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}$ et $2 \times (L_1) - 3 \times (L_2) \Leftrightarrow z_2 = \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$. D'où $S = \left\{\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}; \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)\right\}$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 76 :

1. $\overline{z_1} = \overline{-2} = -2$
2. $\overline{z_2} = \overline{-\frac{3}{4}\mathrm{i}} = \frac{3}{4}\mathrm{i}$
3. $\overline{z_3} = \overline{\mathrm{i} - 2} = \overline{-2 + \mathrm{i}} = -2 - \mathrm{i}$
4. $\overline{z_4} = \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = -2 + \frac{3}{4}\mathrm{i}$
5. $\overline{z_5} = \overline{z_2 \times z_3} = \overline{z_2} \times \overline{z_3} = \frac{3}{4}\mathrm{i}(-2 - \mathrm{i}) = -\frac{3}{2}\mathrm{i} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}\mathrm{i}$
6. $\overline{z_6} = \overline{z_2(z_3 + z_4)} = \overline{z_2}\left(\overline{z_3} + \overline{z_4}\right) = \frac{3}{4}\mathrm{i}\left(-2 - \mathrm{i} - 2 + \frac{3}{4}\mathrm{i}\right) = \frac{3}{4}\mathrm{i}\left(-4 - \frac{1}{4}\mathrm{i}\right)$
   $= -3\mathrm{i} + \frac{3}{16} = \frac{3}{16} - 3\mathrm{i}$

Corrigé exercice 77 :

1. $z_1 = \overline{10 - (2 + 3\mathrm{i})} = \overline{10 - 2 - 3\mathrm{i}} = \overline{8 - 3\mathrm{i}} = 8 + 3\mathrm{i}$
2. $z_2 = \overline{(2 - 3\mathrm{i})(\mathrm{i} + 2)} = \overline{2 - 3\mathrm{i}} \times \overline{\mathrm{i} + 2} = (2 + 3\mathrm{i})(2 - \mathrm{i}) = 4 + 3 + \mathrm{i}(-2 + 6) = 7 + 4\mathrm{i}$
3. $z_3 = \overline{\left(\frac{1}{2\mathrm{i} + 4}\right)} = \frac{1}{\overline{(2\mathrm{i} + 4)}} = \frac{1}{4 - 2\mathrm{i}} = \frac{4 + 2\mathrm{i}}{4^2 + (-2)^2} = \frac{4}{20} + \frac{2}{20}\mathrm{i} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}\mathrm{i}$
4. $z_4 = \overline{\left(\frac{\mathrm{i} + 3}{1 - 4\mathrm{i}}\right)} = \frac{\overline{(3 + \mathrm{i})}}{\overline{(1 - 4\mathrm{i})}} = \frac{3 - \mathrm{i}}{1 + 4\mathrm{i}} = \frac{(3 - \mathrm{i})(1 - 4\mathrm{i})}{1^2 + 4^2} = \frac{3 - 4 + \mathrm{i}(-12 - 1)}{17} = -\frac{1}{17} - \frac{13}{17}\mathrm{i}$

Corrigé exercice 78 :

C'est vrai car $-\frac{1}{\overline{z}} = 3 + 2\mathrm{i} \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{z}} = -3 - 2\mathrm{i} \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{-3 - 2\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \frac{1}{-3 + 2\mathrm{i}}$
$\Leftrightarrow z = \frac{-3 - 2\mathrm{i}}{(-3)^2 + 2^2} \Leftrightarrow z = -\frac{3}{13} - \frac{2}{13}\mathrm{i}.$

Corrigé exercice 79 :

1. $a = \overline{0} = 0$
2. $b = \overline{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$
3. $c = \overline{(-\mathrm{i})} = \mathrm{i}$
4. $d = \overline{(1 + \mathrm{i})} = 1 - \mathrm{i}$
5. $e = \overline{(1 - \mathrm{i})} = 1 + \mathrm{i}$

Document sous licence libre Creative Commons

6. $f = \overline{(3+2\mathrm{i})} = 3 - 2\mathrm{i}$

7. $g = \overline{\left(\frac{1}{2} - 2\mathrm{i}\right)} = \frac{1}{2} + 2\mathrm{i}$

8. $h = \overline{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\mathrm{i}\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$

Corrigé exercice 80 :

1. $a = 3(1+\mathrm{i}) - 2\mathrm{i}(1-2\mathrm{i}) = 3 + 3\mathrm{i} - 2\mathrm{i} - 4 = -1 + \mathrm{i}$ donc $\overline{a} = -1 - \mathrm{i}$.

2. $b = \sqrt{2}(1-\mathrm{i}) + 2\mathrm{i}\sqrt{2}(1+\mathrm{i}) = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2} + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ donc $\overline{b} = -\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$.

3. $c = \frac{3}{2}\mathrm{i}\left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) - \frac{1}{2}(2\mathrm{i}+1) = \frac{3}{2}\mathrm{i} - \frac{3}{4} - \mathrm{i} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ donc $\overline{c} = -\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

4. $d = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}(2+\mathrm{i}) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{4} - \mathrm{i}\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} - 3\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{4}$ donc $\overline{d} = \frac{3\sqrt{2}}{4} + 3\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Corrigé exercice 81 :

1. $a = (1+\mathrm{i})(2-3\mathrm{i}) = 2 + 3 + \mathrm{i}(-3+2) = 5 - \mathrm{i}$ donc $\overline{a} = 5 + \mathrm{i}$.

2. $b = (-1-\mathrm{i})(3-2\mathrm{i}) = -3 - 2 + \mathrm{i}(2-3) = -5 - \mathrm{i}$ donc $\overline{b} = -5 + \mathrm{i}$.

3. $c = \left(\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(-2\sqrt{2} + 3\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = -4 - 9 + \mathrm{i}\left(3\sqrt{6} - 2\sqrt{6}\right) = -13 + \mathrm{i}\sqrt{6}$ donc $\overline{c} = -13 - \mathrm{i}\sqrt{6}$.

4. $d = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \mathrm{i}\left(\frac{1}{4} - \frac{9}{4}\right) = \frac{3}{2} - 2\mathrm{i}$ donc $\overline{d} = \frac{3}{2} + 2\mathrm{i}$.

Corrigé exercice 82 :

1. $a = (1+\mathrm{i})^2 = 1 - 1 + 2\mathrm{i} = 2\mathrm{i}$ donc $\overline{a} = -2\mathrm{i}$.

2. $b = (1-\mathrm{i})^2 = 1 - 1 - 2\mathrm{i} = -2\mathrm{i}$ donc $\overline{b} = 2\mathrm{i}$.

3. $c = (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = 1^2 - \mathrm{i}^2 = 2$ donc $\overline{c} = c = 2$.

4. $d = \left(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 2 + 3 = 5$ donc $\overline{d} = d = 5$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 83 :

1. $a = (2-\mathrm{i})^3 = 2^3 - 3\times 2^2 \times \mathrm{i} + 3\times 2\times \mathrm{i}^2 - \mathrm{i}^3 = 8 - 12\mathrm{i} - 6 + \mathrm{i} = 2 - 11\mathrm{i}$ donc $\overline{a} = 2 + 11\mathrm{i}$.
2. $b = \left(\sqrt{2}+2\mathrm{i}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 + 4\times\left(\sqrt{2}\right)^3\times 2\mathrm{i} + 6\times\left(\sqrt{2}\right)^2\times(2\mathrm{i})^2 + 4\times\sqrt{2}\times(2\mathrm{i})^3 + (2\mathrm{i})^4$ $= 4 + 16\mathrm{i}\sqrt{2} - 48 - 32\mathrm{i}\sqrt{2} + 16 = -28 - 16\mathrm{i}\sqrt{2}$ donc $\overline{b} = -28 + 16\mathrm{i}\sqrt{2}$.
3. $c = \left(2\mathrm{i} - \dfrac{1}{2}\right)^4 = (2\mathrm{i})^4 - 4\times(2\mathrm{i})^3\times\dfrac{1}{2} + 6\times(2\mathrm{i})^2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 4\times 2\mathrm{i}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$ $= 16 + 16\mathrm{i} - 6 - \mathrm{i} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{161}{16} + 15\mathrm{i}$ donc $\overline{d} = \dfrac{161}{16} - 15\mathrm{i}$.

Corrigé exercice 84 :

1. $a = \dfrac{1}{3\mathrm{i}} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{\mathrm{i}} = \dfrac{1}{3}\times(-\mathrm{i}) = -\dfrac{1}{3}\mathrm{i}$
2. $b = \dfrac{1}{2+\mathrm{i}} = \dfrac{1\times(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = \dfrac{2-\mathrm{i}}{2^2+1^2} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}\mathrm{i}$
3. $c = \dfrac{1}{2\mathrm{i}-3} = \dfrac{1}{-3+2\mathrm{i}} = \dfrac{-3-2\mathrm{i}}{(-3)^2+2^2} = -\dfrac{3}{13} - \dfrac{2}{13}\mathrm{i}$
4. $d = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\mathrm{i}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{5} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

Corrigé exercice 85 :

1. $a = \dfrac{1}{3\mathrm{i}-\sqrt{3}} = \dfrac{1}{-\sqrt{3}+3\mathrm{i}} = \dfrac{-\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{\left(-\sqrt{3}\right)^2+3^2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{12} - \dfrac{1}{4}\mathrm{i}$
2. $b = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $c = \dfrac{1}{2\sqrt{2}-\mathrm{i}} = \dfrac{2\sqrt{2}+\mathrm{i}}{\left(2\sqrt{2}\right)^2+(-1)^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{9} + \dfrac{1}{9}\mathrm{i}$
4. $d = \dfrac{1}{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Corrigé exercice 86 :

1. $a = \dfrac{3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \dfrac{3\mathrm{i}(2-\mathrm{i})}{2^2+1^2} = \dfrac{6\mathrm{i}+3}{5} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{6}{5}\mathrm{i}$

Document sous licence libre Creative Commons

2. $b = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})\times(-2\mathrm{i})}{2^2} = \dfrac{(1+\mathrm{i})\times(-\mathrm{i})}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

3. $c = \dfrac{1+2\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}} = \dfrac{(1+2\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}{2^2+(-3)^2} = \dfrac{2-6+\mathrm{i}(3+4)}{13} = -\dfrac{4}{13} + \dfrac{7}{13}\mathrm{i}$

4. $d = \dfrac{2-3\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}} = \dfrac{(2-3\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}{3^2+(-2)^2} = \dfrac{6+6+\mathrm{i}(4-9)}{13} = \dfrac{12}{13} - \dfrac{5}{13}\mathrm{i}$

Corrigé exercice 87 :

1. $a = \dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2+\mathrm{i}} = \dfrac{\left(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)(2-\mathrm{i})}{2^2+1^2} = \dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{5} = \dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5} + \mathrm{i}\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5}$

2. $b = \dfrac{2\mathrm{i}-\sqrt{2}}{3+\mathrm{i}} = \dfrac{\left(2\mathrm{i}-\sqrt{2}\right)(3-\mathrm{i})}{3^2+1^2} = \dfrac{2-3\sqrt{2}+\mathrm{i}\left(6+\sqrt{2}\right)}{10} = \dfrac{2-3\sqrt{2}}{10} + \mathrm{i}\dfrac{6+\sqrt{2}}{10}$

3. $c = \dfrac{\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1+\mathrm{i}} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1-\mathrm{i})}{(-1)^2+1^2} = \dfrac{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}+1}{4} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$

4. $d = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}} = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Corrigé exercice 88 :

Soient $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' des réels.

1. $z+z' = (a+a')+\mathrm{i}\,(b+b')$ donc $\overline{z+z'} = (a+a')-\mathrm{i}\,(b+b') = (a-\mathrm{i}b)+(a'-\mathrm{i}b') = \overline{z}+\overline{z'}$.

2. a. $zz' = (aa'-bb')+\mathrm{i}(a'b+ab')$

   b. On a, d'une part, $\overline{(zz')} = (aa'-bb')-\mathrm{i}\,(ab'+a'b)$ et, d'autre part, $\overline{z}\times\overline{z'} = (a-\mathrm{i}b)\,(a'-\mathrm{i}b') = (aa'-bb')-\mathrm{i}\,(ab'+a'b)$. D'où $\overline{z\times z'} = \overline{z}\times\overline{z'}$.

Corrigé exercice 89 :

Soient z et z' deux nombres complexes avec $z' \neq 0$.
On suppose connu que le produit des conjugués et le conjugué du produit (cette propriété est démontrée dans l'exercice 88).

Montrons de plus que $\overline{\dfrac{1}{z'}} = \overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)}$. Pour ce faire, posons $z' = x + \mathrm{i}y$ avec x et y des réels. Alors, d'une part, $\dfrac{1}{\overline{z'}} = \dfrac{1}{x-\mathrm{i}y} = \dfrac{x+\mathrm{i}y}{(x-\mathrm{i}y)(x+\mathrm{i}y)} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\dfrac{y}{x^2+y^2}$ et, d'autre part, $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \overline{x+\mathrm{i}y} = \overline{\dfrac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\dfrac{y}{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\dfrac{y}{x^2+y^2}$. D'où $\dfrac{1}{\overline{z'}} = \overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)}$.

Ainsi, en combinant la propriété du produit et de l'inverse, on obtient que $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \overline{z \times \dfrac{1}{z'}} = \overline{z} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \dfrac{1}{\overline{z'}} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Corrigé exercice 90 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la proposition : « $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$ ».

   On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : Si $n = 0$.

   $\overline{(z^0)} = \overline{1} = 1$, car 1 est un réel, et $(\overline{z})^0 = 1$ donc $\overline{(z^0)} = (\overline{z})^0$.

   On en déduit que P_0 est vraie.

   Hérédité : On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie, autrement dit tel que $\overline{(z^k)} = (\overline{z})^k$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $\overline{(z^{k+1})} = (\overline{z})^{k+1}$.

   On a $\overline{(z^{k+1})} = \overline{z^k \times z} = \overline{(z^k)} \times \overline{z}$ d'après la propriété $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ valable pour tous nombres complexes z et z', et on en déduit alors, par hypothèse de récurrence, que $\overline{(z^{k+1})} = (\overline{z})^k \times \overline{z} = (\overline{z})^{k+1}$.

   Conclusion : Ainsi, P_0 est vraie et, lorsque P_k est vraie pour un entier k quelconque, alors P_{k+1} est aussi vraie. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

2. a. Soit n un entier négatif. Alors $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$.

   b. Comme n est un entier négatif, alors $-n \in \mathbb{N}$ donc, d'après la question 1., on a $\overline{(z^{-n})} = (\overline{z})^{-n}$. Or, d'après 2.a., $\overline{(z^{-n})} = (\overline{z})^{-n} \Leftrightarrow \overline{\left(\dfrac{1}{z^n}\right)} = \dfrac{1}{(\overline{z})^n} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\overline{(z^n)}} = \dfrac{1}{(\overline{z})^n}$ car si $z \neq 0$, alors $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$, démontrée dans l'exercice 89. On en déduit alors que $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$.

3. On conclut alors que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$.

Corrigé exercice 91 :

R et I sont des variables qui contiennent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du conjugué $\overline{z}$ avec $z = a + ib$. Un algorithme en langage naturel permettant de déterminer la valeur de ces variables est le suivant.

$R \leftarrow a$

$I \leftarrow -b$

Corrigé exercice 92 :

Soit $z = a+ib$ avec a et b réels. Alors, si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+\mathrm{i}b} = \dfrac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \mathrm{i}\dfrac{-b}{a^2+b^2}$.
On peut alors écrire la fonction suivante, d'arguments a et b, qui retourne respectivement dans les variables R et I la partie réelle et la partie imaginaire de $\dfrac{1}{z}$.

Fonction inverse(a,b) :

Si $a = 0$ et $b = 0$:

Afficher « 0 n'a pas d'inverse.»

Sinon

$R \leftarrow a/(a^2+b^2)$

$I \leftarrow -b/(a^2+b^2)$

Retourner R et I

Corrigé exercice 93 :

Soient $z_1 = a+\mathrm{i}b$ et $z_2 = c+\mathrm{i}d$ avec a, b, c et d réels. Alors, si $z_2 \neq 0$, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d} = \dfrac{(a+\mathrm{i}b)(c-\mathrm{i}d)}{c^2+d^2} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \mathrm{i}\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$.
On peut alors écrire la fonction suivante, d'arguments a, b, c et d, qui retourne respectivement dans les variables R et I la partie réelle et la partie imaginaire de $\dfrac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d}$.

Fonction quotient(a,b,c,c) :

Si $c = 0$ et $d = 0$:

Alors afficher « Le quotient n'existe pas.»

Sinon

$R \leftarrow (ac+bd)/(c^2+d^2)$

$I \leftarrow (bc-ad)/(c^2+d^2)$

Retourner R et I

Corrigé exercice 94 :

1. $\mathrm{i}z + 3(z-\mathrm{i}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{i}z + 3z - 3\mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow (3+\mathrm{i})z = 3\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{3\mathrm{i}(3-\mathrm{i})}{3^2+1^2} \Leftrightarrow z = \dfrac{9\mathrm{i}+3}{10} \Leftrightarrow z = \dfrac{3}{10} + \dfrac{9}{10}\mathrm{i}$ d'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{3}{10} + \dfrac{9}{10}\mathrm{i}\right\}$.

Document sous licence libre Creative Commons

2. $(4+\mathrm{i})z = 4 - z \Leftrightarrow (4+\mathrm{i}+1)z = 4 \Leftrightarrow z = \dfrac{4}{5+\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{4(5-\mathrm{i})}{5^2+1^2} \Leftrightarrow z = \dfrac{20-4\mathrm{i}}{26} \Leftrightarrow$ $z = \dfrac{10}{13} - \dfrac{2}{13}\mathrm{i}$ d'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{10}{13} - \dfrac{2}{13}\mathrm{i}\right\}$.

3. $(2\mathrm{i}+1)z = 1+\mathrm{i}-2\mathrm{i}z \Leftrightarrow (2\mathrm{i}+1+2\mathrm{i})z = 1+\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+4\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{(1+\mathrm{i})(1-4\mathrm{i})}{1^2+4^2} \Leftrightarrow$ $z = \dfrac{1+4+\mathrm{i}(-4+1)}{17} \Leftrightarrow z = \dfrac{5}{17} - \dfrac{3}{17}\mathrm{i}$ d'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{5}{17} - \dfrac{3}{17}\mathrm{i}\right\}$.

4. $\dfrac{z+1}{z-2} = 3\mathrm{i}$ est définie si, et seulement si, $z \neq 2$.

   Et, pour $z \neq 2$, $\dfrac{z+1}{z-2} = 3\mathrm{i} \Leftrightarrow z+1 = 3\mathrm{i}z - 6\mathrm{i} \Leftrightarrow (1-3\mathrm{i})z = -1-6\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{-1-6\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}$ $\Leftrightarrow z = \dfrac{(-1-6\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})}{1^2+(-3)^2} \Leftrightarrow z = \dfrac{-1+18+\mathrm{i}(-3-6)}{10} \Leftrightarrow z = \dfrac{17}{10} - \dfrac{9}{10}\mathrm{i}$ qui est bien une solution car $\dfrac{17}{10} - \dfrac{9}{10}\mathrm{i} \neq 2$. D'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{17}{10} - \dfrac{9}{10}\mathrm{i}\right\}$.

Corrigé exercice 95 :

1. $(5+2\mathrm{i})\overline{z} - 2 = \mathrm{i} \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{2+\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{2-\mathrm{i}}{5-2\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{(2-\mathrm{i})(5+2\mathrm{i})}{5^2+(-2)^2} \Leftrightarrow z =$ $\dfrac{10+2+\mathrm{i}(4-5)}{29} \Leftrightarrow z = \dfrac{12}{29} - \dfrac{1}{29}\mathrm{i}$ d'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{12}{29} - \dfrac{1}{29}\mathrm{i}\right\}$.

2. $2\mathrm{i}(1-2\overline{z})+\overline{z} = \mathrm{i}\overline{z}-1 \Leftrightarrow 2\mathrm{i}-4\mathrm{i}\overline{z}+\overline{z}-\mathrm{i}\overline{z} = -1 \Leftrightarrow (1-5\mathrm{i})\overline{z} = -1-2\mathrm{i} \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{-1-2\mathrm{i}}{1-5\mathrm{i}} \Leftrightarrow$ $z = \dfrac{-1+2\mathrm{i}}{1+5\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{(-1+2\mathrm{i})(1-5\mathrm{i})}{1^2+5^2} \Leftrightarrow z = \dfrac{-1+10+\mathrm{i}(5+2)}{26} \Leftrightarrow z = \dfrac{9}{26} + \dfrac{7}{26}\mathrm{i}$ d'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{9}{26} + \dfrac{7}{26}\mathrm{i}\right\}$.

3. $2\mathrm{i}\overline{z}-\mathrm{i} = 2(\overline{z}-5)+\mathrm{i} \Leftrightarrow 2\mathrm{i}\overline{z}-\mathrm{i} = 2\overline{z}-10+\mathrm{i} \Leftrightarrow (2\mathrm{i}-2)\overline{z} = -10+2\mathrm{i} \Leftrightarrow (\mathrm{i}-1)\overline{z} = -5+\mathrm{i} \Leftrightarrow$ $\overline{z} = \dfrac{-5+\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{-5-\mathrm{i}}{-1-\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{(-5-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})}{(-1)^2+(-1)^2} \Leftrightarrow z = \dfrac{5+1+\mathrm{i}(-5+1)}{2} \Leftrightarrow$ $z = 3-2\mathrm{i}$ d'où $S_{\mathbb{C}} = \{3-2\mathrm{i}\}$.

4. $\dfrac{\overline{z}-2\mathrm{i}}{\overline{z}-1} + 1 + \mathrm{i} = 0$ est définie si, et seulement si, $\overline{z} \neq 1$, c'est-à-dire si, et seulement si, $z \neq 1$. Et, pour $z \neq 1$, $\dfrac{\overline{z}-2\mathrm{i}}{\overline{z}-1} + 1 + \mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow \overline{z} - 2\mathrm{i} = (\overline{z}-1)(-1-\mathrm{i}) \Leftrightarrow \overline{z} - 2\mathrm{i} =$ $-\overline{z}+1-\mathrm{i}\overline{z}+\mathrm{i} \Leftrightarrow (2+\mathrm{i})\overline{z} = 1+3\mathrm{i} \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1+3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{1-3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{(1-3\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{2^2+1^2}$ $\Leftrightarrow z = \dfrac{2+3+\mathrm{i}(1-6)}{5} \Leftrightarrow z = 1-\mathrm{i}$, qui est bien une solution car $1-\mathrm{i} \neq 1$. D'où $S_{\mathbb{C}} = \{1-\mathrm{i}\}$.

Corrigé exercice 96 :

On note $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels. On peut alors écrire $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.

cc BY NC SA

1. $z=\dfrac{\overline{z}}{2} \Leftrightarrow a+ib=\dfrac{a}{2}-\mathrm{i}\dfrac{b}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{a}{2} \\ b=-\dfrac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ d'où $S_{\mathbb{C}}=\{0\}$.

2. $z-2=3\mathrm{i}+2\overline{z} \Leftrightarrow a+ib-2=3\mathrm{i}+2(a-\mathrm{i}b) \Leftrightarrow \begin{cases} a-2=2a \\ b=3-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$ d'où $S_{\mathbb{C}}=\{-2+\mathrm{i}\}$.

3. $\dfrac{z}{\mathrm{i}-1}-\mathrm{i}\overline{z}=\dfrac{1}{\mathrm{i}+1} \Leftrightarrow \dfrac{(a+\mathrm{i}b)(-1-\mathrm{i})}{(-1)^2+1^2}-\mathrm{i}(a-\mathrm{i}b)=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1^2+1^2} \Leftrightarrow \dfrac{-a+b+\mathrm{i}(-a-b)}{2}-\mathrm{i}a-b=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -a-b=1 \\ -3a-b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ 3a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$ d'où $S_{\mathbb{C}}=\{1-2\mathrm{i}\}$.

4. $z\overline{z}=2z-1 \Leftrightarrow (a+\mathrm{i}b)(a+\mathrm{i}b)=2(a+\mathrm{i}b)-1 \Leftrightarrow a^2+b^2=2a+2\mathrm{i}b-1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2a-1 \\ 2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a+1=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$ d'où $S_{\mathbb{C}}=\{1\}$.

5. $\overline{z}-1=z\overline{z}-\mathrm{i} \Leftrightarrow a-\mathrm{i}b-1=(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)-\mathrm{i} \Leftrightarrow a-1-\mathrm{i}b=a^2+b^2-\mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1=a^2+b^2 \\ -b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-a+2=0 \\ b=1 \end{cases}$. Or le discriminant de l'équation $a^2-a+2=0$ est égal à $\Delta=(-1)^2-4\times1\times2=-7<0$ donc $a^2-a+2=0$ n'admet aucune solution réelle. Ainsi le système n'a pas de solutions et donc $S_{\mathbb{C}}=\emptyset$.

Corrigé exercice 97 :

On note $z=a+ib$ avec a et b réels. On peut alors écrire $\overline{z}=a-\mathrm{i}b$.

1. $z=\overline{z} \Leftrightarrow a+\mathrm{i}b=a-\mathrm{i}b \Leftrightarrow b=0 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$. Donc $S_{\mathbb{C}}=\mathbb{R}$.
2. $z=-\overline{z} \Leftrightarrow a+\mathrm{i}b=-a+\mathrm{i}b \Leftrightarrow a=0 \Leftrightarrow z\in\mathrm{i}\mathbb{R}$. Donc $S_{\mathbb{C}}=\mathrm{i}\mathbb{C}$.
3. $z=\mathrm{i}\overline{z} \Leftrightarrow a+\mathrm{i}b=\mathrm{i}(a-\mathrm{i}b) \Leftrightarrow a+\mathrm{i}b=\mathrm{i}a+b \Leftrightarrow a=b$. Donc $S_{\mathbb{C}}=\{a(1+\mathrm{i})/a\in\mathbb{R}\}$.
4. $z=-\mathrm{i}\overline{z} \Leftrightarrow a+\mathrm{i}b=-\mathrm{i}(a-\mathrm{i}b) \Leftrightarrow a+\mathrm{i}b=-\mathrm{i}a-b \Leftrightarrow a=-b$. Donc $S_{\mathbb{C}}=\{a(1-\mathrm{i})/a\in\mathbb{R}\}$.
5. $z^2=z\overline{z} \Leftrightarrow z(z-\overline{z})=0 \Leftrightarrow z=0$ ou $z=\overline{z}$. Donc $S_{\mathbb{C}}=\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 98 :

On pose $z_1=a+ib$ et $z_2=a'+ib'$.

1. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}z_1+z_2=2 \\ \dfrac{1}{2}\overline{z_1}+\mathrm{i}\overline{z_2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}a+a'\right)+\mathrm{i}\left(\dfrac{1}{2}b+b'\right)=2 \\ \left(\dfrac{1}{2}a+b'\right)+\mathrm{i}\left(a'-\dfrac{1}{2}b\right)=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a + a' = 2 \\ \frac{1}{2}b - b' = 0 \\ \frac{1}{2}a + b' = 0 \\ a' - \frac{1}{2}b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ a' = 1 \\ b' = -1 \end{cases} \quad \text{d'où } z_1 = 2 + 2\text{i et } z_2 = 1 - \text{i}.$$

2. Une autre possibilité est de prendre le conjugué des deux membres de la deuxième ligne de ce système. En effet :
   $\overline{\overline{z_1} + 2\overline{z_2}} = \overline{\overline{z_1}} + \overline{2\overline{z_2}} = z_1 + 2z_2$ et $\overline{2} = 2$.
   $$\begin{cases} 3z_1 - 2z_2 = 4\text{i} - 2 \\ \overline{z_1} + 2\overline{z_2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3z_1 - 2z_2 = 4\text{i} - 2 : (L_1) \\ z_1 + 2z_2 = 2 : (L_2) \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} (L_1 + L_2) : 4z_1 = 4\text{i} \\ (L_1 - 3 \times L_2) : -8z_2 = 4\text{i} - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \text{i} \\ z_2 = 1 - \frac{1}{2}\text{i} \end{cases}.$$
   Et donc $S_{\mathbb{C}} = \left\{ \left(\text{i}; 1 - \frac{1}{2}\text{i} \right) \right\}$.

3. $\begin{cases} z_1 - z_2 = 3 - 4\text{i} \\ \overline{z_1} + 2\overline{z_2} = 8 - \text{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 - z_2 = 3 - 4\text{i} \\ z_1 + 2z_2 = 8 + \text{i} \end{cases}$ d'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{ \left(\frac{14}{3} - \text{i}\frac{7}{3}; \frac{5}{3} + \text{i}\frac{5}{3} \right) \right\}$.

4. $\begin{cases} 6z_1 - 3z_2 = 12 + \text{i} \\ 3\overline{z_1} - \overline{z_2} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6z_1 - 3z_2 = 12 + \text{i} \\ 3z_1 - z_2 = 6 \end{cases}$ d'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{ \left(2 - \frac{1}{3}\text{i}; -\text{i} \right) \right\}$.

Corrigé exercice 99 :

1. C'est vrai car $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = 1 + 3\text{i} + 3 - 2\text{i} = 4 + \text{i}$.

2. C'est faux car $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2} = (1 + 3\text{i})(3 - 2\text{i}) = 3 + 6 + \text{i}(-2 + 9) = 9 + 7\text{i}$ et non $9 - 7\text{i}$.

3. C'est vrai car $\overline{(z_1)^3} = (\overline{z_1})^3 = (1 + 3\text{i})^3 = 1^3 + 3 \times 3\text{i} + 3 \times (3\text{i})^2 + (3\text{i})^3 = 1 + 9\text{i} - 27 - 27\text{i} = -26 - 18\text{i}$.

4. C'est faux car $\overline{(z_1 \times \overline{z_2})^2} = (\overline{z_1} \times z_2)^2 = \overline{z_1}^2 \times z_2^2 = (1 + 3\text{i})^2(3 + 2\text{i})^2 = (1 - 9 + 6\text{i})(9 - 4 + 12\text{i}) = (-8 + 6\text{i})(5 + 12\text{i}) = -40 - 72 + \text{i}(-96 + 30) = -112 - 66\text{i}$ et non $112 - 66\text{i}$.

Corrigé exercice 100 :

1. C'est vrai car leur produit est égal à 1 : $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{i} \right)(1+\text{i}) = \frac{1}{2}(1-\text{i})(1+\text{i}) = \frac{1}{2}(1^2 - \text{i}^2)$
   $= \frac{1}{2}(1 + 1) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$.

2. C'est vrai car $\frac{1}{1+\text{i}}$ et $\frac{1}{1-\text{i}}$ sont conjugués. En effet : $\overline{\left(\frac{1}{1+\text{i}} \right)} = \frac{\overline{1}}{\overline{1+\text{i}}} = \frac{1}{1-\text{i}}$.

3. C'est vrai car $\dfrac{4+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(4+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{1^2+(-1)^2} = \dfrac{4-2+\mathrm{i}(4+2)}{2} = \dfrac{2+6\mathrm{i}}{2} = 1+3\mathrm{i}$et le conjugué de $1+3\mathrm{i}$ est $1-3\mathrm{i}$.

4. C'est faux car $(1+\mathrm{i})^3 = 1^3+3\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3 = 1+3\mathrm{i}-3-\mathrm{i} = -2+2\mathrm{i}$ et $\dfrac{4}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{4(1-\mathrm{i})}{1^2+1^2} = \dfrac{4(1-\mathrm{i})}{2} = 2(1-\mathrm{i}) = 2-2\mathrm{i}$. Ces deux nombres complexes ne sont donc pas conjugués (ils sont par contre opposés).

5. C'est faux car $\overline{(1+2\mathrm{i})(2\mathrm{i}+3)} = \overline{(1+2\mathrm{i})(2\mathrm{i}+3)} = (1-2\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$.

6. C'est vrai car $z_2 = \overrightarrow{z_1}$.

Corrigé exercice 101 :

1. C'est vrai car $\mathrm{i}z-3+\mathrm{i} = (2+\mathrm{i})z+1 \Leftrightarrow \mathrm{i}z-3+\mathrm{i} = 2z+\mathrm{i}z+1 \Leftrightarrow 2z = -4+\mathrm{i}$ $\Leftrightarrow z = -2+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et le conjugué de cette solution est bien $-2-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

2. C'est faux car $2\mathrm{i}\overline{(-1-3\mathrm{i})} = 2\mathrm{i}(-1+3\mathrm{i}) = -2\mathrm{i}-6$ et $5(1-\mathrm{i})-\overline{(-1-3\mathrm{i})} = 5-5\mathrm{i}-(-1+3\mathrm{i}) = 5-5\mathrm{i}+1-3\mathrm{i} = 6-8\mathrm{i}$ donc $-1-3\mathrm{i}$ n'est pas solution de $2\mathrm{i}\overline{z} = 5(1-\mathrm{i})-\overline{z}$.

3. C'est faux car si on pose $z = a+\mathrm{i}b$ avec a et b réels, alors on peut écrire $\overline{z} = a-\mathrm{i}b$ et on a alors $2z-\mathrm{i}\overline{z} = 3+\mathrm{i}+2\overline{z} \Leftrightarrow 2(a+\mathrm{i}b)-\mathrm{i}(a-\mathrm{i}b) = 3+\mathrm{i}+2(a-\mathrm{i}b)$ $\Leftrightarrow 2a+2\mathrm{i}b-\mathrm{i}a-b = 3+\mathrm{i}+2a-2\mathrm{i}b \Leftrightarrow \begin{cases}-b=3\\ 2b-a=1-2b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-3\\ a=4b-1=-13\end{cases}$.
L'équation admet donc bien une solution dans $\mathbb{C}$.

4. C'est vrai car $\begin{cases}2z_1-z_2=1+3\mathrm{i}\\ \overline{z_1}+2\overline{z_2}=3+\mathrm{i}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2z_1-z_2=1+3\mathrm{i}:(L_1)\\ z_1+2z_2=3-\mathrm{i}:(L_2)\end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases}(2L_1+L_2):5z_1=5+5\mathrm{i}\\ (L_1-2L_2):-5z_2=-5+5\mathrm{i}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z_1=1+\mathrm{i}\\ z_2=1-\mathrm{i}\end{cases}$.
Et on a bien $\overline{z_1} = \overline{1+\mathrm{i}} = 1-\mathrm{i} = z_2$.

Corrigé exercice 102 :

On pose $z = a+\mathrm{i}b$ avec a et b réels non nuls. On peut alors écrire $\overline{z} = a-\mathrm{i}b$.

1. $z_1 = z+\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) = 2a \in \mathbb{R}$
2. $z_2 = z-\overline{z} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z) = 2\mathrm{i}b \in \mathrm{i}\mathbb{R}$
3. $z_3 = z^2+(\overline{z})^2 = (z+\overline{z})^2-2z\times\overline{z} = z_1^2-2z\times\overline{z} \in \mathbb{R}$ car $z_1 \in \mathbb{R}$ et $z\times\overline{z} = a^2+b^2 \in \mathbb{R}$.
4. $z_4 = z^2-(\overline{z})^2 = (z+\overline{z})(z-\overline{z}) = z_1\times z_2 \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ car $z_1 \in \mathbb{R}$ et $z_2 \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.
5. $z_5 = \dfrac{z+\overline{z}}{z-\overline{z}} = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2a}{2\mathrm{i}b} = \dfrac{a}{\mathrm{i}b} = -\mathrm{i}\dfrac{a}{b} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

6. $z_6 = \dfrac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}} = \dfrac{1}{z_5} = \mathrm{i}\dfrac{b}{a} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$

7. $z_7 = \dfrac{z^2+(\overline{z})^2}{z\times\overline{z}} = \dfrac{z_3}{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$

8. $z_8 = \dfrac{z^2-(\overline{z})^2}{z\times\overline{z}} = \dfrac{z_4}{a^2+b^2} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$

Corrigé exercice 103 :

On pose $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels non nuls. On peut alors écrire $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.
De plus on a $z \times \overline{z} = (a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2+b^2$.

1. $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}+z}{z\times\overline{z}} = \dfrac{2\mathrm{Re}(z)}{a^2+b^2} = \dfrac{2a}{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$

2. $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}-z}{z\times\overline{z}} = \dfrac{-2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)}{a^2+b^2} = -\dfrac{2\mathrm{i}b}{a^2+b^2} = -\mathrm{i}\dfrac{2b}{a^2+b^2} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$

Corrigé exercice 104 :

Soient $z = a+\mathrm{i}b$ et $z' = a'+\mathrm{i}b'$ deux nombres complexes tels que $a^2+b^2 = 1$, $a'^2+b'^2 = 1$ et $1+zz' \neq 0$. On pose $u = \dfrac{z+z'}{1+zz'}$.
Pour montrer que u est un réel, on va vérifier que $\overline{u} = u$.
On a $u = \dfrac{z+z'}{1+zz'} = \dfrac{(z+z')\,(1+\overline{zz'})}{(1+zz')\,(1+\overline{zz'})} = \dfrac{(z+z')\,(1+\overline{zz'})}{(1+zz')\,(1+\overline{zz'})} = \dfrac{(z+z')\,(1+\overline{z}\times\overline{z'})}{(1+zz')\,(1+\overline{z}\times\overline{z'})} = \dfrac{z+z\times\overline{z}\times\overline{z'}+z'+z'\times\overline{z}\times\overline{z'}}{(1+zz')\,(1+\overline{z}\times\overline{z'})}$
Or $z\times\overline{z} = (a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2+b^2 = 1$ d'après l'énoncé. Et, de même, $z'\times\overline{z'} = (a'+\mathrm{i}b')(a'-\mathrm{i}b') = a'^2+b'^2 = 1$.
D'où $u = \dfrac{z+\overline{z'}+z'+\overline{z}}{(1+zz')(1+\overline{z}\times\overline{z'})} = \dfrac{z+\overline{z}+z'+\overline{z'}}{(1+zz')(1+\overline{z}\times\overline{z'})} = \dfrac{2\mathrm{Re}(z)+2\mathrm{Re}(z')}{(1+zz')(1+\overline{z}\times\overline{z'})}$.
D'autre part, $\overline{u} = \overline{\left(\dfrac{z+z'}{1+zz'}\right)} = \dfrac{\overline{z+z'}}{\overline{1+zz'}} = \dfrac{\overline{z}+\overline{z'}}{1+\overline{zz'}} = \dfrac{\overline{z}+\overline{z'}}{1+\overline{z}\times\overline{z'}} = \dfrac{(\overline{z}+\overline{z'})(1+zz')}{(1+\overline{z}\times\overline{z'})(1+zz')}$
$= \dfrac{\overline{z}+\overline{z}\times zz'+\overline{z'}+\overline{z'}\times zz'}{(1+\overline{z}\times\overline{z'})(1+zz')} = \dfrac{\overline{z}+\overline{z}\times z\times z'+\overline{z'}+\overline{z'}\times z'\times z}{(1+\overline{z}\times\overline{z'})(1+zz')}$.
Or, d'après l'énoncé, $z\overline{z} = 1 = z'\overline{z'}$ donc :

$$\overline{u} = \frac{\overline{z}+z'+\overline{z'}+z}{(1+\overline{z}\times\overline{z'})(1+zz')} = \frac{z+\overline{z}+z'+\overline{z'}}{(1+\overline{z}\times\overline{z'})(1+zz')} = \frac{2\mathrm{Re}(z)+2\mathrm{Re}(z')}{(1+zz')(1+\overline{z}\times\overline{z'})}.$$

Ainsi, $\bar{u} = u$ et donc u est un réel.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

9 Exercices d'entraînement partie 3

Corrigé exercice 105 :

$4z^2+16=0 \Leftrightarrow z^2=-4 \Leftrightarrow z=-2\mathrm{i}$ ou $z=2\mathrm{i}$.

Corrigé exercice 106 :

$u+v=3$ et $uv=5$ donc u et v sont les racines du trinôme z^2-3z+5 de discriminant $\Delta=(-3)^2-4\times1\times5=-11=\left(\mathrm{i}\sqrt{11}\right)^2<0$. Ce trinôme admet donc deux racines complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{3-\mathrm{i}\sqrt{11}}{2}$ et $z_1=\dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{11}}{2}$.
Ainsi $u=\dfrac{3}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ et $v=\dfrac{3}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{11}}{2}$, ou $u=\dfrac{3}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ et $v=\dfrac{3}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Corrigé exercice 107 :

C'est vrai car $P_1(-1)=(-1)^3+1=0$ et $P_2(-1)=(-1)^3-(-1)^2+2=-1-1+2=0$. Donc -1 est racine des polynômes P_1 et P_2, ce qui signifie que P_1 et P_2 se factorisent tous les deux par $(z+1)$.

Corrigé exercice 108 :

1. $(z+3\mathrm{i})(2z-3+\mathrm{i})=0 \Leftrightarrow z+3\mathrm{i}=0$ ou $2z-3+\mathrm{i}=\Leftrightarrow z=-3\mathrm{i}$ ou $z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{-3\mathrm{i};\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$.

2. $(z-2\mathrm{i})(\mathrm{i}z+1)=0 \Leftrightarrow z-2\mathrm{i}=0$ ou $\mathrm{i}z+1=0 \Leftrightarrow z=2\mathrm{i}$ ou $z=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}=\mathrm{i}$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\{\mathrm{i};2\mathrm{i}\}$.

3. $(\mathrm{i}z+1+\mathrm{i})(3\mathrm{i}z+1)=0 \Leftrightarrow z=-\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ ou $z=-\dfrac{1}{3\mathrm{i}} \Leftrightarrow z=-\dfrac{(1+\mathrm{i})\times(-\mathrm{i})}{1}$ ou $z=-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{\mathrm{i}} \Leftrightarrow z=-1+\mathrm{i}$ ou $z=\dfrac{1}{3}\mathrm{i}$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{-1+\mathrm{i};\dfrac{1}{3}\mathrm{i}\right\}$.

4. $((1+\mathrm{i})z-1)((2+\mathrm{i})z+1)=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$ ou $z=-\dfrac{1}{2+\mathrm{i}} \Leftrightarrow z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1^2+1^2}$ ou $z=-\dfrac{2-\mathrm{i}}{2^2+1^2} \Leftrightarrow z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ ou $z=-\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$ d'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i};-\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}\right\}$.

Corrigé exercice 109 :

1. $z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2=-1 \Leftrightarrow z=-\mathrm{i}$ ou $z=\mathrm{i}$ d'où $S_{\mathbb{C}}=\{-\mathrm{i};\mathrm{i}\}$.

2. $z^2+2=0 \Leftrightarrow z^2=-2 \Leftrightarrow z=-\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z=\mathrm{i}\sqrt{2}$ d'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\mathrm{i}\sqrt{2};\mathrm{i}\sqrt{2}\right\}$.

3. $z^2+16=0 \Leftrightarrow z^2=-16 \Leftrightarrow z=-4\mathrm{i}$ ou $z=4\mathrm{i}$ d'où $S_{\mathbb{C}}=\{-4\mathrm{i};4\mathrm{i}\}$.

4. $z^2+20=0 \Leftrightarrow z^2=-20 \Leftrightarrow z=-\mathrm{i}\sqrt{20}$ ou $z=\mathrm{i}\sqrt{20} \Leftrightarrow z=-2\mathrm{i}\sqrt{5}$ ou $z=2\mathrm{i}\sqrt{5}$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{-2\mathrm{i}\sqrt{5};2\mathrm{i}\sqrt{5}\right\}$.

Document sous licence libre Creative Commons

5. $z^2+\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow z^2=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}\mathrm{i}$ ou $z=\frac{1}{2}\mathrm{i}$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{i};\frac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$.

6. $z^2+\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow z^2=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow z=-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $z=\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3};\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

7. $z^2+\frac{11}{4}=0 \Leftrightarrow z^2=-\frac{11}{4} \Leftrightarrow z=\mathrm{i}\frac{\sqrt{11}}{2}$ ou $z=-\mathrm{i}\frac{\sqrt{11}}{2}$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\mathrm{i}\frac{\sqrt{11}}{2};\mathrm{i}\frac{\sqrt{11}}{2}\right\}$.

8. $z^2+\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow z^2=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow z=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{2}}$ ou $z=\mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow z=\mathrm{i}\frac{\sqrt{6}}{2}$ ou $z=-\mathrm{i}\frac{\sqrt{6}}{2}$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\mathrm{i}\frac{\sqrt{6}}{2};\mathrm{i}\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$.

Corrigé exercice 110 :

1. $z^2+z=0 \Leftrightarrow z(z+1)=0 \Leftrightarrow z=0$ ou $z=-1$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\{-1;0\}$.

2. $z^2+2\mathrm{i}z=0 \Leftrightarrow z(z+2\mathrm{i})=0 \Leftrightarrow z=0$ ou $z=-2\mathrm{i}$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\{-2\mathrm{i};0\}$.

3. $2\mathrm{i}z^2+3z=0 \Leftrightarrow z(2\mathrm{i}z+3)=0 \Leftrightarrow z=0$ ou $z=-\frac{3}{2\mathrm{i}}=-\frac{3}{2}\times\frac{1}{\mathrm{i}}=-\frac{3}{2}\times(-\mathrm{i})=\frac{3}{2}\mathrm{i}$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{3}{2}\mathrm{i};0\right\}$.

4. $(1+\mathrm{i})z^2=(2-\mathrm{i})z \Leftrightarrow z\left((1+\mathrm{i})z-(2-\mathrm{i})\right)=0 \Leftrightarrow z=0$ ou $z=\frac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{1^2+1^2}=\frac{2-1+\mathrm{i}(-2-1)}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i};0\right\}$.

5. $(1+2\mathrm{i})z^2+(2\mathrm{i}-1)z=0 \Leftrightarrow z\left((1+2\mathrm{i})z+(2\mathrm{i}-1)\right)=0 \Leftrightarrow z=0$ ou $z=\frac{1-2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\frac{(1-2\mathrm{i})^2}{1^2+2^2}=\frac{1-4-4\mathrm{i}}{5}=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i}$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i};0\right\}$.

Corrigé exercice 111 :

1. $z^2+z+1=0$ a pour discriminant $\Delta=1^2-4\times1\times1=-3=\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\overline{z_1}=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. D'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

2. $z^2+4z+13=0$ a pour discriminant $\Delta=4^2-4\times1\times13=-36=(6\mathrm{i})^2<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\frac{-4-6\mathrm{i}}{2}$ et $z_2=\overline{z_1}=\frac{-4+6\mathrm{i}}{2}$. D'où $S_{\mathbb{C}}=\{-2-3\mathrm{i};-2+3\mathrm{i}\}$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

3. $4z^2-4z+17=0$ a pour discriminant $\Delta=(-4)^2-4\times4\times17=-256=(16\text{i})<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{4-16\text{i}}{8}$ et $z_2=\overline{z_1}=\dfrac{4+16\text{i}}{8}$. D'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\dfrac{1}{2}-2\text{i};\dfrac{1}{2}+2\text{i}\right\}$.

4. $2z^2+2z+5=0$ a pour discriminant $\Delta=2^2-4\times2\times5=-36=(6\text{i})<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{-2-6\text{i}}{4}$ et $z_2=\overline{z_1}=\dfrac{-2+6\text{i}}{4}$. D'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\text{i};-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\text{i}\right\}$.

5. $z^2-\sqrt{2}z+1=0$ a pour discriminant $\Delta=\left(-\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times1=\left(\text{i}\sqrt{2}\right)^2<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{\sqrt{2}-\text{i}\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=\overline{z_1}=\dfrac{\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}}{2}$. D'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

6. $9z^2-6z+19=0$ a pour discriminant $\Delta=-648=\left(18\text{i}\sqrt{2}\right)^2$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{1}{3}-\sqrt{2}\text{i}$ et $z_2=\dfrac{1}{3}+\sqrt{2}\text{i}$. D'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{\dfrac{1}{3}-\sqrt{2}\text{i};\dfrac{1}{3}+\sqrt{2}\text{i}\right\}$.

Corrigé exercice 112 :

1. $z=-\dfrac{3}{z}$ est définie si, et seulement si, $z\neq0$. Et, pour $z\neq0$, $z=-\dfrac{3}{z}\Leftrightarrow z^2=-3\Leftrightarrow z=-\text{i}\sqrt{3}$ ou $z=\text{i}\sqrt{3}$. Ces deux solutions conviennent car elles sont différentes de 0, ainsi $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\text{i}\sqrt{3};\text{i}\sqrt{3}\right\}$.

2. $\dfrac{z}{4}=1-\dfrac{2}{z}$ est définie si, et seulement si, $z\neq0$. Et, pour $z\neq0$, $\dfrac{z}{4}=1-\dfrac{2}{z}\Leftrightarrow\dfrac{z^2}{4}=z-2\Leftrightarrow z^2-4z+8=0$ de discriminant $\Delta=(-4)^2-4\times1\times8=-16=(4\text{i})^2<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{4-4\text{i}}{2}$ et $z_2=\overline{z_1}=\dfrac{4+4\text{i}}{2}$. Ces deux solutions conviennent car elles sont différentes de 0. Ainsi, $S_{\mathbb{C}}=\{2-2\text{i};2+2\text{i}\}$.

3. $\dfrac{5}{z^2}=\dfrac{3}{z}-\dfrac{1}{2}$ est définie si, et seulement si, $z\neq0$. Et, pour $z\neq0$, $\dfrac{5}{z^2}=\dfrac{3}{z}-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 5=3z-\dfrac{z^2}{2}\Leftrightarrow z^2-6z+10=0$ de discriminant $\Delta=(-6)^2-4\times1\times10=-4=(2\text{i})^2<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{6-2\text{i}}{2}$ et $z_2=\overline{z_1}=\dfrac{6+2\text{i}}{2}$. Ces deux solutions conviennent car elles sont différentes de 0, ainsi $S_{\mathbb{C}}=\{3-\text{i};3+\text{i}\}$.

4. $5z-2=-\dfrac{26}{5z}$ est définie si, et seulement si, $z\neq0$. Et, pour $z\neq0$, $5z-2=-\dfrac{26}{5z}\Leftrightarrow 25z^2-10z+26=0$ de discriminant $\Delta=(-10)^2-4\times25\times26=-2500=(50\text{i})^2<0$

donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{10-50\mathrm{i}}{50}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{10+50\mathrm{i}}{50}$. Ces deux solutions conviennent car elles sont différentes de 0. Ainsi, $S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{1}{5} - \mathrm{i}; \dfrac{1}{5} + \mathrm{i}\right\}$.

Corrigé exercice 113 :

On pose $t = z^2$. On a ainsi $t^2 = z^4$.

1. $z^4+z^2-6=0 \Leftrightarrow t^2+t-6=0 \Leftrightarrow t=2$ ou $t=-3 \Leftrightarrow z^2=2$ ou $z^2=-3 \Leftrightarrow z=-\sqrt{2}$ ou $z=\sqrt{2}$ ou $z=-\mathrm{i}\sqrt{3}$ ou $z=-\mathrm{i}\sqrt{3}$. Ainsi, $S_{\mathbb{C}} = \left\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}; -\mathrm{i}\sqrt{3}; \mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$.

2. $z^4+z^2-2=0 \Leftrightarrow t^2+t-2=0 \Leftrightarrow t=1$ ou $t=-2 \Leftrightarrow z^2=1$ ou $z^2=-2 \Leftrightarrow z=-1$ ou $z=1$ ou $z=-\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z=-\mathrm{i}\sqrt{2}$. Ainsi, $S_{\mathbb{C}} = \left\{-1; 1; -\mathrm{i}\sqrt{2}; \mathrm{i}\sqrt{2}\right\}$.

3. $z^4+3z^2+2=0 \Leftrightarrow t^2+3t+2=0 \Leftrightarrow t=-1$ ou $t=-2 \Leftrightarrow z^2=-1$ ou $z^2=-2 \Leftrightarrow z=-\mathrm{i}$ ou $z=\mathrm{i}$ ou $z=-\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z=\mathrm{i}\sqrt{2}$. Ainsi, $S_{\mathbb{C}} = \left\{-\mathrm{i}; \mathrm{i}; -\mathrm{i}\sqrt{2}; \mathrm{i}\sqrt{2}\right\}$.

4. $8z^4+6z^2+1=0 \Leftrightarrow 8t^2+6t+1=0$ de discriminant $\Delta = 6^2-4\times8\times1=4>0$ donc l'équation $8t^2+6t+1=0$ admet deux solutions réelles distinctes : $t_1 = \dfrac{-6-2}{16} = -\dfrac{1}{2}$ et $t_2 = \dfrac{-6+2}{16} = -\dfrac{1}{4}$. Ainsi, $8z^4+6z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2=-\dfrac{1}{2}$ ou $z^2=-\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow z=-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $z=\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $z=-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ ou $z=\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. D'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{1}{2}\mathrm{i}; \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$.

5. $8z^4+22z^2+15=0 \Leftrightarrow 8t^2+22t+15=0$ de discriminant $\Delta = 22^2-4\times8\times15 = 4>0$ donc l'équation $8t^2+22t+15=0$ admet deux solutions réelles distinctes : $t_1 = \dfrac{-22-2}{16} = -\dfrac{3}{2}$ et $t_2 = \dfrac{-22+2}{16} = -\dfrac{5}{4}$. Ainsi, $8z^4+22z^2+5=0 \Leftrightarrow z^2=-\dfrac{3}{2}$ ou $z^2=-\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow z=-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ ou $z=\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ ou $z=-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ou $z=\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.. Ainsi, $S_{\mathbb{C}} = \left\{-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}}{4}; \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}}{4}; -\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{5}}{2}; \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

6. $z^3+5z+\dfrac{4}{z}=0$ est définie pour $z\neq0$. Et, pour $z\neq0$, $z^3+5z+\dfrac{4}{z}=0 \Leftrightarrow z^4+5z^2+4=0 \Leftrightarrow t^2+5t+4=0$ de discriminant $\Delta=5^2-4\times1\times4=9>0$ donc l'équation $t^2+5t+4=0$ admet deux solutions réelles distinctes : $t_1=\dfrac{-5-3}{2}=-4$ et $t_2=\dfrac{-5+3}{2}=-1$. Ainsi, $z^3+5z+\dfrac{4}{z}=0 \Leftrightarrow z^2=-4$ ou $z^2=-1 \Leftrightarrow z=-2\mathrm{i}$ ou $z=2\mathrm{i}$ ou $z=-\mathrm{i}$ ou $z=\mathrm{i}$. Ainsi, $S_{\mathbb{C}} = \{-2\mathrm{i}; 2\mathrm{i}; -\mathrm{i}; \mathrm{i}\}$.

7. $z^2+2=\dfrac{3}{z^2}$ est définie pour $z\neq0$. Et, pour $z\neq0$, $z^2+2=\dfrac{3}{z^2} \Leftrightarrow z^4+2z^2-3=0 \Leftrightarrow t^2+2t-3=0$ de discriminant $\Delta=2^2-4\times1\times(-3)=16>0$ donc l'équation $t^2+2t-3=0$ admet deux solutions réelles distinctes : $t_1=\dfrac{-2-4}{2}=-3$ et $t_2=\dfrac{-2+4}{2}=1$. Ainsi $z^3+5z+\dfrac{4}{z}=0 \Leftrightarrow z^2=1$ ou $z^2=-3 \Leftrightarrow z=-1$ ou $z=1$ ou $z=-\mathrm{i}\sqrt{3}$ ou $z=\mathrm{i}\sqrt{3}$. D'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{-1; 1; -\mathrm{i}\sqrt{3}; \mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$.

Document sous licence libre Creative Commons

8. $\dfrac{2}{z^4}+\dfrac{7}{z^2}=-3$ est définie pour $z\neq 0$. Et, pour $z\neq 0$, $\dfrac{2}{z^4}+\dfrac{7}{z^2}=-3 \Leftrightarrow 3z^4+7z^2+2=0 \Leftrightarrow 3t^2+7t+2=0$ de discriminant $\Delta=7^2-4\times3\times2=25>0$ donc l'équation $3t^2+7t+2=0$ admet deux solutions réelles distinctes : $t_1=\dfrac{-7-5}{6}=-2$ et $t_2=\dfrac{-7+5}{6}=-\dfrac{1}{3}$. Ainsi $\dfrac{2}{z^4}+\dfrac{7}{z^2}=-3 \Leftrightarrow z^2=-2$ ou $z^2=-\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow z=-\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z=\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z=-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ou $z=\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ainsi $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\mathrm{i}\sqrt{2};\mathrm{i}\sqrt{2};-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3};\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

Corrigé exercice 114 :

On pose $t=z^2$. On a ainsi $t^2=z^4$.

1. $z^4-2z^2-3=0 \Leftrightarrow t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow t=-1$ ou $t=3 \Leftrightarrow z^2=-1$ ou $z^2=3 \Leftrightarrow z=-\mathrm{i}$ ou $z=\mathrm{i}$ ou $z=-\sqrt{3}$ ou $z=\sqrt{3}$. D'où $S_{\mathbb{C}}=\{-\sqrt{3};\sqrt{3};-\mathrm{i};\mathrm{i}\}$.

2. $z^4-3z^2-10=0 \Leftrightarrow t^2-3t-10=0$ de discriminant $\Delta=(-3)^2-4\times1\times(-10)=49>0$ donc l'équation $t^2-3t-10=0$ admet deux solutions réelles distinctes : $t_1=\dfrac{3-7}{2}=-2$ et $t_2=\dfrac{3+7}{2}=5$. Ainsi, $z^4-3z^2-10=0 \Leftrightarrow z^2=-2$ ou $z^2=5 \Leftrightarrow z=-\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z=\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z=-\sqrt{5}$ ou $z=\sqrt{5}$. Ainsi, $S_{\mathbb{C}}=\{-\mathrm{i}\sqrt{2};\mathrm{i}\sqrt{2};-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$.

3. $z^4-2z^2-8=0 \Leftrightarrow t^2-2t-8=0$ de discriminant $\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-8)=36>0$ donc l'équation $t^2-2t-8=0$ admet deux solutions réelles distinctes : $t_1=\dfrac{2-6}{2}=-2$ et $t_2=\dfrac{2+6}{2}=4$. Ainsi, $z^4-2z^2-8=0 \Leftrightarrow z^2=-2$ ou $z^2=4$ $\Leftrightarrow z=-\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z=\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z=-2$ ou $z=2$. Ainsi, $S_{\mathbb{C}}=\{-\mathrm{i}\sqrt{2};\mathrm{i}\sqrt{2};-2;2\}$.

4. $2z^4-z^2-3=0 \Leftrightarrow 2t^2-t-3=0$ de discriminant $\Delta=(-1)^2-4\times2\times(-3)=25>0$ donc l'équation $2t^2-t-3=0$ admet deux solutions réelles distinctes : $t_1=\dfrac{1-5}{4}=-1$ et $t_2=\dfrac{1+5}{4}=\dfrac{3}{2}$. Ainsi, $2z^4-z^2-3=0 \Leftrightarrow z^2=-1$ ou $z^2=\dfrac{3}{2}$ $\Leftrightarrow z=-\mathrm{i}$ ou $z=\mathrm{i}$ ou $z=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ ou $z=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Ainsi, $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\mathrm{i};\mathrm{i};-\dfrac{\sqrt{6}}{4};\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right\}$.

5. $z^3-4z=\dfrac{21}{z}$ est définie pour $z\neq 0$. Et, si $z\neq0$, $z^3-4z=\dfrac{21}{z} \Leftrightarrow z^4-4z^2-21=0 \Leftrightarrow t^2-4t-21=0$ de discriminant $\Delta=(-4)^2-4\times1\times(-21)=100>0$ donc l'équation $t^2-4t-21=0$ admet deux solutions réelles distinctes : $t_1=\dfrac{4-10}{2}=-3$ et $t_2=\dfrac{4+10}{2}=7$. Ainsi, $z^3-4z=\dfrac{21}{z} \Leftrightarrow z^2=-3$ ou $z^2=7 \Leftrightarrow z=-\mathrm{i}\sqrt{3}$ ou $z=\mathrm{i}\sqrt{3}$ ou $z=-\sqrt{7}$ ou $z=\sqrt{7}$. Ainsi, $S_{\mathbb{C}}=\{-\mathrm{i}\sqrt{3};\mathrm{i}\sqrt{3};-\sqrt{7};\sqrt{7}\}$.

6. $\dfrac{1}{4}z^3=z+\dfrac{3}{z}$ est définie pour $z\neq0$. Et, si $z\neq0$, $\dfrac{1}{4}z^3=z+\dfrac{3}{z} \Leftrightarrow z^4-4z^2-12=0 \Leftrightarrow t^2-4t-12=0$ de discriminant $\Delta=(-4)^2-4\times1\times(-12)=64>0$ donc l'équation $t^2-4t-12=0$ admet deux solutions réelles distinctes : $t_1=\dfrac{4-8}{2}=-2$ et $t_2=\dfrac{4+8}{2}=6$. Ainsi, $\dfrac{1}{4}z^3=z+\dfrac{3}{z} \Leftrightarrow z^2=-2$ ou $z^2=6 \Leftrightarrow z=-\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z=\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z=-\sqrt{6}$ ou $z=\sqrt{6}$. Ainsi, $S_{\mathbb{C}}=\{-\mathrm{i}\sqrt{2};\mathrm{i}\sqrt{2};-\sqrt{6};\sqrt{6}\}$.

Document sous licence libre Creative Commons

7. $z^5 - 2z = 4z^3 + 3z \Leftrightarrow z^5 - 4z^3 - 5z = 0 \Leftrightarrow z(z^4 - 4z^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z^4 - 4z^2 - 5 = 0$. Or $z^4 - 4z^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ ou $t = 5$. Ainsi $z^4 - 4z^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -1$ ou $z^2 = 5 \Leftrightarrow z = -\text{i}$ ou $z = \text{i}$ ou $z = -\sqrt{5}$ ou $z = \sqrt{5}$. D'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{-\text{i}; \text{i}; 0; -\sqrt{5}; \sqrt{5}\right\}$.

Corrigé exercice 115 :

1. Le programme suivant donne le nombre de solutions dans $\mathbb{C}$ et la valeur de ces solutions pour une équation $az^2 + bz + c = 0$, où les réels a, b et c sont saisis par l'utilisateur (avec $a \neq 0$).

```
d ← b² − 4ac
Si d = 0 :
    Afficher « L'équation a une solution réelle. »
    Afficher −b/2a
Sinon si d > 0 :
    Afficher « L'équation a deux solutions réelles. »
    Afficher (−b − √d)/2a et (−b + √d)/2a
Sinon
    Afficher « L'équation a deux solutions complexes conjuguées. »
    Afficher (−b − i√(−d))/2a et (−b + i√(−d))/2a
```

2. On peut définir une fonction trinome sous Python qui prend en arguments les réels a, b et c et retourne le nombre de solutions dans $\mathbb{C}$ et leurs valeurs.

```python
from math import*

def trinome(a, b, c):
    d = b**2 - 4*a*c
    if d == 0:
        print("L'équation a une solution réelle", -b/(2*a))
    elif d > 0:
        print("L'équation a deux solutions réelles distinctes", (-b-sqrt(d))/(2*a),
"et", (-b+sqrt(d))/(2*a))
    else:
        print("L'équation a deux solutions complexes conjuguées", complex(-b/(2*a),
-sqrt(-d)/(2*a)), "et",complex(-b/(2*a),sqrt(-d)/(2*a)))
```

Corrigé exercice 116 :

1. z_1 et z_2 sont les racines du trinôme $z^2 - 6z + 13$ de discriminant $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -16 = (4\text{i})^2 < 0$. Ce trinôme admet donc deux racines complexes conjuguées : $z = \dfrac{6 - 4\text{i}}{2} = 3 - 2\text{i}$ et $z = \overline{3 - 2\text{i}} = 3 + 2\text{i}$. Ainsi, $z_1 = 3 - 2\text{i}$ et $z_2 = 3 + 2\text{i}$, ou $z_1 = 3 + 2\text{i}$ et $z_2 = 3 - 2\text{i}$.

Document sous licence libre Creative Commons

2. z_1 et z_2 sont les racines du trinôme $z^2-10z+26$ de discriminant $\Delta=(-10)^2-4\times1\times 26=-4=(2\mathrm{i})^2<0$. Ce trinôme admet donc deux racines complexes conjuguées : $z=\dfrac{10-2\mathrm{i}}{2}=5-\mathrm{i}$ et $z=\overline{5-\mathrm{i}}=5+\mathrm{i}$. Ainsi, $z_1=5-\mathrm{i}$ et $z_2=5+\mathrm{i}$, ou $z_1=5+\mathrm{i}$ et $z_2=5-\mathrm{i}$.

3. z_1 et z_2 sont les racines du trinôme z^2-z+1 de discriminant $\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=-3=\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2<0$. Ce trinôme admet donc deux racines complexes conjuguées : $z=\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z=\overline{\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, $z_1=\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ou $z_1=\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4. z_1 et z_2 sont les racines du trinôme $z^2-\sqrt{2}z+\dfrac{3}{4}$ de discriminant $\Delta=\left(-\sqrt{2}\right)^2-4\times 1\times\dfrac{3}{4}=-1=(\mathrm{i})^2<0$. Ce trinôme admet donc deux racines complexes conjuguées : $z=\dfrac{\sqrt{2}-\mathrm{i}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ ou $z=\overline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. Ainsi, $z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et $z_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$, ou $z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et $z_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

Corrigé exercice 117 :

1. z_1 et z_2 sont les racines du trinôme $z^2+z+\dfrac{5}{4}$ de discriminant $\Delta=1^2-4\times1\times\dfrac{5}{4}=-4=(2\mathrm{i})^2<0$. Ce trinôme admet donc deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{-1-2\mathrm{i}}{2}=-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}$ et $\overline{-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}}=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}$. D'où $z_1=-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}$ et $z_2=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}$, ou $z_1=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}$ et $z_2=-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}$.

2. z_1 et z_2 sont les racines du trinôme $z^2+2\sqrt{2}z+6$ de discriminant $\Delta=\left(2\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times6=-16=(4\mathrm{i})^2<0$. Ce trinôme admet deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{-2\sqrt{2}-4\mathrm{i}}{2}=-\sqrt{2}-2\mathrm{i}$ et $\overline{-\sqrt{2}-2\mathrm{i}}=-\sqrt{2}+2\mathrm{i}$. D'où $z_1=-\sqrt{2}-2\mathrm{i}$ et $z_2=-\sqrt{2}+2\mathrm{i}$, ou $z_1=-\sqrt{2}+2\mathrm{i}$ et $z_2=-\sqrt{2}-2\mathrm{i}$.

3. z_1 et z_2 sont les racines du trinôme $z^2+\sqrt{3}z+1$ de discriminant $\Delta=\left(\sqrt{3}\right)^2-4\times 1\times1=-1=(\mathrm{i})^2<0$. Ce trinôme admet donc deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{-\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et $\overline{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. D'où $z_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et $z_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$, ou $z_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et $z_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

4. z_1 et z_2 sont les racines du trinôme $z^2+\sqrt{2}z+1$ de discriminant $\Delta=\left(\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times 1=-2=\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2<0$. Ce trinôme admet donc deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{-\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\overline{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $z_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Document sous licence libre Creative Commons

et $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$, ou $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Corrigé exercice 118 :

1. $P(z) = z^3+1 = z^3-(-1)^3 = (z+1)(z^2-z+1) = (z+1)\left(z - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ car le trinôme $z^2 - z + 1$ de discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 = -3 = \left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 < 0$ admet deux racines complexes conjuguées :
$$z_1 = \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
2. $P(z) = z^3 - 8 = z^3 - 2^3 = (z-2)(z^2+2z+4) = (z+1)\left(z+1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(z+1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$ car le trinôme z^2+2z+4 de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 = \left(2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 < 0$ admet deux racines complexes conjuguées :
$$z_1 = \frac{-2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$
3. $P(z) = z^3 + \mathrm{i} = z^3 - (-\mathrm{i}) = z^3 - \mathrm{i}^3 = (z-\mathrm{i})(z^2 + \mathrm{i}z - 1)$
$= (z-\mathrm{i})\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ car le trinôme $z^2 + \mathrm{i}z - 1$ de discriminant $\Delta = \mathrm{i}^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 3$ admet deux racines dans $\mathbb{C}$:
$$z_1 = \frac{-\mathrm{i} - \sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \text{ et } z_2 = \frac{-\mathrm{i} + \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$
4. $P(z) = z^3 + 8\mathrm{i} = z^3 - (-8\mathrm{i}) = z^3 - (2\mathrm{i})^3 = (z - 2\mathrm{i})(z^2 + 2\mathrm{i}z - 4) = (z - 2\mathrm{i})\left(z + \sqrt{3} + \mathrm{i}\right)\left(z - \sqrt{3} + \mathrm{i}\right)$ car le trinôme $z^2 + 2\mathrm{i}z - 4$ de discriminant $\Delta = (2\mathrm{i})^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 12 = (2\sqrt{3})^2$ admet deux racines dans $\mathbb{C}$:
$$z_1 = \frac{-2\mathrm{i} - 2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} - \mathrm{i} \text{ et } z_2 = \frac{-2\mathrm{i} + 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - \mathrm{i}.$$
5. $P(z) = z^5 - 32\mathrm{i} = z^5 - (2\mathrm{i})^5 = (z - 2\mathrm{i})(z^4 + 2\mathrm{i}z^3 - 4z^2 - 8\mathrm{i}z + 16)$. En classe de terminale, on ne peut pas factoriser davantage.

Corrigé exercice 119 :

1. $P(z) = z^3 + 4z = z(z^2+4) = z(z-2\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})$
2. $P(z) = z^3 + z^2 + z + 1 = z(z^2+1) + (z^2+1) = (z+1)(z^2+1) = (z+1)(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$
3. $P(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2 = z^2(z-2) + (z-2) = (z-2)(z^2+1) = (z-2)(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$
4. $P(z) = z^5 - z = z(z^4 - 1) = z\left((z^2)^2 - (1^2)^2\right) = z(z^2 - 1^2)(z^2+1)$
$= z(z-1)(z+1)(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

5. $P(z) = z^5 + 3z^3 + z^2 + 3 = z^3(z^2+3) + (z^2+3) = (z^2+3)(z^3+1)$
$= \left(z - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(z + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(z^3 - (-1)^3\right)$
$= \left(z - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(z + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)(z+1)(z^2 - z + 1)$
$= \left(z - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(z + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)(z+1)\left(z - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
car le trinôme $z^2 - z + 1$ de discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 = \left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 < 0$ admet deux racines complexes conjuguées :
$$z_1 = \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \overline{z_2} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
6. $P(z) = z^5 - z^4 + 5z^3 - 5z^2 + 4z - 4 = z^4(z-1) + 5z^2(z-1) + 4(z-1) = (z-1)(z^4 + 5z^2 + 4) = (z-1)(z^2+1)(z^2+4)$ car, en posant $t = z^2$, $z^4 + 5z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 5t + 4 = 0$ de discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 > 0$ et admettant donc deux racines réelles distinctes : -1 et -4.
Donc $P(z) = (z-1)(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})$.

Corrigé exercice 120 :

1. $P(1) = 1^3 + 1^2 - 2 = 0$ donc 1 est une racine de P. Ainsi, P se factorise par $(z-1)$.
2. On cherche les réels a, b et c tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$
$\Leftrightarrow az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c = z^3 + z^2 - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - a = 1 \\ c - b = 0 \\ -c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-1)(z^2 + 2z + 2)$.
3. $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+2z+2) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z^2 + 2z + 2 = 0$. On reconnaît un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 = (2\mathrm{i})^2 < 0$ donc $z^2 + 2z + 2 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-2 - 2\mathrm{i}}{2} = -1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = -1 + \mathrm{i}$. Ainsi, $S_{\mathbb{C}} = \{1; -1 - \mathrm{i}; -1 + \mathrm{i}\}$.

Corrigé exercice 121 :

1. $P(2) = 2^3 - 4 \times 2^2 + 6 \times 2 - 4 = 8 - 16 + 12 - 4 = 0$ donc 2 est une racine de P. Ainsi, P se factorise par $(z-2)$.
2. On cherche les réels a, b et c tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-2)(az^2 + bz + c)$
$\Leftrightarrow az^3 + (b - 2a)z^2 + (c - 2b)z - 2c = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -4 \\ c - 2b = 6 \\ -2c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}.$$
Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-2)(z^2 - 2z + 2)$.

Document sous licence libre Creative Commons
CC BY NC SA

3. $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2-2z+2) = 0 \Leftrightarrow z = 2$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$. On reconnaît un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 = (2\mathrm{i})^2 < 0$ donc $z^2 - 2z + 2 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{2-2\mathrm{i}}{2} = 1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 + \mathrm{i}$. Ainsi $S_{\mathbb{C}} = \{2; 1-\mathrm{i}; 1+\mathrm{i}\}$.

Corrigé exercice 122 :

1. $P(-2\mathrm{i}) = (-2\mathrm{i})^3 - 2\left(\sqrt{2} - \mathrm{i}\right)(-2\mathrm{i})^2 + \left(3 - 4\mathrm{i}\sqrt{2}\right) \times (-2\mathrm{i}) + 6\mathrm{i} = 8\mathrm{i} + 8\sqrt{2} - 8\mathrm{i} - 6\mathrm{i} - 8\sqrt{2} + 6\mathrm{i} = 0$ donc $-2\mathrm{i}$ est une racine de P. Ainsi P se factorise par $(z + 2\mathrm{i})$.

2. On cherche les réels a, b et c tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z+2\mathrm{i})(az^2+bz+c)$ $\Leftrightarrow az^3 + (b+2a\mathrm{i})z^2 + (c+2b\mathrm{i})z + 2c\mathrm{i} = P(z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + 2a\mathrm{i} = -2\left(\sqrt{2} - \mathrm{i}\right) \\ c + 2b\mathrm{i} = 3 - 4\mathrm{i}\sqrt{2} \\ 2c\mathrm{i} = 6\mathrm{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2\sqrt{2} \\ c = 3 \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{Z}$, $P(z) = (z+2\mathrm{i})(z^2 - 2\sqrt{2}z + 3)$.

3. $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+2\mathrm{i})(z^2 - 2\sqrt{2}z + 3) = 0 \Leftrightarrow z = -2\mathrm{i}$ ou $z^2 - 2\sqrt{2}z + 3 = 0$. On reconnaît un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 3 = -4 = (2\mathrm{i})^2 < 0$ donc $z^2 - 2\sqrt{2}z + 3 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{2\sqrt{2} - 2\mathrm{i}}{2} = \sqrt{2} - \mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{2} + \mathrm{i}$. Ainsi, $S_{\mathbb{C}} = \left\{-2\mathrm{i}; \sqrt{2} - \mathrm{i}; \sqrt{2} + \mathrm{i}\right\}$.

Corrigé exercice 123 :

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $P(\mathrm{i}\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{i}\alpha)^3 - (4+\mathrm{i})(\mathrm{i}\alpha)^2 + (5+4\mathrm{i}) \times \mathrm{i}\alpha - 5\mathrm{i} = 0$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 4\alpha + \mathrm{i}(-\alpha^3 + \alpha^2 + 5\alpha - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha^2 - 4\alpha = 0 \\ -\alpha^3 + \alpha^2 + 5\alpha - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha(\alpha - 1) = 0 \\ -\alpha^2(\alpha - 1) + 5(\alpha - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 1 \\ (\alpha - 1)(-\alpha^2 + 5) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Ainsi, l'unique racine imaginaire pure de P est i, et donc P se factorise par $(z - \mathrm{i})$.

2. On cherche les réels a, b et c tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - \mathrm{i})(az^2 + bz + c)$

$$\Leftrightarrow az^3 + (b - \mathrm{i}a)z^2 + (c - \mathrm{i}b)z - \mathrm{i}c = P(z) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - \mathrm{i}a = -4 - \mathrm{i} \\ c - \mathrm{i}b = 5 + 4\mathrm{i} \\ -\mathrm{i}c = -5\mathrm{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 5 \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - \mathrm{i})(z^2 - 4z + 5)$.

Document sous licence libre Creative Commons

3. $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - \mathrm{i})(z^2 - 4z + 5) = 0 \Leftrightarrow z = \mathrm{i}$ ou $z^2 - 4z + 5 = 0$. On reconnaît un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 = (2\mathrm{i})^2 < 0$ donc $z^2 - 4z + 5 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{4 - 2\mathrm{i}}{2} = 2 - \mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2 + \mathrm{i}$. Ainsi, $S_{\mathbb{C}} = \{\mathrm{i}; 2 - \mathrm{i}; 2 + \mathrm{i}\}$.

Corrigé exercice 124 :

1. $P(0) = 1$ donc 0 n'est pas racine de P.
2. a. $u^2 - 3 = \left(z + \dfrac{1}{z}\right)^2 - 3 = z^2 + 2 + \dfrac{1}{z^2} - 3 = z^2 + \dfrac{1}{z^2} - 1$.

   b. $\dfrac{P(z)}{z^2} = z^2 + 2z - 1 + \dfrac{2}{z} + \dfrac{1}{z^2} = z^2 + \dfrac{1}{z^2} - 1 + 2\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = u^2 - 3 + 2u$
3. $P(z) = 0 \Leftrightarrow u^2 + 2u - 3 = 0 \Leftrightarrow u = 1$ ou $u = -3$.

   Ainsi $P(z) = 0 \Leftrightarrow z + \dfrac{1}{z} = 1$ ou $z + \dfrac{1}{z} = -3 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$ ou $z^2 + 3z + 1 = 0$ $\Leftrightarrow z = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, car le discriminant du trinôme $z^2 - z + 1$ est $\Delta_1 = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 = \left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 < 0$ donc $z^2 - z + 1$ admet deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; ou $z = \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ ou $z = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2}$, car le discriminant du trinôme $z^2 + 3z + 1$ est $\Delta_2 = 3^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5 > 0$ donc $z^2 + 3z + 1$ admet deux racines réelles distinctes : $\dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2}$.

   Ainsi, en conclusion, $S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2}; \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right\}$.

Corrigé exercice 125 :

1. a. $P(0) = 1 \neq 0$ donc 0 n'est pas une racine de P.

   b. Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $u = z - \dfrac{1}{z}$. Alors $u^2 = \left(z - \dfrac{1}{z}\right)^2 = z^2 - 2 + \dfrac{1}{z^2}$. D'où $\dfrac{P(z)}{z^2} = z^2 + 2z - 5 - \dfrac{2}{z} + \dfrac{1}{z^2} = z^2 + \dfrac{1}{z^2} - 2 - 3 + 2\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$ et donc $\dfrac{P(z)}{z^2} = z^2 + \dfrac{1}{z^2} - 2 + 2\left(z - \dfrac{1}{z}\right) - 3 = u^2 + 2u - 3$.

2. $P(z) = 0 \Leftrightarrow u^2 + 2u - 3 = 0 \Leftrightarrow u = 1$ ou $u = -3$. Ainsi, $P(z) = 0 \Leftrightarrow z - \dfrac{1}{z} = 1$ ou $z - \dfrac{1}{z} = -3 \Leftrightarrow z^2 - z - 1 = 0$ ou $z^2 + 3z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ou $z = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$, car le discriminant du trinôme $z^2 - z - 1$ est $\Delta_1 = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ donc $z^2 - z - 1$ admet deux racines réelles distinctes : $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$; ou $z = \dfrac{-3 - \sqrt{13}}{2}$ ou $z = \dfrac{-3 + \sqrt{13}}{2}$, car le discriminant du trinôme $z^2 + 3z - 1$ est $\Delta_2 = 3^2 - 4 \times 1 \times$

Document sous licence libre Creative Commons

$(-1) = 13 > 0$ donc z^2+3z-1 admet deux racines réelles distinctes : $\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$. En conclusion, $S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}; \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Corrigé exercice 126 :

1. a. $P(0) = 1 \neq 0$ donc 0 n'est pas racine de P.

   b. Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $u = z + \dfrac{1}{z}$. Alors $u^2 = \left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2 = z^2+2+\dfrac{1}{z^2}$. Et $\dfrac{P(z)}{z^2} = z^2-\left(1+\sqrt{3}\right)z+2+\sqrt{3}-\dfrac{1+\sqrt{3}}{z}+\dfrac{1}{z^2} = z^2+\dfrac{1}{z^2}+2+\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{3}\right)\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = u^2-\left(1+\sqrt{3}\right)u+\sqrt{3}$.

2. a. 1 est une solution évidente de l'équation $(E_1) : u^2-\left(1+\sqrt{3}\right)u+\sqrt{3} = 0$. De plus le produit des deux racines de ce trinôme est égal à $\sqrt{3}$. Ainsi $(E_1) \Leftrightarrow u = 1$ ou $u = \sqrt{3}$.

   b. $(E_2) : z+\dfrac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow z^2-z+1 = 0$ a pour discriminant $\Delta_2 = (-1)^2-4\times1\times1 = -3 = \left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 < 0$ donc (E_2) admet deux solutions complexes conjuguées : $\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, $(E_2) \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   De même, $(E_3) : z+\dfrac{1}{z} = \sqrt{3} \Leftrightarrow z^2-\sqrt{3}z+1 = 0$ a pour discriminant $\Delta_2 = \left(-\sqrt{3}\right)^2-4\times1\times1 = -1 = (\mathrm{i})^2 < 0$ donc (E_3) admet deux solutions complexes conjuguées : $\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et $\overline{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. Ainsi, $(E_3) \Leftrightarrow z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ ou $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

3. $P(z) = 0 \Leftrightarrow u^2-\left(1+\sqrt{3}\right)u+\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow u = 1$ ou $u = \sqrt{3}$ d'après la question 2.a.. On obtient ainsi $P(z) = 0 \Leftrightarrow z+\dfrac{1}{z} = 1$ ou $z+\dfrac{1}{z} = \sqrt{3} \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ ou $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ d'après la question 2.b..

   En conclusion, $S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$.

Corrigé exercice 127 :

1. Pour tout $z \in \mathbb{Z}$, $P(z) = (z-u)(z-v)(z-w) = z^3-(u+v+w)z^2+(uv+uw+vw)z-uvw$. Ainsi, $P(z)$ est de la forme az^3+bz^2+cz+d avec $\begin{cases} a = 1 \\ b = -(u+v+w) \\ c = uv+uw+vw \\ d = -uvw \end{cases}$.

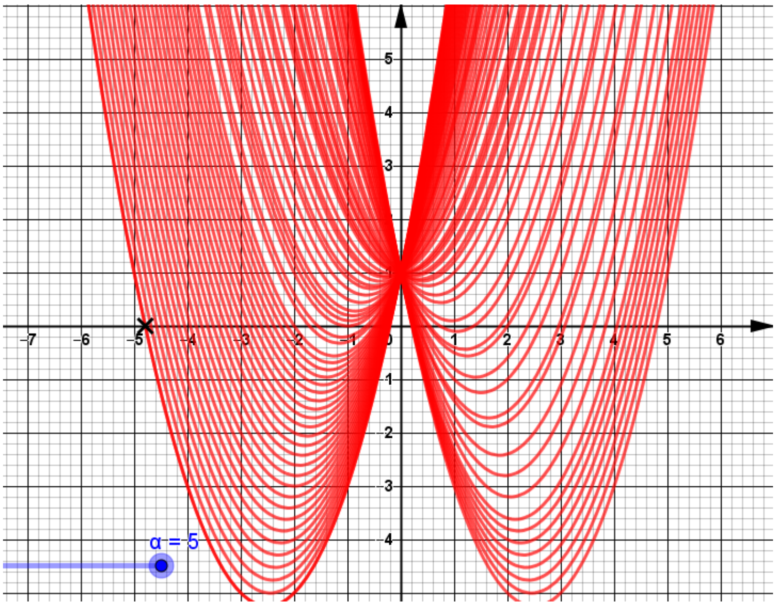
2. D'après la question 1., on a donc $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$ et $d = -1$.

   Par conséquent, le polynôme P s'écrit, pour tout $z \in \mathbb{Z}$, $P(z) = z^3 - z^2 + z - 1 = z^2(z-1) + (z-1) = (z-1)(z^2+1) = (z-1)(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$. Donc les nombres u, v, et w sont les nombres 1, i et $-$i.

Corrigé exercice 128 :

1. $u \in \mathbb{C}$ est racine de P si, et seulement si, $P(u) = 0 \Leftrightarrow au^2 + bu + a = 0 \Leftrightarrow u^2 + \dfrac{b}{a}u + 1 = 0$ car $a \neq 0$. Ainsi u est solution de l'équation $(E) : z^2 + \alpha z + 1 = 0$ avec $\alpha = \dfrac{b}{a}$.

2. a. On obtient les courbes ci-dessous.



   b. On peut conjecturer que si $\alpha \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$, alors la fonction f admet deux racines réelles distinctes, c'est-à-dire que sa courbe représentative admet deux points d'intersection avec l'axe des abscisses.

   c. L'équation $f(x) = 0$ admet deux racines réelles distinctes si, et seulement si, son discriminant est strictement positif. On résout alors l'inéquation $\Delta = \alpha^2 - 4 \times 1 \times 1 = \alpha^2 - 4 = (\alpha-2)(\alpha+2) > 0 \Leftrightarrow \alpha < -2$ ou $\alpha > 2$. Ainsi, la fonction f admet bien deux racines réelles distinctes si, et seulement si, $\alpha \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.

3. a. Soit $u \in \mathbb{C}$ racine de (E). Alors $(\overline{u})^2 + \alpha \times \overline{u} + 1 = \overline{u^2} + \overline{\alpha} \times \overline{u} + \overline{1}$ car α et 1 sont des réels donc égaux à leurs conjugués. D'où $(\overline{u})^2 + \alpha \times \overline{u} + 1 = \overline{u^2 + \alpha u + 1}$ car le conjugué d'une somme est égal à la somme des conjugués. On en déduit que $(\overline{u})^2 + \alpha \times \overline{u} + 1 = \overline{0} = 0$ car u est racine de (E) et $0 \in \mathbb{R}$ est son propre conjugué, ce qui prouve que $\overline{u}$ est aussi solution de (E).

   b. Soit $u \in \mathbb{C}^*$ racine de (E). Alors $\left(\dfrac{1}{u}\right)^2 + \alpha \times \dfrac{1}{u} + 1 = \dfrac{1 + \alpha \times u + u^2}{u^2} = 0$ car u est solution de (E). Donc $\dfrac{1}{u}$ est également solution de (E).

c. Soit $-2 < \alpha < 2$. D'après la question 2.a., cela signifie que (E) a un discriminant strictement négatif, donc que (E) admet deux solutions complexes conjuguées. Or, une équation polynomiale de degré 2 admet au plus deux solutions et, d'après la question 3.b., si u est solution de (E), alors $\frac{1}{u}$ aussi. Ainsi, (E) admet deux racines complexes à la fois inverses et conjuguées.

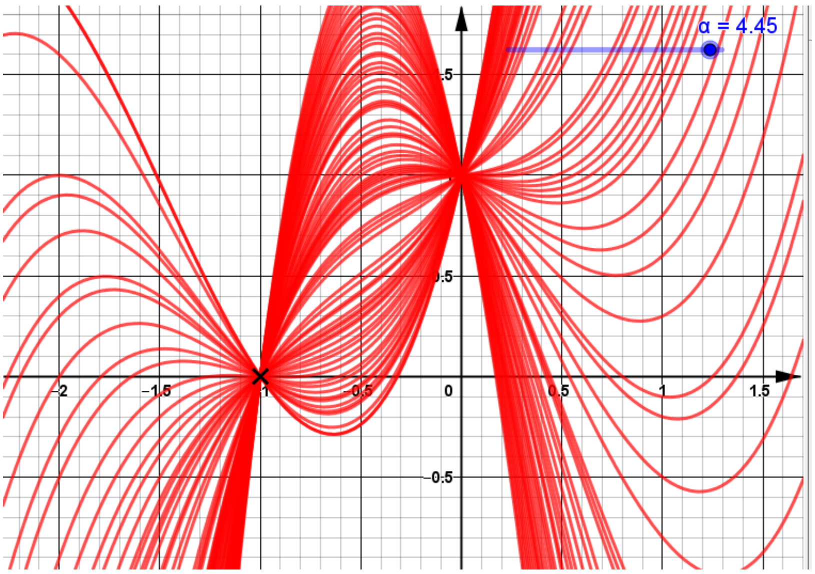
4. En conclusion :

- Si $\frac{b}{a} < -2$ ou $\frac{b}{a} > 2$, alors P admet deux racines réelles distinctes.
- Si $-2 < \frac{b}{a} < 2$, alors P admet deux racines complexes conjuguées et inverses l'une de l'autre.
- Si $\frac{b}{a} = -2$, alors P admet une racine réelle $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \times \frac{b}{a} = 1$.
- Si $\frac{b}{a} = 2$, alors P admet une racine réelle $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \times \frac{b}{a} = -1$.

Corrigé exercice 129 :

1. $u \in \mathbb{C}$ est racine de P si, et seulement si, $P(u) = 0 \Leftrightarrow au^3 + bu^2 + bu + a = 0$ $\Leftrightarrow u^3 + \frac{b}{a}u^2 + \frac{b}{a}u + 1 = 0$ car $a \neq 0$. D'où u est solution de l'équation (E) : $z^3 + \alpha z^2 + \alpha z + 1 = 0$ avec $\alpha = \frac{b}{a}$.

2. a. On obtient les courbes ci-dessous.



b. On conjecture que -1 est solution de (E).

c. $f(-1) = (-1)^3 + \alpha \times (-1)^2 + \alpha \times (-1) + 1 = -1 + \alpha - \alpha + 1 = 0$ donc, pour tout réel α, -1 est bien solution de $x^3 + \alpha x^2 + \alpha x + 1 = 0$.

3. a. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(z+1)(z^2 - z + 1) = z^3 - z^2 + z + z^2 - z + 1 = z^3 + 1$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

b. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \alpha z + 1 = (z^3 + 1) + \alpha z(z + 1) = (z + 1)(z^2 - z + 1) + \alpha z(z + 1) = (z + 1)\left(z^2 + (\alpha - 1)z + 1\right)$.
On a donc, pour tout $z \in \mathbb{Z}$, $P(z) = (z+1)Q(z)$ avec $Q(z) = z^2 + (\alpha-1)z+1$. Et Q est bien un polynôme symétrique de degré 2.

c. P admet trois racines réelles si, et seulement si, Q admet deux racines réelles distinctes c'est-à-dire si, et seulement si, le discriminant de Q est strictement positif. Or $\Delta = (\alpha - 1)^2 - 4 = (\alpha - 1 - 2)(\alpha - 1 + 2) = (\alpha - 3)(\alpha + 1) > 0$ $\Leftrightarrow \alpha < -1$ ou $\alpha > 3$.

4. On utilise les résultats des questions précédentes puisque ce polynôme est symétrique. $(E) : 2z^3+z^2+z+2 = 0 \Leftrightarrow z^3+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z+1 = 0$ donc $\alpha = \frac{1}{2} \in \,]-1;3[$. D'après les questions précédentes, l'équation (E) admet donc une unique solution réelle : $z = -1$. De plus, d'après la question 3.b., $(E) \Leftrightarrow (z+1)\left(z^2 - \frac{1}{2}z + 1\right) = 0$. Le trinôme $z^2-\frac{1}{2}z+1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\times1\times1 = -\frac{15}{4} = \left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 < 0$ donc il admet deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{15}}{2}}{2} = \frac{1}{4} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{15}}{4}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \frac{1}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{15}}{4}$.
En conclusion, $S_{\mathbb{C}} = \left\{-1; \frac{1}{4} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{15}}{4}; \frac{1}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{15}}{4}\right\}$.

Corrigé exercice 130 :

1. $u \in \mathbb{C}$ est racine de P si, et seulement si, $P(u) = 0 \Leftrightarrow au^4 + bu^3 + cu^2 + bu + a = 0$ $\Leftrightarrow u^4 + \frac{b}{a}u^3 + \frac{c}{a}u^2 + \frac{b}{a}u + 1 = 0$ car $a \neq 0$. Ce qui prouve que u est solution de l'équation $(E) : z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + \alpha z + 1 = 0$ avec $\alpha = \frac{b}{a}$ et $\beta = \frac{c}{a}$.

2. a. $0^4 + \alpha \times 0^3 + \beta \times 0^2 + \alpha \times 0 + 1 = 1$ donc 0 n'est pas solution de (E).
   b. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{Q(z)}{z^2} = z^2+\alpha z+\beta+\frac{\alpha}{z}+\frac{1}{z^2} = \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)+\alpha\left(z + \frac{1}{z}\right)+\beta$.
   c. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $Z = z + \frac{1}{z}$. D'où $Z^2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = z^2+2+\frac{1}{z^2} \Leftrightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} = Z^2 - 2$. Par conséquent, $Q(z) = 0 \Leftrightarrow \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \alpha\left(z + \frac{1}{z}\right) + \beta = 0 \Leftrightarrow Z^2 + \alpha Z + \beta - 2 = 0$, car 0 n'est pas racine de Q.

3. Soit $Z = k \in \mathbb{R}$ solution de $Z^2 + \alpha Z + \beta - 2 = 0$. On cherche les valeurs de k telles que $z + \frac{1}{z} = k$ admette deux solutions réelles distinctes.
Or $z+\frac{1}{z} = k \Leftrightarrow z^2 - kz + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = (-k)^2 - 4\times1\times1 = k^2 - 4$ $= (k-2)(k+2)$. Cette équation admet donc deux solutions réelles si, et seulement

cc BY NC SA

si, $\Delta > 0$ si, et seulement si, $k < -2$ ou $k > 2$.

4. On a $\alpha = 2$ et $\beta = 3$ donc Z est solution de $Z^2 + \alpha Z + \beta - 2 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + 2Z + 1 = 0 \Leftrightarrow (Z+1)^2 = 0 \Leftrightarrow Z = -1$. Ainsi, z est solution de $z + \dfrac{1}{z} = -1 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0$.
   De plus, l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 = \left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 < 0$ donc elle admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Ainsi, les solutions de cette équation sont $S_{\mathbb{C}} = \left\{-\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.
   Remarque : On dit que l'équation (E) admet deux solutions, chacunes de multiplicité 2, c'est-à-dire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:
   $$z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 1 = \left(z + \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(z + \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Corrigé exercice 131 :

1. C'est faux car $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 1 = -8 < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées, aucune solution réelle.
2. C'est vrai car $2 + \mathrm{i} \neq 0$, $2 - \mathrm{i} \neq 0$ et $2 + \mathrm{i} + \dfrac{5}{2 + \mathrm{i}} = 2 - \mathrm{i} + \dfrac{5}{2 - \mathrm{i}} = 4$.
3. C'est faux car les solutions de $z^2 - 4z + 5 = 0$ sont, d'après la question précédente, $2 + \mathrm{i}$ et $2 - \mathrm{i}$ alors que les solutions de $z^2 + 4z + 5 = 0$ sont $z_1 = \dfrac{-4 - 2\mathrm{i}}{2} = -2 - \mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = -2 + \mathrm{i}$.
4. C'est vrai car $z^2 - 6z + 10 = 0$ a comme discriminant $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 10 = -4 = (2\mathrm{i})^2 < 0$ donc cette équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{6 - 2\mathrm{i}}{2} = 3 - \mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 3 + \mathrm{i}$. Leur partie réelle est donc bien égale à 3.

Corrigé exercice 132 :

1. C'est vrai car $P(-1) = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$ donc -1 est racine de P et donc P se factorise par $z - (-1) = z + 1$.
2. C'est vrai car $P_1(-1) = (-1)^4 - 1 = 1 - 1 = 0$ et $P_2(-1) = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$ donc -1 est racine de P_1 et P_2 et donc P_1 et P_2 se factorisent tous les deux par $(z + 1)$. Ils ont donc un facteur commun.
3. C'est faux car $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}$ donc $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \mathrm{i} = 0$. Ainsi, $P\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ donc P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 133 :

1. C'est vrai car z_1 et z_2 sont les racines du trinôme $z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 \times z_2$ et si $z_1 + z_2 = 1 = z_1 \times z_2$ alors z_1 et z_2 sont les racines de $z^2 - z + 1$.

2. C'est vrai car $P(\overline{z}) = (\overline{z})^4 - 2\left(\overline{z}\right)^2 - 3 = \overline{z^4} - 2 \times \overline{z^2} - 3 = \overline{z^4} - \overline{2} \times \overline{z^2} - \overline{3}$, car 2 et 3 sont des réels, donc $P(\overline{z}) = \overline{z^4} - \overline{2 \times z^2} - \overline{3} = \overline{z^4 - 2z^2 - 3}$, car le conjugué d'un produit est le produit des conjugués et le conjugué d'une somme est la somme des conjugués. D'où $P(\overline{z}) = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0$ car z est racine de P, et 0 est réel et est donc son propre conjugué. Donc $\bar{z}$ est une racine de P.

3. C'est faux car, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^3 + \mathrm{i}z^2 + z + \mathrm{i} = z^2(z + \mathrm{i}) + (z + \mathrm{i}) = (z + \mathrm{i})(z^2 + 1) = (z + \mathrm{i})(z + \mathrm{i})(z - \mathrm{i}) = (z + \mathrm{i})^2(z - \mathrm{i})$. Donc P n'admet que deux racines distinctes : i de multiplicité 1 et $-\mathrm{i}$ de multiplicité 2.

4. C'est faux car, pour tout $z\mathbb{C}$, $P_1(z) = z^3 + \mathrm{i}z^2 - 2z - 2\mathrm{i} = z^2(z + \mathrm{i}) - 2(z + \mathrm{i}) = (z + \mathrm{i})(z^2 - 2) = (z + \mathrm{i})\left(z - \sqrt{2}\right)\left(z + \sqrt{2}\right)$ et $P_2(z) = z^3 - \mathrm{i}z^2 + 2z - 2\mathrm{i} = z^2(z - \mathrm{i}) + 2(z - \mathrm{i}) = (z - \mathrm{i})(z^2 + 2) = (z - \mathrm{i})\left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z + \mathrm{i}\sqrt{2}\right)$. Ils n'ont donc pas de racine imaginaire pure commune.

Corrigé exercice 134 :

D'après les formules de Viète, le produit des racines vaut :

$$(-1)^n \frac{a_0}{a_n} = (-1)^n \times \frac{-1}{1} = (-1)^{n+1}.$$

10 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 135 :

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P. Alors $P(\overline{z}) = (\overline{z})^4 - 8(\overline{z})^3 + 41(\overline{z})^2 - 128\overline{z} + 400$ donc $P(\overline{z}) = \overline{(z)^4} - \overline{8} \times \overline{(z)^3} + \overline{41} \times \overline{(z)^2} - \overline{128} \times \overline{z} + \overline{400}$, car $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$ et le conjugué d'un réel est lui-même. D'où $P(\overline{z}) = \overline{(z)^4} - \overline{8 \times (z)^3} + \overline{41 \times (z)^2} - \overline{128 \times z} + \overline{400}$, car le conjugué d'un produit est le produit des conjugués, donc $P(\overline{z}) = \overline{z^4 - 8z^3 + 41z^2 - 128z + 400}$, car le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, et on en déduit ainsi que $P(\overline{z}) = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0$ car z est racine de P.

   En conclusion, si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors son conjugué $\overline{z}$ en est une aussi

2. a. Soit $b \in \mathbb{R}$. $P(\mathrm{i}b) = (\mathrm{i}b)^4 - 8(\mathrm{i}b)^3 + 41(\mathrm{i}b)^2 - 128(\mathrm{i}b) + 400 = b^4 + 8\mathrm{i}b^3 - 41b^2 - 128\mathrm{i}b + 400$ donc $P(\mathrm{i}b) = (b^4 - 41b^2 + 400) + \mathrm{i}(8b^3 - 128b)$.

   b. On cherche un réel$b$ tel que $P(\mathrm{i}b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b^4 - 41b^2 + 400 = 0 \\ 8b^3 - 128b = 0 \end{cases}$.

   Or, d'une part, en posant $b^2 = x \geqslant 0$, on a $b^4 - 41b^2 + 400 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 41x + 400 = 0$ de discriminant $\Delta = (-41)^2 - 4 \times 1 \times 400 = 81 = 9^2 > 0$. Ainsi, $x^2 - 41x + 400 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{41 - 9}{2} = 16$ et $x_1 = \dfrac{41 + 9}{2} = 25$. On en déduit que $b^4 - 41b^2 + 400 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 16$ ou $b^2 = 25$.
   D'autre part, $8b^3 - 128b = 0 \Leftrightarrow 8b(b^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ ou $b^2 = 16$.
   Par conséquent, $P(\mathrm{i}b) = 0 \Leftrightarrow b^2 = 16 \Leftrightarrow b = -4$ ou $b = 4$.
   P admet donc exactement deux racines imaginaires pures : $-4\mathrm{i}$ et $4\mathrm{i}$.

3. On cherche les réels a, b et c tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
   $P(z) = (z^2 + 16)(az^2 + bz + c) \Leftrightarrow az^4 + bz^3 + (16a + c)z^2 + 16bz + 16c = z^4 - 8z^3 + 41z^2 - 128z + 400$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ 16a + c = 41 \\ 16b = -128 \\ 16c = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 25 \end{cases}.$$

   Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z^2 + 16)(z^2 - 8z + 25)$.

4. $P(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + 16 = 0$ ou $z^2 - 8z + 25 = 0 \Leftrightarrow z = -4\mathrm{i}$ ou $z = 4\mathrm{i}$ ou $z^2 - 8z + 25 = 0$. Or $z^2 - 8z + 25 = 0$ a pour discriminant $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 25 = -36 = (6\mathrm{i})^2 < 0$ donc $z^2 - 8z + 25 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées : $\dfrac{8 - 6\mathrm{i}}{2} = 4 - 3\mathrm{i}$ et $\overline{4 - 3\mathrm{i}} = 4 + 3\mathrm{i}$.

   En conclusion, l'ensemble des solutions de cette équation est :

   $$S_{\mathbb{C}} = \{-4\mathrm{i}; 4\mathrm{i}; 4 - 3\mathrm{i}; 4 - 3\mathrm{i}\}.$$

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 136 :

1. a. Pour tout $u \in \mathbb{C}$, $P(u) = u^4 - 1 = \left(u^2\right)^2 - 1^2 = (u^2-1)(u^2+1) = (u-1)(u+1)(u-\mathrm{i})(u+\mathrm{i})$.

   b. Ainsi, l'ensemble des solutions de $(u) = 0$ est $S_{\mathbb{C}} = \{-1; 1; -\mathrm{i}; \mathrm{i}\}$.

2. $(E) : \left(\dfrac{1-2z}{z-2}\right)^4 = 1$ est définie si, et seulement si, $z \neq 2$.

   D'après la question 1.b. :

$$(E) \Leftrightarrow \frac{1-2z}{z-2} = -1 \text{ ou } \frac{1-2z}{z-2} = 1 \text{ ou } \frac{1-2z}{z-2} = -\mathrm{i} \text{ ou } \frac{1-2z}{z-2} = \mathrm{i}.$$

   Or $\dfrac{1-2z}{z-2} = -1 \Leftrightarrow 1-2z = -z+2 \Leftrightarrow z = -1$, $\dfrac{1-2z}{z-2} = 1 \Leftrightarrow 1-2z = z-2 \Leftrightarrow z = 1$, $\dfrac{1-2z}{z-2} = -\mathrm{i} \Leftrightarrow 1-2z = -\mathrm{i}z + 2\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{1-2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}\mathrm{i}$ et $\dfrac{1-2z}{z-2} = \mathrm{i} \Leftrightarrow 1-2z = \mathrm{i}z - 2\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{1+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}\mathrm{i}$. Toutes ces valeurs étant différentes de 2, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est $S_{\mathbb{C}} = \left\{-1; 1; \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}\mathrm{i}; \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}\mathrm{i}\right\}$.

Corrigé exercice 137 :

1. a. Soient u et v des nombres complexes. Alors $u^3 - v^3 = (u-v)(u^2+uv+v^2)$.

   b. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^6 - 1 = \left(z^2\right)^3 - 1^3 = (z^2-1)\left[\left(z^2\right)^2 + z^2 \times 1 + 1^2\right] = (z^2-1)(z^4+z^2+1)$.

2. a. $\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} + 2 \times \dfrac{1}{2} \times \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et

   $\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} - 2 \times \dfrac{1}{2} \times \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   b. D'après la question 1.b., $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z = -1$ ou $z^4 + z^2 + 1 = 0$. En posant $u = z^2$, on obtient alors $z^4 + z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow u^2 + u + 1 = 0$. Le discriminant de ce trinôme du second degré vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 = \left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 < 0$ donc $u^2 + u + 1 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées : $\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{-\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Ainsi, $z^4 + z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z^2 = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, à l'aide de la question 2.a., et car un nombre et son opposé ont le même carré.

   En conclusion, l'ensemble des racines du polynôme P est :

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{-1; 1; -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 138 :

1. a. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(z-(3+\mathrm{i}))^2-8-6\mathrm{i} = z^2-2z(3+\mathrm{i})+8-6\mathrm{i}-8-6\mathrm{i} = z^2-(6+2\mathrm{i})z$.
   b. Ainsi, $(E) \Leftrightarrow [z-(3+\mathrm{i})]^2 - 8 - 6\mathrm{i} + 7 + 6\mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow [z-(3+\mathrm{i})]^2 = 1$.
   c. $(E) \Leftrightarrow [z-(3+\mathrm{i})]^2 = 1 \Leftrightarrow z-(3+\mathrm{i}) = -1$ ou $z-(3+\mathrm{i}) = 1 \Leftrightarrow z = 2+\mathrm{i}$ ou $z = 4+\mathrm{i}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est $S_{\mathbb{C}} = \{2+\mathrm{i}; 4+\mathrm{i}\}$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^2+(2+4\mathrm{i})z = z^2+2(1+2\mathrm{i})z = [z+(1+2\mathrm{i})]^2-(1+2\mathrm{i})^2$ $= [z+(1+2\mathrm{i})]^2-(1-4+4\mathrm{i}) = [z+(1+2\mathrm{i})]^2+3-4\mathrm{i}$.
   Donc $(E) \Leftrightarrow [z+(1+2\mathrm{i})]^2+3-4\mathrm{i}+6+4\mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow [z+(1+2\mathrm{i})]^2 = -9 \Leftrightarrow z+(1+2\mathrm{i}) = -3\mathrm{i}$ ou $z+(1+2\mathrm{i}) = 3\mathrm{i} \Leftrightarrow z = -1-5\mathrm{i}$ ou $z = -1+\mathrm{i}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est $S_{\mathbb{C}} = \{-1-5\mathrm{i}; -1+\mathrm{i}\}$.

Corrigé exercice 139 :

1. On cherche $b \in \mathbb{R}$ tel que $P(\mathrm{i}b) = 0 \Leftrightarrow 2(\mathrm{i}b)^2 - (1+6\mathrm{i}) \times \mathrm{i}b + 3\mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow -2b^2 - \mathrm{i}b + 6b + 3\mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2b^2+6b=0 \\ -b+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b(b-3)=0 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow b = 3$. Ainsi, $3\mathrm{i}$ est l'unique nombre imaginaire pur solution de (E).
2. On cherche $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(a) = 0 \Leftrightarrow 2a^2-(1+6\mathrm{i})a+3\mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow 2a^2-a-6a\mathrm{i}+3\mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2-a=0 \\ -6a+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(2a-1)=0 \\ a=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\dfrac{1}{2}$ est l'unique nombre réel solution de (E).
3. Comme (E) est une équation du second degré, alors elle admet au maximum deux solutions dans $\mathbb{C}$. D'après les questions précédentes, l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ est $S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{1}{2}; 3\mathrm{i}\right\}$.

Corrigé exercice 140 :

1. $B(2;1)$ correspond à l'affixe $z_B = 2+\mathrm{i}$, d'où $z'_B = \dfrac{2-\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{2-(2+\mathrm{i})} = 2+3\mathrm{i}$.

   Ainsi, $B'(2;3)$.
2. $C'(1;2)$ est l'image de $C(x;y)$ avec $z = x+\mathrm{i}y$ différent de 2, c'est-à-dire avec $(x;y) \neq (2;0)$. Et $\dfrac{2-\mathrm{i}z}{2-z} = 1+2\mathrm{i} \Leftrightarrow 2-\mathrm{i}z = (1+2\mathrm{i})(2-z) \Leftrightarrow 2-\mathrm{i}z = 2-z+4\mathrm{i}-2\mathrm{i}z$ $\Leftrightarrow (1+\mathrm{i})z = 4\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{4\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{1^2+1^2} = 2+2\mathrm{i}$. Ainsi, $C(2;2)$.
3. Soit $(x;y) \neq (2;0)$, on pose $z = x+\mathrm{i}y$. On a alors :
   $$z' = \frac{2+y-\mathrm{i}x}{2-x-\mathrm{i}y} = \frac{[(2+y)-\mathrm{i}x]\,[(2-x)+\mathrm{i}y]}{(2-x)^2+y^2}$$
   $$= \frac{(2+y)(2-x)+xy}{(2-x)^2+y^2} + \mathrm{i}\frac{(2+y)y-x(2-x)}{(2-x)^2+y^2}$$

$= \dfrac{4-2x+2y-xy+xy}{(2-x)^2+y^2} + \mathrm{i}\dfrac{2y+y^2-2x+x^2}{(2-x)^2+y^2}$.

Ainsi, $z' = x' + \mathrm{i}y'$ avec $x' = \dfrac{-2x+2y+4}{(2-x)^2+y^2}$ et $y' = \dfrac{x^2-2x+y^2+2y}{(2-x)^2+y^2}$.

4. Soit $M(x; y)$ distinct de $A(2; 0)$, c'est-à-dire tel que $(x; y) \neq (2; 0)$.

   $M \in E_1 \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$. Ainsi, E_1 est le cercle de centre $\Omega(1; -1)$ et de rayon $\sqrt{2}$, privé du point $A(2; 0)$.

5. Soit $M(x; y)$ distinct de $A(2; 0)$, c'est-à-dire tel que $(x; y) \neq (2; 0)$. $M \in E_2 \Leftrightarrow z' \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z') = 0 \Leftrightarrow x' = 0 \Leftrightarrow -2x + 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow x - y - 2 = 0$. Ainsi, E_2 est la droite d'équation cartésienne $x - y - 2 = 0$, privée du point $A(2; 0)$.

Corrigé exercice 141 :

1. Soit $M(x; y)$ distinct de $J(0; 1)$, c'est-à-dire tel que $z = x + \mathrm{i}y$ soit différent de i et soit $M'(x'; y')$ l'image de M. On a donc $z' = x' + \mathrm{i}y' = \dfrac{\mathrm{i}z}{\mathrm{i} - z}$.

   On cherche z tel que $z' = z \Leftrightarrow z = \frac{\mathrm{i}z}{\mathrm{i}-z} \Leftrightarrow (\mathrm{i} - z)z = \mathrm{i}z \Leftrightarrow \mathrm{i}z - z^2 = \mathrm{i}z \Leftrightarrow z = 0$.

   Ainsi, $O(0; 0)$ est l'unique point invariant par cette transformation, c'est-à-dire l'unique point confondu avec son image par cette transformation.

2. $I(1; 0)$ correspond à l'affixe $z_I = 1$, d'où $z_{I'} = \dfrac{\mathrm{i} \times 1}{\mathrm{i} - 1} = \dfrac{\mathrm{i}(-\mathrm{i} - 1)}{(-1)^2 + 1^2} = \dfrac{1 - \mathrm{i}}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

   Ainsi, $I'\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$.

3. $A'(2; 0)$ est l'image d'un point $A(x; y)$ correspondant à l'affixe $z = x + \mathrm{i}y$, différent de i. Pour trouver les coordonnées de A, on résout donc $\dfrac{\mathrm{i}z}{\mathrm{i} - z} = 2 \Leftrightarrow \mathrm{i}z = 2(\mathrm{i} - z) \Leftrightarrow (\mathrm{i} + 2)z = 2\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i} + 2} = \dfrac{2\mathrm{i}(-\mathrm{i} + 2)}{2^2 + 1^2} = \dfrac{2 + 4\mathrm{i}}{5} \Leftrightarrow z = \dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{5}\mathrm{i}$. Ainsi $A\left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{4}{5}\right)$.

4. Soit un nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ différent de i, c'est-à-dire $(x; y) \neq (0; 1)$.

   On commence par exprimer z' sous forme algébrique.

   $z' = \dfrac{\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y)}{\mathrm{i} - (x + \mathrm{i}y)} = \dfrac{\mathrm{i}x - y}{-x + \mathrm{i}(1 - y)} = \dfrac{(\mathrm{i}x - y)\left[-x - \mathrm{i}(1 - y)\right]}{(-x)^2 + (1 - y)^2}$

   $= \dfrac{xy + x(1 - y) + \mathrm{i}\left[y(1 - y) - x^2\right]}{x^2 + (1 - y)^2} = \dfrac{x}{x^2 + (1 - y)^2} + \mathrm{i}\dfrac{-x^2 - y^2 + y}{x^2 + (1 - y)^2}$.

   D'où $M(x; y) \in E_1 \Leftrightarrow z \neq \mathrm{i}$ et $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow -x^2 - y^2 + y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - y = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$. E_1 est donc le cercle de centre $\Omega\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$, privé du point $J(0; 1)$.

5. $M(x; y) \in E_2 \Leftrightarrow z \neq \mathrm{i}$ et $z' \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z') = 0 \Leftrightarrow x = 0$. E_2 est donc l'axe des ordonnées, privé de $J(0; 1)$.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 142 :

1. $z' = \dfrac{2\mathrm{i} - z^2}{z \times \overline{z} + 1}$ existe si, et seulement si, $z \times \overline{z} + 1 \neq 0$.
   Or $z \times \overline{z} + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = -1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = -1$, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$. Ainsi, z' est défini pour tout $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$.

2. On cherche $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, avec x et y réels, tel que $z' = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2\mathrm{i} - z^2}{z \times \overline{z} + 1} = 1$ $\Leftrightarrow 2\mathrm{i} - z^2 = z \times \overline{z} + 1 \Leftrightarrow 2\mathrm{i} - (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 + y^2 + 1 \Leftrightarrow 2\mathrm{i} - (x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy) = x^2 + y^2 + 1 \Leftrightarrow 2\mathrm{i} - x^2 + y^2 - 2\mathrm{i}xy = x^2 + y^2 + 1 \Leftrightarrow 2\mathrm{i}(1 - xy) = 2x^2 + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - xy = 0 \\ 2x^2 + 1 = 0 \end{cases}$,
   car le seul nombre à la fois imaginaire pur et réel est le nombre 0. Ce système n'a pas de solution car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^2 + 1 > 0$. Ainsi, il n'existe pas de valeur de z telle que $z' = 1$.

3. a. $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z'} = z' \Leftrightarrow \overline{\left(\dfrac{2\mathrm{i} - z^2}{z \times \overline{z} + 1}\right)} = \dfrac{2\mathrm{i} - z^2}{z \times \overline{z} + 1} \Leftrightarrow \dfrac{-2\mathrm{i} - \overline{z}^2}{\overline{z} \times \overline{(\overline{z})} + 1} = \dfrac{2\mathrm{i} - z^2}{z \times \overline{z} + 1}$ par compatibilité de la conjugaison avec l'addition, la multiplication et l'opérateur puissance, d'où $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -2\mathrm{i} - \overline{z}^2 = 2\mathrm{i} - z^2$ car $\overline{(\overline{z})} = z$, et donc $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 - \overline{z}^2 = 4\mathrm{i} \Leftrightarrow (z - \overline{z})(z + \overline{z}) = 4\mathrm{i}$.
   b. $(z + \overline{z})(z - \overline{z}) = 2\mathrm{Re}(z) \times 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z) = 2x \times 2\mathrm{i}y = 4\mathrm{i}xy$. Ainsi, $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z + \overline{z})(z + \overline{z}) = 4\mathrm{i}xy = 4\mathrm{i} \Leftrightarrow xy = 1$. Par conséquent, $M(x; y) \in E_1 \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow xy = 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x}$ et $x \neq 0$. Ainsi, E_1 est l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ avec $x \neq 0$.

4. On écrit z' sous forme algébrique.
   $z' = \dfrac{2\mathrm{i} - (x + \mathrm{i}y)^2}{x^2 + y^2 + 1} = \dfrac{2\mathrm{i} - (x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy)}{x^2 + y^2 + 1} = \dfrac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2 + 1} + \mathrm{i}\dfrac{2(1 - xy)}{x^2 + y^2 + 1}$. Ainsi, $z' \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (y - x)(y + x) = 0 \Leftrightarrow y = -x$ ou $y = x$. Ainsi, E_2 est la réunion des droites d'équation $y = -x$ et $y = x$.

Corrigé exercice 143 :

1. $P(z) = 6 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 3 = 0$ de discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8$, donc $z^2 - 2z + 3 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{2 - 2\mathrm{i}\sqrt{2}}{2} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{2}$. L'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 6$ est donc $S_{\mathbb{C}} = \left\{1 - \mathrm{i}\sqrt{2}; 1 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right\}$.

2. $P(z) = m \Leftrightarrow z^2 - 2z + 9 - m = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées si, et seulement si, $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (9 - m) < 0 \Leftrightarrow 4m - 32 < 0 \Leftrightarrow m < 8$.

3. a. $z' = P(z) = (x + \mathrm{i}y)^2 - 2(x + \mathrm{i}y) + 9 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy - 2x - 2\mathrm{i}y + 9 = (x^2 - 2x - y^2 + 9) + \mathrm{i}(2xy - 2y)$
   b. $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow 2xy - 2y = 0 \Leftrightarrow 2y(x - 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $x = 1$. Ainsi, E est la réunion des droites d'équation $x = 1$ et $y = 0$.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 144 :

$\dfrac{1}{Z}=\dfrac{1}{Z_R}+\dfrac{1}{Z_L}=\dfrac{Z_L+Z_R}{Z_L\times Z_R}\Leftrightarrow Z=\dfrac{Z_L\times Z_R}{Z_L+Z_R}=\dfrac{\mathrm{i}L\omega R}{R+\mathrm{i}L\omega}$, d'où

$Z=\dfrac{\mathrm{i}L\omega R\left(R-\mathrm{i}L\omega\right)}{R^2+\left(L\omega\right)^2}=\dfrac{\mathrm{i}L\omega R^2+R\left(L\omega\right)^2}{R^2+\left(L\omega\right)^2}=\dfrac{R(L\omega)^2}{R^2+\left(L\omega\right)^2}+\mathrm{i}\dfrac{L\omega R^2}{R^2+\left(L\omega\right)^2}$,

qu'on peut aussi écrire $Z=\dfrac{R}{\left(\dfrac{R}{L\omega}\right)^2+1}+\mathrm{i}\dfrac{\dfrac{R^2}{L\omega}}{\left(\dfrac{R}{L\omega}\right)^2+1}$.

Corrigé exercice 145 :

1. a. Soit $r\in\mathbb{C}^*$. (u_n) vérifie la relation (1) si, et seulement si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $r^{n+2}=\alpha r^{n+1}+\beta r^n\Leftrightarrow r^{n+2}-\alpha r^{n+1}-\beta r^n=0\Leftrightarrow r^n\left(r^2-\alpha r-\beta\right)=0$. Donc, comme $r\neq 0$, alors $r^2-\alpha r-\beta=0$ et donc r est bien solution de (2).

   b. Soient r_1 et r_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de (2) et soit une suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n$ avec λ et μ complexes.
   Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=\lambda r_1^{n+2}+\mu r_2^{n+2}$, $u_{n+1}=\lambda r_1^{n+1}+\mu r_2^{n+1}$ et $u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n$.
   Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\alpha u_{n+1}+\beta u_n=\alpha\left(\lambda r_1^{n+1}+\mu r_2^{n+1}\right)+\beta\left(\lambda r_1^n+\mu r_2^n\right)$ $=\lambda\left(\alpha r_1^{n+1}+\beta r_1^n\right)+\mu\left(\alpha r_2^{n+1}+\beta r_2^n\right)=\lambda r_1^n\left(\alpha r_1+\beta\right)+\mu r_2^n\left(\alpha r_2+\beta\right)$. Or r_1 et r_2 sont solutions de (2) donc $r_1^2-\alpha r_1-\beta=0$, c'est-à-dire $\alpha r_1+\beta=r_1^2$ et, de même, $\alpha r_2+\beta=r_2^2$. Ainsi, $\alpha u_{n+1}+\beta u_n=\lambda r_1^n\times r_1^2+\mu r_2^n\times r_2^2=\lambda r_1^{n+2}+\mu r_2^{n+2}=u_{n+2}$. On en déduit que (u_n) vérifie (1).

2. Soit (u_n) la suite vérifiant $u_0=1$, $u_1=2$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=4u_{n+1}-5u_n$. On résout alors l'équation (2) qui s'écrit, dans ce cas, $r^2-4r+5=0$.
   Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta=(-4)^2-4\times1\times5=-4=(2\mathrm{i})^2<0$ donc cette équation admet deux solutions complexes conjuguées : $r_1=\dfrac{4-2\mathrm{i}}{2}=2-\mathrm{i}$ et $r_2=\overline{r_1}=2+\mathrm{i}$. Ainsi, il existe $(\lambda;\mu)\in\mathbb{C}^2$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\lambda(2-\mathrm{i})^n+\mu(2+\mathrm{i})^n$
   Il ne reste donc plus qu'à déterminer λ et μ. Or $u_0=1$ et $u_1=2$, d'où
   $$\begin{cases}u_0=1\\u_1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda+\mu=1\\\lambda(2-\mathrm{i})+\mu(2+\mathrm{i})=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda+\mu=1\\2\lambda+2\mu=2\\\lambda-\mu=0\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=\mu=\frac{1}{2}.$$
   En conclusion, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{1}{2}\left(2+\mathrm{i}\right)^n+\dfrac{1}{2}\left(2-\mathrm{i}\right)^n$.

Corrigé exercice 146 :

Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $f(z)=\dfrac{1}{2}\left(1-\mathrm{i}\right)z+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(z+1\right)$.

1. a. $z_1=f(z_0)=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(z_0+1\right)=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(3+\mathrm{i}\right)=2-\mathrm{i}$ donc $P_1\left(2;-1\right)$.

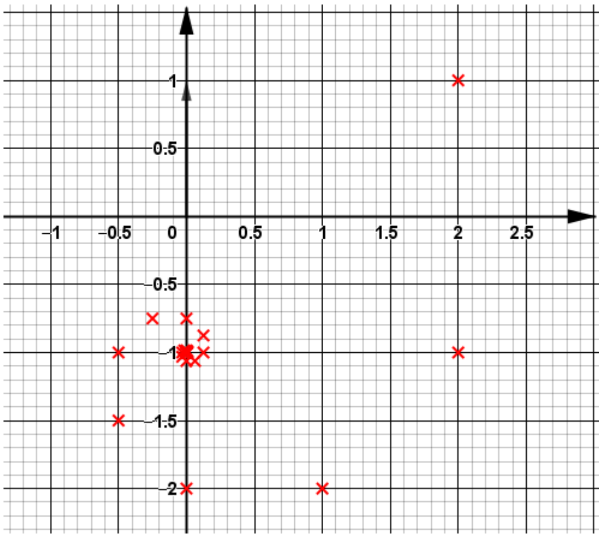
$$z_2 = f(z_1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)(z_1 + 1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)(3 - \mathrm{i}) = 1 - 2\mathrm{i} \text{ donc } P_2\,(1; -1).$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n+1} = f(z_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)(z_n+1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)(x_n + 1 + \mathrm{i}y_n)$,

d'où $z_{n+1} = \dfrac{x_n + 1}{2} + \dfrac{y_n}{2} + \mathrm{i}\left(\dfrac{y_n}{2} - \dfrac{x_n + 1}{2}\right)$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n + 1}{2}$ et $y_{n+1} = \dfrac{-x_n + y_n - 1}{2}$.

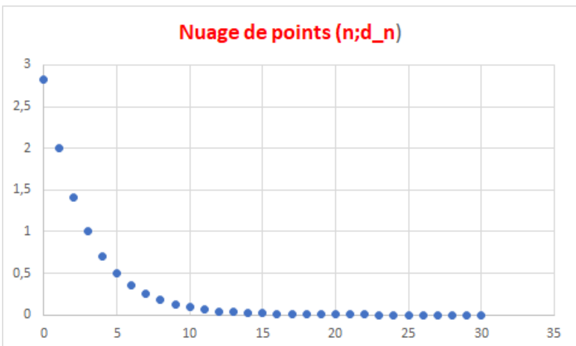
2. a. On obtient le résultat ci-dessous.



b. Le lieu géométrique décrit par les points P_n semble être une spirale.

3. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = JP_n = \sqrt{(x_n - x_J)^2 + (y_n - y_J)^2} = \sqrt{x_n^2 + (y_n + 1)^2}$.

b. On obtient le résultat ci-dessous.



c. On conjecture que la suite (d_n) est décroissante et tend vers 0.

4. a. On cherche $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $f(\omega) = \omega \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)(\omega + 1) = \omega$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\omega = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$$

Document sous licence libre Creative Commons

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\mathrm{i}}{\frac{1}{2}} = -\mathrm{i}.$$

Ainsi, il existe un unique nombre ω tel que $f(\omega)=\omega$ et $\omega=-\mathrm{i}$.

b. La distance $d_n = JP_n$ tend en décroissant vers 0, ce qui signifie que la suite des points (P_n) tend vers le point J, d'affixe ω.

Corrigé exercice 147 :

1. a. $z_1 = \alpha z_0 - \mathrm{i} = -\mathrm{i}$, $z_2 = \alpha z_1 - \mathrm{i} = -\alpha\mathrm{i} - \mathrm{i} = -(\alpha+1)\,\mathrm{i}$ et $z_3 = \alpha z_2 - \mathrm{i} = \alpha\left(-(\alpha+1)\,\mathrm{i}\right) - \mathrm{i} = \left(-\alpha^2-\alpha-1\right)\mathrm{i} = -\left(\alpha^2+\alpha+1\right)\mathrm{i}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la proposition : « $z_n = \frac{1-\alpha^n}{\alpha-1}\mathrm{i}$ ».

Initialisation : Si $z_0 = 0$ alors $\frac{1-\alpha^0}{\alpha-1}\mathrm{i} = 0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel tel que P_k soit vraie, autrement dit tel que $z_k = \frac{1-\alpha^k}{\alpha-1}\mathrm{i}$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $z_{k+1} = \frac{1-\alpha^{k+1}}{\alpha-1}\mathrm{i}$.

Ainsi, par hypothèse de récurrence, on a $z_k = \frac{1-\alpha^k}{\alpha-1}\mathrm{i}$. D'où $z_{k+1} = \alpha z_k - \mathrm{i} = \alpha \times \frac{1-\alpha^k}{\alpha-1}\mathrm{i} - \mathrm{i} = \left(\frac{\alpha(1-\alpha^k)}{\alpha-1} - 1\right)\mathrm{i} = \frac{\alpha(1-\alpha^k)-(\alpha-1)}{1-\alpha}\mathrm{i} = \frac{1-\alpha^{k+1}}{\alpha-1}\mathrm{i}$.

Donc P_{k+1} est vraie.

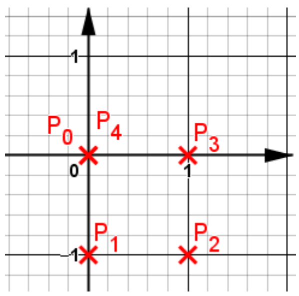
Conclusion : On a démontré que la propriété était vraie au rang 0, puis que s'il existait un rang k tel que la propriété est vraie, alors elle l'est au rang $k+1$. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{1-\alpha^n}{\alpha-1}\mathrm{i}$.

2. Cas $\alpha = \mathrm{i}$.

a. D'après la question 1.b., $z_4 = \frac{1-\mathrm{i}^4}{\mathrm{i}-1}\mathrm{i} = 0$.

b. D'après la question 1.b, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+4} = \frac{1-\alpha^{n+4}}{\alpha-1}\mathrm{i} = \frac{1-\mathrm{i}^{n+4}}{\mathrm{i}-1}\mathrm{i}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{i}^{n+4} = \left(\mathrm{i}^4\right)^n = 1^n = 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+4} = 0$.

c. On obtient le résultat ci-dessous.



BY NC SA

Corrigé exercice 148 :

Partie A : Formules de Viète, cas $n = 3$
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \alpha_3 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$ avec α_3, α_2, α_1 et α_0 réels tels que $\alpha_3 \neq 0$.

1. Puisque z_1, z_2 et z_3 sont les trois racines du polynôme P dans $\mathbb{C}$ alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \alpha_3 (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$.

2. On développe le produit $\alpha_3 (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$, puis on identifie avec les coefficients de P. On a en effet, en développant, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

   $P(z) = \alpha_3 z^3 - \alpha_3 (z_1 + z_2 + z_3) z^2 + \alpha_3 (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) z - \alpha_3 z_1 z_2 z_3$

   d'où $\begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_3 (z_1 + z_2 + z_3) \\ \alpha_1 = \alpha_3 (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) \\ \alpha_0 = -\alpha_3 z_1 z_2 z_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_3} \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_3} \\ z_1 z_2 z_3 = -\dfrac{\alpha_0}{\alpha_3} \end{cases}$ car $\alpha_3 \neq 0$, et on a bien retrouvé les formules demandées.

Partie B : Formules de Viète, cas $n = 4$
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \alpha_4 z^4 + \alpha_3 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$ avec α_4, α_3, α_2, α_1 et α_0 réels tels que $\alpha_4 \neq 0$.

1. Puisque z_1, z_2, z_3 et z_4 sont les quatre racines du polynôme P dans $\mathbb{C}$ alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \alpha_4 (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$.

2. On développe le produit $\alpha_4 (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$ puis on identifie avec les coefficients de P. On a en effet, en développant, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

   $P(z) = \alpha_4 z^4 - \alpha_4 (z_1 + z_2 + z_3 + z_4) z^3 + \alpha_4 (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4) z^2$
   $- \alpha_4 (z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4) z + \alpha_4 z_1 z_2 z_3 z_4$

   d'où $\begin{cases} \alpha_3 = -\alpha_4 (z_1 + z_2 + z_3 + z_4) \\ \alpha_2 = \alpha_4 (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4) \\ \alpha_1 = -\alpha_4 (z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4) \\ \alpha_0 = \alpha_4 z_1 z_2 z_3 z_4 \end{cases}$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -\dfrac{\alpha_3}{\alpha_4} \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_4} \\ z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4 = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_4} \\ z_1 z_2 z_3 z_4 = \dfrac{\alpha_0}{\alpha_4} \end{cases}$ car $\alpha_4 \neq 0$, et on a bien retrouvé les formules demandées.

Partie C : Formules de Viète, cas général

1. On va démontrer cette propriété par récurrence sur le degré n du polynôme.

   Initialisation : Au rang $n = 1$, $P(z) = \alpha_1 z + \alpha_0 = \alpha_1 \left(z - \left(-\dfrac{\alpha_0}{\alpha_1} \right) \right) = \alpha_1 (z - z_1)$ et $-\dfrac{\alpha_0}{\alpha_1}$ est la racine du polynôme P.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier naturel non nul k tel que la propriété soit vraie. Démontrons qu'elle est vraie au rang $k+1$.

On a $P(z) = \alpha_{k+1}z^{k+1} + \ldots + \alpha_0$ donc, en factorisant par $\alpha_{k+1} \neq 0$ par définition du degré, $P(z) = \alpha_{k+1}\left(z^{k+1} + \ldots + \dfrac{\alpha_0}{\alpha_{k+1}}\right)$.

Par hypothèse, il existe un nombre complexe z_{k+1} qui est une racine de P. D'après le cours, il existe un polynôme unitaire Q de degré k tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \alpha_{k+1}(z - z_{k+1})Q(z)$.

On constate que, pour tout $j \in \{1; \ldots; k\}$, $P(z_j) = 0 \Rightarrow Q(z_j) = 0$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence à Q de degré k, on obtient que $Q(z) = (z - \alpha_1)\ldots(z - \alpha_k)$ car Q est unitaire.

D'où $P(z) = \alpha_{k+1}(z - z_1)\ldots(z - z_{k+1})$.

Conclusion : On a montré que la propriété est vraie au rang 1, puis que s'il existe un rang k non nul tel que la propriété est vraie, alors elle l'est au rang $k+1$. D'après le principe de récurrence, on en déduit que la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul n.

2. On reprend les notations de l'énoncé. En développant, on obtient, pour tout nombre complexe z, $P(z) = \alpha_n[z^n - (z_1 + \ldots + z_n)z^{n-1} \ldots + (-1)^n z_1 \ldots z_n]$.

   D'où $P(z) = \alpha_n z^n - \alpha_n(z_1 + \ldots + z_n)z^{n-1} + \ldots + \alpha_n \times (-1)^n z_1 \times \ldots \times z_n$.

   En procédant par identification des coefficients, on obtient que la somme des racines vaut $-\dfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$ et que le produit des racines vaut $(-1)^n\dfrac{\alpha_0}{\alpha_n}$.

Corrigé exercice 149 :

Partie A : Retour sur la méthode de Cardan

1. $x^3 = (u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv\,(u+v) = u^3 + v^3 + 3uvx$.

2. On suppose que u et v vérifient $(S) : \begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$.

   Tout d'abord, d'après la question 1., $x^3 + px = u^3 + v^3 + 3uvx + px$. Ainsi, puisque u et v vérifient (S) alors $x^3 + px = q + 3 \times \left(-\dfrac{p}{3}\right) \times x + px = q$ et donc $x = u + v$ avec u et v vérifiant (S), est bien solution de (E).

3. a. Soient $s = u^3$ et $t = v^3$. Si u et v vérifient (S), alors $s + t = q \Leftrightarrow t = q - s$, et $s \times t = (u \times v)^3 = \left(-\dfrac{p}{3}\right)^3 = -\dfrac{p^3}{27}$. Ainsi, s et t sont solutions de l'équation $x^2 - qx - \dfrac{p^3}{27} = 0$. On a donc bien équivalence entre les systèmes $(S) : \begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$ et $(S') : \begin{cases} s^2 - qs - \dfrac{p^3}{27} = 0 \\ t = q - s \end{cases}$.

   b. Ainsi, pour trouver obtenir une solution x de l'équation initiale, on commence par résoudre le système (S') pour trouver les valeurs de s et t. On en déduit des valeurs possibles de u et v puis une valeur possible de x.

Document sous licence libre Creative Commons

4. Soit $(E) : x^3 + 24x = 56$. On est dans le cas $p = 24$ et $q = 56$.
On cherche alors la solution positive de (E) de la forme $x = u + v$ avec u et v solutions de (S) : $\begin{cases} u^3 + v^3 = 56 \\ uv = -8 \end{cases}$. D'après la question 3., en posant $s = u^3$ et $t = v^3$, on a (S') : $\begin{cases} s^2 - 56s - 512 = 0 \\ t = 56 - s \end{cases}$.
Or le discriminant du trinôme $s^2 - 56s - 512$ vaut $\Delta = (-56)^2 - 4 \times 1 \times (-512) = 5184 = 72^2 > 0$ donc la première équation admet deux racines réelles distinctes : $s_1 = \dfrac{56 - 72}{2} = -8$ et $s_2 = \dfrac{56 + 72}{2} = 64$.
Par conséquent $(S') \Leftrightarrow \begin{cases} s = -8 \\ t = 64 \end{cases}$ ou $\begin{cases} s = 64 \\ t = -8 \end{cases}$.
Ainsi $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = -8 \\ v^3 = 64 \end{cases}$ ou $\begin{cases} u^3 = 64 \\ v^3 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -2 \\ v = 4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} u = 4 \\ v = -2 \end{cases}$.
On obtient alors que $x = u + v = 2$ est une solution positive de (E).

5. Soit $(E) : x^3 - 15x = 4$. On est dans le cas $p = -15$ et $q = 4$.
On cherche alors la solution positive de (E) de la forme $x = u + v$ avec u et v solutions de (S) : $\begin{cases} u^3 + v^3 = 4 \\ uv = -5 \end{cases}$. D'après la question 3., en posant $s = u^3$ et $t = v^3$, on a (S') : $\begin{cases} s^2 - 4s + 125 = 0 \\ t = 4 - s \end{cases}$. Or le discriminant du trinôme $s^2 - 4s + 125$ vaut $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 125 = -484 < 0$ donc ce trinôme n'admet pas de solutions réelles. La méthode de Cardan ne permet donc pas de résoudre l'équation de Bombelli.

Partie B : Résolution d'une équation de degré 3

1. Soit $x = X - \dfrac{b}{3a}$. Ainsi x est solution de (E') est équivalent à $a\left(X - \dfrac{b}{3a}\right)^3 + b\left(X - \dfrac{b}{3a}\right)^2 + c\left(X - \dfrac{b}{3a}\right) + d = 0$.
Or $a\left(X - \dfrac{b}{3a}\right)^3 = a\left[X^3 - 3X^2 \times \dfrac{b}{3a} + 3X\left(\dfrac{b}{3a}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{3a}\right)^3\right] = aX^3 - bX^2 + \dfrac{b^2}{3a}X - \dfrac{b^3}{27a^2}$.
Et $b\left(X - \dfrac{b}{3a}\right)^2 = b\left(X^2 - \dfrac{2b}{3a}X + \dfrac{b^2}{9a^2}\right) = bX^2 - \dfrac{2b^2}{3a}X + \dfrac{b^3}{9a^2}$.
D'où X est solution de $aX^3 + \left(c - \dfrac{b^2}{3a}\right)X + \dfrac{2b^3}{27a^2} - \dfrac{bc}{3a} + d = 0$ et donc de $X^3 + \left(\dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{3a^2}\right)X + \dfrac{2b^3}{27a^3} - \dfrac{bc}{3a^2} + \dfrac{d}{a} = 0$ car $a \neq 0$. Ainsi X est solution de $X^3 + pX + q = 0$ avec $p = \dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{3a^2}$ et $q = \dfrac{2b^3}{27a^3} - \dfrac{bc}{3a^2} + \dfrac{d}{a}$.

Document sous licence libre Creative Commons

2. Soit $(E') : x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$. On est donc dans le cas où $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$ et $d = -2$. D'après la question 1., résoudre (E') revient à résoudre $X^3 + pX + q = 0$ avec $x = X - \dfrac{b}{3a} = X + \dfrac{2}{3}$, $p = \dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{3a^2} = -\dfrac{1}{3}$ et $q = \dfrac{2b^3}{27a^3} - \dfrac{bc}{3a^2} + \dfrac{d}{a} = -\dfrac{52}{27}$.

   On résout donc maintenant l'équation $X^3 - \dfrac{1}{3}X = \dfrac{52}{27}$ à l'aide de la méthode vue à la partie A.

   On cherche donc une solution positive de $X^3 - \dfrac{1}{3}X = \dfrac{52}{27}$ de la forme $X = u + v$ avec u et v solutions de $(S) : \begin{cases} u^3 + v^3 = \dfrac{52}{27} \\ uv = \dfrac{1}{9} \end{cases}$.

   Or, d'après la question 3. de la partie A, en posant $s = u^3$ et $t = v^3$, on obtient le système suivant $(S') : \begin{cases} s^2 - \dfrac{52}{27}s + \dfrac{1}{729} = 0 \\ t = -\dfrac{52}{27} - s \end{cases}$. Or, le trinôme a pour discriminant $\Delta = \dfrac{100}{27} > 0$ donc admet deux racines réelles distinctes : $s_1 = \dfrac{26 - 15\sqrt{3}}{27}$ et $s_2 = \dfrac{26 + 15\sqrt{3}}{27}$.

   Par conséquent $\begin{cases} s = \dfrac{26 - 15\sqrt{3}}{27} \\ t = \dfrac{26 + 15\sqrt{3}}{27} \end{cases}$ ou $\begin{cases} s = \dfrac{26 + 15\sqrt{3}}{27} \\ t = \dfrac{26 - 15\sqrt{3}}{27} \end{cases}$.

   D'où $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = \dfrac{26 - 15\sqrt{3}}{27} \\ v^3 = \dfrac{26 + 15\sqrt{3}}{27} \end{cases}$ ou $\begin{cases} u^3 = \dfrac{26 + 15\sqrt{3}}{27} \\ v^3 = \dfrac{26 - 15\sqrt{3}}{27} \end{cases}$.

   On obtient ainsi $X = u + v = \dfrac{4}{3}$ et finalement $x = X + \dfrac{2}{3} = 2$.

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{C}$, est factorisable par $(x - 2)$. Et, pour tout $x \in \mathbb{C}$, $x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2(x - 2) + (x - 2) = (x^2 + 1)(x - 2) = (x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i})(x - 2)$. En conclusion, $S_{\mathbb{R}} = \{2\}$ et $S_{\mathbb{C}} = \{2; \mathrm{i}; -\mathrm{i}\}$.

Corrigé exercice 150 :

Partie A : Racine carrée d'un nombre complexe
Soit $\alpha = a + ib$ avec a et b réels.

1. Si z est solution de $z^2 = \alpha$ alors $-z$ est aussi solution de cette équation car $(-z)^2 = (-x - \mathrm{i}y)^2 = (-1)^2 \times (x + \mathrm{i}y)^2 = (-1)^2 \times z^2 = \alpha$.

2. Si $z = x + \mathrm{i}y$ est solution de $z^2 = \alpha$ alors $(x + \mathrm{i}y)^2 = a + \mathrm{i}b \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy = a + \mathrm{i}b \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$.

   D'autre part $z^2 = \alpha \Leftrightarrow \overline{(z^2)} = \overline{\alpha} \Leftrightarrow (\overline{z})^2 = \overline{\alpha}$. D'où $z^2 \times (\overline{z})^2 = \alpha \times \overline{\alpha}$ c'est-à-dire $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ainsi $z^2 = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$.

3. a. Par somme, on obtient $2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}$ donc $x^2 = \dfrac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})$. Or $a + \sqrt{a^2 + b^2}) \geqslant 0$ donc $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})}$.

   Par différence, on obtient de la même manière $y = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}$.

   Or on doit avoir $2xy = b > 0$, donc x et y sont de même signe.

   Une solution est donc donnée par $z = \sqrt{\dfrac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + \mathrm{i}\sqrt{\dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}$

   et une autre solution est donnée par $z = -\sqrt{\dfrac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} - \mathrm{i}\sqrt{\dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}$.

   b. Dans le cas où $b < 0$, les réels x et y être doivent être de signes contraires. On a alors deux solutions possibles $z = \sqrt{\dfrac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} - \mathrm{i}\sqrt{\dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}$ ou $z = -\sqrt{\dfrac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + \mathrm{i}\sqrt{\dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}$.

4. a. Ici, $b = 2 > 0$ donc les formules de la question 3.a. permettent de déterminer que $S_{\mathbb{C}} = \{1 + \mathrm{i}; -1 - \mathrm{i}\}$.

   b. Ici, $b = -4 < 0$ donc les formules de la question 3.b. permettent de déterminer que $S_{\mathbb{C}} = \{2 - \mathrm{i}; -2 + \mathrm{i}\}$.

Partie B : Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes
Soient a, b et c des nombres complexes avec $a \neq 0$ et (1) : $az^2 + bz + c = 0$.

1. Comme $a \neq 0$, alors $(1) \Leftrightarrow a\left(z^2 + \dfrac{b}{a}z\right) + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\right] + c = 0$ $\Leftrightarrow a\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a} + \dfrac{4ac}{4a} = 0 \Leftrightarrow a\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \Leftrightarrow a\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} = 0$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

2. Soit $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Alors $(1) \Leftrightarrow a\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow \left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$ $\Leftrightarrow \left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \left(\dfrac{\delta}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow z + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\delta}{2a}$ ou $z + \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\delta}{2a} \Leftrightarrow z = \dfrac{-b + \delta}{2a}$ ou $z = \dfrac{-b - \delta}{2a}$.

3. (1) : $z^2 + (3\mathrm{i} - 4)z + 1 - 7\mathrm{i} = 0$. On calcule le discriminant Δ de ce trinôme du second degré : $\Delta = (3\mathrm{i} - 4)^2 - 4 \times 1 \times (1 - 7\mathrm{i}) = 16 - 9 - 24\mathrm{i} - 4 + 28\mathrm{i} = 3 + 4\mathrm{i}$.

Document sous licence libre Creative Commons

On cherche alors δ tel que $\delta^2 = 3 - 4\mathrm{i}$ avec la méthode vue en Partie A. On résout donc $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ y = -\dfrac{2}{x} \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$.

Ainsi, $S_{\mathbb{C}} = \{2 + \mathrm{i}; -2 - \mathrm{i}\}$.

On pose $\delta = 2 + \mathrm{i}$. Alors l'équation admet deux solutions : $z = \dfrac{-(3\mathrm{i} - 4) - (2 + \mathrm{i})}{2}$ ou $z = \dfrac{-(3\mathrm{i} - 4) + (2 + \mathrm{i})}{2}$, c'est-à-dire $z = 1 - 2\mathrm{i}$ ou $z = 3 - \mathrm{i}$.

Ainsi, $S_{\mathbb{C}} = \{1 - 2\mathrm{i}; 3 - \mathrm{i}\}$.

Document sous licence libre Creative Commons

Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 2 : Nombres complexes, point de vue géométrique

Table des matières

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

1 Informations sur ce chapitre

Le B.O. précise que « sans introduire explicitement les structures algébriques, l'enseignement des nombres complexes introduit et étudie certains exemples fondamentaux : corps des nombres complexes, groupes des nombres complexes de module 1 et des racines n-ièmes de l'unité, anneau des entiers relatifs, d'une manière suffisamment approfondie pour préparer à des généralisations. »
Le début du chapitre permet de faire le lien entre le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble des nombres complexes. Cet aspect permettra d'interpréter de nombreuses notions de géométrie sous forme de nombres complexes.
Après avoir introduit les notions de module et d'arguments d'un nombre complexe, les formes trigonométriques et exponentielles sont abordées, ainsi que les formules d'addition, de duplication, d'Euler et de Moivre.
Pour finir ce chapitre, nous abordons les nombres complexes et leurs intérêts dans la résolution de problèmes de géométrie plane, ainsi que la notion de racines n-ième de l'unité.
Les exercices proposés sont assez simples et calculatoires dans un premier temps afin de faciliter l'acquisition des automatismes et des techniques de calculs, puis des exercices plus ambitieux seront abordés. Vous trouverez des exercices liant les nombres complexes aux suites, aux transformations complexes, à la résolution d'équations complexes, ... ainsi que des exercices permettant une découverte de certaines notions plus difficiles telles que les transformées de Fourier discrètes, les racines n-ième d'un nombre complexe ou encore les coordonnées polaires.

Document sous licence libre Creative Commons

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

1. a. On a $z_1 = (5+\mathrm{i})(3\mathrm{i}-2) = 15\mathrm{i} - 10 - 3 - 2\mathrm{i} = -13 + 13\mathrm{i}$.
   b. On a $z_2 = \dfrac{2-6\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(2-6\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \dfrac{2-6\mathrm{i}-2\mathrm{i}-6}{1^2-\mathrm{i}^2} = \dfrac{-4-8\mathrm{i}}{2} = -2-4\mathrm{i}$.
2. On commence par écrire z_3 sous forme algébrique.

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{1+3\mathrm{i}}{\mathrm{i}-5}+1 \\ &= \frac{1+3\mathrm{i}+(\mathrm{i}-5)}{\mathrm{i}-5} \\ &= \frac{-4+4\mathrm{i}}{\mathrm{i}-5} \\ &= \frac{(-4+4\mathrm{i})(-\mathrm{i}-5)}{(\mathrm{i}-5)(-\mathrm{i}-5)} \\ &= \frac{24-16\mathrm{i}}{26} \\ &= \frac{12}{13}-\frac{8}{13}\mathrm{i} \end{aligned}$$

   Donc, la forme algébrique de $\overline{z_3}$ est $\overline{z_3} = \dfrac{12}{13} + \dfrac{8}{13}\mathrm{i}$.

Corrigé exercice 2 :

1. $3z - 2\mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow 3z = 2\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{2}{3}\mathrm{i}$. Donc $S = \left\{\dfrac{2}{3}\mathrm{i}\right\}$.

2. $(8-3\mathrm{i})z + 2\mathrm{i} = z \Leftrightarrow (8-3\mathrm{i})z - z = -2\mathrm{i} \Leftrightarrow (7-3\mathrm{i})z = -2\mathrm{i} \Leftrightarrow z = -\dfrac{2\mathrm{i}}{7-3\mathrm{i}}$
   $\Leftrightarrow z = -\dfrac{2\mathrm{i}(7+3\mathrm{i})}{(7-3\mathrm{i})(7+3\mathrm{i})} \Leftrightarrow z = -\dfrac{14\mathrm{i}-6}{7^2+3^2} \Leftrightarrow z = \dfrac{3}{29} - \dfrac{7}{29}\mathrm{i}$.
   Donc $S = \left\{\dfrac{3}{29} - \dfrac{7}{29}\mathrm{i}\right\}$.

3. $4\overline{z} + \mathrm{i} + 7 = 3 - 5\mathrm{i} \Leftrightarrow 4\overline{z} = -4 - 6\mathrm{i} \Leftrightarrow \overline{z} = -1 - \dfrac{3}{2}\mathrm{i} \Leftrightarrow z = -1 + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$
   Donc $S = \left\{-1 + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right\}$.

4. On pose $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y deux réels.
   $8\mathrm{i}z + 2\overline{z} + 1 = 3 + 4\mathrm{i} \Leftrightarrow 8\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y) + 2(x-\mathrm{i}y) + 1 = 3 + 4\mathrm{i} \Leftrightarrow (2x - 8y + 1) + \mathrm{i}(8x - 2y) = 3 + 4\mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 8y + 1 = 3 \\ 8x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 32y + 4 = 12 \\ 8x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -30y + 4 = 8 \\ 8x - 2y = 4 \end{cases}$

Document sous licence libre Creative Commons
CC BY NC SA

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -30y = 4 \\ 8x = 4 + 2y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{2}{15} \\ 8x = 4 - 2 \times \dfrac{2}{15} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{2}{15} \\ x = \dfrac{7}{15} \end{cases}$$

Donc $S = \left\{\dfrac{7}{15} - \dfrac{2}{15}\mathrm{i}\right\}$.

Corrigé exercice 3 :

1. On résout $3z^2 - 5z + 1 = 0$. Cette équation est une équation du second degré. On calcule son discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 13 > 0$. L'équation admet donc deux racines réelles $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5 - \sqrt{13}}{6}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5 + \sqrt{13}}{6}$.
   Donc $S = \left\{\dfrac{5 - \sqrt{13}}{6}; \dfrac{5 + \sqrt{13}}{6}\right\}$.

2. On résout $z^2 + z + 1 = 0$. Cette équation est une équation du second degré. On calcule son discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$. L'équation admet donc deux racines complexes conjuguées z $z_1 = \dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $S = \left\{-\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

3. On résout $z^2 - \sqrt{2}z + 3 = 2 \Leftrightarrow z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$. Cette équation est une équation du second degré. On calcule son discriminant : $\Delta = \left(-\sqrt{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 2 - 4 = -2 < 0$. L'équation admet donc deux racines complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $S = \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

4. On résout $(z^2 - 4z + 2)(z^2 - z + 1) = 0 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 2 = 0$ ou $z^2 - z + 1 = 0$.
   Première équation : Cette équation est une équation du second degré. On calcule son discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 16 - 8 = 8 > 0$. L'équation admet donc deux racines réelles $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4 - \sqrt{8}}{2} = \dfrac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4 + \sqrt{8}}{2} = \dfrac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$.
   Deuxième équation : Cette équation est une équation du second degré. On calcule son discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$. L'équation admet donc deux racines complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-|\Delta|}}{2a} = \dfrac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $S = \left\{2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}; \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Corrigé exercice 4 :

1. a. On a $P(2) = 2^3 - 5 \times 2^2 + 11 \times 2 - 10 = 8 - 20 + 22 - 10 = 0$.
   2 est donc bien une racine de P.

   b. Comme 2 est une racine de P, il existe trois réels a, b et c tels que $z^3 - 5z^2 + 11z - 10 = (z-2)(az^2 + bz + c)$.
   Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $(z-2)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c$.
   Par identification des coefficients, on obtient $\begin{cases} a = 1 \\ b = -5 + 2a = -3 \\ c = 11 + 2b = 5 \end{cases}$.
   Donc $z^3 - 5z^2 + 11z - 10 = (z-2)(z^2 - 3z + 5)$.

   c. $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2 - 3z + 5) = 0 \Leftrightarrow z = 2$ ou $z^2 - 3z + 5 = 0$. La seconde équation est une équation du second degré.
   On calcule son discriminant : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -11 < 0$.
   L'équation admet donc deux racines complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{3 - \mathrm{i}\sqrt{11}}{2} = \dfrac{3}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.
   En conclusion, $S = \left\{2; \dfrac{3}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{11}}{2}; \dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right\}$.

2. On a $2 \times (-1)^3 + 7 \times (-1)^2 + 9 \times (-1) + 4 = -2 + 7 - 9 + 4 = 0$. Il existe donc trois réels a, b et c tels que $2z^3 + 7z^2 + 9z + 4 = (z+1)(az^2 + bz + c)$.
   Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $(z+1)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b+a)z^2 + (c+b)z + c$.
   Par identification des coefficients, on obtient $\begin{cases} a = 2 \\ b = 7 - a = 5 \\ c = 9 - b = 4 \end{cases}$.
   Donc $2z^3 + 7z^2 + 9z + 4 = (z+1)(2z^2 + 5z + 4)$.
   $(z+1)(2z^2 + 5z + 4) = 0 \Leftrightarrow z = -1$ ou $2z^2 + 5z + 4 = 0$.
   La deuxième équation est une équation du second degré. On calcule son discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 4 = -7 < 0$. L'équation admet donc deux racines complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{-5 - \mathrm{i}\sqrt{7}}{4} = -\dfrac{5}{4} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ et $z_2 = \overline{z_1} = -\dfrac{5}{4} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.
   En conclusion, $S = \left\{-1; -\dfrac{5}{4} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{7}}{4}; -\dfrac{5}{4} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right\}$.

Corrigé exercice 5 :

1. $\mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{2x-1} = \mathrm{e}^{3x+2x-1} = \mathrm{e}^{5x-1}$
2. $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x-3}} = \mathrm{e}^{x^2-(x-3)} = \mathrm{e}^{x^2-x+3}$
3. $\left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^2 = \mathrm{e}^{2(x+2)} = \mathrm{e}^{2x+4}$

Document sous licence libre Creative Commons

4. $\dfrac{\left(\mathrm{e}^{x-1}\right)^3 \times \mathrm{e}^{3-5x}}{\mathrm{e}^{-2x+6}} = \dfrac{\mathrm{e}^{3(x-1)+3-5x}}{\mathrm{e}^{-2x+6}} = \mathrm{e}^{3(x-1)+3-5x-(-2x+6)} = \mathrm{e}^{-6}$

Corrigé exercice 6 :

1. a. $\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   b. On a $\cos\left(\dfrac{23\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{23\pi}{6} - 2\times 2\pi\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{23\pi}{6}\right) = \sin\left(\dfrac{23\pi}{6} - 2\times 2\pi\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

   c. On a $\cos\left(\dfrac{25\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{25\pi}{4} - 3\times 2\pi\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{25\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{25\pi}{4} - 3\times 2\pi\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   d. On a $\cos\left(-\dfrac{11\pi}{2}\right) = \cos\left(-\dfrac{11\pi}{2} + 3\times 2\pi\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(-\dfrac{11\pi}{2}\right) = \sin\left(-\dfrac{11\pi}{2} + 3\times 2\pi\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

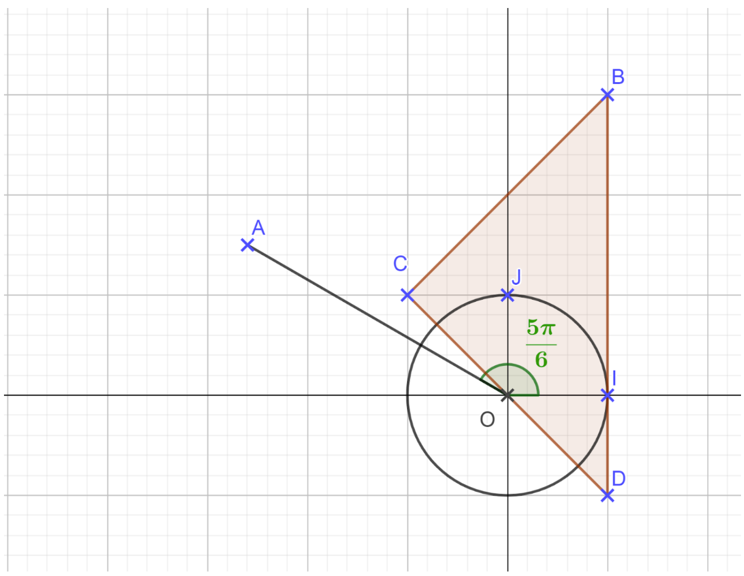
2. a. Une valeur possible de x est $x = \pi$.

   b. Une valeur possible de x est $x = -\dfrac{3\pi}{4}$.

3. Par lecture du cercle trigonométrique, on obtient $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\times 2\pi$, avec k un entier relatif.

Corrigé exercice 7 :

1. On obtient la figure suivante.



BY NC SA

2. Nous travaillons dans un repère orthonormé, on peut donc calculer les longueurs BC, BD et CD à l'aide de la formule usuelle. On obtient :
   $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$ cm ;
   $BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-3)^2} = 4$ cm ;
   $CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{2}$ cm.
   On remarque que $BC = CD$, donc BCD est isocèle en C.
   De plus $BC^2 + CD^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8 + 8 = 16 = BD^2$.
   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, BCD est un triangle rectangle en C.
   En conclusion, BCD est un triangle rectangle et isocèle en C.

Corrigé exercice 8 :

B appartient au cercle trigonométrique de centre O donc $OB = 1$. De plus, $\widehat{IOB} = \dfrac{3\pi}{2}$ donc B appartient à l'axe des ordonnées et a une ordonnée négative. Ainsi, B a pour coordonnées $B\,(0;-1)$.
On sait que $\widehat{IOA} = \dfrac{3\pi}{4}$ Ainsi, A appartient à la droite d'équation $y = -x$. De plus, $OA = 2\sqrt{2}$, ce qui signifie que OA est la diagonale d'un carré de côté 2. Ainsi, A a pour coordonnées $A\,(-2;2)$.
Nous travaillons dans un repère orthonormé, donc :
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-(-2))^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{13}$
$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(3-(-2))^2 + (1-2)^2} = \sqrt{26}$
$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{13}$.
On remarque que $AB = BC$ donc ABC est isocèle en B.
De plus $AB^2 + BC^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2 = 13 + 13 = 26 = AC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en B.
En conclusion, ABC est un triangle rectangle et isocèle en B.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

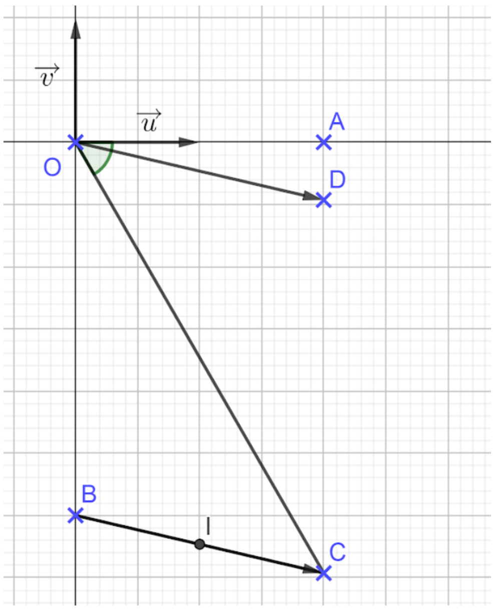
3 Activités

3.1 Corrigé activité A :

Questions :

1. a. A et C ont la même abscisse 2. Le triangle OAC est donc rectangle en A. En utilisant la trigonométrie, on obtient $\cos\widehat{AOC} = \dfrac{OA}{OC}$ et $\sin\widehat{AOC} = \dfrac{AC}{OC}$.
Comme nous travaillons dans un repère orthonormé, $OA = 2$,
$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = 2\sqrt{3}$ et
$OC = \sqrt{(x_C - x_O)^2 + (y_C - y_O)^2} = 4$.
D'où $\cos\widehat{AOC} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\widehat{AOC} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Par lecture d'un cercle trigonométrique, on obtient $\widehat{AOC} = \dfrac{\pi}{3}$.
L'abscisse de C est positive et son ordonnée est négative ce qui signifie que $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right) = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

   b. Pour placer précisément le point C, il faut utiliser $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right) = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, puis reporter avec le compas la longueur $OC = 4$.



2. A a pour coordonnées $(2;0)$, donc A a pour affixe $z_A = 2$.
B a pour coordonnées $(0;-3)$, donc B a pour affixe $z_B = -3\text{i}$.
C a pour coordonnées $\left(2;-2\sqrt{3}\right)$ donc C a pour affixe $z_C = 2 - 2\text{i}\sqrt{3}$.

3. Un point appartient à l'axe des abscisses lorsque lorsque $y = 0$, c'est-à-dire lorsque son affixe est un réel. Un point appartient à l'axe des ordonnées lorsque $x = 0$, c'est-à-dire lorsque son affixe est un imaginaire pur.

4. a. Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a pour affixe 2 puisque l'affixe de A est 2. Le vecteur $\overrightarrow{OB}$ a pour affixe -3i puisque l'affixe de B est -3i. Le vecteur $\overrightarrow{OC}$ a pour affixe $2 - 2\text{i}\sqrt{3}$, puisque l'affixe de C est $2 - 2\text{i}\sqrt{3}$.

Document sous licence libre Creative Commons
CC BY NC SA

b. On sait que $\overrightarrow{BC}\,(x_C - x_B; y_C - y_B)$.
Donc $z_{\overrightarrow{BC}} = (x_C - x_B) + \mathrm{i}\,(y_C - y_B) = 2 + \left(3 - 2\sqrt{3}\right)\mathrm{i}$.
Comme $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC}$, on a $z_{\overrightarrow{OD}} = z_{\overrightarrow{BC}} = 2 + \left(3 - 2\sqrt{3}\right)\mathrm{i}$.
D a donc pour affixe $z_D = 2 + \left(3 - 2\sqrt{3}\right)\mathrm{i}$.

c. $z_{\overrightarrow{BC}} = z_{\overrightarrow{OD}} = 2 + \left(3 - 2\sqrt{3}\right)\mathrm{i}$

5. I est milieu de $[BC]$ donc $x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2}$.

Donc $z_I = x_I + \mathrm{i}y_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} + \dfrac{y_B + y_C}{2}\mathrm{i} = 1 + \dfrac{-3 - 2\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

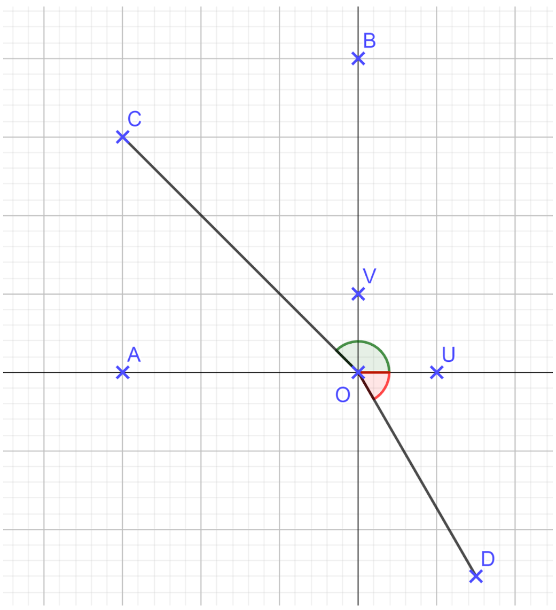
Bilan :

D'après le résultat de la question 4.b, on obtient la formule : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
D'après le résultat de la question 5, on obtient la formule : $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

3.2 Corrigé activité B :

Questions :

1. a. Voici la figure.



A a pour affixe $z_A = -3$ et B a pour affixe $z_B = 4\mathrm{i}$.

b. La longueur OA est égale à 3.

c. On a $|z_B| = OB = 4$ et $|z_C| = OC = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

2. a. Les points U, O et A sont alignés. L'angle $\widehat{UOA}$ est donc plat d'où :
$\left(\overrightarrow{OU}; \overrightarrow{OA}\right) = \pi$ rad.

Les droites (OU) et (OB) sont perpendiculaires. L'angle $\widehat{UOB}$ est donc droit.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

B a une ordonnée positive, donc $\left(\overrightarrow{OU};\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ rad.

b. A et C ont la même abscisse -3. Le triangle OAC est donc rectangle en A.
En utilisant la trigonométrie, on obtient $\cos\widehat{AOC}=\dfrac{OA}{OC}$ et $\sin\widehat{AOC}=\dfrac{AC}{OC}$.
Or $OA=3$. De plus, $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=3$ et
$OC=\sqrt{(x_C-x_O)^2+(y_C-y_O)^2}=3\sqrt{2}$.
D'où $\cos\widehat{AOC}=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\widehat{AOC}=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En utilisant le cercle trigonométrique, on obtient $\widehat{AOC}=\dfrac{\pi}{4}$. De plus, $\widehat{UOC}=\pi-\widehat{AOC}$ donc $\cos\widehat{UOC}=-\cos\widehat{AOC}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\widehat{UOC}=\sin\widehat{AOC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
En utilisant le cercle trigonométrique, on a $\left(\overrightarrow{OU};\overrightarrow{OC}\right)=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

c. La mesure précédente n'est pas unique puisque les mesures d'angle s'expriment à un multiple de 2π près.

d. Il n'y a donc pas unicité de la valeur d'un argument.

3. a. On a

$$\begin{aligned}|z_C|\left[\cos(\alpha)+\mathrm{i}\sin(\alpha)\right]&=3\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]\\&=3\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\&=-3+3\mathrm{i}\\&=z_C\end{aligned}$$

b. On a $\mathrm{Re}(z_C)=|z_C|\cos(\alpha)$ et $\mathrm{Im}(z_C)=|z_C|\sin(\alpha)$.

4. a. Voir la figure ci-dessus.
On a $z_D=3\left(\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$.

b. On considère le point M d'affixe z.
On a $|z|=OM=\sqrt{(-4\sqrt{3})^2+4^2}=\sqrt{64}=8$.
Donc $z=8\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right)=8\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right]$.

Bilan :

Le module de $z=x+\mathrm{i}y$ est donné par $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.
Pour calculer l'argument de z on commence par calculer le module de z avec la formule $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. On calcule ensuite $\cos\alpha=\dfrac{x}{|z|}$ et $\sin\alpha=\dfrac{y}{|z|}$.
En utilisant le cercle trigonométrique, on peut ainsi obtenir une valeur de α.

Document sous licence libre Creative Commons
CC BY NC SA

3.3 Corrigé activité C :

Questions :

1. Pour déterminer l'ensemble $\mathbb{U}_1$, on doit résoudre l'équation complexe $z^1 = 1$, soit $z = 1$. On a donc $\mathbb{U}_1 = \{1\}$.

   Pour déterminer l'ensemble $\mathbb{U}_2$ on doit résoudre l'équation complexe $z^2 = 1$, soit $z = 1$ ou $z = -1$. On a donc $\mathbb{U}_2 = \{-1; 1\}$.

2. a. On doit résoudre l'équation complexe $z^4 = 1$, c'est-à-dire $z^4 - 1 = 0$, soit $(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$, soit $z^2 = 1$ ou $z^2 = -1$. La première équation a pour solutions -1 et 1. La deuxième équation a pour solutions $-\mathrm{i}$ et i.

   $\mathbb{U}_4$ est donc composé de quatre éléments : $\mathbb{U}_4 = \{-1; -\mathrm{i}; 1; \mathrm{i}\}$.

   b. Pour démontrer que le polygone est un carré, on peut commencer par calculer les quatre longueurs. On nomme A, B, C et D les points d'affixe respective $-1, 1, \mathrm{i}$ et $-\mathrm{i}$. On a : $AC = |z_C - z_A| = |\mathrm{i} + 1| = \sqrt{2}$
   $AD = |z_D - z_A| = |-\mathrm{i} + 1| = \sqrt{2}$
   $BC = |z_C - z_B| = |\mathrm{i} - 1| = \sqrt{2}$
   $BD = |z_D - z_B| = |-\mathrm{i} - 1| = \sqrt{2}$.
   Ainsi $AC = AD = BC = BD$.
   Il suffit maintenant de montrer, par exemple, qu'on a $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
   En effet, $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_C - z_A}\right)$.
   Or $\dfrac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{-\mathrm{i} + 1}{\mathrm{i} + 1} = -\mathrm{i}$, d'où $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Pour $n = 2$, la somme des racines n-ièmes de l'unité est égale à $1 + (-1) = 0$.

   Pour $n = 4$, la somme des racines n-ièmes de l'unité est égale à $1+(-1)+\mathrm{i}+(-\mathrm{i}) = 0$.

   Pour $n = 3$, la somme des racines n-ièmes de l'unité est égale à

$$\begin{aligned}1 + \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}} + \mathrm{e}^{\frac{4\pi\mathrm{i}}{3}} &= 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

a. U a pour affixe 1. J appartient au cercle trigonométrique, ce qui signifie que $|z_J| = 1$. Comme UOJ est un triangle équilatéral, on a $\widehat{UOJ} = \dfrac{2\pi}{3}$. J a donc pour affixe $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$. K a pour affixe $\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$, puisque K et J sont symétriques par rapport à l'axe des réels. Leur affixe sont donc conjuguées l'une de l'autre.

b. On a $\mathrm{j}^2 = \left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right)^2 = \mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}} = \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = z_K$.

c. On a $1^3 = 1$

Document sous licence libre Creative Commons
cc BY NC SA

$\mathrm{j}^3 = \left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right)^3 = \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}\right) = 1$

$\left(\mathrm{j}^2\right)^3 = \left(\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right)^3 = \left(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi}\right) = 1.$

1, j et j^2 sont donc bien solutions de $z^3 = 1$.

d. $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)}$ est solution de $z^3 = 1$ si, et seulement si, $\left(|z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)}\right)^3 = 1$, soit $|z|^3 \times \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\arg(z)} = 1 \times \mathrm{e}^{0\times\mathrm{i}}$.

On obtient le système $\begin{cases} |z| = 1 \\ 3\arg(z) = 0 + k \times 2\pi \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$ soit au final :

$\begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \dfrac{2\pi k}{3} \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Le polynôme P défini par $P(z) = z^3 - 1$ admet 3 racines identifiées à la question 3.c. Or, un polynôme de degré 3 admet au plus trois racines.

P admet donc exactement ces 3 racines.

Bilan :

$z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)}$ est solution de $z^n = 1$ si, et seulement si, $\left(|z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)}\right)^n = 1$, soit $|z|^n \times \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\arg(z)} = 1 \times \mathrm{e}^{0\times\mathrm{i}}$.

On obtient le système $\begin{cases} |z| = 1 \\ n\arg(z) = 0 + k \times 2\pi \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Soit finalement $\begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \dfrac{2\pi k}{n} \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Le polynôme P défini par $P(z) = z^n - 1$ admet n racines données par, d'après ce qui précède, les nombres complexes $\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{n}}$ avec $k = 0, 1, \dots n-1$. Or, un polynôme de degré n admet au plus n racines. P admet donc exactement ces n racines.

$\mathbb{U}_n$ est donc composé de n éléments : $\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{n}}$ avec $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

Calculons la somme des racines n-ièmes.

$S = 1 + \mathrm{e}^{\frac{2\times1\times\pi\mathrm{i}}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2\times2\times\pi\mathrm{i}}{n}} + \cdots + \mathrm{e}^{\frac{2(n-1)\pi\mathrm{i}}{n}} = \frac{1-\left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}}$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$).

Soit $S = \frac{1-\mathrm{e}^{2\pi}}{1-\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}} = \frac{1-1}{1-\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}} = 0$. La somme des racines n-ième de l'unité est donc nulle.

On conjecture que le polygone dont les sommets sont l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est un polygone régulier à n côtés.

Document sous licence libre Creative Commons

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 9 :

On a $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (-1+5\text{i}) - (3+2\text{i}) = -4+3\text{i}$.
De plus $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = (\text{i}-1) - (3+2\text{i}) = -4-\text{i}$.
D'où $z_{\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}} = z_{\overrightarrow{AB}} - 2z_{\overrightarrow{AC}} = -4+3\text{i} - 2(-4-\text{i}) = 4+5\text{i}$.
Donc, $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ a pour affixe $4+5\text{i}$.
$\boxed{\text{Réponse c}}$

Corrigé exercice 10 :

Le module de $z = 4-3\text{i}$ est égal à $|z| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.
$\boxed{\text{Réponse c}}$

Corrigé exercice 11 :

Le module de $z = -\frac{3}{2} + 3\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ est égal à :
$|z| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 9 \times \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3$.
Calculons l'argument de z.
On a $\cos(\alpha) = \frac{x}{|z|} = \frac{-\frac{3}{2}}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{y}{|z|} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
En utilisant le cercle trigonométrique, on a $\arg(z) = \frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
La forme trigonométrique de $-\frac{3}{2} + 3\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ est donc $3\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$.
$\boxed{\text{Réponse b}}$

Corrigé exercice 12 :

En utilisant la formule de Moivre avec $n = 5$, on obtient la réponse d.
$\boxed{\text{Réponse d}}$

Corrigé exercice 13 :

On a $\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = |-\text{i}| = 1$. Or, $\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = \frac{|b-a|}{|c-a|} = \frac{AB}{AC}$ donc $AB = AC$ et ABC est isocèle en A.
On a $\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \arg(-\text{i}) + k \times 2\pi = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Or, $\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}\right) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ donc $\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ et ABC est rectangle en A.
$\boxed{\text{Réponses b et c}}$

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 14 :

On a $z^3 = \left(3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\dfrac{\pi}{6}}\right)^3 = 27\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\dfrac{3\pi}{6}} = 27\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2}}$ et $|z'| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = 2$.

De plus $\cos(\alpha') = \dfrac{x'}{|z'|} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha') = \dfrac{y'}{|z'|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

D'après le cercle trigonométrique, on obtient $\arg(z') = \dfrac{3\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Donc $z' = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ et $\frac{z}{z'} = \frac{3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}} = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$.

De même, $zz' = 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\dfrac{\pi}{6}} \times 2\mathrm{e}^{\dfrac{3\pi}{4}\mathrm{i}} = 6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\dfrac{3\pi}{4}} = 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{7\pi}{12}}$.

De plus, $z = 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\dfrac{\pi}{6}} = 3\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right] = 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.

D'où $zz' = \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)(-\sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}) = \dfrac{3(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2} + \dfrac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}\mathrm{i}$.

$\boxed{\text{Réponses a, c et d}}$

Corrigé exercice 15 :

On a $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 \times 3 + 9} = \sqrt{36} = 6$.

De plus, $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{|z|} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{y}{|z|} = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2}$.

D'après le cercle trigonométrique, on a $\arg(z) = -\dfrac{5\pi}{6} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D'où $z = 6\left[\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right] = 6\mathrm{e}^{-\dfrac{5\mathrm{i}\pi}{6}}$.

De plus, $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\dfrac{\mathrm{i}\pi}{2}}$ donc $\mathrm{i}z = \mathrm{e}^{\dfrac{\mathrm{i}\pi}{2}} \times 6\mathrm{e}^{-\dfrac{5\mathrm{i}\pi}{6}} = 6\mathrm{e}^{\dfrac{\mathrm{i}\pi}{2}-\dfrac{5\mathrm{i}\pi}{6}} = 6\mathrm{e}^{-\dfrac{\mathrm{i}\pi}{3}}$.

$\boxed{\text{Réponses a, b et d}}$

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 16 :

D'après les formules d'Euler, on obtient :

$$\begin{aligned}\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3\\ &= \frac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^3}{(2i)^3}\\ &= \frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{-8i}\\ &= -\frac{1}{4}\times\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}+\frac{3}{4}\times\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\\ &= -\frac{1}{4}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x)\\ &= -\frac{\sin(3x)-3\sin(x)}{4}\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3\\ &= \frac{1}{-8i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^3\\ &= \frac{i}{-8i^2}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^3\\ &= \frac{i}{8}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^3\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Réponses a et d}}$

Corrigé exercice 17 :

1. D'après la figure, A a pour affixe $a=2+i$ et B pour affixe $b=-4+3i$.
2. On calcule les trois longueurs du triangle ABC.
   $AB=|b-a|=|-6+2i|=\sqrt{(-6)^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$
   $AC=|c-a|=\left|\sqrt{3}-1+\left(2+3\sqrt{3}\right)i-2-i\right|$
   $=\left|\sqrt{3}-3+\left(1+3\sqrt{3}\right)i\right|$
   $=\sqrt{\left(\sqrt{3}-3\right)^2+\left(1+3\sqrt{3}\right)^2}$
   $=\sqrt{3-6\sqrt{3}+9+1+6\sqrt{3}+9\times 3}$
   $=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$
   $BC=|c-b|=\left|\sqrt{3}-1+\left(2+3\sqrt{3}\right)i+4-3i\right|$
   $=\left|\sqrt{3}+3+\left(-1+3\sqrt{3}\right)i\right|$
   $=\sqrt{\left(\sqrt{3}+3\right)^2+\left(-1+3\sqrt{3}\right)^2}$

Document sous licence libre Creative Commons

$= \sqrt{3 + 6\sqrt{3} + 9 + 1 - 6\sqrt{3} + 9 \times 3}$
$= \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
Ainsi, $AB = BC = AC$ donc ABC est équilatéral.

3. Dans un triangle équilatéral, le pied H de la hauteur issue de C est le milieu du segment $[AB]$. Donc, son affixe est égale à $z_H = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{-2+4\mathrm{i}}{2} = -1+2\mathrm{i}$.

4. Dans un triangle équilatéral, une hauteur est aussi une médiane. (CH) est donc la médiane du triangle ABC issue de C. De plus, le centre de gravité G vérifie l'égalité vectorielle $\overrightarrow{CG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CH}$. Le vecteur $\overrightarrow{CH}$ a pour affixe $z_H - c = -\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\mathrm{i}$. D'où, $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CH}$ a pour affixe $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}\mathrm{i}$.
   Or, le vecteur $\overrightarrow{CG}$ a pour affixe $z_G - c = z_G - \sqrt{3} + 1 - (2+3\sqrt{3})\mathrm{i}$.
   On obtient donc $z_G - \sqrt{3} + 1 - (2+3\sqrt{3})\mathrm{i} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}\mathrm{i}$, soit $z_G = \dfrac{\sqrt{3}-3}{3} + (2+\sqrt{3})\mathrm{i}$.

Document sous licence libre Creative Commons

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1

Questions préliminaires

1. La suite (z_n) est définie par $z_{n+1} = z_n^2$ puisque $c = 0$.

   Si $\omega = 0$, on montre par une récurrence « évidente » que, lorsque $z_0 = 0$, alors $z_n = 0$ pour tout entier naturel n. La suite (u_n) est donc constante et nulle.

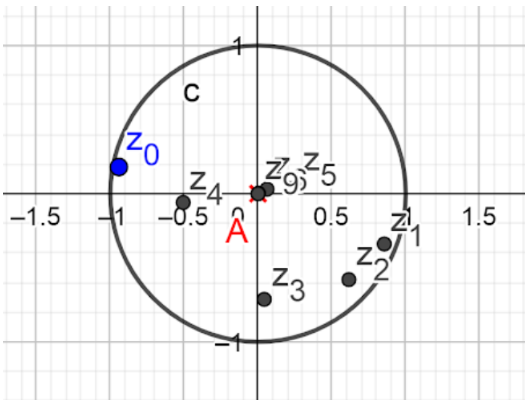
   Si $|\omega| = 1$, on montre par une récurrence « évidente » que lorsque $|z_0| = 1$, alors $u_n = |z_n| = 1$ pour tout entier naturel n. La suite (u_n) est donc constante et égale à 1.

2. Une suite constante est une suite bornée. On conclut donc que 0 et tous les nombres complexes de $\mathbb{U}$, c'est-à-dire les nombres complexes de module 1, appartiennent à J_0.

Méthode 1

1. Pour construire z_1, on saisit $z_1 = z_0^2$, et ainsi de suite pour les points suivants.

   On obtient le graphique suivant.



   On observe que :

   - lorsque z_0 se situe à l'intérieur du cercle de centre A et de rayon 1, l'ensemble des points se situent à l'intérieur aussi de ce cercle ;
   - lorsque z_0 se situe à l'extérieur du cercle de centre A et de rayon 1, l'ensemble des points z_n s'éloignent de plus en plus les uns par rapport aux autres.

   On conjecture donc que la suite (u_n) est :

   - bornée lorsque z_0 se situe à l'intérieur du cercle de centre A et de rayon 1 ;
   - non bornée lorsque z_0 se situe à l'extérieur du cercle de centre A et de rayon 1.

   On conjecture donc que J_0 est le disque de centre O et de rayon 1.

2. • On considère le cas $0 < |\omega| < 1$.

Pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \dfrac{|z_n|^2}{|z_n|} = |z_n| = u_n$.

Par récurrence, montrons que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = |\omega|^{2^n} < 1$ et $u_n > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la proposition $0 < u_n = |\omega|^{2^n} < 1$.

On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_0 = |z_0| = |\omega|$.

Or, $0 < |\omega| < 1$ donc $0 < u_0 = |\omega| < 1$ et $|\omega|^{2^0} = |\omega|^1 = |\omega|$.

D'où $0 < u_0 = |\omega|^{2^0} < 1$. On en déduit que P_0 est vraie.

Hérédité : On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $0 < u_k = |\omega|^{2^k} < 1$.

On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $0 < u_{k+1} = |\omega|^{2^{k+1}} < 1$.

$u_{k+1} = |z_{k+1}| = |z_k|^2 = u_k^2$ donc $0 < u_k^2 = \left(|\omega|^{2^k}\right)^2 < 1^2$ (par hypothèse de récurrence et par stricte croissance de la fonction carrée sur $]0; +\infty[$).

D'où $0 < u_{k+1} = |\omega|^{2^k \times 2} < 1$, soit $0 < u_{k+1} = |\omega|^{2^{k+1}} < 1$.

Conclusion : Ainsi, P_0 est vraie et, lorsque P_k est vraie pour un entier k quelconque, alors P_{k+1} est également vraie. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n = |\omega|^{2^n} < 1$.

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = u_n < 1$ et la suite (u_n) est strictement positive. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente.

• On considère le cas $|\omega| > 1$.

Pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = u_n$. Par récurrence, montrons que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = |\omega|^{2^n} > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel n, on note P_n la proposition $u_n = |\omega|^{2^n} > 1$.

On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_0 = |z_0| = |\omega|$

Or, $|\omega| > 1$ donc $u_0 = |\omega| > 1$ et $|\omega|^{2^0} = |\omega|^1 = |\omega|$. Donc $u_0 = |\omega|^{2^0} > 1$. On en déduit que P_0 est vraie.

Hérédité : On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $u_k = |\omega|^{2^k} > 1$.

On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $u_{k+1} = |\omega|^{2^{k+1}} > 1$.

$u_{k+1} = |z_{k+1}| = |z_k|^2 = u_k^2$ donc $u_k^2 = \left(|\omega|^{2^k}\right)^2 > 1^2$ (par hypothèse de récurrence et par stricte croissance de la fonction carrée sur $]0; +\infty[$).

D'où $u_{k+1} = |\omega|^{2^k \times 2} > 1$ soit $u_{k+1} = |\omega|^{2^{k+1}} > 1$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Conclusion : Ainsi, P_0 est vraie et, s'il existe un entier k tel que P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |\omega|^{2^n} > 1$.

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = u_n > 1$ et la suite (u_n) est croissante.

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} |\omega|^{2^n} = +\infty$, puisque $|\omega| > 1$.

3. On vient donc de démontrer que tous les nombres complexes ω tels que $0 < |\omega| < 1$ appartiennent à J_0. En effet, une suite convergente est une suite bornée et une suite croissante qui tend vers $+\infty$ est non bornée.

Méthode 2

1. Pour tout entier naturel n, on a $z_{n+1} = (x_n + \mathrm{i}y_n)^2 = x_n^2 - y_n^2 + \mathrm{i}(2x_ny_n)$ donc $x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2$ et $y_{n+1} = 2x_ny_n$ puisque $z_{n+1} = x_{n+1} + \mathrm{i}y_{n+1}$.

2. a. Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = |z_{n+1}| = \sqrt{(x_n^2 - y_n^2)^2 + (2x_ny_n)^2}$. Voici l'algorithme complété.

Fonction Julia(α, β) :
  $x \leftarrow \alpha$
  $y \leftarrow \beta$
  Pour k allant de 1 à 10 faire :
    $a \leftarrow x$
    $b \leftarrow y$
    $x \leftarrow a^2 - b^2$
    $y \leftarrow 2 \times a \times b$
    $U \leftarrow \sqrt{x^2 + y^2}$
    Afficher U
  Fin Pour

b. Voici l'algorithme en langage Python.

```python
from math import sqrt

def julia(alpha, beta):
    x = alpha
    y = beta
    for i in range(10):
        a = x
        b = y
        x = a**2 - b**2
        y = 2*a*b
        u = sqrt(x**2 + y**2)
        print(u)
```

En réalisant plusieurs test, on conjecture donc que J_0 est le disque de centre O et de rayon 1.

3. Voir le corrigé de la méthode 1.

4. Voir le corrigé de la méthode 1.

Document sous licence libre Creative Commons

5.2 Corrigé du TP 2

Question préliminaire

Pour tout entier naturel n, on a $z_{n+1} = (x_n + \mathrm{i}y_n)^2 + a + \mathrm{i}b = x_n^2 - y_n^2 + a + \mathrm{i}(2x_ny_n + b)$.
Donc $x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a$ et $y_{n+1} = 2x_ny_n + b$.
Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = |z_{n+1}| = \sqrt{(x_n^2 - y_n^2 + a)^2 + (2x_ny_n + b)^2}$.

Méthode 1

1. a. Voir le tableur.

   b. En B4 et C4, il faut saisir la partie réelle et imaginaire de z_0 soit 0. En B5, il faut saisir =B4ˆ2-C4ˆ2+$B$1 (d'après la question préliminaire). En C5, il faut saisir =2*B4*C4+$B$2 (d'après la question préliminaire). En D5, il faut saisir =RACINE(B5ˆ2+C5ˆ2) pour obtenir la norme de z_n.

   c. En copiant glissant l'ensemble des lignes jusqu'à la ligne 33, on obtient :

	A	B	C	D
3	n	x_n	y_n	u_n
4	0	0	0	0
5	1	-0,200000	0,300000	0,360555
6	2	-0,250000	0,180000	0,308058
7	3	-0,169900	0,210000	0,270122
8	4	-0,215234	0,228642	0,314011
9	5	-0,205951	0,201577	0,288183
10	6	-0,198217	0,216970	0,293881
11	7	-0,207786	0,213986	0,298270
12	8	-0,202615	0,211074	0,292583
13	9	-0,203499	0,214467	0,295648
14	10	-0,204584	0,212712	0,295129
15	11	-0,203392	0,212965	0,294487
16	12	-0,203986	0,213369	0,295189
17	13	-0,203916	0,212951	0,294839
18	14	-0,203766	0,213151	0,294880
19	15	-0,203913	0,213134	0,294969
20	16	-0,203846	0,213079	0,294882
21	17	-0,203849	0,213130	0,294922
22	18	-0,203870	0,213107	0,294920
23	19	-0,203852	0,213108	0,294908
24	20	-0,203859	0,213115	0,294918
25	21	-0,203859	0,213109	0,294914
26	22	-0,203857	0,213111	0,294914
27	23	-0,203859	0,213112	0,294915
28	24	-0,203858	0,213111	0,294914
29	25	-0,203858	0,213111	0,294914
30	26	-0,203858	0,213111	0,294915
31	27	-0,203858	0,213111	0,294914
32	28	-0,203858	0,213111	0,294914
33	29	-0,203858	0,213111	0,294914

2. La suite semble donc converger vers une valeur proche de $0,2949$.

3. Il faut modifier les cellules B1 et B2 et réaliser plusieurs tests. Voici trois valeurs de c pour lesquelles la suite (u_n) semble converger : $-0,9+0,1\mathrm{i}$, $0,3+0,2\mathrm{i}$ et $-0,2+0,3\mathrm{i}$.

   Voici trois valeurs de c pour lesquelles la suite (u_n) ne semble pas converger : $1+\mathrm{i}$, 1 et $-0,9+0,9\mathrm{i}$.

Méthode 2

1. Voici l'algorithme complété.

```
Fonction Mandelbrot (a, b) :
    x ← 0
    y ← 0
    n ← 0
    U ← 0
    Tant que U ⩽ 2 et n ⩽ 30 :
        X ← x
        Y ← y
        U ← √(x² + y²)
        x ← X² − Y² + a
        y ← 2XY + b
        n ← n + 1
    Si n = 31 :
        Afficher « oui »
    Sinon :
        Afficher « non »
```

L'affichage obtenu permet de tester si les termes de la suite (u_n) de 0 à 30 dépassent ou non 2. Lorsque l'affichage est « oui », cela signifie que la suite (u_n) vérifie la condition et que donc le nombre complexe c semble appartenir à l'ensemble $\mathcal{M}$. Lorsque l'affichage est « non », cela signifie que la suite (u_n) ne vérifie pas la condition et que donc le nombre complexe c semble ne pas appartenir à l'ensemble $\mathcal{M}$.

Remarque : Le nombre 30 est arbitraire, il est possible d'augmenter ce nombre pour vérifier la condition pour n de plus en plus grand. Cependant, le programme sera de plus en plus long à exécuter.

2. Voici l'algorithme réalisé avec Python.

Document sous licence libre Creative Commons

```python
from math import sqrt

def mandelbrot(a, b):
    x = 0
    y = 0
    n = 0
    u = 0
    while u <= 2 and n <= 30:
        temp1 = x
        temp2 = y
        x = temp1**2 - temp2**2 + a
        y = 2*temp1*temp2 + b
        u = sqrt(x**2 + y**2)
        n = n + 1
    if n == 31:
        print("oui")
    else:
        print("non")

a = -0.2
b = 0.3
mandelbrot(a, b)
```

En testant cet algorithme, on constate que le nombre $c = -0,2 + 0,3\text{i}$ semble appartenir à $\mathcal{M}$ et que le nombre $c = 0,6 + 0,6\text{i}$ n'appartient pas à $\mathcal{M}$.

Document sous licence libre Creative Commons

6 Travailler les automatismes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 18 :

1. $\overrightarrow{CB}$ a pour affixe $b - c = 2\mathrm{i} - 3 - (1 + \mathrm{i}) = -4 + \mathrm{i}$.
   $-2\overrightarrow{CB}$ a donc pour affixe $-2z_{\overrightarrow{CB}} = 8 - 2\mathrm{i}$.
2. Le milieu I de $[AC]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{a+c}{2} = \dfrac{4 - 5\mathrm{i} + 1 + \mathrm{i}}{2} = \dfrac{5 - 4\mathrm{i}}{2} = \dfrac{5}{2} - 2\mathrm{i}$.

Corrigé exercice 19 :

1. On a $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$.
2. D'après le cours, $|\overline{z}| = |z| = 5$.

Corrigé exercice 20 :

1. On a $\dfrac{13\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + 2 \times 2\pi$ donc l'argument principal de z est $\dfrac{\pi}{3}$.
2. On sait que $z = |z|\,[\cos(\arg(z)) + \mathrm{i}\sin(\arg(z))]$ donc une forme trigonométrique de z est $z = 5\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$. Une forme exponentielle de z est $z = 5\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$.
   Pour finir, on a $z = 5\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right] = 5\left[\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right] = \dfrac{5}{2} + \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
   Ainsi, la forme algébrique de z est $z = \dfrac{5}{2} + \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

Corrigé exercice 21 :

On a $zz' = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times 6\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = 18\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6} - \frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = 18\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.
De plus $z'^3 = \left(6\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right)^3 = 6^3 \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{6\pi}{3}} = 216\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi}$.
Pour finir, $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{6\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6} + \frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

Corrigé exercice 22 :

On a $\left|\dfrac{b-a}{c-a}\right| = \left|-\dfrac{1}{3}\mathrm{i}\right| = \dfrac{1}{3}$. Or $\left|\dfrac{b-a}{c-a}\right| = \dfrac{AB}{AC}$, donc $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{3}$. Cela signifie que $AC = 3AB$. Le triangle ABC n'est donc pas isocèle en A.
De plus, $\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) = \arg\left(-\dfrac{1}{3}\mathrm{i}\right) + k \times 2\pi = -\dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Document sous licence libre Creative Commons

Ainsi, $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Le triangle ABC est donc rectangle en A.

Corrigé exercice 23 :

1. On définit le point I d'affixe $3 - 5\text{i}$.

   Donc $|z - 3 + 5\text{i}| = 4 \Leftrightarrow |z - z_I| = 4 \Leftrightarrow IM = 4$. Cela signifie que M appartient au cercle de centre I d'affixe $3 - 5\text{i}$ et de rayon 4. L'ensemble cherché est donc le cercle de centre I d'affixe $3 - 5\text{i}$ et de rayon 4.

2. On définit les points A et B d'affixes respectives $-1 + 2\text{i}$ et -5.

   Donc $|z + 1 - 2\text{i}| = |z + 5| \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$. Cela signifie que M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$. L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment $[AB]$, où A et B ont pour affixes respectives $-1 + 2\text{i}$ et -5.

Corrigé exercice 24 :

Le polygone est un hexagone régulier de centre O. Les sommets sont donc les racines 6-ièmes de l'unité. D'après le cours, les sommets ont donc pour affixe $\text{e}^{\frac{2\text{i}\pi k}{6}}$, soit $\text{e}^{\frac{\text{i}\pi k}{3}}$ avec k allant de 0 à 5.

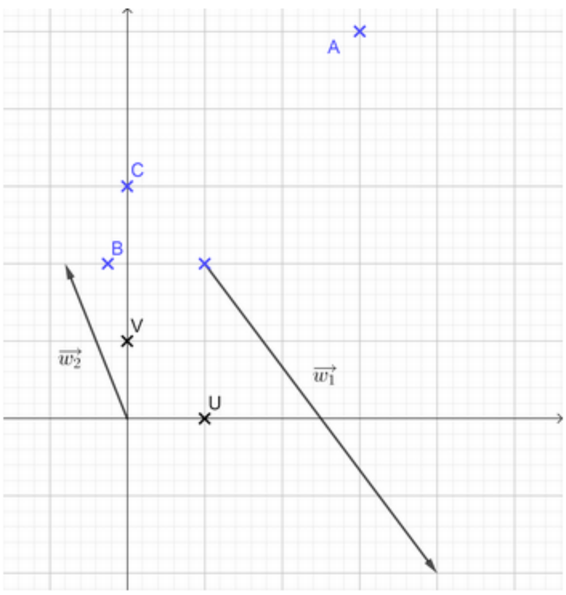
6.2 Exercices

Corrigé exercice 25 :

A a pour affixe $a = -2 + 3\text{i}$ et B a pour affixe $b = \dfrac{1}{2} - 3\text{i}$.

$\overrightarrow{w_1}$ a pour affixe $3 + \text{i}$ et $\overrightarrow{w_2}$ a pour affixe $1 - \dfrac{5}{2}\text{i}$.

Corrigé exercice 26 :



Remarque : On rappelle qu'un vecteur admet une infinité de représentants.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 27 :

1. $\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ a pour affixe $\frac{2}{3}(a-c) = \frac{2}{3}\left(\frac{13}{2}+\mathrm{i}\right) = \frac{13}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{i}$.

   De plus, $\overrightarrow{BD}$ a pour affixe $d - b = d - 1 + \frac{4}{5}\mathrm{i}$.

   Donc : $d - 1 + \frac{4}{5}\mathrm{i} = \frac{13}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{i}$, d'où D a pour affixe $d = \frac{13}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{i} + 1 - \frac{4}{5}\mathrm{i} = \frac{16}{3} - \frac{2}{15}\mathrm{i}$

2. $5\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $5(b-a) = 5\left(\frac{3}{2} - \frac{19}{5}\mathrm{i}\right) = \frac{15}{2} - 19\mathrm{i}$.

   $\overrightarrow{BC}$ a pour affixe $c - b = 2\mathrm{i} - 7 - \left(1 - \frac{4}{5}\mathrm{i}\right) = -8 + \frac{14}{5}\mathrm{i}$.

   D'où : $5\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ a pour affixe $\frac{31}{2} - \frac{109}{5}\mathrm{i}$.

   De plus $\overrightarrow{AE}$ a pour affixe $e - a = e + \frac{1}{2} - 3\mathrm{i}$.

   Donc $e + \frac{1}{2} - 3\mathrm{i} = \frac{31}{2} - \frac{109}{5}\mathrm{i}$, d'où E a pour affixe $e = 15 - \frac{94}{5}\mathrm{i}$

3. F est le milieu de $[AC]$.

   Donc F a pour affixe $f = \frac{a+c}{2} = \frac{-\frac{1}{2} + 3\mathrm{i} + 2\mathrm{i} - 7}{2} = -\frac{15}{4} + \frac{5}{2}\mathrm{i}$.

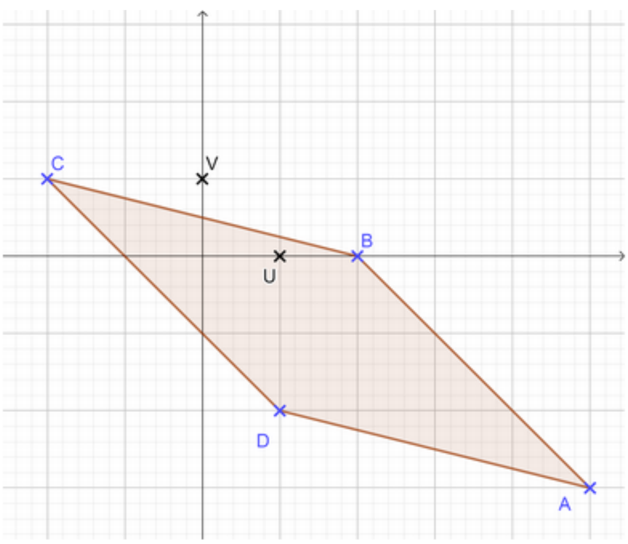
4. G est le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

   Donc G a pour affixe $g = \overline{b} = 1 + \frac{4}{5}\mathrm{i}$.

5. H a pour affixe $4 - \sqrt{2}\mathrm{i}$.

Corrigé exercice 28 :

1. Voici la figure :



On conjecture que $ABCD$ est un parallélogramme.

2. $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b-a=2-(5-3\mathrm{i})=-3+3\mathrm{i}$.
   $\overrightarrow{DC}$ a pour affixe $c-d=\mathrm{i}-2-(1-2\mathrm{i})=-3+3\mathrm{i}$.
   Donc : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. $ABCD$ est bien un parallélogramme.
3. Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu. Ainsi, I est donc le milieu de $[AC]$, d'où I a pour affixe $\dfrac{a+c}{2}=\dfrac{5-3\mathrm{i}+\mathrm{i}-2}{2}=\dfrac{3}{2}-\mathrm{i}$

Corrigé exercice 29 :

1. z est un réel, donc $|z|=3\sqrt{3}$.
2. On a : $|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.
3. On a : $|z|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{2+3}=\sqrt{5}$.

Corrigé exercice 30 :

1. On a : $|2-2\mathrm{i}|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. De plus $|3+5\mathrm{i}|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$.
   Donc : $|z|=|2-2\mathrm{i}|\times|3+5\mathrm{i}|=2\sqrt{2}\times\sqrt{34}=4\sqrt{17}$.
   Autre méthode : $z=6+10\mathrm{i}-6\mathrm{i}+10=16+4\mathrm{i}$.
   Donc : $|z|=\sqrt{16^2+4^2}=\sqrt{272}=4\sqrt{17}$.
2. On a : $|4\mathrm{i}-3|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=5$. Donc : $|z|=5^3=125$.
   Remarque : Il est possible aussi de déterminer une forme algébrique de z, puis d'en calculer son module.
3. On a $|z|=\dfrac{|-2-3\mathrm{i}|}{|1-2\mathrm{i}|}=\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{13}{5}}$.
   Autre méthode :
   $$z=\frac{-2-3\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\frac{(-2-3\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=\frac{4}{5}-\frac{7}{5}\mathrm{i}$$
   Donc : $|z|=\sqrt{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2+\left(-\dfrac{7}{5}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{65}{25}}=\sqrt{\dfrac{13}{5}}$
4. On a : $|2-\mathrm{i}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$. De plus $|6-5\mathrm{i}|=\sqrt{6^2+(-5)^2}=\sqrt{61}$. Donc
   $$|z|=\frac{|2-\mathrm{i}|^3}{|6-5\mathrm{i}|}=\frac{\left(\sqrt{5}\right)^3}{\sqrt{61}}=\sqrt{\frac{125}{61}}$$
   Remarque : Il est possible aussi de déterminer une forme algébrique de z, puis d'en calculer son module, comme on l'a fait dans l'autre méthode des questions 1 et 3.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 31 :

1. a. On a : $\cos(\alpha) = \dfrac{0}{|z|} = \dfrac{0}{6} = 0$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{6}{|z|} = \dfrac{6}{6} = 1$

   b. En utilisant le cercle trigonométrique, on obtient qu'une valeur de α est $\dfrac{\pi}{2}$.

2. a. On a : $\cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{|z|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{|z|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   b. En utilisant le cercle trigonométrique, on obtient qu'une valeur de α est $\dfrac{\pi}{4}$.

3. a. On a : $\cos(\alpha) = \dfrac{-2}{|z|} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{2\sqrt{3}}{|z|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   b. En utilisant le cercle trigonométrique, on obtient qu'une valeur de α est $\dfrac{2\pi}{3}$.

4. a. On a : $\cos(\alpha) = \dfrac{\frac{7\sqrt{3}}{2}}{7} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{y}{|z|} = -\dfrac{\frac{7}{2}}{7} = -\dfrac{1}{2}$

   b. En utilisant le cercle trigonométrique, on obtient qu'une valeur de α est $-\dfrac{\pi}{6}$.

Corrigé exercice 32 :

1. On a : $|z| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{36}{4}} = 3$.

   De plus, $\cos(\alpha) = \dfrac{\frac{3}{2}}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\alpha) = -\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Une valeur de $\arg(z)$ est $-\dfrac{\pi}{3}$.

2. z est un imaginaire pur dont la partie imaginaire 7 est positive.

   Donc une valeur de $\arg(z)$ est $\dfrac{\pi}{2}$.

3. On a : $|z| = \sqrt{\left(-\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{324}{4}} = \sqrt{81} = 9$.

   De plus, $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{-\frac{9\sqrt{3}}{2}}{9} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{\frac{9}{2}}{9} = \dfrac{1}{2}$.

   Une valeur de $\arg(z)$ est $\dfrac{5\pi}{6}$.

4. On a : $|z| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = \sqrt{64} = 8$.

   De plus $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{y}{|z|} = -\dfrac{4}{8} = -\dfrac{1}{2}$

Document sous licence libre Creative Commons
cc BY NC SA

Une valeur de $\arg(z)$ est $-\dfrac{\pi}{6}$.

Corrigé exercice 33 :

1. On a $z = \sqrt{2}\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] = -1 + \mathrm{i}$.
2. On a $z = \sqrt{3}\left[-1 + \mathrm{i} \times 0\right] = -\sqrt{3}$.
3. Puisque $-\dfrac{17\pi}{6} = -2\pi - \dfrac{5\pi}{6}$, on a :

   $z = 6\left[\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right] = 6\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right] = -3\sqrt{3} - 3\mathrm{i}$.
4. On a $z = 0 + \mathrm{i} \times 1 = \mathrm{i}$.

Corrigé exercice 34 :

1. -5 est un nombre réel strictement négatif. Son module est donc 5 et un de ses arguments est π.

   Donc : $-5 = 5\left[\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)\right]$.
2. $\pi\mathrm{i}$ est un imaginaire pur dont la partie imaginaire π est strictement positive. Son module est donc π et un de ses arguments est $\dfrac{\pi}{2}$.

   Donc : $\pi\mathrm{i} = \pi\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$.
3. On a : $|z| = \sqrt{\left(-\dfrac{7}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{49} = 7$.

   On a : $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{|z|} = -\dfrac{\frac{7}{2}}{7} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{y}{|z|} = -\dfrac{\frac{7\sqrt{3}}{2}}{7} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Une valeur de $\arg(z)$ est $-\dfrac{2\pi}{3}$.

   Donc : $-\dfrac{7}{2} - \dfrac{7\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = 7\left[\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$.
4. On a : $|z| = \sqrt{\left(-4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{64} = 8$.

   On a : $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{|z|} = -\dfrac{-4\sqrt{3}}{8} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

   Une valeur de $\arg(z)$ est $\dfrac{5\pi}{6}$.

   Donc :$4\mathrm{i} - 4\sqrt{3} = -4\sqrt{3} + 4\mathrm{i} = 8\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right]$.

Document sous licence libre Creative Commons

5. On a : $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

   On a : $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   Une valeur de $\arg(z)$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

   Donc : $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$.

6. On a : $|z| = \sqrt{(-3)^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

   On a : $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{|z|} = -\dfrac{3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   Une valeur de $\arg(z)$ est $\dfrac{3\pi}{4}$.

   Donc : $-3+3\mathrm{i} = 3\sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]$.

Corrigé exercice 35 :

1. On a : $|z| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{18}{4}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

   On a : $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{2}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   Une valeur de $\arg(z)$ est $\dfrac{\pi}{4}$. Donc : $z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

2. On a : $|z| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$.

   On a : $\cos(\alpha) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   Une valeur de $\arg(z)$ est $-\dfrac{3\pi}{4}$. Donc $z = -\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

3. On a : $|z| = \sqrt{\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{20}{4}} = \sqrt{5}$.

   On a $\cos(\alpha) = -\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin(\alpha) = -\dfrac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{\sqrt{5}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Une valeur de $\arg(z)$ est $-\dfrac{2\pi}{3}$. Donc $z = -\dfrac{\sqrt{5}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{15}}{2} = \sqrt{5}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\dfrac{2\pi}{3}}$.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 36 :

1. $3z = 3 \times 3\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}} = 9\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$
2. On a : $-3 = 3\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$.
   Donc $-3z' = 3\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} \times 12\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = 36\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$.
3. On a : $zz' = 3\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}} \times 12\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = 36\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = 36\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{12}\mathrm{i}}$.
4. On a : $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{3\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}}{12\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}+\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{12}\mathrm{i}}$.
5. On a : $z^3 = 3^3\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}\right)^3 = 27\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$.
6. On a $z'^2 = 12^2\left(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right)^2 = 144\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$ et $z^3 = 27\mathrm{e}^{\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}}$.
   Donc $z^3z'^2 = 27\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} \times 144\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = 3888\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = 3888\mathrm{e}^{0\times\mathrm{i}}$

Corrigé exercice 37 :

1. On a : $AB = |b-a| = |4+3\mathrm{i}-(-1+2\mathrm{i})| = |5+\mathrm{i}| = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26}$.
2. On a :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) &= \arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right) + k\times 2\pi\\ &= \arg\left(\frac{2(-5-\mathrm{i})}{-5-\mathrm{i}}\right) + k\times 2\pi\\ &= \arg(2) + k\times 2\pi\\ &= 0 + k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Corrigé exercice 38 :

ABC est un triangle rectangle isocèle en B, donc $BA = BC$, soit $|a-b| = |c-b|$.
D'où $\dfrac{|c-b|}{|a-b|} = 1$, c'est-à-dire $\left|\dfrac{c-b}{a-b}\right| = 1$.
De plus, $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) = \arg\left(\dfrac{c-b}{a-b}\right) + k\times 2\pi$, d'où $\arg\left(\dfrac{c-b}{a-b}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + k\times 2\pi$.
Ainsi, $\dfrac{c-b}{a-b} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$.

Corrigé exercice 39 :

On a : $AB = |b-a| = |-2+3\mathrm{i}-(1+2\mathrm{i})| = |-3+\mathrm{i}| = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{10}$.
Et : $AC = |-1+6\mathrm{i}-(1+2\mathrm{i})| = |-2+4\mathrm{i}| = \sqrt{(-2)^2+4^2} = 2\sqrt{5}$.
Pour finir : $BC = |c-b| = |-1+6\mathrm{i}-(-2+3\mathrm{i})| = |1+3\mathrm{i}| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$.
D'où $AB = BC$. Le triangle ABC est donc isocèle en B..
De plus, $AC^2 = AB^2 + BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 40 :

On a : $AB = |-1+2\mathrm{i}-(6+3\mathrm{i})| = |-7-\mathrm{i}| = \sqrt{(-7)^2+(-1)^2} = 5\sqrt{2}$.
Et : $AC = |3-\mathrm{i}-(6+3\mathrm{i})| = |-3-4\mathrm{i}| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = 5$.
Pour finir : $BC = |3-\mathrm{i}-(-1+2\mathrm{i})| = |4-3\mathrm{i}| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5$.
D'où $AC = BC$ et le triangle ABC est donc isocèle en C.
De plus, $AB^2 = AC^2 + BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.

Corrigé exercice 41 :

On a : $AB = |b-a| = |3+2\mathrm{i}-(2\mathrm{i}-1)| = |4| = 4$
Et : $AC = |c-a| = |1+3\mathrm{i}-(2\mathrm{i}-1)| = |2+\mathrm{i}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$.
Pour finir : $BC = |c-b| = |1+3\mathrm{i}-(3+2\mathrm{i})| = |-2+\mathrm{i}| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}$.
D'où $AC = BC$. Le triangle ABC est donc isocèle en C.
En utilisant la réciproque du théorème de Pythagore, on montre que le triangle ABC n'est pas rectangle.

Corrigé exercice 42 :

1. On a : $\cos(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) &= \frac{\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right]^2}{2^2}\\
&= \frac{\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right]^2 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right]^2}{4}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{4}\\
&= \frac{1+\dfrac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2}}{2}\\
&= \frac{1+\cos(2x)}{2}
\end{aligned}$$

2. On a : $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. Donc :

$$\begin{aligned}\sin^3(x) &= \frac{\left[e^{ix} - e^{-ix}\right]^3}{(2i)^3} \\ &= \frac{e^{3ix} - e^{ix} - 2e^0e^{ix} + 2e^0e^{-ix} + e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} \\ &= \frac{e^{3ix} - e^{-3ix} + 3e^{-ix} - 3e^{ix}}{-8i} \\ &= \frac{\dfrac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3 \times \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}{-4} \\ &= \frac{\sin(3x) - 3\sin(x)}{-4} \\ &= \frac{-\sin(3x) + 3\sin(x)}{4}\end{aligned}$$

3. On a : $\cos^2(x)\sin(x) = \left[1 - \sin^2(x)\right]\sin(x) = \sin(x) - \sin^3(x)$.
   D'après la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos^2(x)\sin(x) &= \sin(x) - \frac{-\sin(3x) + 3\sin x}{4} \\ &= \frac{4\sin(x) + \sin(3x) - 3\sin x}{4} \\ &= \frac{\sin(x) + \sin(3x)}{4}\end{aligned}$$

Corrigé exercice 43 :

La formule de Moivre permet d'écrire : $[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$. Or :

$$\begin{aligned}[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^3 &= [\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^2 \times [\cos(\theta) + i\sin(\theta)] \\ &= \cos^3(\theta) + 3i\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - \sin^3(x)i \\ &= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + i\left[3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)\right]\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) \\ &= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\left[1 - \cos^2(\theta)\right] \\ &= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\end{aligned}$$

Corrigé exercice 44 :

z appartient à $\mathbb{U}$, soit $[z| = 1$.
De plus, d'après l'énoncé, on a : $\arg(z) = \dfrac{7\pi}{4} + k \times 2\pi = -\dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Une forme exponentielle de z est : $z = 1 \times e^{\frac{7\pi}{4}i} = 1 \times e^{-\frac{\pi}{4}i}$.
Une forme trigonométrique de z est : $z = 1 \times \left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$.

Document sous licence libre Creative Commons

De plus, on a : $z = 1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

La forme algébrique de z est donc : $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

Corrigé exercice 45 :

$z^7 = 1$ admet exactement pour solutions les racines 7-ièmes de l'unité.

Les solutions sont donc les nombres complexes $z_k = \exp\left(\frac{2k\pi}{7}\mathrm{i}\right)$ avec k allant de 0 à 6.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 46 :

On a $z_I = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{\dfrac{2}{3} - 5\text{i} + 3\text{i} - 3}{2} = \dfrac{-\dfrac{7}{3} - 2\text{i}}{2} = -\dfrac{7}{6} - \text{i}$.

Corrigé exercice 47 :

1ere méthode : On a $z = 5 + 3\text{i} - 10\text{i} + 6 = 11 - 7\text{i}$. Donc $|z| = \sqrt{11^2 + (-7)^2} = \sqrt{170}$.
2eme méthode : On a $|1 - 2\text{i}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ et $|5 + 3\text{i}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$.
Par propriété du module, on obtient $|z| = |1 - 2\text{i}| \times |5 + 3\text{i}| = \sqrt{5} \times \sqrt{34} = \sqrt{170}$.

Corrigé exercice 48 :

1. z_1 est un réel strictement positif. Son argument principal vaut donc 0.
2. z_2 est un réel strictement négatif. Son argument principal vaut donc π.
3. z_3 est un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement positive. Son argument principal vaut donc $\dfrac{\pi}{2}$.
4. z_4 est un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement négative. Son argument principal vaut donc $-\dfrac{\pi}{2}$.

Corrigé exercice 49 :

1. a. M a pour coordonnées $(x; y)$ et M_1 a pour coordonnées $(x; -y)$. De plus, tout point A de l'axe des réels a pour coordonnées $(x'; 0)$ avec x' réel. Donc, puisque nous travaillons dans un repère orthonormé, $AM = \sqrt{(x - x')^2 + y^2}$ et $AM_1 = \sqrt{(x - x')^2 + (-y)^2} = \sqrt{(x - x')^2 + y^2}$.
   Ainsi, $AM = AM_1$, donc A appartient à la médiatrice du segment $[MM_1]$.
   b. L'axe des abscisses est la médiatrice du segment $[MM_1]$, donc M_1 est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
2. a. M_2 a pour coordonnées $(-x; -y)$. On a donc $\dfrac{x_{M_2} + x_M}{2} = \dfrac{-x + x}{2} = 0 = x_O$ et $\dfrac{y_{M_2} + y_M}{2} = \dfrac{-y + y}{2} = 0 = y_O$. O est donc bien le milieu de $[MM_2]$.
   b. On en déduit que M_2 est le symétrique de M par rapport à l'origine O.
3. a. M a pour coordonnées $(x; y)$ et M_3 a pour coordonnées $(-x; y)$. De plus, tout point B de l'axe des imaginaires a pour coordonnées $(0; y')$ avec y' réel.
   On a donc $BM = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - y')^2} = \sqrt{x^2 + (y - y')^2}$ et
   $BM_3 = \sqrt{(-x - 0)^2 + (y - y')^2} = \sqrt{x^2 + (y - y')^2}$.
   D'où $BM = BM_3$. B appartient donc donc à la médiatrice du segment $[MM_3]$.
   Ainsi, l'axe des ordonnées est la médiatrice du segment $[MM_3]$.
   b. On en déduit que M_3 est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.

Document sous licence libre Creative Commons

4. Pour construire le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses, il suffit de placer le point A_1 d'affixe $\overline{3+2\mathrm{i}} = 3 - 2\mathrm{i}$. Pour construire le symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées, il suffit de placer le point A_2 d'affixe $-\overline{3+2\mathrm{i}} = -3 + 2\mathrm{i}$.

Corrigé exercice 50 :

1. A_1 a pour affixe $-\overline{z_A} = -(3+7\mathrm{i}) = -3 - 7\mathrm{i}$.
2. A_2 a pour affixe $-z_A = -3 + 7\mathrm{i}$.
3. A_3 a pour affixe $\overline{z_A} = 3 + 7\mathrm{i}$.

Corrigé exercice 51 :

A a pour affixe –2.
B a pour affixe 3i.
C a pour affixe $3 - \mathrm{i}$.
D a pour affixe $1 + 2\mathrm{i}$.
E a pour affixe $-1 + \mathrm{i}$.

Corrigé exercice 52 :

En utilisant les affixes obtenues à l'exercice 51 et la formule $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, on obtient :
$|z_O| = 0$
$|z_A| = 2$
$|z_B| = 3$
$|z_C| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$
$|z_D| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
$|z_E| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Corrigé exercice 53 :

1. $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A = 3\mathrm{i} - (-2) = 2 + 3\mathrm{i}$.
   $\overrightarrow{AC}$ a pour affixe $z_C - z_A = 3 - \mathrm{i} - (-2) = 5 - \mathrm{i}$.
2. $3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ a donc pour affixe $3 \times z_{\overrightarrow{AB}} - z_{\overrightarrow{AC}} = 3(2+3\mathrm{i}) - (5-\mathrm{i}) = 1 + 10\mathrm{i}$.
3. Si B est le milieu de $[FC]$ alors on a $z_B = \dfrac{z_F + z_C}{2}$.
   D'où $z_F = 2z_B - z_C = 2(3\mathrm{i}) - (3-\mathrm{i}) = -3 + 7\mathrm{i}$. F a donc pour affixe $-3 + 7\mathrm{i}$.

Corrigé exercice 54 :

1. $AGED$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{DE}$ c'est-à-dire si, et seulement si, $z_G - z_A = z_E - z_D$. On a donc $z_G + 2 = -1 + \mathrm{i} - (1+2\mathrm{i}) \Leftrightarrow z_G + 2 = -2 - \mathrm{i}$. D'où, G a pour affixe $-4 - \mathrm{i}$.
2. Le centre I du parallélogramme $AGED$ est le milieu de ses diagonales. Ainsi I est le milieu de $[AE]$. D'où $z_I = \dfrac{z_A + z_E}{2} = \dfrac{-2-1+\mathrm{i}}{2} = \dfrac{-3+\mathrm{i}}{2} = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 55 :

1ere méthode : $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Or, $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1 + 3\mathrm{i} - (5 + 2\mathrm{i}) = -6 + \mathrm{i}$ et $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = -2 - \mathrm{i} - (4 - 2\mathrm{i}) = -6 + \mathrm{i}$. On a donc bien $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et donc $ABCD$ est bien un parallélogramme.
2eme méthode : On note I le milieu du segment $[AC]$ et J celui du segment $[BD]$.
Ainsi on a $z_I = \dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{5 + 2\mathrm{i} - 2 - \mathrm{i}}{2} = \dfrac{3 + \mathrm{i}}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et $z_J = \dfrac{z_B + z_D}{2} = \dfrac{-1 + 3\mathrm{i} + 4 - 2\mathrm{i}}{2} = \dfrac{3 + \mathrm{i}}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i} = z_I$.
Les segments $[AC]$ et $[BD]$, diagonales du quadrilatère $ABCD$, ont donc le même milieu I d'affixe $\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. En conclusion, $ABCD$ est bien un parallélogramme.

Corrigé exercice 56 :

1. $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2 + \mathrm{i} - (3\mathrm{i} - 1) = 3 - 2\mathrm{i}$ et $\overrightarrow{AC}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = 8 - 3\mathrm{i} - (3\mathrm{i} - 1) = 9 - 6\mathrm{i}$ On remarque alors que $z_{\overrightarrow{AC}} = 3z_{\overrightarrow{AB}}$ et on peut donc en déduire que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, et donc que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Ainsi, les points A, B et C sont alignés.

2. E appartient à l'axe des imaginaires purs. Il existe donc $y \in \mathbb{R}$ tel que son affixe est donc de la forme $\mathrm{i}y$.(ED) et (BC) sont parallèles si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{ED} = k\overrightarrow{BC}$. On cherche donc z_E tel que $z_D - z_E = k(z_C - z_B) \Leftrightarrow 3 - (1 + y)\mathrm{i} = 6k - 4k\mathrm{i}$.

   En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

   $$\begin{cases} 3 = 6k \\ 1 + y = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

   Le point E vérifiant les conditions a donc pour affixe i.

Corrigé exercice 57 :

1. L'égalité vectorielle donnée correspond à l'égalité d'affixes suivante :$1(a - z_H) - 1(b - z_H) + 3(c - z_H) = 0$, où a, b et c sont respectivement les affixes des points A, B et C. Et on obtient ainsi $a - z_H - b + z_H + 3c - 3z_H = 0$, d'où $z_H = \dfrac{a - b + 3c}{3}$.

2. G est le centre de gravité du triangle ABC. D'après l'énoncé, G vérifie donc l'égalité vectorielle suivante : $1\overrightarrow{GA} + 1\overrightarrow{GB} + 1\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, qui correspond à l'égalité entre affixes : $1(a - z_G) + 1(b - z_G) + 1(c - z_G) = 0$, où a, b et c sont respectivement les affixes des points A, B et C. Et ainsi, on obtient $z_G = \dfrac{a + b + c}{3}$.

Corrigé exercice 58 :

On a bien $\left|\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{7}\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{7}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{9}{25} + \dfrac{1}{49}} = \sqrt{\dfrac{466}{1225}} = \dfrac{\sqrt{466}}{35}$.

Corrigé exercice 59 :

En utilisant les propriétés des modules, on obtient :

1. $|z_{A_1}| = |-\overline{a}| = |a| = OA = 4$
2. $|z_{A_2}| = |-a| = |a| = OA = 4$
3. $|z_{A_3}| = |\overline{a}| = |a| = OA = 4$

Corrigé exercice 60 :

En utilisant la formule, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et les propriétés des modules, on obtient les résultats suivants.

1. $|z| = \sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{61}}{15}$

   On obtient bien le même résultat à la calculatrice :

   $$\left|-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\mathrm{i}\right|$$
   $$\frac{\sqrt{61}}{15} \approx 0.5206833$$

2. $|z'| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$

   On obtient bien le même résultat à la calculatrice :

   $$|3-5\mathrm{i}|$$
   $$\sqrt{34} \approx 5.830952$$

3. $|-\mathrm{i}z| = |-\mathrm{i}| \times |z| = 1 \times \frac{\sqrt{61}}{15} = \frac{\sqrt{61}}{15}$

   On obtient bien le même résultat à la calculatrice :

   $$\left|-\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\mathrm{i}\right)\right|$$
   $$\frac{\sqrt{61}}{15} \approx 0.5206833$$

4. $|\overline{z}| = |z| = \frac{\sqrt{61}}{15}$

   On obtient bien le même résultat à la calculatrice :

   $$\left|\overline{-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\mathrm{i}}\right|$$
   $$\frac{\sqrt{61}}{15} \approx 0.5206833$$

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

5. $|-z'\overline{z}| = |-z'| \times |\overline{z}| = |z'| \times |\overline{z}| = \sqrt{34} \times \dfrac{\sqrt{61}}{15} = \dfrac{\sqrt{2074}}{15}$

   On obtient bien le même résultat à la calculatrice :

   $$\left|-(3-5\mathbf{i})\overline{\left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\mathbf{i}\right)}\right|$$

   $$\frac{\sqrt{2074}}{15} \approx 3.036079$$

6. $|z+2z'| = \left|\dfrac{28}{5} - \dfrac{29}{3}\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{28}{5}\right)^2 + \left(-\dfrac{29}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{28081}}{15}$

   On obtient bien le même résultat à la calculatrice :

   $$\left|\left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\mathbf{i}\right)+2(3-5\mathbf{i})\right|$$

   $$\frac{\sqrt{28081}}{15} \approx 11.17159$$

Corrigé exercice 61 :

En utilisant la formule $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, on obtient :

1. $|z_1| = \sqrt{9^2+5^2} = \sqrt{81+25} = \sqrt{106}$.
2. $|z_2| = \sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{\dfrac{4}{9}+2} = \sqrt{\dfrac{22}{9}} = \dfrac{\sqrt{22}}{3}$.
3. $|z_3| = \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+3^2} = \sqrt{4+4\sqrt{3}+3+9} = \sqrt{4\sqrt{3}+16}$.
4. $|z_4| = \sqrt{\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{\dfrac{5}{9}+25} = \sqrt{\dfrac{230}{9}} = \dfrac{\sqrt{230}}{3}$.

Corrigé exercice 62 :

1. Cet algorithme calcule le module du nombre complexe $z = x+\mathrm{i}y$, avec x et y donnés.
2. L'algorithme renvoie la valeur 5.

```python
from math import*
def complexe (x,y):
    a = sqrt((x**2+y**2))
    return a
print(complexe (-4,3))
```

```
5.0
```

Corrigé exercice 63 :

1. On a $|\overline{z}| = |x - \mathrm{i}y| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ et $|-z| = |-x - \mathrm{i}y| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

2. a. On a, d'une part, $|z \times z'| = |(x + \mathrm{i}y)(x' + \mathrm{i}y')| = |(xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + x'y)|$
$= \sqrt{(xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2}$
$= \sqrt{(xx')^2 + (yy')^2 - 2xx'yy' + (xy')^2 + (x'y)^2 + 2xx'yy'}$
$= \sqrt{(xx')^2 + (yy')^2 + (xy')^2 + (x'y)^2}$.
Et, d'autre part,$|z| \times |z'| = \sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)} = \sqrt{(xx')^2 + (yy')^2 + (xy')^2 + (x'y)^2}$.
D'où $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.

   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons P_n la proposition : « $|z^n| = |z|^n$ ».
Initialisation : $|z^1| = |z| = |z|^1$. Donc P_1 est vraie.
Hérédité : Soit k un entier naturel non nul quelconque tel que P_k est vraie.
$\left|z^{k+1}\right| = \left|z^k \times z\right| = \left|z^k\right| \times |z|$, d'après la question précédente. D'où, en utilisant l'hypothèse de récurrence, $\left|z^{k+1}\right| = |z|^k \times |z| = |z|^{k+1}$. Donc P_{k+1} est vraie.
Conclusion : On a montré que P_1 est vraie et que si il existe un entier naturel non nul k tel que P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie également.
Par récurrence, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|z^n| = |z|^n$.

3. a. On a $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{x + iy}{x' + iy'} = \dfrac{(x + \mathrm{i}y)(x' - \mathrm{i}y')}{x'^2 + y'^2} = \dfrac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \mathrm{i}\dfrac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}$.

   b. D'après la question précédente, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{\sqrt{(xx' + yy')^2 + (x'y - xy')^2}}{x'^2 + y'^2}$
$= \dfrac{\sqrt{(xx')^2 + (yy')^2 + (xy')^2 + (x'y)^2}}{x'^2 + y'^2}$.
D'autre part, $\dfrac{|z|}{|z'|} = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}{x'^2 + y'^2}$
$= \dfrac{\sqrt{(xx')^2 + (yy')^2 + (xy')^2 + (x'y)^2}}{x'^2 + y'^2}$.
D'où $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

   c. La propriété $|z^n| = |z|^n$ a été démontrée dans le cas n entier naturel non nul à la question 2.b.
On considère désormais un entier n strictement négatif. On a alors $|z^n| = \left|\dfrac{1}{z^{-n}}\right| = \dfrac{|1|}{|z^{-n}|}$, d'après la question précédente, d'où $|z^n| = \dfrac{1}{|z|^{-n}}$, d'après la question 2.b., puisque $-n \in \mathbb{N}^*$, et on déduit donc que $|z^n| = |z|^n$.
La propriété est donc vérifiée pour tout entier relatif n non nul.

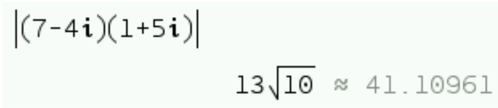
Corrigé exercice 64 :

1. On a $|7 - 4\mathrm{i}| = \sqrt{7^2 + (-4)^2} = \sqrt{65}$ et $|1 + 5\mathrm{i}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$.

Document sous licence libre Creative Commons

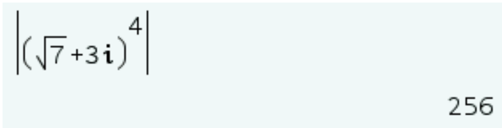
Donc $|(7-4\mathrm{i})(1+5\mathrm{i})| = |7-4\mathrm{i}| \times |1+5\mathrm{i}| = \sqrt{65} \times \sqrt{26} = 13\sqrt{10}$.

On obtient bien le même résultat à la calculatrice :



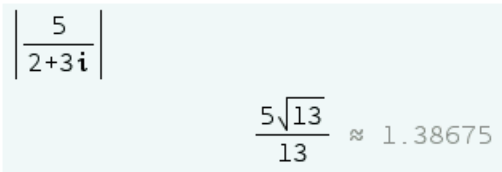
2. On a $\left|\sqrt{7}+3\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2+3^2} = \sqrt{16} = 4$ donc $\left|\sqrt{7}+3\mathrm{i}\right|^4 = 4^4 = 256$.

   On obtient bien le même résultat à la calculatrice :



3. On a $|5| = 5$ et $|2+3\mathrm{i}| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$. Donc $\left|\dfrac{5}{2+3\mathrm{i}}\right| = \dfrac{5}{\sqrt{13}} = \dfrac{5\sqrt{13}}{13}$.

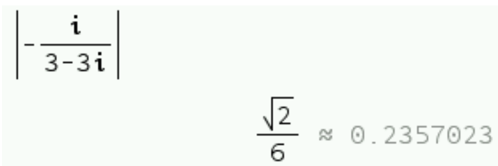
   On obtient bien le même résultat à la calculatrice :



4. On a $|-\mathrm{i}| = 1$ et $|3-3\mathrm{i}| = \sqrt{3^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

   Donc $\left|\dfrac{-\mathrm{i}}{3-3\mathrm{i}}\right| = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

   On obtient bien le même résultat à la calculatrice :

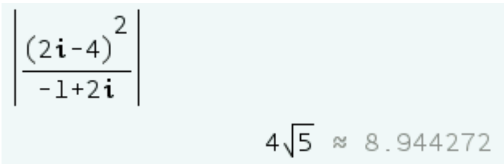


5. On a $|5+3\mathrm{i}| = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}$ et $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

   Donc $\left|\dfrac{5+3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right| = \dfrac{\sqrt{34}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{34}{2}} = \sqrt{17}$.

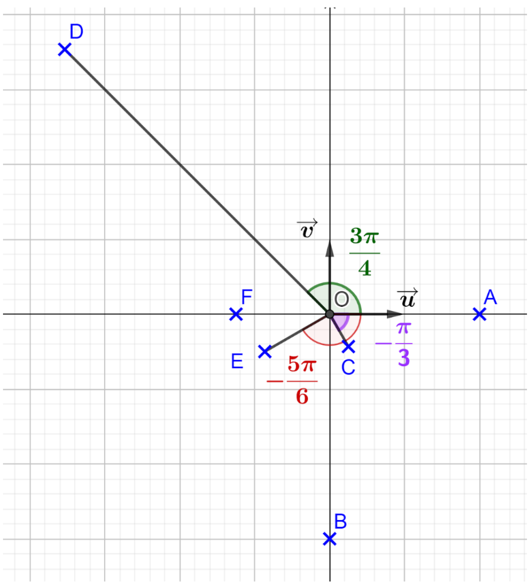
   On obtient bien le même résultat à la calculatrice :

6. On a $|2\text{i}-4| = \sqrt{(-4)^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ et $|-1+2\text{i}| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$.
   Donc $\left|\dfrac{(2\text{i}-4)^2}{-1+\text{i}}\right| = \dfrac{(2\sqrt{5})^2}{\sqrt{5}} = \dfrac{20}{\sqrt{5}} = \dfrac{20\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}$.
   On obtient bien le même résultat à la calculatrice :



Corrigé exercice 65 :

On obtient la figure ci-dessous.



Corrigé exercice 66 :

1. L'argument principal de z est π.
2. L'argument principal de z est 0.
3. L'argument principal de z est $-\dfrac{\pi}{2}$, puisque $\dfrac{3\pi}{2} - 2\pi = -\dfrac{\pi}{2}$.
4. L'argument principal de z est $\dfrac{\pi}{3}$, puisque $-\dfrac{17\pi}{3} + 3\times 2\pi = \dfrac{\pi}{3}$.
5. L'argument principal de z est $-\dfrac{\pi}{6}$, puisque $\dfrac{23\pi}{6} - 2\times 2\pi = -\dfrac{\pi}{6}$.
6. L'argument principal de z est $\dfrac{\pi}{4}$, puisque $-\dfrac{7\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{\pi}{4}$.
7. L'argument principal de z est 0, puisque $\dfrac{12\pi}{3} = 4\pi = 2\times 2\pi$.
8. L'argument principal de z est $-\dfrac{\pi}{2}$, puisque $-\dfrac{9\pi}{2} + 2\times 2\pi = -\dfrac{\pi}{2}$.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 67 :

En utilisant les propriétés des modules et arguments, on obtient :

1. $|z_{A_1}| = |-\overline{a}| = |a| = 4$ et $\arg(z_{A_1}) = \arg(-\overline{a}) + k \times 2\pi = \pi - \arg(a) + k \times 2\pi = -\dfrac{5\pi}{6} + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. $|z_{A_2}| = |-a| = |a| = 4$ et $\arg(z_{A_2}) = \arg(-a) + k \times 2\pi = \pi + \arg(a) + k \times 2\pi = \dfrac{5\pi}{6} + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. $|z_{A_3}| = |\overline{a}| = |a| = 4$ et $\arg(z_{A_3}) = \arg(\overline{a}) + k \times 2\pi = -\arg(a) + k \times 2\pi = \dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Corrigé exercice 68 :

O a pour affixe 0. Ce nombre complexe n'a pas d'argument.
A a pour affixe $-2\mathrm{i}$, imaginaire pur de partie imaginaire strictement négative. L'argument principal de z_A est donc $-\dfrac{\pi}{2}$.
B a pour affixe $2+2\mathrm{i}$. B est un sommet d'un carré de côté 2. D'où $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. L'argument principal de z_B est donc $\dfrac{\pi}{4}$.
C a pour affixe -1, qui est un réel strictement négatif. Donc, l'argument principal de z_C est π.
D est le sommet du triangle ODF équilatéral de côté 2. D'où $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{O}\right) = \dfrac{\pi}{3} + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. L'argument principal de z_D est donc $\dfrac{\pi}{3}$.
E a pour affixe $-1+\mathrm{i}$. E est un sommet d'un carré de côté 1. D'où $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OE}\right) = \dfrac{3\pi}{4} + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. L'argument principal de z_E est donc $\dfrac{3\pi}{4}$.
F a pour affixe 2, qui est un réel strictement positif. Donc, l'argument principal de z_F est 0.
D'après les notations de la figure, $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OH}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OD}\right) + k \times 2\pi = \dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. L'argument principal de z_H est donc $\dfrac{\pi}{6}$.
G est le symétrique de H par rapport à l'origine. Donc, $\arg(z_G) = \pi + \arg(z_H) + k \times 2\pi = \pi + \dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi$. L'argument principal de z_G est donc $-\dfrac{5\pi}{6}$.

Corrigé exercice 69 :

1. D'après l'énoncé, $\arg(a) = \dfrac{23\pi}{3} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Or $\dfrac{23\pi}{3} - 4 \times 2\pi = -\dfrac{\pi}{3}$. L'argument principal de a est donc $-\dfrac{\pi}{3}$.

   D'après l'énoncé, $\arg(b) = -\dfrac{7\pi}{2} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Or $-\dfrac{7\pi}{2} + 2 \times 2\pi = \dfrac{\pi}{2}$. L'argument principal de b est donc $\dfrac{\pi}{2}$.

Document sous licence libre Creative Commons

2. On a $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OC}\right) = \arg(c) + k \times 2\pi = \dfrac{5\pi}{6} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OD}\right) = \arg(d) + k \times 2\pi = -\dfrac{3\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Document sous licence libre Creative Commons

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 70 :

1. $z_1 = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$
2. $z_2 = 2\left[\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)\right]$
3. $z_3 = 5\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$
4. $z_4 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

Corrigé exercice 71 :

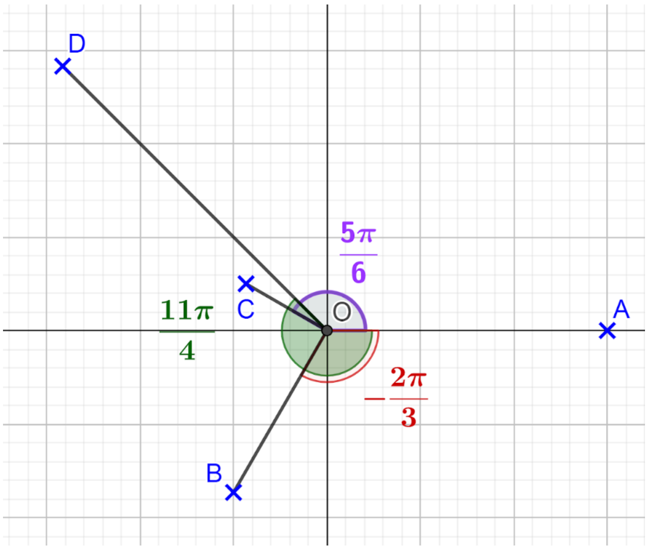
1. $z_1 = 3\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$
2. $z_2 = 2\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$
3. $z_3 = 5\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$
4. $z_4 = 1\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$

Corrigé exercice 72 :

1ere méthode : On a $\arg(5\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
De plus, $|1-\mathrm{i}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, d'où $\cos(\alpha) = \frac{x_2}{|z_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{y_2}{|z_2|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi, on a $\arg(1-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
D'où $\arg(z) = \arg(5\mathrm{i}) + \arg(1-\mathrm{i}) + k \times 2\pi = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
2eme méthode : On a $z = 5\mathrm{i} + 5$. Or $|5\mathrm{i}+5| = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}$, d'où $\cos(\alpha) = \frac{x}{|z|} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{y_2}{|z_2|} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Ainsi, on obtient $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Corrigé exercice 73 :

On trace d'abord la demi-droite correspondant à l'argument du nombre complexe. Puis on reporte sur cette demi-droite son module. On obtient la figure ci-dessus.



Corrigé exercice 74 :

1. $|z_1| = \sqrt{2}$. De plus $\arg(z_1) = -\frac{4\pi}{3} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

   L'argument principal de z_1 est donc $\frac{2\pi}{3}$.

2. $|z_2| = 2$. De plus $\arg(z_2) = -\frac{5\pi}{3} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

   L'argument principal de z_2 est donc $\frac{\pi}{3}$.

3. $|z_3| = 5$. De plus $\arg(z_3) = -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

   L'argument principal de z_3 est donc $-\frac{\pi}{3}$.

4. $$\begin{aligned} z_4 &= -\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= \left[-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= \left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]. \end{aligned}$$

   Donc : $|z_4| = 1$ et $\arg(z_4) = -\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$. L'argument principal de z_4 est donc $-\frac{2\pi}{3}$.

Corrigé exercice 75 :

1. $z_1 = 3\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 3\left[-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

2. $z_2 = 5\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = 5\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right] = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{i}.$

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

3. $z_3 = 5\left[\cos\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)\right] = 5\left[-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right] = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

4. $z_4 = 3\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right] = 3\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Corrigé exercice 76 :

1. $\left|\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3.$

   D'où $\cos(\alpha_1) = \dfrac{x_1}{|z_1|} = \dfrac{\frac{3}{2}}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\alpha_1) = \dfrac{y_1}{|z_1|} = \dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Ainsi, $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{3} + k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$ et donc $z_1 = 3\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$.

2. $|\pi\mathrm{i}| = \pi$. De plus, z_2 est un imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive, donc $\arg = \dfrac{\pi}{2} + k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$. D'où $z_2 = \pi\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$.

3. $|6 + 6\sqrt{3}\mathrm{i}| = \sqrt{6^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2} = 12.$

   D'où $\cos(\alpha_3) = \dfrac{x_3}{|z_3|} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\alpha_3) = \dfrac{y_3}{|z_3|} = \dfrac{6\sqrt{3}}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Ainsi $\alpha_3 = \dfrac{\pi}{3} + k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$. D'où $z_3 = 12\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$.

4. $|-2 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2}$. D'où $\cos(\alpha_3) = \dfrac{x_4}{|z_4|} = -\dfrac{2}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha_3) = \dfrac{y_4}{|z_4|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi $\alpha_4 = \dfrac{3\pi}{4} + k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$. Donc $z_4 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]$.

Corrigé exercice 77 :

L'affixe de O n'admet pas de forme trigonométrique.
L'affixe de A a pour forme trigonométrique $z_A = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$.
B appartient au cercle de centre O passant par le point d'affixe $2 + \mathrm{i}$. Le cercle a donc pour rayon $|2 + \mathrm{i}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. D'où $|z_B| = \sqrt{5}$. De plus, $\widehat{DOB} = 60°$. Comme $\mathrm{Im(z_B)} > 0$, $\arg(z_B) = \dfrac{\pi}{3} + k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$. L'affixe de B a donc pour forme trigonométrique $z_B = \sqrt{5}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$.
L'affixe de C a pour forme trigonométrique $z_C = 3\left[\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)\right]$.
L'affixe de D a pour forme trigonométrique $z_D = 2\left[\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0\right]$.
E a pour affixe $2 + 2\mathrm{i}$. D'où $|2 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. De plus, $\widehat{DOE} = 45°$. Comme $\mathrm{Im(z_E)} > 0$, l'affixe de E a pour forme trigonométrique $z_E = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$.

Comme OFD est un triangle équilatéral, on a $OF = OD = 2$ et $\widehat{DOF} = 60°$. Comme $\mathrm{Im}(z_F) < 0$, l'affixe de F a pour forme trigonométrique $z_F = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$.
I appartient au cercle de centre O et passant par B. Ainsi $|z_I| = |z_B| = \sqrt{5}$. De plus, d'après la figure, $\widehat{DOI} = \frac{1}{2} \times 60° = 30°$. Comme $\mathrm{Im}(z_I) < 0$, l'affixe de I a pour forme trigonométrique $z_I = \sqrt{5}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$.
De même, l'affixe de H a pour forme trigonométrique $z_H = \sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$.

Corrigé exercice 78 :

1. a. $\overline{z} = r\left[\cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta)\right] = r\left[\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)\right]$ et
$-z = r\left[-\cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta)\right] = r\left[\cos(\pi+\theta) + \mathrm{i}\sin(\pi+\theta)\right]$.
   b. D'après la question précédente, on a $\arg(\overline{z}) = -\theta + k \times 2\pi = -\arg(z) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $\arg(-z) = \pi + \theta + k \times 2\pi = \pi + \arg(z) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. a. $zz' = r\left[\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\right] r'\left[\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta')\right]$
$= rr'\left[(\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')) + \mathrm{i}\left(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')\right)\right]$
$= rr'\left[\cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta')\right]$
   b. D'après la question précédente, on a $\arg(z \times z') = \theta + \theta' + k \times 2\pi = \arg(z) + \arg(z') + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
   c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n : « $\arg(z^n) = n\arg(z) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$. »
Initialisation : $\arg(z^0) = \arg(1) + k \times 2\pi = k \times 2\pi = 0 \times \arg(z) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
On a donc bien $\arg(z^0) = 0 \times \arg(z) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ et donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie.
$\arg(z^{k+1}) = \arg(z^k \times z) = \arg(z^k) + \arg(z) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$, d'après la question 2.b., d'où $\arg(z^{k+1}) = k\arg(z) + \arg(z) + k \times 2\pi$, par hypothèse de récurrence, et donc $\arg(z^{k+1}) = (k+1)\arg(z) + k \times 2\pi$. Donc P_{k+1} est vraie aussi.
Conclusion : On a montré que la propriété était vraie au rang 1 et que si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k est vraie, alors P_{k+1} l'est également. Ainsi, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\arg(z^n) = n\arg(z) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. Puisque $r' > 0$, on a $z' \neq 0$.

4. a. $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'\left[\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta')\right]}$
$= \frac{\cos(\theta') - \mathrm{i}\sin(\theta')}{r'\left[\cos(\theta') - \mathrm{i}\sin(\theta')\right]\left[\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta')\right]}$
$= \frac{\cos(\theta') - \mathrm{i}\sin(\theta')}{r'\left[\cos^2(\theta') + \sin^2(\theta')\right]}$
$= \frac{1}{r'}\left[\cos(\theta') - \mathrm{i}\sin(\theta')\right]$
$= \frac{1}{r'}\left[\cos(-\theta') + \mathrm{i}\sin(-\theta')\right]$
   b. D'après la question précédente :
$\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\theta' + k \times 2\pi = -\arg(z') + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Document sous licence libre Creative Commons

c. On a $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) + k \times 2\pi = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) + k \times 2\pi$, d'après la question 2.b., donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$, d'après la question 3.b.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\arg(z^n) = n \arg(z) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$, d'après la question 2.c.. Soit maintenant un entier $n < 0$, alors $\arg(z^n) = \arg\left(\frac{1}{z^{-n}}\right) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z} = -\arg(z^{-n}) + k \times 2\pi$, d'après la question 3.b., d'où $\arg(z^n) = -(-n)\arg(z) + k \times 2\pi$ d'après la question 2.c puisque $-n > 0$. Et donc, au final, $\arg(z^n) = n \arg(z) + k \times 2\pi$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\arg(z^n) = n \arg(z) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Corrigé exercice 79 :

D'après les propriétés des arguments des nombres complexes, on obtient :

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + k \times 2\pi = -\frac{8\pi}{35}, k \in \mathbb{Z}$.

   L'argument principal de zz' est donc $-\frac{8\pi}{35}$.

2. $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) + k \times 2\pi = -\frac{22\pi}{35}, k \in \mathbb{Z}$.

   L'argument principal de $\frac{z'}{z}$ est donc $-\frac{22\pi}{35}$.

3. $\arg(z^4) = 4\arg(z) + k \times 2\pi = \frac{4\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$. L'argument principal de z^4 est donc $\frac{4\pi}{5}$.

4. $\arg\left(\frac{z^3}{z'}\right) = 3\arg(z) - \arg(z') + k \times 2\pi = \frac{36\pi}{35} + k \times 2\pi = -\frac{34\pi}{35}, k \in \mathbb{Z}$.

   L'argument principal de $\frac{z^3}{z'}$ est donc $-\frac{34\pi}{35}$.

Corrigé exercice 80 :

1. L'unique réel appartenant à $[0;\pi]$ vérifiant $\cos(x) = 1$ est 0, donc $\arccos(1) = 0$.

   L'unique réel appartenant à $[0;\pi]$ vérifiant $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est $\frac{\pi}{4}$, donc :

   $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

2. L'algorithme complété est le suivant.

   $r \leftarrow \sqrt{x^2+y^2}$
   $c \leftarrow \frac{x}{r}$
   Si $y \geqslant 0$:
   $\quad a \leftarrow \arccos(c)$

BY NC SA

Sinon :

$a \leftarrow -\arccos(c)$

Retourner a

Corrigé exercice 81 :

1. Le module d'un nombre complexe est un nombre strictement positif, il ne peut donc pas être égal à -1.
   Et $z_1 = 1\left[-\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$. Une forme trigonométrique de z_1 est donc $z_1 = 1\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$.
2. Dans une forme trigonométrique, on a $\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$ et non $\cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta)$. Et $z_2 = 6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 6\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$. Une forme trigonométrique de z_2 est donc $z_2 = 6\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$.
3. Le module d'un nombre complexe est un nombre réel, il ne peut donc pas être égal à $2\mathrm{i}$. Et $z_3 = 2\mathrm{i}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\left[-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\mathrm{i}\right]$.
   Or $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ et $-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

   Une forme trigonométrique de z_3 est donc $z_3 = 2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right] = 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$.
4. Dans une forme trigonométrique, on a $\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$ et non $-\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$. Et $z_4 = \left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 1\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathrm{i}\right]$. Une forme trigonométrique de z_4 est donc $z_4 = 1\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$.
5. Dans une forme trigonométrique, on a $\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$ et non $\cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta)$. Et $z_5 = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right] = 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right]$. Une forme trigonométrique de z_5 est donc
   $z_5 = 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right] = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$.
6. 0 n'admet d'argument. Or $z_6 = 0$. z_6 n'admet donc pas de forme trigonométrique.

Corrigé exercice 82 :

1. a. D'après les formules d'addition, on a $\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$. De plus $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ c'est-à-dire $\cos^2(a) = 1 - \sin^2(a)$ et $\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$.

Donc $\cos(2a) = 1 - \sin^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a)$ et$\cos(2a) = \cos^2(a) - (1 - \cos^2(a)) = \cos^2(a) - 1 + \cos^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$.

b. D'après les formules d'addition, on a $\sin(2a) = \sin(a + a) = \sin(a)\cos(a) + \cos(a)\sin(a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

2. On a $\cos(a) = \cos\left(2 \times \frac{a}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$, d'après la question précédente. De même, $\sin(a) = \sin\left(2 \times \frac{a}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2}\right)$.

Corrigé exercice 83 :

1. a. On a $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, d'après les formules d'addition, d'où $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

   De même, on obtient que $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

   b. $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

   c. On a $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ et

   $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

   d. $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

2. $|z| = \sqrt{\left(3(\sqrt{2} - \sqrt{6})\right)^2 + \left(3(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^2} = 12$. Ainsi $\cos(\theta) = \frac{x}{|z|} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{|z|} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$. D'après ce qui précède, une mesure de θ est donc $\frac{7\pi}{12}$.

   Une forme trigonométrique de z est donc $z = 12\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$.

Corrigé exercice 84 :

1. D'après les formules de duplication, on a $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ donc $\cos^2(x) = \frac{\cos(2x) + 1}{2}$.

   De même, comme $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ alors $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$.

2. La fonction $x \mapsto \cos^2(x)$ est continue, car dérivable, sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, on a $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{1}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$ d'où $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3\sqrt{3}+4\pi}{24}$.
   La fonction $x \mapsto \sin^2(x)$ est continue, car dérivable, sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, on en déduit que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\frac{\pi}{2}-1}{4} = \frac{\pi-2}{8}$.

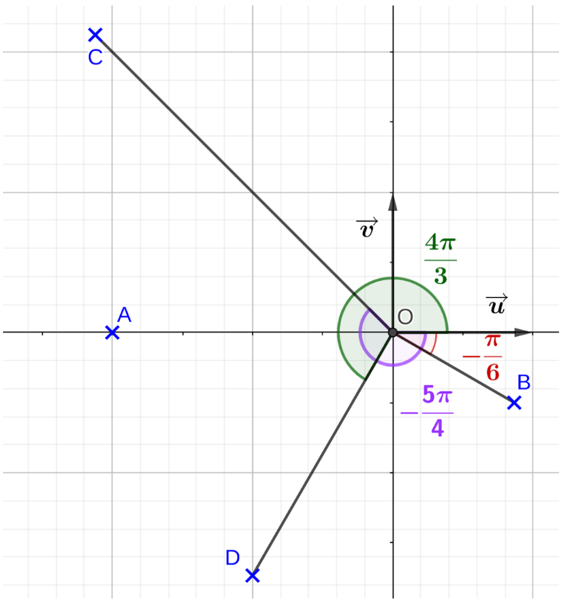
Corrigé exercice 85 :

Pour tout réel x, on a :
$\cos^2(x) - \sin(2x) = \cos^2(x) - 2\cos(x)\sin(x) = \cos(x)\left[\cos(x) - 2\sin(x)\right]$.

Corrigé exercice 86 :

D'après la calculatrice, on a $\left|-\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right| = \sqrt{2}$ et $\arg\left(\frac{-\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Or $-\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} = -\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)$, d'où $\left|\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right| = \sqrt{2}$ et $\arg\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = -\frac{\pi}{6} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ainsi, $\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Corrigé exercice 87 :



cc BY NC SA

Corrigé exercice 88 :

1. On a $\left|\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3$. D'où $\cos(\alpha) = \frac{x_1}{|z_1|} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{y_1}{|z_1|} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et ainsi $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$. Et donc $z_1 = 3\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$.
2. On a $|\pi\mathrm{i}| = \pi$. De plus, z_2 est un imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive, donc $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$. Et donc $z_2 = \pi\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$.
3. On a $|6+6\sqrt{3}\mathrm{i}| = \sqrt{6^2+(6\sqrt{3})^2} = 12$. D'où $\cos(\alpha) = \frac{x_3}{|z_3|} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{y_3}{|z_3|} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et ainsi $\alpha_3 = \frac{\pi}{3}+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$. Et donc $z_3 = 12\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$.
4. On a $|-2+2\mathrm{i}| = \sqrt{(-2)^2+(2)^2} = 2\sqrt{2}$. D'où $\cos(\alpha) = \frac{x_4}{|z_4|} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{y_4}{|z_4|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et ainsi $\alpha_4 = \frac{3\pi}{4}+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$. Et donc $z_4 = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$.
   Remarque : Cet exercice est la suite de l'exercice 76 p.71.

Corrigé exercice 89 :

1. $|z_1| = \frac{1}{2}$ et $\arg(z_1) = \frac{5\pi}{3}+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$. Or $\frac{5\pi}{3}-2\pi-\frac{\pi}{3}$, l'argument principal de z_1 est donc $-\frac{\pi}{3}$.
2. $|z_2| = \frac{3}{4}$ et $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{6}+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$. L'argument principal de z_2 est donc $-\frac{\pi}{6}$.
3. $z_3 = -2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$. D'où, $|z_3| = 2$ et $\arg(z_3) = -\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$. L'argument principal de z_3 est donc $-\frac{\pi}{2}$.
4. $|z_4| = 1$ et $\arg(z_4) = -\frac{5\pi}{4}+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$. Or $-\frac{5\pi}{4}+2\pi = \frac{3\pi}{4}$. L'argument principal de z_4 est donc $\frac{3\pi}{4}$.

Corrigé exercice 90 :

1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)$
2. $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| = \sqrt{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)} = 1$ puisque, pour tout réel θ, $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) = 1$.
3. Par définition, $\arg(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)) = \theta+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$. Donc $\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \theta+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 91 :

L'affixe du nombre complexe associé au point O n'admet pas de forme exponentielle, puisque O n'admet pas d'argument.
L'affixe de A est un imaginaire pur de partie imaginaire strictement négative, donc $\arg(z_A) = -\dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$. De plus $OA = 2$, donc $|z_A| = 2$. Ainsi $z_A = 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$.
D'après le théorème de Pythagore, $OB = \sqrt{2}$, c'est-à-dire $|z_B| = \sqrt{2}$. De plus $\arg(z_B) = -\dfrac{3\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ car B appartient à la droite d'équation $y = x$. Ainsi $z_B = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\dfrac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$.
De même, on obtient $z_E = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$
L'affixe de D est un réel strictement négatif, donc $\arg(z_D) = \pi + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$. De plus $OD = 3$, c'est-à-dire $|z_D| = 3$. Ainsi $z_D = 3\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$.
Le triangle ODF est un triangle équilatéral. Ainsi $OF = OD = 3$ et donc $|z_F| = 3$. De plus,$\arg(z_F) = \pi - \dfrac{\pi}{3} + k \times 2\pi = \dfrac{2\pi}{3} + k \times 2\pi$. Ainsi $z_F = 3\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$.
On a $OC = OD = 3$, c'est-à-dire $|z_C| = 3$. De plus, les angles $\widehat{DOF}$ et $\widehat{UOC}$ sont opposés par le sommet, donc $\arg(z_C) = -\dfrac{\pi}{3} + k \times 2\pi$. Ainsi $z_C = 3\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$.
On a $\widehat{IOD} = \dfrac{1}{2}\widehat{FOD}$, ainsi $\arg(z_I) = \dfrac{5\pi}{6} + k \times 2\pi$. De plus,comme B et I appartiennent à un même cercle, $OI = \sqrt{2}$. Donc $z_I = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}$.
Enfin, $\widehat{UOH} = \widehat{IOD}$ donc $\arg(z_H) = -\dfrac{\pi}{6}$. De plus, comme B et H appartiennent à un même cercle, $OH = \sqrt{2}$. Donc $z_H = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$.

Corrigé exercice 92 :

1. $|-3-3\mathrm{i}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$. Donc $\cos(\alpha_1) = \dfrac{x_1}{|z_1|} = -\dfrac{3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha_1) = \dfrac{y_1}{|z_1|} = -\dfrac{3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et ainsi $\alpha_1 = -\dfrac{3\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

   D'où, en conclusion, $z_1 = 3\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$.

2. $\left|\dfrac{7}{2} + \dfrac{7\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{7}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 7$. Donc $\cos(\alpha_2) = \dfrac{x_2}{|z_2|} = \dfrac{\frac{7}{2}}{7} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\alpha_2) = \dfrac{y_2}{|z_2|} = \dfrac{\frac{7\sqrt{3}}{2}}{7} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{3} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

   D'où, en conclusion, $z_2 = 7\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$.

3. $\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. De plus, z_3 est un réel strictement positif, donc $\alpha_3 = 0 + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

   D'où, en conclusion, $z_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{0\times\mathrm{i}}$.

Document sous licence libre Creative Commons

4. $\left|\frac{3}{2}\mathrm{i}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 3$. Donc $\cos(\alpha_4) = \frac{x_4}{|z_4|} = -\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

et $\sin(\alpha_4) = \frac{y_4}{|z_4|} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$ et ainsi $\alpha_1 = \frac{5\pi}{6} + k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$. Et donc $z_4 = 3\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}$.

Corrigé exercice 93 :

1. $z_1 = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 4\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\mathrm{i}$
2. $z_2 = 3\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = -3\mathrm{i}$
3. $z_3 = 6\left[\cos(2\pi)+\mathrm{i}\sin(2\pi)\right] = 6$
4. $z_4 = 1\times\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 1\times\left[-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

Corrigé exercice 94 :

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha'} = [\cos(\alpha)+\mathrm{i}\sin(\alpha)][\cos(\alpha')+\mathrm{i}\sin(\alpha')]$
$= [\cos(\alpha)\cos(\alpha')-\sin(\alpha)\sin(\alpha')]+\mathrm{i}[\cos(\alpha)\sin(\alpha')+\cos(\alpha')\sin(\alpha)]$
$= \cos(\alpha+\alpha')+\mathrm{i}\sin(\alpha+\alpha')$ d'après les formules d'addition
$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\alpha')}$

Corrigé exercice 95 :

1. a. On a $zz' = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\times r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha'} = rr'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha'} = rr'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha+\mathrm{i}\alpha'} = rr'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\alpha')}$, d'après le résultat démontré dans l'exercice 94.

   b. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $z^n = r^n\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\alpha}$. »
   Initialisation : $z^0 = 1$ et $r^0\mathrm{e}^{0\times\mathrm{i}\alpha} = 1\mathrm{e}^0 = 1$. Donc P_0 est vraie.
   Hérédité : Soit un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie, autrement dit tel que $z^k = r^k\mathrm{e}^{k\mathrm{i}\alpha}$.
   $z^{k+1} = z\times z^k = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\times r^k\mathrm{e}^{k\mathrm{i}\alpha}$, par hypothèse de récurrence, d'où $z^{k+1} = r\times r^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha+k\mathrm{i}\alpha}$, d'après la question précédente, et enfin $z^{k+1} = r^{k+1}\mathrm{e}^{(k+1)\mathrm{i}\alpha}$. Donc P_{k+1} est vraie.
   Conclusion : On a montré que la propriété était vraie au rang 1 et que si il existe un entier naturel k tel que P_k est vraie, alors P_{k+1} l'est également.
   Ainsi, par principe récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n est vraie c'est-à-dire $z^n = r^n\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\alpha}$.

   2. Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta-\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^0 = 1$, d'après l'exercice 94. Donc $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ est l'inverse de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, et donc $\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.
   Ainsi, $\frac{z}{z'} = \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha'}} = \frac{r}{r'}\times\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha'}} = \frac{r}{r'}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha-\mathrm{i}\alpha'} = \frac{r}{r'}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\alpha')}$.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 96 :

1. $z \times z' = 3\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{5}} \times \frac{2}{5}\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{7}} = 3 \times \frac{2}{5}\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{5}-\frac{2\mathrm{i}\pi}{7}} = \frac{6}{5}\mathrm{e}^{\frac{11\mathrm{i}\pi}{35}}$

2. $\frac{z'}{z} = \frac{\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{7}}}{3\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{5}}} = \frac{\frac{2}{5}}{3}\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{7}-\frac{3\mathrm{i}\pi}{5}} = \frac{2}{15}\mathrm{e}^{-\frac{31\mathrm{i}\pi}{35}}$.

3. $z'^5 = \left[\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{7}}\right]^5 = \left(\frac{2}{5}\right)^5 \mathrm{e}^{-5\times\frac{2\mathrm{i}\pi}{7}} = \frac{32}{3125}\mathrm{e}^{-\frac{10\mathrm{i}\pi}{7}} = \frac{32}{3125}\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{7}}$

4. $\frac{z}{z'^3} = \frac{3\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{5}}}{\left[\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{7}}\right]^3} = \frac{3\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{5}}}{\left[\frac{2}{5}\right]^3\mathrm{e}^{-3\times\frac{2\mathrm{i}\pi}{7}}} = \frac{3}{\frac{8}{125}} \times \mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{5}+\frac{6\mathrm{i}\pi}{7}} = \frac{375}{8}\mathrm{e}^{\frac{51\mathrm{i}\pi}{35}}$

Corrigé exercice 97 :

1. $z_1 = 3\mathrm{e}^{\frac{11\mathrm{i}\pi}{6}} = 3\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} = 3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}$

2. $z_2 = \left(\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{5\mathrm{i}\pi}{2}}\right)^4 = \left(\sqrt{3}\right)^4 \times \mathrm{e}^{-4\times\frac{5\mathrm{i}\pi}{2}} = 9\mathrm{e}^{-10\mathrm{i}\pi} = 9\mathrm{e}^{0\times\mathrm{i}} = 9 \times 1 = 9$

3. $z_3 = \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ d'où
$z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} = \frac{-\sqrt{2}-1}{2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

4. $z_4 = 4\mathrm{e}^{-\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}} = 4\left[\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right] - 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$
d'où $z_4 = 4\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right] - 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right] = -\sqrt{3} - 2 + (2\sqrt{3}-1)\mathrm{i}$.

Corrigé exercice 98 :

1. 1ère méthode : $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}+\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\frac{11\mathrm{i}\pi}{12}} = \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

   2ème méthode : $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] \times \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$= \left[-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \times \left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{4} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\mathrm{i} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$
$$= \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

2. Par identification des parties réelles et imaginaires des deux écritures précédentes, on obtient $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Corrigé exercice 99 :

1. On a $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$, donc $\underline{Z} = R + (L\omega - \frac{1}{C\omega})\mathrm{i}$.

   D'après les données du texte, on obtient $\underline{Z} = 90 + \left(10 - \frac{1}{20}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 90 + \frac{199}{20}\mathrm{i}$. L'impédance du circuit vaut donc $|\underline{Z}| = \left|90 + \frac{199}{20}\mathrm{i}\right| = \sqrt{90^2 + \left(\frac{199}{20}\right)^2} = \frac{\sqrt{3279601}}{20}$.

2. On a $\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}} = -\mathrm{i}$, donc $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{L\omega} \times (-\mathrm{i}) + C\omega\mathrm{i}$, d'où $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\mathrm{i}$.

   Ainsi, $\underline{Z} = \dfrac{1}{\frac{1}{R} + (C\omega - \frac{1}{L\omega})\mathrm{i}}$ d'où $\underline{Z} = \dfrac{R}{1 + R(C\omega - \frac{1}{L\omega})\mathrm{i}}$.

   Donc $\underline{Z} = \dfrac{R(1 - R(C\omega - \frac{1}{L\omega})\mathrm{i}}{1 + R^2(C\omega - \frac{1}{L\omega})^2}$.

   En conclusion, $\underline{Z} = \dfrac{R}{1 + R^2(C\omega - \frac{1}{L\omega})^2} - \dfrac{R^2(C\omega - \frac{1}{L\omega})}{1 + R^2(C\omega - \frac{1}{L\omega})^2}\mathrm{i}$.

   D'après les données du texte, on obtient $\underline{Z} = \frac{768}{115171253} - \frac{1151856}{115171253}\mathrm{i}$.

   L'impédance du circuit vaut donc :

   $$|\underline{Z}| = \sqrt{\left(\frac{768}{115171253}\right)^2 + \left(-\frac{1151856}{115171253}\right)^2} = \frac{48\sqrt{575856265}}{1151712253}.$$

Corrigé exercice 100 :

On a d'une part $zz' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{(a+b)\mathrm{i}} = \cos(a+b) + \mathrm{i}\sin(a+b)$. Et d'autre part $zz' = [\cos(a) + \mathrm{i}\sin(a)]\,[\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)]$
$= [\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)] + \mathrm{i}\,[\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)]$.
Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

Document sous licence libre Creative Commons

De même, $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}} = \mathrm{e}^{(a-b)\mathrm{i}} = \cos(a-b) + \mathrm{i}\sin(a-b)$ et, d'autre part, $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}} = \dfrac{\cos(a) + \mathrm{i}\sin(a)}{\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)}$
$= \dfrac{[\cos(a) + \mathrm{i}\sin(a)][\cos(b) - \mathrm{i}\sin(b)]}{\cos^2(b) + \sin^2(b)}$
$= [\cos(a) + \mathrm{i}\sin(a)][\cos(b) - \mathrm{i}\sin(b)]$ puisque $\cos^2(b) + \sin^2(b) = 1$
$= [\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)] + \mathrm{i}[\sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)]$.
Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.

Corrigé exercice 101 :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
$\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} = \dfrac{\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) + \cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)}{2}$
$= \dfrac{\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) + \cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta)}{2}$
$= \dfrac{2\cos(\theta)}{2}$
$= \cos(\theta)$
De même, $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}} = \dfrac{\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) - \cos(-\theta) - \mathrm{i}\sin(-\theta)}{2\mathrm{i}}$
$= \dfrac{\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) - \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)}{2\mathrm{i}}$
$= \dfrac{2\mathrm{i}\sin(\theta)}{2\mathrm{i}}$
$= \sin(\theta)$

Corrigé exercice 102 :

1. Pour tout réel x, d'après les formules d'Euler, on a $\cos(2x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2}$ donc
$\cos(2x) = \dfrac{(\mathrm{e}^{ix})^2 + (\mathrm{e}^{-ix})^2}{2}$
$= \dfrac{[\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)]^2 + [\cos(-x) + \mathrm{i}\sin(-x)]^2}{2}$
$= \dfrac{[\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)]^2 + [\cos(x) - \mathrm{i}\sin(x)]^2}{2}$
$= \dfrac{2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)}{2}$
$= \cos^2(x) - \sin^2(x)$
$= 2\cos^2 x - 1$ car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
2. De même, $\sin(2x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} = \dfrac{4\mathrm{i}\cos(x)\sin(x)}{2\mathrm{i}} = 2\cos(x)\sin(x)$.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 103 :

1. $\cos^4(x) = \dfrac{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^4}{16}$.
   Or $\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^4 = \left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2 \times \left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2 = \left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)+4\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)+6$, et donc
   $\cos^4(x) = \dfrac{\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)+4\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)+6}{16}$
   $= \dfrac{1}{8}\times\dfrac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}+\dfrac{3}{8}$
   $= \dfrac{1}{8}\cos(4x)+\dfrac{1}{2}\cos(2x)+\dfrac{3}{8}$.

2. De même, on a $\sin^5(x) = \dfrac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^5}{32i}$ et
   $\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^5 = \left(e^{5ix}-e^{-5ix}\right)-5\left(e^{3ix}-e^{-3ix}\right)+10\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$, donc
   $\sin^5(x) = \dfrac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^5}{32i} = \dfrac{1}{16}\sin(5x)-\dfrac{5}{16}\sin(3x)+\dfrac{5}{8}\sin(x)$.

3. On a d'une part $\cos^2(x) = \dfrac{\cos(2x)+1}{2}$ et d'autre part
   $\sin^3(x) = -\dfrac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^3}{8i} = -\dfrac{1}{4}\sin(3x)+\dfrac{3}{4}\sin(x)$.
   D'où $\cos^2(x)\sin^3(x) = \dfrac{\cos(2x)+1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{4}\sin(3x)+\dfrac{3}{4}\sin(x)\right)$ et donc
   $= -\dfrac{1}{8}\sin(3x)\cos(2x)+\dfrac{3}{8}\sin(x)\cos(2x)-\dfrac{1}{8}\sin(3x)+\dfrac{3}{8}\sin(x)$.

4. On a d'une part $\sin^3(x) = -\dfrac{1}{4}\sin(3x)+\dfrac{3}{4}\sin(x)$ et d'autre part
   $\cos^3(x) = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{4}\cos(3x)+\dfrac{3}{4}\cos(x)$.
   D'où$\cos^3(x)+2\sin^3(x) = \dfrac{1}{4}\cos(3x)+\dfrac{3}{4}\cos(x)-\dfrac{1}{2}\sin(3x)+\dfrac{3}{2}\sin(x)$.

Corrigé exercice 104 :

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons P_n la proposition : « $\left(e^{i\theta}\right)^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$. »
Initialisation : $\left(e^{i\theta}\right)^0 = 1$ et $\cos(0\times\theta)+i\sin(0\times\theta) = \cos(0)+i\sin(0) = 1$.
Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie, autrement dit tel que $\left(e^{i\theta}\right)^k = \cos(k\theta)+i\sin(k\theta)$.
$\left(e^{i\theta}\right)^{k+1} = \left(e^{i\theta}\right)\times\left(e^{i\theta}\right)^k = [\cos(\theta)+i\sin(\theta)]\times[\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)]$ par hypothèse de récurrence, d'où
$\left(e^{i\theta}\right)^k = \cos(\theta)\cos(k\theta)-\sin(\theta)\sin(k\theta)+i[\sin(\theta)\cos(k\theta)+\cos(\theta)\sin(k\theta)]$
$= \cos((k+1)\theta)+i\sin((k+1)\theta)$ d'après les formules d'addition.

Document sous licence libre Creative Commons

Donc P_{k+1} est vraie.
Conclusion : Ainsi, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie et donc $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$.

Corrigé exercice 105 :

1. $[\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)]^3 = [\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)]^2 \times [\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)]$
$= \left[\cos^2(x) + 2\mathrm{i}\cos(x)\sin(x) - \sin^2(x)\right] \times [\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)]$
$= \cos^3(x) + 3\mathrm{i}\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - \mathrm{i}\sin^3(x)$
2. À l'aide de la la formule de Moivre, on a $\cos(3x) + \mathrm{i}\sin(3x) = [\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)]^3$.
3. D'après les questions précédentes, on a
$\cos(3x) + \mathrm{i}\sin(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) + \mathrm{i}\left[3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)\right]$.
Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient donc que
4. a. $\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\left[1 - \cos^2(x)\right]$ et donc $\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x) + 3\cos^3(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.
   b. $\sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = 3\left[1 - \sin^2(x)\right]\sin(x) - \sin^3(x)$ et donc $\sin(3x) = 3\sin(x) - 3\sin^3(x) - \sin^3(x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$.

Corrigé exercice 106 :

D'après la formule de Moivre, $\cos(5x) + \mathrm{i}\sin(5x) = [\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)]^5$.
On obtient, en développant le membre de droite de l'égalité, que
$\cos(5x) + \mathrm{i}\sin(5x)$
$= \cos^5(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x) + 5\cos(x)\sin^4(x)$
$+\mathrm{i}\left[5\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^2(x)\sin^3(x) + \sin^5(x)\right]$.
Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient :
$\cos(5x) = \cos^5(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x) + 5\cos(x)\sin^4(x)$
$= \cos^5(x) - 10\cos^3(x)\left[1 - \cos^2(x)\right] + 5\cos(x)\left[1 - \cos^2(x)\right]^2$
$= \cos^5(x) - 10\cos^3(x) + 10\cos^5(x) + 5\cos(x)\left[1 - 2\cos^2(x) + \cos^4(x)\right]$
$= 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x)$.
Et $\sin(5x) = 5\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^2(x)\sin^3(x) + \sin^5(x)$
$= 5\left[1 - \sin^2(x)\right]^2\sin(x) - 10\left[1 - \sin^2(x)\right]\sin^3(x) + \sin^5(x)$
$= 5\left[1 - 2\sin^2(x) + \sin^4(x)\right]\sin(x) - 10\sin^3(x) + 10\sin^5(x) + \sin^5(x)$
$= 16\sin^5(x) - 20\sin^3(x) + 5\sin(x)$.

Corrigé exercice 107 :

1. $\cos^5(x) = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^5}{32}$. Or $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^5 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^2 \times \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^2 \times \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$
$= \left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}\right) + 5\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right) + 10\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$.
Donc $\cos^5(x) = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^5}{32} = \dfrac{1}{16}\cos(5x) + \dfrac{5}{16}\cos(3x) + \dfrac{5}{8}\cos(x)$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

2. La fonction f est dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}$.
   Et $\int_0^{\frac{5\pi}{6}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{16}\cos(5x) + \frac{5}{16}\cos(3x) + \frac{5}{8}\cos(x)\,\mathrm{d}x$
   $= \left[\frac{1}{16} \times \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{5}{16} \times \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{5}{8}\sin(x)\right]_0^{\frac{5\pi}{6}}$
   $= \frac{1}{80}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{5}{48}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{5}{8}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
   $= \frac{1}{80} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{48} \times 1 + \frac{5}{8} \times \frac{1}{2}$
   $= \frac{203}{480}$

Corrigé exercice 108 :

1. $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^3(x) - \cos^5(x)$.
   On a d'une part :
   $\cos^5(x) = \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^5}{32} = \frac{\left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}\right) + 5\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right) + 10\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)}{32}$ d'où
   $\cos^5(x) = \frac{1}{16}\cos(5x) + \frac{5}{16}\cos(3x) + \frac{5}{8}\cos(x)$.
   D'autre part, $\cos^3(x) = \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^3}{8} = \frac{\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right) + 3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)}{8}$ d'où
   $\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$.
   Donc, en conclusion, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $f(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x) - \frac{1}{16}\cos(5x) - \frac{5}{16}\cos(3x) - \frac{5}{8}\cos(x)$.
2. La fonction f est dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}$.
   Et $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\frac{1}{16}\cos(5x) - \frac{1}{16}\cos(3x) + \frac{1}{8}\cos(x)\,\mathrm{d}x$
   $= \left[-\frac{1}{16} \times \frac{1}{5}\sin(5x) - \frac{1}{16} \times \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{8}\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$
   $= \left[-\frac{1}{80}\sin(5x) - \frac{1}{48}\sin(3x) + \frac{1}{8}\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$
   $= \frac{1}{80} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
   $= \frac{11\sqrt{3}}{160}$.

Document sous licence libre Creative Commons

9 Exercices d'entraînement partie 3

Corrigé exercice 109 :

Première méthode : Démontrer que trois points sont alignés revient à démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
On doit donc démontrer qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, soit que $b-a = k(c-a)$.
Deuxième méthode : Démontrer que trois points sont alignés revient à démontrer que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

On doit donc démontrer que $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$..

Corrigé exercice 110 :

$AB = 3CD$ se traduit par $|b-a| = 3\,|d-c|$.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles, soit $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Donc $\arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Corrigé exercice 111 :

1. Les racines 4-ièmes de l'unité sont $\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{4}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{k\pi}{2}\mathrm{i}}$ avec $k \in \{0; 1; 2; 3\}$.

   Donc, les racines 4-ièmes de l'unité sont 1, i, -1 et $-\mathrm{i}$.

2. Le polygone formé est un carré.

Corrigé exercice 112 :

1. On a : $AB = |b-a| = |1+3\mathrm{i}-4-\mathrm{i}| = |-3+2\mathrm{i}| = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{13}$.

2. On a : $AC = |c-a| = \left|4-\dfrac{5}{2}\mathrm{i}-4-\mathrm{i}\right| = \left|-\dfrac{7}{2}\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(-\dfrac{7}{2}\right)^2} = \dfrac{7}{2} \neq AB$.

   C n'appartient donc pas au cercle de centre A et passant par B.

Corrigé exercice 113 :

On calcule les longueurs des différents côtés du triangle.
Donc :

$$\begin{aligned} AB = |b-a| &= \left|2-2\mathrm{i}\sqrt{3}-\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}\right| \\ &= \sqrt{(2-\sqrt{2})^2+(-2\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{20-4\sqrt{2}+4\sqrt{6}} \end{aligned}$$

$$AC = |c-a| = \left|\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} - 2 + \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} - 2\sqrt{3}\right)\mathrm{i} - \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}\right|$$
$$= \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} - 2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{20 - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{6}}$$

$$BC = |c-a| = \left|\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} - 2 + \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} - 2\sqrt{3}\right)\mathrm{i} - 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}\right|$$
$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} - 4\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{20 - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{6}}$$

On obtient $AB = AC = BC$.
ABC est donc un triangle équilatéral.

Corrigé exercice 114 :

1. $AD = |d-a| = \left|-2 + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right| = \sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$

   $BD = |d-b| = \left|2 - \frac{3}{2}\mathrm{i}\right| = \sqrt{2^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$

   $CD = |d-c| = \left|2 + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$

2. D'après ce qui précède, on a : $AD = BD = CD$.

   D est donc à égale distance des sommets du triangle ABC. Ainsi, D est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Corrigé exercice 115 :

1. On obtient : $\dfrac{b-c}{a-c} = \dfrac{\dfrac{3\sqrt{3}-4}{2} - \dfrac{5}{2}\mathrm{i}}{\dfrac{-3\sqrt{3}+4}{6} + \dfrac{5}{6}\mathrm{i}} = -3$

2. On déduit de la question précédente que : $b - c = -3(a-c)$.

   D'où : $\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CA}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont colinéaires.

   Les points A, B et C sont alignés.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 116 :

$(4z^2-20z+37)(2z-7+2\text{i})=0 \Leftrightarrow 4z^2-20z+37=0$ ou $2z-7+2\text{i}=0$.
On résout : $2z-7+2\text{i}=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{7}{2}-\text{i}$.
Pour résoudre $4z^2-20z+37=0$, on calcule le discriminant : $\Delta=400-4\times4\times37=-192$.
Les solutions complexes de cette équation sont : $z_1=\dfrac{5}{2}+\sqrt{3}\text{i}$ et $z_2=\dfrac{5}{2}-\sqrt{3}\text{i}$.
On définit les points A, B et C d'affixe respective $a=\dfrac{7}{2}-\text{i}$, $b=\dfrac{5}{2}+\sqrt{3}\text{i}$ et $c=\dfrac{5}{2}-\sqrt{3}\text{i}$.
On a : $PA=|a-2|=\left|\dfrac{3}{2}-\text{i}\right|=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$
$PB=|b-2|=\left|\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}\text{i}\right|=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$
$PC=|c-2|=\left|\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}\text{i}\right|=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$
D'où : $PA=PB=PC$.
Les trois points A, B et C appartiennent donc bien à un même cercle : le cercle de centre P et de rayon $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Corrigé exercice 117 :

1. $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$, on calcule le discriminant : $\Delta=12-4\times1\times4=-4$.
   Les solutions complexes de cette équation sont : $z_1=\sqrt{3}+\text{i}$ et $z_2=\sqrt{3}-\text{i}$
2. On définit A et B d'affixe respective $a=\sqrt{3}+\text{i}$ et $b=\sqrt{3}-\text{i}$.
   On a : $OA=|a-0|=\left|\sqrt{3}+\text{i}\right|=2$
   $OB=|b-0|=\left|\sqrt{3}-\text{i}\right|=2$
   $AB=|b-a|=|-2\text{i}|=2$
   D'où : $OA=OB=AB$.
   Le triangle OAB est donc un triangle équilatéral.

Corrigé exercice 118 :

1. On a $\frac{a-b}{c-a}=\frac{-2+2\text{i}}{-4-4\text{i}}=-\frac{1}{2}\text{i}$.
2. Donc : $\arg\left(\dfrac{a-b}{c-a}\right)=\arg\left(-\dfrac{1}{2}\text{i}\right)+k\times2\pi=-\dfrac{\pi}{2}+k\times2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc orthogonaux.
   Ainsi, les droites (BA) et (AC) sont perpendiculaires.

Corrigé exercice 119 :

1. Par lecture graphique, on a : $a=3+5\text{i}$ et $b=-2+5\text{i}$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

2. On a : $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right) = \arg\left(\dfrac{a-b}{c-b}\right) + k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

   $\dfrac{a-b}{c-b} = \dfrac{5}{5-5\sqrt{3}\mathrm{i}} = \dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{4} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$

   D'où $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{\pi}{3} + k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$

   On a $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) + k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$

   Or $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{-5\sqrt{3}\mathrm{i}}{-5} = \sqrt{3}\mathrm{i} = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$

   D'où $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$

3. D'après ce qui précède, $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{3}$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$.

   La somme des angles géométriques d'un triangle est égale à π.

   Donc $\widehat{BCA} = \pi - \widehat{ABC} - \widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{6}$.

Corrigé exercice 120 :

1. On a : $\dfrac{a-b}{c-d} = \dfrac{2+4\mathrm{i}}{3+6\mathrm{i}} = \dfrac{2}{3}$.

2. On conclut que $a-b = \dfrac{2}{3}(c-d)$.

   Ainsi, $\overrightarrow{BA} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{DC}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont donc colinéaires, ce qui signifie que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

   Remarque : On peut aussi utiliser $\arg\left(\dfrac{a-b}{c-d}\right) = \arg\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0 + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Corrigé exercice 121 :

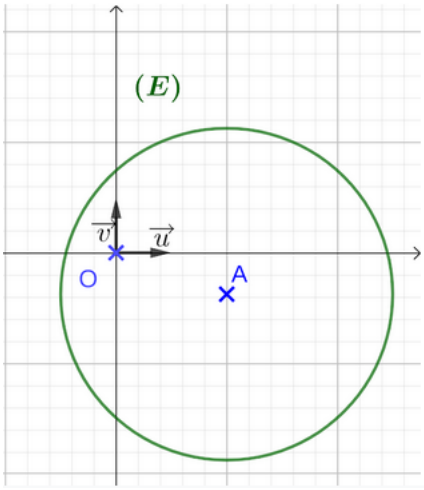
En utilisant le cours, on a :
L'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-z_A| = |z-z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.
L'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-z_A| = r$ (r réel strictement positif) est le cercle de centre A et de rayon r.
Les paires sont donc : 1-d, 2-a, 3-f, 4-b, 5-c et 6-e.

Corrigé exercice 122 :

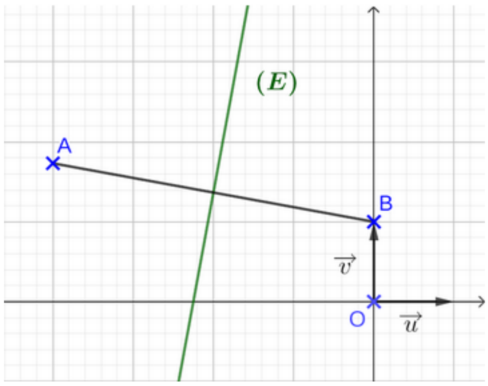
1. On a $\left|z-2+\dfrac{3}{4}\mathrm{i}\right| = 3 \Leftrightarrow |z-z_A| = 3$ avec $z_A = 2-\dfrac{3}{4}\mathrm{i}$.

   L'ensemble (E) est donc le cercle de centre A t-d'affixe $2-\dfrac{3}{4}\mathrm{i}$ et de rayon 3.

2. On a : $\left|z+4-\sqrt{3}\mathrm{i}\right| = |z-\mathrm{i}| \Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B|$ avec $z_A = -4+\sqrt{3}\mathrm{i}$ et $z_B = \mathrm{i}$.

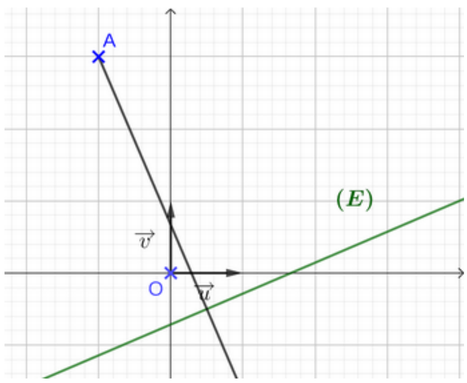


L'ensemble (E) est donc la médiatrice du segment $[AB]$, avec $A(-4+\sqrt{3}\mathrm{i})$ et $B(\mathrm{i})$.



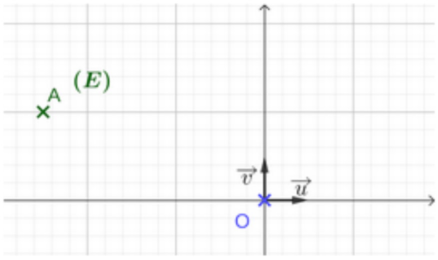
3. Un module est un réel positif. Cette relation est impossible.
   L'ensemble (E) est donc l'ensemble vide.

4. On a : $|2-4\mathrm{i}-z| = |-(2-4\mathrm{i}-z)| = |z-2+4\mathrm{i}|$
   Ainsi, la relation devient : $|z+1-3\mathrm{i}| = |z-2+4\mathrm{i}|$.
   L'ensemble (E) est donc la médiatrice du segment $[AB]$, avec $A(-1+3\mathrm{i})$ et $B(2-4\mathrm{i})$.

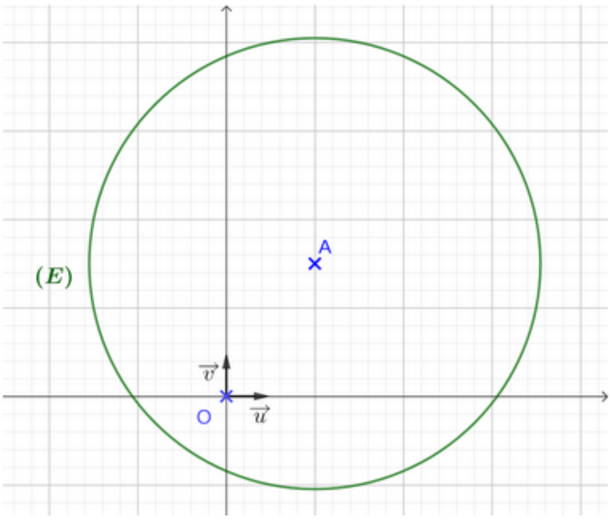


Document sous licence libre Creative Commons

5. On a : $|z+5-2\text{i}| = 0 \Leftrightarrow |z - z_A| = 0$ avec $z_A = -5 + 2\text{i}$.
   L'ensemble (E) est donc le point A d'affixe $z_A = -5 + 2\text{i}$.



6. On a : $|1-5\text{i}| = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$. Ainsi, la relation devient : $|z - 3\text{i} - 2| = \sqrt{26}$.
   L'ensemble (E) est donc le cercle de centre$A$ d'affixe $z_A = 2 + 3\text{i}$ et de rayon $\sqrt{26}$.

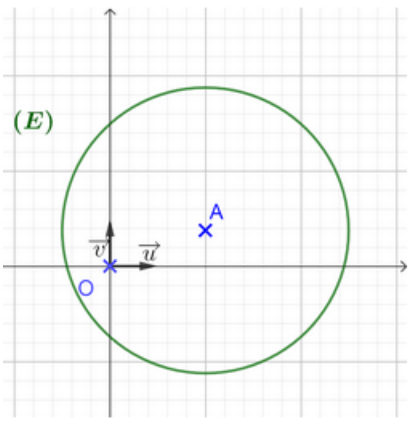


Corrigé exercice 123 :

1. On a : $\left|\overline{z} - 2 + \frac{3}{4}\text{i}\right| = \left|\overline{\overline{z} - 2 + \frac{3}{4}\text{i}}\right| = \left|z - 2 - \frac{3}{4}\text{i}\right|$

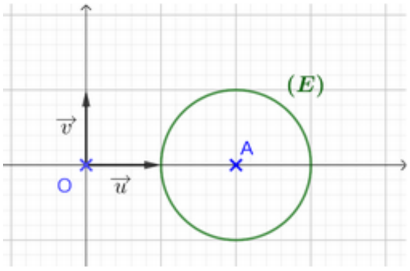
   Ainsi, la relation devient : $\left|z - 2 - \frac{3}{4}\text{i}\right| = 3$

   L'ensemble (E) est donc le cercle de centre$A$ d'affixe $z_A = 2 + \frac{3}{4}\text{i}$ et de rayon 3.

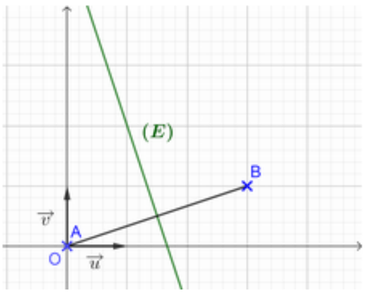


Document sous licence libre Creative Commons

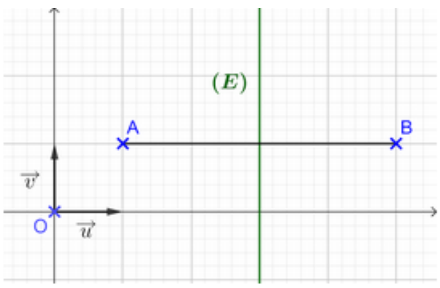
2. On a : $|\mathrm{i}z - 2\mathrm{i}| = |\mathrm{i}(z-2)| = |\mathrm{i}| \times |z-2| = |z-2|$
   Ainsi, la relation devient : $|z-2| = 1$
   L'ensemble (E) est donc le cercle de centre$A$ d'affixe $z_A = 2$ et de rayon 1.



3. On a : $|3\mathrm{i}z| = |3\mathrm{i}| \times |z| = 3\,|z|$
   Et : $|3\mathrm{i}z + 3 - 9\mathrm{i}| = |3\mathrm{i}(z - \mathrm{i} - 3)| = |3\mathrm{i}| \times |z - \mathrm{i} - 3| = 3\,|z - \mathrm{i} - 3|$
   Ainsi, la relation devient : $|z| = |z - \mathrm{i} - 3|$.
   L'ensemble (E) est la médiatrice du segment $[AB]$, avec $A(0)$ et $B(3+\mathrm{i})$.



4. On a : $|\overline{z} - 1 + \mathrm{i}| = \left|\overline{\overline{z} - 1 + \mathrm{i}}\right| = |z - 1 - \mathrm{i}|$.
   Et : $|\overline{z} - 5 + \mathrm{i}| = \left|\overline{\overline{z} - 5 + \mathrm{i}}\right| = |z - 5 - \mathrm{i}|$.
   Ainsi, la relation devient : $|z - 1 - \mathrm{i}| = |z - 5 - \mathrm{i}|$.
   L'ensemble (E) est la médiatrice du segment $[AB]$, avec $A(1+\mathrm{i})$ et $B(5+\mathrm{i})$.



Corrigé exercice 124 :

On considère z et z' deux nombres complexes appartenant à $\mathbb{U}$.
Donc : $|z| = |z'| = 1$.

1. On a : $|zz'| = |z| \times |z'| = 1 \times 1 = 1$. Ainsi, $zz' \in \mathbb{U}$.
2. On a $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|} = 1$. Ainsi, $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{U}$.

Corrigé exercice 125 :

Les affixes des points A_k pour k compris entre 0 et 6 sont les racines 7-ième de l'unité. Ainsi, le polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ est un heptagone régulier (polygone à 7 côtés).

Corrigé exercice 126 :

On a : $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$.
Donc : $j^3 = \left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}\right)^3 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$. De plus : $(j^2)^3 = (j^3)^2 = 1^2 = 1$.
Donc, j et j^2 sont des racines 3-ièmes de l'unité.
Remarque : Il est possible aussi de développer $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3$ pour démontrer que $j^3 = 1$.

Corrigé exercice 127 :

1. Les solutions de $z^5 = 1$ sont les racines 5-ièmes de l'unité.
   Donc les solutions sont les nombres complexes $\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{5}\mathrm{i}}$, k compris entre 0 et 4.
   Donc : $S = \{1; \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{5}\mathrm{i}}; \mathrm{e}^{\frac{4k\pi}{5}\mathrm{i}}; \mathrm{e}^{\frac{6k\pi}{5}\mathrm{i}}; \mathrm{e}^{\frac{8\pi}{5}\mathrm{i}}\}$.
2. On a $z^5 = (1+\mathrm{i})^5 \Leftrightarrow \frac{z^5}{(1+\mathrm{i})^5} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{1+\mathrm{i}}\right)^5 = 1 \Leftrightarrow Z^5 = 1$ où $Z = \frac{z}{1+\mathrm{i}} = \frac{z}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}$.
3. D'après les questions précédentes, les solutions de $z^5 = (1+\mathrm{i})^5$ sont les nombres complexes z tels que : $\frac{z}{1+\mathrm{i}} = \frac{z}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} = \mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{5}\mathrm{i}}$, avec k compris entre 0 et 4. Donc :

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{5}\mathrm{i}} \\ &= \sqrt{2}\exp\left(\frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{i} \\ &= \sqrt{2}\exp\left(\frac{(8k+5)\pi}{20}\mathrm{i}\right) \end{aligned}$$

   Donc : $\mathcal{S} = \{\sqrt{2}\exp\left(\frac{(8k+5)\pi}{20}\mathrm{i}\right), 0 \leqslant k \leqslant 4\}$.

Corrigé exercice 128 :

On a : $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow |z| = 1$
$\Leftrightarrow |z|^2\, 1$
$\Leftrightarrow \overline{z}z = 1$
$\Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$ puisque $z \neq 0$.

Corrigé exercice 129 :

a, b et c appartiennent à $\mathbb{U}$.
Donc : $|a| = |b| = |c| = 1$, soit $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$. On a :

$$\begin{aligned}
|ab+bc+ca|^2 &= \overline{(ab+bc+ca)}(ab+bc+ca)\\
&= (\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca})(ab+bc+ca)\\
&= ab\overline{ab} + ab\overline{bc} + ab\overline{ca} + bc\overline{ab} + bc\overline{bc} + bc\overline{ca} + ca\overline{ab} + ca\overline{bc} + ca\overline{ca}\\
&= |ab|^2 + |bc|^2 + |ca|^2 + ab\overline{b}\overline{c} + a\overline{a}b\overline{c} + b\overline{b}c\overline{a} + \overline{a}bc\overline{c} + ca\overline{a}\overline{b} + c\overline{c}a\overline{b}\\
&= 1^2 + 1^2 + 1^2 + a\overline{c} + b\overline{c} + \overline{a}c + b\overline{a} + c\overline{b} + a\overline{b}
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
|a+b+c|^2 = \overline{(a+b+c)}(a+b+c) &= (\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})(a+b+c)\\
&= a\overline{a} + b\overline{b} + c\overline{c} + b\overline{a} + c\overline{a} + a\overline{b} + c\overline{b} + a\overline{c} + b\overline{c}\\
&= 1^2 + 1^2 + 1^2 + b\overline{a} + c\overline{a} + a\overline{b} + c\overline{b} + a\overline{c} + b\overline{c}
\end{aligned}$$

Donc : $|ab+bc+ca|^2 = |a+b+c|^2$. D'où : $|ab+bc+ca| = |a+b+c|$.

Corrigé exercice 130 :

z appartient à $\mathbb{U}$, donc $|z| = 1$. On a :

$$\begin{aligned}
|1+z|^2 + |1-z|^2 &= \overline{(1+z)}(1+z) + \overline{(1-z)}(1-z)\\
&= (1+\overline{z})(1+z) + (1-\overline{z})(1-z)\\
&= 1 + z + \overline{z} + z\overline{z} + 1 - z - \overline{z} + z\overline{z} = 2 + 2z\overline{z}\\
&= 2 + 2\,|z|^2 = 2 + 2 = 4
\end{aligned}$$

10 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 131 :

1. Première méthode : Le centre I du cercle de diamètre $[AB]$ a pour affixe : $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = 2 + 5\text{i}$.

   Le rayon du cercle est donc $AI = |z_I - z_A| = |-3 + 3\text{i}| = 3\sqrt{2}$.

   On calcule ensuite : $MI = |z_I - z_M| = \left|4 - \sqrt{2}\text{i}\right| = 3\sqrt{2}$.

   Ainsi $AI = MI$ et M appartient donc au cercle de diamètre $[AB]$.

   Deuxième méthode : On calcule :

   $AB = |z_B - z_A| = |-6 + 6\text{i}| = 6\sqrt{2}$

   $MA = |z_A - z_M| = \left|-7 + \left(3 + \sqrt{2}\right)\text{i}\right| = \sqrt{60 + 6\sqrt{2}}$

   $MB = |z_B - z_M| = \left|1 + \left(3 - \sqrt{2}\right)\text{i}\right| = \sqrt{12 - 6\sqrt{2}}$

   Donc : $AB^2 = 72$ et $MA^2 + MB^2 = 60 + 6\sqrt{2} + 12 - 6\sqrt{2} = 72$.

   Ainsi $AB^2 = MA^2 + MB^2$. D'après le théorème de Pythagore, le triangle MAB est rectangle en M. Le cercle circonscrit au triangle MAB est donc le cercle de diamètre $[AB]$ et M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

2. On considère un point M appartenant au cercle $\mathcal{C}$ tel que $z_M = \text{i}y$, y réel.

   On a : $MI = 3\sqrt{2}$. Donc :

$$\begin{aligned} MI^2 = 18 &\Leftrightarrow |2 + (5 - y)\text{i}|^2 = 18 \\ &\Leftrightarrow 2^2 + (5 - y)^2 = 18 \\ &\Leftrightarrow y^2 - 10y + 11 = 0 \end{aligned}$$

   On résout cette équation : $\Delta = b^2 - 4ac = 56$.

   Il existe donc deux solutions réelles : $y_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 5 - \sqrt{14}$ et $y_2 = 5 + \sqrt{14}$.

   Il existe donc deux points appartenant au cercle $\mathcal{C}$ dont les affixes sont des imaginaires purs, les points d'affixe $(5 - \sqrt{14})\text{i}$ et $(5 + \sqrt{14})\text{i}$.

Corrigé exercice 132 :

1. Proposition 1 : VRAIE

   On a : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$.

   De plus : $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\alpha) = \dfrac{y}{|z|} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Par lecture d'un cercle trigonométrique, on obtient : $\alpha = -\dfrac{\pi}{3}$. Donc $z = 2\text{e}^{-\frac{\pi}{3}\text{i}}$.

   n est un multiple de 3. Donc : $n = 3k, k \in \mathbb{N}$. D'où :

$$\begin{aligned} z^n = z^{3k} &= \left(8\text{e}^{-\pi\text{i}}\right)^k \\ &= (-8)^k = ((-2)^3)^k = (-2)^n \end{aligned}$$

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

z^3 est donc un réel.

2. Proposition 2 : VRAIE

   Première méthode : On a : $\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

   Donc : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) + k \times 2\pi = \dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

   De plus : $\dfrac{z_A - z_B}{z_O - z_B} = \dfrac{a-b}{-b} = \dfrac{a\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}}{-a\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}} = \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

   Donc : $\left(\overrightarrow{BO};\overrightarrow{BA}\right) = \arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_O - z_B}\right) + k \times 2\pi = \dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

   On conclut que : $\widehat{AOB} = \dfrac{\pi}{4}$, $\widehat{ABO} = \dfrac{\pi}{2}$. Donc : $\widehat{OAB} = \dfrac{\pi}{4}$.

   OAB est donc un triangle rectangle isocèle en B.

   Deuxième méthode : $OA = |a| = \sqrt{5}$.

   $OB = |b| = \left|a\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right| = |a| \times \left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right| = \sqrt{5} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

   $AB = |b-a| = \left|a\dfrac{-1+\mathrm{i}}{2}\right| = |a| \times \left|\dfrac{-1+\mathrm{i}}{2}\right| = \sqrt{5} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

   Donc : $OB = AB$.

   De plus : $OB^2 + AB^2 = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = 5 = OA^2$

   Ainsi : $OA^2 = OB^2 + AB^2$.

   D'après le théorème de Pythagore, le triangle OAB est rectangle isocèle en B.

3. Proposition 3 : FAUSSE

   O, M et M' sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires.

   On a : $z' = -\dfrac{10}{\overline{z}} = -\dfrac{10}{z\overline{z}}z = -\dfrac{10}{|z|^2}z$.

   Ainsi, $z' = kz$ avec $k = -\dfrac{10}{|z|^2} \in \mathbb{R}$.

   Donc, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont toujours colinéaires.

Corrigé exercice 133 :

1. On a : $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$.

   De plus : $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$.

Document sous licence libre Creative Commons

2. a. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\right)^n + \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}\right)^n \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^n \left[\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{4}} + \mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{4}}\right] \\ &= 2\left(\sqrt{2}\right)^n \frac{\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{4}} + \mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{4}}}{2} = 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Nous avons plusieurs cas à étudier :
Premier cas : $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) > 0$. Alors $S_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)[\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0]$
Or $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) > 0$ lorsque $n = 8p + k$ avec k compris entre -2 et 2.
Deuxième cas : $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) < 0$. Alors $S_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)[\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi]$
Or : $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) < 0$ lorsque $n = 8p + k$ avec k compris entre 2 et 6
Troisième cas : $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0$. Alors : $S_n = 0$ n'admet pas de forme trigonométrique.
Or : $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0$ lorsque $n = 8p + k$ avec k égal à -2 ou 2.

b. Affirmation A : VRAIE
D'après la question précédente, on sait que $S_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \in \mathbb{R}$
Affirmation B : VRAIE
D'après la question précédente, on sait que $S_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$. Donc :

$$\begin{aligned} S_n = 0 &\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow n = 2 + 4k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Il existe donc une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n = 0$.

Corrigé exercice 134 :

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^n$.

On a : $1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}$ et $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}$
Donc $\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{7\pi}{12}} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$. D'où :

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]\right)^n \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^n \times \left[\cos\left(\frac{7n\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7n\pi}{12}\right)\right] \end{aligned}$$

d'après la formule de Moivre.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 135 :

1. r représente la distance entre le point M et l'origine O du repère.
   α est une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM}\right)$.

2. a. On a : $x = r\cos(\alpha)$ et $y = r\sin(\alpha)$.

   b. On a $x = 3\cos\left(-\frac{31\pi}{4}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
   et $y = 3\sin\left(-\frac{31\pi}{4}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
   M a donc pour coordonnées cartésiennes $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.
   L'affixe de M est donc $z = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

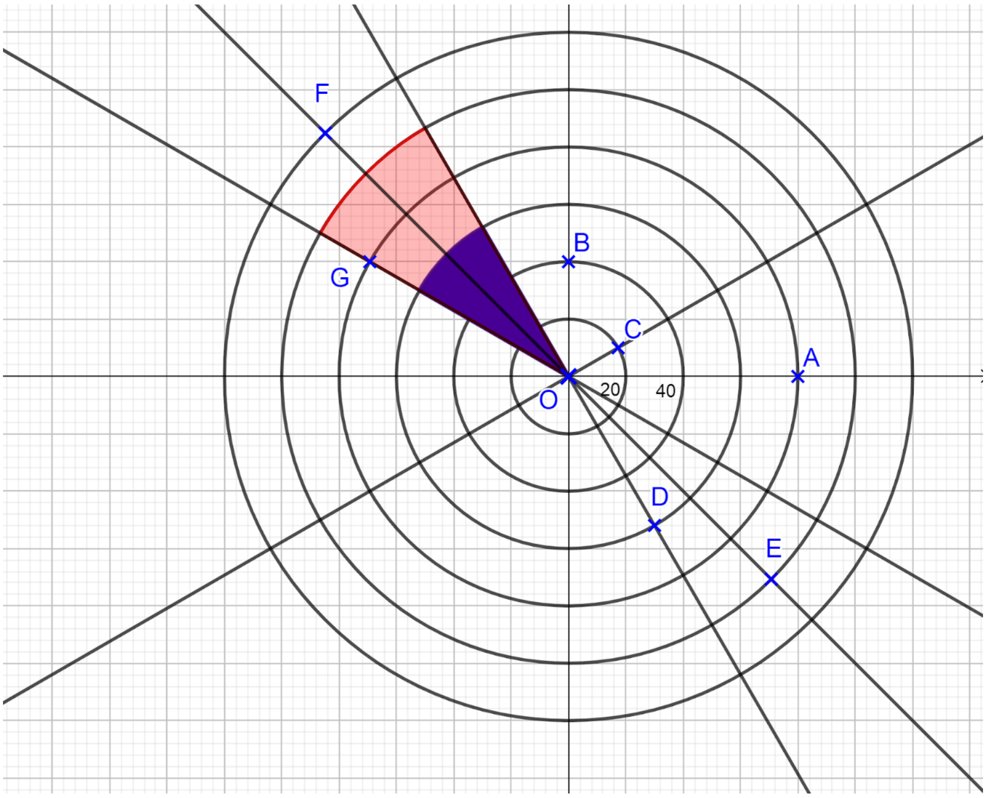
   c. On a : $z = 5\mathrm{e}\frac{7\mathrm{i}\pi}{3} = 5\left[\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right]$
   $= 5\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$
   Les coordonnées polaires de M sont donc $\left(5,\frac{\pi}{3}\right)$.

3. a. A a pour coordonnées polaires $(60, 0)$.
   B a pour coordonnées polaires $\left(40,\frac{\pi}{2}\right)$.
   C a pour coordonnées polaires $\left(20,\frac{\pi}{6}\right)$.
   D a pour coordonnées polaires $\left(60,-\frac{\pi}{3}\right)$.
   E a pour coordonnées polaires $\left(100,-\frac{\pi}{4}\right)$.

   b. Voici la figure ci-dessous.

   c. On a : $z_G = 80\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 80\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5i}{6}\right)\right]$.
   G a pour coordonnées polaires $\left(80,\frac{5\pi}{6}\right)$.

   d. La zone de recherche est la zone rouge :



Corrigé exercice 136 :

1.

$$\begin{aligned} z = 3\text{i}z - 1 &\Leftrightarrow z(1-3\text{i}) = -1 \\ &\Leftrightarrow z = -\frac{1}{1-3\text{i}} = -\frac{1}{10} - \frac{3}{10}\text{i} \end{aligned}$$

2. a. Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= z_{n+1} + \frac{1}{10} + \frac{3}{10}\text{i} \\ &= 3\text{i}z_n - \frac{9}{10} + \frac{3}{10}\text{i} \\ &= 3\text{i}\left(z_n + \frac{3}{10}\text{i} + \frac{1}{10}\right) = 3\text{i}u_n \end{aligned}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la proposition $u_n = \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}\text{i}\right) \times 3^n \times \text{i}^n$. On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$ (initialisation) :
$\left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}\text{i}\right) \times 3^0 \times \text{i}^0 = \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}\text{i}\right) \times 1 \times 1 = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}\text{i} = u_0$
On en déduit que P_0 est vraie.
On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $\left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}\text{i}\right) \times 3^k \times \text{i}^k$. On souhaite démontrer

CC BY NC SA

que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $\left(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\mathrm{i}\right)\times 3^{k+1}\times \mathrm{i}^{k+1}$ (hérédité).

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 3\mathrm{i}\times u_k \\ &= 3\mathrm{i}\times\left(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\mathrm{i}\right)\times 3^k\times\mathrm{i}^k \quad \text{(par hypothese de recurrence)} \\ &= \left(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\mathrm{i}\right)\times 3^{k+1}\times\mathrm{i}^{k+1} \end{aligned}$$

Ainsi, P_0 est vraie et, lorsque P_k est vraie pour un entier k quelconque, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n est vraie donc $u_n=\left(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\mathrm{i}\right)\times 3^n\times\mathrm{i}^n$.

3. a. La distance AM_n est égale à $|z_n-z_A|=|u_n|=\dfrac{3^n\sqrt{10}}{10}$.
   On a $\lim 3^n=+\infty$ puisque $3>1$. Ainsi $\lim AM_n=+\infty$ et la distance AM_n diverge vers $+\infty$.
   b. Pour tout entier naturel n, on a :
   $z_{n+2}-z_A=u_{n+2}=3\mathrm{i}u_{n+1}=3\mathrm{i}\times 3\mathrm{i}u_n=-9u_n=-9(z_n-z_A)$.
   Donc : $\overrightarrow{AM_{n+2}}=-9\overrightarrow{AM_n}$ et les points A, M_n et M_{n+2} sont alignés.
   c. Pour tout entier naturel n, on a $z_{n+1}-z_A=u_{n+1}=3\mathrm{i}u_n=3\mathrm{i}(z_n-z_A)$.
   Donc $\dfrac{z_{n+1}-z_A}{z_n-z_A}=3\mathrm{i}$ et $\arg\left(\dfrac{z_{n+1}-z_A}{z_n-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\times 2\pi; k\in\mathbb{Z}$.
   D'où : $\left(\overrightarrow{AM_n};\overrightarrow{AM_{n+1}}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\times 2\pi; k\in\mathbb{Z}$. Les droites (AM_n) et (AM_{n+1}) sont donc perpendiculaires.

Corrigé exercice 137 :

1. On sait que :
   $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)=\dfrac{\pi}{3}+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$ et $AE=AD$, soit $\dfrac{AE}{AD}=1$.
   Donc : $\left|\dfrac{z_E-z_A}{z_D-z_A}\right|=\dfrac{|z_E-z_A|}{|z_D-z_A|}=1$ et $\arg\left(\dfrac{z_E-z_A}{z_D-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{3}+k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}$. D'où

$$\begin{aligned} \frac{z_E-z_A}{z_D-z_A}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} &\Leftrightarrow z_E-z_A=(z_D-z_A)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow z_E=z_A+(z_D-z_A)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i}) \end{aligned}$$

   Le point E a bien pour affixe $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i})$.

2. On a $z_{D'}=\dfrac{2z_D-\mathrm{i}}{\mathrm{i}z_D+1}=\dfrac{2\times 1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}\times 1+1}=\dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}+1}=\dfrac{(2-\mathrm{i})(-\mathrm{i}+1)}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$
   L'affixe du point D' associé au point D par l'application f est $z_{D'}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.

Document sous licence libre Creative Commons

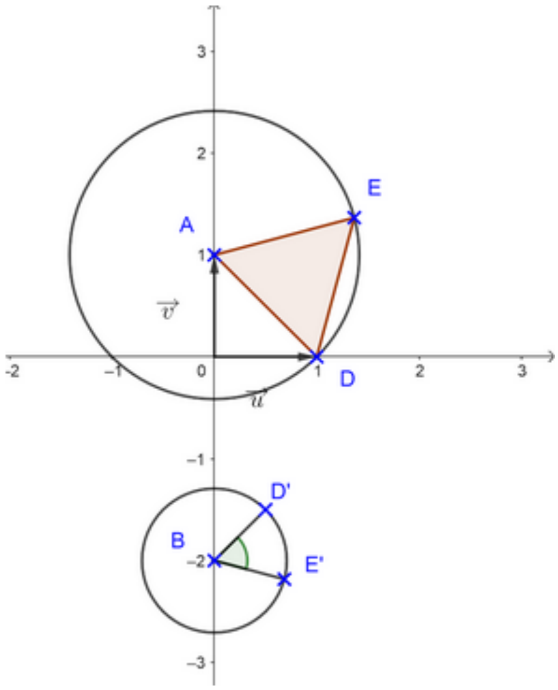
3. a. Pour tout nombre complexe z différent de i, on a :
$z' = \dfrac{2z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}z+1} \Leftrightarrow z'(\mathrm{i}z+1) = 2z - \mathrm{i} \Leftrightarrow zz'\mathrm{i} + z' - 2z + \mathrm{i} = 0$
On multiplie l'expression par $-\mathrm{i}$ et on obtient :
$zz' - z'\mathrm{i} + 2z\mathrm{i} + 1 = 0$
Or : $(z'+2\mathrm{i})(z-\mathrm{i}) = zz' - \mathrm{i}z' + 2\mathrm{i}z + 2$.
Donc :$zz' - \mathrm{i}z' + 2\mathrm{i}z = (z'+2\mathrm{i})(z-\mathrm{i}) - 2$ $BE' = \dfrac{1}{AE} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
Ainsi : $zz' - z'\mathrm{i} + 2z\mathrm{i} + 1 = 0$ devient $(z'+2\mathrm{i})(z-\mathrm{i}) - 2 + 1 = 0$
Donc : $(z'+2\mathrm{i})(z-\mathrm{i}) = 1$.

   b. Pour tout point M d'affixe $z(z \neq \mathrm{i})$, on a :
$|(z'+2\mathrm{i})(z-\mathrm{i})| = 1$, soit $|z'+2\mathrm{i}| \times |z-\mathrm{i}| = 1$ d'où $BM' \times AM = 1$
De plus : $\arg[(z'+2\mathrm{i})(z-\mathrm{i})] = 0 + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
soit $\arg(z'+2\mathrm{i}) + \arg(z-\mathrm{i}) = 0 + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
soit $\arg(z'+2\mathrm{i}) = -\arg(z-\mathrm{i}) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\left(\vec{u}; \overrightarrow{BM'}\right) = -\left(\vec{u}; \overrightarrow{AM}\right) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

4. a. On a : $AD = |z_D - z_A| = |1 - \mathrm{i}| = \sqrt{2}$
ADE est un triangle équilatéral donc : $AD = AE = \sqrt{2}$.
Les points D et E appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

   b. On sait que $BE' \times AE = 1$, soit $BE' = \dfrac{1}{AE} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
De même, $BD' \times AD = 1$, soit $BD' = \dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
D'où $BE' = BD'$.
De plus, $\left(\vec{u}; \overrightarrow{BD'}\right) = -\left(\vec{u}; \overrightarrow{AD}\right) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ et
$\left(\vec{u}; \overrightarrow{BE'}\right) = -\left(\vec{u}; \overrightarrow{AE}\right) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
Donc $\left(\vec{u}; \overrightarrow{BD'}\right) - \left(\vec{u}; \overrightarrow{BE'}\right) = \left(\vec{u}; \overrightarrow{AE}\right) - \left(\vec{u}; \overrightarrow{AD}\right) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
D'où $\left(\vec{u}; \overrightarrow{BD'}\right) + \left(\overrightarrow{BE'}; \vec{u}\right) = \left(\vec{u}; \overrightarrow{AE}\right) + \left(\overrightarrow{AD}; \vec{u}\right) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
Ainsi, $\left(\overrightarrow{BE'}; \overrightarrow{BD'}\right) = \left(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
Donc $\left(\overrightarrow{BE'}; \overrightarrow{BD'}\right) = \dfrac{\pi}{3} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Document sous licence libre Creative Commons



5. Le triangle $BD'E'$ est un triangle équilatéral, puisque $BD' = BE'$ et $\widehat{E'BD'} = \dfrac{\pi}{3}$ rad.

Corrigé exercice 138 :

On a : $z_A + z_C = z_B + z_D$, soit $\dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{z_B + z_D}{2}$.
Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont donc le même milieu.
$ABCD$ est un parallélogramme.
Remarque : On a aussi $z_C - z_D = z_B - z_A$, soit $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. $ABCD$ est donc un parallélogramme.
On a : $z_A + \mathrm{i}z_B = z_C + \mathrm{i}z_D$
$z_A - z_C = \mathrm{i}(z_D - z_B)$
D'où : $|z_A - z_C| = |\mathrm{i}(z_D - z_B)| = |\mathrm{i}|\,|z_D - z_B| = |z_D - z_B|$.
On conclut donc que : $AC = BD$.
$ABCD$ est un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur. $ABCD$ est donc un rectangle.
De plus : $\arg\left(\dfrac{z_A - z_C}{z_D - z_B}\right) = \arg(\mathrm{i}) + k \times 2\pi = \dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Les diagonales (AC) et (BD) sont donc perpendiculaires. $ABCD$ est donc un carré.

Corrigé exercice 139 :

1. a. On a $z_{C'} = \dfrac{1 - z_C}{\overline{z_C} - 1} = \dfrac{3 - \mathrm{i}}{-3 - \mathrm{i}} = \dfrac{(3 - \mathrm{i})(-3 + \mathrm{i})}{10} = -\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}\mathrm{i}$.

   b. On a $OC' = |z_{C'}| = \left|-\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}\mathrm{i}\right| = \sqrt{\dfrac{25}{25}} = 1$.

   Le point C' appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

c. On calcule : $z_C - z_A = -2 + \mathrm{i} - 1 = -3 + \mathrm{i}$ et $z_{C'} - z_A = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i} - 1 = -\frac{9}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i} = \frac{3}{5}(-3 + \mathrm{i}) = \frac{3}{5}(z_C - z_A)$.

On vient de démontrer que : $\overrightarrow{AC'} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

Les vecteurs sont colinéaires. Les points A, C et C' sont bien alignés.

2. On résout donc : $z_A = \frac{1 - z}{\overline{z} - 1}$ avec $\overline{z} \neq 1$, soit $z \neq 1$.

$1 = \frac{1 - z}{\overline{z} - 1} \Leftrightarrow \overline{z} - 1 = 1 - z$

On définit : $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels.

On obtient donc : $x - \mathrm{i}y - 1 = 1 - x - \mathrm{i}y \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

L'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f est la droite d'équation $x = 1$, privée du point A, puisque $z \neq 1$.

3. Pour tout point M distinct de A, on a :

$$\begin{aligned} OM' = |z'| &= \left|\frac{1 - z}{\overline{z} - 1}\right| \\ &= \frac{|1 - z|}{|\overline{z} - 1|} \\ &= \frac{|1 - x - \mathrm{i}y|}{|x - \mathrm{i}y - 1|} \\ &= \frac{\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}}{\sqrt{(x - 1)^2 + (-y)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}}{\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}} = 1 \end{aligned}$$

Le point M' appartient au cercle $\mathcal{C}$.

4. Pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on obtient :

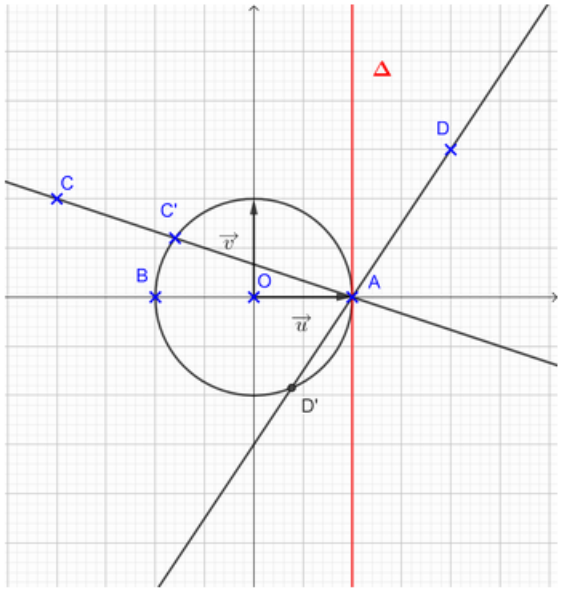
$$\begin{aligned} \frac{z' - 1}{z - 1} &= \frac{\frac{1 - z}{\overline{z} - 1} - 1}{z - 1} \\ &= \frac{2 - z - \overline{z}}{(\overline{z} - 1)(z - 1)} \\ &= \frac{2 - (z + \overline{z})}{z\overline{z} - (z + \overline{z}) + 1} \\ &= \frac{2 - 2\mathrm{Re}(z)}{|z|^2 - 2\mathrm{Re}(z) + 1} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Il existe donc un réel k tel que : $\frac{z' - 1}{z - 1} = k$, soit $z' - 1 = k(z - 1)$.

Donc : $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$. Les vecteurs sont colinéaires et les points A, M et M' sont alignés.

Document sous licence libre Creative Commons

5. Voici la construction :



D' est donc l'intersection entre la droite (AD) et le cercle $\mathcal{C}$.

Corrigé exercice 140 :

1. Affirmation 1 : FAUSSE

   On a :

$$z - \mathrm{i} = \mathrm{i}(z+1) \Leftrightarrow z - \mathrm{i} = \mathrm{i}z + \mathrm{i} \qquad \Leftrightarrow (1-\mathrm{i})z = 2\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{i} - 1$$

   Or $\mathrm{i} - 1 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

2. Affirmation 2 : FAUSSE

   Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\begin{aligned} 1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} &= 1 + \cos(2x) + \mathrm{i}\sin(2x) \\ &= 1 + 2\cos^2(x) - 1 + 2\mathrm{i}\cos(x)\sin(x) \\ &= 2\cos(x)\left[\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\right] \\ &= 2\cos(x) \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \end{aligned}$$

   3. Affirmation 3 : VRAIE

   Un point M d'affixe z tel que $|z - \mathrm{i}| = |z + 1|$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(\mathrm{i})$ et $B(-1)$.

   Cette droite a pour équation $y = -x$.

   4. Affirmation 4 : FAUSSE

   Supposons par l'absurde qu'il existe une solution z réelle.

   Donc $z^5 + z + 1$ est un nombre réel.

   Il est donc impossible que $z^5 + z - \mathrm{i} + 1$ soit réel.

cc BY NC SA

Corrigé exercice 141 :

1. On a : $e^{ip}+e^{iq}=e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{i\frac{q-p}{2}}\right)=2e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

2. a. Donc :
$\cos(p)+\cos(q)+\mathrm{i}\left[\sin(p)+\sin(q)\right]$
$=2\left[\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\right]\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
$=2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)+2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient :
$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$ et
$\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

   b. D'après ce qui précède, résoudre $\sin(2x)-\sin(6x)=0$ revient à résoudre :

$$\begin{aligned}\sin(2x)+\sin(-6x)=0 &\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{2x-6x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+6x}{2}\right)=0\\ &\Leftrightarrow \sin(-2x)\cos(4x)=0\\ &\Leftrightarrow \sin(-2x)=0 \text{ ou } \cos(4x)=0\\ &\Leftrightarrow x=-\frac{k\pi}{2} \text{ ou } x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4} \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

3. a. Soit x un réel distinct de $k\pi, k\in\mathbb{Z}$.
Pour tout entier naturel n, on a : $\sum\limits_{p=0}^{n}e^{ipx}=\sum\limits_{p=0}^{n}\left(e^{ix}\right)^p=\dfrac{1-\left(e^{ix}\right)^{n+1}}{1-e^{ix}}$ (somme des termes d'une suite géométrique).

   b. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}\cos(px) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{p=0}^{n}e^{ipx}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1-\left(e^{ix}\right)^{n+1}}{1-e^{ix}}\right)\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\frac{1-\left(\mathrm{e}^{ix}\right)^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{ix}} &= \frac{1-\mathrm{e}^{i(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{ix}}\\ &= \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)x}{2}}\right)\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(n+1)x}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)x}{2}}\right]}{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}\right)\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}\right]}\\ &= \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)x}{2}}\right)2\mathrm{i}\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}\right)2\mathrm{i}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nx}{2}}\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

Donc : $\sum\limits_{p=0}^{n}\cos(px) = \dfrac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

c. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}\sin(px) &= \mathrm{Im}\left(\sum_{p=0}^{n}\mathrm{e}^{ipx}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{1-\left(\mathrm{e}^{ix}\right)^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{ix}}\right)\end{aligned}$$

Or : $\dfrac{1-\left(\mathrm{e}^{ix}\right)^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{ix}} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nx}{2}}\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

Donc : $\sum\limits_{p=0}^{n}\sin(px) = \dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

Corrigé exercice 142 :

1. Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= z_{n+1}-\mathrm{i}\\ &= \frac{1}{3}z_n-\frac{1}{3}\mathrm{i} = \frac{1}{3}\left(z_n-\mathrm{i}\right) = \frac{1}{3}u_n\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la proposition $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times (1 - \mathrm{i})$. On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Pour $n = 0$ (initialisation) :
   $\left(\frac{1}{3}\right)^0 \times (1 - \mathrm{i}) = 1 \times (1 - \mathrm{i}) = 1 - \mathrm{i} = z_0 - \mathrm{i} = u_0$.
   On en déduit que P_0 est vraie.
   On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $u_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k \times (1 - \mathrm{i})$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $u_{k+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} \times (1 - \mathrm{i})$ (hérédité).

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{1}{3} \times u_k \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k \times (1 - \mathrm{i}) \ \text{(par hypothese de recurrence)} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} \times (1 - \mathrm{i}) \end{aligned}$$

   Ainsi, P_0 est vraie et, lorsque P_k est vraie pour un entier k quelconque, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie donc $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times (1 - \mathrm{i})$

3. a. Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} |u_n| = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^n (1 - \mathrm{i})\right| &= \left|\left(\frac{1}{3}\right)^n\right| \times |1 - \mathrm{i}| \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

   b. On sait que : $-1 < \frac{1}{3} < 1$. Donc : $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.
   Par opérations sur les limites : $\lim \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$
   D'où : $\lim_{n \to +\infty} |z_n - \mathrm{i}| = \lim_{n \to +\infty} |u_n| = 0$.
   c. Plus le n est grand, plus les points A_n se rapprochent du point C.

4. a. Soit n un entier naturel.
   On a : $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (1 - \mathrm{i}) = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$ puisque $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$.
   Donc : $\arg(u_n) = -\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. Pour tout entier naturel n, les points B_n ont une affixe dont l'argument est identique, à 2π près. Les point B_n appartiennent donc tous à la demi-droite d'équation $y = -x$, avec x réel positif. Les points B_n sont donc tous alignés.

c. Pour tout entier naturel n, on sait que

$$\begin{aligned} z_n = u_n + \mathrm{i} &= \left(\frac{1}{3}\right)^n (1-\mathrm{i}) + \mathrm{i} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] \mathrm{i} \end{aligned}$$

Donc : $y_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 - x_n$.
Les coordonnées des points A_n vérifient l'équation $y = -x + 1$, ce qui signifie que les points A_n appartient à la droite d'équation réduite $y = -x + 1$.

Corrigé exercice 143 :

1. a. On résout : $z^2 + z - 1 = 0$.
On calcule le discriminant : $\Delta = 5 > 0$.
Il existe deux solutions $z_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

b. Les racines 5-ième de l'unité sont les nombres complexes $z_k = \exp\left(\dfrac{2\mathrm{i}k\pi}{5}\right)$, avec k compris entre 0 et 4.
Donc : $z_0 = \mathrm{e}^{0\times\mathrm{i}} = 1$, $z_1 = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}}$, $z_2 = \mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{5}}$, $z_3 = \mathrm{e}^{\frac{6\mathrm{i}\pi}{5}}$, $z_4 = \mathrm{e}^{\frac{8\mathrm{i}\pi}{5}}$
Les points d'affixes les racines 5-ième de l'unité forment un pentagone régulier, d'après le cours.

2. On note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}} = z_1$.

a. $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \dfrac{1-\omega^5}{1-\omega} = \dfrac{1-1}{1-\omega} = 0$ car ω est une racine 5-ième de l'unité.

b. On a : $\overline{\omega^2} = \overline{\exp\left(\dfrac{4\mathrm{i}\pi}{5}\right)} = \exp\left(-\dfrac{4\mathrm{i}\pi}{5}\right) = \exp\left(\dfrac{6\mathrm{i}\pi}{5}\right) = \left(\exp\left(\dfrac{2\mathrm{i}\pi}{5}\right)\right)^3 = \omega^3$
De plus :
$\overline{\omega} = \overline{\exp\left(\dfrac{2\mathrm{i}\pi}{5}\right)} = \exp\left(-\dfrac{2\mathrm{i}\pi}{5}\right) = \exp\left(\dfrac{8\mathrm{i}\pi}{5}\right) = \left(\exp\left(\dfrac{2\mathrm{i}\pi}{5}\right)\right)^4 = \omega^4$

3. a. On déduit de la question précédente :

$$\begin{aligned} (\omega+\overline{\omega})^2 + \omega + \overline{\omega} - 1 &= \omega^2 + \overline{\omega}^2 + 2\omega\overline{\omega} + \omega + \overline{\omega} - 1 \\ &= \omega^2 + \omega^3 + 2\omega\omega^4 + \omega + \omega^4 - 1 \\ &= \omega + \omega^2 + \omega^3 + 2\omega^5 + \omega^4 - 1 \\ &= \omega + \omega^2 + \omega^3 + 2\times 1 + \omega^4 - 1 \\ &= \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\omega + \overline{\omega}$ est donc solution de (E).

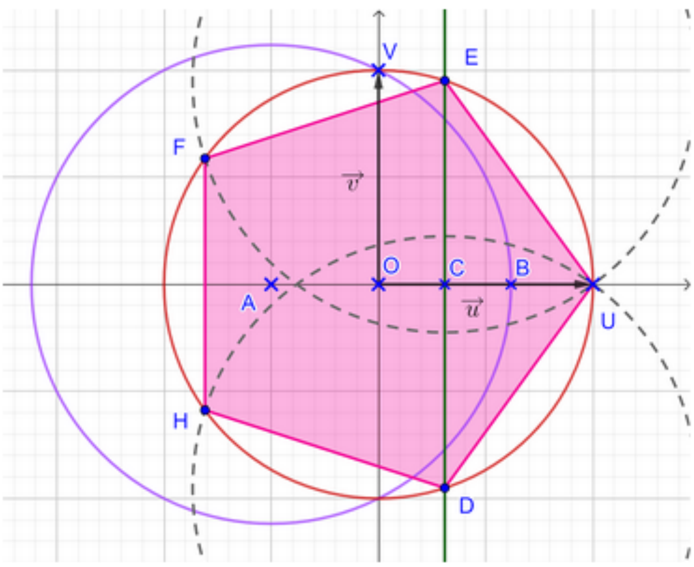
b. On sait que $\omega + \overline{\omega} = 2\text{Re}(\omega) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$.
$\omega+\overline{\omega}$ est donc une solution de (E) positive, d'où d'après la question 1 : $\omega+\overline{\omega} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Or : $\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1$, d'où $\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+5}{8}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2(\sqrt{5}+5)}}{4}$, puisque $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$

4. a. On nomme B le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la demi-droite $[OU)$.
B a donc une affixe réelle positive, notée x.
On sait que $AB = AV$, soit $\left|x+\frac{1}{2}\right| = \left|\text{i}+\frac{1}{2}\right|$.
En mettant l'égalité précédente au carré, on obtient :

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x+\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x+\frac{1}{2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

x est positif donc $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

b. On place C le milieu de $[OB]$. C a donc pour affixe $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.
On trace ensuite la droite d d'équation $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, qui permet d'obtenir les points d'intersection avec le cercle trigonométrique d'affixe ω et ω^4.
On reporte sur le cercle l'écart entre U et le point d'affixe ω pour obtenir les deux autres sommets manquants. On obtient ainsi la construction, à la règle non graduée et au compas, d'un pentagone régulier.



Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 144 :

1. La TFD de la séquence de nombres $(0, 1, 1)$ est :

$$\begin{aligned} Z_p = \sum_{k=0}^{2} z_k \omega^{-kp} &= 0 \times \omega^0 + 1 \times \omega^{-p} + 1 \times \omega^{-2p} \\ &= \left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right)^{-p} + \left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right)^{-2p} \end{aligned}$$

On a ainsi : $Z_0 = \left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right)^{-0} + \left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right)^{-0} = 2, Z_1 = \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}} = -1$ et $Z_2 = \mathrm{e}^{-\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-\frac{8\mathrm{i}\pi}{3}} = -1$

2. La TFD inverse de la séquence de nombres $(3, -5, \mathrm{i})$ est :

$z_p = \sum_{k=0}^{2} Z_k \omega^{kp} = 3 - 5\omega^p + \mathrm{i}\omega^{2p} = 3 - 5\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right)^p + \left(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right)^{2p}$

Donc : $z_0 = 3 - 5\left(\mathrm{e}\,\dfrac{2\mathrm{i}\pi}{3}\right)^0 + \mathrm{i}\left(\mathrm{e}\,\dfrac{2\mathrm{i}\pi}{3}\right)^0 = -2 + \mathrm{i}$,

$z_1 = 3 - 5\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}+11}{2} + \dfrac{-5\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{i}$ et

$z_2 = 3 - 5\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\frac{8\mathrm{i}\pi}{3}} = \dfrac{-\sqrt{3}+11}{2} + \dfrac{5\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{i}$

Corrigé exercice 145 :

Partie A : Démonstration de l'inégalité triangulaire

1. Pour tout nombre complexe z, on a : $z+\overline{z} = \mathrm{Re}(z)+\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Re}(z)-\mathrm{i}\mathrm{Im}(z) = 2\mathrm{Re}(z)$.

De plus : $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) \leqslant 2\sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2} = 2\,|z|$, puisque $(\mathrm{Im}(z))^2 \geqslant 0$. D'où $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$.

2. On a :

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} \\ &= (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\ &= |z|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z} + |z'|^2 \\ &= |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} + |z'|^2 \\ &= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2 \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &\leqslant |z|^2 + 2\left|z\overline{z'}\right| + |z'|^2 \text{ d'apres la question 1} \\ &\leqslant |z|^2 + 2\,|z|\left|\overline{z'}\right| + |z'|^2 \\ &\leqslant |z|^2 + 2\,|z|\,|z'| + |z'|^2 \\ &\leqslant (|z| + |z'|)^2 \end{aligned}$$

Donc : $|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$, puisque les valeurs sont positives.

Partie B : Cas d'égalité

1. Si $z=0$, alors $|z+z'|=|z'|=|z|+|z'|$. Idem si $z'=0$.
2. L'égalité est vraie si, et seulement si, $\text{Re}(Z)=|Z|$ c'est-à-dire si, et seulement si $Z \in \mathbb{R}_+$
3. a. Voir la question 2 de la partie A
   b. $(|z|+|z'|)^2 = |z|^2+|z'|^2+2|z||z'|$. On a alors :

$$\begin{aligned}|z+z'| = |z|+|z'| &\Leftrightarrow |z+z'|^2 = (|z|+|z'|)^2\\ &\Leftrightarrow |z|^2+2\text{Re}(z\overline{z'})+|z'|^2 = |z|^2+2|z||z'|+|z'|^2\\ &\Leftrightarrow \text{Re}(z\overline{z'}) = |z||z'|\\ &\Leftrightarrow z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+\end{aligned}$$

   Or $z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z\overline{z'}=\lambda$.

   C'est-à-dire si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = \lambda \times \dfrac{1}{\overline{z'}} = \lambda \times \dfrac{z'}{z'\overline{z'}} = \dfrac{\lambda}{|z'|}z'$.

   c. Le cas d'égalité revient à écrire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = \lambda \times \dfrac{z'}{|z'|^2}$.

   Les points O, M et M' doivent donc être alignés tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ soient colinéaires et de même sens.

Partie C : Applications

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, n non nul. On note P_n la proposition $|z_1+z_2+\cdots+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$. On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, n non nul.

   Pour $n=1$ (initialisation) :

   $|z_1| \leqslant |z_1|$ donc P_1 est vraie.

   On considère un entier naturel k non nul quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $|z_1+z_2+\cdots+z_k| \leqslant |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_k|$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $|z_1+z_2+\cdots+z_{k+1}| \leqslant |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_{k+1}|$ (hérédité).

$$\begin{aligned}|z_1+z_2+\cdots+z_{k+1}| &= |z_1+z_2+\cdots+z_k+z_{k+1}|\\ &\leqslant |z_1+z_2+\cdots+z_k|+|z_{k+1}| \text{ (inegalite triangulaire)}\\ &\leqslant |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_k|+|z_{k+1}| \text{ (hypothèse de recurrence)}\end{aligned}$$

   Ainsi, P_1 est vraie et, lorsque P_k est vraie pour un entier k non nul quelconque, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n non nul, P_n est vraie donc $|z_1+z_2+\cdots+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$.

2. Pour tous nombres complexes a et b, on a :

   $1 = \mid 1 \mid = \mid (1+a)+(-a-b)+b \mid \leqslant \mid 1+a \mid + \mid -a-b \mid + \mid b \mid$

   D'où : $1 \leqslant \mid 1+a \mid + \mid a+b \mid + \mid b \mid$.

Corrigé exercice 146 :

1. Pour $n = 1$, l'équation devient $z^1 = a$, soit $z = a$. L'équation admet une solution a.
2. a. On a : $(1+2\mathrm{i})^2 = 1 - 4 + 4\mathrm{i} = -3 + 4\mathrm{i}$.

   b.
$$\begin{aligned} z^2 = -3 + 4\mathrm{i} &\Leftrightarrow z^2 = (1+2\mathrm{i})^2 \\ &\Leftrightarrow z = 1 + 2\mathrm{i} \text{ ou } z = -1 - 2\mathrm{i} \end{aligned}$$
   Les solutions de l'équation sont : $1 + 2\mathrm{i}$ et $-1 - 2\mathrm{i}$.
3. a. Une forme exponentielle de $\sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}$ est : $2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$.

   b. On a $\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}\right)^3 = \left(2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right)^3 = 8\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}} = 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\mathrm{i}$

   D'où $\sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}$ est solution de $z^3 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\mathrm{i}$.

   c. Une forme exponentielle de $-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\mathrm{i}$ est $8\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$ (voir question précédente).

   d. Résoudre $z^3 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\mathrm{i}$ revient à résoudre $z^3 = 8\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$.

   $z^3 = \left(2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{z^3}{\left(2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right)^3} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}\right)^3 = 1$

   Résoudre $z^3 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\mathrm{i}$ revient donc à résoudre $Z^3 = 1$ avec $Z = \frac{z}{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}$.

   e. Les solutions de $Z^3 = 1$ sont 1, $\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$ et $\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}}$.

   Donc trois cas :

   $\frac{z}{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} = 1 \Leftrightarrow z = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$

   ou $\frac{z}{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\mathrm{e}^{2\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} = 2\mathrm{e}^{\frac{11\pi}{12}\mathrm{i}} = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$ (d'après l'exercice 98).

   ou $\frac{z}{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} = \mathrm{e}^{4\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}} = 2\mathrm{e}^{\frac{19\pi}{12}\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$
4. Une forme exponentielle de i est $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$.

   Résoudre $z^2 = \mathrm{i}$ revient à résoudre $Z^2 = 1$ avec $Z = \frac{z}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}$.

   Les solutions de $Z^2 = 1$ sont -1 et 1.

   Donc $\frac{z}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} = -1 \Leftrightarrow z = -\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$

   ou $\frac{z}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} = 1 \Leftrightarrow z = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Les racines 2-ièmes de i sont donc $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 3 : Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Table des matières

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

1 Informations sur ce chapitre

Dans ce premier chapitre d'arithmétique, on étudie les trois points suivants du programme : la divisibilité dans $\mathbb{Z}$, la division euclidienne d'un entier relatif par un entier naturel non nul et les congruences. Le plan du cours reprend cet ordre et s'appuie sur les connaissances des élèves.
En effet, dans ce nouveau programme de lycée, une introduction de l'arithmétique est faite en classe de seconde. Ce cours s'inscrit donc dans cette continuité. Cependant, il a été décidé de reprendre certaines définitions essentielles afin que ce manuel puisse être une référence pour les élèves en regroupant tous les éléments à connaître en arithmétique. Les exercices du chapitre traitent de ces trois thèmes.
Certains élèves étant parfois déconcertés par l'arithmétique, le choix a été de fait de débuter par des exercices de calculs numériques afin de se familiariser avec les nouvelles notions introduites et d'avoir des exercices permettant de donner des méthodes de résolution aux élèves. Par la suite, les exercices sont de différents types : exercices plus théoriques, mais aussi exercices d'applications plus concrètes de l'arithmétique (codage, etc.), toujours construits de manière à travailler les différentes compétences mathématiques attendues par le programme : chercher, modéliser, calculer, représenter, raisonner et communiquer.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

1. Soient n et n' deux nombres pairs. Alors il existe deux entiers k et k' tels que $n = 2k$ et $n' = 2k'$. On a alors $n + n' = 2k + 2k' = 2(k + k')$.

   Or $k + k$' est un entier donc $n + n'$ est un multiple de 2. Ainsi, $n + n'$ est un nombre pair.

2. Soient n et n' deux nombres impairs. Alors il existe deux entiers k et k' tels que $n = 2k+1$ et $n' = 2k'+1$. On a alors $n \times n' = (2k+1)(2k'+1) = 4kk'+2k'+2k+1 = 2(2kk' + k + k') + 1$. Or $2kk' + k + k'$ est un entier, donc $n \times n'$ est impair.

3. On obtient les tableaux suivants.

$+$	Pair	Impair
Pair	Pair	Impair
Impair	Impair	Pair

$\times$	Pair	Impair
Pair	Pair	Pair
Impair	Pair	Impair

Corrigé exercice 2 :

1. $7 = 16 - 9 = 4^2 - 3^2$ et $11 = 36 - 25 = 6^2 - 5^2$.

2. Soit n un entier naturel impair. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Or $(k + 1)^2 - k^2 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = 2k + 1$. Donc $n = 2k + 1$ s'écrit bien comme la différence de deux carrés successifs.

Corrigé exercice 3 :

L'appel inconnue(a,b) indique si le nombre entier a est un multiple du nombre entier b.

Corrigé exercice 4 :

On a $2020 = 404 \times 5$ donc 2020 est bien divisible par 5.
On a $2020 = 202 \times 10$ donc 2020 est bien divisible par 10.
Par contre, $2020 = 3 \times 373 + 1$ donc 2020 n'est pas divisible par 3.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 5 :

Le nombre d'équipes est un diviseur de 60 et de 40. On recherche tout d'abord les diviseurs positifs de ces deux nombres : $D_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ et $D_{40} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$.
Les diviseurs positifs communs à 60 et 40 sont donc 1, 2, 4, 5, 10 et 20.
Or, on souhaite que les équipes soient composées au moins de 4 personnes et au plus de 10 personnes. On peut donc former soit 10 équipes (6 hommes et 4 femmes), soit 20 équipes (5 personnes par équipe : 3 hommes et 2 femmes).

Corrigé exercice 6 :

Soient quatre entiers consécutifs notés $n-1$, n, $n+1$ et $n+2$. On note S la somme de ces quatre entiers. On a alors $S = n - 1 + n + n + 1 + n + 2 = 4n + 2$.
On cherche donc n tel que $4n+2 = 2020$, soit $4n = 2018$. Or 2018 n'est pas divisible par 4, donc cette équation n'admet aucune solution entière. Ainsi, 2020 ne peut pas s'exprimer comme la somme de quatre nombres consécutifs.

Corrigé exercice 7 :

On pose, pour tout entier naturel non nul n, $U_n = 2^n + U_{n-1}$ avec $U_0 = 2$.
Pour tout entier naturel n, on note P_n la propriété "U_n est pair". On va démontrer par récurrence sur n que P_n est vraie.
Initialisation : La propriété est vraie pour $n = 0$ puisque $U_0 = 2$ est un entier pair.
Hérédité : On suppose qu'il existe un entier k tel que la propriété est vraie, c'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $U_k = 2p$.
Alors, $U_{k+1} = 2^{k+1} + U_k = 2^{k+1} + 2p$, par hypothèse de récurrence, d'où $U_{k+1} = 2(2^k + p)$, Ainsi, U_{k+1} s'écrit sous la forme $U_{k+1} = 2p'$, où $p' = (2^k + p)$ est un entier.
Donc la propriété est bien vraie au rang $k + 1$.
Conclusion : On a montré que la propriété était vraie au rang 0, puis que si il existe un entier k tel que P_k est vraie, alors P_{k+1} est également vraie. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout n entier naturel, U_n est pair.

Corrigé exercice 8 :

1. Soit n un entier. Procédons par disjonction de cas.

   Cas n°1 : n est pair.

   On peut alors écrire $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On a alors $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Donc n^2 est de la forme $2k'$, avec $k' = 2k^2$ entier, d'où, en conclusion, n^2 est pair.

   Cas n°2 : n est impair.

   On peut alors écrire $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On a alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ donc n^2 est impair.

   Par ailleurs, d'après ce qu'on a montré, si n^2 est pair, alors n l'est également et si n^2 est impair, alors n l'est également.

   En conclusion, on vient de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n et n^2 ont même parité.

Document sous licence libre Creative Commons

2. Supposons par l'absurde qu'il existe deux entiers a et b, avec $b \neq 0$, tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Quitte à la simplifier, on suppose que la fraction est irréductible.

3. a. $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$. Donc a^2 est pair.
D'après la question précédente, on en déduit que a est pair.

   b. a est pair donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$. L'égalité $a^2 = 2b^2$ donne $(2k)^2 = 2b^2$, soit $b^2 = 2k^2$. Ainsi, b^2 est pair, d'où b est pair.

   c. On aboutit donc à une contradiction. En effet, on a supposé que la fraction $\frac{a}{b}$ était non simplifiable. Or, on vient de montrer que 2 divise à la fois a et b. Il n'existe donc pas d'entiers a et b premiers entre eux tels $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. On peut alors en conclure que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, et donc qu'il est irrationnel.

Document sous licence libre Creative Commons

3 Activités

3.1 Activité A : Multiples et diviseurs

Questions :

1. On recherche les multiples de 3 inférieurs à 40. Ces multiples sont 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36 et 39. Il peut donc y avoir 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37 ou 40 marches dans cet escalier.

   De même, on cherche les multiples de 2 inférieurs à 40. Ces multiples sont les nombres pairs inférieurs à 40. Ainsi, les nombres possibles de marches sont, dans ce cas, les nombres impairs compris entre 3 et 39 (compris).

   En prenant l'intersection des ces deux ensembles, on en déduit que l'escalier peut compter 7, 13, 19, 25, 31 ou 37 marches.

2. On complète le programme Python comme ci-dessous.

```
from math import*
def multcom (a,b,d):
    c1=floor(d/a)
    c2=floor(d/b)
    l1=[]
    l2=[]
    for i in range(1,c1+1):
        l1.append(i*a)
    for i in range(1,c2+1):
        l2.append(i*b)
    return(l1,l2)
```

   On retrouve les résultats de la question 1. en entrant la commande mult(3,2,40).

3. a. Les diviseurs positifs de 36 sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36.

   b. Louis étant sur la première marche de l'escalier, il lui reste exactement 36 marches à gravir. Louis peut donc monter les marches une par une (dans ce cas-là, il monte l'escalier en 36 enjambées), deux par deux (dans ce cas-là, il monte l'escalier en 18 enjambées), trois par trois (dans ce cas-là, il monte l'escalier en 12 enjambées) ou bien quatre par quatre (et, dans ce cas-là, il monte l'escalier en 9 enjambées).

4. a. 25 est un diviseur de 125.

   b. 312 est un multiple de 26.

   c. On peut noter $5 \mid 75$.

Bilan :

On dit que a divise b, et on note $a \mid b$, lorsque b est un multiple de a, c'est-à-dire lorsqu'il existe un entier k tel que $b = ka$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

3.2 Activité B : À la bonne heure !

Questions :

1. a. L'horloge H_1 avance de 1 minute chaque heure donc, lorsque la grande aiguille effectue un tour complet, il s'est en réalité écoulé 59 minutes.

   b. L'horloge H_2 retarde de 2 minutes donc, lorsque la grande aiguille effectue un tour complet, il s'est écoulé 62 minutes.

2. On note q le nombre de tours et n le nombre de minutes écoulées.

3. a. Il s'écoule 59 minutes lorsque la grande aiguille de l'horloge H_1 effectue un tour. Il s'écoule donc $59q$ minutes lorsque cette grande aiguille effectue q tours. De plus, cette aiguille se trouve sur le 7 : 35 minutes se sont donc écoulées en plus. On en déduit que $n = 59q + 35$.

   b. On procède de même pour l'horloge H_2, ce qui nous donne $n = 62q + 5$. Or, d'après la question précédente, on a aussi $n = 59q + 35$, d'où $59q + 35 = 62q + 5$ soit $30 = 3q$ et donc $q = 10$. On en déduit donc que les horloges ont effectué 10 tours, et on obtient alors que $n = 62 \times 10 + 5 = 625$ minutes. Ainsi 625 minutes se sont écoulées, soit 10 heures et 25 minutes.

4. a. Si a et b sont deux entiers naturels, avec $b \neq 0$, effectuer la division euclidienne de a par b revient à déterminer les entiers q et r tels que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.

   b. On a $142 = 23 \times 6 + 4$.

5. $-142 = -23 \times 6 - 4 = -23 \times 6 + 23 - 23 - 4 = -23 \times 7 + 19$

Bilan :

Pour a et b deux entiers naturels, avec $b \neq 0$, effectuer la division euclidienne de a par b revient à déterminer les entiers q et r tels que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.
De même, si a et b sont deux entiers relatifs, avec $b \neq 0$, effectuer la division euclidienne de a par b revient à déterminer les entiers q et r tels que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.

3.3 Activité C : La magique « preuve par 9 »

Questions :

1. a. On a $28 = 9 \times 3 + 1$ et $13 = 9 \times 1 + 4$.

   b. $28 \times 13 = (9 \times 3 + 1)(9 \times 1 + 4) = 9(9 \times 3 + 1 + 12) + 4$. Or $0 \leqslant 4 < 9$, donc le reste de la division euclidienne de 28×13 par 9 est 4.

   c. $341 = 9 \times 37 + 8$. Or $0 \leqslant 8 < 9$, donc le reste de la division euclidienne de 341 par 9 est 8. Ainsi, 28×13 et 341 n'ont pas le même reste pas la division euclidienne, donc ces deux nombres ne peuvent pas être égaux.

2. a. Comme on peut écrire $457 = 50 \times 9 + 7$, et comme $0 \leqslant 7 < 9$, le reste de la division de 457 par 9 vaut 7.

   De même, $16 = 9 \times 1 + 7$ donc le reste de la division euclidienne de 16 par 9 vaut 7. Ainsi, 457 et 16 ont le même reste dans la division euclidienne par 9.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

b. $128 = 14 \times 9 + 2$ donc $128 \equiv 2[9]$ et $2 = 0 \times 9 + 2$, donc 128 et 2 ont le même reste dans la division euclidienne par 9. Ainsi, $128 \equiv 2[9]$.

c. Pour 123 et 101 : Le reste de la division euclidienne de 123 par 9 est 6. Le reste de la division euclidienne de 101 par 9 est 2. Ces deux nombres n'ont pas le même reste dans la division euclidienne par 9. Ainsi, 123 et 101 ne sont pas congrus modulo 9.

Pour 2 365 et 7 : Le reste de la division euclidienne de 2 365 par 9 est 7. Le reste de la division euclidienne de 7 par 9 est également 7. Donc $2365 \equiv 7|9]$.

Pour 1 234 et 19 : Le reste de la division euclidienne de 1 234 par 9 est 1. Le reste de la division euclidienne de 19 par 9 est 1. Ces deux nombres ont le même reste dans la division euclidienne par 9. Ils sont donc congrus modulo 9 : $1234 \equiv 19|9]$.

Pour 289 et 11 : Le reste de la division euclidienne de 289 par 9 est 1. Le reste de la division euclidienne de 11 par 9 est 2. Ces deux nombres n'ont pas le même reste dans la division euclidienne par 9. Ils ne sont donc pas congrus modulo 9.

3. a. $x \equiv a[9]$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 9k + a$. De même, $y \equiv b[9]$ donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 9k' + b$. D'où $x + y = 9(k + k') + a + b$ et donc $x + y \equiv a + b[9]$.

   b. De même, on a $x \times y = (9k + a)(9k' + b) = 9(9kk' + ak' + bk) + ab$ donc $xy \equiv ab[9]$.

4. a. On a d'une part $2635 \equiv 7[9]$ et $1271 \equiv 2[9]$, donc $2635 + 1271 \equiv 9[9]$. Et, d'autre part, $3806 \equiv 8[9]$. Le résultat proposé par l'élève est donc faux.

   b. On a, d'une part, $457 \equiv 7[9]$ et $128 \equiv 2[9]$ donc $457 \times 128 \equiv 5[9] \equiv [9]$. Et, d'autre part, $58396 \equiv 4[9]$. Le résultat proposé par l'élève est donc faux.

5. a. On a, d'une part, $1235 \equiv 2[9]$ et $151 \equiv 7[9]$ donc $1235 \times 151 \equiv 14 \equiv 5[9]$. D'autre part, $184685 \equiv 5[9]$ donc la preuve par 9 ne contredit pas le résultat erroné de l'élève.

   b. La preuve par 9 ne permet pas de vérifier avec exactitude le résultat obtenu.

Bilan :

$a \equiv b[n]$ lorsque a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.
L'addition dans $\mathbb{Z}$ est compatible avec la relation de congruence.
La multiplication dans $\mathbb{Z}$ est compatible avec la relation de congruence.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 9 :

D'une part $(n-4)|(7n+2)$, d'autre part $(n-4)|(n-4)$, donc $n-4$ divise toute combinaison linéaire de $7n+2$ et de $n-4$. En particulier, $n-4$ divise $(7n+2)-7(n-4) = 30$.

Réponse : d

Corrigé exercice 10 :

La division euclidienne de a par b s'écrit $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.
Ainsi, $1887 = 45 \times 41 + 42$ est la division euclidienne de 1887 par 45.
41 est alors le quotient de cette division euclidienne et 42 le reste.
La réponse a. ne convient pas, car $42 > 41$ et le reste d'une division euclidienne doit être inférieur à son diviseur. La réponse b. ne convient pas car 1887 est divisible par 45 si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de 1887 par 45 est nul. Mais ici, ce reste s'élève à 42.
Enfin, la réponse d. ne convient pas car $1887 = 41 \times 46 + 1$, ainsi la partie entière de $\dfrac{1887}{41}$ est 46.

Réponse : c

Corrigé exercice 11 :

On a $23512 = 5 \times 4702 + 2$ donc $23512 \equiv 2\,[5]$. Ainsi, $23512^4 \equiv 2^4\,[5]$. Or $2^4 = 16$, d'où $2^4 \equiv 1\,[5]$. Et donc, par transitivité de la congruence, $23512^4 \equiv 1\,[5]$.

Réponse : c

Corrigé exercice 12 :

Comme $ab \equiv 0\,[m]$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ab = mk$ et donc $m|ab$. Donc la réponse d. est vraie.
Les autres réponses ne conviennent pas.
En effet, $14 \times 2 \equiv 0\,[4]$, mais 4 ne divise ni 14, ni 2 (on élimine ainsi les réponses a. et c.) et aucun de ces deux entiers n'est nul (on élimine ainsi la réponse b.).

Réponse : d

Corrigé exercice 13 :

Les réponses a. et c. ne conviennent pas. En effet, si $n = 2$, alors $n(4n^2-1) = 30$ et 30 n'est divisible ni par 2, ni par 7.
Pour étudier la divisibilité de $n(4n^2-1)$ par 3, étudions un tableau de congruence modulo 3.
Pour tout entier naturel n, on a $n(4n^2-1) = n(2n-1)(2n+1)$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

$n \equiv ...\,[3]$	0	1	2
$2n-1 \equiv ...\,[3]$	-1	1	3
$2n+1 \equiv ...\,[3]$	1	3	5
$n(4n^2-1) \equiv ...\,[3]$	$0 \times (-1) \times 1 \equiv 0$	$1 \times 1 \times 3 \equiv 0$	$2 \times 3 \times 5 \equiv 0$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $n(4n^2-1) \equiv 0\,[3]$. Donc $n(4n^2-1)$ est divisible par 3, et, par conséquent, $n(4n^2-1)$ est divisible aussi par -3.

Réponses : b et d

Corrigé exercice 14 :

On dresse un tableau de congruence modulo 7

$x \equiv ...\,[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$4x \equiv ...\,[7]$	0	4	$8 \equiv 1$	$12 \equiv 5$	$16 \equiv 2$	$20 \equiv 6$	$24 \equiv 3$

Ainsi, $4x \equiv 3\,[7]$ si, et seulement si, $x \equiv 6\,[7]$ c'est-à-dire si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 6 + 7k$. Donc la réponse c. convient. De plus, $6 \equiv -1\,[7]$ donc la réponse d. convient également.

Réponses : c et d

Corrigé exercice 15 :

La réponse b. convient d'après la propriété sur la compatibilité de la congruence avec les puissances.
La réponse c. convient aussi car si a est congru à b modulo m, alors m divise $(a-b)$, ce qui équivaut à dire que m divise $(b-a)$, et donc que $b-a$ est un multiple de m.
La réponse a. ne convient pas : on a $8 \equiv 3[5]$ mais $8^2 \equiv 64[25] \equiv 14[25]$, qui n'est pas congru à 9 modulo 25.
La réponse d. ne convient pas : on a $10 \equiv 2[8]$ mais 5 n'est pas congru à 1 modulo 8.

Réponses : b et c

Corrigé exercice 16 :

La réponse a. ne convient pas. Prenons comme contre-exemple $n = -1$. On a dans ce cas $7^{-2} - 387^{-1} = \dfrac{1}{49} - \dfrac{1}{387}$, qui n'est pas un entier.
Soit maintenant n un entier naturel. On a, d'une part, $7^{2n} = 49^n$ et $49 \equiv 10\,[13]$, donc $49^n \equiv 10^n\,[13]$, et, d'autre part, $387 \equiv 10\,[13]$, donc $387^n \equiv 10^n\,[13]$.
Ainsi, $7^{2n} - 387^n \equiv 10^n - 10^n\,[13]$, soit $7^{2n} - 387^n \equiv 0\,[13]$.
On en déduit ainsi que, pour tout entier naturel n, $7^{2n} - 387^n$ est divisible par 13. Et, a fortiori, ce résultat est donc aussi vrai pour tous les entiers naturels pairs et tous les entiers naturels impairs supérieurs à 1.

Réponses : b, c et d

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 17 :

1. a. On a $3^1 \equiv 3[7]$, $3^2 \equiv 2[7]$, $3^3 \equiv 6[7]$, $3^4 \equiv 4[7]$, $3^5 \equiv 5[7]$ et $3^6 \equiv 1[7]$.

   b. Soit n un entier naturel. On a alors $3^{n+6} = 3^n \times 3^6$ donc $3^{n+6} \equiv 3^n \times 3^6[7]$. Or $3^6 \equiv 1[3]$ donc $3^{n+6} \equiv 3^n[3]$.

   c. $2019 \equiv 3[6]$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3^{2019} \equiv 3^{6k+3}$. Or $3^{6k} \equiv 1[7]$ donc $3^{2019} \equiv 3^3[7]$, c'est-à-dire $3^{2019} \equiv 6[7]$. Le reste de la division euclidienne de 3^{2019} par 7 vaut donc 6.

   d. Reste dans la division par 7 de 3^n.
   Pour $n = 6k$, on a $3^{6k} \equiv 1[7]$ donc le reste est 1.
   Pour $n = 6k+1$, on a $3^{6k+1} \equiv 1 \times 3[7]$ donc le reste est 3.
   Pour $n = 6k+2$, on a $3^{6k+2} \equiv 1 \times 2[7]$ donc le reste est 2.
   Pour $n = 6k+3$, on a $3^{6k+3} \equiv 1 \times 6[7]$ donc le reste est 6.
   Pour $n = 6k+4$, on a $3^{6k+4} \equiv 1 \times 4[7]$ donc le reste est 4.
   Pour $n = 6k+5$, on a $3^{6k+5} \equiv 1 \times 5[7]$ donc le reste est 5.

   e. Le reste n'étant jamais nul, 3^n n'est pas divisible par 7 quelle que soit la valeur de n.

2. a. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 1. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 \times \dfrac{(1-3^n)}{1-3} = \dfrac{1}{2}(3^n - 1)$.

   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est une somme d'entiers, donc u_n est un entier. De plus, pour tout $n \in$, $2u_n = 3^n - 1$.
   Ainsi, si 7 divise u_n, alors 7 divise $2u_n$, et donc 7 divise $3^n - 1$.
   On construit un tableau de congruence modulo 7.

$n \equiv \ldots [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$3^n \equiv \ldots [7]$	1	3	2	6	4	5	1
$3^n - 1 \equiv \ldots [7]$	0	2	1	5	3	4	0

   On obtient alors que $3^6 \equiv 1[7]$ et donc que $3^n - 1 \equiv 0[7]$ si, et seulement si, $n \equiv 0[6]$.
   Ainsi, $2u_n$ est divisible par 7 si, et seulement si, $n \equiv 0[6]$.
   Pour conclure, construisons une table de congruence modulo 7 de $2x$:

$x \equiv \ldots [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$2x \equiv \ldots [7]$	0	2	4	6	1	3	5

   Ainsi, $2x$ est divisible par 7 si, et seulement si, x est divisible par 7.
   En conclusion, 7 divise u_n si, et seulement si, 7 divise $2u_n$ si, et seulement si, $n \equiv 0[6]$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{1}{2}(5^n - 1) - \dfrac{1}{2}(3^n - 1) = \dfrac{1}{2}(5^n - 3^n)$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n \equiv (-1)^n[4]$ et $5^n \equiv 1^n[4]$ donc w_n est divisible par 4 si n est impair.

Document sous licence libre Creative Commons
cc BY NC SA

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1

Méthode 1

Étude théorique

1. Par définition, pour tout $k \in \mathbb{N}$, q_{k+1} est la partie entière du quotient de q_k par b. Ainsi, pour tout entier naturel k, $q_{k+1} \leqslant q_k$. La suite (q_n) est donc bien décroissante.

   Supposons par l'absurde que (q_n) soit strictement décroissante.

   On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $q_k \in \mathbb{N}$ donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $q_{k+1} \leqslant q_k - 1$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $q_k \leqslant q_0 - k$. Or, $\lim\limits_{k \to +\infty} q_0 - k = -\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{k \to +\infty} q_k = -\infty$. Mais, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $q_k \in \mathbb{N}$, donc la suite (q_n) est minorée par 0. La suite (q_n) est donc une suite minorée par 0 et tendant vers $-\infty$. C'est absurde. On en déduit que la suite (q_n) n'est pas strictement décroissante.

   La suite (q_n) est décroissante mais pas strictement décroissante : elle est constante à partir d'un certain rang. Il existe donc un rang n_0 tel que, pour tout $k > n_0$, $q_k = 0$.

2. On a $n = bq_0 + r_0$ et $q_0 = bq_1 + r_1$, d'où $n = b(bq_1 + r_1) + r_0 b^2 \times q_1 + b \times r_1 + r_0$.

   En continuant de la même façon, on obtient $n = b^2 \times (bq_2 + r_2) + b \times r_1 + r_0 = b^3 \times q_2 + b^2 \times r_2 + b \times r_1 + r_0$.

   On procède ainsi jusqu'au rang n_0 pour lequel, pour la première fois, $q_{n_0} = 0$.

   On a alors $n = b^{n_0} \times q_{n_0 - 1} + ... + b^2 \times r_2 + b \times r_1 + r_0$ avec $q_{n_0-1} = bq_{n_0} + r_{n_0} = r_{n_0}$.

   Donc $n = b^{n_0} \times r_{n_0} + ... + b^2 \times r_2 + b \times r_1 + r_0$, c'est-à-dire $n = \overline{r_{n_0}...r_2r_1r_1}^b$.

   L'unicité de cette écriture du nombre n en base b provient de l'unicité de la division euclidienne.

Programmation

1. Le programme ci-dessous, par exemple, fonctionne.

```python
def basesept(n):
    q = n
    L = []
    while q!=0:
        r=q%7
        L.append(r)
        q=q//7
    L.reverse()
    print('Le nombre ',n,' écrit en base 7 est : ',L)
```

2. Le programme ci-dessous, par exemple, fonctionne.

Document sous licence libre Creative Commons

```
def base(n,b):
    q = n
    L = []
    while q!=0:
        r=q%b
        L.append(r)
        q=q//b
    L.reverse()
    print('Le nombre ',n,' écrit en base ',b, ' est : ',L)
```

Méthode 2

1. a. On entre en B2 la formule = ENT(A2/7), en C2 la formule = MOD(A2 ;7) et en A3 la formule = B2.

   b. On obtient le résultat ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F
1	Dividende	Quotient	Valeur de a_i en base b	Puissance i de b		Valeur de la base
2	543	77	4	0		7
3	77	11	0	1		
4	11	1	4	2		
5	1	0	1	3		
6						

   c. On a donc $543 = \overline{1404}^7$.

2. Pour obtenir l'écriture en base b d'un nombre n, on entre en B2 la formule = ENT(A2/\$F\$2) et en C2 la formule = MOD(A2 ;\$F\$2).

   On obtient alors les résultats suivants.

	A	B	C	D	E	F
1	Dividende	Quotient	Valeur de a_i en base b	Puissance i de b		Valeur de la base
2	543	67	7	0		8
3	67	8	3	1		
4	8	1	0	2		
5	1	0	1	3		
6						

Document sous licence libre Creative Commons

	A	B	C	D	E	F
1	Dividende	Quotient	Valeur de a_i en base b	Puissance i de b		Valeur de la base
2	543	271	1	0		2
3	271	135	1	1		
4	135	67	1	2		
5	67	33	1	3		
6	33	16	1	4		
7	16	8	0	5		
8	8	4	0	6		
9	4	2	0	7		
10	2	1	0	8		
11	1	0	1	9		
12						

Ainsi, on en déduit que $543 = \overline{1037}^8$ et $543 = \overline{1000011111}^2$.

5.2 Corrigé du TP 2

Questions préliminaires

1. Si $U_0 = 4$ alors $U_1 = 2$ et $U_2 = 1$. On aboutit donc bien sur cette séquence.

   Si $U_0 = 2$ alors $U_1 = 1$, $U_2 = 4$, $U_3 = 2$ et $U_1 = 1$. On aboutit bien sur cette séquence.

   Si $U_0 = 1$ alors $U_1 = 4$, $U_2 = 2$ et $U_3 = 1$. On aboutit donc bien sur cette séquence.

2. Si $U_0 = 17$ alors on obtient les étapes suivantes.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1

3. a. Soit p tel que $U_p \equiv 0[3]$. Procédons par disjonction de cas.

   Cas n° 1 : On a $U_p = \dfrac{1}{2}U_{p-1}$. D'où $U_{p-1} = 2U_p$ avec $U_p \equiv 0[3]$ donc $2U_p \equiv 0[3]$ d'où $U_{p-1} \equiv 0[3]$.

   Cas n°2 : On a $U_p = 3U_{p-1} + 1$. Or on a supposé que $U_p \equiv 0[3]$, donc on a $3U_{p-1} \equiv 2[3]$. Ce qui est impossible puisque $3U_{p-1}$ est forcément divisible par 3.

   Ainsi, en conclusion, si on a p tel que $U_p \equiv 0[3]$ alors $U_{p-1} \equiv 0[3]$.

   b. Soit p tel que U_p est un multiple de trois. D'après la question a. on a alors que U_{p-1}, U_{p-2}, U_{p-3}, $\ldots$ et U_1 sont aussi des multiples de 3 et, de plus que $U_p = \dfrac{1}{2}U_{p-1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}U_{p-2} = \ldots = \left(\dfrac{1}{2}\right)^p U_0$.

Méthode 1

On doit saisir en B3 la formule = SI(MOD(B2 ;2)=0 ;B2/2 ;3*B2+1).

Document sous licence libre Creative Commons

Méthode 2

On complète le programme Python comme ci-dessous.

```
def syracuse(u):
  L = [u]
  while u != 1 :
    if u%2 == 0 :
      u = u/2
      L.append(u)
    else :
      u = 3*u+1
      L.append(u)
  print(L)
```

Document sous licence libre Creative Commons

6 Travailler les automatismes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 18 :

On a $14a+20b = 2\times(7a+10b)$ donc, pour tous a et b entiers, $14a+20b$ est un multiple de 2. Or, 2019 est impair. Donc il ne peut pas exister deux entiers a et b tels que $14a+20b = 2019$.

Corrigé exercice 19 :

1. 12 est un diviseur de 24.
2. 50 est un multiple de 5.
3. 284 est un diviseur de 852.
4. 3 est un diviseur de 231.
5. 10 est diviseur de 100.
6. 0 est multiple de 37.
7. 8 est un diviseur de 0.
8. –4 est un diviseur (et un multiple) de 4.

Corrigé exercice 20 :

1. On a $337 = 27\times 12+13$ et $0 \leqslant 13 < 27$ est la division euclidienne de 337 par 27. Donc le reste de la division euclidienne de 337 par 27 est 13.
2. On a $337 = 27\times 12+13$ donc $337 = 28\times 12+1$ et $0 \leqslant 1 < 12$. Le reste de la division euclidienne de 337 par 12 est donc 1.

Corrigé exercice 21 :

1. On a $1013 = 125\times 8+13$ et $0 \leqslant 13 < 125$. Donc le reste de la division euclidienne de 1013 par 125 est 13 et le quotient est 8.
2. $1013 = 125\times 8+8+5$ donc $1013 = 8\times 126+5$ et $0 \leqslant 5 < 8$. Donc le reste de la division euclidienne de 1013 par 8 est 5 et le quotient est 126.
3. $-1013 = -125\times 8-13 = 125\times(-9)+112$ et $0 \leqslant 112 < 125$ est la division euclidienne de –1013 par 125. D'où le reste de la division de –1013 par 125 est 112 et le quotient est –9.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 22 :

1. $1027 = 253 \times 4 + 15$ est la division euclidienne de 1027 par 253. Donc le reste de la division euclidienne de 1027 par 253 est 15 et le quotient est 4.

2. $1027 = 253 \times 4 + 3 \times 4 + 3$ donc $1027 = 256 \times 4 + 3$ et $0 \leqslant 3 < 4$. Ainsi, le reste de la division euclidienne de 1027 par 4 est 3 et le quotient est 256.

3. $-1027 = -256 \times 4 - 3$ donc $-1027 = -257 \times 4 + 1$ et $0 \leqslant 1 < 4$. Ainsi, le reste dans la division euclidienne de –1027 par 4 est 1 et le quotient est –257.

Corrigé exercice 23 :

La division euclidienne de 351 par 10 s'écrit $351 = 35 \times 10 + 1$ (on a bien $0 \leqslant 1 < 10$).
Donc $351 = 10 \times 35 + 1 - 35 + 35 = 11 \times 35 - 34 = 11 \times 31 + 10$ et $0 \leqslant 10 < 11$.
On peut en conclure que dans le reste dans la division euclidienne de 351 par 11 est 10 et le quotient est 31.

Corrigé exercice 24 :

1. $n = 12k + 7$ est la division euclidienne de n par 12 car $0 \leqslant 7 < 12$. Donc le reste de la division de n par 12 est 7 et le quotient est k.

2. $n = 4 \times (3k) + 6 + 1 = 3(4k + 2) + 1$ et $0 \leqslant 1 < 3$. Donc le reste de la division euclidienne de n par 3 est 1 et le quotient est $4k + 2$.

Corrigé exercice 25 :

Les entiers supérieurs à 27, inférieurs à 100 et congrus à 2 modulo 5 sont de la forme $n = 27 + 5k$ avec k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant 14$. Une autre possibilité, parmi d'autres, est l'ensemble des nombres de la forme $n = 5k + 2$ avec k entier tel que $5 \leqslant k \leqslant 19$.

6.2 Exercices

Corrigé exercice 26 :

1. L'ensemble des diviseurs positifs de 38 est $D_{38} = \{1; 2; 19; 38\}$.

2. L'ensemble des diviseurs positifs de 30 est $D_{30} = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$.

3. Les diviseurs positifs communs à 20 et 38 est donc 1 et 2.

Corrigé exercice 27 :

L'ensemble des diviseurs de 12 est $D_{12} = \{-1; -2; -3; -4; -6; -12; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.
L'ensemble des diviseurs de 50 est $D_{50} = \{-1; -2; -10; -5; -25; -50; 1; 2; 10; 5; 25; 50\}$.
Les diviseurs communs de 12 et 50 sont donc -1, -2, 1 et 2.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 28 :

1. Les diviseurs positifs stricts de 220 sont 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 et 110.

   Les diviseurs positifs stricts de 284 sont 1, 2, 4, 71 et 142.

   On a, d'une part, $1+2+4+71+142=220$ et, d'autre part, $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$.

   Donc 220 et 284 sont bien des nombres amicaux.

2. La somme des diviseurs positifs de 48 vaut$S=1+2+4+8+16+3+6+12+24+48=124$. La somme des diviseurs positifs de 75 vaut $S'=1+5+25+3+15+75=124$.

   La somme des diviseurs positifs de ces deux nombres est égale.

Corrigé exercice 29 :

1. $x^2-y^2=12$ équivaut à $(x-y)(x+y)=12$. On cherche des solutions positives. Ainsi, $x+y$ est positif, tout comme $x-y$ d'après la règle des signes. On commence donc par étudier l'ensemble des diviseurs positifs de 12, qui est $D_{12}=\{1;2;3;4;6;12\}$.

   De plus, $x\in\mathbb{N}$ et $y\in\mathbb{N}$ donc $0\leqslant x-y\leqslant x+y$. Les solutions sont donc les solutions des systèmes : $\begin{cases}x-y=1\\x+y=12\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=2\\x+y=6\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=3\\x+y=4\end{cases}$.

   Or $\begin{cases}x-y=1\\x+y=12\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}x=\dfrac{13}{2}\\y=12-\dfrac{13}{2}\end{cases}$, $\begin{cases}x-y=2\\x+y=6\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$

   et $\begin{cases}x-y=3\\x+y=4\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}x=\dfrac{7}{2}\\y=4-\dfrac{7}{2}\end{cases}$.

   Le premier et le dernier système n'admettant pas de solutions entières, l'équation $x^2-y^2=12$ admet un unique couple solution dans $\mathbb{N}^2$: $(4;2)$.

2. $x^2-y^2=-15$ équivaut à $y^2-x^2=15$, ce qui est équivalent à $(y-x)(y+x)=15$. On cherche des solutions positives. Ainsi, $x+y$ est positif, tout comme $x-y$ d'après la règle des signes. On commence donc par étudier l'ensemble des diviseurs positifs de 15, qui est $D_{15}=\{1;3;5;15\}$.

   De plus, comme x et y sont entiers, alors $0\leqslant y-x\leqslant x+y$.

   Les solutions sont donc les solutions des systèmes : $\begin{cases}y-x=1\\y+x=15\end{cases}$ ou $\begin{cases}y-x=3\\y+x=5\end{cases}$.

   Or $\begin{cases}y-x=1\\y+x=15\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}y=8\\x=7\end{cases}$ et $\begin{cases}y-x=3\\y+x=5\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}y=4\\x=1\end{cases}$.

   Donc les solutions sur $\mathbb{N}^2$ de l'équation $x^2-y^2=-15$ sont $(1;4)$ et $(7;8)$.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 30 :

1. D'après l'énoncé, 6 divise $n+5$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n+5=6k$. Donc les entiers n recherchés sont ceux de la forme $n=6k-5$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. D'après la question précédente, ces entiers n sont ceux de la forme $n=6k-5$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On cherche désormais k tel que $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $6k-5 \geq 0$, soit $k \geq \frac{5}{6}$ avec k entier soit $k \geq 1$. Ainsi, ces entiers naturels n sont de la forme $n=6k-5$ avec $k \geq 1$.

Corrigé exercice 31 :

1. Si $2n-7$ divise 5, alors $2n-7$ est un diviseur de 5 et donc $2n-7$ est un élément de l'ensemble $D_5 = \{-1;-5;1;5\}$. Les valeurs possibles de n sont donc :

   $2n-7=-1 \Leftrightarrow 2n=6 \Leftrightarrow n=3$

   $2n-7=-5 \Leftrightarrow 2n=2 \Leftrightarrow n=1$

   $2n-7=1 \Leftrightarrow 2n=8 \Leftrightarrow n=4$

   $2n-7=5 \Leftrightarrow 2n=12 \Leftrightarrow n=6$

   Les valeurs possibles de n sont donc 3, 1, 4 et 6.
2. De même, si $n+4$ divise 6, alors $n+4$ appartient à l'ensemble :

   $D_6 = \{-1;-2;-3;-6;1;2;3;6\}$.

   Les valeurs possibles de n sont donc –10, –7, –6, –5, –3, –2, –1 et 2.

Corrigé exercice 32 :

D'une part, $2n+5 \mid n-2$ et, d'autre part, $2n+5 \mid 2n+5$. Donc $2n+5$ divise toute combinaison linéaire de ces deux nombres. En particulier, $2n+5 \mid [2n+5-2(n-2)]$ donc $2n+5 \mid 9$.
Les solutions éventuelles sont des diviseurs de 9.
Les diviseurs de 9 sont $D_9 = \{-1;-3;-9;1;3;9\}$. Or $2n+5 \in \mathbb{N}$ car $n \in \mathbb{N}$, donc $2n+5$ est un diviseur positif de 9.
$2n+5=1 \Leftrightarrow n=-2$ mais n doit être un entier naturel donc –2 ne peut être solution.
$2n+5=3 \Leftrightarrow n=-1$ mais n doit être un entier naturel donc –1 ne peut être solution.
$2n+5=9 \Leftrightarrow n=2$.
Réciproquement, si $n=2$, on a $2n+5=9$ et $n-2=0$. Enfin, $9 \mid 0$ donc 2 est bien solution du problème.
En conclusion, le seul nombre n tel que $2n+5 \mid n-2$ est $n=2$.

Corrigé exercice 33 :

D'une part, $4n+1 \mid n-3$ et, d'autre part, $4n+1 \mid 4n+1$. Donc $4n+1$ divise toute combinaison linéaire de$n-3$ et $4n+1$. En particulier, $4n+1 \mid [4n+1-4(n-3)]$ donc $4n+1 \mid 13$.
Les éventuelles solutions sont donc les diviseurs de 13 : $D_{13} = \{-1,-13,1,13\}$.
De plus, $4n+1 \in \mathbb{N}$ car $n \in \mathbb{N}$, donc $4n+1$ est un diviseur positif de 13.
Donc soit $4n+1=1$ donc $n=0$, soit $4n+1=13$ donc $n=3$.

Document sous licence libre Creative Commons
cc BY NC SA

Réciproquement, si $n = 0$, on a $4n + 1 = 1$ et $n - 3 = -3$. Or $1 \mid -3$ donc 0 est bien solution. De même, si $n = 3$, on a $4n + 1 = 13$ et $n - 3 = 0$. Or $13 \mid 0$ donc 3 est bien solution.
En conclusion, les solutions de ce problème sont $n = 0$ et $n = 3$.

Corrigé exercice 34 :

1. Pour tout $n \neq 1$, $an + b + \dfrac{c}{n-1} = \dfrac{an^2 + (-a+b)n + (-b+c)}{n-1}$.

   Par identification, on a $\begin{cases} a = 1 \\ -a + b = 3 \\ -b + c = -2 \end{cases}$, soit $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 + a = 4 \\ c = -2 + b = 2 \end{cases}$.

   En conclusion, pour tout $n \neq 1$, $f(n) = n + 4 + \dfrac{2}{n-1}$.

2. $f(n)$ est un entier si, et seulement si, $n - 1 \mid 2$. Or les diviseurs de 2 sont –1, –2, 1 et 2.

   Donc $f(n)$ est un entier si, et seulement si, $n - 1 = -1$ ou $n - 1 = -2$ ou $n - 1 = 1$ ou $n - 1 = 2$ si, et seulement si, $n = 0$ ou $n = -1$ (impossible car n est un entier naturel) ou $n = 2$ ou $n = 3$.

   Ainsi, $f(n)$ est un entier si, et seulement si, $n = 0$, $n = 2$ ou $n = 3$.

Corrigé exercice 35 :

On recherche les couples d'entiers naturels tels que $(x - 4)(y + 3) = 4$.
Les diviseurs de 4 sont –1, –2, –4, 1, 2 et 4. De plus, y est un entier naturel donc $y+3 > 0$, et comme $(x-4)(y+3) = 4$, alors $x-4$ et $y+3$ sont de même signe. Donc $x-4$ est également positif. Donc $(x - 4)(y + 3) = 4$ si, et seulement si, $\begin{cases} x - 4 = 1 \\ y + 3 = 4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - 4 = 4 \\ y + 3 = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - 4 = 2 \\ y + 3 = 2 \end{cases}$ si, et seulement si, $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 8 \\ y = -2 \end{cases}$ (impossible car y doit être positif) ou $\begin{cases} x = 6 \\ y = -1 \end{cases}$ (impossible car y doit être positif).
Ainsi, en conclusion, l'équation $(x - 4)(y + 3) = 4$ n'admet qu'un seul couple d'entiers naturels solution : $(5; 1)$.

Corrigé exercice 36 :

Soient x et y deux entiers naturels vérifiant $x + y = xy$.
On a, d'une part, $x \mid xy$. Mais comme $xy = x + y$, alors on a $x \mid x + y$. Ainsi, $x \mid x$ et $x \mid x + y$ donc x divise toute combinaison linéaire de x et $x + y$, d'où $x|(x + y - x)$. Ainsi, $x \mid y$.
D'autre part, on a $y \mid xy$, ce qui nous permet de montrer, de la même manière, que $y \mid x$.
On vient donc de montrer que $x \mid y$ d'une part, et, d'autre part, $y \mid x$.
Comme x et y sont tous les jeux positifs, on en déduit que $x = y$.
Ainsi, l'équation se réécrit $2x = x^2$, dont les solutions sont 0 et 2.

Document sous licence libre Creative Commons

Réciproquement, si $x = 0$ et $y = 0$, l'égalité est bien vérifiée, donc $(0; 0)$ est bien solution.
Si $x = 2$ et $y = 2$, alors $2 + 2 = 2 \times 2$, donc $(2; 2)$ est également solution.
En conclusion, les solutions positives de l'équation $x + y = xy$ sont les couples d'entiers naturels $(0; 0)$ et $(2; 2)$.

Corrigé exercice 37 :

Soit x et y deux entiers vérifiant $x + y = 2xy$.
On a, d'une part, $x \mid 2xy$. Mais comme $2xy = x+y$, alors $x \mid x+y$. Ainsi $x \mid x$ et $x \mid x+y$ donc x divise toute combinaison linéaire de x et $x + y$. En particulier, $x|(x + y - x)$ donc $x \mid y$.
D'autre part, $y \mid 2xy$. On démontre de même que $y \mid x$.
On vient donc de montrer que, d'une part, $x \mid y$ et, d'autre part, $y \mid x$.
On en déduit que $x = y$.
Ainsi, l'équation se réécrit $2x = 2x^2$, dont les solutions sont 0 et 1.
Réciproquement, si $x = 0$ et $y = 0$, l'égalité est bien vérifiée, donc $(0; 0)$ est bien solution de cette équation. Si $x = 1$ et $y = 1$, alors on a bien $1 + 1 = 2 \times 1 \times 1$. Donc $(1; 1)$ est solution de cette équation.
En conclusion, les solutions positives de l'équation $x + y = 2xy$ sont les couples d'entiers naturels $(0; 0)$ et $(1; 1)$.

Corrigé exercice 38 :

Soit n un entier naturel. On va effectuer une démonstration par disjonction de cas.
Cas n°1 : Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k$.
Dans ce cas, on a alors $N = 4\left(k(4k + 2)(4k - 5)(4k + 5)\right)$ donc N est divisible par 4.
Cas n°2 : Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k + 1$.
On a alors $N = (4k+1)(4k+3)(4k-4)(4k+6) = 4(4k+1)(4k+3)(k-1)(4k+6)$ donc N est divisible par 4.
Cas n°3 : Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k + 2$.
On a alors $N = (4k+2)(4k+4)(4k-3)(4k+7) = 4(4k+2)(k+1)(4k-3)(4k+7)$ donc N est divisible par 4.
4ème cas : Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k + 3$.
On a alors $N = (4k+3)(4k+5)(4k-2)(4k+8) = 4(4k+3)(4k+5)(4k-2)(k+2)$ donc N est divisible par 4.
Ainsi, pour tout entier naturel n, N est divisible par 4.

Corrigé exercice 39 :

Soit n un entier naturel. On va effectuer une démonstration par disjonction de cas.
Cas n°1 : Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k$.
Dans ce cas, on a alors $N = 2(3k)(3k + 1)(3k + 2) = 3(2k(3k + 1)(3k + 2))$ donc N est divisible par 3.
Cas n°2 : Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k + 1$.
Dans ce cas, $N = 2(3k + 1)(3k + 2)(3k + 3) = 3(2(3k + 1)(3k + 2)(k + 1))$ donc N est divisible par 3.
Cas n°3 : Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k + 2$.
Dans ce cas, $N = 2(3k + 2)(3k + 3)(3k + 4) = 3(2(3k + 3)(k + 1)(3k + 4))$ donc N est divisible par 3.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Ainsi, pour tout entier naturel n, N est divisible par 3.

Corrigé exercice 40 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)^2 = n^2+4n+4$ et $n(n+4)+4 = n^2+4n+4$.

   On a donc bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)^2 = n(n+4)+4$.

2. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)^2 = n(n+4)+4$. Cette écriture est la division euclidienne de $(n+2)^2$ par n lorsque $0 \leqslant 4 < n$, c'est-à-dire pour $n \geqslant 5$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 5$, le reste de la division euclidienne de $(n+2)^2$ par n vaut 4.

Corrigé exercice 41 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+3)^2 = n^2+6n+9$ et $n(n+6)+9 = n^2+6n+9$. On a donc bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+3)^2 = n(n+6)+9$.

2. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+3)^2 = n(n+6)+9$. Cette écriture est la division euclidienne de $(n+3)^2$ par n lorsque $0 \leqslant 9 < n$, c'est-à-dire pour $n \geqslant 10$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 10$, le reste de la division euclidienne de $(n+3)^2$ par n vaut 9.

Corrigé exercice 42 :

La division euclidienne de a par 7 s'écrit $a = 7k+4$ avec k entier.
La division euclidienne de b par 7 s'écrit $b = 7k'+6$ avec k' entier.

1. Ainsi, on a $a+b = 7k+4+7k'+6 = 7(k+k')+10 = 7(k+k'+1)+3$.

   Or $0 \leqslant 3 < 7$, donc 3 est le reste de la division euclidienne de $a+b$ par 7.

2. De même, $a-b = 7(k-k')-2 = 7(k-k'-1)+5$. Or $0 \leqslant 5 < 7$, donc 5 est le reste de la division euclidienne de $a-b$ par 7.

Corrigé exercice 43 :

1. D'après l'énoncé, la division euclidienne de 2512 par b s'écrit $2512 = 54b+r$, où r désigne le reste de cette division. Supposons que ce reste soit égal à 7. On a alors $2512 = 54b+7 \Leftrightarrow 2505 = 54b$. Or 2505 n'est pas divisible par 54.

   Le reste ne peut donc pas être égal à 7.

2. D'après l'énoncé, la division euclidienne de 31631 par b s'écrit $31631 = 253b+r$, où r désigne le reste de cette division. Supposons que ce reste soit égal à 6. On a alors $31631 = 253b+6 \Leftrightarrow 31625 = 253b \Leftrightarrow b = 125$. D'où $0 \leqslant 6 < 125$.

   Le reste peut donc être égal 6.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 44 :

D'après l'énoncé, la division euclidienne de 97 par b s'écrit $97 = qb + 6$. On en déduit que $qb = 91$. D'une part, les diviseurs de 91 sont –1, 1, 7, –7, 13, –13, –91, 91. D'autre part, le reste de la division euclidienne de 97 par b étant 6, on doit avoir $b > 6$.
On en déduit que b et q peuvent prendre les valeurs suivantes : $b = 7$ et $q = 13$, $b = 13$ et $q = 7$ ou $b = 91$ et $q = 1$.

Corrigé exercice 45 :

D'après l'énoncé, la division euclidienne de -10 par b s'écrit $-10 = bq + 2$. On en déduit que $bq = -12$. D'une part, les diviseurs de -12 sont –1, –2, –3, –4, –6, –12, 1, 2, 3, 4, 6, 12. D'autre part, le reste de la division euclidienne de -10 par b vaut 2 donc $b > 2$.
On en déduit que b et q peuvent prendre les valeurs suivantes : $b = 3$ et $q = -4$, $b = 4$ et $q = -3$, $b = 6$ et $q = -2$ ou $b = 12$ et $q = -1$.

Corrigé exercice 46 :

1. On a $a \equiv 16[5]$. Or $16 \equiv 1[5]$, donc $a \equiv 1[5]$ et $1 < 5$. Le reste de la division euclidienne de a par 5 est donc 1.

2. On a $b \equiv 17[3]$. Or $17 \equiv 2[3]$, donc $a \equiv 2[3]$ et $2 < 3$. Le reste de la division euclidienne de b par 3 est donc 2.

Corrigé exercice 47 :

1. On a $a \equiv 7[13]$ et $b \equiv 4[13]$, d'où :

   a. $a + b \equiv 11[13]$. De plus, $11 < 13$ donc le reste de la division euclidienne de $a + b$ par 13 est 11.

   b. $ab \equiv 28[13]$. Or, $28 \equiv 2[13]$ donc $ab \equiv 2[13]$. De plus, $2 < 13$ donc le reste de la division euclidienne de ab par 13 est 2.

   c. $a^3 \equiv 343[13]$. Or, $343 \equiv 5[13]$ donc $a^3 \equiv 5[13]$. De plus, $5 < 13$ donc le reste de la division euclidienne de a^3 par 13 est 5.

   d. $a^2 - b^2 \equiv 33[13]$. Or, $33 \equiv 7[13]$ donc $a^2 - b^2 \equiv 7[13]$. De plus, $7 < 13$ donc le reste de la division euclidienne de $a^2 - b^2$ par 13 est 7.

2. On a $2b - 3a \equiv 8 - 21[13]$, soit $2b - 3a \equiv 0[13]$, donc $2b - 3a$ est divisible par 13.

Corrigé exercice 48 :

1. On a $a \equiv 2[5]$ et $b \equiv 3[5]$ d'où $a^2 + b \equiv 7[5]$ et donc $a^2 + b \equiv 2[5]$. Comme $0 \leqslant 2 < 5$, le reste de la division euclidienne de $a^2 + b$ par 5 est 2.

2. On a $a \equiv 2[5]$ et $b \equiv 3[5]$, d'où $3a + 3b \equiv 15[5]$ et donc $3a + 3b \equiv 0[5]$, d'où $3a + 3b$ est divisible par 5.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 49 :

1. On a $a \equiv 1[7]$ et $b \equiv 2[7]$, d'où $5a^2 + 2b^2 \equiv 13[7]$ et donc $5a^2 + 2b^2 \equiv 6[7]$. Comme $6 < 7$, le reste de la division euclidienne de $5a^2 + 2b^2$ par 7 est 6.
2. On a $a \equiv 1[7]$ et $b \equiv 2[7]$, d'où $2b^2 - 5a^2 \equiv 3[7]$. Comme $0 \leqslant 3 < 7$, le reste de la division euclidienne de $2b^2 - 5a^2$ par 7 est 3.

Corrigé exercice 50 :

1. On obtient le tableau de congruence suivant.

$n \equiv \ldots [3]$	0	1	2
$n^2 \equiv \ldots [3]$	0	1	1
$2n \equiv \ldots [3]$	0	2	1
$n^2 + 2n \equiv \ldots [3]$	0	0	2

2. On en déduit que $n^2 + 2n$ est divisible par 3 si, et seulement si, $n \equiv 0[3]$ ou $n \equiv 1[3]$ si, et seulement si, il existe un entier k tel que $n = 3k$ ou $n = 3k + 1$.

Corrigé exercice 51 :

On construit le tableau de congruence modulo 3 suivant.

$n \equiv \ldots [6]$	0	1	2	3	4	5
$n + 1 \equiv \ldots [6]$	1	2	3	4	5	0
$2n + 1 \equiv \ldots [6]$	1	3	5	1	3	5
$n(n + 1)(2n + 1) \equiv \ldots [6]$	0	0	0	0	0	0

On en déduit que, pour tout entier n, $n(n + 1)(2n + 1) \equiv 0[6]$ et donc que, pour tout entier n, $n(n + 1)(2n + 1)$ est divisible par 6.

Corrigé exercice 52 :

1. On construit un tableau de congruence modulo 11.

$x \equiv \ldots [11]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$5x \equiv \ldots [11]$	0	5	10	4	9	3	8	2	7	1	6

   On a donc $5 \times 9 \equiv 1[11]$. Ainsi 9 est un inverse de 5 modulo 11.

2. On construit un tableau de congruence modulo 10.

Document sous licence libre Creative Commons

$x \equiv \ldots [10]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$6x \equiv \ldots [10]$	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4

Il n'existe donc pas d'entier x tel que $6x \equiv 1[10]$ donc 6 n'a pas d'inverse modulo 10.

3. On construit un tableau de congruence modulo 12.

$x \equiv \ldots [12]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$3x \equiv \ldots [12]$	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9

Donc 3 n'a pas d'inverse modulo 12.

Corrigé exercice 53 :

1. On obtient le tableau de congruence suivant.

$x \equiv \ldots [8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$5x \equiv \ldots [8]$	0	5	2	7	4	1	6	3

2. D'après le tableau précédent, $5x \equiv 7\ [8]$ équivaut à $x \equiv 3\,[8]$.
3. D'après le tableau, on a $5x \equiv 0[8] \Leftrightarrow x \equiv 0[8]$.

Document sous licence libre Creative Commons

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 54 :

1. Prenons, par exemple, 3 et 5 deux nombres impairs consécutifs. On a $3+5=8$ et 8 est bien divisible par 4.

2. Soient $n=2k+1$ et $n'=2k+3$ deux entiers impairs consécutifs. On a alors $n+n'=2k+1+2k+3=4k+4=4(k+1)$, donc $n+n'$ est bien divisible par 4.

Corrigé exercice 55 :

Soient quatre entiers consécutifs. Alors ces quatre entiers peuvent s'écrire sous la forme $n-1$, n, $n+1$ et $n+2$.
La somme S de leur carré vaut alors $S=(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2$, et on obtient alors, en développant, $S=4n^2+4n+6=2(2n^2+2n+3)$. Donc S est divisible par 2.

Corrigé exercice 56 :

1. Si 11 divise $n+3$, alors il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n+3=11k$. Ainsi, $n=11k-3$.

   n étant un entier naturel, on doit avoir $k\geqslant 1$. Donc les entiers naturels n vérifiant cette condition sont les entiers n tels qu'il existe un entier naturel non nul k tel que $n=11k-3$.

2. Si 6 divise $3n-9$, alors il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $3n-9=6k$. Ainsi, $n=2k+3$. Donc les entiers naturels n vérifiant cette condition sont les entiers n tels qu'il existe un entier naturel k tel que $n=2k+3$.

Corrigé exercice 57 :

1. On a, d'une part, $n\mid n+6$ et, d'autre part, $n\mid n$. Donc n divise toute combinaison linéaire de $n+6$ et n et, en particulier $n\mid(n+6-n)$ donc $n\mid 6$. Ainsi, les solutions possibles sont les diviseurs positifs de 6 : 1, 2, 3 et 6.

   Réciproquement, si $n=1$, on a $n+6=7$ et $1\mid 7$ donc 1 est bien solution ; si $n=2$, on a $n+6=8$ et $2\mid 8$ donc est bien solution ; si $n=3$, on a $n+6=9$ et $3\mid 9$ donc 3 est bien solution ; si $n=6$, on a $n+6=12$ et $6\mid 12$ donc 6 est bien solution.

   En conclusion, les solutions de ce problème sont 1, 2, 3 et 6.

2. On a, d'une part, $n-1\mid n+11$ et, d'autre part, $n-1\mid n-1$ donc $n-1$ divise toute combinaison linéaire de $n+11$ et $n-1$ et, en particulier, $n-1\mid(n+11-n+1)$ donc $n-1\mid 12$. De plus, $n\in\mathbb{N}$ donc $n-1\geqslant -1$. Ainsi, les valeurs possibles de $n-1$ sont les diviseurs de 12 supérieurs ou égaux à -1 : -1, 1, 2, 3, 4, 6 et 12. Les valeurs éventuelles de n sont donc 0, 2, 3, 4, 7 et 13.

   Réciproquement, si $n=0$, on a $n-1=-1$, $n+11=12$ et $-1\mid 12$ donc 0 est bien solution ; si $n=2$, on a $n-1=1$, $n+11=13$ et $1\mid 13$ donc 2 est bien solution ; si $n=3$, on a $n-1=2$, $n+11=14$ et $2\mid 14$ donc 3 est bien solution ; si $n=4$, on a $n-1=3$, $n+11=15$ et $3\mid 15$ donc 4 est bien solution ; si $n=7$, on a $n-1=6$, $n+11=18$ et $6\mid 18$ donc 7 est bien solution ; si $n=13$, on a $n-1=12$, $n+11=24$ et $12\mid 24$ donc 13 est bien solution.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

En conclusion, les solutions de ce problème sont 0, 2, 3, 4, 7 et 13.

3. On a, d'une part, $n-3 \mid n+2$ et, d'autre part, $n-3 \mid n-3$ donc $n-3$ divise toute combinaison linéaire de $n+2$ et $n-3$ et, en particulier, $n-3 \mid (n-3)-(n+2)$, c'est-à-dire $n-3 \mid 5$. De plus, $n \in \mathbb{N}$ donc $n-3 \geqslant -3$. Ainsi, les valeurs possibles de $n-3$ sont les diviseurs de 5 supérieurs ou égaux à –3 : –1, 1 et 5. Donc les valeurs possibles de n sont 2, 4 et 8.

   Réciproquement, si $n=2$, on a $n-3=-1$, $n+2=4$ et $-1 \mid 4$ donc 2 est bien solution ; si $n=4$, on a $n-3=1$ et $n+2=6$ et $1 \mid 6$ donc 4 est bien solution ; si $n=8$, on a $n-3=5$, $n+2=10$ et $5|10$ donc 8 est bien solution.

   En conclusion, les solutions de ce problème sont 2, 4 et 8.

Corrigé exercice 58 :

Pour tous x et y entiers naturels, $x^2-4y^2=36 \Leftrightarrow (x-2y)(x+2y)=36$. D'une part, x et y sont des entiers naturels donc $x-2y \leqslant x+2y$ et, comme $36>0$, alors $x-2y$ et $x+2y$ sont du même signe. Ainsi, $0 \leqslant x-2y \leqslant x+2y$. D'autre part, les diviseurs positifs de 36 sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36.
On résout alors les systèmes suivants :
$\begin{cases} x-2y=1 \\ x+2y=36 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-2y=2 \\ x+2y=18 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-2y=3 \\ x+2y=12 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-2y=4 \\ x+2y=9 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-2y=6 \\ x+2y=6 \end{cases}$
Les seuls systèmes à admettre des solutions entières sont le second système de solution $(10;4)$, ainsi que le dernier système de solution $(6;0)$.
Les couples solution de l'équation $x^2-4y^2=36$ sont donc $(10,4)$ et $(6,0)$.

Corrigé exercice 59 :

1. a. Si $a|b$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b=ka$. Ainsi, on a $b=k' \times (-a)$ en posant $k'=-k$, et donc $-a|b$.
   b. Si $-a|b$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b=k\times(-a)$. Ainsi, on a $-b=-k(-a)$, c'est-à-dire $-b=ka$, et donc $a|-b$.
   c. Si $a|-b$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-b=ka$. Ainsi, on a $-b=-k'(-a)$ en posant $k'=-k$, et donc $-a|-b$.
   d. Si $-a|-b$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-b=k(-a)$, d'où $b=ka$ et donc $a|b$.
2. On a montré que $a|b$ implique $-a|b$ qui implique $a|-b$ qui implique $-a|-b$ qui implique $a|b$. On en déduit que toutes ces propositions sont équivalentes.

Corrigé exercice 60 :

L'aire du carré $EBFG$ est 9 cm2, l'aire du carré $ABCD$ est x^2 cm2, donc l'aire du polygone $AEGFCD$ est de x^2-9 cm2. Le problème revient donc à résoudre l'équation $x^2-9=y^2$, avec x et y deux entiers naturels.
L'équation peut se réécrire $x^2-y^2=9$, soit $(x-y)(x+y)=9$. On a, d'une part, $x+y \geqslant x-y$ et $x+y \geqslant 0$ car x et y sont des entiers naturels. Or $9>0$ donc $x-y$ et $x+y$ sont du même signe. D'où $x+y \geqslant x-y \geqslant 0$. Et, d'autre part, $x-y$ et $x+y$ sont

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

des diviseurs de 9. Ainsi les valeurs possibles de $x-y$ et $x+y$ sont 1, 3 ou 9. On doit donc résoudre les systèmes : $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=9 \end{cases}$ et $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=3 \end{cases}$.
Le premier système admet $(5,4)$ comme solution. Le second système admet $(3,0)$ comme solution. Le problème admet donc deux solutions : $x=5$, et dans ce cas-là le polygone a la même aire qu'un carré de côté 4 cm, et $x=3$, et dans ce cas-là on est dans le cas particulier d'un carré de côté 0 cm.

Corrigé exercice 61 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = an + b + \dfrac{c}{n+4} = \dfrac{an^2 + (b+4a)n + 4b + c}{n+4}$.

   Ainsi, par identification, $\begin{cases} a=3 \\ b+4a=2 \\ 4b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-10 \\ c=39 \end{cases}$.

   On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 3n - 10 + \dfrac{39}{n+4}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ est un entier si, et seulement si, $n+4 \mid 39$. Or les diviseurs positifs de 39 sont 1, 3, 13 et 39. Or $n+4=1 \Leftrightarrow n=-3$, $n+4=3 \Leftrightarrow n=-1$, ce qui est impossible car $n \in \mathbb{N}$, $n+4=13 \Leftrightarrow n=9$ et $n+4=39 \Leftrightarrow n=35$. Or n est un entier naturel, donc on en déduit que $f(n)$ est un entier si, et seulement si, $n=9$ ou $n=35$.

Corrigé exercice 62 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = a + \dfrac{nb+c}{n^2+1} = \dfrac{a(n^2+1)+bn+c}{n^2+1} = \dfrac{an^2+bn+(a+c)}{n^2+1}$.

   Ainsi, par identification, $\begin{cases} a=5 \\ b=10 \\ a+c=-2 \end{cases}$, soit $\begin{cases} a=5 \\ b=10 \\ c=-7 \end{cases}$.

   On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 5 + \dfrac{10n-7}{n^2+1}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ est un entier si, et seulement si, $n^2+1 \mid 10n-7$.

   Soit n tel que $n^2+1 \mid 10n-7$. On a, de plus, $n^2+1 \mid n^2+1$, donc n^2+1 divise toute combinaison linéaire de $10n-7$ et n^2+1. En particulier, $n^2+1 \mid [10(n^2+1) - n(10n-7)]$, c'est-à-dire $n^2+1 \mid 7n+10$. Donc $n^2+1 \mid 10n-7$ et $n^2+1 \mid 7n+10$, d'où $n^2+1 \mid 7(10n-7) - 10(7n+10)$ donc $n^2+1 \mid 149$.

   Or 149 n'admet que 1, –1, –149 et 149 comme diviseurs. De plus, le nombre n^2+1 est strictement positif. Ainsi, on s'intéresse uniquement aux cas $n^2+1=1 \Leftrightarrow n=0$ et $n^2+1=149 \Leftrightarrow n^2=148$. Cette seconde équation n'admet pas de solution entière. On en déduit que $f(n)$ est un entier si, et seulement si, $n=0$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 63 :

1. On obtient $a_1 = 5$, $a_2 = 55$ et $a_3 = 485$. Il semble donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 5 soit un diviseur de a_n.

2. Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 5 est un diviseur de a_n.

   Initialisation : On a $a_1 = 5$ donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

   Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un entier n, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a_n = 5k$. Démontrons qu'elle est vraie pour $n+1$, c'est-à-dire qu'il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que $a_{n+1} = 5K$.

   On a $a_{n+1} = 2^{3(n+1)} - 3^{n+1} = 2^{3n} \times 8 - 3^n \times 3 = 2^{3n} \times 8 - 3^n \times 8 + 5 \times 3^n = 8a_n + 5 \times 3^n$. Donc, par hypothèse de récurrence, $a_{n+1} = 8 \times (5k) + 5 \times 3^n = 5(8k + 3^n)$ et donc a_{n+1} est divisible par 5.

   Conclusion : On a montré que la propriété est vraie au rang 1, puis que si elle était vraie au rang n, alors elle est vraie au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 5 est un diviseur de a_n.

Corrigé exercice 64 :

1. Les diviseurs de 24 sont 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24 et leur opposé.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. $n^2 - 24 = k^2$ équivaut à $n^2 - k^2 = 24$, soit $(n-k)(n+k) = 24$. Or $n + k > 0$ et $n + k \geqslant n - k$, car n et k sont des entiers naturels. De plus, $24 > 0$, donc $n+k$ et $n-k$ sont de même signe. Ainsi, $0 \leqslant n-k < n+k$. Enfin, les diviseurs positifs de 24 sont 1, 24, 2, 12, 4, 6, 3 et 8. Donc résoudre ce problème revient à résoudre les systèmes suivants : $\begin{cases} n-k=1 \\ n+k=24 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n-k=2 \\ n+k=12 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n-k=4 \\ n+k=6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n-k=3 \\ n+k=8 \end{cases}$.

   On obtient ainsi les solutions entières suivantes : $n = 7$ et $k = 5$, ainsi que $n = 5$ et $k = 1$. Ainsi, les entiers naturels n tels que $n^2 - 24$ soit un carré sont $n = 7$ et $n = 5$.

Corrigé exercice 65 :

Un point $M \in \mathcal{H}$ est de coordonnées entiers si, et seulement si, son abscisse x est un diviseur de 6. Les diviseurs de 6 sont –1, –2, –3, –6, 1, 2, 3 et 6. Ainsi, les points à coordonnées entières de $\mathcal{H}$ sont $A(-1;-6)$, $B(-2;-3)$,$A(1;6)$, $A(2;3)$, $A(-6;-1)$, $A(-3;-2)$, $A(6;1)$ et $A(3;2)$.

Corrigé exercice 66 :

1. Soient x_1 et x_2 les deux racines de ce polynôme. Alors on peut écrire P sous forme factorisée de la manière suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$,$P(x) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$. Ainsi, par identification des coefficients, on a $ax_1x_2 = c$, d'où $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Document sous licence libre Creative Commons

2. On a montré dans la question précédente que $c = ax_1x_2$. Or, toujours d'après la question précédente, on sait que $b = -a(x_1 + x_2)$, c'est-à-dire $ax_2 = -(ax_1 + b)$. a, b et x_1 sont des entiers d'après l'énoncé, donc ax_2 est un entier. Ainsi, en posant $k = ax_2 \in \mathbb{Z}$, on a $c = kx_1$. D'où, c est divisible par x_1.

3. Si l'équation $x^2 - 7x + 3 = 0$ admet des solutions entières, alors ces solutions sont des diviseurs de 3, d'après la question précédente. Or, les diviseurs de 3 sont –1, –3, 1 et 3. Aucune de ces valeurs n'est solution de l'équation, donc elle n'admet pas de solution entière.

4. Soit $P(x) = ax^2 + bx + 6$ un polynôme admettant deux racines entières : x_1 et 2. D'après la formule de la question 1., on a $2x_1 = \dfrac{6}{a}$, soit $ax_1 = 3$. Or, les diviseurs de 3 sont –1, –3, 1 et 3. Ainsi, les valeurs possibles de x_1 et a sont : $x_1 = 1$ et $a = 3$ ou $x_1 = -1$ et $a = -3$ ou $x_1 = 3$ et $a = 1$ ou $x_1 = -3$ et $a = -1$. Les polynômes recherchés sont donc : $P(x) = 3(x-1)(x-2)$, $P(x) = -3(x+1)(x-2)$, $P(x) = (x-3)(x-2)$ et $P(x) = -(x+3)(x-2)$.

Corrigé exercice 67 :

Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $9^n - 2^n$ est divisible par 7.
Initialisation : $9^0 - 2^0 = 0$ et 0 est divisible par 7, donc la proposition est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un entier n, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $9^n - 2^n = 7k$. Démontrons qu'elle est vraie pour $n + 1$, c'est-à-dire qu'il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que $9^{n+1} - 2^{n+1} = 7K$.
On a $9^{n+1} - 2^{n+1} = 9.9^n - 2.2^n = 9(9^n - 2^n) + 7.2^n$ donc, par hypothèse de récurrence, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $9^{n+1} - 2^{n+1} = 9(7k) + 7.2^n = 7(9k + 2^n)$ donc $9^{n+1} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.
Conclusion : On a montré que la propriété était vraie au rang 0, puis que si elle était vraie à une rang n, alors elle était également vraie au rang $n + 1$. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $9^n - 2^n$ est divisible par 7.

Corrigé exercice 68 :

Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{3n} - 5^n$ est divisible par 3.
Initialisation : $2^0 - 5^0 = 0$ et 0 est divisible par 3, donc la proposition est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un entier n, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{3n} - 5^n = 3k$. Démontrons qu'elle est vraie pour $n + 1$, c'est-à-dire qu'il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{3(n+1)} - 5^{n+1} = 3K$.
On a $2^{3(n+1)} - 5^{n+1} = 2^3 \times 2^{3n} - 5 \times 5^n = 3 \times 2^{3n} + 5\left(2^{3n} - 5^n\right)$ d'où, par hypothèse de récurrence, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{3(n+1)} - 5^{n+1} = 3 \times 2^{3n} + 5 \times 3k = 3\left(2^{3n} + k\right) = 3K$ en posant $K = 2^{3n} + k$. En particulier, K est un entier, d'où $2^{3(n+1)} - 5^{n+1}$ est divisible par 3.
Conclusion : On a montré que la propriété était vraie au rang 0, puis que si elle était vraie à une rang n, alors elle était également vraie au rang $n + 1$. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{3n} - 5^n$ est divisible par 3.

Corrigé exercice 69 :

On procède par double implication.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Démontrons tout d'abord que : $13 \mid 8a+5b \Rightarrow 13 \mid 5a+8b$.
On a, d'une part, $13 \mid 8a+5b$ et, d'autre part, $13 \mid 13a+13b$. Donc 13 divise toute combinaison linéaire de $8a+5b$ et $13a+13b$. En particulier, $13 \mid 13a+13b-8a-5b$ et donc $13 \mid 5a+8b$.
Démontrons maintenant que : $13 \mid 5a+8b \Rightarrow 13 \mid 8a+5b$.
On a, d'une part, $13 \mid 5a+8b$ et, d'autre part, $13 \mid 13a+13b$. Donc 13 divise toute combinaison linéaire de $5a+8b$ et $13a+13b$. En particulier, $13 \mid 13a+13b-5a-8b$ donc $13 \mid 8a+5b$.
En conclusion, on a $13 \mid 8a+5b \Leftrightarrow 13 \mid 5a+8b$.

Corrigé exercice 70 :

On procède par double implication.
Démontrons tout d'abord que $11 \mid 6a+5b \Rightarrow 11 \mid 5a+6b$.
On a, d'une part, $11 \mid 6a+5b$ et, d'autre part, $11 \mid 11a+11b$. Donc 11 divise toute combinaison linéaire de $6a+5b$ et $11a+11b$. En particulier, $11 \mid 11a+11b-6a-5b$ donc $11 \mid 5a+6b$.
Démontrons maintenant que $11 \mid 5a+6b \Rightarrow 11 \mid 6a+5b$.
On a, d'une part, $11 \mid 5a+6b$ et, d'autre part, $11 \mid 11a+11b$. Donc 11 divise toute combinaison linéaire de $5a+6b$ et $11a+11b$. En particulier, $11 \mid 11a+11b-5a-6b$ donc $11 \mid 6a+5b$.
En conclusion, on a $11 \mid 6a+5b \Leftrightarrow 11 \mid 5a+6b$.

Corrigé exercice 71 :

1. Soit d tel que $d \mid n+6$ et $d \mid 2n+3$. Alors d divise toute combinaison linéaire de $n+6$ et $2n+3$. En particulier, $d \mid 2(n+6)-(2n+3)$, donc $d \mid 9$. Ainsi, comme d est un entier naturel, d est forcément un diviseur positif de 9 : 1, 3 ou 9.

2. De même, $d \mid n+6$ et $d \mid 2n+3$, d'où $d \mid 2n+3-n-6$ et donc $d \mid n-3$.

   Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tels que $n-3 = dk$.

   Ainsi, si $d=1$, on a $n-3 = 1.k$, soit $n = k+3$, si $d=3$, on a $n = 3k+3$ et si $d=9$, on a $n = 9k+3$.

   Les couples d'entiers naturels respectants ces conditions sont donc $(1, k+3)$ avec $k > -4$, $(3, 3k+3)$ avec $k > -2$ et $(9, 9k+3)$ avec k un entier naturel.

Corrigé exercice 72 :

1. S est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison 3 et de premier terme 1.

   On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S = \dfrac{1-3^n}{1-3} = \dfrac{1}{2}(3^n-1)$.

2. D'après la question précédente, pour tout entier naturel n non nul, $3^n-1 = 2S$, avec S un entier comme somme d'entiers, donc 3^n-1 est pair pour tout entier $n>0$.

   Par ailleurs $3^0-1=0$, et 0 est un nombre pair. Donc la proposition est aussi vraie pour $n=0$.

   Ainsi, 3^n-1 est bien pair pour tout entier naturel n.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 73 :

1. S est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison 7 et de premier terme 1.

   On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S = \dfrac{1-7^n}{1-7} = \dfrac{1}{6}(7^n - 1)$.

2. D'après la question précédente, pour tout entier naturel n non nul, on a $7^n = 6S+1$, avec S entier en tant que somme d'entiers, d'où $7^n + 35 = 6S + 1 + 35 = 6(S+6)$. Or $6S + 6$ est un entier donc $7^n + 35$ est un multiple de 6 pour tout $n > 0$.

   Par ailleurs, $7^0 - 1 = 0$, et 0 est un multiple de 6. La proposition est donc vraie pour $n = 0$. Ainsi, $7^n + 35$ est un multiple de 6 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé exercice 74 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le binôme de Newton :

$$(1+n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{n-k}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dbinom{n}{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)!1!} = n$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $(n+1)^n - 1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{n-k} - 1$

   $= \dbinom{n}{0} n^n + \dbinom{n}{1} n^{n-1} + ... + \dbinom{n}{n-1} n + \dbinom{n}{n} - 1.$

   Or $\dbinom{n}{n} = 1$ et $\dbinom{n}{n-1} = n$, d'où

   $(n+1)^n - 1 = \dbinom{n}{0} n^n + \dbinom{n}{1} n^{n-1} + ... + n^2$

   $= n^2 \left(\dbinom{n}{0} n^{n-2} + \dbinom{n}{1} n^{n-3} + ... + 1 \right).$

   Donc $(n+1)^n - 1$ est divisible par n^2.

Corrigé exercice 75 :

1. Si d est un diviseur de x et de y, alors il divise toute combinaison linéaire de x et de y. En particulier, d divise $a = x + y$ et d divise $b = 2x + 3y$.

2. On a $\begin{cases} x + y = a \\ 2x + 3y = b \end{cases}$ soit $\begin{cases} 2x + 2y = 2a \\ 2x + 3y = b \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x = 3a - b \\ y = -2a + b \end{cases}$.

3. Si d est un diviseur de a et de b, alors il divise toute combinaison linéaire de a et de b. En particulier, d divise $x = 3a - b$ et divise $y = -2a + b$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

4. En prenant $x = 20$ et $y = 30$, on remarque que $a = 20 + 30 = 50$ et $b = 40 + 90 = 130$. Ainsi, on peut appliquer les résultats des questions précédentes : les diviseurs communs à 50 et 130 sont exactement les diviseurs communs à 20 et 30.

   Les diviseurs de 20 sont 1, 2, 4, 5, 10, 20, –1, –2, –4, –5, –10 et –20.

   Les diviseurs de 30 sont 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, –1, –2, –3, –6 et –10.

   Ainsi les diviseurs communs des quatres entiers sont les diviseurs communs de 20 et 30, c'est-à-dire 1, 2, 5, 10, –1, –2, –5 et –10.

Document sous licence libre Creative Commons

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 76 :

1. Faux. Prenons comme contre-exemple $a = 27 = 6 \times 4 + 3$. Le quotient dans cette division vaut 4, mais $3a = 27 \times 3 = 81 = 6 \times 13 + 3$ donc le quotient dans la division euclidienne de $3a$ par 6 est 13 et non pas 12.

2. Faux. Prenons comme contre-exemple $a = 37 = 7 \times 5 + 2$ et $b = 26 = 7 \times 3 + 5$. Alors $a + b = 63 = 7 \times 9 + 0$ et donc le quotient de $a + b$ dans la division euclidienne par 7 est 9 et non 8.

3. Faux. Prenons comme contre-exemple $a = 31 = 6 \times 5 + 1$ et $b = 8 = 6 \times 1 + 2$. Alors $a + b = 39 = 6 \times 6 + 3$ et 39 n'est pas divisible par 6.

Corrigé exercice 77 :

1. La division euclidienne de 3782 par 251 s'écrit $3782 = 251 \times 15 + 17$ car $0 \leqslant 17 < 251$, donc le reste dans la division euclidienne de 3782 par 251 est 17.

2. $3782 = 251 \times 15 + 17 = 251 \times 15 + 15 + 2 = 252 \times 15 + 2$.

   Ainsi, la division euclidienne de 3782 par 15 s'écrit $3782 = 252 \times 15 + 2$ car $0 \leqslant 2 \leqslant 15$. Le reste dans la division euclidienne de 3 782 par 15 est donc 2.

3. $-3782 = 251 \times (-15) - 17 = 251 \times (-15) - 251 + 234 = 252 \times (-16) + 234$ et $0 \leqslant 234 < 251$.

   Ainsi, la division euclidienne de –3782 par 251 s'écrit $-3782 = 252 \times (-16) + 234$.

   Donc le reste dans la division euclidienne de –3782 par 251 est 234.

Corrigé exercice 78 :

D'après l'énoncé, la division euclidienne de a par 4 s'écrit $a = 4q + 2$.
On procède ensuite par disjonction de cas :

- Si $q = 4k, k \in \mathbb{N}$, alors $a = 16k + 2$ donc le reste dans la division euclidienne de a par 16 est 2.
- Si $q = 4k + 1, k \in \mathbb{N}$, alors $a = 16k + 6$ donc le reste dans la division euclidienne de a par 16 est 6.
- Si $q = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$, alors $a = 16k + 10$ donc le reste dans la division euclidienne de a par 16 est 10.
- Si $q = 4k + 3, k \in \mathbb{N}$, alors $a = 16k + 14$ donc le reste dans la division euclidienne de a par 16 est 14.

Ainsi, les restes possibles dans la division de a par 16 sont 2, 6, 10 ou 14.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 79 :

1. $-51 = 6 \times (-9) + 3$ et $0 \leqslant 3 < 6$. Le quotient de –51 par 6 est –9, le reste de cette division est 3.

2. $-40 = 3 \times (-14) + 2$ et $0 \leqslant 2 < 3$. Le quotient de –40 par 3 est –14 et le reste de cette division est 2.

3. $-40 = 11 \times (-4) + 4$ et $0 \leqslant 4 < 11$. Le quotient de –40 par 11 est -4 et le reste de cette division est 4.

Corrigé exercice 80 :

D'après l'énoncé, la division euclidienne de a par 7 s'écrit $a = 7q + 6$.
D'où $2a = 7 \times 2q + 12 = 7 \times (2q + 1) + 5$ et $0 \leqslant 5 < 7$, donc le reste de la division euclidienne de $2a$ par 7 est 5.
De même, $-3a = 7 \times (-3q) - 18 = 7 \times (-3q) - 21 + 3 = 7 \times (-3q - 3) + 3$ et $0 \leqslant 3 < 7$, donc le reste de la division euclidienne de $-3a$ par 7 est 3.
Enfin, la division euclidienne de $4a$ par 7 s'écrit $4a = 7 \times 4q + 24 = 7 \times (4q + 3) + 3$ et $0 \leqslant 3 < 7$, donc le reste vaut 3.

Corrigé exercice 81 :

Soient x et y les deux entiers naturels recherchés. Posons, par exemple, $x > y$.
On résout alors le système : $\begin{cases} x - y = 116 \\ x = 4y + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 116 \\ x - 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 152 \\ y = 36 \end{cases}$.
On observe qu'on a bien $0 \leqslant 8 < 36$.

Corrigé exercice 82 :

Soient x et y les deux entiers naturels recherchés. Posons, par exemple, $x > y$.
On résout alors le système : $\begin{cases} x + y = 708 \\ x = 12y + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 708 \\ x - 12y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 654 \\ y = 54 \end{cases}$.
On observe qu'on a bien $0 \leqslant 6 < 54$.

Corrigé exercice 83 :

Soient p et q les deux entiers naturels recherchés.
D'après l'énoncé, on a $500 = pq + 71$ et $0 \leqslant 71 < p$. Ainsi, $pq = 429$ et $71 < p$. Or, l'ensemble des diviseurs de 429 est $D_{429} = \{1, 3, 11, 13, 33, 39, 143, 429\}$. Par ailleurs, puisque que $71 < p$ alors soit $p = 143$, et on a alors $q = 3$, soit $p = 429$, et on a alors $q = 1$.

Corrigé exercice 84 :

Soit n un entier naturel tel que la division euclidienne de n par 4 s'écrit $n = 4q + r$ avec $0 \leqslant r < 4$ et $q = 2r$, c'est-à-dire $n = 8r + r = 9r$ avec $0 \leqslant r < 4$.
D'où $n \in \{0; 9; 18; 27\}$.
Réciproquement, on vérifie que ces quatre entiers vérifient les conditions de l'énoncé.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 85 :

Soit n un entier naturel tel que la division euclidienne de n par 6 s'écrit $n = 6q + r$ avec $0 \leqslant r < 6$ et $r = 2q$. Ainsi le reste r de cette division est pair et, de plus, $n = 3r + r = 4r$.
D'où $n \in \{0; 8; 16\}$.
Réciproquement, on vérifie que ces trois entiers vérifient les conditions de l'énoncé.

Corrigé exercice 86 :

Jeanne a oublié la condition sur le reste qui doit être strictement inférieur au diviseur.
Dans la division euclidienne de $(n + 2)^3$ par n, 8 est le reste uniquement si $n > 8$.
Dans les autres cas :

- Si $n = 1$, $(1 + 2)^3 = 27 = 1 \times 27$, donc ce reste vaut 0.
- Si $n = 2$, $(2 + 2)^3 = 64 = 2 \times 32$, donc ce reste vaut 0.
- Si $n = 3$, $(3 + 2)^3 = 125 = 3 \times 41 + 2$, donc ce reste vaut 2.
- Si $n = 4$, $(4 + 2)^3 = 216 = 4 \times 54$, donc ce reste vaut 0.
- Si $n = 5$, $(5 + 2)^3 = 343 = 5 \times 68 + 3$, donc ce reste vaut 3.
- Si $n = 6$, $(6 + 2)^3 = 512 = 6 \times 85 + 2$, donc ce reste vaut 2.
- Si $n = 7$, $(7 + 2)^3 = 729 = 7 \times 104 + 1$, donc ce reste vaut 1.
- Si $n = 8$, $(8 + 2)^3 = 1000 = 8 \times 125$, donc ce reste vaut 0.

Corrigé exercice 87 :

Soit n un entier naturel tel que $n = 58q + r$ avec $0 \leqslant r < 58$ et $r = q^3$.
Ainsi, $0 \leqslant q^3 < 58$.
De plus, n est un entier naturel non nul, donc $n \geqslant 1$ et donc q ne peut prendre que les valeurs 1, 2 ou 3. On a alors :

- si $q = 1$, $n = 58 \times 1 + 1 = 59$;
- si $q = 2$, $n = 58 \times 2 + 2^3 = 124$;
- si $q = 3$, $n = 58 \times 3 + 3^3 = 201$.

Corrigé exercice 88 :

D'après l'énoncé, la division euclidienne de a par 5 s'écrit $a = 5q + 4$.
On procède par disjonction de cas :

- si $q = 5k, k \in \mathbb{N}$, alors $a = 25k + 4$ et donc le reste dans la division euclidienne de a par 25 est 4 ;
- si $q = 5k + 1, k \in \mathbb{N}$, alors $a = 25k + 9$ et donc le reste dans la division euclidienne de a par 25 est 9 ;

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

- si $q = 5k + 2, k \in \mathbb{N}$, alors $a = 25k + 14$ et donc le reste dans la division euclidienne de a par 25 est 14 ;
- si $q = 5k + 3, k \in \mathbb{N}$, alors $a = 25k + 19$ et donc le reste dans la division euclidienne de a par 25 est 19 ;
- si $q = 5k + 4, k \in \mathbb{N}$, alors $a = 25k + 24$ et donc le reste dans la division euclidienne de a par 25 est 24.

Ainsi, les restes possibles dans la division de a par 25 sont 4, 9, 14, 19 ou 24.

Corrigé exercice 89 :

1. Pour tout entier naturel n non nul, $(n+2)(n^2+n+9)+r = n^3+3n^2+11n+18+r$. Or $P(n) = n^3 + 3n^2 + 11n + 20$, d'où $r = 2$.
2. Comme n est un entier naturel non nul, on a $n + 2 \geqslant 3$. Ainsi, $0 \leqslant 2 < n + 2$ donc 2 est bien le reste de la division euclidienne de $P(n)$ par $n + 2$.

Corrigé exercice 90 :

1. On a $135 = 2 \times 67 + 1$

   $67 = 2 \times 33 + 1$

   $33 = 2 \times 16 + 1$

   $16 = 2 \times 8 = 2^4$.

   On en déduit que $135 = 2^7 + 2^2 + 2 + 1$ et donc que $135 = \overline{10000111}^2$.
2. $N = \overline{11010110}^2 = 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2 = 214$.
3. a. $N = 214 = 16 \times 13 + 6$ (et on a bien $0 \leqslant 6 < 16$).

   b. $N = \overline{D6}^{16}$.
4. $P = \overline{2A14E}^{16} = 2 \times 16^4 + 10 \times 16^3 + 1 \times 16^2 + 4 \times 16 + 14 = 172\,366$.
5. a. $7 = 2^2 + 2 + 1 = \overline{111}^2$, $D = 13 = 2^3 + 2^2 + 1 = \overline{1101}^2$ et $5 = 2^2 + 1 = \overline{101}^2$.

   b. $\overline{7D5}^{16} = 16^2 \times 7 + 16 \times 13 + 5$
   $\overline{7D5}^{16} = 16^2 \times (2^2 + 2 + 1) + 16 \times (2^3 + 2^2 + 1) + 2^2 + 1$
   $\overline{7D5}^{16} = 2^8 \times (2^2 + 2 + 1) + 2^4 \times (2^3 + 2^2 + 1) + 2^2 + 1$
   $\overline{7D5}^{16} = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 1$
   $\overline{7D5}^{16} = \overline{11111010101}^2$
6. a. On commence par convertir chaque nombre de la base 16 en base 2, en complétant si nécessaire par des zéros à gauche afin d'obtenir des paquets de 4 bits, puisque $16 = 2^4$. Puis on concatène ces écritures. En effet, on a vu dans la question précédente que $\overline{7D5}^{16} = 16^2 \times (2^2 + 2 + 1) + 16 \times (2^3 + 2^2 + 1) + 2^2 + 1$, c'est-à-dire $\overline{7D5}^{16} = (2^4)^2 \times (2^2 + 2 + 1) + (2^4) \times (2^3 + 2^2 + 1) + (2^4)^0 \times (2^2 + 1)$. D'où la méthode.

   b. On a $A = 10 = 2^3 + 2 = \overline{1010}^2$, $2 = \overline{0010}^2$ et $C = 12 = 2^3 + 2^2 = \overline{1100}^2$. Ainsi, d'après la question précédente, $\overline{A2C}^{16} = \overline{101000101100}^2$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 91 :

1. $P_1 = 0$ donc le reste de la division de P_1 par 6 est 0.

   $P_2 = 6$ donc le reste de la division de P_2 par 6 est 0.

   $P_3 = 24$ donc le reste de la division de P_3 par 6 est 0.

   Il semblerait donc que, pour tout entier naturel non nul n, 6 divise P_n.

2. a. Pour tout entier naturel non nul n, $P_n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$.

   b. Soit n un entier naturel non nul.

   On raisonne par disjonction de cas :

   - s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 6k$, alors $P_n = 6k(6k-1)(6k+1)$ est bien divisible par 6 ;
   - s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k+1$, alors $P_n = (6k+1)(6k)(6k+2)$ est bien divisible par 6 ;
   - s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k+2$, alors $P_n = (6k+2)(6k+1)(6k+3) = 6(3k+1)(6k+1)(k+2)$ est bien divisible par 6 ;
   - s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k+3$, alors $P_n = (6k+3)(6k+2)(6k+4) = 6(2k+1)(3k+1)(6k+4)$ est bien divisible par 6 ;
   - s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k+4$, alors $P_n = (6k+4)(6k+3)(6k+5) = 6(3k+2)(2k+1)(6k+5)$ est bien divisible par 6 ;
   - s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6k+5$, alors $P_n = (6k+5)(6k+4)(6k+6) = 6(6k+5)(6k+4)(k+1)$ est bien divisible par 6.

   Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, P_n est divisible par 6.

Document sous licence libre Creative Commons

9 Exercices d'entraînement partie 3

Corrigé exercice 92 :

$54 \equiv 5\,[7]$	$85 \equiv 15\,[7]$	$139 \equiv -1\,[7]$
$25 \equiv 3\,[11]$	$100 \equiv 1\,[11]$	$2500 \equiv 3\,[11]$

Corrigé exercice 93 :

$a \equiv 55\,[26]$ donc $a \equiv 3\,[26]$ et $0 \leqslant 3 < 26$ donc le reste de la division de a par 26 est 3. De même, le reste de la division euclidienne de b par 26 est 6, et le reste de la division euclidienne de c par 26 est 13.

Corrigé exercice 94 :

1. On a $a+b \equiv 11[13]$. Or $0 \leqslant 11 < 13$ donc le reste de la division de $a+b$ par 13 est 11.
2. $ab \equiv 28[13]$ donc $ab \equiv 2[13]$. Or $0 \leqslant 2 < 13$ donc le reste de la division de ab par 13 est 2.
3. $a \equiv 7[13]$ donc $3a \equiv 21[13]$. De plus, $b \equiv 4[13]$ donc $2b \equiv 8[13]$. D'où $2b-3a \equiv -13[13]$ donc $2b-3a \equiv 0[13]$. Or $0 \leqslant 0 < 13$ donc le reste de la division de $2b-3a$ par 13 est 0.
4. $a^2 \equiv 49\,[13]$ donc $a^2 \equiv 10\,[13]$. De même, $b^2 \equiv 3\,[13]$. Donc $a^2+b^2 \equiv 0\,[13]$.

Corrigé exercice 95 :

1. 2 est solution de l'équation. En effet, $2 \times 2 + 3 = 7$ et $7 \equiv 0[7]$.
2. On effectue le tableau de congruence modulo 7 ci-dessous.

$x \equiv \ldots\,[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$2x+3 \equiv \ldots\,[7]$	3	5	0	2	4	6	1

On en déduit que les solutions de l'équation sont exactement les entiers de la forme $x = 7k+2$, avec k entier naturel.

Corrigé exercice 96 :

1. a. Puisque $a \equiv b[m]$, alors a et b ont le même reste dans la division euclidienne. On a donc $a = mq + r$ et $b = mq' + r$ avec q, q' et r des entiers, r vérifiant l'inégalité $0 \leqslant r < m$.
   b. On a ainsi $a - b = mq + r - mq' - r = m(q - q')$, d'où $m \mid a - b$.
2. a. On a $a = mq + r$ avec $0 \leqslant r < m$.
   b. $m|a-b$ donc il existe un entier k tel que $a - b = km$.

c. En combinant les réponses aux deux questions précédentes, on a donc $b = a - km = mq + r - km = m(q-k) + r$ et $0 \leqslant r < m$, donc le reste de la division euclidienne de b par m vaut r.

En conclusion, a et b ont le même reste dans la division euclidienne par m.

Corrigé exercice 97 :

1. $a \equiv b\ [m] \Leftrightarrow m \mid a - b$ et $c \equiv d\ [m] \Leftrightarrow m \mid c - d$. Or, puisque $m \mid a - b$ et $m \mid c - d$, alors m divise toute combinaison linéaire de ces deux nombres, en particulier $m \mid a - b + c - d$ donc $m \mid (a+c) - (b+d)$ et donc $a + c \equiv b + d[m]$.

2. $a \equiv b\ [m] \Leftrightarrow m \mid a - b$ et $c \equiv d\ [m] \Leftrightarrow m \mid c - d$. Or, puisque $m \mid a - b$ et $m \mid c - d$, alors m divise toute combinaison linéaire de ces deux nombres, en particulier $m \mid c(a-b) + b(c-d)$ donc $m \mid ca - bd$ et donc $ca \equiv bd[m]$.

3. On va démontrer par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a^p \equiv b^p\ [m]$.

   Initialisation : La propriété est vraie au rang 1 car $a \equiv b\ [m]$.

   Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un entier naturel non nul k, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel non nul k tel que $a^k \equiv b^k\ [m]$. Démontrons qu'elle est aussi vraie au rang $k+1$, c'est-à-dire que $a^{k+1} \equiv b^{k+1}\ [m]$.

   D'après l'hypothèse de récurrence, on a $a^p \equiv b^p\ [m]$. De plus $a \equiv b\ [m]$ donc, d'après la compatibilité de la congruence avec le produit, $a^p \times a \equiv b^p \times b\ [m]$ et donc $a^{p+1} \equiv b^{p+1}\ [m]$.

   La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

   Conclusion : On a montré que la propriété était vraie au rang 1, puis que s'il existait un entier naturel non nul k tel que la propriété est vraie au rang k, alors elle l'est au rang $k+1$. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel non nul p, $a^p \equiv b^p\ [m]$.

4. Comme $a \equiv 5[7]$, alors, d'après la compatibilité de la congruence avec les puissances, $a^2 \equiv 25[7]$ et, par compatibilité de la congruence avec la multiplication, $3a^2 \equiv 75[7]$. D'autre part, comme $n \equiv 3[7]$, alors, par compatibilité de la congruence avec les puissances, $b^2 \equiv 9[7]$. Ainsi, $3a^2 - b^2 \equiv 3[7]$. Or $0 \leqslant 3 < 7$ donc le reste de la division euclidienne de $3a^2 - b^2$ par 7 est 3.

Corrigé exercice 98 :

1. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

2. D'après la question précédente, $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3(a^2b + ab^2)$.

   Si $a^3 + b^3$ est un multiple de 3, alors il existe un entier k tel que $a^3 + b^3 = 3k$ et on a alors $(a+b)^3 = 3k + 3(a^2b + ab^2) = 3(k + a^2b + ab^2)$. Ainsi, $(a+b)^3$ est un multiple de 3.

   Réciproquement, si $(a+b)^3$ est un multiple de 3, alors il existe un entier K tel que $(a+b)^3 = 3K$. D'oùa$^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3(a^2b + ab^2) = 3K - 3(a^2b + ab^2) = 3(K - (a^2b + ab^2))$ et on en déduit donc que $a^3 + b^3$ est un multiple de 3.

   Ainsi, par double implication, on vient de montrer que $(a+b)^3$ est un multiple de 3 si, et seulement si, $a^3 + b^3$ est un multiple de 3.

Document sous licence libre Creative Commons

3. D'après la question précédente, $(x+2)^3$ est un multiple de 3 si, et seulement si, $x^3+8 \equiv 0[3]$, soit $x^3 \equiv 1[3]$.

   Construisons un tableau de congruence.

$x \equiv \dots [3]$	0	1	2
$x^3 \equiv \dots [3]$	0	1	2

   Ainsi, l'ensemble des nombres x tels que $(x+2)^3$ soit divisible par 3 est l'ensemble des nombres entiers de la forme $x = 3k+1$, avec k entier. De plus, on veut $-5 \leqslant x \leqslant 5$ donc $x \in \{-5; -2; 1; 4\}$.

   Réciproquement, ces nombres sont bien solution du problème.

Corrigé exercice 99 :

1. On obtient les tableaux suivants.

$+$	0	1	2		$\times$	0	1	2
0	0	1	2		0	0	0	0
1	1	2	0		1	0	1	2
2	2	0	1		2	0	2	1

2. On remarque dans la table de multiplication modulo 3 que 2 est son propre inverse.

Corrigé exercice 100 :

1. Soit n un entier naturel. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7. Alors r est un entier naturel et $0 \leqslant r < 7$ donc r ne peut prendre que sept valeurs : 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

   Or $4 \equiv -3[7]$, $5 \equiv -2[7]$ et $6 \equiv -1[7]$. D'où le résultat.

2. On établit le tableau de congruence modulo 7 ci-dessous.

$x \equiv \dots [7]$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x^2 \equiv \dots [7]$	2	4	1	0	1	4	2

   Les restes possibles de x^2 dans la division euclidienne par 7 sont donc 0, 1, 2 et 4.

3. On établit le tableau de congruence modulo 7 ci-dessous.

$x \equiv \dots [7]$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x^4 \equiv \dots [7]$	4	2	1	0	1	2	4

   Les restes possibles de x^4 dans la division euclidienne par 7 sont donc 0, 1, 2 et 4.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 101 :

1. On va démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   Initialisation : La propriété est vraie au rang 0 car $0^2 = \dfrac{0 \times 1 \times 1}{6}$.

   Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un entier n, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel n tel que $S = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   Démontrons que la propriété est également vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

   D'après hypothèse de récurrence, on a $0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   Ajoutons $(n+1)^2$ à chaque terme de l'égalité, on obtient alors :

   $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$ soit

   $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$ d'où

   $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

   Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

   Conclusion : On a montré que la propriété était vraie au rang 0, puis que s'il existait un rang n tel que la propriété est vraie, alors elle est également vraie au rang $n+1$.

   D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. S_n est un entier en tant que somme de nombres entiers donc $n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 6. Ainsi, S_n est pair si, et seulement si, $n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 4. Effectuons un tableau de congruence modulo 4.

$n \equiv \ldots [4]$	0	1	2	3
$n+1 \equiv \ldots [4]$	1	2	3	0
$2n+1 \equiv \ldots [4]$	1	3	1	3
$S_n \equiv \ldots [4]$	0	2	3	0

   Ainsi S_n est pair s'il existe un entier naturel k tel que $n = 4k$ ou $n = 4k+3$.

Corrigé exercice 102 :

1. On a, d'une part, $2305 \equiv 1[9]$ donc $2305^{2019} \equiv 1[9]$, et d'autre part $1106 \equiv -1[9]$ donc $1106^{2019} \equiv -1[9]$. Par addition, on a alors $A \equiv 0[9]$. Donc A est divisible par 9.

2. On a $12 \equiv 5[7]$ et, par conséquent, $12^n \equiv 5^n[7]$. On en déduit que $B \equiv 5^n \times 5 - 5^n \times 5[7]$ et donc que $B \equiv 0[7]$. Donc B est divisible par 7.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 103 :

1. On a $3^0 \equiv 1[5]$, $3^1 \equiv 3[5]$, $3^2 \equiv 4[5]$, $3^3 \equiv 2[5]$ et $3^4 \equiv 1[5]$.
   On procède donc par disjonction de cas.
   Si $n = 4p$, on a $3^{4p} = (3^4)^p$, d'où $(3^4)^p \equiv 1^n[5]$ et donc $3^{4p} \equiv 1[5]$.
   Si $n = 4p+1$, on a $3^{4p+1} = 3^{4p} \times 3$ d'où $3^{4p+1} \equiv 3[5]$.
   Si $n = 4p+2$, on a $3^{4p+2} = 3^{4p} \times 3^2$ d'où $3^{4p+2} \equiv 4[5]$.
   Si $n = 4p+3$, on a $3^{4p+3} = 3^{4p} \times 3^3$ d'où $3^{4p+1} \equiv 2[5]$.
2. $243 \equiv 3[5]$ et $942 = 4 \times 235 + 2$ donc $243^{942} \equiv 3^2[5] \equiv 4[5]$.

Corrigé exercice 104 :

1. On a $5^0 \equiv 1[6]$, $5^1 \equiv 5[6]$ et $5^2 \equiv 1[6]$.
   Ainsi, si n est de la forme $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $5^n \equiv (5^2)^k\,[6] \equiv 1\,[6]$.
   Si n est de la forme $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $5^n \equiv (5^2)^k \times 5[6] \equiv 5\,[6]$.
2. $15365 \equiv 5[6]$ et $221 = 2 \times 110 + 1$ d'où $15365^{221} \equiv 5[6]$.

Corrigé exercice 105 :

1. On a $9 \equiv 5\,[10]$, $9^2 \equiv 8\,[10]$, $9^3 \equiv 7\,[10]$ et $9^4 \equiv 1\,[10]$.
   Donc $9^{231} \equiv 9^{4\times57+3} \equiv (9^4)^{57} \times 9^3 \equiv 1 \times 7 \equiv 7[10]$.
   Ainsi, le chiffre des unités de 9^{231} est 7.
2. De même, $4 \equiv 4\,[10]$, $4^2 \equiv 6\,[10]$ et $4^3 \equiv 4\,[10]$. Ainsi, si n est pair, $4^n \equiv 6[10]$ et si n est impair, $4^n \equiv 4[10]$. Donc le chiffre des unités de 4^{125} est 4.

Corrigé exercice 106 :

1. $x \equiv 2\,[10]$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 7k+2$.
   De plus, $-3 < x < 10 \Leftrightarrow -3 < 7k+2 < 10 \Leftrightarrow \dfrac{-5}{7} < k < \dfrac{8}{7}$.
   Ainsi, les solutions de ce système sont 2 (lorsque $k = 0$) et 9 (lorsque $k = 1$).
2. $x + 2 \equiv 4\,[5]$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 5k+2$.
   De plus, $-3 < x < 10 \Leftrightarrow -3 < 5k+2 < 10 \Leftrightarrow -1 < k < \dfrac{7}{5}$.
   Ainsi, les solutions de ce système sont 2 (lorsque $k = 0$) et 7 (lorsque $k = 1$).
3. $x \equiv 6\,[4]$ si, et seulement si,$x \equiv 2\,[4]$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 4k+2$. De plus, $-4 < x < 12 \Leftrightarrow \dfrac{-3}{2} < k < \dfrac{5}{2}$. Ainsi, les solutions de ce système sont –2 (lorsque $k = -1$), 2 (lorsque $k = 0$), 6 (lorsque $k = 1$) et 10 (lorsque $k = 2$).

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 107 :

1. On dresse un tableau des restes dans la congruence modulo 5.

$x \equiv ...[5]$	0	1	2	3	4
$3x \equiv ...[5]$	0	3	1	4	2

2. Ainsi, $3x \equiv 2[5]$ si, et seulement si, $x \equiv 4[5]$.

Corrigé exercice 108 :

1. On dresse un tableau des restes dans la congruence modulo 7.

$x \equiv ...[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$6x \equiv \ldots[7]$	0	6	5	4	3	2	1

Ainsi, $6x \equiv 2[7]$ si, et seulement si, $x \equiv 5[7]$. Donc les solutions de cette équation sont les nombres entiers x tels qu'il existe un entier naturel k tel que $x = 7k + 5$.

2. On dresse un tableau des restes dans la congruence modulo 11.

$x \equiv ...[11]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$7x \equiv \ldots[11]$	0	7	3	10	6	2	9	5	1	8	4

Ainsi, $7x \equiv 2[11]$ si, et seulement si, $x \equiv 5[10]$. Donc les solutions de cette équation sont les nombres entiers x tels qu'il existe un entier k tel que $x = 11k + 5$.

3. On dresse un tableau des restes dans la congruence modulo 10.

$x \equiv ...[10]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$4x \equiv \ldots[10]$	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6

Ainsi, $4x \equiv 0[10]$ si, et seulement si, $x \equiv 0[10]$ ou $x \equiv 5[10]$. Donc les solutions de cette équation sont les nombres entiers x tels qu'il existe un entier naturel k tel que $x = 10k$ ou $x = 10k + 5$.

4. $5x+2 \equiv 13[5] \Leftrightarrow 5x+2 \equiv 3[5] \Leftrightarrow 5x \equiv 1[5]$. Or, pour tout entier x, $5x \equiv 0[5]$. Donc l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 109 :

1. $U_1 = -4015$, $U_2 = -1048333$ et $U_3 = -268434727$.
2. $3 \equiv -8[11]$ donc $3^{n+3} \equiv (-8)^{n+3}[11]$. Or $(-8)^{n+3} = (-1)^{n+3}8^{n+3}$.

   On en déduit alors que $(-8)^{n+3} = (-1)^{n+3}(2^3)^{n+3}$, donc $3^{n+3} \equiv (-1)^{n+3}2^{3n+9}\,[11]$ et donc $3^{n+3} \equiv (-1)^{n+1}2^{3n+9}\,[11]$, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{n+3} = (-1)^{n+1}$.
3. a. On a $4^{4n+2} = 2^{2(4n+2)} = 2^{8n+4}$ donc $U_n \equiv (-1)^{n+3}2^{3n+9} - 2^{8n+4}[11]$.

   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \equiv (-1)^{n+3}2^{3n+9} - 2^{8n+4}[11]$ donc $U_n \equiv 2^{3n+9}[(-1)^{n+3} - 2^{5(n-1)}]\,[11]$.
4. On a $2^0 \equiv 1[11]$, $2^1 \equiv 2[11]$, $2^2 \equiv 4[11]$, $2^3 \equiv 8[11]$, $2^4 \equiv 5[11]$ et $2^5 \equiv 10[11]$, d'où $2^5 \equiv -1[11]$. On a donc $2^{5(n-1)} \equiv (-1)^{n-1}[11]$.
5. D'après la question précédente, $U_n \equiv 2^{3n+9}((-1)^{n+1} + (-1)^{n-1})$, d'où $U_n \equiv 0[11]$.

   Ainsi, U_n est divisible par 11.

Corrigé exercice 110 :

1. a. $\overline{abc} = a \times 10^2 + b \times 10 + c$. Or $10 \equiv 1[3]$ et $10^2 \equiv 1[3]$ donc $\overline{abc} \equiv a + b + c[3]$.

   b. On a démontré que $\overline{abc}$ et $a+b+c$ ont le même reste dans la division euclidienne par 3. On peut en déduire que $\overline{abc}$ est divisible par 3 si, et seulement si, $a+b+c$ est divisible par 3.
2. Généralisation

a. On a $A = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + ... + a_1 \times 10 + a_0$.

b. On a $10 \equiv 1[3]$ donc, par compatibilité de la congruence avec les puissances, pour tout entier n, $10^n \equiv 1[3]$.

c. On a donc $A \equiv a_n + a_{n-1} + ... + a_0[3]$. Ainsi, un nombre entier est divisible par trois si, et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Corrigé exercice 111 :

Soit A un entier s'écrivant, en base 10, $A = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ avec a_0,..., a_n des entiers, $a_n \neq 0$.
Ainsi, on a $A = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + ... + a_1 \times 10 + a_0$.
Or $10 \equiv 1[9]$ donc, par compatibilité de la congruence avec les puissances, pour tout entier n, $10^n \equiv 1[9]$. Ainsi, $A \equiv a_n + a_{n-1} + ... + a_0[9]$.
En conclusion, un nombre entier est divisible par 9 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Corrigé exercice 112 :

1. x est impair si, et seulement si, x est congru à 1, 3, 5 ou 7 modulo 8.

   On construit un tableau de congruence modulo 8.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

$x \equiv \ldots [8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x^2 \equiv \ldots [8]$	0	1	4	1	0	1	4	1

Ainsi, d'après le tableau, x est impair si, et seulement si, $x^2 \equiv 1[8]$.

2. $x^2 = 8y + 1$ implique que $x^2 \equiv 8y + 1[8]$. Or $8y \equiv 0[8]$ donc $x^2 \equiv 1[8]$. Or, d'après la question précédente, $x^2 \equiv 1[8]$ implique que x est impair.

   Montrons que si x est impair, alors y est un entier.

   Puisque x est impair, il existe un entier k tel que $x = 2k+1$. Ainsi, on a $(2k+1)^2 = 8y + 1$, c'est-à-dire $8y = (2k + 1)^2 - 1$, soit $8y = 4k^2 + 4k$ et donc $2y = k^2 + k$. Or $k^2 + k = k(k+1)$ est le produit de deux entiers consécutifs, et est donc un multiple de 2. Ainsi, y est bien un entier.

   Réciproquement, pour tout entier k, le couple $\left(2k + 1; \dfrac{k^2 + k}{2}\right)$ est solution de l'équation.

3. D'après la question précédente, les points à coordonnées entières de la parabole sont donc les points de coordonnées $\left(2k + 1; \dfrac{1}{8}(2k + 1)^2 - \dfrac{1}{8}\right)$.

4. On peut, par exemple, modifier le programme comme ci-dessous.

```python
from math import*

def f(a,b,c,x):
    f=a*x**2+b*x+c
    return f

def coord_entieres(a,b,c,n):
    if f(a,b,c,0)==floor(f(a,b,c,0)):
        print("(",0,",",f(a,b,c,0),")")
    for i in range(1,n+1):
        if f(a,b,c,i) == floor(f(a,b,c,i)):
            print("(",i,",",f(a,b,c,i),")")
        if f(a,b,c,-i) == floor(f(a,b,c,-i)):
            print("(",-i,",",f(a,b,c,-i),")")
    print("Il n'y a pas  d'autres points à coordonnées entières d'abscisse comprise entre",-n,"et",n)
```

Corrigé exercice 113 :

1. a. On calcule la clé de contrôle : $s = 1+0+2\times 2+3(4+5+7) = 53$ et $53 \equiv 8[9]$. Ce numéro peut donc bien être celui d'un adhérent.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

b. On calcule la clé de contrôle : $s = 2+9+2\times 2+3(3+5+1) = 42$ et $42 \equiv 6[9]$. Ce numéro ne peut donc pas être celui d'un adhérent.

2. D'après l'énoncé, on a $c_0 = 2$, $c_1c_2 = 82$ et $c_3c_4c_5 = 123$. On calcule alors la clé de contrôle du numéro de cet adhérent : on a $s = 2+8+2\times 2+3\times(1+2+3) = 32$ et $32 \equiv 5[9]$. Ainsi, le numéro de cet adhérent est 2821235.

3. Soit $c_0c_1c_2c_3c_4c_5c_6$ le numéro d'un abonné. On a alors $s = c_0+c_1+2c_2+3(c_3+c_4+c_5)$. Si, lors de la saisie, une erreur est commise sur c_0, ce calcul devient $s' = c_0' + c_1 + 2c_2 + 3(c_3+c_4+c_5)$. Cette erreur n'est pas détectée si, et seulement $s \equiv s'[9]$, c'est-à-dire si, et seulement si, $c_0 \equiv c_0'[9]$. Or c_0 et c_0' sont des entiers compris entre 1 et 3 donc $c_0 \equiv c_0'[9] \Leftrightarrow c_0 = c_0'$. Ainsi, si, lors de la saisie, une erreur est commise sur le chiffre correspondant à l'activité de l'adhérent, alors cette erreur est forcément détectée.

4. Soit $c_0c_1c_2c_3c_4c_5c_6$ le numéro d'un abonné. On a alors $s = c_0+c_1+2c_2+3(c_3+c_4+c_5)$. Si, lors de la saisie, les deux chiffres de l'année de naissance sont intervertis, on a alors $s' = c_0+2c_1+c_2+3(c_3+c_4+c_5)$. Cette erreur n'est pas détectée si, et seulement si, $s \equiv s'[9]$ soit $1c_1 + 2c_2 \equiv 2c_1 + 1c_2[9]$ c'est-à-dire si, et seulement si, $c_2 \equiv c_1[9]$. Or c_1 et c_2 sont des entiers compris entre 0 et 9, et $9 \equiv 0[9]$. Ainsi l'erreur n'est pas détectée si, et seulement si, l'année de naissance est 1990 ou 2009.

Corrigé exercice 114 :

1. On construit un tableau de congruence modulo 7.

$n \equiv \dots [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$n^3 \equiv \dots [7]$	0	1	1	6	1	6	6
$n^3+1 \equiv \dots [7]$	1	2	2	0	2	0	0

Ainsi, la proposition est vraie.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $2^2 \equiv 1[3]$, d'où $2^{2n} \equiv 1[3]$ et $2^{2n}+1 \equiv 2[3]$.

La proposition est donc fausse.

3. On a, par exemple, $0^2 - 0 \equiv 0[5]$ et 0 n'est pas congru à 1 modulo 5. Donc cette affirmation est fausse.

4. Avec les notations de l'énoncé, on a $A = a\times 10^2+b\times 10+c$ et $B = b\times 10^2+a\times 10+c$, d'où $A - B = 10^2(a-b)+10(b-a)$. Or $10 \equiv 1[9]$ et $10^2 \equiv 1[9]$, d'où $A - B \equiv a-b+b-a[9]$ et donc $A - B \equiv 0[9]$.

Ainsi, la proposition est donc vraie.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 115 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $A = 7^n + 9^n$. Or $7 \equiv -1[8]$ et $9 \equiv 1[8]$, donc $7^n \equiv (-1)^n[8]$ et $9^n \equiv 1[8]$. D'où, si n est impair, $A \equiv (-1) + 1[8] \equiv 0[8]$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $B = 3^{2n} - 2^n$. Or $3^2 \equiv 1[2]$ donc $(3^2)^n \equiv 1[2]$. De plus $2^n \equiv 0[2]$, donc $B \equiv 1[2]$ et donc B n'est pas divisible par 2.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $B = 3^{2n} - 2^n$. Or $3^2 \equiv 2[7]$ donc $(3^2)^n \equiv 2^n[7]$. On a alors $B \equiv 2^n - 2^n[7]$, c'est-à-dire $B \equiv 0[7]$.

Corrigé exercice 116 :

1. Soit (x, y) est une solution de (E). On a $3y^2 \equiv 0[3]$ donc $4x^2 + 3y^2 \equiv 4x^2[3]$. De plus $11 \equiv 2[3]$. D'où $4x^2 \equiv 2\,[3]$.

2. On construit un tableau de congruence modulo 3.

$x \equiv \ldots [3]$	0	1	2
$x^2 \equiv \ldots [3]$	0	1	1
$4x^2 \equiv \ldots [3]$	0	1	1

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $4x^2 \not\equiv 2[3]$ donc (E) n'admet pas de solution entière.

Corrigé exercice 117 :

1. a. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $2^{3k} = (2^3)^k = 8^k$. Or $8 \equiv 1\,[7]$, d'où $2^{3k} \equiv 1^k\,[7]$, soit $2^{3k} \equiv 1\,[7]$.

   b. On a $2009 = 3 \times 669 + 2$ donc $2^{2009} = 2^{3\times669+2} = 2^{3\times669} \times 2^2$. Or $2^{3k} \equiv 1\,[7]$ donc $2^{3\times669} \equiv 1\,[7]$.
   De plus, $2^2 \equiv 4\,[7]$ donc $2^{2009} \equiv 4\,[7]$.
   Ainsi, le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 est 4.

2. a. $10^3 - 7 \times 143 = -1$ donc $10^3 \equiv -1[7]$.

   b. $N \equiv 0\,[7] \Leftrightarrow a \times 10^3 + b \equiv 0\,[7] \Leftrightarrow -a + b \equiv 0\,[7] \Leftrightarrow a \equiv b\,[7]$.
   On procède alors par disjonction de cas.
   Si $a = 1$, alors on a $b \equiv 1\,[7]$ et $0 \leqslant b \leqslant 9$ donc $b = 1$, ce qui donne $N = 1001$ ou $b = 8$, et on obtient $N = 1008$.
   Si $a = 2$, alors on a $b \equiv 2\,[7]$ et $0 \leqslant b \leqslant 9$ donc $b = 2$, ce qui donne $N = 2002$, ou $b = 9$, et on obtient $N = 2009$.
   Si $a = 3$, alors on a $b \equiv 3\,[7]$ et $0 \leqslant b \leqslant 9$ donc $b = 3$, ce qui donne $N = 3003$.
   Si $a = 4$, alors on a $b \equiv 4\,[7]$ et $0 \leqslant b \leqslant 9$ donc $b = 4$, ce qui donne $N = 4004$.
   Si $a = 5$, alors on a $b \equiv 5\,[7]$ et $0 \leqslant b \leqslant 9$ donc $b = 5$, ce qui donne $N = 5005$.
   Si $a = 6$, alors on a $b \equiv 6\,[7]$ et $0 \leqslant b \leqslant 9$ donc $b = 6$, ce qui donne $N = 6006$.
   Si $a = 7$, alors on a $b \equiv 7\,[7]$ et $0 \leqslant b \leqslant 9$ donc $b = 0$, ce qui donne $N = 7000$, ou $b = 7$, et on obtient $N = 7007$.

Document sous licence libre Creative Commons

Si $a = 8$, alors on a $b \equiv 8\,[7]$ et $0 \leqslant b \leqslant 9$ donc $b = 1$, ce qui donne $N = 8001$, ou $b = 8$ soit $N = 8008$.

Enfin, si $a = 9$, alors on a $b \equiv 9\,[7]$ et $0 \leqslant b \leqslant 9$ donc $b = 2$, ce qui donne $N = 9002$, ou $b = 9$, et on obtient alors $N = 9009$.

Corrigé exercice 118 :

1. $U_0 = 3$, $U_1 = 14$ et $U_2 = 584$.

2. On a $U_{n+3} = 2^{n+3} + 2^{2(n+3)} + 2^{3(n+3)}$ d'où $U_{n+3} = 2^3.2^n + 2^6.2^{2n} + 2^9.2^{3n}$. Or $2^3 \equiv 1[7]$ donc, comme $2^6 = (2^3)^2$, $2^6 \equiv 1[7]$, et, de même, $2^9 \equiv 1[7]$.

   On en déduit que $U_{n+3} \equiv 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}[7]$, soit $U_{n+3} \equiv U_n[7]$.

3. D'après la question 1., on a $U_1 = 14$ donc $U_1 \equiv 0[7]$, $U_2 = 84$ donc $U_2 \equiv 0[7]$ et $U_0 = 3$ donc $U_0 \not\equiv 0[7]$. Ainsi, U_n est divisible par 7 si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 1 + 3k$ ou $n = 2 + 3k$.

4. On complète le programme comme ci-dessous.

```python
from math import*
def indice(n) :
    l = []
    for i in range(n+1):
        u = 2**i + 2**(2*i)+2**(3*i)
        if u%7==0:
            l.append(i)
    return l
```


cc BY NC SA

10 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 119 :

1. On vérifie bien le résultat demandé.

Mot à coder	D	I	V	I	S	I	B	I	L	I	T	E
x	3	8	21	8	18	8	1	8	11	8	19	4
Clé	M	A	T	H	M	A	T	H	M	A	T	H
y	12	0	19	7	12	0	19	7	12	0	19	7
z	15	8	14	15	4	8	20	15	23	8	12	11
Mot codé	P	I	O	P	E	I	U	P	X	I	M	L

2. a. La lettre codée E correspond à $z = 4$ et la lettre M de la clé MATH correspond à $y = 12$. Ainsi $x + y \equiv z\,[26]$ donne $x \equiv z - y\,[26]$ et donc $x \equiv 4 - 12\,[26]$ soit $x \equiv 18\,[26]$, ce qui correspond à la lettre S.
   b. On obtient le mot « SCIENTIFIQUE ».

Mot à décoder	E	C	B	L	Z	T	B	M	U	Q	N	L
z	4	2	1	11	25	19	1	12	20	16	13	11
Clé	M	A	T	H	M	A	T	H	M	A	T	H
y	12	0	19	7	12	0	19	7	12	0	19	7
x	18	2	8	4	13	19	8	5	8	16	20	4
Mot déchiffré	S	C	I	E	N	T	I	F	I	Q	U	E

Corrigé exercice 120 :

1. Si $n = 1$, $5 \equiv 5\,[9]$. Si $n = 2$, $5^2 \equiv 7\,[9]$. Si $n = 3$, $5^3 \equiv 8\,[9]$. Si $n = 4$, $5^4 \equiv 4\,[9]$. Si $n = 5$, $5^5 \equiv 2\,[9]$. Enfin, si $n = 6$, $5^6 \equiv 1\,[9]$.

   Ainsi, pour tous k et a entiers naturels, $5^{6\times k+a} \equiv (6^6)^k \times 5^a[9]$.

   D'où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $5^{6k+1} \equiv 5\,[9]$, $5^{6k+2} \equiv 7\,[9]$, $5^{6k+3} \equiv 8\,[9]$, $5^{6k+4} \equiv 4\,[9]$, $5^{6k+5} \equiv 2\,[9]$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $5^{6k} \equiv 1\,[9]$.

2. Tout d'abord, $2021 = 9 \times 224 + 5$, d'où $2021 \equiv 5\,[9]$ et donc $2021^{2021} \equiv 5^{2021}\,[9]$. De plus, $2021 = 6 \times 336 + 5$ donc $2021 = 6k + 5$, avec $k = 336$.

   Ainsi, d'après la question précédente, $5^{2021} \equiv 2\,[9]$, soit $2021^{2021} \equiv 2\,[9]$.

3. Soit $A = 2021^{2021}$.

   Alors $2021 < 10^4$ donc $2021^{2021} < (10^4)^{2021}$, c'est-à-dire $2021^{2021} < 10^{8084}$. Ainsi, 2021^{2021} est strictement inférieur à un nombre ayant 8085 chiffres. Il a donc au plus 8084 chiffres.

Corrigé exercice 121 :

Partie A

1. Supposons que a et $b$ont la même parité.

   Supposons tout d'abord que a et b sont tous les deux pairs. Alors on peut écrire $a = 2p, p \in \mathbb{N}$ et $b = 2q, q \in \mathbb{N}$. D'où $N = a^2 - b^2 = 4p^2 - 4q^2 = 2(2p^2 - 2q^2)$ avec $(2p^2 - 2q^2) \in \mathbb{Z}$, et donc N est pair.

   Supposons maintenant que a et b sont tous les deux impairs. Alors on peut écrire $a = 2p + 1, p \in \mathbb{N}$ et $b = 2q + 1, q \in \mathbb{N}$. D'où $N = 4p^2 + 4p + 1 - 4q^2 - 4q - 1 = 2(2p^2 + 2p - 2q^2 - 2q)$ avec $(2p^2 + 2p - 2q^2 - 2q) \in \mathbb{Z}$, et donc N est pair.

   Ainsi, par contraposée, a et b n'ont pas la même parité.

2. On a $N = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Or a et b sont des entiers naturels donc $a + b \geqslant 0$, et, comme N est un entier naturel, on en déduit que $a - b \geqslant 0$.

   Ainsi, en posant $p = a - b$ et $q = a + b$, on a bien $N = p \times q$ avec p et q des entiers naturels.

3. D'après la question 1., les entiers a et b n'ont pas la même parité, ainsi $p = a - b$ et $q = a + b$ sont impairs.

Partie B

1. a. On construit un tableau de congruence modulo 9.

$X \equiv ...\,[9]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$X^2 \equiv ...\,[9]$	0	1	4	0	7	7	0	4	1

   b. D'après la question précédente, les restes possibles modulo 9 de b^2 sont 0, 1, 4 ou 7. Or $250507 = 9 \times 27834 + 1$ donc $250507 \equiv 1\,[9]$. On en déduit que les restes modulo 9 de $a^2 = 250507 + b^2$ sont 1, 2, 5 ou 8. Mais a^2 est un carré, on sait donc, d'après la question précédente, que ses restes possibles sont 0, 1, 4 ou 7.
   En conclusion, on a forcément $a^2 \equiv 1[9]$.

   c. D'après le tableau de la question B.1.a., si $a^2 \equiv 1\,[9]$, alors $a \equiv 1\,[9]$ ou $a \equiv 8\,[9]$. Les restes possible modulo 9 de a sont donc 1 et 8.

2. Si $(a; b)$ vérifie la relation (E), alors $a^2 = 250507 + b^2$ et donc $a^2 \geqslant 250507$, d'où $a \geqslant 500,506$ et donc $a \geqslant 501$.

   Supposons que $(501; b)$ vérifie la relation (E). Alors $501^2 - 250507 = b^2 \iff b^2 = 494$.

   Or 494 n'est pas un carré parfait donc il n'existe pas d'entier b tel que $b^2 = 494$.

   Il n'y a donc pas de couple solution de la forme $(501; b)$.

3. a. D'après la question B ;1.c., $a \equiv 1\,[9]$ ou $a \equiv 8\,[9]$. Or $505 \equiv 1\,[9]$ et $503 \equiv 8\,[9]$, donc, par transitivité, $a \equiv 505\,[9]$ ou $a \equiv 503\,[9]$.

   b. $(505 + 9k; b)$ est solution de (E) si, et seulement si, $(505 + 9k)^2 - 250507 = b^2 \Leftrightarrow 4518 + 9090k + 81k^2 = b^2$.

   Pour $k = 0$, 4518 n'est pas un carré parfait, donc $k = 0$ ne fournit pas une solution à cette équation. Pour $k = 1$, $4518 + 9090 + 81 = 13689 = 117^2$, ainsi $b = 117$ et $a = 505 + 9 = 514$ forment un couple solution de (E).

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 122 :

Partie A : Étude de quelques cas particuliers

1. $N_3 = 111$, or $1+1+1=3$ donc N_3 est divisible par 3.
   De même, $N_6 = 111111$ est divisible par 3.
2. $N_4 = 1111 = 11 \times 100 + 11 = 11 \times 101$ donc N_4 est divisible par 11.
3. $N_6 = 111111 = 111 \times 1000 + 111 = 111 \times 1001$ donc N_6 est divisible par 111.

Partie B : Divisibilité par 7 et par 11

1. a. On reconnaît les sommes des termes d'une suite géométrique de raison 10 et de premier terme 1 donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $N_p = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k = \dfrac{(1-10^p)}{1-10} = \dfrac{(10^p-1)}{9}$.

   b. N_p est une somme d'entiers donc $\dfrac{(10^p-1)}{9}$ est un entier et donc $10^p - 1$ est un multiple de 9.

2. a. On a $10^0 \equiv 1[7]$, $10^1 \equiv 3[7]$, $10^2 \equiv 2[7]$, $10^3 \equiv 6[7]$, $10^4 \equiv 4[7]$, $10^5 \equiv 5[7]$ et $10^6 \equiv 1[7]$. Ainsi, pour tout a et k entiers naturels, $10^{6k+a} \equiv 10^a[7]$. D'où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $10^{6k} \equiv 1[7]$, $10^{6k+1} \equiv 3[7]$, $10^{6k+2} \equiv 2[7]$, $10^{6k+3} \equiv 6[7]$, $10^{6k+4} \equiv 4[7]$, $10^{6k+5} \equiv 5[7]$.

   b. On construit un tableau de congruence modulo 7.

$p \equiv \dots [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$10^p - 1 \equiv \dots [7]$	0	2	1	5	3	4	0

   Ainsi, $9N_p \equiv 0[7] \Leftrightarrow p \equiv 0[7]$ ou $p \equiv 6[7]$.
   Démontrons maintenant que $9x \equiv 0[7] \Leftrightarrow x \equiv 0[7]$.

$x \equiv \dots [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$9x \equiv \dots [7]$	0	2	2	4	1	3	5

   On peut donc en conclure que $N_p \equiv 0[7] \Leftrightarrow p \equiv 0[7]$ ou $p \equiv 6[7]$.

3. a. $10 - 11 \times 1 = -1$ donc $10 \equiv -1[11]$.

   b. Soit p un nombre pair. On a alors $10^p \equiv (-1)^p[11] \equiv 1[11]$ donc $10^p - 1 \equiv 0[11]$. Donc 11 divise $9N_p$.
   On conclut en utilisant un tableau de congruence modulo 11 :

$x \equiv \dots [11]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$9x \equiv \dots [11]$	0	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2

   On observe que $9x \equiv 0[11]$ si, et seulement si, $x \equiv 0[11]$.
   On a montré que 11 divise $9N_p$, on en déduit que 11 divise N_p.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 123 :

1. a. $40 = 13 + 27$. Or $13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$ et $27 = 3^3$. Ainsi, $40 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3 + 3^3$.

   b. $48 = 6 \times 8 = (8+1)^3 + (8-1)^3 - 8^3 - 8^3$, soit $48 = 9^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3$.
   On en déduit que $40 = 48 - 8 = 9^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3 - 2^3$.

2. a. On construit le tableau de congruence modulo 9 ci-dessous.

$n \equiv ...\,[9]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^3 \equiv ...\,[9]$	0	1	$8 \equiv -1$	$27 \equiv 0$	1	–1	0	1	–1

   b. Supposons que 40 peut se décomposer en une somme de 3 cubes. On a alors $40 = a^3 + b^3 + c^3$ avec a, b et c des entiers. D'après le tableau de la question précédente, a^3, b^3 et c^3 sont congrus modulo 9 à –1, 0 ou 1.
   Donc $a^3+b^3+c^3$ est congru à –3, –2, –1, 0, 1, 2 ou 3 modulo 9. Or $40 = 9\times 4+4$, soit $40 \equiv 4\,[9]$, donc 40 ne peut pas se décomposer en une somme de trois cubes.

Corrigé exercice 124 :

1. a. On a $\overline{ababab} = a10^5 + b10^4 + a10^3 + b10^2 + a \times 10 + b$.

   b. $\overline{ababab} = a10^5 + b10^4 + a10^3 + b10^2 + a \times 10 + b$ donc $\overline{ababab} = 10^4(10a+b) + 10^2(10a+b)+(10a+b)$ d'où $\overline{ababab} = (10a+b)(10^4+10^2+1) = \overline{ab}(10^4+10^2+1)$. Donc $\overline{ababab}$ est un multiple de $\overline{ab}$.

2. a. S est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 10^2 et de premier terme 1. Ainsi, $S = \dfrac{1-(10^2)^n}{1-10^2} = \dfrac{10^{2n}-1}{99}$.

   b. On a $\overline{ab...ab} = \overline{ab}\,(1 + 10^2 + ... + 10^{2n-2}) = \overline{ab} \times S$.

3. a. Soit N un entier naturel tel que $N|\overline{ab}$. Il existe donc un entier k tel que $\overline{ab} = kN$. Or $\overline{ab...ab} = \overline{ab} \times S$, avec S un entier en tant que somme d'entiers. D'où $\overline{ab...ab} = kN \times S = (kS) \times N$ avec kS un entier. On en déduit donc que N divise $\overline{ab...ab}$.

   b. La réciproque est fausse. En effet, 2323 est divisible par 2323 mais 2323 ne divise pas 23.

Corrigé exercice 125 :

1. On construit un tableau de congruence comme ci-dessous.

$a \equiv \dots [5]$	0	1	2	3	4
$a^2 \equiv \dots [5]$	0	1	4	4	1

2. On construit un nouveau tableau de congruence modulo 5.

$b \equiv \ldots [5]$	0	1	2	3	4
$b^2 \equiv \ldots [5]$	0	1	4	4	1
$3b^2 \equiv \ldots [5]$	0	3	2	2	3

Les restes possibles de la division euclidienne de $3b^2$ par 5 sont donc 0, 2 et 3.

3. $\sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$ équivaut à $a^2 = 3b^2$, ce qui implique $a^2 \equiv 3b^2[5]$.
   Or $a^2 \equiv 3b^2[5]$ implique, $a \equiv 0[5]$ et $b \equiv 0[5]$, car, d'après la question 1., a^2 ne peut être congru qu'à 0, 1 ou 4, et, d'après la question 2., $3b^2$ ne peut être congru qu'à 0, 2 ou 3. On en déduit que a et b sont donc des multiples de 5 et donc que la fraction $\dfrac{a}{b}$ n'est pas irréductible. Ce qui est absurde car on l'a supposée ainsi.

Corrigé exercice 126 :

Partie A

1. Avec $a = 13$ et $b = 4$, l'algorithme donne les résultats suivants.

a	b	c
13	4	0
9	4	1
5	4	2
1	4	3

2. Cet algorithme affiche le quotient c et le reste a de la division euclidienne de a (saisi en entrée) par b. Ici, $13 = 4 \times 3 + 1$ est la division euclidienne de 13 par 4.

Partie B

1. La lettre U correspond à $m = 20$. On a alors $9m + 5 = 185$ et $185 = 26 \times 7 + 3$, donc la lettre est codée par le nombre $p = 3$, ce qui correspond à la lettre D.

2. L'algorithme ci-dessous est un algorithme répondant au problème.

```
Demander la valeur de m
p ← 9m + 5
Tant que p ⩾ 26 :
        p ← p − 26
Fin de tant que
Afficher p
```

Document sous licence libre Creative Commons

Partie C

1. $9 \times 3 = 27$ et $27 \equiv 1\,[26]$, donc $x = 3$ convient.

2. Si $9m + 5 \equiv p\,[26]$ alors $27m + 15 \equiv 3p\,[26]$, soit $27m \equiv 3p - 15\,[26]$. Or $27 \equiv 1\,[26]$ donc $27m \equiv m\,[26]$. Enfin, par transitivité, $m \equiv 3p - 15\,[26]$.

   Réciproquement, si $m \equiv 3p - 15\,[26]$ alors $m+15 \equiv 3p\,[26]$ d'où $9m+135 \equiv 27p\,[26]$.

   De plus, $135 \equiv 5\,[26]$ d'où $9m + 135 \equiv 9m + 5\,[26]$, et $27p \equiv p\,[26]$ donc $9m + 5 \equiv p\,[26]$.

   Par double implication, on vient de montrer que :

$$9m + 5 \equiv p\,[26] \Leftrightarrow m \equiv 3p - 15\,[26].$$

3. La lettre B correspond à $p = 1$. On a donc $3p - 15 = -12$. Or $-12 \equiv 14\,[26]$ donc $m \equiv 14\,[26]$ ce qui correspond à la lettre O.

Corrigé exercice 127 :

1. Le numéro ISSN du journal Ouest-France est 0999-2138.

   Dans ce cas, on a $S = 8 \times 0 + 7 \times 9 + 6 \times 9 + 5 \times 9 + 4 \times 2 + 3 \times 1 + 2 \times 3 = 179$. Or $-179 = -17 \times 11 + 8$ et $0 \leqslant 8 < 11$ donc le reste de la division euclidienne de S par 11 est 8. La clé est donc 8 ce qui correspond bien au dernier chiffre du code ISSN donné.

2. Dans ce cas, on a $S = 8 \times 2 + 7 \times 4 + 6 \times 9 + 5 \times 5 + 4 \times 4 + 3 \times 5 + 2 \times 4 = 162$. Or $-162 = -11 \times 15 + 3$ donc la clé de contrôle est 3.

3. a. On a $S = 8 \times 0 + 7 \times 3 + 6 \times n + 5 \times 5 + 4 \times 2 + 3 \times 0 + 2 \times 3 = 60 + 6n$.

   b. On a $-S \equiv 7[11]$, d'où $60+6n \equiv -7[11]$ donc $6n \equiv -1[11]$ et ainsi $6n \equiv 10[11]$.

   c. On construit un tableau de congruence modulo 11.

$n \equiv \ldots [11]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$6n \equiv \ldots [11]$	0	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5

   On en déduit que $n \equiv 9[11]$. Or on cherche $n < 11$ donc $n = 9$. Réciproquement, en remplaçant n par 9, on obtient $S = 114$, ce qui donne bien une clé valant 7. Donc $n = 9$.

Corrigé exercice 128 :

1. Pour $A = 11010010$, on a $s = 4$. Or on doit avoir $4 + m \equiv 0[2]$ avec $m \in \{0; 1\}$, et donc $m = 0$.

2. Soit s la somme correspondant à l'octet. Un seul chiffre étant modifié, on a soit un 0 remplacé par un 1, soit un 1 remplacé par un 0. Donc, si on appelle s' la nouvelle somme des chiffres constituant l'octet, soit $s' = s + 1$, soit $s' = s - 1$. Or $-1 \equiv 1[2]$ donc, comme $m + s \equiv 0[2]$, alors $m + s' \equiv 1[2]$ et donc le bit de parité détecte l'erreur.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

3. a. Lors d'une transmission d'un octet on peut avoir jusqu'à 9 erreurs de transmission : une erreur pour chaque chiffre composant l'octet, et une erreur sur le bit de parité.

   b. Un nombre pair d'erreurs ne sera pas détecté. En effet, modifier un bit revient à le remplacer par $a+1$ ou par $a-1$, c'est-à-dire par $a+1$ modulo 2. Si le nombre n d'erreurs lors d'une transmission est pair, on peut alors écrire $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et on alors s', la nouvelle somme des chiffres, égale à $s + 2k$. Ainsi, si $m + s \equiv 0[2]$, alors $m + s' \equiv 0[2]$.

   Les erreurs ne sont donc, dans ce cas, pas détectées.

Corrigé exercice 129 :

Partie A : Généralités

1. Si $(x; y; z)$ est un TP, alors $x^2 + y^2 = z^2$. Soit p un entier naturel non nul. En multipliant les deux membres de l'égalité par p^2, on a $p^2x^2 + p^2y^2 = p^2z^2$, donc $(px)^2 + (py)^2 = (pz)^2$ et, ainsi, $(px; py; pz)$ est un TP.

2. On sait que le carré d'un nombre pair est pair et le carré d'un nombre impair est impair. On sait aussi que la somme de deux entiers impairs est paire. Ainsi, si x est impair et y est impair, alors x^2 et y^2 sont impairs, donc $x^2 + y^2$ est pair, donc z^2 est pair et donc z aussi.

   En conclusion, si $(x; y; z)$ est un TP, alors les entiers x, y et z, ne peuvent pas être tous les trois impairs.

3. a. $192 = 2^6 \times 3$

   b. On a tout d'abord $x = 2^\alpha \times k$, avec k impair. Donc $2x^2 = 2(2^\alpha \times k)^2 = 2^{2\alpha+1} \times k^2$, avec k^2 impair comme carré d'un nombre impair. De même, si $z = 2^\beta \times m$, alors $z^2 = 2^{2\beta} \times m^2$.

   c. Supposons que $2x^2 = z^2$. Alors $2x^2$ et z^2 admettent une même décomposition, puisque chaque nombre admet une unique décomposition de cette forme. Ainsi, on a $k^2 = m^2$ et $2^{2\alpha+1} = 2^{2\beta}$. Or $2\alpha + 1$ est un entier impair et 2β est un entier pair : on ne peut donc pas avoir $2^{2\alpha+1} = 2^{2\beta}$.

   Il n'existe donc pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x; z)$ tel que $2x^2 = z^2$.

Partie B : Recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. $(3; 4; 5)$ est un triplet pythagoricien donc, d'après la question A.1., le triplet $(3 \times 403; 4 \times 403; 5 \times 403)$ en est aussi un. Ainsi, $(1209; 1612; 2015)$ est un triplet pythagoricien de la forme demandée.

2. Pour tout entier naturel n, $(2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 = (2n^2+2n+1)^2$. En prenant $n = 1007$, on obtient alors $2n+1 = 2015$, $2n^2 + 2n = 2030112$ et $2n^2 + 2n + 1 = 2030113$.

   Donc $(2015; 2030112; 2030113)$ est un TP.

3. a. On cherche un couple d'entiers naturels non nuls $(x; z)$ tels que : $z^2 - x^2 = 403^2$ avec $x < 403$.

Document sous licence libre Creative Commons

Ainsi $403^2 = (z-x)(z+x) = 169 \times 961$, soit $\begin{cases} z-x=169 \\ z+x=961 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=396 \\ z=565 \end{cases}$.

Le couple cherché est donc $(396; 565)$.

b. D'après la question précédente $565^2 - 396^2 = 403^2$, soit $396^2 + 403^2 = 565^2$. Ainsi, $(396; 403; 565)$ est un TP donc $(396 \times 5; 403 \times 5; 565 \times 5)$ aussi, d'après la question A.1.. On en conclut que $(1980; 2015; 2865)$ est un TP.

Corrigé exercice 130 :

1. Le reste de la division euclidienne de 2021299320121 par 97 est 81. On a donc $K = 97 - 81 = 16$.

2. a. Le nombre A est un nombre à 12 chiffres qui peut donc s'écrire $A = a_{12} \times 10^{12} + a_{11} \times 10^{11} + \ldots + a_1 \times 10 + a_0$. Ainsi $A = a_{12} \times 10^{12} + (a_{11} \times 10^5 + \ldots + a_6) \times 10^6 + (a_5 \times 10^5 + \ldots + a_1 \times 10 + a_0)$.

   En posant $S = a_12$, on a $N = a_{11} \times 10^5 + \ldots + a_6$ et $M = a_5 \times 10^5 + \ldots + a_1 \times 10 + a_0$, on a alors bien $A = S \times 10^{12} + N \times 10^6 + M$. Or $10^{12} \equiv 50[97]$ et $10^6 \equiv 27[97]$, on a donc bien, au final, $A \equiv 50S + 27N + M[97]$.

   b. Notons r_1 le reste de la division euclidienne de $50S + 27N + M$ par 97. Par définition de la relation de congruence, $50S + 27N + M \equiv r_1[97]$. Donc, par transitivité de la congruence, $A \equiv r_1[97]$. De plus, r_1 est le reste d'une division euclidienne par 97 donc $0 \leqslant r_1 < 97$. Par unicité de la division euclidienne, r_1 est donc le reste de la division euclidienne de A par 97, et donc, on a bien $K = 97 - r_1$.

3. a. Le nombre S prend soit la valeur 1, soit la valeur 2.

   Si $S = 1$, on a $r_1 \equiv 50 \times 1 + 27 \times N + M[97]$.

   Si $S = 2$, on a $r_1' \equiv 100 \times 1 + 27 \times N + M[97]$.

   Or $100 \equiv 3[97]$ donc 100 et 50 n'ont pas le même reste dans la division par 97, donc r_1 et r_1' n'ont pas le même reste dans la division par 97 et donc l'erreur est détectée.

   b. Posons $N = \overline{bcdefg} = b10^5 + c10^4 + d10^3 + e10^2 + f10^1 + g$.

   Supposons qu'une erreur soit effectuée sur la saisie de b.

   On a $10^5 \equiv 90[97]$.

   Construisons un « tableau de congruence » modulo 97.

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$90b \equiv \ldots [97]$	0	90	83	76	69	62	55	48	41	34

   Comme aucun des $90b$ n'est congru au même nombre modulo 97, on en déduit qu'une erreur sur un de ces chiffres sera détectée.

   On procède de même pour tous les autres chiffres du nombre N.

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$9c \equiv \ldots [97]$	0	9	8	27	36	45	54	63	72	81

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$30d \equiv \dots [97]$	0	30	60	90	23	53	83	16	46	76

e	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3e \equiv \dots [97]$	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27

f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$10f \equiv \dots [97]$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90

g	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g \equiv \dots [97]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

c. Notons r_1 le reste de la division euclidienne de $50S + 27N + M$ par 97 et r'_1 le reste de la division de $50S + 27N' + M$ par 97, où N' est le nombre N dont les deux premiers chiffres ont été intervertis.

On note $N = \overline{bcdefg}$. On a donc $N' = \overline{cbdefg}$.

Ainsi, l'erreur n'est pas détectée si $27\overline{bcdefg} \equiv 27\overline{cbdefg}[97]$.

On a, d'une part, $27\overline{bcdefg} \equiv 27(90b + 9c + 30d + 3e + 10f + g)[97]$ et, d'autre part, $27\overline{cbdefg} \equiv 27(90c + 9b + 30d + 3e + 10f + g)[97]$.

On cherche donc à résoudre $27(90b+9c) \equiv 27(90c+9b)[97]$ c'est-à-dire $2187b \equiv 2187c[97]$ soit $53b \equiv 53c[13]$, avec $0 \leqslant b < 10$ et $0 \leqslant c < 10$.

Construisons un « tableau de congruence » modulo 97.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$53x \equiv \dots [97]$	0	53	9	62	18	71	27	80	36	89

On en déduit que si $b \neq c$, alors $53b \not\equiv 53c[97]$.

Ainsi, si les deux premiers chiffres de N sont intervertis, l'erreur est bien détectée par la clé.

Corrigé exercice 131 :

Partie A : Critère de divisibilité par 5 et par 10

1. Soit $N = a_n 10^n + ... + a_1 10^1 + a_0$, où $a_0, \dots, a_n$ désignent des entiers compris entre 0 et 9, avec $a_n \neq 0$. On a alors $N = 10(a_n 10^{n-1} + ... + a_1) + a_0$.

   Or $10(a_n 10^{n-1} + ... + a_1) \equiv 0[10]$ donc $N \equiv 0[10]$ si, et seulement si, $a_0 \equiv 0[10]$. Or $0 \leqslant a_0 < 10$ donc $a_0 = 0$.

   Réciproquement, s'il existe des entiers compris entre 0 et 9 tels que $N = a_n 10^n + \dots + a_1 10$, alors $N = 10 \times (a_n 10^{n-1} + \dots + a_1)$ et N est donc divisible par 10.

   Un nombre entier N est donc divisible par 10 si, et seulement si, son chiffre des unités est 0.

2. De même, posons $N = a_n 10^n + ... + a_1 10^1 + a_0$, avec $a_0, \ldots, a_n$ des entiers compris entre 0 et 9. On a donc alors $N = 5(2a_n 10^{n-1} + ... + 2a_1) + a_0$. D'où $N \equiv 0[5]$ si, et seulement si, $a_0 \equiv 0[5]$. Or $0 \leqslant a_0 < 10$ donc $a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$.

   On vérifie la réciproque comme ci-dessus.

   Un nombre entier N est donc divisible par 5 si, et seulement si, son chiffre des unités est 0 ou 5.

Partie B : Critère de divisibilité par 11

1. Soit N un nombre entier. On peut écrire $N = 10a + b$ avec a et b deux entiers avec $0 \leqslant b \leqslant 9$.

   Or $10 \equiv -1[11]$ donc $10a + b \equiv -a + b[11]$.

   Ainsi, $-a + b \equiv 0[11]$ si, et seulement si, $10a + b \equiv 0[11]$.

   Un nombre entier N est donc divisible par 11 si, et seulement si, la différence entre son nombre de dizaines et son chiffre des unités est divisible par 11.

2. $1067 = 106 \times 10 + 7$. Or $106 - 7 = 99$ et 99 est divisible par 11 donc, d'après le critère qu'on vient de démontrer, 1067 est divisible par 11.

   $333 = 33 \times 10 + 3$. Or $33 - 3 = 30$ et 30 n'est pas divisible par 11, donc 333 n'est pas divisible par 11.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 4 : PGCD et applications

Table des matières

Document sous licence libre Creative Commons

1 Informations sur le chapitre

Le B.O. introduit la partie arithmétique comme un prolongement de l'étude des ensembles de nombres étudiés en classe de seconde. Ce chapitre s'inscrit en effet dans cette optique : il s'agit de réactiver certaines compétences déjà développées au collège (lors de l'étude implicite du PGCD de deux nombres dans le cadre de la simplification d'une fraction, par exemple), de formaliser les outils mathématiques utilisés, puis de les appliquer. Le chapitre dispose donc à la fois d'exercices purement calculatoires, dont l'objectif principal est de maîtriser les automatismes, et d'exercices concrets, privilégiant la modélisation et l'application concrète des notions.

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

Les diviseurs stricts de 18 sont 1, 2, 3, 6 et 9. On a $1+2+3+6+9 = 21 \neq 18$, donc 18 n'est pas parfait. Les diviseurs stricts de 28 sont 1, 2, 4, 7 et 14. On a $1+2+4+7+14 = 28$, donc 28 est parfait.

Corrigé exercice 2 :

Les diviseurs de 777 sont 1, 777, 7, 111, 3, 259, 21, 37 et leurs opposés. Les diviseurs de 441 sont 1, 441, 7, 3, 21, 49, 9, 147, 63 et leurs opposés. Les diviseurs positifs communs à 777 et 441 sont donc 1, 7, 3 et 21. On peut donc simplifier la fraction $\frac{777}{441}$ par 21, et on obtient ainsi $\frac{777}{441} = \frac{21\times37}{21\times21} = \frac{37}{21}$.

Corrigé exercice 3 :

L'équation $x^2 - y^2 = 21$ équivaut à $(x-y)(x+y) = 21$.
Or $21 = 1 \times 21 = 3 \times 7 = -1 \times (-21) = -3 \times (-7)$. Donc $x^2 - y^2 = 21$ équivaut à
$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=21 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=21 \\ x+y=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=7 \\ x+y=3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=-21 \end{cases}$
ou $\begin{cases} x-y=-21 \\ x+y=-1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=-3 \\ x+y=-7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=-7 \\ x+y=-3 \end{cases}$.
Finalement, l'ensemble des solutions de cette équation est :
$\{(11;10);(5;2);(-11;-10);(-5;-2);(-11;10);(11;-10);(-5;2);(5;-2)\}$.

Corrigé exercice 4 :

Les diviseurs positifs de 60 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 et 60. Les diviseurs positifs de 80 sont 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40 et 80. Le plus grand diviseur commun de ces deux nombres est 20. On peut donc faire au maximum 20 équipes, qui seront constituées de 4 hommes et 3 femmes chacune puisque $60 = 3 \times 20$ et $80 = 4 \times 20$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 5 :

Soient n un entier naturel ayant pour reste 1 dans la division euclidienne par 23 et q le quotient de cette division euclidienne. On peut alors écrire $n = 23q + 1$. Si n a le même quotient dans la division euclidienne par 17 alors on peut écrire $n = 17q + r$, avec $0 \leqslant r < 17$. D'où $23q+1 = 17q+r$, c'est-à-dire $6q+1 = r$ et, ainsi, 6 divise $r-1$. Comme $0 \leqslant r < 17$, alors $r \in \{1; 7; 13\}$ (autrement dit, $q = \frac{r-1}{6}$ peut valoir 0, 1 ou 2 et donc n peut valoir 1, 24 ou 47).

Corrigé exercice 6 :

Soit n un entier naturel tel que $n-4$ divise $n+17$. Alors $n-4$ divise toute combinaison linéaire de $n-4$ et $n+17$. En particulier $n-4$ divise $(n+17)-(n-4) = 21$. Or $21 = 1 \times 21 = -1 \times (-21) = 7 \times 3 = -7 \times (-3)$. Donc $(n-4) \in \{-21; -7; -3; -1; 1; 3; 7; 21\}$. On cherche $n \in \mathbb{N}$, d'où $n \in \{1; 3; 5; 7; 11; 25\}$. Réciproquement, on vérifie que toutes ces valeurs de n vérifient bien la condition de divisibilité demandée : $-3|18$, $-1|20$, $1|22$, $3|24$, $7|28$ et $21|42$. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{N}$ est donc $\{1; 3; 5; 7; 11; 25\}$.

Corrigé exercice 7 :

1. $-522 = 12 \times (-44) + 6$, et $0 \leqslant 6 < 12$ donc le reste de la division euclidienne de -522 par 12 est 6.

2. $15n-8 = (4n+3)\times 3+(3n-17)$. Si $0 \leqslant 3n-17 < 4n+3$, alors le reste de la division euclidienne de $15n-8$ par $4n+3$ est $3n-17$. Or $3n-17 \geqslant 0 \Leftrightarrow 3n \geqslant 17$ donc, pour tout entier naturel $n \geqslant 6$, $3n-17 \geqslant 0$. De même, $3n-17 < 4n+3 \Leftrightarrow -20 < n$, donc pour tout entier naturel n, $3n-17 < 4n+3$. En conclusion, dans le cas où $n \geqslant 6$, la division euclidienne de $15n-8$ par $4n+3$ s'écrit $15n-8 = (4n+3)\times 3+(3n-17)$. Dans le cas où $n < 6$, on a $15n-8 = (4n+3) \times 2 + (7n-14)$. Donc, si $0 \leqslant 7n-14 < 4n+3$, alors le reste de la division euclidienne de $15n-8$ par $4n+3$ est $7n-14$. Or $7n-14 < 4n+3 \Leftrightarrow 3n < 17$, ce qui est le cas puisque $n < 6$. Et $0 \leqslant 7n-14 \Leftrightarrow 14 \leqslant 7n \Leftrightarrow n \geqslant 2$. En conclusion, si $2 \leqslant n \leqslant 5$, le reste de la division euclidienne de $15n-8$ par $4n+3$ est $7n-14$. Enfin, dans le cas où $n < 2$, alors, nécessairement $n = 1$ ou $n = 0$. Si $n = 1$, on a $15n-8 = 7$ et $4n+3 = 7$, dans ce cas le reste de la division euclidienne de $15n-8$ par $4n+3$ est donc 0. Si $n = 0$, on a $15n-8 = -8$ et $4n+3 = 3$ et donc le reste de la division euclidienne de $15n-8$ par $4n+3$ vaut 1.

Corrigé exercice 8 :

$a\,[13]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$4a\,[13]$	0	4	8	12	3	7	11	2	6	10	1	5	9

À l'aide du tableau de congruence ci-dessus, on obtient que $4a \equiv 1\,[13]$ si, et seulement si, $a \equiv 10\,[13]$.

Corrigé exercice 9 :

Si $a \equiv 0\,[4]$, alors il existe $a' \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 4a'$. Si $b \equiv 0\,[18]$, alors il existe $b' \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 18b'$. On a donc $ab = 4a' \times 18b' = 72a'b'$. Comme $a'b' \in \mathbb{Z}$, alors on a bien $ab \equiv 0\,[72]$.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 10 :

Si $a \equiv 0\,[27]$, alors 27 divise a. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 27k$. On peut donc écrire $a = 9 \times 3k$, et comme $3k \in \mathbb{Z}$, alors 9 divise a, c'est-à-dire $a \equiv 0\,[9]$. La proposition est donc vraie.

Corrigé exercice 11 :

On a $1 = 13 \times 2 - 5 \times 5$. Il faut donc retourner en même temps les deux sabliers. À chaque fois que l'un d'eux est fini, on le retourne immédiatement. Quand le cinquième sablier de 5 minutes est terminé, il reste 1 minute avant que le deuxième sablier de 13 minutes soit terminé.

Document sous licence libre Creative Commons

3 Activités

3.1 Corrigé activité A : Problème de pavage

Questions :

1. Pour paver cette surface sans découper les carreaux, 250 et 70 doivent tous les deux être des multiples de c. Autrement dit c doit être un diviseur commun à 250 et 70.

2. a. Soient d un diviseur commun à a et b, q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b. On a $a = bq + r$, donc $r = a - bq$. Or d divise a et d divise b donc d divise r comme combinaison linéaire de a et b. En particulier, d est un diviseur commun à b et r. De même, a est une combinaison linéaire de b et r, donc tout diviseur commun à b et r divise a. Ainsi, l'ensemble des diviseurs communs à a et b est confondu avec l'ensemble des diviseurs communs à b et r. b. D'après la question précédente, l'ensemble des diviseurs communs de a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs de b et r. Ces deux ensembles ont donc, en particulier, le même plus grand élément. D'où $PGCD\,(a;b) = PGCD\,(b;r)$.

3. a. $\mathrm{E}\left(\frac{250}{70}\right)$ est le quotient de la division euclidienne de 250 par 70 donc le nombre $250 - 70\mathrm{E}\left(\frac{250}{70}\right)$ est le reste de la division euclidienne de 250 par 70. De même, $\mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right)$ est le quotient de la division euclidienne de a par b donc le nombre $a - b \times \mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right)$ est le reste de la division euclidienne de a par b.

   b. On obtient le tableau suivant.

a	250	70	40	30	Calculs effectués
b	70	40	30	10	$250 - 70 \times 3 = 40$ $70 - 40 = 30, 40 - 30 = 10, 30 = 10 \times 3$
r	40	30	10	0	

   Le résultat affiché en sortie est 10.

   c. À chaque étape, $r < b$ car r est le reste de la division euclidienne de a par b. Et, à l'étape suivante, b on affecte à la variable b la valeur de r. La suite des valeurs de b est donc strictement décroissante. De plus, les restes successifs sont par définition strictement positifs. La suite des valeurs de b est donc une suite strictement décroissante d'entiers naturels : elle est donc finie et la dernière valeur prise par la suite est 0.

   d. Le 10 affiché en sortie est le PGCD de 30 et 10. Or, d'après la question 2, $PGCD\,(30;10) = PGCD\,(250;70)$. Donc le 10 affiché en sortie est aussi le PGCD $(250;70)$. On peut en déduire que la taille maximale du côté des carreaux est 10 cm. Les autres tailles possibles sont les autres diviseurs communs à 250 et 70, qui sont les diviseurs de PGCD$(250;70) = 10$, ces diviseurs sont 1, 2 et 5.

Bilan :

Les diviseurs communs à a et b sont exactement les diviseurs de PGCD $(a;b)$.

Document sous licence libre Creative Commons

3.2 Corrigé activité B : Un problème de Bachet

Questions :

1. En écrivant x le nombre de fois où on remplit le vase V_5, et y le nombre de fois où on le vide dans le vase V_3, alors ce problème peut s'écrire sous la forme $5x - 3y = 4$. En énumérant les multiples de 5, on trouve que $2 \times 5 = 10 = 2 \times 3 + 4$. Le couple $(2; 2)$ est donc solution de ce problème.

2. a. Pour mesurer 2 pintes avec les vases V_5 et V_3, il suffit de remplir le vase V_5 et de le vider suffisamment pour remplir le vase V_3. Il reste alors un volume de 2 pintes dans le vase V_5.

   b. Après qu'on a vidé le vase V_5 dans le vase V_3, il ne contient plus qu'un volume $B - C$. On transvase ensuite ce volume dans le vase V_3 et on remplit à nouveau V_5. Le vase V_5 contient à nouveau un volume B. À la dernière étape, on retire de V_5 ce qu'il manque pour terminer de remplir V_3. Or V_3 contient déjà un volume égal à $B - C$. Pour le remplir entièrement, il faut donc lui rajouter une quantité égale à $C - (B - C) = 2C - B$. Le vase V_5 contenait un volume B et on en retire un volume égal à $2C - B$. Il reste donc dans ce vase : $B - (2C - B) = 2B - 2C$.

3. a. On applique l'algorithme d'Euclide aux nombres 16 et 9. $16 = 9 \times 1 + 7$ $9 = 7 \times 1 + 2$ $7 = 2 \times 3 + 1$ $2 = 1 \times 2 + 0$. Donc $PGCD\,(16; 9) = 1$.

   b. Les reste des deux premières divisions sont $r_1 = 7$ et $r_2 = 2$. D'après la troisième ligne, on a $1 = 7 - 2 \times 3$.

   c. D'après la seconde division euclidienne, on a $2 = 9 - 7 \times 1$, donc $1 = 7 - (9 - 7) \times 3 = 7 - 9 \times 3 + 7 \times 3 = 7 \times 4 - 3 \times 9$.

   d. Enfin, d'après la première division euclidienne, $7 = 16 - 9$, donc $1 = (16 - 9) \times 4 - 9 \times 3 = 16 \times 4 - 9 \times 7$. En conclusion, pour obtenir un volume de 1 pinte avec des vases de 16 pintes et 9 pintes, il faut donc remplir 4 fois le vase de 16 pintes et le vider 7 fois dans le vase de 9 pintes.

Bilan :

12 et 5 sont premiers entre eux. On applique l'algorithme d'Euclide aux nombres 12 et 5. $12 = 5 \times 2 + 2$ $5 = 2 \times 2 + 1$ On en déduit que $1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - (12 - 5 \times 2) \times 2 = 5 \times 5 - 12 \times 2$. Un couple solution de l'équation $12u + 5v = 1$ est donc $(-2; 5)$. Ce couple n'est pas unique : par exemple, le couple $(3; -7)$ est aussi solution de cette équation.

Document sous licence libre Creative Commons

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 12 :

PGCD(100; 20) = 20 $\neq$ 5 donc n ne peut pas être égal à 100. PGCD(35; 75) = 5 $\neq$ 25 donc n ne peut pas être égal à 35. PGCD(70; 75) = 5 $\neq$ 25 donc n ne peut pas être égal à 70. Enfin, PGCD(25; 75) = 25 et PGCD(25; 20) = 5 donc n peut être égal à 25.

Réponse : c

Corrigé exercice 13 :

68 est un diviseur commun à a et b donc 68 divise PGCD(a; b). PGCD(a; b) est donc un multiple de 68. La proposition c. n'est vraie que si PGCD(a; b) = 68. Elle n'est donc pas vraie pour tous les entiers naturels a et b admettant 68 comme diviseur commun.

Réponse : b

Corrigé exercice 14 :

Si $a \equiv 0[3]$, alors, par compatibilité de la multiplication avec la congruence, $12a \equiv 0[3]$. L'implication $B \Rightarrow A$ est donc vraie. Pour montrer que l'implication $A \Rightarrow B$ est quant à elle fausse, prenons un contre-exemple. Si on prend, par exemple, $a = 1$, alors on obtient bien $12a \equiv 12 \equiv 0[3]$ mais $a \equiv 1[3]$. L'implication $A \Rightarrow B$ est donc fausse (elle serait vraie si on se plaçait dans les conditions d'application du théorème de Gauss).

Réponse : b

Corrigé exercice 15 :

$11a = 56b$ donc 11 divise $56b$. Or 11 et 56 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 11 divise b. Pour montrer que les autres propositions ne sont pas exactes, prenons quelques contre-exemples. Si on prend $a = 112$ et $b = 22$, alors on a bien $11 \times 112 = 1232 = 56 \times 22$, mais $PGCD\,(112; 22) = 2$. La proposition a. est donc fausse. De plus $b = 22$ ne divise pas 11, ce contre-exemple permet donc aussi d'affirmer que la proposition d. est fausse. Si on prend maintenant $a = 56$ et $b = 11$, alors on a bien $11 \times 56 = 56 \times 11$ mais $a = 56$ ne divise pas $b = 11$. La proposition b. est donc fausse.

Réponse : c

Corrigé exercice 16 :

L'équation $51x + 39y = 0$ admet une solution évidente : $x = 39$ et $y = -51$. De plus, $PGCD\,(51; 39) = 3$ donc, d'après l'identité de Bézout, il existe $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $51x + 39y = 3$. Enfin, si $(x_0; y_0)$ est solution de $51x + 39y = 3$, alors $(673x_0; 673y_0)$ est solution de $51x + 39y = 2019$.

Réponses : a, c, d

Corrigé exercice 17 :

Comme $ax \equiv 1\,[n]$ alors $ax - 1 \equiv 0\,[n]$, c'est-à-dire n divise $ax - 1$. Il existe donc $b \in \mathbb{Z}$ tel que $ax - 1 = n \times b$, c'est-à-dire $ax - bn = 1$. On en déduit alors, d'après le théorème de Bézout, que a et n sont premiers entre eux. La proposition b. n'est pas vraie en général.

Document sous licence libre Creative Commons

Prenons comme contre-exemple : $a = 5$, $x = 1$ et $n = 2$. On a bien $ax \equiv 5 \equiv 1\,[2]$ mais $ax = 5 \neq 3$.

$\boxed{\text{Réponses : a, c et d}}$

Corrigé exercice 18 :

Soit $n \in \mathbb{Z}$, d'après la méthode de la soustraction on a
$PGCD\,(3n-1; 5n) = PGCD\,(3n-1; 5n-(3n-1)) = PGCD\,(3n-1; 2n+1)$.
On obtient de la même manière que
$PGCD\,(3n-1; 2n+1) = PGCD\,(3n-1-(2n+1)\,; 2n+1) = PGCD\,(n-2; 2n+1)$
et enfin que
$PGCD\,(n-2; 2n+1) = PGCD\,(n-2; n+3) = PGCD\,(n-2; 5)$.
D'où $PGCD\,(3n-1; 5n) = PGCD\,(n-2; 5)$ et donc $PGCD\,(3n-1; 5n) = 5$ si, et seulement si, 5 divise $n-2$.
De plus, par compatibilité de la multiplication avec la congruence, $n-2 \equiv 0\,[5] \Leftrightarrow n \equiv 2\,[5] \Leftrightarrow 3n \equiv 6\,[5] \Leftrightarrow 3n \equiv 1\,[5] \Leftrightarrow 3n-1 \equiv 0\,[5]$. Donc $PGCD\,(3n-1; 5n) = 5$ si, et seulement si, 5 divise $3n-1$.

$\boxed{\text{Réponses : b, d}}$

Corrigé exercice 19 :

Si 2 et 15 divisent n, alors, en particulier, 2 et 5 divisent n. Comme 2 et 5 sont premiers entre eux, on en déduit, d'après le corollaire du théorème de Gauss, que $2 \times 5 = 10$ divise n. De même, comme 2, 6 et 15 divisent n alors, en particulier, 2, 3 et 5 divisent n. Ces trois nombres étant premiers entre eux, le corollaire du théorème de Gauss nous permet d'affirmer que $2 \times 3 \times 5 = 30$ divise n. Pour montrer que les autres propositions sont fausses, prenons $n = 30$ comme contre-exemple. 30 est, en effet, divisible par 2, par 3 et par 15 mais n'est ni divisible par 12 ni par 60.

$\boxed{\text{Réponses : a, c}}$

Corrigé exercice 20 :

1. a. $z \equiv 0\,[35]$ équivaut à dire qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 35x$. De même, $z \equiv 6\,[27]$ équivaut à dire qu'il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 27y+6$. Le système de congruences $\begin{cases} z \equiv 0\,[35] \\ z \equiv 6\,[27] \end{cases}$ est donc équivalent au système suivant $\begin{cases} z = 35x \\ z = 27y+6 \end{cases}$, c'est-à-dire à l'équation $35x = 27y+6$ et donc à l'équation diophantienne $35x - 27y = 6$.

   b. L'algorithme d'Euclide pour les entiers 35 et 27 donne :
   $35 = 27 \times 1 + 8$
   $27 = 8 \times 3 + 3$
   $8 = 3 \times 2 + 2$
   $3 = 2 \times 1 + 1$.
   On en déduit d'une part que $\text{PGCD}\,(35; 27) = 1$, et donc, d'après le théorème de Bézout, que l'équation admet bien une solution. Par ailleurs, on en déduit, par remontée, une solution particulière de l'équation.
   $1 = 3 - 2 = 3 - (8 - 3 \times 2) = 3 \times 3 - 8$
   $= (27 - 8 \times 3) \times 3 - 8$

Document sous licence libre Creative Commons

$= 27 \times 3 - 8 \times 10$
$= 27 \times 3 - (35 - 27) \times 10$
$= 27 \times 13 - 35 \times 10.$
On obtient donc $35 \times (-10) - 27 \times (-13) = 1$, d'où $35 \times (-60) - 27 \times (-78) = 6$. Une solution particulière est donc le couple $(-60; -78)$.

c. Soit $(x; y) \in \mathbb{Z}$ est solution de l'équation diophantienne. On a donc $35 \times x - 27 \times y = 35 \times (-60) + 27 \times 78$, d'où $35\,(x + 60) = 27\,(y + 78)$. 35 et 27 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 27 divise $x + 60$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 60 = 27k$, c'est à dire $x = 27k - 60$. En remplaçant x par son expression dans l'équation $35\,(x + 60) = 27\,(y + 78)$, on obtient alors que $y = 35k - 78$. Réciproquement, on a $35\,(27k - 60) - 27\,(35k - 78) = 945k - 2100 - 945k + 2106 = 6$, donc les couples $(27k - 60; 35k - 78)$ sont bien solutions de l'équation $35x - 27y = 6$. Pour finir, les solutions z du système de congruences s'écrivent donc $z = 35x = 35\,(27k - 60) = 945k - 2100$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. Ce problème revient à chercher la solution positive minimale du système de congruences suivant : $\begin{cases} z \equiv 0\,[35] \\ z \equiv 6\,[27] \end{cases}$.

Les solutions de ce système sont de la forme $z = 945k - 2100$, avec $k \in \mathbb{Z}$. La solution positive minimale de ce système vaut donc $z = 945 \times 3 - 2100 = 735$. L'astronome devra donc attendre 735 jours pour pouvoir observer ces deux planètes simultanément.

Document sous licence libre Creative Commons
CC BY NC SA

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1

Questions préliminaires

1. Soient $x \in \{0; \dots; 25\}$ et y l'entier tel que $\begin{cases} y \equiv 11x + 8\,[26] \\ 0 \leqslant y \leqslant 25 \end{cases}$. Le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26 est l'unique entier r tel que $0 \leqslant r \leqslant 25$ et $11x+8 \equiv r\,[26]$. Le reste de la division euclidienne de $11x+8$ par 26 est donc bien égal à y. De plus, le quotient de la division euclidienne de $11x+8$ par 26 vaut $\mathrm{E}\left(\frac{11x+8}{26}\right)$, donc la division euclidienne de $11x+8$ par 26 s'écrit $11x+8 = 26 \times \mathrm{E}\left(\frac{11x+8}{26}\right) + y$. D'où $y = 11x + 8 - 26 \times \mathrm{E}\left(\frac{11x+8}{26}\right)$.

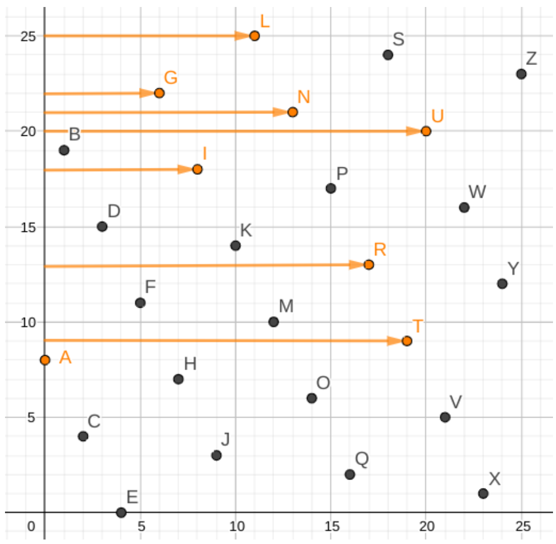
2. Le message reçu s'écrit « 8.25.8.21.9.20.13.18.21.22. »

Méthode 1

1. On entre en C1 la formule = 11*A1 + 8, qu'on étire ensuite jusqu'en C26.

2. On entre en B1 la formule = C1 - 26*floor(C1/26), qu'on étire ensuite jusqu'en B26.

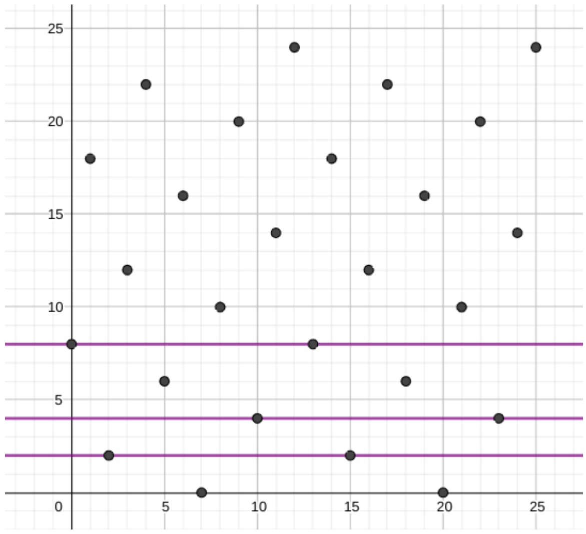
3. On obtient le graphique suivant.



4. On s'intéresse à l'ordonnée des points tracés précédemment. Ainsi, par lecture graphique : $8 \to A$, $25 \to L$, $8 \to A$, $21 \to N$, $9 \to T$, $20 \to U$, $13 \to R$, $18 \to I$, $21 \to N$ et $22 \to G$. Le message, une fois décodé, est donc « ALAN TURING. »

5. En modifiant dans la fonction de codage le 11 par un 10, on obtient le graphique ci-dessous.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA



On remarque que chaque valeur de y est associée à deux valeurs de x : pour décoder le message, il y a donc à chaque fois deux lettres possibles. Il est donc compliqué, voire impossible, de décoder le message reçu.

6. On peut conjecturer que, pour que le message soit décodable, a doit être premier avec 26.

Méthode 2

1. a. Il suffit d'écrire chiffrage = [] à la première ligne.

   b. Un programme possible est le suivant.

```
chiffrage=[]
for x in range(26):
    y=11*x+8-26*int((11*x+8)/26)
    chiffrage.append(y)
print(chiffrage)
```

   On obtient en sortie de ce programme la liste ci-dessous.

```
[8, 19, 4, 15, 0, 11, 22, 7, 18, 3, 14, 25, 10, 21, 6, 17, 2, 13,
24, 9, 20, 5, 16, 1, 12, 23]
```

2. a. En sortie de ce programme, on obtient « alanturing ».

   b. À la ligne 6, le programme définit la liste mcode contenant la suite d'entiers correspondant au message reçu. La boucle for entre les lignes 11 et 14 permet de parcourir cette liste et de décoder chacun des entiers qu'elle contient : l'instruction len(mcode) renvoie le nombre d'éléments de la liste mcode ; l'instruction chiffrage.index(mcode[i]) permet d'aller chercher dans la liste chiffrage à quel nombre correspond le nombre que l'on cherche à décoder.

Document sous licence libre Creative Commons
CC BY NC SA

3. Si on remplace $11x + 8$ par $10x + 8$ dans la définition de chiffrage, on obtient le message d'erreur et la liste suivante.

```
[8, 18, 2, 12, 22, 6, 16, 0, 10, 20, 4, 14, 24, 8, 18, 2, 12, 22,
6, 16, 0, 10, 20, 4, 14, 24]
Traceback (most recent call last):
File "", line 63, in eval_python
File "", line 11, in
ValueError: 25 is not in list
```

La valeur 25 n'est pas dans l'alphabet crypté (dans la liste chiffrage), on ne peut donc pas décoder le 25 du message reçu.

4. a. On utilise l'instruction chiffrage.sort().
   b. Pour que la liste chiffrage triée soit l'ensemble $\{0; \dots ; 25\}$, on conjecture qu'on doit avoir a soit premier avec 26.

Pour aller plus loin :

On construit le tableau de congruence ci-dessous.

$b\,[26]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$11b\,[26]$	0	11	22	7	18	3	14	25	10	21	6	17	2

$b\,[26]$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$11b\,[26]$	13	24	9	20	5	16	1	12	23	8	19	4	15

Et on en déduit que $11 \times 19 \equiv [26]$. Ainsi, si x et y sont deux entiers compris entre 0 et 25 tels que $y \equiv 11x + 8\,[26]$, alors $y - 8 \equiv 11x\,[26]$, par compatibilité de la congruence avec l'addition, et donc $19\,(y - 8) \equiv 19 \times 11x\,[26]$, par compatibilité de la congruence avec la multiplication. Or, on vient de montrer que $11 \times 19 \equiv 1\,[26]$, donc $x \equiv 19\,(y - 8)\,[26]$. Une fonction de décodage est donc $h\colon y \mapsto 19\,(y - 8)$.

5.2 Corrigé du TP 2

Questions préliminaires

1. a. La division euclidienne de $r_0 = 10\,000$ par $r_1 = 2\,422$ s'écrit $10\,000 = 2\,422 \times 4 + 312$. Ainsi on a $q_1 = 4$ et $r_2 = 312$. D'où $A_0 = 365 + \frac{1}{4}$.
   b. La division euclidienne de $r_1 = 2422$ par $r_2 = 312$ s'écrit $2422 = 312 \times 7 + 238$. Ainsi on a $q_2 = 7$. D'où $A_1 = 365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7}} = 365 + \frac{7}{29} \simeq 365,24$.

2. a. En comptant 365 jours par an au lieu de 365,25, on prend un retard égal à $\frac{1}{4}$ de jour chaque année : il faut donc rajouter un jour tous les 4 ans.
   b. L'erreur commise chaque année à l'aide de cette méthode est de $365,25 - 365,2422 = -0,0078$ jours par an, soit $0,78$ jours par siècle.
   c. Dans le calendrier actuel, les années multiples de 100 mais pas de 400 ne sont pas bissextiles. Cela permet d'enlever 3 années bissextiles par période de 4 siècles, soit 3 jours tous les 4 siècles, ce qui correspond à peu près aux $0,78$ jours par siècle.

Document sous licence libre Creative Commons

Méthode 1

1. Les variables q et r sont des listes. Ce type de variable permet de garder en mémoire les valeurs des quotients et des restes des divisions euclidiennes précédentes.

2. int(r[i]/r[i + 1]) est le quotient de la division euclidienne de r[i] par r[i + 1]. r[i] - r[i + 1] x int(r[i]/r[i + 1]) est le reste de cette division euclidienne.

3. On obtient en sortie la fraction $\frac{8}{33}$. Les Perses ajoutaient donc 8 jours tous les 33 ans.

4. On ajoute à ce programme les lignes suivantes.

```
e=B-Fraction(r[1],r[0])
v=float(1/e)
print(e, v)
```

On obtient alors les résultats ci-dessous.

```
8/33
37/165000 4459.459459459459
```

L'erreur commise est de 37 jours tous les 165 000 ans, ce qui donne une validité d'environ 4 459 ans.

Méthode 2

1. On entre en A3 la formule = int(B2/B3) et en B4 la formule = B2 - B3*A3.

2. La valeur affichée dans la cellule C2 correspond au nombre de jours s'écoulant en D2 années d'après l'approximation. La formule = C2 - 365*D2 compare ce nombre de jours au nombre de jours obtenu en considérant que toutes les années sont composées de 365 jours ; on obtient ainsi le nombre de jours à rajouter sur D2 années. On obtient à la ligne 5 les valeurs suivantes.

5	1	238	12053	33	365,2424242	8	-0,0002242	4 459

Ainsi, avec cette approximation, la durée d'une année est approchée par $\frac{12\,053}{33}$, soit 365,242 424 2 jours. Si on découpe les années en 365 jours, cette approximation nous dit qu'il faut alors rajouter 8 jours tous les 33 ans.

3. On remplit la colonne G en entrant dans la cellule G2 la formule = 365,2422 - E2 puis en la copiant - glissant vers le bas. On remplit la colonne H en entrant en H2 la formule = ABS(1/G2), puis en la copiant - glissant vers le bas. On obtient ainsi les résultats ci-dessous. La ligne 11 correspond à la méthode exacte : $365,2422 = \frac{3652422}{10000} = \frac{1826211}{5000}$. Si on ajoutait 1 211 jours tous les 5 000 ans, l'erreur commise serait nulle. Et la validité infinie.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

erreur	validité
0,2422000	4
-0,0078000	128
0,0008207	1 218
-0,0002242	4 459
0,0000125	80 000
-0,0000018	545 000
0,0000009	1 121 667
-0,0000003	3 045 000
0,0000001	9 454 998
0,0000000	#DIV/0!

Pour aller plus loin :

On a $q_0 = 365$, $q_1 = 4$,$q_2 = 7$ et $r_0 = 10000$, $r_1 = 2422$, $r_2 = 312$ et $r_3 = 238$, d'après les questions préliminaires. La division euclidienne de $r_2 = 312$ par $r_3 = 238$ s'écrit $312 = 238 \times 1 + 74$, d'où $q_3 = 1$ et $r_4 = 74$. De même, la division euclidienne de $r_3 = 238$ par $r_4 = 74$ s'écrit $238 = 74 \times 3 + 16$, d'où $q_4 = 3$ et $r_5 = 16$. Ainsi, $A_3 = q_0 + \frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+\frac{1}{q_3+\frac{1}{q_4}}}} = 365 + \frac{1}{4+\frac{1}{7+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}} = 365 + \frac{31}{128} = \frac{46751}{128}$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

6 Exercices d'applications directes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 21 :

1. $PGCD\,(12; 54) = 6$.
2. $PGCD\,(45; 540) = 45$.
3. $PGCD\,(56; 105) = 7PGCD\,(8; 15) = 7$.

Corrigé exercice 22 :

On applique l'algorithme d'Euclide aux entiers 204 et 138.
$204 = 138 \times 1 + 66$
$138 = 66 \times 2 + 6$
$66 = 6 \times 11$
Le dernier reste non nul est 6, donc $PGCD(204; 138) = 6$. Enfin, les dimensions possibles de ces carrés sont les diviseurs positifs de 6 et sont donc égales à 6 cm, 3 cm, 2 cm ou 1 cm.

Corrigé exercice 23 :

1. $PGCD\,(51; 39) = 3$. Donc, d'après le corollaire de l'identité de Bézout, pour tout $(x; y) \in \mathbb{Z}^2, 51x + 39y$ est un multiple de 3. Comme 2 020 n'est pas multiple de 3, cette équation n'a pas de solution.
2. $PGCD\,(51; 39) = 3$. Or 2 019 est un multiple de 3 donc, d'après le corollaire de l'identité de Bézout, cette équation a bien une solution.
3. $PGCD\,(42; 23) = 1$. Donc, d'après le corollaire de l'identité de Bézout, cette équation a bien une solution.

Corrigé exercice 24 :

1. $PGCD(78; 120) = 6$. Le plus grand nombre de lots réalisable est donc 6.
2. Les lots sont alors constitués de $\frac{78}{6} = 13$ clés USB et de $\frac{120}{6} = 20$ stylos.

Corrigé exercice 25 :

1. $15x - 4y = 1$. Une solution est $(-1; -4)$ car $15 \times (-1) - 4 \times (-4) = -15 + 16 = 1$.
2. $21x + 6y = 3$. Une solution est $(1; -3)$ car $21 + 6 \times (-3) = 21 - 18 = 3$.

Corrigé exercice 26 :

1. $12x + 5y = 0 \Leftrightarrow 12x = -5y$. Si $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de cette équation, alors 5 divise $12x$. Or 5 et 12 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 5 divise x. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 5k$. Ainsi $12 \times 5k = -5y$, d'où $y = -12k$. Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $12 \times 5k + 5 \times (-12k) = 0$, donc le couple $(5k; -12k)$ est bien solution. L'ensemble des solutions est donc $\{(5k; -12k)\,; k \in \mathbb{Z}\}$.

Document sous licence libre Creative Commons

2. $51x + 18y = 0 \Leftrightarrow 51x = -18y \Leftrightarrow 17x = -6y$. Si $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de cette équation, alors 6 divise $17x$. Or 6 et 17 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 6 divise x. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 6k$. Ainsi, $17 \times 6k = -6y$, d'où $y = -17k$. Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $51 \times 6k + 18 \times (-17k) = 0$, donc le couple $(6k; -17k)$ est bien solution. L'ensemble des solutions est donc $\{(6k; -17k)\,; k \in \mathbb{Z}\}$.

Corrigé exercice 27 :

On cherche un entier naturel x inférieur à 500 tel que $x \equiv 3\,[10]$ et $x \equiv 3\,[9]$. Soit x un tel entier et soient m et n les entiers tels que $x = 10m + 3$ et $x = 9n + 3$. On a donc $10m = 9n$. Ainsi, 9 divise $10m$. Or 9 et 10 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 9 divise m. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = 9k$. Ainsi, $x = 90k + 3$. Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $90k + 3 \equiv 3\,[10]$ et $90k + 3 \equiv 3\,[9]$. Donc les entiers cherchés sont les entiers naturels inférieurs à 500 de la forme $x = 90k + 3$, c'est-à-dire les éléments de l'ensemble $S = \{3; 93; 183; 273; 363; 453\}$.

6.2 Exercices

Corrigé exercice 28 :

Soit n un entier naturel tel que $PGCD\,(72;n) = 6$ et $n \leqslant 72$. On remarque que 72 est bien un multiple de 6. De plus, la condition $PGCD\,(72;n) = 6$ impose que n est un multiple de 6. Les multiples de 6 inférieurs à 72 sont 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66 et 72. Or $72 = 1 \times 72 = 2 \times 36 = 3 \times 24 = 4 \times 18 = 6 \times 12 = 8 \times 9$. On peut donc supprimer 12, 18, 24, 36 et 72 de la liste car ce sont des diviseurs de 72. On peut également rayer de cette liste leurs multiples : 36, 48, 60 et 54. Il reste donc les nombres 6, $30 = 6 \times 5$, $42 = 6 \times 7$, $66 = 6 \times 11$, qui vérifient bien $PGCD\,(72;n) = 6$ car $72 = 6 \times 12$.

Corrigé exercice 29 :

Soit n un entier naturel tel que $PGCD\,(180;n) = 12$ et $n \leqslant 180$. On remarque que 180 est bien un multiple de 12. De plus, la condition $PGCD\,(180;n) = 12$ impose que n est un multiple de 12. Les multiples de 12 inférieurs à 180 sont 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, 168 et 180. Or $180 = 2 \times 90 = 3 \times 60 = 4 \times 45 = 6 \times 30 = 9 \times 20 = 10 \times 18 = 12 \times 15$. On peut donc supprimer de la liste des multiples de 12 :

- les multiples de 15 : 60, 120, 180 ;
- les multiples de 18 : 36, 72, 108, 144 ;
- les multiples de 20, 30, 45, 60 et 90.

Seuls les entiers 12, 24, 48, 84, 96, 132, 156 et 168 qui vérifient bien $PGCD\,(180;n) = 12$.

Corrigé exercice 30 :

1. $123 - 76 = 47$

   $76 - 47 = 29$

   $47 - 29 = 18$

$29 - 18 = 11$
$18 - 11 = 7$
$11 - 7 = 4$
$7 - 4 = 3$
$4 - 3 = 1$
donc $PGCD\,(123; 76) = PGCD\,(3; 1) = 1$.

2. $98 - 38 = 60$
$38 - 60 = -22$
$38 - 22 = 16$
$22 - 16 = 6$
$16 - 6 = 10$
$10 - 6 = 4$
$6 - 4 = 2$
$4 - 2 = 2$
$2 - 2 = 0$
donc $PGCD\,(98; 38) = PGCD\,(2; 2) = 2$.

Corrigé exercice 31 :

La division euclidienne de 1420 par 24 donne : $1420 = 24 \times 59 + 4$. D'après le lemme d'Euclide, le PGCD de 1420 et 24 est égal au PGCD de 24 et 4, donc $PGCD(1420; 24) = 4$.

Corrigé exercice 32 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par soustraction, $PGCD(26n + 7; n) = PGCD(7; n)$. Deux cas sont alors possibles :

- Si n est un multiple de 7, alors $PGCD(7; n) = 7$ d'où $PGCD(26n + 7; n) = 7$.
- Sinon, $PGCD(7; n)$ étant positif et divisant 7, on a $PGCD(7; n) = 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $PGCD(26n + 7; n)$ est donc bien égal à 7 si n est multiple de 7 et à 1 sinon.

Corrigé exercice 33 :

Par hypothèse, $PGCD\,(x; y) = 23$, donc 23 divise à la fois x et y. Soient u et v les entiers naturels tels que $x = 23u, y = 23v$. Ainsi $xy = 6348 \Rightarrow uv = 12$. Donc $\begin{cases} u = 1 \\ v = 12 \end{cases}$ ou $\begin{cases} u = 3 \\ v = 4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} u = 2 \\ v = 6 \end{cases}$ ou inversement (on peut inverser les valeurs de u et de v). Or $(u; v)$ vérifie $PGCD\,(x; y) = 23PGCD\,(u; v)$, donc $PGCD\,(u; v) = 1$. Seuls les deux premiers cas sont donc possibles. D'où $(x; y) \in \{(23; 276)\,; (69; 92)\,; (276; 23)\,; (92; 69)\}$. Réciproquement, on vérifie que ces couples sont bien solutions du problème.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 34 :

1. Soit $(m;n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $mn = 5400$ et $PGCD(m;n) = 15$. Il existe donc un couple d'entiers $(p;q)$ tel que $m = 15p$ et $n = 15q$. On a alors $15p \times 15q = 5400$, d'où $pq = 24$. Par ailleurs, $15 = PGCD(m;n) = 15 \times PGCD(p;q)$, d'où $PGCD(p;q) = 1$. Ainsi $(p;q) \in \{(1;24);(3;8);(24;1);(8;3)\}$ donc :
$$(m;n) \in \{(15;360);(45;120);(360;15);(120;45)\}.$$
Réciproquement, on vérifie bien que ces couples sont solutions du problème.

2. Soit $(m;n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m^2 - n^2 = 1620$ et $PGCD(m;n) = 6$. Il existe donc $(p;q)$ tel que $m = 6p$ et $n = 6q$. Ainsi, $m^2 - n^2 = 36(p^2 - q^2) = 1620$ donc $p^2 - q^2 = 45$, soit $(p-q)(p+q) = 45$ et $PGCD(p;q) = 1$. Or $(p;q) \in \mathbb{N}^2$ donc $p - q \leqslant p + q$ $\begin{cases} p-q=1 \\ p+q=45 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p-q=3 \\ p+q=15 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p-q=5 \\ p+q=9 \end{cases}$ car puisque $(p;q) \in \mathbb{N}^2$. D'où $\begin{cases} p=23 \\ q=22 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=9 \\ q=6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=7 \\ q=2 \end{cases}$. On en déduit que $(m;n) \in \{(138;132);(54;36);(42;12)\}$. Réciproquement, on vérifie que ces couples sont bien tous solution du problème.

Corrigé exercice 35 :

Soit $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a + b = 72$ et $PGCD(a;b) = 9$. Soient c et d les entiers naturels tels que $a = 9c$ et $b = 9d$. On peut donc écrire $9c + 9d = 72$, d'où $c + d = 8$ et $PGCD(c;d) = 1$. On en déduit que $(c;d) \in \{(1;7);(3;5);(7;1);(5;3)\}$, d'où $(a;b) \in \{(9;63);(27;45);(63;9);(45;27)\}$. Réciproquement, on vérifie que ces couples sont bien solutions du problème.

Corrigé exercice 36 :

1. Soit n un entier. Alors le successeur de n est $n+1$ et, par soustraction,
$PGCD(n;n+1) = PGCD(n;1)$ donc $PGCD(n;n+1) = 1$.

2. Soit n un entier impair. L'entier impair suivant est $n+2$ et, par soustraction, $PGCD(n;n+2) = PGCD(n;2)$. Or, comme n est impair, $PGCD(n;2) = 1$. Donc $PGCD(n;n+2) = 1$.

3. Soit n un entier pair. L'entier pair suivant est $n+2$ et, par soustraction,
$PGCD(n;n+2) = PGCD(n;2)$. Comme n est pair, $PGCD(n;2) = 2$. Donc $PGCD(n;n+2) = 2$.

Corrigé exercice 37 :

En écrivant les divisions euclidiennes successives :
$345 = 195 \times 1 + 150$
$195 = 150 \times 1 + 45$
$150 = 45 \times 3 + 15$
$45 = 15 \times 3 + 0$
D'après l'algorithme d'Euclide, on en déduit que $PGCD(345;195) = 15$.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 38 :

1. $246 = 189 + 57$ $189 = 57 \times 3 + 18$ $57 = 18 \times 3 + 3$ $18 = 3 \times 6 + 0$

   On en déduit que $PGCD\,(246; 189) = 3$.

2. $365 = 12 \times 30 + 5$ $12 = 5 \times 2 + 2$ $5 = 2 \times 2 + 1$ $2 = 1 \times 1 + 0$

   On en déduit que $PGCD\,(365; -12) = PGCD\,(365; 12) = 1$.

3. $21312 = 840 \times 25 + 312$

   $840 = 312 \times 2 + 216$

   $312 = 216 + 96$

   $216 = 96 \times 2 + 24$

   $96 = 24 \times 4 + 0$

   On en déduit que $PGCD(21312; 840) = 24$.

Corrigé exercice 39 :

1. $21n + 4 = (16n + 3) + (5n + 1)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant 5n + 1 < 16n + 3$ donc $5n + 1$ est le reste de la division euclidienne de $21n + 4$ par $16n + 3$.

2. a. $16n+3 = 3(5n+1)+n$ et $0 \leqslant n < 5n+1$ donc le reste de la division euclidienne de $16n + 3$ par $5n + 1$ est n.

   b. $PGCD(21n + 4; 16n + 3) = PGCD(16n + 3; 5n + 1) = PGCD(5n + 1; n)$. De plus, le reste de la division euclidienne de $5n + 1$ par n est 1, donc $PGCD\,(5n + 1; n) = 1$, d'où $PGCD\,(21n + 4; 16n + 3) = 1$.

3. $18n + 7 = 8\,(2n + 1) + 2n - 1$ et $0 < 2n - 1 < 2n + 1$ pour tout $n > 0$, donc $2n - 1$ est le reste de la division euclidienne de $18n + 7$ par $2n + 1$. Donc $PGCD\,(18n + 7; 2n + 1) = PGCD\,(2n - 1; 2n + 1)$. De plus, $2n+1 = (2n-1)\times 1+2$ et $2 < 2n-1$ si, et seulement si, $2n > 3$ c'est-à-dire si, et seulement si, $n > 1$. Ainsi :

   - si $n = 1$, alors $PGCD(18n + 7; 2n + 1) = PGCD(25; 3) = 1$;
   - si $n > 1$, alors $PGCD(18n + 7; 2n + 1) = PGCD(2n - 1; 2) = 1$ car $2n - 1$ est impair.

Corrigé exercice 40 :

1. $19n + 24 = 2\,(8n + 10) + 3n + 4$ et $0 \leqslant 3n + 4 < 8n + 10$ donc

   $PGCD\,(19n + 24; 8n + 10) = PGCD\,(8n + 10; 3n + 4)$.

   $8n + 10 = 2\,(3n + 4) + 2n + 2$ et $0 \leqslant 2n + 2 < 3n + 4$ donc

   $PGCD\,(19n + 24; 8n + 10) = PGCD\,(3n + 4; 2n + 2)$.

   $3n + 4 = (2n + 2) \times 1 + n + 2$ et $0 \leqslant n + 2 < 2n + 2$ donc

   $PGCD\,(19n + 24; 8n + 10) = PGCD\,(2n + 2; n + 2)$.

   $2n + 2 = (n + 2) \times 1 + n$ et $0 \leqslant n < n + 2$ donc

   $PGCD\,(19n + 24; 8n + 10) = PGCD\,(n + 2; n) = PGCD\,(2; n)$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

D'où, au final, $PGCD\,(19n+24; 8n+10) = 2$ si n est pair et

$PGCD\,(19n+24; 8n+10) = 1$ si n est impair.

2. Si n est pair, alors $19n+24$ et $8n+10$ sont divisibles par 2, donc $\frac{19n+24}{8n+10}$ est réductible. Sinon, $19n+24$ et $8n+10$ sont premiers entre eux, donc $\frac{19n+24}{8n+10}$ est irréductible.

Corrigé exercice 41 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $PGCD\,(n; 342) = 19$ et $0 \leqslant n \leqslant 342$. Alors 19 divise n, donc il existe un entier m tel que $n = 19m$. Or $PGCD\,(n; 342) = 19 \times PGCD\,(m; 18)$ car $342 = 19 \times 18$ donc m vérifie $PGCD\,(m; 18) = 1$ et $0 \leqslant m \leqslant 18$. Les diviseurs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 9 et 18 donc $m \in \{1; 5; 7; 11; 13; 17\}$. On en déduit que $n \in \{19; 95; 133; 209; 247; 323\}$. On vérifie ensuite que tous ces entiers sont bien solutions au problème.

Corrigé exercice 42 :

Soit m un entier tel que $PGCD(m+200, 196) = 4$ et $-20 \leqslant m \leqslant 20$. Donc 4 divise $m+200$ et il existe donc n un entier naturel tel que $m+200 = 4n$. On a alors $PGCD(4n, 196) = 4PGCD(n, 49)$, donc $PGCD(n, 49) = 1$ et $-20 \leqslant m \leqslant 20 \Rightarrow 180 \leqslant m+200 \leqslant 220 \Rightarrow 45 \leqslant n \leqslant 55$. On en déduit que $n \in \{45; 46; 47; 48; 50; 51; 52; 53; 54; 55\}$ donc que $m+200 \in \{180; 184; 188; 192; 200; 204; 208; 212; 216; 220\}$ et donc que $m \in \{-20; -16; -12; -8; 0; 4; 8; 12; 16; 20\}$. Réciproquement, on vérifie que tous ces entiers sont bien solutions au problème posé :
$PGCD\,(180; 196) = 4PGCD\,(45; 49) = 4$,
$PGCD\,(184; 196) = 4PGCD\,(46; 49) = 4$,
$PGCD\,(188; 196) = 4PGCD\,(47; 49) = 4$,
$PGCD\,(192; 196) = 4PGCD\,(48; 49) = 4$,
$PGCD\,(200; 196) = 4PGCD\,(50; 49) = 4$,
$PGCD\,(204; 196) = 4PGCD\,(510; 49) = 4$,
$PGCD\,(208; 196) = 4PGCD\,(52; 49) = 4$,
$PGCD\,(212; 196) = 4PGCD\,(53; 49) = 4$,
$PGCD\,(216; 196) = 4PGCD\,(54; 49) = 4$,
$PGCD\,(220; 196) = 4PGCD\,(55; 49) = 4$.

Corrigé exercice 43 :

1. Les diviseurs positifs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24. Les diviseurs positifs de 13 sont 1 et 13. On en déduit donc que 24 et 13 sont premiers entre eux.

2. Pour déterminer un couple solution de l'équation $24u+13v = 1$, on écrit l'algorithme d'Euclide : $24 = 13 \times 1 + 11$; $13 = 11 \times 1 + 2$ et $11 = 2 \times 5 + 1$, puis sa remontée : $1 = 11 - 2 \times 5 = 11 - (13 - 11) \times 5 = 11 \times 6 - 13 \times 5$. Donc $1 = (24 - 13) \times 6 - 13 \times 5 = 24 \times 6 - 13 \times 11$. Le couple $(6; -11)$ est donc solution de cette équation.

Corrigé exercice 44 :

1. Écrivons les divisions euclidiennes successives de l'algorithme d'Euclide pour 70 et 31 :

   $70 = 31 \times 2 + 8$

Document sous licence libre Creative Commons
CC BY NC SA

$31 = 8 \times 3 + 7$

$8 = 7 \times 1 + 1.$

On en déduit que 70 et 31 sont premiers entre eux, ce qui justifie l'existence d'un couple solution. Puis, par remontée de l'algorithme d'Euclide :

$1 = 8 - 7$

$= 8 - (31 - 8 \times 3)$

$= 8 \times 4 - 31$

$= (70 - 31 \times 2) \times 4 - 31$

$= 70 \times 4 - 31 \times 9.$

Une solution particulière de l'équation $31u + 70v = 1$ est donc le couple $(-9; 4)$.

2. Écrivons l'algorithme d'Euclide pour 72 et 25 :

   $72 = 25 \times 2 + 22$; $25 = 22 \times 1 + 3$ et $22 = 3 \times 7 + 1$.

   On en déduit que 72 et 25 sont premiers entre eux, ce qui justifie l'existence d'un couple solution. Par remontée on écrit :

   $1 = 22 - 3 \times 7 = 22 - (25 - 22) \times 7 = 22 \times 8 - 25 \times 7$

   donc $1 = (72 - 25 \times 2) \times 8 - 25 \times 7 = 72 \times 8 - 25 \times 23$.

   Une solution particulière de l'équation $25u + 72v = 1$ est donc le couple $(-23; 8)$.

Corrigé exercice 45 :

$2(5n - 7) - 5(2n - 3) = 1$ donc, d'après le théorème de Bézout, $5n - 7$ et $2n - 3$ sont premiers entre eux.

Corrigé exercice 46 :

$5(9n + 11) - 9(5n + 6) = 1$ donc, d'après le théorème de Bézout, $9n + 11$ et $5n + 6$ sont premiers entre eux.

Corrigé exercice 47 :

$3\,(8n + 3) - 4\,(6n + 2) = 9 - 8 = 1$ donc, d'après le théorème de Bézout, $8n + 3$ et $6n + 2$ sont premiers entre eux.

Corrigé exercice 48 :

L'algorithme d'Euclide pour les entiers 134 et 57 s'écrit :
$134 = 57 \times 2 + 20$
$57 = 20 \times 2 + 17$
$20 = 17 + 3$
$17 = 3 \times 5 + 2$
$3 = 2 + 1.$
On en déduit que 134 et 57 sont premiers entre eux, donc qu'il existe un couple d'entiers $(a; b)$ tel que $134a - 57b = 1$, autrement dit que 134 est inversible modulo 57. On écrit ensuite la remontée de l'algorithme d'Euclide : $1 = 3 - 2$

Document sous licence libre Creative Commons

$1 = 3 - (17 - 3 \times 5)$
$1 = 3 \times 6 - 17$
$1 = (20 - 17) \times 6 - 17$
$1 = 20 \times 6 - 17 \times 7$
$1 = 20 \times 6 - (57 - 20 \times 2) \times 7$
$1 = 20 \times 20 - 57 \times 7$.
Un inverse de 134 modulo 57 est donc 20 car $20 \times 20 = 57 \times 7 + 1$ donc $134 \times 20 \equiv 20 \times 20 \equiv 1\,[57]$.

Corrigé exercice 49 :

$a = 3$ est inversible modulo 33 si, et seulement si, il existe un entier u tel que $3u \equiv 1\,[33]$, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $3u + 33v = 1$, ce qui est impossible car, sinon, 3 diviserait 1. Donc 3 n'est pas inversible modulo 33.
$b = 8$ est inversible modulo 33 si, et seulement si, il existe un entier u tel que $8u \equiv 1\,[33]$, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $8u+33v = 1$, ce qui est le cas d'après le théorème de Bézout, car 8 et 33 sont premiers entre eux. On détermine une solution particulière : $33 = 8 \times 4 + 1$ donc $8 \times (-4) + 33 \times 1 = 1$. Un inverse de 8 modulo 33 est donc –4.
$c = 44$ est inversible modulo 33 si, et seulement si, il existe un entier u tel que $44u \equiv 1\,[33]$, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $44u + 33v = 1$, ce qui est impossible car, sinon, 11 diviserait 1. Donc 44 n'est pas inversible modulo 33.
$d = 10$ est inversible modulo 33 si, et seulement si, il existe un entier a tel que $10a \equiv 1\,[33]$, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe deux entiers a et b tels que $10a+33b = 1$, ce qui est le cas d'après le théorème de Bézout, car 10 et 33 sont premiers entre eux. On détermine une solution particulière : $33 = 10 \times 3 + 3$ et $10 = 3 \times 3 + 1$, donc $1 = 10 - 3 \times 3 = 10 - (33 - 10 \times 3) \times 3 = 10 \times 10 - 33 \times 3$. Un inverse de 10 modulo 33 est 10.
$e = 5$ est inversible modulo 33 si, et seulement si, il existe un entier a tel que $5a \equiv 1\,[33]$. On vient de montrer que $10 \times 10 \equiv 1\,[33]$, donc $5 \times 20 \equiv 1\,[33]$. Donc 5 est inversible modulo 33 et un inverse de 5 est 20.

Corrigé exercice 50 :

1. Écrivons l'algorithme d'Euclide pour les entiers 445 et 336 :

   $445 = 336 \times 1 + 109$

   $336 = 109 \times 3 + 9$

   $109 = 9 \times 12 + 1$

   On en déduit que 445 et 336 sont premiers entre eux, donc l'équation $336u+445v = 1$ admet bien des solutions. On en détermine une par remontée de l'algorithme d'Euclide : $1 = 109 - 9 \times 12$

   $1 = 109 - (336 - 109 \times 3) \times 12$

   $1 = 109 \times 37 - 336 \times 12$

   $1 = (445 - 336) \times 37 - 336 \times 12$

   $1 = 445 \times 37 - 336 \times 49$.

   Une solution particulière est donc le couple $(-49; 37)$.

Document sous licence libre Creative Commons

2. $426u - 68v = 2 \Leftrightarrow 213u - 34v = 1$. Écrivons l'algorithme d'Euclide pour les entiers 213 et 34 :

   $213 = 34 \times 6 + 9$

   $34 = 9 \times 3 + 7$

   $9 = 7 \times 1 + 2$

   $7 = 2 \times 3 + 1$

   On en déduit que l'équation $213u - 34v = 2$ admet bien des solutions car 213 et 34 sont premiers entre eux. On en détermine une par remontée de l'algorithme d'Euclide : $1 = 7 - 2 \times 3 = 7 - (9 - 7) \times 3 = 7 \times 4 - 9 \times 3$ donc $1 = (34 - 9 \times 3) \times 4 - 9 \times 3 = 34 \times 4 - 9 \times 15$, $1 = 34 \times 4 - (213 - 34 \times 6) \times 15 = 34 \times 94 - 213 \times 15$. Un couple solution est donc $(-15; -94)$.

3. Écrivons l'algorithme d'Euclide pour les entiers 301 et 24 :

   $301 = 24 \times 12 + 13$

   $24 = 13 \times 1 + 11$

   $13 = 11 \times 1 + 2$

   $11 = 2 \times 5 + 1$.

   On en déduit que l'équation $301u + 24v = 1$ admet bien des solutions car 301 et 24 sont premiers entre eux. On détermine une solution particulière par remontée : $1 = 11 - 2 \times 5 = 11 - (13 - 11) \times 5 = 11 \times 6 - 13 \times 5$ donc $1 = (24 - 13) \times 6 - 13 \times 5 = 24 \times 6 - 13 \times 11$, $1 = 24 \times 6 - (301 - 24 \times 12) \times 11 = 24 \times 138 - 301 \times 11$. Une solution particulière de l'équation $301u + 24v = 1$ est $(-11; 138)$ donc une solution particulière de l'équation $301u + 24v = 3$ est $(-33; 414)$.

Corrigé exercice 51 :

Soient u et v deux entiers tels que $38u - 65v = 0$. $38u - 65v = 0 \Leftrightarrow 38u = 65v$, donc 38 divise $65v$. Or $38 = 19 \times 2$ et $65 = 13 \times 5$ sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 38 divise v. Soit alors k l'entier tel que $v = 38k$. On a ainsi $38u = 65 \times 38k$, donc $u = 65k$. Finalement, on a montré que si $38u - 65v = 0$, alors il existe un entier k tel que $u = 65k$ et $v = 38k$. Réciproquement, pour tout entier k, le couple $(65k; 38k)$ est solution de l'équation car $38 \times 65k - 65 \times 38k = 0$. L'ensemble des solutions est donc $\{(65k; 38k)\,; k \in \mathbb{Z}\}$.

Corrigé exercice 52 :

1. Soit $(x; y)$ un couple d'entiers tel que $76x = 112y$. En divisant les deux côtés de l'égalité par 4, on obtient $19x = 28y$, donc 19 divise $28y$. Or 19 et 28 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, 19 divise y. Soit alors k l'entier tel que $y = 19k$. Alors $19x = 28 \times 19k$ donc $x = 28k$. Donc $(x; y) \in \{(28k; 19k)\,; k \in \mathbb{Z}\}$. Réciproquement, on vérifie que tout élément de cet ensemble est un couple solution.

2. Soit $(x; y)$ un couple d'entiers tel que $12\,(x + 3) = 5\,(y - 4)$. Alors 12 divise $5\,(y - 4)$. Comme 12 et 5 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 12 divise $(y - 4)$. Soit alors k l'entier tel que $y - 4 = 12k$. On a $12\,(x + 3) = 5 \times 12k$, donc $x + 3 = 5k$. Finalement, si $(x; y)$ est solution, alors il existe un entier k tel que

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

$x = 5k - 3$ et $y = 12k + 4$. Réciproquement, pour tout entier k, $(5k - 3; 12k + 4)$ est solution de l'équation. Donc l'ensemble des solutions est $\{(5k - 3; 12k + 4) \,;\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Corrigé exercice 53 :

Soit $(x; y)$ un couple d'entiers naturels tel que $\begin{cases} 7x = 19y \\ x \leqslant 100 \end{cases}$. Or 7 et 19 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 19 divise x. Soit k l'entier tel que $x = 19k$. Alors $7 \times 19k = 19y$, donc $y = 7k$. De plus, $0 \leqslant x \leqslant 100$, donc $0 \leqslant k \leqslant 5$. Finalement, $(x; y) \in \{(0; 0) \,;\, (19; 7) \,;\, (38; 14) \,;\, (57; 21) \,;\, (76; 28) \,;\, (95; 35)\}$. Réciproquement, on vérifie que tous ces couples sont solution.

Corrigé exercice 54 :

1. $8x \equiv 0\,[55] \Leftrightarrow 55|8x \Leftrightarrow$ il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $8x = 55y$. Or 8 et 55 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 8 divise y. Soit k l'entier tel que $y = 8k$. Alors $8x = 55 \times 8k$ donc $x = 55k$. Réciproquement, pour tout entier k, $8 \times 55k \equiv 0\,[55]$. Donc $8x \equiv 0\,[55] \Leftrightarrow x \equiv 0\,[55]$: l'ensemble des solutions est l'ensemble des multiples de 55.

2. $6x \equiv 12\,[35] \Leftrightarrow 6(x - 2) \equiv 0\,[35] \Leftrightarrow$ il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $6(x - 2) = 35y$. Or 6 et 35 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, 6 divise y. Soit alors k l'entier tel que $y = 6k$. Alors $6(x - 2) = 35 \times 6k$ donc $x - 2 = 35k$. Réciproquement, pour tout entier k, $6 \times 35k \equiv 0\,[35]$ donc $35k + 2$ est solution. Finalement, l'ensemble des solutions est l'ensemble $\{35k + 2; k \in \mathbb{Z}\}$.

3. $54x \equiv 0\,[62] \Leftrightarrow$ il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $54x = 62y \Leftrightarrow$ il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $27x = 31y$. Or 27 et 31 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, si deux entiers x et y vérifient $27x = 31y$, alors 27 divise y. Soit alors k l'entier tel que $y = 27k$. Alors $27x = 31 \times 27k$ donc $x = 31k$. Réciproquement, pour tout entier k, $31k$ est solution. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des entiers de la forme $31k$.

Corrigé exercice 55 :

1. $3n \equiv 0\,[4] \Leftrightarrow$ il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $3n = 4m$. Or 3 et 4 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 4 divise n, c'est-à-dire $n \equiv 0\,[4]$. Réciproquement, si $n \equiv 0\,[4]$, alors $3n \equiv 3 \times 0\,[4]$, donc $3n \equiv 0\,[4]$. D'où l'équivalence.

2. Soit n un entier naturel tel que $(n + 1)\,|5n$. Or $1 \times (n + 1) - 1 \times n = 1$, donc n et $n + 1$ sont premiers entre eux. Ainsi, d'après le théorème de Gauss, $(n + 1)\,|5$. Donc $n + 1 = 1$ ou $n + 1 = 5$, soit $n = 0$ ou $n = 4$.

Corrigé exercice 56 :

1. Soit a un tel entier. Alors il existe un entier b tel que $a = 45b$ et un entier c tel que $a = 8c$. On a donc $45b = 8c$, donc 8 divise $45b$. Or 45 et 8 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 8 divise b. Soit alors d l'entier tel que $b = 8d$. On a alors $a = 45 \times 8d = 360d$, donc 360 divise a. Autrement dit, $a \equiv 0\,[360]$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

2. Donnons un contre-exemple : $45 \equiv 0\,[15]$ car $45 = 3 \times 15$ et $45 \equiv 0\,[9]$ car $45 = 9 \times 5$. Mais le reste de la division euclidienne de 45 par 135 est 45 et non 0, donc $45 \not\equiv 0\,[135]$.

Corrigé exercice 57 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\begin{cases} n-6 \equiv 0\,[22] \\ n-6 \equiv 0\,[40] \end{cases}$, donc $n-6$ est divisible par 22 et par 40. Ainsi, il existe des entiers k et ℓ tels que $n-6 = 22k$ et $n-6 = 40\ell$. Ces entiers vérifient bien $22k = 40\ell$.

2. $22k = 40\ell \Leftrightarrow 11k = 20\ell$. Donc 11 divise 20ℓ. Or 11 et 20 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 11 divise ℓ. Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\ell = 11m$. Alors $n-6 = 40\ell = 440m$. Réciproquement, pour tout entier m, $440m+6$ est solution du système car $440m$ est divisible par 22 et par 40. L'ensemble des solutions est donc $\{440m+6 ; m \in \mathbb{Z}\}$.

Corrigé exercice 58 :

Soit a un tel entier. Alors il existe un entier b tel que $a = 22b$ et un entier c tel que $a = 20c$. Ils vérifient donc $22b = 20c$, donc $11b = 10c$. Or 11 et 10 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 10 divise b. Soit alors d l'entier tel que $b = 10d$. On peut écrire $a = 22 \times 10d = 220d$, donc 220 divise a. Ainsi, $a \equiv 0\,[220]$.

Corrigé exercice 59 :

1. Soit $(X ; Y)$ un couple d'entiers tels que $11X = 15Y$. Alors 11 divise $15Y$. Comme 11 et 15 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 11 divise Y. Soit k l'entier tel que $Y = 11k$. Alors $11X = 15 \times 11k$, d'où $X = 15k$. Ainsi $(X ; Y) \in \{(15k ; 11k) ; k \in \mathbb{Z}\}$. Réciproquement, pour tout entier k, le couple $(15k ; 11k)$ est solution de cette équation. Donc l'ensemble des solutions est $\{(15k ; 11k) ; k \in \mathbb{Z}\}$.

2. $11 \times 3 = 15 \times 2 + 3$, donc une solution particulière de l'équation $11x - 15y = 3$ est $(3 ; 2)$.

3. Soit $(x ; y) \in \mathbb{Z}^2$. $(x ; y)$ est solution de cette équation si, et seulement si, $11x - 15y = 11 \times 3 - 15 \times 2$, ce qui équivaut à $11(x-3) = 15(y-2)$ et ce qui équivaut à dire que $(x-3 ; y-2)$ est solution de (E_0).

4. Si $(x ; y)$ est une solution de cette équation, alors il existe un entier k tel que $x - 3 = 15k$ et $y - 2 = 11k$, donc $(x ; y) \in \{(15k+3 ; 11k+2) ; k \in \mathbb{Z}\}$. Réciproquement, pour tout entier k, $(15k+3 ; 11k+2)$ est solution. L'ensemble des solutions de (E) est donc $\{(15k+3 ; 11k+2) ; k \in \mathbb{Z}\}$.

Corrigé exercice 60 :

1. Pour montrer que l'un des nombre n, $n+1$ et $n+2$ est divisible par 3, on construit une table de congruence modulo 3.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

$n \equiv \ldots [3]$	0	1	2
$n+1 \equiv \ldots [3]$	1	2	0
$n+2 \equiv \ldots [3]$	2	0	1

Ainsi, pour tout entier naturel n, exactement un des entiers n, $n+1$, $n+2$ est divisible par 3. De plus, si n est impair, alors $n+1$ est pair, et si n est pair, alors $n+1$ est impair. Donc n ou $n+1$ est divisible par 2.

2. On déduit de ce qui précède que $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3 et par 2.

3. De plus, 2 et 3 sont premiers entre eux, donc, d'après le corollaire du théorème de Gauss, $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.

Corrigé exercice 61 :

1. On remarque que $n(n^2-1)(n^2-4) = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$ et $120 = 8\times3\times5$. Pour ne pas construire une table de congruences par 120, on construit donc les tables suivantes.

n modulo 8	0	1	2	3	4	5	6	7
$n-1$ modulo 8	7	0	1	2	3	4	5	6
$n+1$ modulo 8	1	2	3	4	5	6	7	0
$n-2$ modulo 8	6	7	0	1	2	3	4	5
$n+2$ modulo 8	2	3	4	5	6	7	0	1
$n(n^2-1)(n^2-4)$ modulo 8	0	0	0	$120 \equiv 0$	$720 \equiv 0$	$2520 \equiv 0$	0	0

n modulo 5	0	1	2	3	4
$n-1$ modulo 5	4	0	1	2	3
$n+1$ modulo 5	1	2	3	4	0
$n-2$ modulo 5	3	4	0	1	2
$n+2$ modulo 5	2	3	4	0	1
$n(n^2-1)(n^2-4)$ modulo 5	0	0	0	0	0

n modulo 3	0	1	2
$n-1$ modulo 3	2	0	1
$n+1$ modulo 3	1	2	0
$n-2$ modulo 3	1	2	0
$n+2$ modulo 3	2	0	1
$n(n^2-1)(n^2-4)$ modulo 3	0	0	0

Finalement, pour entier n, $n(n^2-1)(n^2-4)$ est divisible par 3 et par 5. Comme 3 et 5 sont premiers entre eux, le corollaire du théorème de Gauss prouve que $n(n^2-1)(n^2-4)$est divisible par 15. De même, 15 et 8 étant premiers entre eux, on en déduit que $n(n^2-1)(n^2-4)$ est divisible par 120.

2. On construit les tables de congruence modulo 2 et modulo 3.

n modulo 2	0	1
$n+1$ modulo 2	1	0
$2n+1$ modulo 2	1	1
$n(2n+1)(n+1)$ modulo 2	0	0

Document sous licence libre Creative Commons

n modulo 3	0	1	2
$n+1$ modulo 3	1	2	0
$2n+1$ modulo 3	1	0	2
$n(2n+1)(n+1)$ modulo 3	0	0	0

D'après les deux tableaux, $n(2n+1)(n+1)$ est divisible par 2 et par 3. Or 2 et 3 sont premiers entre eux, donc, d'après le corollaire du théorème de Gauss, $n(2n+1)(n+1)$ est divisible par 6.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 62 :

Les diviseurs communs à 6102 et 2028 sont les diviseurs de leur PGCD. On va calculer $PGCD(6102; 2028)$ en utilisant l'algorithme d'Euclide. On a $6102 = 3\times 2028+18$; $2028 = 18 \times 112 + 12$; $18 = 12 \times 1 + 6$ et $12 = 6 \times 2 + 0$. Le dernier reste non nul est 6 donc $PGCD(6102; 2028) = 6$. Les diviseurs communs à 6102 et 2028 sont donc 1, 2, 3, 6 et leurs opposés.

Corrigé exercice 63 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant PGCD\,(24; n) \leqslant 24$. Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \frac{1}{n} PGCD\,(24; n) \leqslant \frac{24}{n}$. Par encadrement, on en déduit que (u_n) converge vers 0.

Corrigé exercice 64 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}, PGCD\,(3n + 4; 4n + 3) = PGCD\,(3n + 4; n - 1) = PGCD\,(7; n - 1)$. Or $PGCD\,(7; n - 1) = 7$ si 7 divise $n - 1$ et 1 sinon, car 7 n'est divisible que par 1 et par lui-même. Autrement dit, $PGCD\,(3n + 4; 4n + 3) = 7$ si, et seulement si, $n \equiv 1\,[7]$.

Corrigé exercice 65 :

D'après l'énoncé, il existe :

- un entier m tel que $364 = nm + 12$ et $12 < n$. On a ainsi $352 = nm$;
- un entier p tel que $140 = np + 2$ et $2 < n$. On a ainsi $138 = np$.

Donc n est un diviseur commun à 352 et 138, donc un diviseur de $PGCD(352; 138)$. On utilise l'algorithme d'Euclide : $352 = 138 \times 2 + 76$; $138 = 76 \times 1 + 62$; $76 = 62 \times 1 + 14$; $62 = 14 \times 4 + 6$; $14 = 6 \times 2 + 2$ et $6 = 2 \times 3 + 0$, donc $PGCD(352; 138) = 2$. Les diviseurs communs à 352 et 138 sont donc 1, 2 et leurs opposés. Les valeurs possibles de l'entier naturel n sont donc $n = 1$ ou $n = 2$. Cependant, ces valeurs obtenues sont incompatibles avec les inégalités obtenues en début d'exercice sur le reste. Il n'existe donc aucun entier n vérifiant ces deux conditions.

Corrigé exercice 66 :

1. Par définition du reste de la division euclidienne de 654 par n, le nombre de femmes sans équipe étant égal à 24, on a nécessairement $24 < n$, et donc $n \geqslant 25$.
2. On entre en B1 la formule = 654 - A1*Ent(654/A1) et en C1 la formule = 491 - A1*Ent(491/A1), car le reste de la division euclidienne d'un entier a par un entier b est donné par $r = a - bq$, où $q = \mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right)$ est le quotient de cette division. On peut aussi entrer, plus simplement, en B1 la formule = MOD(654 ;A1), et en C1 la formule = MOD(491 ;A1).
3. On entre en D1 la formule = SI(ET(B1 = 24 ;C1 = 11) ;1 ;0).
4. Le nombre 1 n'apparaît qu'une seule fois dans la colonne D, pour $n = 30$. Il y a donc 30 équipes.

Document sous licence libre Creative Commons

5. Le problème se ramène à chercher un entier n tel qu'il existe des entiers p et q, tels que $654 = np + 24$ et $491 = nq + 11$, c'est-à-dire tels que $np = 630$ et $nq = 480$. Autrement dit, cela revient à chercher les diviseurs communs à 630 et 480, qui sont les diviseurs du PGCD de 630 et 480.

Corrigé exercice 67 :

1. 1 est un diviseur commun à tous les entiers, donc le plus grand commun diviseur de deux entiers est au moins égal à 1 (donc positif).

2. Si $b = 0$, alors P est un diviseur commun à a et 0. Or a est un diviseur commun à lui-même et 0. Comme a est le plus grand diviseur de a, $P = a$. Si $b = 1$, alors le plus grand diviseur de b est 1. De plus 1 divise aussi a. Donc $P = 1$.

3. a. Si $a \mid b$, alors a est un diviseur commun à a et b. Et comme a est son plus grand diviseur, on a $P = a$.

   b. Si $P = a$, alors a est un diviseur commun à a et b. En particulier, $a \mid b$. On a démontré dans la question 3.a. l'implication : « $a \mid b \Rightarrow P = a$ », et dans cette question l'implication « $P = a \Rightarrow a \mid b$ ». On a donc, au final, démontré l'équivalence « $P = a \Leftrightarrow a|b$ ».

4. Supposons que $a \geqslant b$. Puisque P divise a et b, alors P divise $a - b$. Ainsi, P est un diviseur commun à $a - b$ et b, et donc $P \leqslant PGCD\,(a-b;b)$. Réciproquement, si d est un diviseur commun à $a - b$ et b, alors d divise $(a-b)+b = a$, donc d est un diviseur commun à a et b. En particulier, $PGCD\,(a-b;b)$ est un diviseur commun à a et b, donc $PGCD\,(a-b;b) \leqslant P$. On vient de montrer qu'on a à la fois $P \leqslant PGCD\,(a-b;b)$ et $PGCD\,(a-b;b) \leqslant P$ donc, en conclusion, $P = PGCD\,(a-b;b)$.

Corrigé exercice 68 :

1. $PGCD\,(2n+1;n+3) = PGCD\,(-5;n+3) = PGCD\,(5;n+3)$.

   Donc $PGCD\,(2n+1;n+3)$ est un diviseur de 5.

2. Si $n \equiv 2\,[5]$, alors $2n+1 \equiv 2\times 2+1 \equiv 0\,[5]$. Donc $\alpha \equiv 0\,[5]$, c'est-à-dire que 5 divise α. De même, si $n \equiv 2\,[5]$, alors $n+3 \equiv 2+3 \equiv 0\,[5]$. Donc $\beta \equiv 0\,[5]$, c'est-à-dire que 5 divise β. En conclusion, 5 est un diviseur commun à α et β.

3. On a montré que si $n \equiv 2\,[5]$, alors 5 divise α et β, donc 5 divise leur PGCD. De plus, d'après la question 1, $PGCD\,(2n+1;n+3)$ divise 5. D'où $PGCD\,(2n+1;n+3) = 5$. Réciproquement, si $PGCD\,(2n+1;n+3) = 5$, alors 5 divise $n+3$, donc $n \equiv -3\,[5]$, soit $n \equiv 2\,[5]$. D'où l'équivalence.

Corrigé exercice 69 :

Pour tout $n \geqslant 2$, $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ donc
$PGCD\,(n^2-1;3(n+1)) = (n+1)\,PGCD\,(n-1;3)$. Or $PGCD\,(n-1;3) = 3$ si 3 divise $n-1$ et $PGCD\,(n-1;3) = 1$ sinon. On a donc bien $PGCD\,(n^2-1;3(n+1)) = 3(n+1)$ si $n-1 \equiv 0\,[3]$, c'est-à-dire si $n \equiv 1\,[3]$, et $PGCD\,(n^2-1;3(n+1)) = n+1$ sinon.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 70 :

1. On entre dans la colonne A les entiers de 0 à 20.

   On entre en B2 la formule = A2ˆ2+3*A2+2 avant de l'étirer vers le bas, de façon à afficher les valeurs de n^2+3n+2.

   On entre, de même, en C2 la formule = A2+1 avant de l'étirer vers le bas, de façon à afficher les valeurs de $n+1$.

   On affiche le PGCD de n^2+3n+2 et $n+1$ dans la colonne D, en entrant la formule = PGCD(B2 ; C2) avant de l'étirer vers le bas.

	A	B	C	D
1	n	n^2+3n+2	n+1	PGCD
2	0	2	1	1
3	1	6	2	2
4	2	12	3	3
5	3	20	4	4
6	4	30	5	5
7	5	42	6	6
8	6	56	7	7
9	7	72	8	8

   On obtient les mêmes valeurs dans les colonnes C et D. On peut donc conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $PGCD\,(n^2+3n+2; n+1) = n+1$.

2. En utilisant la même démarche, on peut conjecturer que

   $PGCD\,(n^2+3n+2; n+1) = n+1$ si n est impair, et

   $PGCD\,(n^2+3n+2; n+1) = 2\,(n+1)$ si n est pair.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2+3n+2 = (n+1) \times (n+2)$.

   Donc $PGCD\,(n^2+3n+2; n+1) = (n+1)\,PGCD\,(n+2; 1) = n+1$,

   car $PGCD\,(n+2; 1) = 1$, puisque le seul diviseur de 1 est lui-même.

   De plus, $PGCD\,(n^2+3n+2; 2\,(n+1)) = (n+1)\,PGCD\,(n+2; 2)$. Or, si n est impair, $n+2$ est impair, donc $PGCD\,(n+2; 2) = 1$ et si n est pair, alors $n+2$ l'est aussi, donc $PGCD\,(n+2; 2) = 2$.

   D'où $PGCD\,(n^2+3n+2; 2\,(n+1)) = n+1$ si n est impair, et

   $PGCD\,(n^2+3n+2; 2\,(n+1)) = 2\,(n+1)$ si n est pair.

Corrigé exercice 71 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $PGCD(n; n+4) = PGCD(n; 4)$, par soustraction. Or, 4 est divisible par 1, 2, 4 et leurs opposés. Donc le PGCD de n et $n+4$ est :

   - 4 si n est divisible par 4.

   - 2 si n est divisible par 2 mais pas par 4.

   - 1 dans les autres cas.

Document sous licence libre Creative Commons

Autrement dit, si $n \equiv 0[4]$, alors $PGCD(n; n+4) = 4$, si $n \equiv 2[4]$, alors $PGCD(n; n+4) = 2$ et si $n \equiv 1[4]$ ou $n \equiv 3[4]$, alors $PGCD(n; n+4) = 1$. Réciproquement, s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k$, alors $PGCD(n; n+4) = PGCD(n; 4) = 4$, d'où l'équivalence.

2. $\frac{n}{n+4}$ est réductible si, et seulement si, $PGCD(n; n+4) > 1$. D'après ce qui précède, $\frac{n}{n+4}$ est donc réductible si, et seulement si, $n \equiv 0[4]$ ou $n \equiv 2[4]$. L'affirmation proposée est donc incomplète.

Corrigé exercice 72 :

$PGCD(2n+1; n+5) = PGCD(n-4; n+5) = PGCD(-9; n+5)$, par soustraction, d'où $PGCD(2n+1; n+5) = PGCD(9; n+5)$.

Corrigé exercice 73 :

1. On obtient la table de valeurs suivante.

n	u_n	v_n
2	1	3
3	2	5
4	3	9
5	4	15
6	5	23
7	6	33
8	7	45
9	8	59
10	9	75
11	10	93
12	11	113
13	12	135
14	13	159
15	14	185
16	15	213

On cherche les valeurs de $n \geqslant 2$ telles que $n-1$ et n^2-3n+5 aient un diviseur commun strictement supérieur à 1. Dans la table, c'est le cas pour les valeurs de n suivantes : 4, 7, 10 et 13 et 16. On peut donc conjecturer que $\frac{n^2-3n+5}{n-1}$ est réductible si $n \geqslant 2$ est de la forme $1+3k$, pour k entier, c'est-à-dire si $n \equiv 1\,[3]$.

2. En utilisant des soustractions successives, on a, pour tout $n \geqslant 2$, $PGCD(n^2-3n+5; n-1) = PGCD(n^2-3n+5-n(n-1); n-1) = PGCD(-2n+5; n-1) = PGCD(-2n+5+2(n-1); n-1) = PGCD(3; n-1)$. Or $PGCD\,(n-1; 3) = 3$ si 3 divise $n-1$ et $PGCD\,(n-1; 3) = 1$ sinon, ce qui confirme notre hypothèse.

3. On peut conjecturer que $\frac{n^2-3n+5}{n-1}$ est un nombre entier si, et seulement si, $n = 4$ ou $n = 2$.

4. $\frac{n^2-3n+5}{n-1}$ est un nombre entier si, et seulement si, $n-1$ divise n^2-3n+5. On peut montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $n-1 \leqslant n^2-3n+5$. Ainsi, $n-1$ divise n^2-3n+5 si, et seulement si, $PGCD\,(n-1; n^2-3n+5) = n-1$ donc, d'après la question 2., si,

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

et seulement si, $PGCD\,(n-1;3) = n-1$. On en déduit qu'on doit avoir $n-1=3$ ou $n-1=1$, car les seuls diviseurs positifs de 3 sont 1 et 3. D'où $\frac{n^2-3n+5}{n-1}$ est un nombre entier si, et seulement si, $n=4$ ou $n=2$.

Corrigé exercice 74 :

1. En appliquant l'algorithme à la main, on obtient les valeurs suivantes.

a	56	40	16	16	8	8
b	96	56	40	24	16	8
$b-a$	40	16	24	8	8	0

2. Le résultat affiché à la fin est le PGCD de a et b (l'algorithme effectué est l'algorithme des soustractions successives).

Corrigé exercice 75 :

1. La division euclidienne de a par b s'écrit $a = qb + r$ avec $r < b$. En multipliant les deux membres de l'égalité par $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient $ka = q \times kb + kr$ qui est la division euclidienne de ka par kb car $r < b$ donc $kr < kb$.

2. On sait que $PGCD\,(a;b)$ est le dernier reste non nul dans la suite des restes obtenus par l'algorithme d'Euclide. Soient $(r_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des restes construite par l'algorithme d'Euclide appliqué aux entiers a et b et $m \geqslant 0$ l'entier tel que $r_m \neq 0$ et $r_{m+1} = 0$. Alors $PGCD\,(a;b) = r_m$ et d'après la question précédente, $PGCD\,(ka;kb) = PGCD\,(kb;kr_0) = \ldots = PGCD\,(kr_m;kr_{m+1}) = kr_m$ car $r_{m+1}=0$. On a donc bien $PGCD\,(ka;kb) = kPGCD\,(a;b)$.

Corrigé exercice 76 :

On cherche le PGCD de 440, 520 et 780.
$PGCD\,(440;520) = 10PGCD\,(44;52) = 40PGCD\,(11;13) = 40$ car 11 et 13 sont premiers entre eux. De plus, $PGCD\,(440;780) = 10PGCD\,(44;78) = 20PGCD\,(22;39) = 20$ car 22 et 39 sont premiers entre eux. On en déduit que le PGCD de 440, 520 et 780 est 20. Le son complexe considéré a donc une fréquence de 20 Hz.

Corrigé exercice 77 :

1. Un algorithme possible est le suivant.

```
def euclide(a,b):
    while a%b!=0:
        a,b=b,a%b
    return b
```

2. Pour le couple $(45;9)$, il renvoie 9. Pour le couple $(9;45)$, il renvoie 9. Pour le couple $(60;12)$, il renvoie 12. Il renvoie bien le même résultat quel que soit l'ordre dans lequel sont entrés a et b.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 78 :

1. Établissons une table de congruence modulo 15 des puissances de 2.

n modulo 15	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2^n modulo 15	1	2	4	8	$16 \equiv 1$	$32 \equiv 2$	$64 \equiv 4$	$128 \equiv 8$	$256 \equiv 1$

   On a $2^{445} = (2^4)^{111} \times 2^1$ donc $2^{445} \equiv 1^{111} \times 2 \equiv 2\,[15]$. Et donc la proposition est vraie.

2. D'après la question précédente, $2^{445} + 4 \equiv 6\,[15]$, donc il existe un entier k tel que $2^{445} + 4 = 15k + 6$, donc $2^{445} + 4 = 3\,(5k + 2)$ est divisible par 3, mais pas par 5. Comme les diviseurs positifs de 15 sont 1, 3, 5 et 15, le PGCD de $2^{445} + 4$ et 15 est bien 3.

Corrigé exercice 79 :

1. $n^2 + 2n - 3 = (n-1)\,(n+3)$ et $n^2 + 4n + 3 = (n+1)\,(n+3)$.

2. Par soustraction, on peut affirmer que $PGCD\,(n-1; n+1) = PGCD\,(n-1; 2)$. Si n est impair, alors $n-1$ est pair, donc $PGCD\,(n-1; n+1) = 2$. Si n est pair, alors $n-1$ est impair, donc $PGCD\,(n-1; n+1) = 1$.

3. $PGCD\,(n^2 + 2n - 3; n^2 + 4n + 3) = (n+3)\,PGCD\,(n-1; n+1)$. On en déduit que $PGCD\,(n^2 + 2n - 3; n^2 + 4n + 3) = 2\,(n+3)$ si n est impair et

   $PGCD\,(n^2 + 2n - 3; n^2 + 4n + 3) = n + 3$ si n est pair.

Corrigé exercice 80 :

1. La longueur du rectangle initial est la valeur entrée en A1, 6102, et sa largeur est celle entrée en B1, 2028. Les dimensions du rectangle restant après avoir retiré un carré de côté 2028 du rectangle de départ sont $6102 - 2028 = 4074$ et 2028. La largeur du nouveau rectangle est donc le minimum entre 4074 et 2028 et sa longueur est le maximum entre ces deux nombres. Il faut donc entrer en A2 la formule = MAX(A1-B1 ;B1) et en B2 la formule = MIN(A1-B1 ;B1).

2. On s'arrête quand la longueur et la largeur obtenues sont égales. On obtient des carrés de 6 par 6.

3. MOD(A1 ; B1) est le reste de la division euclidienne de la longueur du premier rectangle par sa largeur. On retrouve le résultat précédent en 4 étapes au lieu de 117 car on lit en A5 et B5 respectivement 6 et 0, qui signifient que le rectangle dont les dimensions sont données dans la ligne précédente (12 par 6) est découpable en carrés de côté 6 sans qu'il reste de surface.

Corrigé exercice 81 :

1. À chaque étape, si la parcelle restante est carrée, elle est attribuée entièrement et le partage est terminé. Sinon elle est rectangulaire. Soient L sa longueur et l sa largeur. On peut alors en retirer une parcelle carrée de côté l : il reste une parcelle rectangulaire d'aire $L \times l - l^2$, qui est strictement inférieur à l'aire $L \times l$ du rectangle précédent car $l > 0$. La suite des aires des rectangles ainsi construite est donc une

suite strictement décroissante et minorée par 1 (les dimensions minimales sont 1×1), cette suite converge donc. De plus cette suite est une suite d'entiers, donc cette suite devient forcément constante après un nombre fini de rangs.

2. On complète l'algorithme comme ci-dessous.

```python
def parcelle(l, L):
    while l > 0:
        print('Côté :', l, 'Nombre :', L//l)
        l, L = L%l, l

parcelle(56, 96)
```

3. On obtient les résultats suivants.

```
Côté : 56 Nombre : 1
Côté : 40 Nombre : 1
Côté : 16 Nombre : 2
Côté : 8 Nombre : 2
```

Il y a donc $1 + 1 + 2 + 2 = 6$ héritiers.

Document sous licence libre Creative Commons

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 82 :

On utilise l'algorithme d'Euclide :
$231 = 130 \times 1 + 101$
$130 = 101 \times 1 + 29$
$101 = 29 \times 3 + 14$
$29 = 14 \times 2 + 1$
$14 = 1 \times 14 + 0$.
Le dernier reste non nul est 1, donc $PGCD(231; 130) = 1$. D'après le théorème de Bézout, il existe donc un couple $(u; v)$ tel que $130u + 231v = 1$. On détermine un tel couple en remontant l'algorithme :
$1 = 29 - 14 \times 2$
$= 29 - (101 - 29 \times 3) \times 2$
$= 29 \times 7 - 101 \times 2$
$= 130 \times 7 - 101 \times 9$
$= 130 \times 16 - 231 \times 9$.
Un couple solution est donc $(16; -9)$.

Corrigé exercice 83 :

On a $(4n + 3) - 2(2n + 1) = 1$. Il existe donc u et v deux entiers relatifs tels que $u(4n + 3) + v(2n + 1) = 1$ et donc, d'après le théorème de Bézout, $4n + 3$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

Corrigé exercice 84 :

$PGCD(24; 32) = 8$ donc l'équation $24x + 32y = n$ admet des solutions si, et seulement si, n est un multiple de 8.

Corrigé exercice 85 :

$4(3n + 4) - 3(4n + 3) = 12n + 16 - 12n - 9 = 7$. On peut en déduire que le PGCD de $3n + 4$ et $4n + 3$ divise 7. Il peut donc être égal à 1, ou être égal à 7. L'affirmation est donc fausse.

Corrigé exercice 86 :

1. 4 et 27 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Bézout, il existe $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $4x - 27y = 1$. Autrement dit, l'équation $4x - 27y = 1$ admet bien des solutions entières. Une solution de cette équation est, par exemple, le couple $(7; 1)$ car $4 \times 7 - 27 = 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $x_n = x_0 + 27n$ et $y_n = y_0 + 4n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $4x_n - 27y_n = 4(x_0 + 27n) - 27(y_0 + 4n) = 4x_0 - 27y_0 + 4 \times 27n - 4 \times 27n = 1$ car $(x_0; y_0)$ est solution de cette équation. Donc, pour tout entier naturel n, $(x_n; y_n)$ est solution de cette équation.

Document sous licence libre Creative Commons

3. En générant sur calculatrice les suites (x_n) et (y_n) définies dans la question précédente, en prenant $x_0 = 7$ et $y_0 = 1$, on obtient les couples suivants.

n	u_n	v_n
0	7	1
1	34	5
2	61	9
3	88	13
4	115	17
5	142	21
6	169	25
7	196	29
8	223	33
9	250	37
10	277	41

Corrigé exercice 87 :

1. En divisant les deux membres de l'équation $54x + 42y = 24$ par 6, on obtient l'équation équivalente $9x + 7y = 4$. Or 9 et 7 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Bézout, il existe $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $9u + 7v = 1$. En multipliant les deux membres de cette équation par 4, on obtient alors l'existence d'un couple $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $9 \times 4u + 7 \times 4v = 4$, c'est-à-dire, en posant $U = 4u \in \mathbb{Z}$ et $V = 4v \in \mathbb{Z}$, qu'il existe $(U; V) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $9U + 7V = 4$. En conclusion, l'équation $54x + 42y = 24$ admet donc bien des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

2. On a montré dans la question précédente que l'équation (E) est équivalente à $9x + 7y = 4$. Or $9 \times 2 + 7 \times (-2) = 4$, donc une solution particulière de l'équation $9x + 7y = 4$ est $(2; -2)$.

3. Pour tout $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ solution de (E), $7y = -9x + 4$ donc $y = -\frac{9}{7}x + \frac{4}{7}$. Autrement dit, le point de coordonnées $(x; y)$ appartient à la droite d'équation $y = -\frac{9}{7}x + \frac{4}{7}$.

4. On choisit $x = 2$ comme valeur initiale, car le couple $(2; -2)$ est une solution particulière de l'équation $9x + 7y = 4$ d'après la question 2.. On choisit un pas de 7 pour que les valeurs de x et de y restent entières puisque 7 est divisible par 7. On obtient ainsi les valeurs ci-dessous.

2	-2
9	-11
16	-20
23	-29
30	-38
37	-47
44	-56
51	-65

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 88 :

1. On pose $d = PGCD(a;b)$. Il existe a' et b' deux entiers tels que $a = da'$ et $b = db'$. Soit maintenant $(x;y)$ un couple d'entiers solution de l'équation $ax+by = c$. Alors on peut réécrire cette égalité comme suit : $da'x+db'y = c$, autrement dit $d(a'x+b'y) = c$. Donc $d \mid c$.

2. D'après l'identité de Bézout, il existe x et y deux entiers tels que $ax + by = PGCD(a;b)$. En multipliant les deux membres de l'égalité par c' on obtient alors $a(c'x)+b(c'y) = c$. Le couple d'entiers $(c'x;c'y)$ est donc alors solution de l'équation $ax + by = c$.

Corrigé exercice 89 :

Il existe $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\frac{1}{nm} = \frac{a}{n} + \frac{b}{m}$ équivaut à il existe $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $1 = ma+nb$, car n et m sont non nuls, ce qui, d'après le théorème de Bézout, équivaut à dire que m et n sont premiers entre eux.

Corrigé exercice 90 :

1. Les diviseurs de 3 sont 1, 3, –1, –3. Si n n'est pas multiple de 3, alors 3 et –3 ne divisent pas n, et donc $PGCD\,(n;3) = 1$. D'où n et 3 sont premiers entre eux.

2. Supposons que n est premier avec 3. D'après le théorème de Bézout, il existe donc $(u;v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $nu + 3v = 1$. En multipliant les deux membres de cette égalité par $n^2 \neq 0$, on obtient $n^3u + 3vn^2 = n^2$. Supposons maintenant, par l'absurde, que n^3 soit divisible par 3. Par combinaison linéaire, l'égalité précédente nous donne alors que n^2 est aussi divisible par 3. En multipliant maintenant les deux membres de l'égalité $nu + 3v = 1$ par n, on obtient l'égalité $n^2u + 3nu = n$. Par combinaison linéaire, n^2 étant divisible par 3, on obtient alors que n est divisible par 3. Ce qui est absurde puisque n et 3 sont premiers entre eux. On peut donc en déduire que si n est premier avec 3, alors n^3 n'est pas divisible par 3. Or les diviseurs positifs de 9 sont 1, 3 et 9. Donc le PGCD de 9 et n^3 ne peut qu'être égal à 1. Ainsi, n^3 et 9 sont premiers entre eux.

3. Si $n = 0$, alors $9 \mid 0^3$ et on a bien $3 \mid 0$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ tel que 3 ne divise pas n. D'après la question 1., n et 3 sont donc premiers entre eux. Ce qui implique, d'après la question 2., que n^3 et 9 sont premiers entre eux, et donc que 9 ne divise pas n^3. Par contraposée, on en déduit que pour tout entier naturel non nul n, si 9 divise n^3 alors 3 divise n.

Corrigé exercice 91 :

1. Soient x le nombre de bloc-notes et y le nombre de cartouches d'encre que l'on souhaite livrer. Le poids en gramme du colis est exprimé par l'expression $702x + 45y$. D'après le corollaire du théorème de Bézout, pour tout entier c, l'équation $702x + 45y = c$ admet une solution si, et seulement si, c est un multiple de $PGCD\,(702;45)$. Or $PGCD\,(702;45) = 9PGCD\,(78;5) = 9$. On peut donc atteindre, avec ces fournitures, les poids de 4 500 g et de 9 000 g, mais pas ceux de 2 000 g et de 3 000 g.

Document sous licence libre Creative Commons

2. On cherche un couple $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ solution de $702x+45y = 4500$. En divisant les deux membres de cette égalité par 9, cette équation équivaut à $78x + 5y = 500$. 500 étant un multiple de 5, on essaie de prendre $x = 5$. On a alors $78 \times 5 = 390$, ce qui nous donne $5y = 500-390 = 110 = 5\times22$. Et on en déduit que $78\times5+5\times22 = 500$. Une solution particulière à cette équation est donc le couple $(5; 22)$. Un colis constitué de 5 bloc-notes et 22 cartouches d'encre pèse donc exactement 4,5 kg.

3. Appliquons tout d'abord l'algorithme d'Euclide au couple $(702; 45)$:

   $702 = 45 \times 15 + 27$

   $45 = 27 \times 1 + 18$

   $27 = 18 \times 1 + 9$

   $18 = 9 \times 2 + 0.$

   Par remontée, on en déduit alors que $9 = 27 - 18 = 27 - (45 - 27) = 27 \times 2 - 45$, c'est à dire $9 = (702 - 45 \times 15) \times 2 - 45 = 702 \times 2 - 45 \times 31$. Le couple $(2; -31)$ est donc solution de $702x + 45y = 9$. D'où le couple $(1000; -15500)$ est solution de $702x + 45y = 4500$. Ce couple n'est, par contre, inutilisable dans ce contexte : on cherche un nombre de bloc-note et de cartouche d'encre, donc des entiers naturels. Ce qui n'est pas le cas de cette solution.

Corrigé exercice 92 :

1. $\frac{n-7}{18}$ est un entier si, et seulement si, 18 divise $n - 7$, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n - 7 = 18k$, ce qu'on peut réécrire $n = 18k + 7$. De même, $\frac{n-8}{15}$ est un entier si, et seulement si, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n - 8 = 15k'$ c'est-à-dire $n = 15k' + 8$. On en déduit alors que k et k' doivent vérifier l'égalité $18k + 7 = 15k' + 8$ équivalente à l'équation $18k - 15k' = 1$. Or 18 et 15 ne sont pas premiers entre eux donc, d'après l'identité de Bézout, il n'existe pas d'entiers k et k' tels que $18l - 15k' = 1$. Il n'existe donc pas d'entier naturel n tel que $\frac{n-7}{18}$ et $\frac{n-8}{15}$ soient tous les entiers.

2. $\frac{n-3}{16}$ est un entier si, et seulement si, 16 divise $n - 3$, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n - 3 = 16k$. De même, $\frac{n-11}{12}$ est un entier si, et seulement si, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n - 11 = 12k'$. On en déduit alors que k et k' doivent vérifier $16k - 12k' = 8$. Or $PGCD\,(16; 12) = 4$ donc, d'après le théorème de Bézout il existe des entiers u et v tels que $16u - 12v = 4$ et donc, en prenant les entiers $k = 2u$ et $k' = 2v$, on obtient deux entiers k et k' tels que $16k - 12k' = 8$. Il existe donc bien un entier naturel n tel que $\frac{n-3}{16}$ et $\frac{n-11}{12}$ soient tous les deux entiers.

Corrigé exercice 93 :

1. a. Supposons que $y \equiv 10x + 3\,[35]$. Alors il existe un entier k tel que $y = 10x + 3 + 35k$. Autrement dit, il existe un entier k tel que $y - 3 = 10x + 35k$.

   b. Le PGCD de 10 et 35 est 5 donc, d'après le corollaire de l'identité de Bézout, cette équation admet des solutions entières si et seulement si $y - 3$ est un multiple de 5. Autrement dit, elle admet des solutions entières si, et seulement si, $y \in \{5k + 3; k \in \mathbb{Z}\}$.

c. On en déduit qu'avec cette fonction de chiffrement, les seules lettres qui apparaissent dans les messages chiffrés sont celles qui correspondent aux entiers de l'ensemble $\{5k+3; k \in \mathbb{Z}\}$.

2. a. $8a \equiv 1\,[35] \Leftrightarrow$ il existe un entier b tel que $8a = 35b+1 \Leftrightarrow$ il existe un entier b tel que $8a - 35b = 1$. Un tel entier b existe d'après le théorème de Bézout car 8 et 35 sont premiers entre eux. Pour déterminer un tel couple $(a; b)$, on écrit l'algorithme d'Euclide :

   $35 = 8 \times 4 + 3$

   $8 = 3 \times 2 + 2$

   $3 = 2 \times 1 + 1$

   Puis sa remontée : $1 = 3-2 = 3-(8-3\times 2) = 3\times 3 - 8 = (35 - 8\times 4)\times 3 - 8 = 35 \times 3 - 8 \times 13$ Un entier a solution de la congruence initiale est donc –13 : $8 \times (-13) \equiv 1\,[35]$.

   b. Soit $y \in \{0; \ldots ; 34\}$. $y \equiv 8x + 5\,[35] \Leftrightarrow y - 5 \equiv 8x\,[35] \Leftrightarrow -13\,(y-5) \equiv 1x\,[35]$. On en déduit que x est solution de $y \equiv 8x+3\,[35]$ si, et seulement si, $x \equiv -13y+65\,[35]$, ce qui équivaut à $x \equiv -13y+30\,[35]$. Finalement, si x vérifie $y \equiv 8x+5\,[35]$ et $x \in \{0; \ldots ; 34\}$, alors x est le reste de la division euclidienne de $-13y+30$ par 35. Par unicité du reste de la division euclidienne, cette solution est unique. Réciproquement, si x est le reste de la division euclidienne de $-13y+30$ par 35, alors x est solution de $y \equiv 8x+5\,[35]$ et $x \in \{0; \ldots ; 34\}$. La fonction de décodage est donc définie par $h\colon y \mapsto -13y+30$.

   c. Pour déterminer l'entier chiffré par 9, on utilise la fonction h : $h\,(9) = -13 \times 9 + 30 = -87$. Or $-87 \equiv 18\,[35]$. L'entier chiffré par 9 est donc 18.

Corrigé exercice 94 :

1. Supposons, par l'absurde, qu'il existe un entier $x \in \{0; \ldots ; 34\}$ tel que $7x+1 \equiv 2\,[35]$. Alors il existe des entiers x et y tels que $7x+1 = 35y+2$, soit $7x-35y = 1$. Or $7x-25y$ est, d'après le corollaire de l'identité de Bézout, un multiple de $PGCD(7; 35) = 7$, ce qui est absurde. On en déduit alors qu'il n'existe pas d'entier x tel que $7x+1 \equiv 2\,[35]$. Ainsi, la lettre associée au nombre 2 n'apparaîtra pas dans le message chiffré.

2. a. $7x+1 \equiv 8\,[35] \Leftrightarrow 7x \equiv 7\,[35]$. Cela équivaut à dire qu'il existe un entier y tel que $7x = 35y+7$, c'est-à-dire $x = 5y+1$. On en déduit que les entiers 1 et 6 sont codés par 8.

   b. L'ensemble des entiers codés par 8 est l'ensemble des entiers de la forme $5y+1$ où y est un entier tel que $5y+1 \in \{0; \ldots ; 34\}$. C'est donc l'ensemble $\{1; 6; 11; 16; 21; 26; 31\}$. Il y a donc sept entiers codés par le nombre 8.

Corrigé exercice 95 :

1. Soient $(\alpha; \beta; \gamma)$ un tel triplet d'entiers, $k \in \mathbb{Z}$ et $x = 35\alpha a + 21\beta b + 15\gamma c + 105k$. Alors $x \equiv a\,[3]$ car $35\alpha \equiv 1\,[3]$ et $21\beta b + 15\gamma c + 105k \equiv 0\,[3]$ puisque 21, 15 et 105 sont des multiples de 3. De même, $x \equiv b\,[5]$ car $21\beta \equiv 1\,[5]$ et $35\alpha a + 15\gamma c + 105k \equiv 0\,[5]$ Et $x \equiv c\,[7]$ car $15\gamma \equiv 1\,[7]$ et $35\alpha a + 21\beta b + 105k \equiv 0\,[7]$. Donc x est solution du système.

Document sous licence libre Creative Commons

2. Il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $35\alpha \equiv 1\,[3]$ si, et seulement si, il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que $35\alpha - 3k = 1$. Or 35 et 3 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Bézout, un tel entier α existe bien. De même, il existe bien $\beta \in \mathbb{Z}$ tel que $21\beta \equiv 1\,[5]$ et $\gamma \in \mathbb{Z}$ tel que $15\gamma \equiv 1\,[7]$. Un triplet possible est $\alpha = 2$, $\beta = 1$ et $\gamma = 1$ car $35 \times 2 \equiv 1\,[3]$, $21 \equiv 1\,[5]$, $15 \equiv 1\,[7]$.

3. On applique la formule de la question 1. aux solutions particulières obtenues à la question précédente. Ainsi, un ensemble de solutions de ce système est $S = \{70a + 21b + 15c + 105k\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$. On a montré que tous les éléments de S sont des solutions du système, mais on n'a pas montré que toutes les solutions de ce système sont dans cet ensemble.

Corrigé exercice 96 :

1. a. Une solution particulière de l'équation $3x+2y = 29$ est $(9;1)$ car $3\times 9+2\times 1 = 29$.

   b. On travaille dans les entiers, donc :
   $$\begin{cases} 11 - 2k \geqslant 0 \\ 3k - 2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11 \geqslant 2k \\ 3k \geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \geqslant k \\ k \geqslant 1 \end{cases}.$$
   Les couples cherchées sont donc ceux de la forme $(11-2k; 3k-2)$ avec $1 \leqslant k \leqslant 5$. Il s'agit donc des couples $(9;1)$, $(7;4)$, $(5;7)$, $(3;10)$, $(1;13)$.

2. a. $(x;y)$ vérifie $3x + 2y = 29$, donc x ne peut pas être un multiple de 2, sinon 29 le serait aussi. Donc x est premier avec 4 car les seuls diviseurs de 4 sont 1, 2, 4 et leurs opposés. Or $(x;y;z)$ vérifie $4z = xy$, donc 4 divise xy. Or x et 4 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 4 divise y.

   b. On construit la table de congruence suivante.

k modulo 4	0	1	2	3
$3k-2$ modulo 4	2	1	0	3

   On en déduit que les solutions de (E) telles que y soit divisible par 4 sont celles telles que $k \equiv 2\,[4]$, c'est-à-dire celles de la forme $(7-8m; 12m+4)$ avec m entier.

   c. Si $(x;y;z)$ est un point de P, alors on sait qu'il existe m tel que $x = 7 - 8m$ et $y = 12m + 4$. Or $4z = xy$ donc $4z = (7-8m)\,(12m+4)$, d'où $z = (7-8m)\,(3m+1)$. Les points de P de coordonnées entières sont donc les points de coordonnées $(7-8m; 12m+4; (7-8m)\,(3m+1))$, avec $m \in \mathbb{Z}$.

Document sous licence libre Creative Commons

9 Exercices d'entraînement partie 3

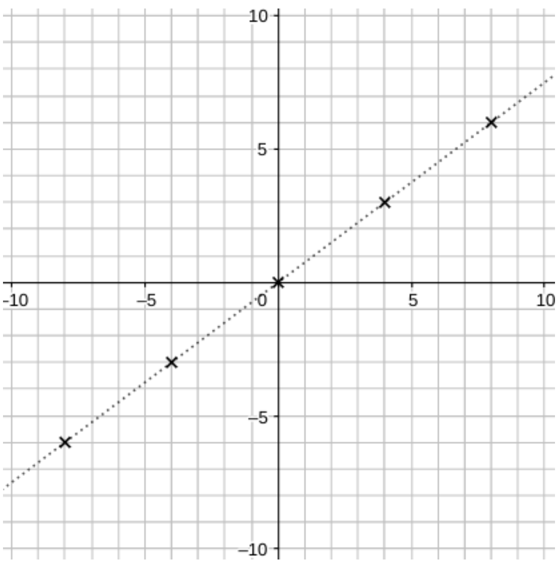
Corrigé exercice 97 :

Soit n un entier tel que le reste de la division euclidienne de n par 204 et par 156 soit 15. Il existe donc q et m des entiers tels que $n = 204q + 15$ et $n = 156m + 15$. On a ainsi $204q+15 = 156m+15$, donc $204q = 156m$, soit $17q = 13m$. Or 17 et 13 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, on peut en déduire que 17 divise m. Il existe donc un entier p tel que $m = 17p$, et donc tel que $n = 156m + 15 = 156 \times 17p + 15 = 2652p + 15$. Réciproquement, pour tout entier k, $2652k + 15$ a pour reste 15 dans les divisions euclidiennes par 204 et 156 car $2652 = 156 \times 17 = 204 \times 13$ est divisible par 156 et 204. Les entiers dont le reste dans la division euclidienne par 204 et 156 est 15 sont donc exactement ceux de la forme $2652p + 15$ avec p entier.

Corrigé exercice 98 :

L'égalité $3x = 4y$ implique que 3 divise $4y$, et donc, d'après le théorème de Gauss, que 3 divise y, car 3 et 4 sont premiers entre eux. Soit alors k l'entier tel que $y = 3k$. L'égalité $3x = 4y$ peut ainsi se réécrire $3x = 4 \times 3k$, ce qui équivaut à $x = 4k$.

Réciproquement, s'il existe un entier k tel que $\begin{cases} x = 4k \\ y = 3k \end{cases}$, alors $3x = 12k = 4y$. L'ensemble de points cherché est donc inclus dans $\{(4k; 3k)\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$. Plus précisément, ce sont les points à coordonnées entières de la droite d'équation $4y - 3x = 0$.



De plus, les coordonnées x et y doivent être comprises entre -10 et 10. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors $-10 \leqslant 4k \leqslant 10 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leqslant k \leqslant \frac{5}{2}$. L'ensemble cherché est donc : $\{(4k; 3k)\,;\, -2 \leqslant k \leqslant 2\} = \{(-8; -6)\,;\,(-4; -3)\,;\,(0; 0)\,;\,(4; 3)\,;\,(8; 6)\}$.

Corrigé exercice 99 :

Soit n un entier naturel tel que $6|4n$ et $4|5n$. Soit k l'entier tel que $4n = 6k$. Alors $2n = 3k$. Or 2 et 3 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 3 divise n. Posons p l'entier tel que $n = 3p$. De même, 4 divise n car $4|5n$, et 4 et 5 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 4 divise $n = 3p$. En appliquant à nouveau le théorème de Gauss, on obtient que 4 divise p, Ainsi, il existe un entier q tel que $n = 3 \times 4q = 12q$. Réciproquement, s'il existe un entier q tel que $n = 12q$ alors n est divisible par 6 et par 4, donc $4n$ et $5n$ le sont aussi. L'ensemble cherché est donc $\{12k; k \in \mathbb{Z}\}$.

Corrigé exercice 100 :

1. Soit $(a; b)$ un couple d'entiers tel que $PGCD\,(a; b) = 21$ et $3a = 5b$. Soient α et β les entiers tels que $a = 21\alpha$ et $b = 21\beta$. Alors α et β sont premiers entre eux, sinon a et b admettraient un diviseur commun plus grand que 21, et $3a = 5b \Rightarrow 3\alpha = 5\beta$. On a ainsi que 3 divise 5β, donc, d'après le théorème de Gauss, 3 divise β, car 3 et 5 sont premiers entre eux. Soit k l'entier tel que $\beta = 3k$. Ainsi, on a $3\alpha = 5 \times 3k$, d'où $\alpha = 5k$. Mais α et β sont premiers entre eux, donc $k = 1$, sinon, α et β admettraient k comme diviseur commun. Au final, on a donc $a = 21 \times 5 = 105$ et $b = 21 \times 3 = 63$. Pour finir, on vérifie que ce couple est bien solution du problème initial : on a bien $PGCD\,(a; b) = 21$ et $3a = 3 \times 21 \times 5 = 5b$. Donc l'unique couple $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $PGCD\,(a; b) = 21$ et $3a = 5b$ est $a = 105$ et $b = 63$.

2. Soit $(a; b)$ un couple d'entiers tel que $PGCD\,(a; b) = 18$ et $7a = 4b$. Alors 7 divise $4b$ et 7 et 4 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise b. Soit alors k l'entier tel que $b = 7k$. On a donc aussi $7a = 4 \times 7k$, c'est-à-dire $a = 4k$. De plus, 18 est le PGCD de a et b, donc 18 divise $b = 7k$. Comme 18 et 7 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, on en déduit que 18 divise k. Ainsi, il existe un entier c tel que $a = 4 \times 18c = 72c$ et $b = 7 \times 18c = 126c$. Mais $PGCD\,(a; b) = 18$, donc nécessairement $c = 1$. En effet, si on avait $c \neq 1$, $18c$ sera un diviseur commun de a et b et on aurait $18c > 18$, ce qui est impossible car 18 est le PGCD de a et b. En conclusion, l'unique couple $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ respectant ces deux conditions est donc $(72; 126)$.

Corrigé exercice 101 :

1. Par hypothèse, a et b sont premiers entre eux donc, d'après l'identité de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$. Soient alors u et v de tels entiers. En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par c, on obtient qu'il existe u et v, deux entiers, tels que $acu + bcv = c$. Soit maintenant d, un diviseur commun à a et bc. Comme d divise a et bc, d divise cette combinaison linéaire, donc d divise c.

2. Supposons de plus que c est premier avec a. On a montré que tout diviseur commun de a et bc est aussi un diviseur commun de a et c. En particulier, le PGCD de a et bc est un diviseur commun de a et c. Comme a et c sont premiers entre eux, le PGCD de a et bc est donc nécessairement égal à 1.

Corrigé exercice 102 :

1. x et y correspondant respectivement au nombre de bloc-notes et de cartouches, ce sont des nombres entiers positifs donc des entiers naturels. De plus, le poids du colis est donné par l'expression $702x + 45y$ car $702x$ et $45y$ correspondent respectivement au poids en gramme de x bloc-notes et de y cartouches. Le colis devant peser au total 4500 g, ces valeurs vérifient donc bien l'équation $702x + 45y = 4500$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

2. Une solution particulière de cette équation est le couple $(0; 100)$.

3. Soit $(x; y)$ une solution de l'équation (E). Alors $702x + 45y = 4500 = 702x_0 + 45y_0$, car $(x_0; y_0)$ est aussi solution de (E). Ainsi, $702\,(x - x_0) = 45\,(y_0 - y)$.

4. En divisant chaque membre de l'équation par 9, l'équation précédente peut se réécrire $78\,(x - x_0) = 5\,(y_0 - y)$. Or 5 et 78 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, cette égalité implique que 5 divise $x - x_0$. Soit alors k l'entier tel que $x - x_0 = 5k$. L'équation peut donc se réécrire $78 \times 5k = 5\,(y_0 - y)$, et on a donc $78k = y_0 - y$, d'où $y = y_0 - 78k$. En utilisant la solution particulière trouvée à la question 2, on obtient que $x = 5k$ et $y = 100 - 78k$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, on vérifie que, pour tout entier k, le couple $(5k; 100 - 78k)$ est solution de l'équation (E) : $702 \times 5k + 45\,(100 - 78k) = 3510k + 4500 - 3510k = 4500$. L'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$ est donc $\{(5k; 100 - 78k)\,; k \in \mathbb{Z}\}$.

5. Dans ce problème, on ne s'intéresse qu'aux solutions entières positives. Or $5k \geqslant 0 \Leftrightarrow k \geqslant 0$, et $100 - 78k \geqslant 0 \Leftrightarrow 100 \geqslant 78k$, donc $100 - 78k \geqslant 0 \Leftrightarrow k \leqslant 1$. Les seules solutions dans $\mathbb{N}^2$ sont donc celles correspondant à $k = 0$ et $k = 1$. Les valeurs de x et y dans ce problème sont donc $(0; 100)$ et $(5; 22)$.

Corrigé exercice 103 :

1. a. ab est un multiple commun à a et b, donc l'ensemble des multiples communs à a et b est non vide.

   b. Les cinq premiers multiples positifs de 24 sont 24, 48, 72, 96 et 120. Les cinq premiers multiples positifs de 36 sont 36, 72, 108, 144 et 180. Le PPCM de 24 et 36 est donc 72.

2. On a $24 \times 36 = 864$. Or $PGCD(24; 36) = 12 \times PGCD(2; 3) = 12 \times 1 = 12$ et $PPCM(24; 36) = 72$ d'après la question précédente.

   On retrouve donc $PGCD(24; 36) \times PPCM(24; 36) = 12 \times 74 = 864 = 24 \times 36$.

3. On a, d'une part $a'b'd = (a'd)\,b' = ab'$, donc $a'b'd$ est un multiple de a, et d'autre part $a'b'd = a'\,(b'd) = a'b$, et donc $a'b'd$ est un multiple de b. De plus comme a', b' et d sont positifs, alors $a'b'd$ est positif. En conclusion, $a'b'd$ est un multiple commun positif à a et b.

4. a. a' et b' sont premiers entre eux. En effet, $PGCD\,(a; b) = PGCD\,(da'; db') = dPGCD\,(a'; b')$. Or $PGCD\,(a; b) = d$ donc $PGCD\,(a'; b') = 1$.

   b. Soit m est un multiple commun positif à a et b. Soient maintenant n et p les entiers tels que $m = na$ et $m = pb$. Alors on peut écrire $na'd = pb'd$, et donc $na' = pb'$. Or, d'après la question précédente, a' et b' sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, a' divise p. Posons c l'entier tel que $p = ca'$. Alors $m = pb = pb'd = c\,(a'b'd)$, et donc m est bien un multiple de $a'b'd$.

5. On a montré que $a'b'd$ est un multiple commun positif à a et b et que tout autre multiple commun à a et b est un multiple de $a'b'd$. Tout autre multiple commun positif à a et à b est donc supérieur à $a'b'd$. Ainsi, $a'b'd$ est bien le plus petit commun multiple de a et b.

Document sous licence libre Creative Commons

6. On a $ab = a'db'd$ par définition de a' et b', donc $ab = a'b'd \times d = md$ d'après la question précédente. On a bien : $ab = PGCD\,(a;b) \times PPCM\,(a;b)$.

Corrigé exercice 104 :

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a et b^n sont premiers entre eux. Initialisation : Par hypothèse, a et b sont premiers entre eux donc la propriété est vraie pour $n = 1$. Hérédité : Soit $k \geqslant 1$ tel que a et b^k soient premiers entre eux (hypothèse de récurrence). Montrons que a et b^{k+1} sont premiers entre eux. D'après l'hypothèse de récurrence, a et b^k sont premiers entre eux donc, d'après l'identité de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que $au + b^k v = 1$. En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par b on obtient alors $abu + b^{k+1}v = b$. Soit maintenant $d \in \mathbb{N}$ un diviseur commun à a et b^{k+1}. Alors d divise b comme combinaison linéaire de a et b^{k+1}, et donc d est un diviseur commun à a et b. Or a et b sont premiers entre eux, donc $d = 1$. On en déduit que $PGCD\left(a;b^{k+1}\right) = 1$, c'est-à-dire que a et b^{k+1} sont premiers entre eux. La propriété est donc vraie au rang $k+1$. Conclusion : On a montré que s'il existe un entier naturel non nul k tel que la propriété est vraie au rang k, alors cette propriété reste vrai au rang $k+1$. Cette propriété étant vraie au rang $k = 1$, on en déduit, d'après le principe de récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a et b^n sont premiers entre eux.

Corrigé exercice 105 :

1. Soient n un entier naturel non nul et c un entier tels que que n et c sont premiers entre eux et $ac \equiv bc\,[n]$. Alors $ac \equiv bc\,[n]$ implique que $(a-b)\,c \equiv 0\,[n]$ c'est à dire que n divise $(a-b)\,c$. Or n et c sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, n divise $a-b$, c'est-à-dire qu'on a $a - b \equiv 0\,[n]$ et donc $a \equiv b\,[n]$.

2. Prenons, par exemple, $n = 6$, $c = 2$, $a = 1$ et $b = 4$. Ainsi n et c ne sont pas premiers entre eux car $PGCD\,(6;2) = 2$. De plus, $a \times c = 2$, $b \times c = 8$, donc $2a \equiv 2b\,[6]$ mais $a \not\equiv b\,[6]$. L'implication n'est donc pas vraie pour tous a et b entiers lorsque n et c ne sont pas premiers entre eux.

Corrigé exercice 106 :

1. L'équation diophantienne associée à cette situation est $24a + 45b = 903$.

2. On a $24 \times 2 + 45 \times 19 = 903$ donc le couple $(2;19)$ est bien solution de cette équation.

3. Soit $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de cette équation. Alors on a $24a + 45b = 903$ et donc $24a + 45b = 24 \times 2 + 45 \times 19$, d'où $24\,(a-2) = 45\,(19-b)$.

4. En divisant les deux membres de l'égalité précédente par 3, on peut la réécrire $8\,(a-2) = 15\,(19-b)$. Cette égalité implique que 15 divise $8\,(a-2)$, or 15 et 8 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 15 divise $a-2$. Soit k l'entier tel que $a-2 = 15k$. En remplaçant $a-2$ par $15k$ dans l'égalité $8\,(a-2) = 15\,(19-b)$, on obtient que $8 \times 15k = 15\,(19-b)$ et donc que $8k = 19 - b$. On en déduit alors que $a = 15k + 2$ et $b = 19 - 8k$. Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, tout couple d'entiers de la forme $(2+15k;19-8k)$ est solution de cette équation car $24 \times (2+15k) + 45 \times (19-8k) = 24 \times 2 + 45 \times 19 + 24 \times 15k - 45 \times 8k = 903$. Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est $\{(2+15k;19-8k)\,;k \in \mathbb{Z}\}$.

Document sous licence libre Creative Commons

5. Le nombre total de repas pris est donné par $a+b$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 15k+2$ et $b = 19-8k$. On a donc $a+b = 15k+2+19-8k = 7k+21 = 7\,(k+3)$. Le nombre de repas est donc nécessairement un multiple de 7, cette information ne donne donc aucune information pour déterminer la répartition des choix de menus.

Corrigé exercice 107 :

1. Le reste de la division euclidienne de n par 18 est 2, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 18k+2$. De même, le reste de la division euclidienne de n par 50 est 2, donc il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 50m+2$. D'où k et m vérifient $18k+2 = 50m+2$, soit $18k = 50m$.

2. Les entiers k et m vérifient $9k = 25m$. Or 9 et 25 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 9 divise m. Posons $p \in \mathbb{Z}$ tel que $m = 9p$. Ainsi, on a $n = 50 \times 9p + 2 = 450p + 2$. Or $450 \equiv 0\,[15]$ donc $n \equiv 2\,[15]$.

Corrigé exercice 108 :

L'affirmation est fausse. Prenons pour contre-exemple $a = 2$, $b = 2$ et $n = 4$. On a bien $a \times b = 4 \equiv 0\,[4]$, mais 2 n'est pas congru à 0 modulo 4.

Corrigé exercice 109 :

1. On entre en B1 la formule = MOD(A1 ; 3) et en C1 la formule = MOD(A1 ; 5) avant de les copier-glisser vers le bas.

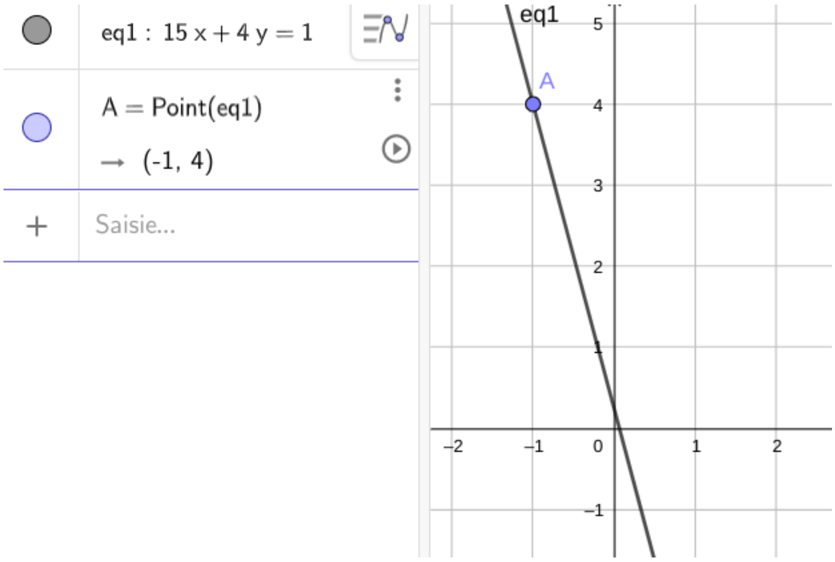
2. On entre en D1 la formule = SI(ET(B1=2 ; C1=1) ; 1 ; 0) avant de la copier-glisser vers le bas. Il existe 3 solutions entre –10 et 30 : –4, 11 et 26. Ces entiers semblent être répartis de quinze en quinze.

3. Soient n et n_0 deux solutions du problème. Alors n et n_0 ont le même reste dans la division euclidienne par 3 et dans la division euclidienne par 5, d'où $n \equiv n_0\,[3]$ et $n \equiv n_0\,[5]$ donc $n - n_0 \equiv 0\,[3]$ et $n - n_0 \equiv 0\,[5]$. On en déduit que $n - n_0$ est divisible par 3 et par 5. Or 3 et 5 sont premiers entre eux donc, d'après le corollaire du théorème de Gauss, $n - n_0$ est divisible par 15. Autrement dit, $n - n_0 \equiv 0\,[15]$. On a donc $n \equiv n_0\,[15]$. Grâce au tableur on sait que la solution n_0 à ce problème vérifiant $0 \leqslant n_0 < 15$ est 11, donc le reste de la division euclidienne de n par 15 est 11.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 110 :

1. On obtient la droite ci-dessous.



   On vérifie bien que le point de cette droite d'abscisse –1 a pour ordonnée 4.

2. Soit $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ un point de cette droite. Alors on a $15x = -4y + 1$, ce qui est équivalent à $15x \equiv 1\,[4]$. Or $15 \equiv -1[4]$, donc $-x \equiv 1\,[4]$, d'où $x + 1 \equiv 0\,[4]$. Ainsi, 4 divise $x + 1$.

3. On entre la formule B = (n-1, eq1(n-1)).

4. On obtient les points $(-13; 49)$, $(-9; 34)$, $(-5; 19)$, $(-1; 4)$, $(3; -11)$, $(7; -26)$ et $(11; -41)$. On peut alors conjecturer que les ordonnées des points à coordonnées entières diminuent de 15 en 15. On le démontre : $(-1; 4)$ est un point de la droite. Si $(x; y)$ est un autre point de cette droite, alors il existe un entier k tel que $x = -1+4k$ car $x + 1$ prend pour valeur les multiples de 4. Alors $15\,(-1 + 4k) + 4y = 1$, donc $-15 + 60k + 4y = 1$, d'où $4y = 16 - 60k$, soit $y = 4 - 15k$. Réciproquement, s'il existe un entier k tel que $y = 4 - 15k$, alors $15x + 4y = 15\,(-1 + 4k) + 4\,(4 - 15k) = -15 + 60k + 16 - 60k = 1$ donc $(x; y)$ est un point de la droite. Au final, les ordonnées des points de coordonnées entières de cette droite sont donc de la forme $y = 4 - 15k$. Donc la distance verticale entre deux points consécutifs à coordonnées entières de la droite est égale à $(4 - 15(k + 1)) - (4 - 15k) = 15$.

Corrigé exercice 111 :

Les années cherchées sont les années n telles qu'il existe deux entiers a et b tels que $n = -457 + 28a$ et $n = -457 + 19b$. On en déduit qu'on doit avoir $28a = 19b$. Or 19 et 28 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 28 divise b Il existe donc un entier c tel que $b = 28c$. D'où $n = -457 + 19 \times 28c = -457 + 532c$. Réciproquement, si n est de la forme $-457 + 532c$ avec c entier, alors $n \equiv -457\,[19]$ et $n \equiv -457\,[28]$ car $532 \equiv 0\,[19]$ et $532 \equiv 0\,[28]$. L'ensemble des années où les cycles solaire et lunaire se retrouvent de nouveau coordonnés sont donc toutes les années de la forme $-457 + 532c$ avec c entier.

Document sous licence libre Creative Commons

10 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 112 :

1. Si $(X;Y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de l'équation $12X = 31Y$, alors 31 divise $12X$. Or 12 et 31 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss ; 31 divise X. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $X = 31k$. Alors $12 \times 31k = 31Y$, d'où $Y = 12k$. Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $12 \times 31k = 31 \times 12k$, donc l'ensemble des solutions est $S_0 = \{(31k; 12k)\,;k \in \mathbb{Z}\}$.

2. On écrit l'algorithme d'Euclide pour 12 et 31.

   $31 = 12 \times 2 + 7$

   $12 = 7 \times 1 + 5$

   $7 = 5 \times 1 + 2$

   $5 = 2 \times 2 + 1.$

   Puis on remonte cet algorithme.

   $1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - (7 - 5) \times 2$

   $= 5 \times 3 - 7 \times 2$

   $= (12 - 7) \times 3 - 7 \times 2$

   $= 12 \times 3 - 7 \times 5$

   $= 12 \times 3 - (31 - 12 \times 2) \times 5$

   $= 12 \times 13 - 31 \times 5.$

   Une solution particulière de $12x + 31y = 1$ est donc le couple $(13; -5)$.

3. Comme $12 \times 13 + 31 \times (-5) = 1$, alors $12 \times (13 \times 503) + 31 \times (-5 \times 503) = 503$. Une solution particulière de $12x + 31y = 503$ est donc $(6539; -2515)$.

4. Soit $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de l'équation $12x + 31y = 503$. Alors $12x + 31y = 12 \times 6539 - 31 \times 2515$, donc $12\,(x - 6539) = 31\,(-2515 - y)$, et donc le couple $(x - 6539; -2515 - y)$ est solution de (E_0). D'après la question 1., il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 6539 = 31k$ et $-2515 - y = 12k$, soit $x = 31k + 6539$ et $y = -2515 - 12k$. Réciproquement, on vérifie que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le couple $(31k + 6539; -2515 - 12k)$ est bien solution de (E). En conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donc $S = \{(31k + 6539; -2515 - 12k)\,;k \in \mathbb{Z}\}$.

5. Si $(x; y)$ est une solution de (E) telle que $1 \leqslant y \leqslant 12$, alors il existe un entier k tel que $y = -2515 - 12k$ et $1 \leqslant -2515 - 12k \leqslant 12 \Leftrightarrow 2516 \leqslant -12k \leqslant 2527 \Leftrightarrow -\frac{2527}{12} \leqslant k \leqslant -\frac{2516}{12}$. Or $-\frac{2527}{12} \simeq -210,6$ et $-\frac{2516}{12} \simeq -209,7$ donc, comme $k \in \mathbb{Z}$, $k = -210$. Donc $(29; 5)$ est l'unique solution de (E) telle que $1 \leqslant y \leqslant 12$. On en déduit donc qu'une personne obtenant un résultat final de 503 est née le 29 mai.

6. a. On modifie l'algorithme de la manière suivante :

```
Demander m
Pour x allant de 1 à 31 faire :
        Pour y allant de 1 à 12 faire :
        z ← 12x + 31y
        Si z = m :
                afficher (x; y)
        Fin Pour
Fin Pour
```

b. En Python, cet algorithme s'écrit comme suit.

```python
m=int(input("m"))
for y in range(1,12):
  for x in range(1,31):
    z=12*x+31*y
    if z==m:
      print(x, y)
```

En donnant en entrée $m = 355$, on obtient en sortie le couple $(27; 1)$. Une personne obtenant 355 sera donc née le 27 janvier.

Corrigé exercice 113 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \equiv 9\,[17]$ et $n \equiv 3[5]$. Alors il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 17u + 9$ et $v \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 5v + 3$. Le couple $(u; v)$ vérifie alors $17u + 9 = 5v + 3$, soit $5v - 17u = 6$.

2. 5 et 17 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Bézout, l'équation $5v-17u = 1$ admet une solution. De plus, si $(u; v)$ vérifie $5v-17u = 1$, alors $(6u; 6v)$ est solution de $5v - 17u = 6$. Cette équation admet donc aussi des solutions. De plus $5 \times 8 - 17 \times 2 = 40 - 34 = 6$, donc $(2; 8)$ est une solution particulière de cette équation.

3. Soit $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de l'équation $5v - 17u = 6$. Alors $5v - 17u = 5 \times 8 - 17 \times 2$, donc $5\,(v - 8) = 17\,(u - 2)$. Comme 5 et 17 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, alors $5 \mid (u - 2)$ et donc qu'il existe k entier tel que $u - 2 = 5k$. En remplaçant $u - 2$ par $5k$ dans l'équation, on obtient que $5\,(v - 8) = 17 \times 5k$, donc que $v - 8 = 17k$. La solution est donc de la forme $(5k + 2; 17k + 8)$. Réciproquement, pour tout entier k, $5\,(17k + 8) - 17\,(5k + 2) = 5 \times 17k + 40 - 17 \times 5k - 34 = 6$. Finalement, l'ensemble des solutions de $5v - 17u = 6$ est donc $\{(5k + 2; 17k + 8)\,; k \in \mathbb{Z}\}$. On en déduit que, si n est un entier solution du système de congruences de départ, alors il existe un entier k tel que $n = 5v+3 = 5\,(17k + 8)+3 = 85k + 43$.

4. On a $85 \equiv 0\,[17]$ et $85 \equiv 0\,[5]$. De plus, $43 \equiv 9\,[17]$ et $43 \equiv 3\,[5]$. Donc, pour tout entier k, $43 + 85k \equiv 9\,[17]$ et $43 + 85k \equiv 3\,[5]$. Autrement dit, tout entier de la forme $43 + 85k$, avec k entier, est solution du problème. L'ensemble des solutions du problème est donc $\{43 + 85k; k \in \mathbb{Z}\}$.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 114 :

1. a. d est le PGCD de a et b, donc d divise a et b. Ainsi, d divise toute combinaison linéaire de a et de b donc, en particulier, d divise $au + bv$.

   b. d divise $au+bv = 1$. Or 1 n'admet qu'un seul diviseur positif : lui-même. Donc $d = 1$.

2. On a $|a| \in E$. En effet, si $a > 0$, alors on peut écrire $a = a \times 1 + b \times 0$, et si $a < 0$, on peut écrire $a = a \times (-1) + b \times 0$. Donc E n'est pas vide.

3. a. La division euclidienne de a par c s'écrit $a = cq + r$, où $q = \mathrm{E}\left(\frac{a}{c}\right)$ et $0 \leqslant r < c$.

   b. $c \in E$ donc il existe des entiers u et v tels que $au + bv = c$. Soit $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$ un tel couple. Alors $r = a - cq = a - (au + bv)\,q = a\,(1 - uq) + bvq$. En posant $U = 1 - uq$ et $V = vq$, on obtient bien des entiers U et V tels que $aU + bV = r$. De plus $r > 0$, donc $r \in E$.

   c. On a $r < c$ car r est le reste de la division euclidienne de a par c. De plus, si $r > 0$, on a $r \in E$. Mais c est le plus petit élément de E, donc r ne peut pas être élément de E. On en déduit donc que r ne peut pas être strictement positif, et donc que $r = 0$. Comme r est le reste de la division euclidienne de a par c, cela implique que c divise a.

4. a. En appliquant le même raisonnement que précédemment au reste r' de la division euclidienne de b par c, on montre que $r' \in E$ ou $r' = 0$, puis que $r' = 0$. Ainsi, c divise b.

   b. c est un diviseur positif commun à a et b. Or a et b sont premiers entre eux. Donc $c = 1$.

   c. On vient de montrer que, si a et b sont premiers entre eux, alors 1 est un élément de E. Autrement dit, que si a et b sont premiers entre eux, alors il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

5. La question 1. a montré l'implication réciproque. On a donc montré l'équivalence : « a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$. »

Corrigé exercice 115 :

1. L'énoncé peut se traduire par le système $\begin{cases} b \equiv 3[17] \\ b \equiv 4[11] \\ b \equiv 5[6] \end{cases}$ car, en divisant le butin en 17 parts, il reste 3 pièces, en le divisant par 11, il en reste 4, et en le divisant en 6 parts, il en reste 5.

2. Le système de congruences précédent est équivalent à l'existence d'un triplet $(x; y; z) \in \mathbb{N}^3$ tel que $\begin{cases} b = 17x + 3 \\ b = 11y + 4 \\ b = 6z + 5 \end{cases}$, où x, y et z sont, respectivement, le nombre de pièces reçues par chaque pirate lors du premier, du deuxième et du troisième partage. Ainsi, si $b \in \mathbb{N}$ est solution du système, alors il existe $(x; y; z) \in \mathbb{N}^3$ tel que

BY NC SA

$b = 17x + 3 = 11y + 4 = 6z + 5$. De plus, comme chaque pirate reçoit 84 pièces de plus lors du troisième que lors du premier partage, on peut aussi écrire $z = x + 84$. Et, en conclusion, $(x; y; z)$ vérifie donc $17x - 11y = 1$, $11y - 6z = 1$ et $z - x = 84$.

3. Une solution particulière de $17x-11y = 1$ est $(2; 3)$ car $17\times2-11\times3 = 34-33 = 1$. Soit $(x; y)$ une autre solution de cette équation. Alors $17x - 11y = 17 \times 2 - 11 \times 3$ donc $17\,(x - 2) = 11\,(y - 3)$. D'après le théorème de Gauss, comme 17 et 11 sont premiers entre eux, 11 divise $x - 2$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 2 = 11k$. En remplaçant $x - 2$ par $11k$ dans l'équation, on obtient $17 \times 11k = 11\,(y - 3)$ donc $y - 3 = 17k$. D'où $x = 11k + 2$ et $y = 17k + 3$. Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $17 \times (11k + 2) - 11 \times (17k + 3) = 17 \times 11k + 34 - 11 \times 17k - 33 = 1$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $(11k + 2; 17k + 3)$ est solution de $17x-11y = 1$. L'ensemble des solutions entières de $17x - 11y = 1$ est donc $\{(11k + 2; 17k + 3)\,; k \in \mathbb{Z}\}$. Une solution particulière de $11y-6z = 1$ est $(5; 9)$ car $11\times5-6\times9 = 55-54 = 1$. Soit $(y; z)$ une autre solution. Alors $11y-6z = 11\times5-6\times9$ donc $11\,(y - 5) = 6\,(z - 9)$. D'après le théorème de Gauss, comme 6 et 11 sont premiers entre eux, 11 divise $z - 9$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z - 9 = 11k$. En remplaçant $z - 9$ par $11k$ dans l'équation, on obtient alors $11\,(y - 5) = 6 \times 11k$ donc $y - 5 = 6k$. D'où $y = 6k + 5$ et $z = 11k + 9$. Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $11 \times (6k + 5) - 6 \times (11k + 9) = 11 \times 6k + 55 - 6 \times 11k - 54 = 1$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $(6k + 5; 11k - 9)$ est solution de $11y-6z = 1$. L'ensemble des solutions entières de $11y-6z = 1$ est donc $\{(6k + 5; 11k + 9)\,; k \in \mathbb{Z}\}$.

4. Soient $(x; y; z) \in \mathbb{N}^3$ une solution du système, et $(k; k\prime) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = 11k + 2$, $y = 17k+3$, $y = 6k\prime+5$ et $z = 11k\prime+9$. Comme $z-x = 84$, alors $11k\prime+9-11k-2 = 84$, c'est à dire $11\,(k\prime - k) = 77$, et, en divisant les deux membres de l'équation par 7, on obtient $k\prime = k + 7$.

5. On sait que $y = 17k + 3 = 6k\prime + 5$ et que $k\prime = k + 7$, d'où $17k + 3 = 6\,(k + 7) + 5$, c'est-à-dire $11k = 44$, et on en déduit alors que $k = 4$ et que $k\prime = k + 7 = 11$. En remplaçant k et $k\prime$ par leur valeur, on obtient enfin $x = 46$, $y = 71$, $z = 130$, puis $b = 17x + 3 = 785$. On vérifie que ces valeurs remplissent bien toutes les conditions du problème. On a bien $785 \equiv 3\,[17]$, $785 \equiv 4\,[11]$, $785 \equiv 5\,[6]$ et $130 - 46 = 84$. On peut alors conclure : le butin des pirates est de 785 pièces.

Corrigé exercice 116 :

1. a. $u_0 = 17$ convient, par exemple.

   b. Si $5u + 28v = 1$, alors $5u \equiv 1\,[28]$ et donc $5u - 5u_0 \equiv 0\,[28]$. Ainsi, 28 divise $5\,(u - u_0)$ et donc, comme 5 et 28 sont premiers entre eux, on en déduit, d'après le théorème de Gauss, que 28 divise $u-u_0$. Soit alors k l'entier tel que $u-u_0 = 28k$. On peut donc écrire $u = 28k+u_0 = 28k+17$. Il n'y a donc qu'une valeur de u vérifiant $0 \leqslant u \leqslant 28$: $u = 17$. On a donc, dans ce cas, $5u+28v = 85+28v = 1$ et ainsi $28v = -84$, c'est-à-dire $v = -3$.

2. a. $m \equiv n^5\,[29] \Rightarrow m^{17} \equiv n^{5\times17}\,[29]$. Or $5\times17 = 1+28\times3$ donc $m^{17} \equiv n\times n^{28\times3}\,[29]$.

   b. Comme $n^{28} \equiv 1\,[29]$ on a, d'après la question précédente, $m^{17} \equiv n\,[29]$. Autrement dit, comme $n \in \{0; \ldots; 25\}$, n est le reste de la division euclidienne de m^{17} par 29.

Corrigé exercice 117 :

1. a. Un nombre pair est un nombre qui s'écrit sous la forme $2n$ avec n entier. Pour tout entier n, on peut payer la somme $2n$ en donnant n pièces de 2.

   b. Supposons que q est impair. Par définition de la division euclidienne, on a $S = bq + r$, donc $r = S - bq$. Comme b et q sont impairs, leur produit bq est impair. De plus, S est impair, donc $r = S - bq$ est pair.

   Supposons que q est pair. On peut écrire $S = bq + r = b(q-1) + b + r$, donc $b + r = S - b(q-1)$. Or $q \geqslant 2$ car $q \neq 0$ (sinon $S = r < b$), donc $q - 1 \geqslant 1$ et $q - 1$ est impair. Le raisonnement précédent appliqué à S, b et $q - 1$ montre alors que $b + r$ est pair.

   Finalement, on a montré que tout entier S impair supérieur ou égal à b s'écrit comme la somme d'un multiple de b et d'un entier pair. On peut donc payer toutes les sommes supérieures à b.

   c. On complète cet algorithme comme ci-dessous.

   Demander S
   $q \leftarrow \mathrm{E}(S/b)$
   $r \leftarrow S - b \times q$
   Si q est impair :
   $$\begin{cases} n_a = \frac{r}{2} \\ n_b = q \\ S = bn_b + 2n_a \end{cases}$$
   Si q est pair :
   $$\begin{cases} n_a = \frac{b+r}{2} \\ n_b = q - 1 \\ S = bn_b + 2n_a \end{cases}$$

2. a. $ax + by = ab - a - b \Rightarrow a(x+1) = b(a - 1 - y)$. D'après le théorème de Gauss, a et b étant premiers entre eux, cette égalité implique que b divise $x+1$. Autrement dit, il existe un entier k tel que $x + 1 = kb$.

   b. On a alors $a \times kb = b(a - 1 - y)$ donc $ak = a - 1 - y$, soit $y = a - 1 - ak$.

   c. Par hypothèse, $x \in \mathbb{N}$ donc $x + 1$ est strictement positif. Comme $b > 0$ et $x + 1 = kb$, k est nécessairement strictement positif. De même, $y \in \mathbb{N}$, donc $y + 1 \geqslant 1$. Or $y + 1 = a(1 - k)$ et $a > 0$, donc $1 - k > 0$, d'où $k < 1$.

   d. Les deux résultats obtenus à la question précédente sont contradictoires. On en déduit donc, par l'absurde, qu'il ne peut pas exister de couple $(x; y)$ d'entiers tels que $ax + by = ab - a - b$. On ne peut donc pas payer la somme $ab - a - b$ si le distributeur ne rend pas la monnaie.

Corrigé exercice 118 :

1. Supposons que $y|x^2$. Soit z l'entier tel que $x^2 = z \times y$. Par hypothèse, x et y sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que $xu + yv = 1$. Alors, en multipliant les deux membres de l'égalité par x, $x^2u + yxv = x$ donc, comme $x^2 = z \times y$, $y(zu + xv) = x$ d'où $y|x$.

Document sous licence libre Creative Commons
CC BY NC SA

2. On a $a^2 = b^3$. Or $a = dx$ et $b = dy$, donc $d^2x^2 = d^3y^3$, d'où $x^2 = dy^3$.

3. D'après l'égalité précédente, y divise x^2. Or, par construction, x et y sont premiers entre eux, donc, d'après le lemme de la question 1, y divise x. Donc $PGCD(x;y) = y$. Or $PGCD(x,y) = 1$ car x et y sont premiers entre eux, donc $y = 1$.

4. On en déduit, d'après la question 2., que $d = x^2$. D'où $a = dx = x^3$ et $b = d = x^2$. Ainsi a et b sont respectivement le cube et le carré de l'entier x.

5. a. On a le tableau de congruence ci-dessous.

x modulo 7	0	1	2	3	4	5	6
x^2 modulo 7	0	1	4	2	2	4	1
x^6 modulo 7	0	1	1	1	1	1	1

   b. Soit $n = a^2 = b^3$. On a montré qu'il existe un entier x tel que $a = x^3$ et $b = x^2$. Donc $n = x^6$. D'après le tableau précédent, n est donc soit congru à 1 modulo 7, soit divisible par 7.

Corrigé exercice 119 :

1. Soit n le nombre d'oeufs. Ce problème se traduit par le système $\begin{cases} n \equiv 1\,[2] \\ n \equiv 1\,[3] \\ n \equiv 1\,[4] \\ n \equiv 1\,[5] \\ n \equiv 1\,[6] \\ n \equiv 0\,[7] \end{cases}$.

2. On déduit de ce qui précède que $n-1$ est divisible par 2, 3, 4, 5 et 6. En particulier, $n-1$ est divisible par 3, 4 et 5, qui sont premiers entre eux, donc aussi, d'après le corollaire du théorème de Gauss, par leur produit. D'où $n \equiv 1\,[60]$. Et on a toujours $n \equiv 0\,[7]$.

3. $n \equiv 0\,[7] \Rightarrow$ il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 7a$. De même, $n \equiv 1[60]$, donc il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 60b + 1$. De tels entiers a et b vérifient donc bien $n = 7a = 60b+1$. Cherchons tout d'abord une solution particulière de l'équation $7a = 60b+1$, équivalente à $7a-60b = 1$. Pour cela, on écrit l'algorithme d'Euclide pour les entiers 60 et 7 :

   $60 = 7 \times 8 + 4$

   $7 = 4 \times 1 + 3$

   $4 = 3 \times 1 + 1$

   Puis, on remonte cet algorithme :

   $1 = 4-3 = 4-(7-4) = 4\times 2-7 = (60-7\times 8)\times 2-7 = 60\times 2-7\times 17$. Le couple $(-17;-2)$ est donc solution de cette équation. Soit $(a;b)$ une autre solution de cette équation. Alors on a $7a-60b = -17\times 7+2\times 60$, donc $7\,(a+17) = 60\,(b+2)$. Or 7 et 60 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $b+2$. Soit c l'entier tel que $b+2 = 7c$. On a alors $7\,(a+17) = 60\times 7c$ et donc $a = 60c-17$. On en déduit que l'ensemble des solutions est inclus dans $S = \{(60c-17; 7c-2)\,; c \in \mathbb{Z}\}$.

Document sous licence libre Creative Commons

Réciproquement, on vérifie que tout élément de S est solution. Donc l'ensemble des solutions est S.

4. On a $n = 7a$ et $a = 60c - 17$, où c est un entier. La première valeur positive de a étant 43, le plus petit nombre d'oeufs possible de la jeune fille est $7 \times 43 = 301$.

Corrigé exercice 120 :

1. Étant donné qu'il y a 100 volailles, les nombres x, y et z de coqs, de poules et de poussins sont reliés par $x+y+z = 100$, soit $z = 100-x-y$. Le prix payé pour les 100 volailles étant de 100 pièces, on a également, en tenant compte du prix de chaque sorte de volaille, $5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100$, soit $15x + 9y + z = 300$. Or $z = 100 - x - y$, donc $14x + 8y = 200$.

2. a. Puisque $(x_0; y_0)$ et $(x; y)$ vérifient tous les deux l'équation $14x + 8y = 200$, on a $14x + 8y = 14x_0 + 8y_0$, donc $14\,(x - x_0) = 8\,(y_0 - y)$ soit, en divisant chaque membre de l'égalité par 2, $7\,(x - x_0) = 4\,(y_0 - y)$. Or 7 et 4 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 4 divise $x - x_0$. Soit k l'entier tel que $x - x_0 = 4k$. Alors $7 \times 4k = 4\,(y_0 - y)$, donc $y_0 - y = 7k$, d'où $y = y_0 - 7k$. En conclusion, les solutions de cette équation s'écrivent donc $x = 4k + x_0$ et $y = y_0 - 7k$. Ainsi pour obtenir tous les nombres possibles de coqs il faut partir du plus petit nombre de coqs possible et augmenter ce nombre de 4 en 4 car $x = x_0 + 4k$ et pour obtenir tous les nombres possibles de poules, il faut partir du nombre de poule y_0 correspondant à x_0 et diminuer ce nombre de 7 en 7.

   b. On a montré que si $(x; y; z)$ est solution du système, alors il existe un entier k tel que $\begin{cases} x = x_0 + 4k \\ y = y_0 - 7k \end{cases}$. De plus, le nombre de poussins vérifie $z = 100 - x - y$ donc $z = 100 - (x_0 + 4k) - (y_0 - 7k) = (100 - x_0 - y_0) - 4k + 7k = z_0 + 3k$. Pour trouver les nombres de poussins possibles, on doit donc bien augmenter ce nombre de 3 en 3.

3. Une solution particulière de l'équation $7x + 4y = 100$ est $(0; 25)$. Dans ce cas cas là on a 0 coq, 25 poules et 75 poussins. On peut alors générer les suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$, définies respectivement par : $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n + 4 \end{cases}$, $\begin{cases} y_0 = 25 \\ y_{n+1} = y_n - 7 \end{cases}$ et $\begin{cases} z_0 = 75 \\ z_{n+1} = z_n + 3 \end{cases}$. Les triplets solutions sont donnés dans le tableau ci-dessous.

u_n	v_n	w_n
0	25	75
4	18	78
8	11	81
12	4	84

À partir du rang suivant, le nombre de poules est négatif, ce qui est impossible. Il n'y a donc pas d'autre solution.

Corrigé exercice 121 :

Partie A : Étude d'un cas particulier

1. a. $PGCD\,(x; x^3) = x$ car $x|x^3$.

   b. Supposons que x est solution de $15x^3 - 7x + 3 = 0$. Alors $x(15x^2 - 7) = -3$ et on en déduit que x divise 3 et donc que $x = 1$, $x = -1$, $x = 3$ ou $x = -3$.

   c. Testons si les entiers 1, –1, 3 et –3 sont, ou non, solution. $15 \times 1^3 - 7 \times 1 + 3 = 11 \neq 0$ $15 \times (-1)^3 - 7 \times (-1) + 3 = -5 \neq 0$ $15 \times 3^3 - 7 \times 3 + 3 = 387 \neq 0$ $15 \times (-3)^3 - 7 \times (-3) + 3 = -381 \neq 0$. Aucun des entiers $x = 1$, $x = -1$, $x = 3$ et $x = -3$ n'étant solution, on en déduit que cette équation n'a pas de solution entière.

2. a. Si $\frac{p}{q}$ est une solution rationnelle de l'équation alors $15\frac{p^3}{q^3} - 7\frac{p}{q} + 3 = 0$ donc $15p^3 - 7pq^2 + 3q^3 = 0$ soit $15p^3 - 7pq^2 = -3q^3$.

   b. D'après la question précédente, on a $p(15p^2 - 7q^2) = -3q^3$ donc p divise $-3q^3$. Or p et q sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, p divise $-3q^2$. Or p et q sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, p divise $-3q$. Et enfin, pour les mêmes raisons, p divise –3 donc 3.

   c. D'après la question 2.a. on a $15p^3 = q(7pq - 3q^2)$ donc q divise $15p^3$. Comme p et q sont premiers entre eux alors, d'après le théorème de Gauss, q divise $15p^2$. De même on montre que q divise $15p$ puis que q divise 15.

   d. D'après les questions précédentes, les valeurs possibles de p sont $\{-1; 1; -3; 3\}$ et les valeurs possibles de q sont $\{-1; 1; -3; 3; -5; 5; -15; 15\}$. Les valeurs possibles de $\frac{p}{q}$ sont donc : $\frac{1}{3}; \frac{-1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{-1}{5}; \frac{3}{5}; \frac{-3}{5}; \frac{1}{15}; \frac{-1}{15}$. En les testant, on trouve qu'aucune de ces fractions n'est solution.

   Partie B : Étude d'un cas plus général

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul, si $c|ab^n$ et si b et c sont premiers entre eux, alors $c|a$. Initialisation : Pour $n = 1$, c'est le théorème de Gauss : si $c|ab$ et si b et c sont premiers entre eux, alors $c|a$. Hérédité : Soit $n \geqslant 2$ tel que $c|ab^n$ et supposons qu'on a montré que si $c|ab^{n-1}$, alors $c|a$. On a $c|ab^{n-1} \times b$, et b et c sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, $c|ab^{n-1}$. Par hypothèse de récurrence, on en déduit que $c|a$. La propriété étant vraie pour $n = 1$ et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul : si $c|ab^n$ et si b et c sont premiers entre eux, alors $c|a$.

2. a. Par définition, $(p; q)$ vérifie $a_5\frac{p^5}{q^5} + a_4\frac{p^4}{q^4} + a_3\frac{p^3}{q^3} + a_2\frac{p^2}{q^2} + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0$ donc, en multipliant les deux membres de cette égalité par q^5, on obtient $a_5p^5 + a_4p^4q + a_3p^3q^2 + a_2p^2q^3 + a_1pq^4 + a_0q^5 = 0$, ce qui équivaut à $a_5p^5 + a_4p^4q + a_3p^3q^2 + a_2p^2q^3 + a_1pq^4 = -a_0q^5$. Comme p divise chaque terme de la somme de gauche, on en déduit que p divise a_0q^5. Or p et q sont premiers entre eux, donc d'après la question 1., p divise a_0.

   b. De même, on peut écrire $a_4p^4q + a_3p^3q^2 + a_2p^2q^3 + a_1pq^4 + a_0q^5 = -a_5p^5$, ce qui montre que q divise $-a_5p^5$. D'après la question 1., comme p et q sont premiers entre eux, cela implique que q divise a_5.

Document sous licence libre Creative Commons

3. a. On considère l'équation $2x^5 + 41x^4 - 7x - 6 = 0$. D'après ce qui précède, si $(p; q)$ est un couple d'entiers premiers entre eux tels que $\frac{p}{q}$ soit solution de cette équation, alors p divise 6 et q divise 2. Donc $p \in \{1; -1; 2; -2; 3; -3; 6; -6\}$, $q \in \{1; -1; 2; -2\}$ et p et q sont premiers entre eux, d'où $\frac{p}{q} \in \left\{\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{-3}{2}\right\}$.

   b. En testant ces fractions, on trouve que seule $\frac{-1}{2}$ est une solution de l'équation $2x^5 + 41x^4 - 7x - 6 = 0$.

Corrigé exercice 122 :

1. Si $z = 1$, il faut que x ou y soit nul, sinon $x^2 + y^2 \geqslant 2$. Donc il ne peut pas y avoir de solutions si $z = 1$. Si $z = 2$, alors $z^2 = 4$ et comme $y > 0$, $x^2 < 4$ donc $x < 2$. Nécessairement, $x = 1$. De même, $y = 1$. Mais $1^2 + 1^2 \neq 4$, donc il n'y a pas de solution.

2. Soit d un diviseur commun à x et y. Alors d divise x^2 et y^2, donc d divise z^2 car $z^2 = x^2 + y^2$. En particulier, $PGCD(x; y)$ divise z^2.

3. Si x et y sont de même parité, alors x^2 et y^2 sont de même parité, donc leur somme z^2 est paire, et donc z est pair. Si x et y sont de parité différente, alors x^2 et y^2 aussi, donc leur somme est impaire, donc z^2 et z sont impairs.

4. Par définition, $(2x')^2 + y^2 = z^2$, donc $4x'^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y)$.

5. D'après la question 3., si x est pair, alors z et y sont de même parité. En effet, comme x est pair, si y est pair alors z est pair aussi et si y est impair alors z aussi. y et z étant de même parité, $z + y$ et $z - y$ sont tous les deux pairs. On remarque que $\frac{z+y}{2} + \frac{z-y}{2} = z$ et $\frac{z+y}{2} - \frac{z-y}{2} = y$. Donc tout diviseur commun à $\frac{z-y}{2}$ et $\frac{z+y}{2}$ est aussi un diviseur commun à z et y, donc $PGCD(\frac{z-y}{2}; \frac{z+y}{2})$ divise z et y, et donc aussi leur PGCD. Comme $PGCD(z; y) = 1$, $PGCD(\frac{z-y}{2}; \frac{z+y}{2}) = 1$.

6. Les entiers $a = \frac{z-y}{2}$ et $b = \frac{z+y}{2}$ vérifient $PGCD(a; b) = 1$ d'après la question 5. et $ab = x'^2$ d'après la question 4.. D'après le lemme, on en déduit qu'il existe u et v deux entiers relatifs premiers entre eux tels que $\frac{z-y}{2} = u^2$ et $\frac{z+y}{2} = v^2$.

7. On a $z = \frac{z-y}{2} + \frac{z+y}{2} = u^2 + v^2$. Donc z est bien la somme de deux carrés. On peut aussi écrire $y = \frac{z+y}{2} - \frac{z-y}{2} = v^2 - u^2$. De plus $x'^2 = u^2v^2$ donc $x' = uv$ et donc $x = 2x' = 2uv$.

8. $25 = 5^2$ et $5 = 4 + 1 = 2^2 + 1^2$ est la somme de deux carrés, donc s'il existe une solution $(x; y)$ à cette équation, on doit avoir $y = 4 - 1 = 3$ et $x = 2 \times 2 \times 1 = 4$. On vérifie : $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$. Donc cette équation admet bien au moins une solution. En revanche, $49 = 7^2$ et 7 ne s'écrit pas comme la somme de deux carrés. Donc il ne peut pas exister de solution.

Corrigé exercice 123 :

Soient x le nombre de femmes et y le nombre d'hommes dans le groupe. Alors x et y vérifient $13x + 19y = 1000$.
On détermine une solution particulière de cette équation à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

$19 = 13 \times 1 + 6$
$13 = 6 \times 2 + 1$
Puis de sa remontée : $1 = 13 - 6 \times 2 = 13 - (19 - 13) \times 2 = 13 \times 3 - 19 \times 2$. $(3; -2)$ est donc une solution particulière de l'équation $13x + 19y = 1$. Une solution particulière de $13x + 19y = 1000$ est donc $(3000; -2000)$.
On détermine maintenant l'ensemble des solutions de cette équation. Si $(x; y)$ est une solution, alors $13x + 19y = 13 \times 3000 - 19 \times 2000$, donc $13(x - 3000) = 19(-y - 2000)$. Or 13 et 19 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss 13 divise $-y-2000$. Soit k l'entier tel que $y + 2000 = 13k$. Alors $13(x - 3000) = -19 \times 13k$, donc $x - 3000 = -19k$. Finalement, on a montré que pour tout couple $(x; y)$ solution, il existe un entier k tel que $x = -19k + 3000$ et $y = 13k - 2000$. Réciproquement, on vérifie que, pour tout entier k, le couple $(-19k + 3000; 13k - 2000)$ est bien solution au problème. Or, pour tout entier k, $13k - 2000 \geqslant 0 \Leftrightarrow 13k \geqslant 2000$, et $\frac{2000}{13} \simeq 153,85$ donc $13k - 2000 \geqslant 0 \Leftrightarrow k \geqslant 154$. De plus, $-19k + 3000 \geqslant 0 \Leftrightarrow 19k \leqslant 3000$, et $\frac{3000}{19} \simeq 157,89$ donc $-19k + 3000 \geqslant 0 \Leftrightarrow k \leqslant 157$. Les valeurs de $(x; y)$ possibles sont donc les 4 correspondantes à $k = 154$, $k = 155$, $k = 156$ et $k = 157$: 74 femmes et 2 hommes ou 55 femmes et 15 hommes ou 36 femmes et 28 hommes ou bien encore 17 femmes et 41 hommes. Or, d'après l'énoncé, il y avait moins de femmes que d'hommes. On peut donc en conclure que ce groupe de voyageurs était composé de 17 femmes et 41 hommes.

Corrigé exercice 124 :

D'après l'énoncé, la suite des longueurs du petit côté est définie par $\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$.
La longueur du second côté de l'angle droit est égale à la somme de la longueur du premier côté du triangle et du côté du carré contre lequel s'appuient les triangles. Or le côté de ce carré est égal à la somme des longueurs des deux côtés de l'angle droit du triangle précédent. La suite $(b_n)_n$ des longueurs du second côté de l'angle droit est donc définie par $\begin{cases} b_0 = 4 \\ b_{n+1} = a_n + b_n + a_{n+1} \end{cases}$, soit $\begin{cases} b_0 = 4 \\ b_{n+1} = 2a_n + b_n + 2 \end{cases}$.
La suite des longueurs de l'hypoténuse est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.
En générant ces suites, on obtient les résultats suivants.

u_n	v_n	w_n
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13	84	85
15	112	113
17	144	145
19	180	181
21	220	221

u_n	v_n	w_n
23	264	265
25	312	313
27	364	365
29	420	421
31	480	481
33	544	545
35	612	613
37	684	685
39	760	761
41	840	841
43	924	925

Document sous licence libre Creative Commons

Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 5 : Nombres premiers

Table des matières

Document sous licence libre Creative Commons

1 Informations sur ce chapitre

Ce chapitre s'adosse en particulier sur les trois points suivants du B.O. d'Arithmétique :

- nombres premiers et infinité de leur ensemble ;
- existence et unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers ;
- petit théorème de Fermat.

La recherche des nombres premiers est introduite à l'aide du crible d'Ératosthène. Le cours est ensuite structuré selon les trois parties indiquées précédemment.
La première partie contient des résultats généraux sur les nombres premiers, en particulier le fait que leur ensemble est infini. La décomposition en produit de facteurs premiers est présentée dans un deuxième temps et est utilisée, entre autres, pour obtenir l'ensemble des diviseurs d'un entier ou calculer aisément des PGCD. Enfin, la troisième partie présente le petit théorème de Fermat.
Plusieurs méthodes sont à acquérir pour résoudre les exercices d'applications directes, ce qui donne lieu à des exercices assez similaires afin de bien ancrer ces méthodes dans le temps : déterminer si un nombre est premier ou non, décomposer un nombre en produit de facteurs premiers, en déduire le nombre de diviseurs d'un entier ainsi que les diviseurs en question, déterminer le PGCD de deux entiers grâce à cette décomposition et, enfin, calculer des puissances modulo un nombre premier grâce au petit théorème de Fermat.
Dans la suite du chapitre, des problèmes plus élaborés peuvent alors être abordés comme l'étude des nombres premiers de Fermat, l'étude de l'indicatrice d'Euler ou encore certains cas particuliers du théorème de progression arithmétique de Dirichlet.
Ce chapitre est, enfin, une bonne occasion d'aborder des questions d'algorithmique et d'utiliser Python, notamment en travaillant sur le crible d'Ératosthène, le système de cryptographie RSA, ou encore sur des tests de primalité.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

16 est divisible par 2.
190 est divisible par 10.
39 est divisible par 3.
951 est divisible par 3.
121 est divisible par 11.
365 est divisible par 5.
187 est divisible par 11.

Corrigé exercice 2 :

1. $n = 5$ divise $m = 15335410$ car le chiffre des unités de m est 0.
2. $n = 9$ divise $m = 15513552$ car la somme des chiffres de m vaut 27 qui est divisible par 9.
3. $n = 3$ ne divise pas $m = 8596312$ car la somme des chiffres de m vaut 34 et n'est pas divisible par 3.
4. $n = 4$ ne divise pas $m = 542468530$ car le nombre formé des deux derniers chiffres de m n'est pas divisible par 4.
5. $n = 8$ divise $m = 454548128$ car le nombre formé des trois derniers chiffres de m est divisible par 8.

Corrigé exercice 3 :

1. a. $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$
   b. $9 - (p+2)^2 = (3-(p+2))(3+(p+2)) = (1-p)(5+p)$
   c. $16 - 8p + p^2 = (p-4)^2$
   d. $16 - 25(p-1)^2 = (4-5(p-1))(4+5(p-1)) = (9-5p)(5p-1)$
2. $4^n - 1 = (2^2)^n - 1 = 2^{2n} - 1 = (2^n)^2 - 1^2 = (2^n - 1)(2^n + 1)$

Corrigé exercice 4 :

1. $547 = 65 \times 8 + 27$ et $0 \leqslant 27 < 65$.
2. $332 = 1124 \times 0 + 332$ et $0 \leqslant 332 < 1124$.
3. $3578 = 3575 \times 1 + 3$ et $0 \leqslant 3 < 3575$.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 5 :

1. $77 = 35 \times 2 + 7$
   $35 = 7 \times 5 + 0$
   Donc $\text{PGCD}(77\,;35) = 7$.
2. $300 = 175 \times 1 + 125$
   $175 = 125 \times 1 + 50$
   $125 = 50 \times 2 + 25$
   $50 = 25 \times 2 + 0$
   Donc $\text{PGCD}(175\,;300) = 25$.
3. $1873 = 1871 \times 1 + 2$
   $1871 = 2 \times 935 + 1$
   $935 = 1 \times 935 + 0$
   Donc $\text{PGCD}(1873\,;1871) = 1$.
4. $475 = 140 \times 3 + 55$
   $140 = 55 \times 2 + 30$
   $55 = 30 \times 1 + 25$
   $30 = 25 \times 1 + 5$
   $25 = 5 \times 5 + 0$
   Donc $\text{PGCD}(140\,;475) = 5$.

Corrigé exercice 6 :

1. $3^2 \times 3^n = 3^{2+n}$
2. $5^n \times 7^n = (5 \times 7)^n = 35^n$
3. $(3^m)^n = 3^{mn}$
4. $\dfrac{2^n}{2^{n-2}} = 2^2 = 4$
5. $\dfrac{1}{m} \times m^n = m^{n-1}$
6. 2^{m^n} n'est pas simplifiable.

Corrigé exercice 7 :

1. $15 \times 43 \equiv 1 \times 1\,[7] \equiv 1\,[7]$
2. $86 \times 107 \equiv 2 \times 3[4] \equiv 6[4] \equiv 2[4]$
3. $1804 \times 1911 \equiv 4 \times 11[100] \equiv 44[100]$
4. $4^3 \equiv 64\,[7] \equiv 1\,[7]$ donc $4^{50} \equiv (4^3)^{16} \times 4^2[7] \equiv 1^{16} \times 16[7] \equiv 16[7] \equiv 2[7]$.
5. $3^2 \equiv 9\,[10] \equiv -1\,[10]$ donc $3^8 \equiv (3^2)^4\,[10] \equiv (-1)^4\,[10] \equiv 1\,[10]$.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 8 :

1. $1+4+5+3+5 = 18 = 9 \times 2$ donc 14535 est divisible par 9.

   $4+9+5 = 18 = 9 \times 2$ donc 495 est divisible par 9.

2. Le chiffre des unités de 14535 et de 495 se terminent par 5 donc ces deux nombres sont divisibles par 5.

3. Puisque 9 et 5 divisent 14535 et 495 alors 9 et 5 divisent $\text{PGCD}(14535, 495)$.

   De plus, 9 et 5 sont premiers entre eux donc, d'après le corollaire du théorème de Gauss, $9 \times 5 = 45$ divise $\text{PGCD}(14535, 495)$.

4. $14535 = 323 \times 45$ et $495 = 11 \times 45$.

5. On calcule le PGCD de 323 et 11 grâce à l'algorithme d'Euclide.

   $323 = 29 \times 11 + 4$

   $11 = 2 \times 4 + 3$

   $4 = 3 \times 1 + 1$

   Donc $\text{PGCD}(323, 11) = 1$. D'où $\text{PGCD}(45 \times 323, 45 \times 11) = 45 \times \text{PGCD}(323, 11)$.

   En conclusion, $\text{PGCD}(m\,;n) = 45$.

Document sous licence libre Creative Commons

3 Activités

3.1 Corrigé activité A : Crible d'Ératosthène

Questions :

Voici la figure que l'on obtient au final.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Bilan :

Chaque nombre entouré (grisé ci-dessus) n'est divisible par aucun nombre grisé qui le précède (sinon, il serait barré). Il n'a donc aucun autre diviseur que 1 et lui-même. Ces nombres sont donc premiers.
On a testé la primalité de tous les nombres entiers compris entre 1 et 100. Les nombres entourés (grisés ici) sont donc exactement les nombres premiers compris entre 1 et 100.

3.2 Corrigé activité B : Une infinité de nombres premiers

Questions :

1. Supposons par l'absurde qu'il existe $k \in \{1\,;\dots;n\}$ tel que $N = p_k$.

   Alors, puisqu'on suppose $N = p_k$,

   $N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$

   $\Leftrightarrow 1 = \dfrac{p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n}{p_k} + \dfrac{1}{p_k}$

   $\Leftrightarrow 1 - \dfrac{p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n}{p_k} = \dfrac{1}{p_k}$

   $\Leftrightarrow 1 - p_1 \times \ldots \times p_{k-1} \times p_{k+1} \times \ldots \times p_n = \dfrac{1}{p_k}$.

   Le membre de gauche de cette égalité est entier alors que le membre de droite ne l'est pas ($p_k > 1$ donc $0 < \dfrac{1}{p_k} < 1$).

   C'est absurde donc, pour tout $k \in \{1\,;\dots;n\}$, $N \neq p_k$

2. a. Pour tout $i \in \{1\,;\dots;n\}$, $N \equiv 1\,[p_i]$.

BY NC SA

b. Puisque, pour tout p_i, $N \equiv 1\,[p_i]$, N n'est donc divisible par aucun p_i.

c. Comme N n'est pas premier, il est forcément divisible par un nombre premier p_i.
Or on vient de montrer que N n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, \ldots, p_n$.
C'est absurde. On en déduit donc que l'hypothèse de départ est fausse et donc qu'il n'existe pas exactement n nombres premiers, mais au moins $n+1$.

Bilan :

On utilise ici un raisonnement par récurrence :

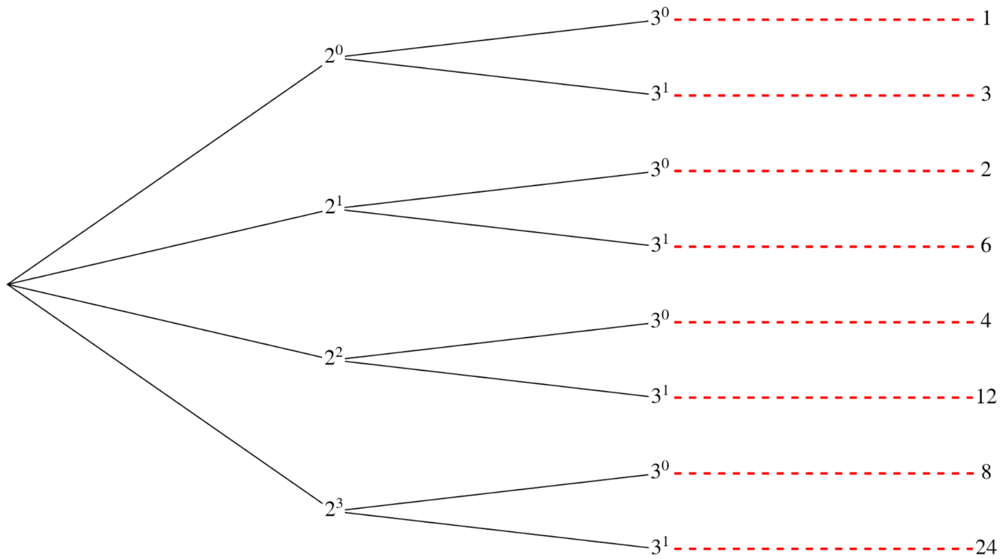
- **initialisation :** il existe au moins un nombre premier (2 par exemple) ;
- **hérédité :** on vient de démontrer que si il existe n nombres premiers, alors on peut en réalité en trouver au moins $n+1$;
- **conclusion :** on en déduit ainsi qu'il existe donc une infinité de nombres premiers.

3.3 Corrigé activité C : Applications de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers

Questions :

1. a. Les diviseurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24, ainsi que leurs opposés.

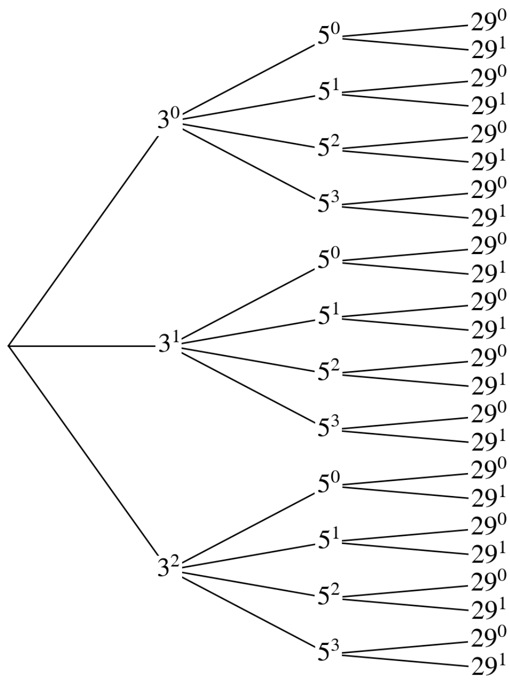
   b. $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$.
   On peut alors construire un arbre des possibilités comme ci-dessous afin de déterminer les diviseurs de 24 à l'aide de sa décomposition en produit de facteurs premiers.



   Cet arbre des possibilités possède 8 extrémités, ce qui correspond au nombre de diviseurs positifs de 24. On peut en déduire que 24 admet 16 diviseurs en comptant les diviseurs négatifs.

cc BY NC SA

2. On effectue un arbre des possibilités.



Cet arbre des possibilités a $3 \times 4 \times 2 = 24$ branches. On en déduit que le nombre n admet 24 diviseurs positifs qui sont 1, 29, 5, 145, 25, 725, 125, 3625, 3, 87, 15, 435, 75, 2175, 375, 10875, 9, 261, 45, 1305, 225, 6525, 1125 et 32625. Cette liste est établie en déterminant les entiers obtenus par produit au bout de chacune des extrémités de l'arbre ci-dessus.

Si on compte également les diviseurs négatifs, n admet alors au total 48 diviseurs.

3. a. $24 = 20 \times 1 + 4$
   $20 = 4 \times 5 + 0$
   Donc $\text{PGCD}(24\,;20) = 4$.
   b. $n = 24 = 2^3 \times 3$ et $m = 2^2 \times 5$.
   c. On a $\text{PGCD}(24\,;20) = 4 = 2^2$. On remarque qu'il s'agit des facteurs premiers communs à la décomposition de 24 et à la décomposition de 20, associés à la plus petite puissance de chacun de ces facteurs premiers.

4. On a $k = 2^3 \times 3 \times 19$ et $l = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 11$. Ces deux nombres ont donc en commun, dans leur décomposition en facteurs premiers, un 2^2 et un 3^1. D'où $\text{PGCD}(k\,;l) = 2^2 \times 3$.

Bilan :

Si $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$ correspond à la décomposition en produits de facteurs premiers de n, le nombre de diviseurs positifs de n est égal à $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 2) \times \cdots \times (\alpha_k + 1)$. La liste des diviseurs de n se détermine à l'aide d'un arbre des possibilités décrivant l'ensemble des produits possibles découlant du produit de ces facteurs premiers.
Le PGCD de n et m est le produit des facteurs premiers communs aux deux décomposition, associés à la plus petite des puissances de ce facteur premier dans ces deux décompositions.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

3.4 Corrigé activité D : Fermat, congruences et nombres premiers

Questions :

1. On obtient le tableau de congruence ci-dessous.

a modulo 5	0	1	2	3	4
a^5 modulo 5	0	1	32	243	1024
a^5 modulo 5	0	1	2	3	4

2. On obtient les tableaux de congruence ci-dessous.

a modulo 7	0	1	2	3	4	5	6
a^7 modulo 7	0	1	2	3	4	5	6

a modulo 11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a^{11} modulo 11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Il semble que, dans tous les cas, $a^p \equiv a\,[p]$.

3. Il semble que si p est un nombre premier, alors, pour tout entier a, on a $a^p \equiv a\,[p]$.

4. $a^p \equiv a\,[p] \Leftrightarrow a^p - a \equiv 0\,[p] \Leftrightarrow a(a^{p-1} - 1) \equiv 0\,[p] \Leftrightarrow p \mid a(a^{p-1} - 1)$.

   Or a n'est pas divisible par p premier donc a et p sont premiers entre eux. Ainsi, d'après le théorème de Gauss, p divise $a^{p-1} - 1$, c'est-à-dire $a^{p-1} - 1 \equiv 0\,[p]$, soit $a^{p-1} \equiv 1\,[p]$.

Bilan :

Si p est un nombre premier et si a est un entier premier avec p, alors il semble que $a^{p-1} \equiv 1\,[p]$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 9 :

449 est premier.
On a, par ailleurs, $252 = 2 \times 126$; $407 = 11 \times 37$ et $507 = 3 \times 169$, donc les trois autres nombres ne sont pas premiers.

Réponse : c

Corrigé exercice 10 :

$(3+1) \times (4+1) \times (1+1) \times (1+1) = 80$.
Donc n admet 80 diviseurs (positifs).

Réponse : a

Corrigé exercice 11 :

Les facteurs premiers communs entre les décompositions de ces deux nombres sont 2^2 et 3^1 donc le PGCD de ces deux nombres est égal à $2^2 \times 3$.

Réponse : b

Corrigé exercice 12 :

$2^{32} = (2^{16})^2 \equiv 1^2[17]$ d'après le petit théorème de Fermat, car 17 est premier et 2 n'est pas divisible par 17, d'où $2^{32} \equiv 1[17]$. Ainsi, le reste de la division euclidienne de 2^{32} par 17 est 1.

Réponse : b

Corrigé exercice 13 :

$75 = 3 \times 5^2$ et $35 = 5 \times 7$ divisent $3^2 \times 5^3 \times 7 \times 19$.

Réponses : a et c

Corrigé exercice 14 :

Les nombres 11 et 317 sont premiers.
1 n'est pas premier par définition et $319 = 11 \times 29$.

Réponses : b et c

Corrigé exercice 15 :

On a $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ donc les compositions qui conviennent sont celles divisibles par $2^2 \times 3 \times 7$. Les valeurs possibles de m sont $2^2 \times 3 \times 7^2$ et $2^2 \times 3 \times 7 \times 43$.

Réponses : b et d

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 16 :

On a $3^{12} = 3^{10} \times 9 \equiv 9\,[11]$ d'après le petit théorème de Fermat. Et $-2 \equiv 9\,[11]$.

Réponses : a et c

Corrigé exercice 17 :

1. $\sqrt{31} \approx 5.6$ et 31 n'est divisible par aucun entier naturel inférieur à 6 donc 31 est premier.

   De même, $\sqrt{19} \approx 4.35$ et 19 n'est divisible par aucun entier naturel inférieur à 5 donc 19 est premier.

2. $1530 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 17$

3. Les diviseurs de 1530 sont donc 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 17, 18, 30, 34, 45, 51, 85, 90, 102, 153, 170, 255, 306, 510, 765 et 1530, ainsi que leurs opposés.

4. 19 est un nombre premier n'apparaissant pas dans la décomposition en produit de facteurs premiers de 1530 donc $\text{PGCD}(19\,;1530) = 1$.

5. a. 1530 et 19 sont premiers entre eux donc, d'après le petit théorème de Fermat, $1530^{18} \equiv 1\,[19]$. Donc $1530^{540} \equiv (1530^{18})^{30}\,[19] \equiv 1\,[19]$.

   b. 31 est premier, 1530 et 31 sont premiers entre eux donc, d'après le petit théorème de Fermat, $1530^{30} \equiv 1\,[31]$. Donc $1530^{540} \equiv (1530^{30})^{18}\,[31] \equiv 1\,[31]$.

   c. $c^{540} \equiv 1\,[a]$ donc $c^{540} - 1 \equiv 0\,[a]$, c'est-à-dire $a \mid c^{540} - 1$.

   $c^{540} \equiv 1\,[b]$ donc $c^{540} - 1 \equiv 0\,[b]$, c'est-à-dire $b \mid c^{540} - 1$.

   Ainsi, a et b divisent $c^{540} - 1$. De plus, a et b sont premiers entre eux donc le corollaire du théorème de Gauss affirme que $a \times b$ divise $c^{540} - 1$, soit $c^{540} - 1 \equiv 0\,[a \times b]$. D'où $c^{540} \equiv 1\,[a \times b]$.

Document sous licence libre Creative Commons

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1 : Test de primalité de Fermat

Méthode 1

1. a. On obtient la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B
1	n	2^(n-1) modulo n
5	3	1
6	4	0
7	5	1
8	6	2
9	7	1
10	8	0
11	9	4
12	10	2
13	11	1
14	12	8
15	13	1
16	14	2
17	15	4
18	16	0
19	17	1
20	18	14
21	19	1
22	20	8

   b. La commande MOD permet de déterminer le reste d'une division euclidienne.

2. Si le nombre n est premier et différent de 2, alors $2^{n-1} \equiv 1\,[n]$ d'après le petit théorème de Fermat. Donc le nombre affiché dans la colonne B est 1 lorsque n est premier.

3. Si le résultat d'une cellule de la colonne B n'est pas égal à 1, le nombre n correspondant n'est pas premier.

4. a. Le résultat dans la cellule B est égal à 1 pour les valeurs de n suivantes : 3, 5, 7,11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 et 43.
   Ce sont tous les nombres premiers inférieurs à 46

   b. En utilisant le tableur, on obtient $2^{40} \equiv 1\,[561]$ donc $2^{560} \equiv (2^{40})^{14}\,[561] \equiv 1\,[561]$. Mais $561 = 3 \times 11 \times 17$ n'est pas premier.

   c. Lorsque que la cellule de la colonne B est égale à 1, il est possible que l'entier n soit premier.

Méthode 2

1. La commande % détermine le reste de la division euclidienne (de n par k).

2. a. Si n est premier et $n \geqslant 3$, alors 2 et n sont premiers entre eux donc, d'après le petit théorème de Fermat, $2^{n-1} \equiv 1\,[n]$. L'algorithme renvoie donc 1.

   b. Si la valeur F n'est pas égale à 1, alors n n'est pas un nombre premier.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

c. Pour $n = 561$, le résultat renvoyé est 1, mais $561 = 3 \times 11 \times 17$ n'est pas premier.

3. a. On complète cet algorithme comme ci-dessous.

```python
def testfermat(n):
  F=2**(n-1)%n
  if F==1:
    return("Peut-être premier")
  else :
    return("Pas premier")

```

b. En utilisant cet algorithme, on peut dire que 154 515 677 a des chances d'être premier.

c. L'avantage de cet algorithme est qu'il est beaucoup plus rapide. En effet, $\sqrt{154\,515\,677} \approx 12\,430,4$, ce qui demanderait d'étudier la divisibilité de 154 515 677 par un nombre important d'entiers. L'inconvénient de cet algorithme est qu'il n'est pas totalement fiable : si le résultat obtenu est 1, il n'est pas absolument certain que l'entier testé soit premier. On dit qu'il s'agit d'un test probabiliste de primalité.

5.2 Corrigé du TP 2 : Système cryptographique RSA

Question préliminaire :

Si A choisit de très grandes valeur pour p et q, et donc pour N, la probabilité de trouver le nombre c, premier avec n, est très faible. Il est donc difficile de trouver d, la clé de décryptage.

Méthode 1

1. On obtient la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C	D
1	N	c	a	b
2	55	23	3	27

La personne B doit donc transmettre le nombre 27 à la personne A.

2. a. On obtient la feuille de calcul ci-dessous.

Document sous licence libre Creative Commons

d	cd modulo (n)
1	23
2	6
3	29
4	12
5	35
6	18
7	1
8	24
9	7
10	30
11	13
12	36
13	19
14	2
15	25
16	8
17	31
18	14
19	37
20	20
21	3
22	26
23	9
24	32
25	15
26	38
27	21
28	4
29	27
30	10
31	33
32	16
33	39
34	22
35	5
36	28
37	11
38	34
39	17

On a bien $d = 7$. En effet, $7 \times 23 = 161 = 4 \times 40 + 1$ et donc $7 \times 23 \equiv 1\,[40]$.

b. On obtient la feuille de calcul ci-dessous.

	d	b	b^d
27	d	b	b^d
28	7	1	1
29		2	18
30		3	42
31		4	49
32		5	25
33		6	41
34		7	28
35		8	2
36		9	4
37		10	10
38		11	11
39		12	23
40		13	7
41		14	9
		15	5
		16	36
		17	8
		18	17
		19	24
		20	15
		21	21
		22	33
		23	12
		24	29
		25	20
		26	16
		27	3
		28	52
		29	39
		30	35

Si la personne A reçoit la valeur codée 27, le décodage redonne bien la valeur 3.

Méthode 2

1. La fonction ci-dessous fonctionne par exemple.

```python
def cryptage(a,c,N) :
    return (a**c%N)
```

Pour crypter la valeur $a = 8$, B doit envoyer $b = 17$.

```
>>> cryptage(8,23,55)
17
```

2. a. La ligne 4 permet de tester si $c \times d$ est congru à 1 modulo N ou pas. La ligne 5 permet de passer à $d+1$ si la condition précédente n'a pas été vérifiée. La ligne 6 permet de calculer $c \times d$ et ainsi de suite. Enfin, la ligne 7 permet de renvoyer la valeur de d telle que $c \times d \equiv 1[n]$.

   On complète la ligne 4 comme ci-dessous.

```
1 def chercher_exposant(c,n):
2     F=0
3     d=0
4     while F!=1:
5         d=d+1
6         F=c*d%n
7     return d
```

   b. Avec $c = 23$ et $n = 40$, on a $d = 7$.

```
>>> chercher_exposant(23,40)
7
```

   c. On utilise l'algorithme d'Euclide et sa remontée :

   $40 = 23 \times 1 + 17$

   $23 = 17 \times 1 + 6$

   $17 = 6 \times 2 + 5$

   $6 = 5 \times 1 + 1$

   La remontée donne $1 = 6 - 5 \times 1$, donc $1 = 6 \times 3 - 17$, d'où $1 = 23 \times 3 - 4 \times 17$ et enfin $1 = 7 \times 23 - 4 \times 40$.

   Ainsi, $23 \times 7 \equiv 1[40]$ et donc $d = 7$.

3. Le programme ci-dessous fonctionne.

```
def decodage(b,d,N):
    return b**d%N
```

Avec $b = 17, d = 7, N = 55$, on obtient bien $a = 8$.

```
>>> decodage(17,7,55)
8
```

6 Travailler les automatismes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 18 :

1. 1 n'est pas premier par définition.
2. $49 = 7 \times 7$ donc 49 n'est pas premier.
3. 61 est premier.
4. $93 = 3 \times 31$ donc 93 n'est pas premier.
5. $72 = 2 \times 36$ donc 72 n'est pas premier.

Corrigé exercice 19 :

$31^2 - 16^2 = (31 + 16) \times (31 - 16) = 47 \times 15 = 3 \times 5 \times 47$.

Corrigé exercice 20 :

Cette affirmation est fausse. En effet $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 = 2^3 \times 3 \times 5$.
Ainsi, 120 possède $(3 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 16$ diviseurs, alors que $2^5 = 32$.

Corrigé exercice 21 :

1. $\text{PGCD}(4\,;6) = 2$
2. $\text{PGCD}(9\,;6) = 3$
3. $\text{PGCD}(77\,;14) = 7$
4. $\text{PGCD}(120\,;12) = 12$
5. $\text{PGCD}(51\,;111) = 3$

Corrigé exercice 22 :

1. 17 est un nombre premier qui ne divise pas 3 donc le reste de la division euclidienne de $n = 3^{16}$ par $p = 17$ est égal à 1, d'après le petit théorème de Fermat.
2. 11 est un nombre premier qui ne divise pas 6 donc le reste de la division euclidienne de $n = 6^{11}$ par $p = 11$ est égal à 6, d'après le petit théorème de Fermat.
3. 5 est un nombre premier qui ne divise pas 2 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $2^4 \equiv 1\,[5]$. Or $2^{16} = (2^4)^4$ donc le reste de la division euclidienne de $n = 2^{16}$ par 5 est 1.
4. 17 est un nombre premier ne divisant pas 2 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $2^{16} \equiv 1\,[17]$. De plus, $2^{20} = 2^{16} \times 2^4 = 2^{16} \times 16$ donc le reste de $n = 2^{20}$ par 17 est égal à 16.
5. $28 \equiv -1\,[29]$ donc $28^{31} \equiv -1\,[29] \equiv 28\,[29]$. Ainsi, le reste de $n = 28^{31}$ par $p = 29$ est égal à 28.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

6.2 Exercices

Corrigé exercice 23 :

1. 69 n'est pas premier car $69 = 3 \times 23$.
2. 51 n'est pas premier car $51 = 3 \times 17$.
3. 79 est premier.
4. 91 n'est pas premier car $91 = 7 \times 13$.
5. 94 est pair donc 94 n'est donc pas premier.

Corrigé exercice 24 :

1. 143 n'est pas premier car $143 = 11 \times 13$.
2. 149 est premier.
3. 173 est premier.
4. 269 est premier.
5. 539 n'est pas premier car $539 = 7^2 \times 11$.

Corrigé exercice 25 :

1. 1049 est premier.
2. 1051 est premier.
3. 1053 n'est pas premier car $1053 = 3^4 \times 13$.
4. 1055 n'est pas premier car 1055 est divisible par 5.
5. 1057 n'est pas premier car $1057 = 7 \times 151$.

Corrigé exercice 26 :

1. $40 = 2^3 \times 5$
2. $42 = 2 \times 3 \times 7$
3. $81 = 3^4$
4. $98 = 2 \times 7^2$
5. $105 = 3 \times 5 \times 7$
6. 113 est premier. 113 est donc sa propre décomposition en produit de facteurs premiers.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 27 :

1. $143 = 11 \times 13$
2. $147 = 3 \times 7^2$
3. $308 = 2^2 \times 7 \times 11$
4. $1024 = 2^{10}$
5. $1715 = 5 \times 7^3$
6. $9180 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 17$

Corrigé exercice 28 :

1. $3^2 \times 5$ admet $(2+1) \times (1+1) = 6$ diviseurs.
2. 2^6 admet 7 diviseurs.
3. $2^2 \times 3^3$ admet $(2+1) \times (3+1) = 12$ diviseurs.
4. 179 est un nombre premier. Il admet donc 2 diviseurs : un et lui-même.
5. $2 \times 3 \times 5 \times 19 \times 23$ admet $(1+1) \times (1+1) \times (1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 32$ diviseurs.

Corrigé exercice 29 :

1. L'ensemble des diviseurs de $3 \times 5 \times 7$ est $\mathcal{D} = \{1\,;3\,;5\,;7\,;15\,;21\,;35\,;105\}$.
2. L'ensemble des diviseurs de 3×11 est $\mathcal{D} = \{1\,;3\,;11\,;33\}$.
3. L'ensemble des diviseurs de $2^2 \times 3^3$ est $\mathcal{D} = \{1\,;2\,;3\,;4\,;6\,;9\,;12\,;18\,;27\,;36\,;54\,;108\}$.
4. L'ensemble des diviseurs de 3×11^2 est $\mathcal{D} = \{1\,;3\,;11\,;33\,;121\,;363\}$.
5. L'ensemble des diviseurs de $3^2 \times 7^2 \times 11^2$ est :
$$\begin{gathered}\mathcal{D} = \{1\,;3\,;7\,;9\,;11\,;21\,;33\,;49\,;63\,;77\,;99\,;121\,;147\,;231\,;363\,;441\,;\\ 539\,;693\,;847\,;1089\,;1617\,;2541\,;4851\,;5929\,;7623\,;17787\,;53361\}\end{gathered}$$
6. L'ensemble des diviseurs de $5^4 \times 7^2$ est :
$$\mathcal{D} = \{1\,;5\,;7\,;25\,;35\,;49\,;125\,;175\,;245\,;625\,;875\,;1225\,;4375\,;6125\,;30625\}.$$

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 30 :

1. $\text{PGCD}(5^2\,;5\times 7)=5$
2. $\text{PGCD}(2^2\times 7\,;2\times 5\times 7)=2\times 7=14$
3. $\text{PGCD}(2^3\times 3\times 5\,;2^2\times 5\times 7)=2^2\times 5=20$
4. $\text{PGCD}(5\times 11\times 17^3\,;5\times 11\times 23^4)=5\times 11=55$
5. Comme 157 et 151 sont premiers et donc premiers entre eux, $\text{PGCD}(157\,;151)=1$.
6. $\text{PGCD}(5\times 7\times 31^3\,;5\times 7\times 19)=5\times 7=35$
7. $\text{PGCD}(2\times 5^3\times 41\times 43^2\,;2^4\times 3\times 5^5\times 29^3)=2\times 5^3=250$

Corrigé exercice 31 :

1. $\text{PGCD}(3\times 5;3\times 7)=3$
2. $\text{PGCD}(2^3\,;2^5)=2^3=8$
3. $\text{PGCD}(2^2\times 3\,;2\times 3^2)=2\times 3=6$
4. $\text{PGCD}(2\times 3^2\times 7\,;2^2\times 7)=2^2\times 7=28$
5. $\text{PGCD}(3^3\times 5\,;3^2\times 5^2)=3^2\times 5=45$
6. $\text{PGCD}(7\times 5^2\,;3\times 11)=1$

Corrigé exercice 32 :

1. 17 est un nombre premier ne divisant pas 2 et $2^{16}=2^{17-1}$. Donc, d'après le petit théorème de Fermat, $2^{16}\equiv 1\,[17]$.
2. 5^4 est un multiple de 5 donc $5^4\equiv 0\,[5]$.
3. 19 est un nombre premier ne divisant pas 4 et $4^{18}=4^{19-1}$. Donc, d'après le petit théorème de Fermat, $4^{18}\equiv 1\,[19]$.
4. 5 est un nombre premier ne divisant pas 7 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $7^{5-1}\equiv 1\,[5]$. D'où $7^5\equiv 7\,[5]$.
5. 11 est un nombre premier ne divisant pas 50 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $50^{10}\equiv 1\,[11]$. D'où $50^{11}\equiv 50\,[11]\equiv 6\,[11]$.

Corrigé exercice 33 :

1. 29 est un nombre premier qui ne divise pas 4 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $4^{28}\equiv 1\,[29]$.
2. 59 est un nombre premier qui ne divise pas 50 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $50^{58}\equiv 1\,[59]$. D'où $50^{59}\equiv 50\,[59]$.

Document sous licence libre Creative Commons

3. 59 est un nombre premier qui ne divise pas 5 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $5^{58} \equiv 1\,[59]$. D'où $5^{60} \equiv 25\,[59]$.

4. 33 est un multiple de 11 donc $33 \equiv 0\,[11]$ et donc $33^5 \equiv 0\,[11]$.

5. 87 est un multiple de 29 donc $87 \equiv 0\,[29]$ et donc $87^{15} \equiv 0\,[29]$.

Document sous licence libre Creative Commons

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 34 :

2, 5, 17, 29, 31, 97, 101 et 103 sont premiers.
1, 27, 78 et 99 ne le sont pas.

Corrigé exercice 35 :

$49 = 7^2$ donc 7 est un diviseur premier de 49.
10650 est pair donc 2 est un diviseur premier de 10650.
Le chiffre des unités de 1015 vaut 5 donc 5 est un diviseur premier de 1015.
774 est pair donc 2 est un diviseur premier de 774.
1911 est divisible par 3 donc 3 est un diviseur premier de 1911.
$121 = 11^2$ donc 11 est un diviseur premier de 121.

Corrigé exercice 36 :

Il y a 10 nombres premiers inférieurs ou égaux à 30 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.

Corrigé exercice 37 :

1. $4247 = 31 \times 137$ donc 4247 n'est pas premier.
2. 5099 est premier.
3. $7429 = 17 \times 19 \times 23$ donc 7429 n'est pas premier.
4. 7639 est premier.

Corrigé exercice 38 :

1. Cette affirmation est vraie, en effet $2 + 3 = 5$ est un nombre premier.

   Remarque : Il s'agit du seul nombre premier pouvant s'écrire comme somme de deux nombres consécutifs.

2. Faux. On considère trois entiers impairs consécutifs : $2n+1$, $2n+3$ et $2n+5$. Leur somme s'écrit alors $2n+1+2n+3+2n+5 = 6n+9 = 3\times(2n+3)$ donc leur somme est un nombre premier si, et seulement si, $2n+3 = 1$, ce qui n'est pas possible puisque n est un entier naturel.

3. Faux. Pour $p = 2$, par exemple, $p^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$ et 3 est un nombre premier.

Corrigé exercice 39 :

1. a. Si on prend $n = 4$, $n+1 = 5$, $n+3 = 7$, $n+7 = 11$, $n+9 = 13$, $n+13 = 17$ et $n+15 = 19$ sont des nombres premiers. C'est la seule valeur de n comprise entre 0 et 5 pour laquelle cette propriété est vraie.

   b. Parmi les nombres $n, +1, n+3, n+7, n+9, n+13$ et $n+15$, l'un est nécessairement un multiple de 5.

   En effet, en raisonnant par disjonction de cas :

Document sous licence libre Creative Commons
CC BY NC SA

- $n \equiv 0\,[5] \Rightarrow n + 15\,[5] \equiv 15\,[5] \equiv 0\,[5]$.
- $n \equiv 1\,[5] \Rightarrow n + 9\,[5] \equiv 10\,[5] \equiv 0\,[5]$.
- $n \equiv 2\,[5] \Rightarrow n+3\,[5] \equiv 5\,[5] \equiv 0\,[5]$ et $n \equiv 2\,[5] \Rightarrow n+13\,[5] \equiv 15\,[5] \equiv 0\,[5]$.
- $n \equiv 3\,[5] \Rightarrow n + 7\,[5] \equiv 10\,[5] \equiv 0\,[5]$.
- $n \equiv 4\,[5] \Rightarrow n + 1\,[5] \equiv 5\,[5] \equiv 0\,[5]$.

L'un des entiers parmi $n+1, n+3, n+7, n+9, n+13$ et $n+15$ est donc forcément divisible par 5. Le seul moyen pour que ces six nombres soient premiers est donc que ce nombre divisible par 5 soit égal à 5. Nous avons vérifié dans la question 1.a. que cette condition n'est remplie que lorsque $n = 4$.

2. En prenant $n = 5$, on obtient $n + 2 = 7$, $n + 6 = 11$, $n + 8 = 13$, $n + 12 = 17$ et $n + 14 = 19$ qui sont tous des nombres premiers. C'est la seule valeur de n comprise entre 0 et 5 pour laquelle cette propriété est vraie.

   De plus, parmi les nombres $n, n+2, n+6, n+8, n+12$ et $n+14$, l'un est nécessairement un multiple de 5. On le montre par disjonction de cas :

   - $n \equiv 0\,[5]$.
   - $n \equiv 1\,[5] \Rightarrow n + 14\,[5] \equiv 15\,[5] \equiv 0\,[5]$.
   - $n \equiv 2\,[5] \Rightarrow n + 8\,[5] \equiv 10\,[5] \equiv 0\,[5]$.
   - $n \equiv 3\,[5] \Rightarrow n + 2\,[5] \equiv 5\,[5] \equiv 0\,[5]$ et $n \equiv 3\,[5] \Rightarrow n + 12\,[5] \equiv 15\,[5] \equiv 0\,[5]$.
   - $n \equiv 4\,[5] \Rightarrow n + 6\,[5] \equiv 5\,[5] \equiv 0\,[5]$.

   L'un des entiers parmi $n, n + 2, n + 6, n + 8, n + 12$ et $n + 14$ est donc forcément divisible par 5. Le seul moyen pour que ces six nombres soient premiers est donc que ce nombre divisible par 5 soit égal à 5. Nous avons vérifié précédemment que cette condition n'est remplie que lorsque $n = 5$.

Corrigé exercice 40 :

1. Par disjonction de cas :

   - si $n \equiv 0\,[3]$, alors n est un multiple de 3 ;
   - si $n \equiv 1\,[3]$, alors $n + 20 \equiv 21\,[3] \equiv 0\,[3]$ donc $n + 20$ est un multiple de 3 ;
   - si $n \equiv 2\,[3]$, alors $n + 10 \equiv 12\,[3] \equiv 0\,[3]$ donc $n + 10$ est un multiple de 3.

   Donc n, $n + 10$ ou $n + 20$ est un multiple de 3.

2. Puisque n, $n + 10$ ou $n + 20$ est divisible par 3, le seul moyen pour que ces trois nombres soient premiers est que celui divisible par 3 soit égal à 3. Ainsi on doit avoir $n = 3$. Et on peut vérifier qu'on a bien alors $n = 3$, $n + 10 = 13$ et $n + 20 = 23$ premiers. L'ensemble des nombres entiers n tels que n, $n + 10$ et $n + 20$ soient premiers est donc $\{3\}$.

Corrigé exercice 41 :

$17 = 1^4 + 2^4$, $97 = 2^4 + 3^4$ et $641 = 2^4 + 5^4$ sont, par exemple, trois nombres premiers pouvant s'écrire sous cette forme.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 42 :

1. n n'est pas premier donc il admet au moins un diviseur a différent de 1 et de lui-même. Il existe donc un entier b tel que $n = ab$ avec $1 < b < n$.

2. Supposons par l'absurde que $a > \sqrt{n}$ et $b > \sqrt{n}$. Alors $ab > \sqrt{n}^2$, c'est-à-dire $ab > n$, ce qui contredit le fait que $n = ab$.

3. Procédons par récurrence sur l'ensemble E des entiers non premiers supérieurs à 2.

   Pour tout $n \in E$, on note P_n la propriété : "n possède un diviseur premier p inférieur ou égal à $\sqrt{n}$".

   Initialisation : Si $n = 4$, alors $n = 2 \times 2$ et 2 est bien un nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{4} = 2$. Donc P_4 est vraie.

   Hérédité : On suppose que cette propriété est vraie pour tous les nombres de cet ensemble jusqu'à un entier k. Soit h l'élément suivant de E. Montrons que cette propriété est toujours vraie pour cet élément.

   Puisque h n'est pas un nombre premier, il admet forcément au moins un diviseur premier.

   Soit p un tel diviseur. Alors on a $h = p \times \ell$ avec ℓ un nombre entier tel que $1 < \ell < h$.

   On procède maintenant par disjonction de cas :

   - si ℓ est aussi un nombre premier, alors on a $h = p \times \ell$ donc, d'après ce qui précède, soit $p \leqslant \sqrt{h}$, soit $\ell \leqslant \sqrt{h}$. Donc comme p et ℓ sont deux diviseurs premiers de h, h admet bien un diviseur premier inférieur à $\sqrt{h}$.
   - si ℓ n'est pas un nombre premier, alors, encore par disjonction de cas :
     - Soit $p \leqslant \sqrt{h}$, et h admet bien un diviseur premier inférieur à $\sqrt{h}$.
     - Soit $p \geqslant \sqrt{h}$ et dans ce cas-là $\ell \leqslant \sqrt{h}$ d'après la question 2. Ainsi ℓ est un élément de E tel que $\ell < h$ donc, par hypothèse de récurrence, ℓ admet un diviseur premier p' tel que $p' \leqslant \sqrt{\ell} \leqslant \sqrt{h}$. Et comme $p' \mid \ell$ et $\ell \mid h$ alors, par transitivité, $p' \mid h$. D'où h admet un diviseur premier inférieur à $\sqrt{h}$.

   Ainsi la propriété est vraie pour l'élément h.

   En conclusion, par récurrence, pour tout entier naturel n non premier supérieur à 2, n admet un diviseur premier p tel que $p \leqslant \sqrt{n}$.

Corrigé exercice 43 :

1. $n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$. Or $3(n+1)$ est un nombre premier si, et seulement si, $n + 1 = 1$ si, et seulement si, $n = 0$. Or, d'après l'énoncé, $n > 0$. Donc la somme $n + (n+1) + (n+2)$ n'est pas un nombre premier.

2. $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10 = 5(n+2)$. Or $5(n+2)$ est un nombre premier si, et seulement si, $n + 2 = 1$ si, et seulement si, $n = -1$.

   Or n désigne un entier naturel donc $5(n+2)$ n'est pas un nombre premier.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

3. $n+(n+1)+\ldots+(n+k-1) = k\times n+(1+\ldots+k-1) = k\times n+\dfrac{(1+k-1)(k-1)}{2} = k\left(n+\dfrac{k-1}{2}\right)$.

   De plus, comme k est impair, alors $k-1$ est pair et donc $\dfrac{k-1}{2}$ est entier. Par ailleurs, $k \geqslant 5$ donc $n+\dfrac{k-1}{2} \neq 1$ et donc $k\left(n+\dfrac{k-1}{2}\right)$ ne peut pas être premier car $n+\dfrac{k-1}{2}$ est un diviseur de ce nombre différent à la fois de 1 et de ce nombre.

Corrigé exercice 44 :

1. $(5\,;7), (11\,;13), (17\,;19), (29\,;31)$ et $(41\,;43)$ sont des couples de premiers jumeaux.
2. 1619 et 1621 sont premiers. De plus $1621-1619=2$.

   Donc 1619 et 1621 sont des nombres premiers jumeaux.

Corrigé exercice 45 :

1. $(x-y)\times(x^2+xy+y^2) = x^2+x^2y+xy^2-x^2y-xy^2-y^3 = x^3-y^3$.
2. $x^3-8 = x^3-2^3 = (x-2)\times(x^2+2x+4)$. Ainsi x^3-8 ne peut être un nombre premier que si $x-2=1$, soit $x=3$ ou $x^2+2x+4=1$ soit $x^2+2x+3=0$, ce qui est impossible car, pour tout entier naturel x, $x^2+2x+3>0$.

   Ainsi x^2-8 est un nombre premier si, et seulement si, $x=3$. Dans ce cas, $x^3-8 = 3^3-8 = 19$.
3. $x^3+1 = x^3-(-1)^3 = (x-(-1))(x^2+x\times(-1)+(-1)^2) = (x+1)(x^2-x+1)$. Ainsi, x^3+1 ne peut être un nombre premier que si $x+1=1$, soit $x=0$, ou $x^2-x+1=1$, soit $x^2-x=0$, donc $x=0$ ou $x=1$.

   Cela donne ainsi deux possibilités : $x=0$ ou $x=1$:

   - si $x=0$, on a $x^3+1=0+1=1$ qui n'est pas un nombre premier ;
   - si $x=1$, on a $x^3+1=2$ qui est un nombre premier.

   Ainsi, x^3+1 est un nombre premier si, et seulement si, $x=1$.

Corrigé exercice 46 :

1. $(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2) = x^4+2x^3y+2x^2y^2-2x^3y-4x^2y^2-4xy^3+2x^2y^2+4xy^3+4y^4 = x^4+4y^4$.
2. $x^4+4 = x^4+4\times1^4 = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$ donc x^4+4 ne peut être un nombre premier que si $x^2-2x+2=1 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0$ ou $x^2+2x+2=1 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0$.

   Or $x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$ et $x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$. On vérifie que ces deux valeurs sont bien solutions du problème : Si $x=1$ ou $x=-1$, $x^4+1=1^4+4=5$ qui est bien un nombre premier. Ainsi x^4+4 est un nombre premier si, et seulement si, $x=1$ ou $x=-1$.

Document sous licence libre Creative Commons

3. $285^4 + 4^{285} = 285^4 + 4 \times 4^{284} = 285^4 + 4 \times (4^{71})^4 = (285^2 - 2 \times 285 \times 4 + 2 \times 4^2) \times (285^2 + 2 \times 285 \times 4 + 2 \times 4^2) = 78977 \times 83537$ donc $285^4 + 4^{285}$ n'est pas premier.

   Il n'est pas envisageable de répondre à cette question à l'aide d'un test classique de primalité, le nombre $285^4 + 4^{285}$ étant bien trop grand pour pouvoir être démontré non premier à l'aide, par exemple, du crible d'Eratosthène ou en recherchant tous ses diviseurs inférieurs ou égaux à $285^4 + 4^{285}$.

Corrigé exercice 47 :

1. $5^2 - 1 = 24$ est divisible par 24, $7^2 - 1 = 48$ est divisible par 24 et $11^2 - 1 = 120$ est divisible par 24.
2. a. Tout entier p est de la forme $3k$, $3k + 1$ ou $3k + 2$. Or, ici, p est premier et supérieur à 5 donc p ne peut pas être de la forme $3k$. Ainsi, p est nécessairement de la forme $3k + 1$ ou $3k + 2$, c'est-à-dire $p \equiv 1[3]$ ou $p \equiv 2[3]$.

   b. Si $p \equiv 1[3]$, alors $p^2 \equiv 1[3]$ et si $p \equiv 2[3]$ alors $p^2 \equiv 2^2[3] \equiv 1[3]$. D'où $p^2 - 1 \equiv 0[3]$ et donc $p^2 - 1$ est divisible par 3.
3. Tout entier p est de la forme $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ ou $4k + 3$. Or, ici, p est premier et supérieur à 5 donc p n'est pas pair et donc p est donc de la forme $4k + 1$ ou $4k + 3$.

   On a donc $p^2 - 1 = 16k^2 + 8k + 1 - 1 = 8(2k^2 + k)$ ou $p^2 - 1 = 16k^2 + 24k + 8 = 8(2k^2 + 3k + 1)$ donc $p^2 - 1$ est divisible par 8.
4. 3 divise $p^2 - 1$ et 8 divise $p^2 - 1$. De plus, 3 et 8 sont premiers entre eux, d'après le corollaire du théorème de Gauss, $3 \times 8 = 24$ divise $p^2 - 1$.

Corrigé exercice 48 :

1. Tout d'abord, les six nombres sont bien consécutifs.

   $7! + 2 = 5042$ est pair donc n'est pas premier.

   $7! + 3 = 5043 = 3 \times 1681$ n'est pas premier.

   $7! + 4 = 5044$ est pair donc n'est pas premier.

   $7! + 5 = 5045$ est divisible par 5 donc n'est pas premier.

   $7! + 6 = 5046$ est pair donc n'est pas premier.

   $7! + 7 = 7 \times 6! + 7 = 7(6! + 1)$ n'est pas premier.
2. On considère les n entiers consécutifs suivants :

   $(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, (n + 1)! + 4, \ldots, (n + 1)! + (n + 1)$.

   Ainsi, pour tout $2 \leqslant k \leqslant n + 1$, $(n + 1)! + k = k \times \left(\dfrac{(n + 1)!}{k} + 1\right)$. Or $\dfrac{(n + 1)!}{k}$ est un entier par définition de $(n + 1)!$ donc $(n + 1)! + k$ n'est pas premier pour tout entier k compris entre 2 et $n + 1$.

   Pour tout $n \geqslant 2$, on peut donc trouver une suite de n nombres entiers consécutifs qui ne sont pas premiers.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 49 :

1. Un entier p peut s'écrire sous la forme $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$. Or p est un nombre premier supérieur ou égal à 7 donc p est nécessairement de la forme $3k+1$ ou $3k+2$.

   Or $p \equiv 1[3] \Rightarrow p^4 \equiv 1[3]$ et $p \equiv 2[3] \Rightarrow p^4 \equiv 1[3]$ donc 3 divise $p^4 - 1$.

   On procède de même pour montrer que 5 divise $p^4 - 1$.

   On ne peut pas avoir $p \equiv 0\,[5]$ car p est un nombre premier supérieur à 7 donc $p \neq 5$.

   On peut donc avoir $p \equiv 1\,[5] \Rightarrow p^4 \equiv 1\,[5] \Rightarrow p^4 - 1 \equiv 0\,[5]$

   ou $p \equiv 2\,[5] \Rightarrow p^4 \equiv 16\,[5] \Rightarrow p^4 \equiv 1\,[5] \Rightarrow p^4 - 1 \equiv 0\,[5]$

   ou $p \equiv 3\,[5] \Rightarrow p^4 \equiv 81\,[5] \Rightarrow p^4 \equiv 1\,[5] \Rightarrow p^4 - 1 \equiv 0\,[5]$

   ou $p \equiv 4\,[5] \Rightarrow p^4 \equiv 256\,[5] \Rightarrow p^4 \equiv 1\,[5] \Rightarrow p^4 - 1 \equiv 0\,[5]$.

   Ainsi, pour tout nombre premier p supérieur ou égal à 7, 5 divise $p^4 - 1$.

   De plus $p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1)$.

   D'une part, Tout entier p est de la forme $4k$, $4k+1$, $4k+2$ ou $4k+3$. Or, ici, p est premier et supérieur à 5 donc p n'est pas pair et donc p est de la forme $4k+1$ ou $4k+3$. On a donc $p^2 - 1 = 16k^2 + 8k = 8(2k^2 + k)$ ou $p^2 - 1 = 16k^2 + 24k + 8 = 8(2k^2 + 3k + 1)$ donc $p^2 - 1$ est divisible par 8.

   D'autre part, p est impair donc p^2 est impair, d'où $p^2 + 1$ est pair.

   Donc $p^2 + 1$ est divisible par 2. Ainsi, $p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1)$ est divisible par 16.

   En conclusion 3, 5 et 16 divisent $p^4 - 1$. De plus 3, 5 et 16 sont premiers entre eux. D'après le corollaire du théorème de Gauss, $3 \times 5 \times 16$ divise $p^4 - 1$, c'est-à-dire que $p^4 - 1$ est divisible par 240.

2. $N = p_1^4 + p_2^4 + \ldots + p_{15}^4 = p_1^4 - 1 + p_2^4 - 1 + \ldots + p_{15}^4 - 1 + 15$. Or, d'après la question précédente, pour tout p premier supérieur ou égal à 7 et pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant 15$, $p_i^4 - 1$ est divisible par 3 et 5, deux entiers premiers entre eux, donc par 15. Soit $p_i^4 - 1 = 15k_i$ avec $k_i \in \mathbb{N}$, on a alors $N = 15k_1 + 15k_2 + \cdots + 15k_{15} + 15 = 15(k_1 + k_2 + \cdots + k_{15} + 1)$.

   Ainsi, N est divisible par 15 donc N n'est pas premier. Il n'existe donc pas quinze nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $p_1^4 + p_2^4 + \ldots + p_{15}^4$ soit un nombre premier.

Corrigé exercice 50 :

1. La commande % détermine le reste de la division euclidienne (de n par k).

   La variable R stocke le reste de la division euclidienne de n par les entiers successifs k.

2. On veut que, tant que le reste de la division de n par k n'est pas nul, le programme calcule le reste suivant. Ainsi, on complète la ligne 4 de ce programme en ajoutant : « while R != 0 : ».

3. On obtient les résultats suivants :

```
>>> testpremier(1067)
1067 n'est pas premier
>>> testpremier(20903)
20903 est premier
>>> testpremier(57590009)
57590009 n'est pas premier
```

4. On peut modifier ce programme comme ci-dessous.

```python
def testpremier(n):
    k=3
    R=1
    while R!=0:
        R=n%k
        k=k+2
    if k>=n+1:
        print(n,"est premier")
    else :
        print(n,"n'est pas premier")
```

Corrigé exercice 48 :

1. a. $7 \in \{p_i, i \in \mathbb{N}^*, 1 \leqslant i \leqslant k\}$ donc cet ensemble n'est pas vide.

   b. N est de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ donc N est impair. Ainsi, si q est un diviseur premier de N, alors q est impair. Et donc q est de la forme $4m+1$ ou $4m+3$.

   Or, pour tout entier i compris entre 1 et k, $N \equiv 3\,[p_i]$ donc les p_i ne divisent pas N. Ainsi, q ne peut pas être un des p_i, il est donc de la forme $4m+1$, c'est-à-dire $q \equiv 1[4]$.

   c. Par unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, $N = q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_n$ où, pour tout $i \in \{1\,;\ldots;n\}$, $q_i \equiv 1\,[4]$.
   Donc $N \equiv 1\,[4]$. Or, par définition de N, $N \equiv 3\,[4]$.
   On aboutit donc à une contradiction.
   On en conclut qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n+3$.

2. On suppose par l'absurde qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers de la forme $6n+5$ que l'on note $p_1, p_2, \ldots, p_k$. On pose alors $N = 6 \times p_1 p_2 \ldots p_n + 5$.

   N n'est pas un nombre pair et n'est pas divisible par 3, ainsi tout diviseur premier de N s'écrit sous la forme $6m+1$ ou $6m+4$car les diviseurs premiers de N ne peuvent pas être égal à 2 ou à 3 et ne peuvent pas être divisibles par 2 ou par 3.

   Or $N = 6 \times p_1 p_2 \ldots p_n + 5$ donc, pour tout i, $N \equiv 5\,[p_i]$ et donc p_i ne divise pas N. Ainsi, si q désigne un diviseur premier de N, q ne peut pas être un des p_i et donc doit être de la forme $6m+1$ c'est-à-dire $q \equiv 1\,[6]$.

   Par unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, $N = q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_n$.

   Or, pour tout entier i compris entre 1 et k, $q_i \equiv 1\,[6]$, donc $N \equiv 1\,[6]$.

   Or $N \equiv 5\,[6]$ par définition du nombre N. On aboutit donc à une contradiction.

   On en conclut qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6n+5$.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 52 :

1. $M_2 = 2^2 - 1 = 3$ est premier, $M_3 = 2^3 - 1 = 7$ est premier et $M_5 = 2^5 - 1 = 31$ est premier.

2. a. Soit $S = 1 + 2^p + (2^p)^2 + \cdots + (2^p)^{k-1}$. Alors S est la somme des k premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2^p. D'où $S = \dfrac{(2^p)^k - 1}{2^p - 1} = \dfrac{2^{p \times k} - 1}{2^p - 1} = \dfrac{2^n - 1}{2^p - 1}$ et donc $2^n - 1 = (2^p - 1) \times S = (2^p - 1) \times (1 + (2^p) + (2^p)^2 + \cdots + (2^p)^{k-1})$.

   b. Ainsi, $2^p - 1$ est un diviseur de $M_n = 2^n - 1$.

3. Si n n'est pas premier, alors M_n admet un diviseur différent de 1 et de lui même donc M_n n'est pas premier. Par contraposée, si M_n est premier, n l'est aussi.

4. $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$. Donc 11 est premier mais M_{11} ne l'est pas : la réciproque n'est donc pas vraie.

Corrigé exercice 53 :

1. a. range permet de créer une liste de nombres (ici tous les nombres entre 2 et n).
   sqrt calcule la racine carrée.
   % détermine le reste d'une division euclidienne.
   append ajoute un élément en dernière position dans une liste.
   not émet la négation d'une condition.
   index : détermine l'indice d'un élément dans une liste.

   b. À chaque nouvelle étape de la boucle while, on ajoute à la liste D les multiples stricts de k et on ajoute à la liste E les nombres qui ne sont pas dans la liste D.

   c. Si n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à sqrt(n), c'est qu'il est premier. On n'a donc pas besoin de vérifier tous les nombres jusqu'à n afin de déterminer si un nombre est, ou non, premier.

   d. On effectue les opérations ci-dessous.

$n = 7$
$\sqrt{7} \approx 2.6$
$L = [2, 3, 4, 5, 6, 7]$
$k = 2 < \sqrt{7}$
    $D = [\,]$
    $E = [\,]$
        $D = [2, 4, 6]$
        $E = [2, 3, 5, 7]$
    $L = [2, 3, 5, 7]$
$k = 3 > \sqrt{7}$
$\boldsymbol{L = [2, 3, 5, 7]}$

2. On obtient, par exemple, les résultats suivants.

Document sous licence libre Creative Commons
CC BY NC SA

```
>>> eratosthene(7)
[2, 3, 5, 7]
>>> eratosthene(35)
[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31]
>>> eratosthene(50)
[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47]
```

3. a. La fonction len permet de déterminer le nombre d'éléments d'une liste. En modifiant la dernière ligne du programme en « return (len(L)) », on obtient qu'il y a 168 nombres premiers inférieurs ou égaux à 1000.

   b. On a, d'une part, $\dfrac{1000}{\ln(1000)} \approx 145$ et, d'autre part, on a trouvé 168 nombres premiers inférieurs ou égaux à 1000. L'approximation est plutôt raisonnable..

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 54 :

$17 = 17$
$56 = 2^3 \times 7$
$85 = 5 \times 17$
$96 = 2^5 \times 3$

Corrigé exercice 55 :

1. Les diviseurs de 17 sont 1 et 17 car 17 est premier.
2. Les diviseurs de $2 \times 7 \times 11$ sont 1, 2, 7, 11, 14, 22, 77 et 154.
3. Les diviseurs de $2^2 \times 3^5$ sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 81, 108, 162, 243, 334, 486 et 972.

Corrigé exercice 56 :

1. $\text{PGCD}(2 \times 3 \times 5\,;3 \times 7) = 3$
2. $\text{PGCD}(2^3\,;3^2) = 1$
3. $\text{PGCD}(2^2 \times 5^3\,;2 \times 7) = 2$

Corrigé exercice 57 :

1. On a $153 = 3^2 \times 17$ donc les diviseurs de 153 sont 1, 3, 9, 17, 51, 153.
2. On a $330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$ donc les diviseurs de 330 sont 1, 2, 3, 5, 6, 10, 11, 15, 22, 30, 33, 55, 66, 110, 165 et 330.
3. On a $352 = 2^5 \times 11$ donc les diviseurs de 352 sont 1, 2, 4, 8, 11, 16, 22, 32, 44, 88, 176 et 352.
4. On a $840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$ donc les diviseurs de 840 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 20, 21, 24, 28, 30, 35, 40, 42, 56, 60, 70, 84, 105, 120, 140, 168, 210, 280, 420, 840.

Corrigé exercice 58 :

1. $\dfrac{48}{90} = \dfrac{2^4 \times 3}{2 \times 3^2 \times 5} = \dfrac{2^3}{3 \times 5} = \dfrac{8}{15}$
2. $\dfrac{375}{1089} = \dfrac{3 \times 5^3}{3^2 \times 11^2} = \dfrac{5^3}{3 \times 11^2} = \dfrac{125}{363}$
3. $\dfrac{4641}{2457} = \dfrac{3 \times 7 \times 13 \times 17}{3^3 \times 7 \times 13} = \dfrac{17}{3^2} = \dfrac{17}{9}$

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 59 :

1. On initialise le raisonnement pour $n = 2$ qui est premier donc P_2 est vraie.

2. On suppose qu'il existe un entier k tel que, pour tout entier h compris entre 2 et k, P_h est vraie.

   - Si l'entier $k+1$ est premier, P_{k+1} est vraie.
   - Si l'entier $k+1$ n'est pas premier, alors il existe donc deux entiers k_1 et k_2 tels que $k+1 = k_1 \times k_2$ avec $k_1 \leqslant k$ et $k_2 \leqslant k$. Or P_{k_1} et P_{k_2} sont vraies d'après l'hypothèse de récurrence. Donc, par produit, $k+1$ s'écrit comme produit de facteurs premiers.

   En conclusion, P_{k+1} est vraie.

   On a montré que la propriété était vraie au rang $n = 2$, puis que s'il existait un rang k tel que P_k est vraie, alors P_{k+1} est également vraie. D'après le principe de récurrence, on en déduit que tout entier n supérieur ou égal à 2 peut se décomposer en produit de facteurs premiers.

Corrigé exercice 60 :

On peut remarquer que n doit être pair puisque, en effet, si n est impair : $n = 2k+1 \Rightarrow n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1) = 2 \times 2 \times k \times (k+1)$ donc $n^2 - 1$ ne peut pas être le produit de trois premiers distinct puisqu'il est divisible deux fois par 2.
Les trois nombres suivants sont les trois plus petits entiers naturels vérifiant la condition de l'énoncé :
$n = 14 \Rightarrow n^2 - 1 = 14^2 - 1 = 165 = 3 \times 5 \times 13$.
$n = 16 \Rightarrow n^2 - 1 = 16^2 - 1 = 255 = 3 \times 5 \times 17$.
$n = 20 \Rightarrow n^2 - 1 = 20^2 - 1 = 399 = 3 \times 7 \times 19$.

Corrigé exercice 61 :

1. $n = 24 = 2^3 \times 3$ et $m = 80 = 2^4 \times 5$ donc $\text{PGCD}(24\,;80) = 2^3 = 8$.

2. $n = 179$ et $m = 181$ sont premiers donc $\text{PGCD}(179\,;181) = 1$.

3. $n = 3757 = 13 \times 17^2$ et $m = 2973 = 13^2 \times 17$ donc $\text{PGCD}(3757\,;2873) = 13 \times 17 = 221$.

Corrigé exercice 62 :

1. Si tous les α_i sont pairs, alors $\alpha_i = 2 \times \beta_i$, d'où $n = p_1^{2\times\beta_1} \times p_2^{2\times\beta_2} \times \ldots p_r^{2\times\beta_r} = (p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots p_r^{\beta_r})^2 = m^2$ avec $m = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots p_r^{\beta_r}$. Donc n est un carré parfait.

   Réciproquement, si n est un carré parfait alors $n = m^2$.

   Soit $m = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots p_r^{\beta_r}$ la décomposition en facteurs premiers de m. On a alors $n = m^2 = (p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots p_r^{\beta_r})^2 = p_1^{2\times\beta_1} \times p_2^{2\times\beta_2} \times \ldots p_r^{2\times\beta_r}$ et, par unicité de la décomposition en facteurs premiers de n, on en déduit que les exposants de la décomposition en facteurs premiers de n sont pairs.

Document sous licence libre Creative Commons

2. Il n'existe pas d'entier n tel que n et $2n$ soient des carrés parfaits.

   En effet, supposons que n soit un carré parfait. Alors la décomposition en facteurs premiers de n s'écrit $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots p_r^{\alpha_r}$ avec α_i est pair pour tout $i \in \{1\,;\dots\,;r\}$. Et on a alors $2n = 2 \times n = 2 \times p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots p_r^{\alpha_r}$.

   Deux cas sont alors possibles :

   - soit il existe un entier k tel que $p_k = 2$ et donc, dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $2n$, le facteur 2 admet pour exposant $\alpha_k + 1$ qui est impair, ce qui implique que $2n$ n'est donc pas un carré parfait ;
   - soit il n'existe pas un tel entier, le facteur 2 a alors pour exposant 1 qui est impair et donc $2n$ n'est pas un carré parfait.

3. n est un carré parfait si, et seulement si, tous les exposants (α_i) de sa décomposition en facteurs premiers sont pairs. Or le nombre de diviseurs de n est égal à $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \dots \times (\alpha_n + 1)$.

   Ainsi, n est un carré parfait si, et seulement si, chacun des facteurs de ce produit est impair. En conclusion, n est un carré parfait si, et seulement si, n admet un nombre impair de diviseurs.

4. L'entier choisi admet un nombre impair de diviseurs si, et seulement si, il est un carré parfait. Entre 1 et 100 (compris), il y a 10 carré parfaits donc 10 entiers qui admettent un nombre impair de diviseurs. Il y a donc 90 entiers qui admettent un nombre pair de diviseurs. La probabilité d'avoir choisi un tel nombre est donc égale à $\dfrac{90}{100} = 0.9$.

Corrigé exercice 63 :

1. La commande % détermine le reste de la division euclidienne (de n par k).

   La commande append ajoute, comme dernier élément de la liste, le facteur k à la liste D.

   La variable k prend des valeurs entières à partir de $k = 2$, la variable R prend pour valeurs les restes de la division euclidienne de n par k. Si ce reste est nul, cela signifie que l'entier k divise n : on le rajoute à la liste D, puis on réitère le procédé avec la valeur n/k.

2. On obtient le processus ci-dessous.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

$D = [\,]$ factorisation(24) $n = 24 > 1$ $k = 1$ $R = 1 > 0$ $k = 2$ $R = 24\%2 = 0$ $D = [2]$ factorisation(24/2=12) $n = 12 > 1$ $k = 1$ $R = 1 > 0$ $k = 2$ $R = 12\%2 = 0$ $D = [2, 2]$	factorisation(12/2=6) $n = 6 > 1$ $k = 1$ $R = 1 > 0$ $k = 2$ $R = 6\%2 = 0$ $D = [2, 2,2]$ factorisation(6/2=3) $n = 3 > 1$ $k = 1$ $R = 1 > 0$ $k = 2$ $R = 3\%2 = 1 > 0$ $k = 3$ $R = 3\%3 = 0$ $D = [2,2,2,3]$	factorisation(3/3=1) $n = 1$ $D = [2,2,2,3]$

3. Tant que n est divisible par 2, on remplace n par n/2. Dès qu'il ne l'est plus, on teste la divisibilité de n par 3 (puis, le cas échéant, celle de n/3 par 3. . .). On applique ce procédé avec la divisibilité par 5 (celle de 4 ayant été testée puisque $4 = 2 \times 2$) puis par 7 (celle de 6 ayant été testées puisque $6 = 2 \times 3$) On retrouve le principe du crible d'Eratosthène.

   Les valeurs de k dont la liste est dressée dans D sont donc des nombres premiers, répétés autant de fois qu'ils apparaissent dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n.

4. On obtient, par exemple, les résultats ci-dessous.

```
>>> factorisation(24)
[2, 2, 2, 3]

>>> factorisation(771197)
[7, 29, 29, 131]

>>> factorisation(921036509)
[23053, 39953]
```

5. L'algorithme, tel qu'il est construit, peut amener à quelques calculs superflus. Par exemple, si on applique l'algorithme à $15 = 3 \times 5$, l'algorithme va tester la divisibilité de 15 par les valeurs 2, puis 3 pour obtenir un premier facteur premier. L'algorithme va ensuite tester la divisibilité de 5 par les valeurs 2, 3, 4 et 5 alors qu'on pourrait commencer par étudier la divisibilité de 5 directement pour les valeurs à partir de 3 (2 ayant déjà été testé précédemment sans aboutir).

Corrigé exercice 64 :

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note P_n la propriété : "n admet une unique décomposition en produit de facteurs premiers en rangeant ces nombres dans l'ordre croissant".
Initialisation : Pour $n = 2$, on a $2 = p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_r^{\alpha_r}$. Ainsi, $p_1^{\alpha_1}$ divise 2 et donc $p_1 = 2$ et $\alpha_1 = 1$ (et $r = 1$). La décomposition de 2 en produits de facteurs premiers est donc nécessairement unique.

Document sous licence libre Creative Commons
CC BY NC SA

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier naturel k supérieur ou égal à 2 tel que, pour tout entier compris entre 2 et k, la décomposition de k en produit de facteurs premiers soit unique.
On suppose que $k+1$ admet deux décompositions en produit de facteurs premiers : $p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_r^{\alpha_r}$ et $q_1^{\beta_1} \times \ldots \times q_s^{\beta_s}$, les nombres premiers étant rangés dans l'ordre croissant.
Supposons que $p_1 \neq q_1$.
Alors p_1 divise $q_1^{\beta_1} \times \ldots \times q_s^{\beta_s}$ mais, pour tout i compris entre 1 et s, p_1 est premier avec q_i, ce qui est absurde.
Ainsi, $p_1 = q_1$.
En divisant les deux décompositions par p_1, on obtient :

$$\frac{k}{p_1} = k' = p_1^{\alpha_1 - 1} \times \ldots \times p_r^{\alpha_r} = q_1^{\beta_1 - 1} \times \ldots \times q_s^{\beta_s} < k.$$

Ainsi, en appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient que les deux décompositions de k' en produit de facteurs premiers sont les mêmes.
Donc les deux décompositions de k en produit de facteurs premiers sont identiques.
Conclusion : On a montré que la propriété est vraie au rang 2, puis que s'il existait un rang k tel que la propriété soit vraie pour toute valeur comprise entre 2 et k, alors elle était vraie au rang $k+1$. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, la décomposition de n en produit de facteurs premiers est unique.

Corrigé exercice 65 :

1. a. Puisque $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$ alors $\alpha_i - \beta_i \geqslant 0$. D'où $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots p_k^{\alpha_k} = (p_1^{\alpha_1-\beta_1} \times p_2^{\alpha_2-\beta_2} \times \ldots p_k^{\alpha_k-\beta_k}) \times (p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots p_k^{\beta_k})$ et donc l'entier $p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots p_k^{\beta_k}$ divise n.
   b. Soit d un diviseur de n. Soit p^{β_i} un diviseur de d, avec p premier. Alors, puisque $d \mid n$, par transitivité, p^{β_i} divise n. L'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers de n implique alors que p^{β_i}doit figurer dans cette décomposition. Donc p est l'un des p_i de la décomposition de n et $1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$. Ainsi, $d = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots p_k^{\beta_k}$
2. À chaque facteur p_k d'exposant α_k correspond $\alpha_k + 1$ branches. L'arbre de dénombrement possède donc $(\alpha_1+1) \times (\alpha_2+1) \times \ldots \times (\alpha_k+1)$ extrémités, ce qui correspond au nombre de diviseurs de n.

Corrigé exercice 66 :

Le plus petit entier dont la décomposition en produit de facteurs premiers s'écrit avec au moins 10 facteurs premiers distincts est le nombre $n = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 11 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 = 6469693230 > 10^9$.
Donc pour tout $n \leqslant 10^9$, la décomposition de n en produit de facteurs premiers fait apparaître moins de 10 facteurs premiers distincts.

Corrigé exercice 67 :

1. Notons $d = \mathrm{PGCD}(n\,;m)$.

D'une part, d divise n donc $d = p_1^{\alpha'_1} \times p_2^{\alpha'_2} \times \dots p_k^{\alpha'_k}$ avec $0 \leqslant \alpha'_i \leqslant \alpha_i$.

D'autre part, d divise m donc $d = p_1^{\alpha'_1} \times p_2^{\alpha'_2} \times \dots p_k^{\alpha'_k}$ avec $0 \leqslant \alpha'_i \leqslant \beta_i$.

Or PGCD$(n\,;m)$ est le plus grand diviseur commun de m et n, d'où $\alpha'_i = \min(\alpha_i\,;\beta_i)$. Ainsi, PGCD$(n\,;m) = p_1^{\min(\alpha_1\,;\beta_1)} \times p_2^{\min(\alpha_2\,;\beta_2)} \times \dots p_k^{\min(\alpha_k\,;\beta_k)}$.

2. Soit M un multiple commun de $n = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_k^{\alpha_h}$ et $m = p_1^{\beta_1} \times \dots \times p_k^{\beta_h}$.

   Comme $n \mid M$, alors, pour tout $i \in \{1\,;\dots\,;k\}$, $p_i^{\alpha_i} \mid M$. De même, comme $m \mid M$, alors, pour tout $i \in \{1\,;\dots\,;k\}$, $p_i^{\beta_i} \mid M$.

   Donc, comme PPCM$(n\,;m)$ est le plus petit multiple commun de n et m donc PPCM$(n\,;m) = p_1^{\max(\alpha_1\,;\beta_1)} \times p_2^{\max(\alpha_2\,;\beta_2)} \times \dots p_k^{\max(\alpha_k\,;\beta_k)}$.

Corrigé exercice 68 :

1. D'après l'exercice 67, si $n = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_k^{\alpha_h}$ et $m = p_1^{\beta_1} \times \dots \times p_k^{\beta_h}$ avec $p_1, \dots, p_k$ des nombres premiers et $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k$ des entiers pouvant être nuls, alors :

$$\text{PGCD}(n\,;m) = p_1^{\min(\alpha_1\,;\beta_1)} \times p_2^{\min(\alpha_2\,;\beta_2)} \times \dots p_k^{\min(\alpha_k\,;\beta_k)}$$

   et

$$\text{PPCM}(n\,;m) = p_1^{\max(\alpha_1\,;\beta_1)} \times p_2^{\max(\alpha_2\,;\beta_2)} \times \dots p_k^{\max(\alpha_k\,;\beta_k)}.$$

   Donc PGCD$(n\,;m) \times$ PPCM$(n\,;m) = p_1^{\alpha_1+\beta_1} \times \dots \times p_k^{\alpha_k+\beta_k} = n \times m$.

2. PGCD$(m\,;n) = 12$ et PPCM$(m\,;n) = 60$ donc :

$$m \times n = \text{PGCD}(m\,;n) \times \text{PPCM}(m\,;n) = 12 \times 60 = 720.$$

   Donc m et n sont des diviseurs de 720 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 48, 60, 72, 80, 90, 120, 144, 180, 240, 360, 720.

   De plus, n et m divisent 60 et sont des multiples de 12.

   Ainsi, on obtient $n = 12$ et $m = 60$ ou $n = 60$ et $m = 12$ et, réciproquement, on vérifie que ces couples sont bien des solutions du problème.

3. PGCD$(m\,;n) = 6$ et PPCM$(m\,;n) = 180$ donc :

$$m \times n = \text{PGCD}(m\,;n) \times \text{PPCM}(m\,;n) = 6 \times 180 = 1080.$$

   Ainsi, m et n sont des diviseurs de 1080.

   De plus, m et n sont des diviseurs de 180 et des multiples de 6 donc les valeurs possibles de m et n sont 6, 12, 18, 30, 36, 60, 90 et 180.

   Ainsi, on obtient $m = 6$ et $n = 180$, $m = 12$ et $n = 90$, $m = 18$ et $n = 60$, $m = 30$ et $n = 36$ et, réciproquement, on vérifie que ces couples sont bien des solutions du problème.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 69 :

1. Soit n un tel nombre et $n = p_1^{\alpha_1} \times \dots p_k^{\alpha_k}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers. Alors son nombre de diviseurs est égal à $(\alpha_1+1) \times \dots \times (\alpha_k+1)$. De plus $2 \times 3 \times 5 = 30 > 20$ donc un tel nombre se décompose avec, au plus, deux facteurs premiers. On n'a donc que deux possibilités $6 = (0+1)\times(5+1)$ ou $6 = (1+1)\times(2+1)$.

   Dans le premier cas, $n = p^5$ avec p premier et $n \leqslant 20$. Or $2^5 = 32 > 20$ donc ce n'est pas possible.

   Dans le deuxième cas, $n = p \times q^2$ avec p et q premiers et $n \leqslant 20$ et on obtient alors les possibilités suivantes : $n = 2 \times 3^2 = 18$ ou $n = 2^2 \times 3 = 12$ ou $n = 2^2 \times 5 = 20$.

2. Soit n un tel nombre. On a $21 = 3 \times 7$ donc le nombre n admet au plus deux facteurs premiers dans sa décomposition en facteurs premiers. On procède alors de même que dans la question précédente, cette fois-ci avec $21 = (0+1)\times(20+1) = (2+1)\times(6+1)$. Dans le premier cas, le plus petit entier possible est $n = 2^{20} = 1048576$.

   Dans le deuxième cas, le plus petit entier possible est $n = 2^6 \times 3^2 = 576$.

   Ainsi, le plus petit entier naturel admettant exactement 21 diviseurs est 576.

3. $\text{PPCM}(n\,;m) = 24 = 2^3 \times 3$. Ainsi les couples d'entiers naturels possibles sont $(24\,;1)$, $(24\,;2)$, $(24\,;3)$, $(24\,;4)$, $(24\,;6)$, $(24\,;8)$, $(24\,;12)$, $(24\,;24)$, $(8\,;3)$, $(8\,;6)$, $(8\,;12)$ et $(8\,;24)$.

Document sous licence libre Creative Commons

9 Exercices d'entraînement partie 3

Corrigé exercice 70 :

1. 5 est un nombre premier qui ne divise pas 22 et $22^4 = 22^{5-1}$ donc, d'après le petit théorème de Fermat, $22^4 \equiv 1\,[5]$.

2. 35 est un multiple de 7 donc $35^6 \equiv 0\,[7]$.

3. 17 est un nombre premier qui ne divise pas 12 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $12^{17} \equiv 12\,[17]$.

Corrigé exercice 71 :

1. 17 est un nombre premier qui ne divise pas 16 et $2^{16} = 2^{17-1}$ donc, d'après le petit théorème de Fermat, $2^{16} \equiv 1\,[17]$. Ainsi, le reste de la division euclidienne de 2^{16} par 17 est 1.

2. 19 est un nombre premier qui ne divise pas 3 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $3^{19} \equiv 3\,[19]$. Ainsi, le reste de la division euclidienne de 3^{19} par 19 est 3.

3. 7 est un nombre premier qui ne divise pas 4 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $4^{7-1} \equiv 1\,[7]$. D'où $4^{13} \equiv \left(4^6\right)^2 \times 4 \equiv 4[7]$. Ainsi, le reste de la division euclidienne de 4^{13} par 7 est 4.

Corrigé exercice 72 :

1. 23 est un nombre premier ne divisant pas 3 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $3^{22} \equiv 1\,[23]$. De plus $3^{52} = (3^{22})^2 \times 3^8$ et $3^8 = 6561 = 285 \times 23 + 6$, d'où $3^8 \equiv 6\,[23]$. Ainsi, $3^{52} \equiv 1^2 \times 6\,[23] \equiv 6\,[23]$ et le reste de la division euclidienne de 3^{52} par 23 est 6.

2. De même, d'après le petit théorème de Fermat, $4^{28} \equiv 1\,[29]$. De plus $4^{89} = (4^{28})^3 \times 4^5$ et $4^5 = 1024 = 35 \times 29 + 9$, d'où $4^5 \equiv 9\,[29]$. Ainsi, $4^{89} \equiv 1^3 \times 9\,[29] \equiv 9\,[29]$ et on en déduit donc que le reste de la division euclidienne de 4^{89} par 29 est 9.

3. De la même manière, d'après le petit théorème de Fermat, $15^{96} \equiv 1\,[97]$. De plus, $15^{100} = 4^{96} \times 15^4$ et $15^4 = 50625 = 521 \times 97 + 88$, d'où $15^4 \equiv 88\,[97]$. Ainsi, $15^{100} \equiv 1 \times 88\,[97] \equiv 88\,[97]$ et le reste de la division euclidienne de 15^{100} par 97 est 88.

Corrigé exercice 73 :

1. a. 5 est un nombre premier, 3 n'est pas divisible par 5 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $3^4 \equiv 1\,[5]$. Ainsi $3^{4\times 6} \equiv (3^4)^6\,[5] \equiv 1^6\,[5] \equiv 1\,[5]$.

   b. De même, d'après le petit théorème de Fermat, $3^6 \equiv 1\,[7]$ d'où $3^{4\times 6} \equiv (3^4)^4\,[7] \equiv 1^4\,[7] \equiv 1\,[7]$.

   c. Puisque $n \equiv 1[5]$, alors 5 divise $n-1$. De même, puisque $n \equiv 1[7]$, 7 divise $n-1$.

   De plus, 5 et 7 sont premiers entre eux donc, d'après le corollaire du théorème de Gauss, $5 \times 7 = 35$ divise $n-1$ et donc $n \equiv 1[35]$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

d. D'après la question précédente, $3^{24} \equiv 1\,[35]$ d'où $3^{75} \equiv \left(3^{24}\right)^3 \times 3^3 \equiv 3^3 \equiv 27[35]$.

2. On a $3^{72} = 3^{4\times18}$. D'une part, d'après le petit théorème de Fermat, $3^4 \equiv 1\,[5]$ donc $3^{4\times18} \equiv (3^4)^{18}\,[5] \equiv 1^{18}\,[5] \equiv 1\,[5]$. D'autre part, toujours d'après le petit théorème de Fermat, $3^{18} \equiv 1\,[19]$ donc $3^{4\times18} \equiv (3^{18})^4\,[19] \equiv 1^4\,[19] \equiv 1\,[19]$.

   Or 5 et 19 sont premiers entre eux donc $3^{72} \equiv 3^{18\times4}\,[5\times19] \equiv 1\,[95]$.

   On en déduit que $3^{72} \times 3^3 \equiv 1 \times 3^3\,[35]$ et donc que $3^{75} \equiv 27\,[35]$

3. On a $4^{40} = 4^{4\times10}$. D'une part, d'après le petit théorème de Fermat, $4^4 \equiv 1\,[5]$, d'où $4^{4\times10} \equiv (4^4)^{10}\,[5] \equiv 1^{10}\,[5] \equiv 1\,[5]$. De même, d'après le petit théorème de Fermat, $4^{10} \equiv 1\,[11]$, d'où $4^{4\times10} \equiv (4^{10})^4\,[11] \equiv 1^4\,[11] \equiv 1\,[11]$.

   De plus, 5 et 11 sont premiers entre eux donc $4^{40} \equiv 4^{4\times10}\,[5\times11] \equiv 1\,[55]$. On en déduit que $4^{207} \equiv (4^{40})^5 \times 4^7\,[55] \equiv 1^5 \times 4^7\,[55] \equiv 16384\,[55]$. Or $16384 = 297\times55+49$ donc $16384 \equiv 49\,[55]$..

Corrigé exercice 74 :

1. Pour tout entier naturel n :$4 \equiv 1\,[3] \Rightarrow 4^n \equiv 1^n\,[3] \equiv 1\,[3]$.

2. 29 est un nombre premier qui ne divise pas 4 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $4^{28} \equiv 1[29]$. D'où 29 divise $4^{28} - 1$.

3. $4^1 \equiv 4[17]$, $4^2 \equiv 16[17]$, $4^3 \equiv 13[17]$ et $4^4 \equiv 256\,[17] \equiv 1\,[17]$. D'où, pour tout k entier, $4^{4k}\,[17] \equiv (4^4)^k\,[17] \equiv 1^k\,[17] \equiv 1\,[17]$.

   Ainsi, pour tout entier naturel k, $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.

4. Soit $k$un entier naturel quelconque. $4^{2k} \equiv (4^2)^k\,[5] \equiv 16\,[5] \equiv 1\,[5]$ et $4^{2k+1} \equiv (4^2)^n \times 4\,[5] \equiv 1 \times 4\,[5] \equiv 4\,[5]$. Ainsi, $4^n \equiv 1\,[5]$ si, et seulement si, n est pair. Donc $4^n - 1$ est divisible par 5 si, et seulement si, n est pair.

5. D'après la question 1, $4^{28} - 1$ est divisible par 3. D'après la question 2, $4^{28} - 1$ est divisible par 29. D'après la question 3., $4^{28} - 1$ est divisible par 17, car $28 = 4 \times 7$.

   Enfin, d'après la question 4, $4^{28} - 1$ est divisible par 5, car 28 est un nombre pair. Donc 3, 29, 17 et 5 sont quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Corrigé exercice 75 :

On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n la proposition : « $15^{15^n} \equiv 1\,[11]$ ». On souhaite prouver que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation : Pour $n = 1$, $15^{15^1} \equiv 15^{15}\,[11]$. Or 11 est un nombre premier ne divisant pas 15 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $15^{11} \equiv 15\,[11] \equiv 4\,[11]$. Ainsi, $15^{15} \equiv 15^{11} \times 15^4 \equiv 1\,[11]$. On en déduit que P_1 est vraie.
Hérédité : On considère un entier naturel non nul k quelconque tel que P_k est vraie, autrement dit tel que $15^{15^k} \equiv 1\,[11]$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit, que $15^{15^{k+1}} \equiv 1\,[11]$.
On a $15^{15^{k+1}} = 15^{15^k\times15} = (15^{15^k})^{15}$. Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $15^{15^k} \equiv 1\,[11]$ donc $\left(15^{15^k}\right)^{15} \equiv 1^{15}[11] \equiv 1[11]$. Donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion : Ainsi, P_1 est vraie et on a montré que s'il existe un rang k tel que P_k est vraie, alors P_{k+1} est également vraie. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie donc $15^{15^n} \equiv 1\,[11]$.

Corrigé exercice 76 :

1. Déterminer le chiffre des unités de 3^{80} revient à calculer le reste dans la division euclidienne de 3^{80} par 10.

   On commence par étudier les congruences modulo 2 et 5.

   3^{80} est impair comme produit de nombres impairs et donc $3^{80} \equiv 1[2]$.

   Par ailleurs, 5 ne divise pas 3 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $3^4 \equiv 1[5]$ et donc $3^{80} \equiv 1[5]$.

   Ainsi, 2 et 5 divisent $3^{80} - 1$. Or 2 et 5 sont premiers entre eux donc, d'après le corollaire du théorème de Gauss, 10 divise $3^{80} - 1$, soit $3^{80} \equiv 1[10]$.

   Ainsi, le chiffre des unités de 3^{80} vaut 1.

2. 7^{28} est impair comme produit de nombres impairs et donc $7^{28} \equiv 1[2]$.

   Par ailleurs, 5 ne divise pas 7 donc, d'après le petit théorème de Fermat, $7^4 \equiv 1[5]$ et donc $7^{28} \equiv 1[5]$.

   Ainsi, 2 et 5 divisent $7^{28} - 1$. Or 2 et 5 sont premiers entre eux donc, d'après le corollaire du théorème de Gauss, 10 divise $7^{28} - 1$, soit $7^{28} \equiv 1[10]$.

   Donc le chiffre des unités de 7^{28} est 1.

Corrigé exercice 77 :

1. 7 est un nombre premier donc, d'après le cours, pour tout entier naturel n, $n^7 \equiv n[7]$.

   Ainsi, $n^7 - n$ est divisible par 7.

2. On a $n^7 - n = n(n^6 - 1)$. Si n est pair, alors le résultat est direct.

   Si n est impair, alors n^6 est également impair en tant que produit de nombres impaires, et donc $n^7 - n$ est pair.

   Ainsi, $n^7 - n$ est divisible par 2.

   En conclusion, $n^7 - n$ est divisible par 7 et par 2. Comme 2 et 7 sont premiers entre eux, le corollaire du théorème de Gauss affirme que $n^7 - n$ est divisible par 14, d'où le résultat.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

10 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 78 :

1. a. $8^7 = 2097152 = 55 \times 38130 + 2$ donc $8^7 \equiv 2\,[55]$. On en déduit que $8^{21} = (8^7)^3 \equiv 2^3[55] \equiv 8\,[55]$ donc que le reste de la division euclidienne de 8^{21} par 55 est 8.

   b. $8^2 = 64$ donc $8^2 \equiv 9\,[55]$. Ainsi, $8^{23} \equiv 8^2 \times 8^{21} \equiv 9 \times 8 \equiv 72 \equiv 17\,[55]$. Donc le reste de la division euclidienne de 8^{23} par 55 est 17.

2. a. 23 et 40 sont premiers entre eux donc, d'après l'identité de Bézout, l'équation $23x - 40y = 1$ admet au moins un couple de solutions entières.

   b. Le couple $(7\,;4)$ est une solution particulière de (E).

   c. Soit $(x\,;y)$ un couple solution de (E). Alors $23x - 40y = 23 \times 7 - 40 \times 4$ donc $23(x-7) = 40(y-4)$. Ainsi, 23 divise $40(y-4)$, or 23 et 40 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 23 divise $y - 4$. Il existe donc un entier k tel que $y - 4 = 23k$, soit $y = 23k + 4$. Ainsi, $x = 40k + 7$.

   Réciproquement, si $x = 40k + 7$ et $y = 23k + 4$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on vérifie que le couple $(x\,;y)$ est solution de (E).

   Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples $(40k+7\,;23k+4)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

   d. $23d \equiv 1\,[40]$ si, et seulement si, il existe un entier u tel que $23d = 40u + 1$, soit $23d - 40u = 1$. Le couple $(d\,;u)$ est donc solution de (E) et donc il existe un entier relatif k tel que $d = 40k + 7$. On cherche $0 \leqslant d < 40$ donc $0 \leqslant 40k + 7 < 40$, soit $\dfrac{-7}{40} \leqslant k < \dfrac{33}{40}$, d'où $k = 0$.

   L'entier $d = 7$ est donc l'unique entier compris entre 1 et 40 (exclu) tel que $23d \equiv 1\,[40]$.

3. a. $N = 5 \times 11 = 55$ et $n = (5-1) \times (11-1) = 40$.

   23 et 40 sont premiers entre eux donc la clé $c = 23$ convient bien.

   b. $8^{23} = 8^{20} \times 8^3 \equiv 17[55]$. Donc $b = 17$.

4. a. D'après la question 2.d., $d = 7$.

   b. $17^7 \equiv 8[55]$ donc le nombre en clair est $a = 8$.

Corrigé exercice 79 :

1. $\varphi(5) = 4$ car, parmi les entiers strictement positifs inférieurs à 5, 1, 2, 3 et 4 sont premiers avec 5.

   $\varphi(6) = 2$ car, parmi les entiers strictement positifs inférieurs à 6, seuls 1 et 5 sont premiers avec 6.

   $\varphi(7) = 6$ car, parmi les entiers strictement positifs inférieurs à 7, 1, 2, 3, 4, 5 et 6 sont premiers avec 7.

   $\varphi(8) = 4$ car, parmi les entiers strictement positifs inférieurs à 8, seuls 1, 3, 5 et 7 sont premiers avec 8.

   $\varphi(9) = 6$ car, parmi les entiers strictement positifs inférieurs à 9, seuls 1, 2, 4, 5, 7 et 8 sont premiers avec 9.

Document sous licence libre Creative Commons

$\varphi(10) = 4$ car, parmi les entiers strictement positifs inférieurs à 10, seuls 1, 3, 7 et 9 sont premiers avec 10.

2. Si p est premier, alors tous les entiers $1 \leqslant n < p$ sont premiers avec p donc $\varphi(p) = p - 1$.

3. Au total, on compte p^k nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à p^k : tous les nombres entiers de 1 à p^k.

   Comptons maintenant, parmi ces entiers, le nombre d'entiers non premiers avec p^k.

   Si p est premier, un entier n inférieur à p^k n'est pas premier avec p^k si, et seulement si, il est un multiple de p. Ces multiples de p sont $p, 2p, 3p, \dots, (p^{k-1}) \times p$. Il y a donc, au total, p^{k-1} nombres entiers compris entre 1 et p^k qui ne sont pas premiers avec p^k.

   Donc le nombre d'entiers strictement inférieurs à p^k et premiers avec p^k est égal à $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.

4. On a $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots p_r^{\alpha_r}$. D'après ce qui précède, on a donc $\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \times \varphi(p_2^{\alpha_2}) \times \dots \times \varphi(p_r^{\alpha_r})$. Or, pour tout entier i, p_i est un nombre premier et donc $\varphi(p_i^{\alpha_i}) = p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1} = p_i^{\alpha_i - 1} \times (p_i - 1)$.

   Ainsi, $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1}\left(\dfrac{p_1 - 1}{p_1}\right) \times p_2^{\alpha_2}\left(\dfrac{p_2 - 1}{p_2}\right) \times \dots \times p_r^{\alpha_r}\left(\dfrac{p_r - 1}{p_r}\right)$, d'où $\varphi(n) = n \times \left(1 - \dfrac{1}{p_1}\right) \times \left(1 - \dfrac{1}{p_2}\right) \times \dots \times \left(1 - \dfrac{1}{p_r}\right)$ car $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots p_r^{\alpha_r} = n$.

5. $945 = 3^3 \times 5 \times 7$ donc $\varphi(945) = 945 \times (1 - \dfrac{1}{3}) \times (1 - \dfrac{1}{5}) \times (1 - \dfrac{1}{7}) = 432$.

   Il y a donc 432 nombres premiers avec 945 et inférieurs ou égaux à 945.

Corrigé exercice 80 :

1. $\dbinom{p}{k} = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ donc $k!\dbinom{p}{k} = \dfrac{p!}{(p-k)!} = p \times (p-1) \times \dots \times (p-(k+1))$. Ainsi, en posant $h = (p-1) \times \dots \times (p-(k+1)) \in \mathbb{Z}$, on obtient $k!\dbinom{p}{k} = p \times h$ et donc p divise $k!\dbinom{p}{k}$.

   De plus, p est premier et $k < p$. Ainsi, p est premier avec $k!$ et donc, d'après le théorème de Gauss, p divise $\dbinom{p}{k}$.

2. a. Si $a = 0$, on a bien $0^p \equiv 0[p]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   b. Soit un entier b tel que $0 \leqslant b \leqslant p-1$ et pour lequel $\mathcal{P}(b)$ est vraie, c'est-à-dire $b^p \equiv b[p]$. Démontrons que $\mathcal{P}(b+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $(b+1)^p \equiv b+1[p]$.

   On a $(b+1)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b^{p-k} = b^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} b^{p-k} + 1$. Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $b^p \equiv b[p]$.

De plus, d'après la première question, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p-1$, p divise $\binom{p}{k}$ donc, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p-1$, $\binom{p}{k} \equiv 0[p]$ et donc $\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} b^{p-k} \equiv 0[p]$.
Ainsi, $(b+1)^p \equiv b+1[p]$.
On vient de démontrer que si $\mathcal{P}(b)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(b+1)$ l'est également.

3. Tout d'abord, les deux questions précédentes nous permettent de montrer, par récurrence, que pour tout $0 \leqslant a \leqslant p-1$, $a^{p-1} \equiv a[p]$.

   Soit maintenant un entier naturel n. Il existe alors $0 \leqslant a \leqslant p-1$ tel que $n \equiv a[p]$. Ainsi, par compatibilité des puissances avec la congruence, $n^p \equiv a^p[p]$ et donc, d'après la récurrence précédente, $n^p \equiv a[p] \equiv n[p]$.

Corrigé exercice 81 :

1. La lettre N correspond au nombre 13.

   De plus, $y \equiv 13(13+13)\,[3 \times 11] \equiv 338\,[33] \equiv 8\,[33]$ Donc Bob doit transmettre le nombre 8 à Alice.

2. a. $x(x+13) \equiv 3\,[33] \Leftrightarrow x^2+13x \equiv 3\,[33] \Leftrightarrow x^2+13x+33x+529 \equiv 4\,[33]$ car $33x \equiv 0\,[33]$ et $529 = 33 \times 16 + 1 \equiv 1\,[33]$. D'où$(x+23)^2 \equiv 4\,[33]$.

   b. On $(x+23)^2 \equiv 4\,[33]$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(x+23)^2 = 33k+4$. Ainsi, on a, d'une part, $(x+23)^2 = 3(11k+1)+1$ donc $(x+23)^2 \equiv 1[3]$ et, d'autre part, $(x+23)^2 \equiv 11k \times 3 + 4$ donc $(x+23)^2 \equiv 4[3]$.

   Réciproquement, $(x+23)^2 \equiv 1\,[3] \Leftrightarrow (x+23)^2 \equiv 4\,[3] \Leftrightarrow (x+23)^2 - 4 \equiv 0\,[3]$ et $(x+23)^2 \equiv 4\,[11] \Leftrightarrow (x+23)^2 - 4 \equiv 0\,[11]$.

   Ainsi 3 et 11 divisent $(x+23)^2 - 4$ et sont premiers entre eux. Donc, d'après le théorème de Gauss, 3×11 divise $(x+23)^2-4$, soit $(x+23)^2 \equiv 4\,[33]$.

   c. On construit un tableau de congruence modulo 3.

a	0	1	2
$a^2 \equiv \ldots [3]$	0	1	1

   Ainsi : $0 \leqslant a < 3$ et $a^2 \equiv 1\,[3] \Leftrightarrow a = 1$ ou $a = 2$.

   d. On construit un tableau de congruence modulo 11.

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$b^2 \equiv \ldots [11]$	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

   Ainsi : $0 \leqslant b < 11$ et $b^2 \equiv 4\,[11] \Leftrightarrow b = 2$ ou $b = 9$.

   e. Ainsi $(x+23)^2 \equiv 1\,[3] \Leftrightarrow x+23 \equiv 1\,[3]$ ou $x+23 \equiv 1\,[3]$, c'est-à-dire $x \equiv 2\,[3]$ ou $x \equiv 0\,[3]$.

   De plus, $(x+23)^2 \equiv 4\,[11] \Leftrightarrow x+23 \equiv 2\,[11]$ ou $x+23 \equiv 9\,[11]$, c'est-à-dire $x \equiv 1\,[11]$ ou $x \equiv 8\,[11]$.

BY NC SA

3. On sait par ailleurs que $0 \leqslant x < 26$. On a donc 4 cas possibles.
   - Premier cas : $x \equiv 2\,[3]$ et $x \equiv 1\,[11]$ donc $x = 11$.
   - Deuxième cas : $x \equiv 2\,[3]$ et $x \equiv 8\,[11]$ donc $x = 8$.
   - Troisième cas : $x \equiv 0\,[3]$et $x \equiv 1\,[11]$ donc $x = 12$.
   - Quatrième cas : $x \equiv 0\,[3]$ et $x \equiv 8\,[11]$ donc $x = 30$ mais $30 \geqslant 26$ donc ce cas est impossible.

   En conclusion, en recevant le code 3, la lettre codée peut être L, I ou M. On ne peut donc pas décoder ce message lettre par lettre.

Corrigé exercice 82 :

1. $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$ qui est bien premier.
   $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ qui est bien premier.
   $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$ qui est bien premier.
   $F_4 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 6557$ qui est bien premier.

2. p est un nombre premier impair donc p est premier avec 2 et ne divise pas 2, d'où, d'après le petit théorème de Fermat, $2^{p-1} \equiv 1[p]$. Ainsi, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}, 2^k \equiv 1[p]\}$ est non vide et comme il s'agit d'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$, il admet un plus petit élément que l'on notera k_0.

   Soit maintenant ℓ un autre entier tel que $2^l \equiv 1[p]$. Posons la division euclidienne de ℓ par k_0 : $\ell = k_0 \times q + r$ avec $0 \leqslant r < k_0$. On peut alors réécrire $2^\ell \equiv 1\,[p]$ sous la forme $2^{k_0 \times q + r} \equiv 1\,[p]$, soit $(2^{k_0})^q \times 2^r \equiv 1\,[p]$.

   Or $2^{k_0} \equiv 1\,[p]$ donc $(2^{k_0})^q \times 2^r \equiv 1^q \times 2^r\,[p] \equiv 2^r\,[p] \equiv 1\,[p]$. Mais k_0 est le plus petit entier non nul tel que $2^{k_0} \equiv 1\,[p]$ et $r < k_0$ donc $r = 0$. D'où $\ell = k_0 \times q$ et donc k_0 divise ℓ.

3. a. Pour tout $n \geqslant 5$, $F_n = 2^{2^n} + 1$ est impair donc 2 ne divise pas F_n et donc un diviseur premier de F_n est forcément impair.
   Soit p un diviseur premier de F_n. Alors p divise F_n donc $2^{2^n} + 1 \equiv 0\,[p]$ et donc $2^{2^n} \equiv -1\,[p]$. D'où $2^{2^{n+1}} = (2^{2^n})^2 \equiv (-1)^2[p] \equiv 1\,[p]$

   b. On a $2^{2^{n+1}} \equiv 1[p]$ d'après la question précédente. On considère k_0 le plus petit entier k tel que $2^k \equiv 1\,[p]$. D'après la question 2, on sait que k_0 divise 2^{n+1}. D'où $k_0 = 2^\alpha$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant n+1$.
   Supposons par l'absurde que $\alpha \leqslant n$. On sait que $2^{2^\alpha} \equiv 1\,[p]$. Ainsi, en élevant $n - \alpha$ fois au carré les deux membres de cette congruence, on obtient alors $2^{2^{\alpha+n-\alpha}} \equiv 1\,[p]$, c'est-à-dire $2^{2^n} \equiv 1\,[p]$, ce qui contredit le fait que $2^{2^n} \equiv -1\,[p]$. C'est absurde, $\alpha = n+1$, est donc le plus petit entier tel que $2^{2^\alpha} \equiv 1\,[p]$.

   c. p est un nombre premier impair donc premier avec 2 et ne divisant pas 2, d'où, d'après le petit théorème de Fermat, $2^{p-1} \equiv 1[p]$.

   d. D'après ce qui précède, 2^{n+1} et $p-1$ vérifient tous deux $2^{2^{n+1}} \equiv 1[p]$ et $2^{p-1} \equiv 1[p]$. Or on a montré que 2^{n+1} est le plus petit entier de ce type, donc, d'après la question 2, 2^{n+1} divise $p-1$, d'où $p \equiv 1\,[2^{n+1}]$.

Document sous licence libre Creative Commons

4. $F_5 = 2^{2^5} + 1$. Un diviseur premier p de F_5 vérifie donc $p \equiv 1\,[2^6]$, c'est-à-dire $p = 2^6k + 1 = 64k + 1$.

   Pour $k = 10$, on obtient $p = 641$ qui est bien un diviseur premier de F_5.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 6 : Calcul matriciel et applications aux graphes

Table des matières

Document sous licence libre Creative Commons

1 Informations sur ce chapitre

Ce chapitre introduit deux notions complètement nouvelles pour les élèves qui ne nécessitent donc que très peu de prérequis.
Les matrices vont être étudiées dans un premier temps, en mettant en place le vocabulaire associé, ainsi que les différentes opérations possibles ou non d'effectuer avec des matrices.
On étudie différents champs d'applications du calcul matriciel : résolution de système linéaire ou applications géométriques.
Dans un second temps, c'est la notion de graphe qui va être abordée. Les exemples abordés concernent aussi bien les graphes orientés que les graphes non orientés. Ici encore, il est question de maîtriser le vocabulaire spécifique lié à la notion.
Enfin, la troisième partie va faire le lien entre ces deux notions avec le concept de matrice d'adjacence d'un graphe et son application : déterminer le nombre de chemin d'une longueur donnée permettant de joindre deux sommets d'un graphe.
De nombreux exercices d'applications directes sont proposés afin que l'élève assimile toutes les notions clés du chapitre et pour qu'il puisse ensuite les utiliser dans des situations contextualisées.
Au travers des exercices de synthèse se trouvent quelques autres applications des notions de matrice et de graphe.

Document sous licence libre Creative Commons

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

1. a. Il y a $5+7+9+13=34$ roses, $9+12+10+11=42$ œillets et $3+5+9+7=24$ gerberas.

   b. On doit écrire =SOMME(B2 :B5)

2. a. Le prix du bouquet 1 s'élève à $5\times 2,8+9\times 1,15+3\times 1,4=28,55$ €.

   b. On doit écrire la formule =B2*B8+C2*B9+D2*B10

   c. Le prix du bouquet 2 est $7\times 2,8+12\times 1,15+5\times 1,4=40,4$ €.
   Le prix du bouquet 3 est $9\times 2,8+10\times 1,15+9\times 1,4=49,3$ €.
   Le prix du bouquet 4 est $13\times 2,8+11\times 1,15+7\times 1,4=58,85$ €.
   Ainsi, le prix total des quatre bouquets est $28,55+40,4+49,3+58,85=177,10$ €.

3. On peut saisir =B8*SOMME(B2 :B5)+B9*SOMME(C2 :C5)+B10*SOMME(D2 :D5) ou bien commencer par calculer le prix de chaque bouquet dans la colonne E, en entrant dans la cellule E2 la formule =B2*$B$8+C2*$B$9+D2*$B$10, puis en étendant la formule jusqu'en E5. Enfin, on calcule =SOMME(E2 :E5).

Corrigé exercice 2 :

1.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 13x-y &= 19 \\ 6x+8y &= 8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y &= 13x-19 \\ 6x+8y &= 8 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y &= 13x-19 \\ 6x+8(13x-19) &= 8 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y &= 13x-19 \\ x &= \frac{16}{11} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y &= 13\times\frac{16}{11}-19=\frac{-1}{11} \\ x &= \frac{16}{11} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{16}{11};-\frac{1}{11}\right)\right\}$

2.

$$\begin{cases} 7x-6y & =11 \\ 5x-4y & =4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x-12y-15x+12y & =22-12 \\ 5x-4y & =4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x & =10 \\ 5x-4y & =4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & =-10 \\ -50-4y & =4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & =-10 \\ y & =-\frac{27}{2} \end{cases}$$

Donc $\mathcal{S}=\left\{\left(-10;-\frac{27}{2}\right)\right\}$

Corrigé exercice 3 :

Notons x le prix unitaire d'un croissant et y le prix unitaire d'un pain au chocolat.
Le prix payé par Aliou est $5x+3y=7,1$ et le prix payé par Assane est $8x+10y=16,3$.
On a donc le système :

$$\begin{cases} 5x+3y & =7,1 \\ 8x+10y & =16,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3y & =7,1 \\ 10y & =16,3-8x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3(1,63-0,8x) & =7,1 \\ y & =1,63-0,8x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2,6x & =2,21 \\ y & =1,63-0,8x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & =0,85 \\ y & =0,95 \end{cases}$$

Ainsi, le prix d'un croissant est 0,85 € et le prix d'un pain au chocolat est 0,95 €.

Corrigé exercice 4 :

La figure 1 est l'image de la figure de départ par une symétrie axiale.
La figure 2 est l'image de la figure de départ par une symétrie axiale.
La figure 3 est l'image de la figure de départ par une symétrie de centre A (ou rotation de centre A et d'angle π).
La figure 4 est l'image de la figure de départ par une translation.
La figure 5 est l'image de la figure de départ par homothétie de centre B et de rapport -2.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 5 :

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\pi$
$\cos(x)$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
$\sin(x)$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

Document sous licence libre Creative Commons

3 Activités

3.1 Corrigé activité A : Une facture de couture

Questions :

1. a. Le prix de fabrication d'une robe est $2,70\times 9,95+1,5\times 1,99+3\times 0,5 = 31,35$ €.
   Le prix de fabrication d'une chemise est $1,70\times 9,95+0,70\times 1,99+5\times 0,5 = 20,808 \approx 20,81$ €.
   Le prix de fabrication d'un jean est $1,50\times 9,95+0,5\times 1,99+1\times 0,5 = 16,42$ €.

   b. $T = \begin{pmatrix} 31,35 \\ 20,808 \\ 16,42 \end{pmatrix}$.

2. a. $N = \begin{pmatrix} 27 & 15 & 30 \\ 17 & 7 & 50 \\ 15 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

   b. La matrice N est composée des coefficients de la matrice M multipliés par 10. AInsi, on peut supposer que $N = 10 \times M$.

Bilan :

Pour multiplier une matrice par un nombre réel λ, on multiplie tous les coefficients de cette matrice par λ.
Pour multiplier une matrice M contenant trois lignes et trois colonnes par une matrice P contenant trois lignes et une colonne, on procède comme suit :

- pour calculer le premier coefficient de la matrice résultat, on prend la première ligne de M, on multiplie le coefficient de la première colonne de M par le coefficient de la première ligne de P, puis on multiplie le coefficient de la deuxième colonne de M par le coefficient de la deuxième ligne de P et enfin on multiplie le coefficient de la troisième colonne de M par le coefficient de la troisième ligne de P ;
- on réitère ce procédé pour chaque ligne de la matrice M.

3.2 Corrigé activité B : Un réseau social

Questions :

1. On obtient :

2. Il s'agit d'un graphe d'ordre 7 car il y a 7 sommets.

3. a. Les sommets Adeline et Bakary sont adjacents.
   Les sommets Adeline et Camille ne sont pas adjacents.
   b. Comme les sommets Adeline et Camille ne sont pas adjacents, ce graphe n'est pas complet.

4. a. Adeline-Élodie-Camille-Gabriel est une chaîne reliant Adeline et Gabriel de longueur 3.
   Adeline-Élodie-Damien-Gabriel est une chaîne reliant Adeline et Gabriel de longueur 3.
   b. La chaîne Farid-Adeline-Bakary-Damien-Élodie-Camille-Gabriel passe par tous les sommets du graphe, donc le graphe est connexe.

Bilan :

Si le graphe est complet, cela signifie que toutes les personnes sont amies les unes avec les autres sur ce réseau social.
Si le graphe est connexe, cela signifie que toutes les personnes peuvent contacter n'importe quelle autre personne, éventuellement avec des intermédiaires.

Document sous licence libre Creative Commons

3.3 Corrigé activité C : Voyage en train

Questions :

1.

	A	B	C	D	E
A	0	0	1	0	1
B	0	0	1	1	0
C	1	1	0	1	0
D	0	1	1	0	1
E	1	0	0	1	0

2. On a $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Il y a 2 chemins en 2 étapes pour aller de la ville D à la ville A : D-E-A et D-C-A. Cela correspond au coefficient de la quatrième ligne et première colonne de M^2.

4. Il y a 2 chemins en 3 étapes pour aller de la ville C à la ville D : C-A-E-D et C-B-C-D. Cela correspond au coefficient de la quatrième ligne et troisième colonne de M^3.

Bilan :

Il semble que le nombre de chemins de longueur k pour aller du i-ème au j-ième sommet du graphe est égal au coefficient de la i-ème ligne et la j-ième colonne de la matrice A^k.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 6 :

La matrice A est une matrice de taille 2×2 et la matrice B est une matrice de taille 1×2. Le produit $A \times B$ n'est donc pas défini, et donc le produit $A \times B \times C$ n'est pas défini non plus.

Réponse : d.

Corrigé exercice 7 :

La matrice B est une matrice de taille 1×2 et la matrice A une matrice de taille 2×2.
Le produit $B \times A$ est donc bien défini et correspond à une matrice de taille 1×2.
De plus, C est une matrice de taille 2×3.
Donc le produit $B \times A \times C$ existe et correspond à une matrice de taille 1×3.

Réponse : b.

Corrigé exercice 8 :

On a $\det(A) = 2 \times 3 - 1 \times 5 = 1$. Comme $\det(A) \neq 0$, la matrice A est inversible.
Grâce à la calculatrice, on trouve $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Réponse : d.

Corrigé exercice 9 :

La matrice A est une matrice de taille 2×2 et C est une matrice de taille 2×3.
Le produit $A \times C$ est donc bien défini et correspond à une matrice de taille 2×3.

Réponse : c.

Corrigé exercice 10 :

La matrice d'une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

La matrice d'une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ est $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

La matrice d'une rotation de centre O d'angle $\frac{4\pi}{3}$ est :

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{4\pi}{3} & -\sin\frac{4\pi}{3} \\ \sin\frac{4\pi}{3} & \cos\frac{4\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice d'une rotation de centre O d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ est :

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{-2\pi}{3} & -\sin\frac{-2\pi}{3} \\ \sin\frac{-2\pi}{3} & \cos\frac{-2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Réponses : c et d.

Corrigé exercice 11 :

On a $\det(A) = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$. Comme $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible et on a $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On a $A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = A^{-1}$. Donc l'inverse de A est A^2.

On a $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Réponses : b, c et d.

Corrigé exercice 12 :

B peut être la matrice d'adjacence d'un graphe car elle n'est composée que de 0 et de 1.
Numérotons les sommets de ce graphe de 1 à 4.
Les sommets 3 et 4 ne sont pas adjacents donc le graphe n'est pas complet.
On a $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq B$ et $B \times (-B) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \neq I_4$ donc $-B$ n'est pas l'inverse de la matrice B.

Réponse : a.

Corrigé exercice 13 :

On a $B^4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 & 6 \\ 6 & 11 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $4B^2 + 2B - I_4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 & 6 \\ 6 & 11 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.
Donc $B^4 = 4B^2 + 2B - I_4$.

Document sous licence libre Creative Commons

On a $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^4 - 4B^2 - 2B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Donc $B^{-1} \neq B^4 - 4B^2 - 2B$.

On a $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $-B^3 + 4B + 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $B^{-1} = -B^3 + 4B + 2I_4$.

On a $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 - 4B - 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $B^{-1} \neq B^3 - 4B - 2I_4$.

$\boxed{\text{Réponses : a et c.}}$

Corrigé exercice 14 :

1. Les sommets B et A, par exemple, ne sont pas adjacents donc le graphe n'est pas complet.

   La chaîne $B - R - T - A - C - H$ passe par tous les sommets donc le graphe est connexe

2. On a $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Le nombre de chemins de longueur 4 reliant le stand des BMX au stand des compteurs et GPS est donné par le coefficient de la deuxième ligne et de la troisième colonne de la matrice M^4.

On a $M^4 = \begin{pmatrix} 36 & 20 & 28 & 28 & 28 & 28 \\ 20 & 16 & 20 & 8 & 8 & 20 \\ 28 & 20 & 28 & 18 & 18 & 28 \\ 28 & 8 & 18 & 38 & 38 & 18 \\ 28 & 8 & 18 & 38 & 38 & 18 \\ 28 & 20 & 28 & 18 & 18 & 28 \end{pmatrix}$.

Donc il y a 20 chemins de longueur 4 reliant le stand des BMX au stand des compteurs et GPS.

Document sous licence libre Creative Commons

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1

Questions préliminaires :

1. Le premier point est $A_0(0;0)$.

   Dans le premier cas, $A_1(0;0)$, dans le second et dans le troisième cas, $A_1(0;1,6)$ et dans le quatrième cas, $A_1(0;0,44)$.

2. S'il existe un entier naturel n tel que $A_n(0,5;1)$, les coordonnées possibles de A_{n+1} sont :

   - dans le premier cas, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On obtient donc A_{n+1} ;
   - dans le second cas, $\begin{pmatrix} 0,85 & 0,04 \\ -0,04 & 0,85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix}$. On obtient donc A_{n+1} ;
   - dans le troisième cas, $\begin{pmatrix} 0,2 & -0,26 \\ 0,23 & 0,22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1,6 \end{pmatrix}$. On obtient donc A_{n+1} ;
   - dans le quatrième cas, $\begin{pmatrix} -0,15 & 0,28 \\ 0,26 & 0,24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,44 \end{pmatrix}$. On obtient donc A_{n+1}.

Méthode 1

Voir fichiers TICE.

Méthode 2

Voir fichiers TICE.

Document sous licence libre Creative Commons

5.2 Corrigé du TP 2

Questions préliminaires :

1. Les opérations successives sont :
   - multiplier la seconde ligne par 3 ;
   - retirer la ligne 1 à la ligne 2 ;
   - multiplier la seconde ligne $-\frac{1}{3}$;
   - retirer 9 fois la seconde ligne à la première ;
   - multiplier la première ligne par $\frac{1}{3}$.

   On obtient $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 3 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$ comme matrice inverse.

2. On ne peut pas retomber sur l'identité.

   Suite : Voir fichier TICE.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

6 Travailler les automatismes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 15 :

On obtient $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 16 :

On obtient $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 5 - 3 \times 3 \end{pmatrix} = 1$.

Corrigé exercice 17 :

On obtient $\begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 2 - 2 \times 4 & 4 \times (-5) - 2 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -26 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 18 :

Les sommets A et D ne sont pas adjacents donc le graphe n'est pas complet.
La chaîne $A - B - C - E - D - G - H - I - F$ passe par tous les sommets du graphe, donc il est connexe.

Corrigé exercice 19 :

Il y a 8 chemins de longueur 5 reliant le sommet 1 au sommet 3.

6.2 Exercices

Corrigé exercice 20 :

$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$

$A - B = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -11 \end{pmatrix}$

$2A = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$

$3B = \begin{pmatrix} 18 & -3 \\ 21 & 27 \end{pmatrix}$

$-2A + 3B = \begin{pmatrix} 24 & -11 \\ 11 & 31 \end{pmatrix}$

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 21 :

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 11 & 0,5 & -4 \\ -7,5 & 0,5 & 5,5 \end{pmatrix}$$
$$A-B=\begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -3 & -4,5 & 2 \\ 8,5 & -3,5 & 6,5 \end{pmatrix}$$
$$-2A=\begin{pmatrix} -6 & 4 & -4 \\ -8 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -12 \end{pmatrix}$$
$$3B=\begin{pmatrix} -3 & 9 & 12 \\ 21 & 7,5 & -9 \\ -24 & 6 & -1,5 \end{pmatrix}$$
$$2A-3B=\begin{pmatrix} 9 & -13 & -8 \\ -13 & -11,5 & 7 \\ 25 & -9 & 13,5 \end{pmatrix}$$

Corrigé exercice 22 :

a. On a $\begin{pmatrix} 1,5 & 3 \\ -2 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5\times 2+3\times 4 \\ -2\times 2+0,5\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b. On a $\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,5 & 3 \\ -2 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 8 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 23 :

1. • A est une matrice 2×1 et B une matrice 1×2. On peut donc calculer $A\times B$ et le résultat est une matrice 2×2.

   • A est une matrice 2×1 et C est une matrice 2×2. On ne peut donc pas calculer $A\times C$.

   • B est une matrice 1×2 et A est une matrice 2×1.On peut donc calculer $B\times A$ et le résultat est une matrice 1×1.

   • B est une matrice 1×2 et C est une matrice 2×2. On peut donc calculer $B\times C$ et le résultat est une matrice 1×2.

   • C est une matrice 2×2 et A est une matrice 2×1. On peut donc calculer $C\times A$ et le résultat est une matrice 2×1.

Document sous licence libre Creative Commons

• C est une matrice 2×2 et B est une matrice 1×2. On ne peut donc pas calculer $C \times B$.

• Puisque $A^2 = A \times A$, calculer A^2 revient à multiplier une matrice 2×1 par la même matrice 2×1, ce qui est impossible.

• On peut calculer $C^2 = C \times C$ car cela revient à multiplier une matrice 2×2 par la même matrice 2×2. Le résultat est une matrice 2×2.

• La matrice A est une matrice 2×1 et la matrice $B \times C$ est une matrice 1×2. On peut donc calculer $A \times (B \times C)$ et le résultat est une matrice 2×2.

2. $A \times B = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 \\ 1,5 & -1,5 \end{pmatrix}$
$B \times A = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}$
$B \times C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}$
$C \times A = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \end{pmatrix}$
$C^2 = \begin{pmatrix} -44 & 36 \\ -48 & -32 \end{pmatrix}$
$A \times (B \times C) = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$

Corrigé exercice 24 :

1. On a $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Il semble que pour tout entier naturel n non nul, $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P_n la proposition $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$. On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation : Pour $n = 1$:
$M^1 = M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que P_1 est vraie.
Hérédité : On considère un entier naturel $k \geqslant 1$ quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $M^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$.

Document sous licence libre Creative Commons

On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $M^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $M^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$.

D'où $M^{k+1} = M \times M^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion : Ainsi, P_1 est vraie et, si il existe un entier naturel non nul k tel que P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi.

Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie donc $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 25 :

1. On a $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Il semble que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $M^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Soit $n \geqslant 3$. On note P_n la proposition $M^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \geqslant 3$.

   Initialisation : Pour $n = 3$:

   $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que P_3 est vraie.

   Hérédité : On considère un entier naturel $k \geqslant 3$ quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $M^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $M^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par hypothèse de récurrence, on a $M^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'où $M^{k+1} = M^k \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Conclusion : Ainsi, P_3 est vraie et, si il existe $k \geqslant 3$ tel que P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi.

D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \geqslant 3$, P_n est vraie donc $M^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque : On a montré que $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \geqslant 3$, $M^n = M^{n-3} \times M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où le résultat sans utiliser la récurrence.

Corrigé exercice 26 :

a. On a $A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$B \times A = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc A et B sont inverses l'une de l'autre.

b. On a $A \times B = \dfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

$$B \times A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc A et B sont inverses l'une de l'autre.

Corrigé exercice 27 :

On a $\det(A) = 3 \times (-8) - 5 \times (-3) = -9$. Ainsi, $\det(A) \neq 0$. Donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{5}{9} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 28 :

1. On a $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix}$.
2. On a $\det(A) = 2 \times (-8) - 5 \times (-3) = -1$ donc $\det(A) \neq 0$ et A est alors inversible. La formule du cours nous permet de trouver $A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ et

   $$X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 159 \\ -61 \end{pmatrix}.$$

   Donc $\mathcal{S} = \{(159; -61)\}$.

Corrigé exercice 29 :

1. On a $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.
2. On a $\det(A) = 14$ donc $\det(A) \neq 0$ et A est inversible.

   La calculatrice nous permet de trouver $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et on a alors :

   $$X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{7} \\ \frac{30}{7} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Donc $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{20}{7}; \frac{30}{7}; 3\right)\right\}$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 30 :

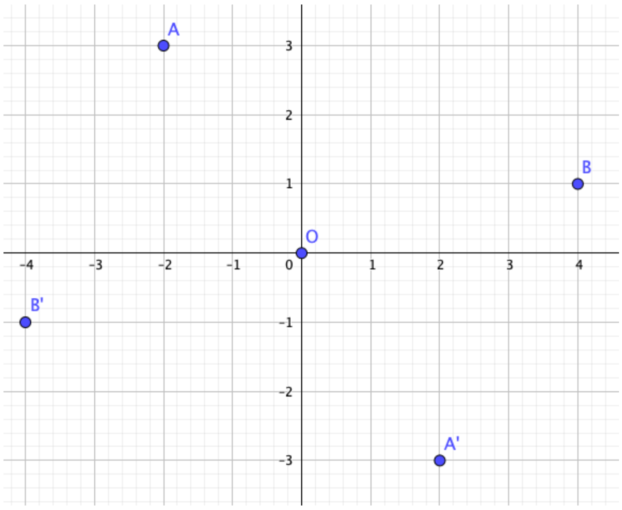
1. La matrice associée à une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses est :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
La matrice associée à une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées est :
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. La matrice associée à une rotation de centre O et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ est :
$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$
3. La matrice associée à une homothétie de centre O et de rapport -4 est $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 31 :

1. La matrice associée à r est $R = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2. a. On a $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc le point A' a pour coordonnées $(2; -3)$.
   On a $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc le point B' a pour coordonnées $(-4; -1)$.

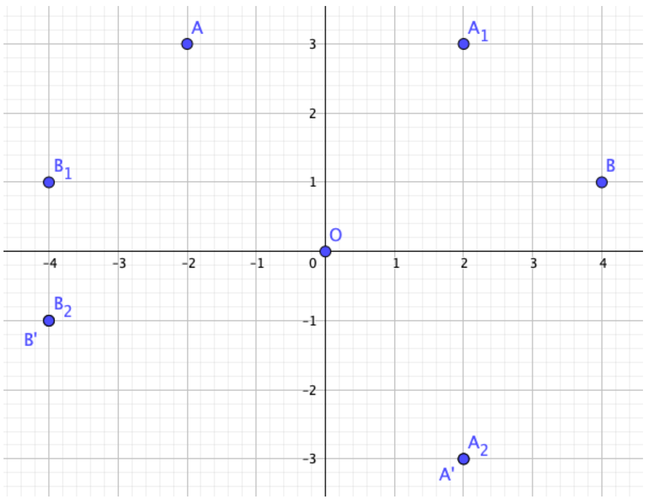
   b. On obtient :

BY NC SA



3. a. On le vérifie avec le graphique ci-dessus.

   b. On obtient :



La matrice associée à s_1 est $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et la matrice associée à s_2 est $S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Ainsi $s_1(s_2(A))$ a pour coordonnées $(2; -3)$ donc $s_1(s_2(A)) = A'$.

On a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $s_1(s_2(B))$ a pour coordonnées $(-4; -1)$ donc $s_1(s_2(B)) = B'$.

Corrigé exercice 32 :

a. Le graphe a 5 sommets donc son ordre est 5.

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	4	3	3	3	3

b. Le graphe a 5 sommets donc son ordre est 5.

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	4	4	4	4	4

c. Le graphe a 6 sommets donc son ordre est 6.

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	2	3	3	3	4	3

d. Le graphe a 6 sommets donc son ordre est 6.

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	5	5	5	5	5	5

Corrigé exercice 33 :

a. La chaîne A-B-C-D-E passe par tous les sommets du graphe, donc il est connexe.

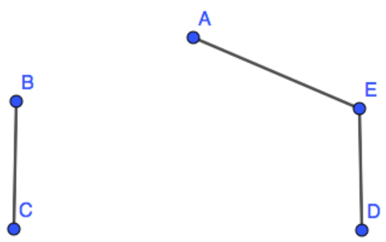
b. La chaîne A-B-C-D-E passe par tous les sommets du graphe, donc il est connexe.

c. La chaîne A-B-C-D-E-F passe par tous les sommets du graphe, donc il est connexe.

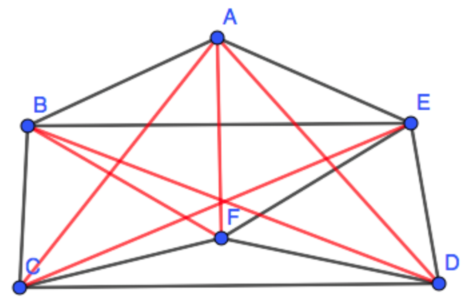
d. La chaîne A-B-C-D-E-F passe par tous les sommets du graphe, donc il est connexe.

Corrigé exercice 34 :

1. On obtient :



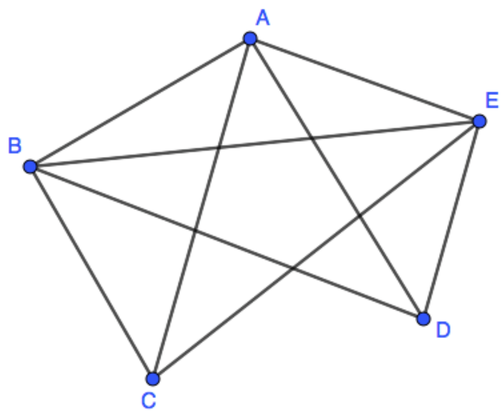
2. On obtient :



Corrigé exercice 35 :

1. C-E-B-A-F-A-C est une chaîne de longueur 6.
2. A-B-C-D et A-D-F-E sont deux chaînes de longueur 3.
   A-D-C-F-E-B-A-E est une chaîne de longueur 7.
3. B-C-D-E-A est une chaîne de longueur 4 reliant B à A.

Corrigé exercice 36 :



Corrigé exercice 37 :

a. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

BY NC SA

c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Corrigé exercice 38 :

1. On a $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   Le nombre de chemins de longueur 2 reliant les sommets n ° 3 et n ° 5 est donné par le coefficient de la troisième ligne et de la cinquième colonne. Il y en a donc 2.

2. En utilisant la matrice M^2, on observe que le nombre de chaînes de longueur 2 reliant les sommets n ° 1 et n ° 4 vaut également 2.

Corrigé exercice 39 :

1. On a $M^3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 & 9 & 3 \\ 5 & 8 & 10 & 12 & 5 \\ 8 & 10 & 8 & 12 & 8 \\ 9 & 12 & 12 & 16 & 9 \\ 3 & 5 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$.

   Le nombre de chemins de longueur 3 reliant le sommet n°2 au sommet n°5 est donné par le coefficient de la deuxième ligne et de la cinquième colonne. Il y en a donc 5.

2. Le nombre de chemins de longueur 3 reliant le sommet n°1 au sommet n°3 est donné par le coefficient de la première ligne et de la troisième colonne. Il y en a donc 8.

Document sous licence libre Creative Commons

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 40 :

1. Le système peut s'écrire $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. On a $\det(A) = 3$ donc $\det(A) \neq 0$ et A est ainsi inversible. La calculatrice nous permet de trouver $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -3 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 3 \end{pmatrix}$ et

$$X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -3 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{S} = \{(4; -2; -4)\}$.

Corrigé exercice 41 :

On a, d'une part, $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et, d'autre part :

$$2I_3 - A = 2 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a donc $A^2 = 2I_3 - A$, d'où $2I_3 = A^2 + A$ et ainsi $I_3 = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A = A\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_3\right)$.

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 42 :

On a $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme $A^4 = I_2$, alors on a $A \times A^3 = I_2$ et donc $A^{-1} = A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 43 :

1. Le coefficient 105 de la matrice P_1 donne le nombre de passager en direction de la Martinique pour la compagnie Air Pigeon.
2. a. On a $P_2 = \begin{pmatrix} 165 & 105 & 55 \\ 205 & 90 & 75 \end{pmatrix}$.

   b. On a $P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 345 & 225 & 125 \\ 425 & 195 & 165 \end{pmatrix}$.

   Cette matrice donne le nombre total de passagers sur les deux premières semaines d'octobre.
3. Augmenter une quantité de 10 % revient à la multiplier par $1 + \frac{10}{100} = 1,1$.

   On a donc $P_3 = 1,1 \times P_2 = \begin{pmatrix} 181 & 115 & 60 \\ 225 & 99 & 82 \end{pmatrix}$.
4. On a $P_4 = \begin{pmatrix} 217 & 138 & 72 \\ 281 & 123 & 102 \end{pmatrix}$.
5. a. On a $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \begin{pmatrix} 743 & 478 & 257 \\ 931 & 417 & 349 \end{pmatrix}$.

   b. Durant le mois d'octobre, parmi les voyageurs à destination de la Guadeloupe, 743 passagers ont pris un vol via la compagnie Air Tourterelle et 931 passagers ont voyagé avec Air Pigeon.

Corrigé exercice 44 :

1. a. On a $Q = \begin{pmatrix} 750 & 50 & 30 & 2000 \end{pmatrix}$.

   b. Le coût total de la commande est donné par le produit $Q \times P$.
2. a. Le coefficient 1 000 correspond aux 1 000 feutres commandés par le lycée Léonard de Vinci.

   Le coefficient 100 correspond aux 100 ramettes de feuilles A4 commandées par le lycée Jean Lurçat.

   b. On a $R \times P = \begin{pmatrix} 1191 \\ 1672 \\ 2608 \end{pmatrix}$.

   Donc la facture du lycée Jean Jaurès est de 1191 €, celle du lycée Léonard de Vinci est de 1672 € et celle du lycée Jean Lurçat est de 2608 €.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 45 :

1. $\begin{pmatrix} -1 & -5 & 7 \\ -5 & 5 & -2 \\ 4 & -6 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -5 & 3 & 14 \\ -7 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 12 \\ -10 & 8 & 12 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} -2 & -0,5 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}$

Corrigé exercice 46 :

1. A est non inversible si, et seulement si, $\det(A) = 0$.
   Or, $\det(A) = 2a - b$.
   Donc A n'est pas inversible lorsque $2a - b = 0$, c'est-à-dire $b = 2a$.

2. Si $A^{-1} = A$, alors $A \times A^{-1} = I_2$ donne $A^2 = I_2$.
   Or, $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b & a + 2 \\ ab + 2b & b + 4 \end{pmatrix}$.
   Ainsi, $\begin{cases} a + 2 & = 0 \\ b + 4 & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = -2 \\ b & = -3 \end{cases}$ et on a bien $a^2 + b = 1$ et $ab + 2b = 0$ (et $b \neq 2a$).
   Sous ces conditions, on a $A^2 = I_2$ et A inversible.

Corrigé exercice 47 :

1. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$.

2. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a :
   $A^{3n} = (A^3)^n = (-I_2)^n = (-1)^n I_2 = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$,
   $A^{3n+1} = A^{3n} \times A = (-1)^n I_2 \times A = (-1)^n A = \begin{pmatrix} 2 \times (-1)^n & 3 \times (-1)^n \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$ et
   $A^{3n+2} = A^{3n} \times A^2 = (-1)^n I_2 \times A^2 = (-1)^n A^2 = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times (-1)^n \\ (-1)^{n+1} & 2 \times (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 48 :

1. On a $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $A \times C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

   On a donc $A \times B = A \times C$.

2. Supposons par l'absurde que A est inversible.

   On aurait alors $A^{-1} \times A \times B = A^{-1} \times A \times C$.

   Or, $A^{-1} \times A \times B = I_3 \times B = B$ et $A^{-1} \times A \times C = I_3 \times C = C$.

   Ainsi, on aurait $B = C$. Comme $B \neq C$, on en déduit que A n'est pas inversible.

Corrigé exercice 49 :

1. a. On a $\det(A) = 3 \times 7 - 4 \times 5 = 1$. Or $\det(A) \neq 0$, donc A est inversible.

   b. On a $A \times A^{-1} = I_2$.

   Or, $A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 3a+4c & 3b+4d \\ 5a+7c & 5b+7d \end{pmatrix}$.

   D'où, par identification,

$$\begin{cases} 3a+4c &= 1 \\ 3b+4d &= 0 \\ 5a+7c &= 0 \\ 5b+7d &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+4c &= 1 \\ b &= -\frac{4}{3}d \\ a &= -\frac{7}{5}c \\ 5b+7d &= 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \times \left(-\frac{7}{5}c\right) + 4c &= 1 \\ b &= -\frac{4}{3}d \\ a &= -\frac{7}{5}c \\ 5 \times \left(-\frac{4}{3}d\right) + 7d &= 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c &= -5 \\ b &= -4 \\ a &= 7 \\ d &= 3 \end{cases}$$

   D'où $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

2. a. Le système s'écrit $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   Comme A est inversible, on a $X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Document sous licence libre Creative Commons

Donc $\mathcal{S} = \{(-2; 2)\}$.

b. Le système s'écrit $A^{-1}X = B'$ avec :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B' = \begin{pmatrix} -21 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Comme A^{-1} est inversible d'inverse A, on a alors :

$$X = A \times B' = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -21 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -191 \\ 138 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathcal{S} = \{(-191; 138)\}$.

Corrigé exercice 50 :

1. On a $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc A et B sont inverses l'une de l'autre.

2. a. Le système s'écrit $AX = C$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Comme A est inversible, on a alors :

$$X = A^{-1} \times C = B \times C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathcal{S} = \{(8; 7; -5)\}$.

b. Le système s'écrit $BX = C$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -7 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Comme B est inversible, on a alors :

$$X = B^{-1} \times C = A \times C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Donc $\mathcal{S} = \{(-4; 7; -5)\}$.

Corrigé exercice 51 :

1. 120 bouteilles d'eau et 180 sachets de biscuits coûtent $120x + 180y$ €.

   100 bouteilles d'eau et 190 sachets de biscuits coûtent $100x + 190y$ €.

   Ainsi, on obtient le système (S) : $\begin{cases} 120x + 180y & = 238,8 \\ 100x + 190y & = 238,2 \end{cases}$

2. (S) s'écrit $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 120 & 180 \\ 100 & 190 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 238,8 \\ 238,2 \end{pmatrix}$.

3. On a $\det(A) = 120 \times 190 - 180 \times 100 = 4800$. Comme $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible.

   On a $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{480} & -\frac{3}{80} \\ -\frac{1}{48} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}$.

   D'où $X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} \frac{19}{480} & -\frac{3}{80} \\ -\frac{1}{48} & \frac{1}{40} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 238,8 \\ 238,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,52 \\ 0,98 \end{pmatrix}$.

   Ainsi, une bouteille d'eau coûte 0,52 € et un sachet de biscuits coûte 0,98 €.

Corrigé exercice 52 :

1. $\begin{cases} 10a + 8b + 15c + 16d & = 211 \\ 17a + 12b + 7c + 11d & = 208 \\ 8a + 15b + 9c + 13d & = 206 \\ 12a + 7b + 14c + 10d & = 190 \end{cases}$

2. Le système s'écrit $AX = B$ avec :

   $A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 15 & 16 \\ 17 & 12 & 7 & 11 \\ 8 & 15 & 9 & 13 \\ 12 & 7 & 14 & 10 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 211 \\ 208 \\ 206 \\ 190 \end{pmatrix}$.

3. On a $\det(A) = -8159$. Comme $\det(A) \neq 0$ alors A est inversible.

   On a $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{100}{8159} & \frac{731}{8159} & -\frac{587}{8159} & \frac{119}{8159} \\ -\frac{988}{8159} & -\frac{284}{8159} & \frac{1054}{8159} & \frac{523}{8159} \\ -\frac{551}{8159} & -\frac{786}{8159} & \frac{274}{8159} & \frac{1390}{8159} \\ \frac{1583}{8159} & \frac{422}{8159} & -\frac{417}{8159} & -\frac{1639}{8159} \end{pmatrix}$ d'où :

Document sous licence libre Creative Commons

$$X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} -\frac{100}{8159} & \frac{731}{8159} & -\frac{587}{8159} & \frac{119}{8159} \\ -\frac{988}{8159} & -\frac{284}{8159} & \frac{1054}{8159} & \frac{523}{8159} \\ -\frac{551}{8159} & -\frac{786}{8159} & \frac{274}{8159} & \frac{1390}{8159} \\ \frac{1583}{8159} & \frac{422}{8159} & -\frac{417}{8159} & -\frac{1639}{8159} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 211 \\ 208 \\ 206 \\ 190 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le coefficient de français est 4, celui de maths est 6, celui d'anglais est 5 et celui de culture générale est 3.

Corrigé exercice 53 :

1. Comme $\mathcal{C}_f$ passe par l'origine du repère, on a $f(0) = 0$.

   Or, $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$ d'où $c = 0$.

   Comme $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(3; -2,25)$, on a $f(3) = -2,25$.

   Or, $f(3) = a \times 3^2 + b \times 3 + c = 9a + 3b + c$ d'où $9a + 3b + 0 = -2,25$.

   Comme la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A est horizontale, on a $f'(3) = 0$.

   Pour tout réel x, on a $f'(x) = 2ax + b$, d'où $f'(3) = 2a \times 3 + b = 6a + b$ et donc $6a + b = 0$.

2. On obtient alors le système $\begin{cases} 9a + 3b & = -2,25 \\ 6a + b & = 0 \end{cases}$.

3. Le système s'écrit $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2,25 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. On a $\det(A) = 9 \times 1 - 3 \times 6 = -9$. Comme $\det(A) \neq 0$, A est inversible. On a $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$ d'où$X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2,25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1,5 \end{pmatrix}$.

   Ainsi, pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de f, $f(x) = 0,25x^2 - 1,5x$.

Corrigé exercice 54 :

1. Comme le coût de fabrication de 4 milliers d'objets s'élève à 63 milliers d'euros, on a $C(4) = 63$.

   Or, $C(4) = a \times 4^2 + b \times 4 + c = 16a + 4b + c$, d'où $16a + 4b + c = 63$.

   Comme le coût de fabrication de 10 milliers d'objets s'élève à 165 milliers d'euros, on a $C(10) = 165$.

   Or, $C(10) = a \times 10^2 + b \times 10 + c = 100a + 10b + c$, d'où $100a + 10b + c = 165$.

   Comme le coût de fabrication de 20 milliers d'objets s'élève à 415 milliers d'euros, on a $C(20) = 415$.

   Or, $C(20) = a \times 20^2 + b \times 20 + c = 400a + 20b + c$, d'où $400a + 20b + c = 415$.

Document sous licence libre Creative Commons

Ainsi, on a bien le système $\begin{cases} 16a+4b+c & =63 \\ 100a+10b+c & =165 \\ 400a+20b+c & =415 \end{cases}$.

2. Le système s'écrit $AX=B$ avec $A=\begin{pmatrix} 16 & 4 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 63 \\ 165 \\ 415 \end{pmatrix}$.

3. On a $\det(A)=-960$. Comme $\det(A)\neq 0$ alors A est inversible. On a $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{96} & -\frac{1}{60} & \frac{1}{160} \\ -\frac{5}{16} & \frac{2}{5} & -\frac{7}{80} \\ \frac{25}{12} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ d'où $X=A^{-1}\times B=\begin{pmatrix} \frac{1}{96} & -\frac{1}{60} & \frac{1}{160} \\ -\frac{5}{16} & \frac{2}{5} & -\frac{7}{80} \\ \frac{25}{12} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 63 \\ 165 \\ 415 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$.
   Ainsi, on a $C(x)=0,5x^2+10x+15$

4. Le coût de fabrication de 30 milliers d'objets est $C(30)=0,5\times 30^2+10\times 30+15=765$, soit 765 milliers d'euros.

Corrigé exercice 55 :

1. On a $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$
   Donc cette matrice correspond à une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   Il s'agit donc de la figure b.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice associée à une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses.
   Il s'agit donc de la figure a.

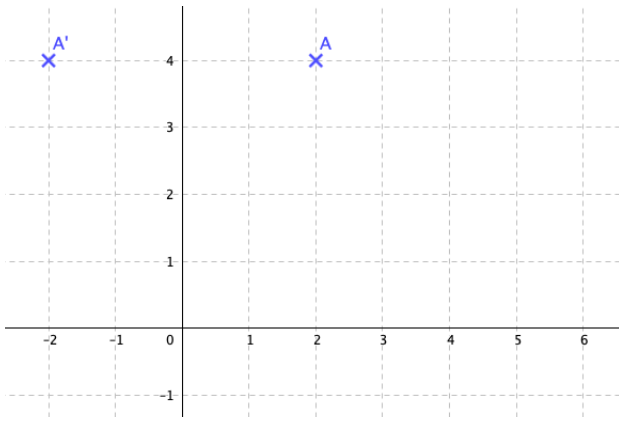
Corrigé exercice 56 :

1. La matrice associée à une homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$ est $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

2. La matrice associée à une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 57 :

1. a. On obtient :



Graphiquement, $A'(-2;4)$.

b. La matrice de transformation associée à la symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Donc les coordonnées de A' sont $(-2;4)$.

2. On a $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Donc les coordonnées de A'' sont $(-\sqrt{2};3\sqrt{2})$.

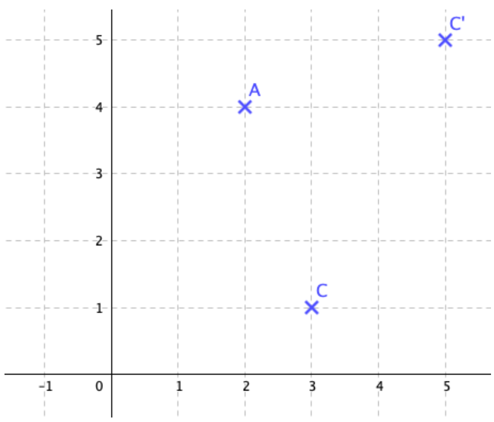
3. a. On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC} = 1\vec{i} - 3\vec{j}$.

Ainsi, dans le repère $(A;\vec{i},\vec{j})$, le point C a pour coordonnées $(1;-3)$.

Or $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc les coordonnées de C' dans le repère $(A;\vec{i},\vec{j})$ sont $(3;1)$. Après application de la translation de vecteur $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, on obtient pour coordonnées de $C''(5;5)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

b. On obtient :



Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 58 :

1. Soient A et B deux matrices de taille $n \times p$.
   Pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$.
   Donc on a bien $A + B = B + A$.
2. Soient A, B et C trois matrices de taille $n \times p$.
   Pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$.
   Donc on a bien $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Corrigé exercice 59 :

Soient M et M' deux matrices de taille $n \times p$.

1. Pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a $1 \times m_{ij} = m_{ij}$. Donc on a bien $1 \times M = M$.
2. Pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a $(\alpha + \beta)m_{ij} = \alpha m_{ij} + \beta m_{ij}$. Donc on a bien $(\alpha + \beta)M = \alpha M + \beta M$.
3. Pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a $\alpha(m_{ij} + m'_{ij}) = \alpha m_{ij} + \alpha m'_{ij}$. Donc on a bien $\alpha(M + M') = \alpha M + \alpha M'$.

Corrigé exercice 60 :

Question préliminaire

On a $A \times B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \det(A)I_2$ et $B \times A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \det(A)I_2$.

Donc on a $A \times B = B \times A = \det(A)I_2$.

Partie A

D'après la question précédente, on a :

$A \times \dfrac{1}{\det(A)}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ et $\dfrac{1}{\det(A)}B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}B = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Partie B

1. Comme A^{-1} existe et que $A^{-1} \times A = I_2$, on peut écrire $A^{-1} \times A \times B = B$
2. On a $A^{-1} \times (A \times B) = (A^{-1} \times A) \times B = B$ et $A^{-1} \times (A \times B) = A^{-1} \times 0_2 = 0_2$.
   D'où $B = 0_2$.
3. On a donc $a = b = c = d = 0$.

Document sous licence libre Creative Commons

4. Ainsi, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$ et la matrice A n'est donc pas inversible.

5. On a supposé que $\det(A) = 0$ et qu'il était alors impossible que A soit inversible.

   Donc, si $\det(A) = 0$, alors A n'est pas inversible. Autrement dit, si A est inversible alors $\det(A) \neq 0$.

Corrigé exercice 61 :

Supposons que B et C sont toutes les deux inverses de A.
Alors, par définition des inverses, $A \times B = A \times C = I_2$.
En multipliant à gauche par B, on obtient $B = C$, donc l'inverse d'une matrice, s'il existe, est unique.

Corrigé exercice 62 :

1. a. Soit i et j deux entiers compris entre 1 et n. On va calculer le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ième colonne de la matrice DD'.

   Ce coefficient vaut $\sum_{k=1}^{n} d_{i,k}d'_{k,j}$. Or, $d_{i,k}$ vaut 0 dès que $k \neq i$ et vaut d_i sinon.

   De même, $d'_{k,j}$ vaut 0 dès que $k \neq j$ et vaut d'_j sinon.

   En conclusion, si $i \neq j$, le coefficient cherché vaut 0 si $i \neq j$ et $d_i d'_i$ sinon.

   En raisonnant de manière similaire avec la matrice $D'D$, on obtient bien :

$$DD' = D'D = \text{Diag}(d_1d'_1; \ldots; d_nd'_n).$$

   b. En supposant les coefficients d_i non nuls, on pose $D' = \text{Diag}\left(\frac{1}{d_1}; \ldots; \frac{1}{d_n}\right)$. Avec la question précédente, on obtient que $DD' = D'D = \text{Diag}(1; ...; 1) = I_n$. Donc D' est l'inverse de D.

2. En raisonnant par l'absurde, supposons que d_1 soit nul et que M soit l'inverse de D. Alors la $i$ème ligne du produit DM sera composée uniquement de 0 et donc $DM \neq I_n$. Donc D n'est pas inversible.

Corrigé exercice 63 :

1. Pour tout entier naturel n, on a $J_n^2 = nJ_n$.

2. Supposons qu'il existe une matrice A telle que $J_n \times A = I_n$.

   On aurait ainsi $J_n \times (J_n \times A) = J_n \times I_n$ c'est-à-dire $J_n^2 \times A = J_n$.

   Or, $J_n^2 = nJ_n$ d'où $nJ_n \times A = J_n$ c'est-à-dire $nI_n = J_n$.

   Mais comme $J_n \neq nI_n$, on en déduit que la matrice J_n n'est pas inversible.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 64 :

1. Faux. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A + B$ n'existe pas.

2. Faux. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A \times 0_n = 0_n$.

3. Vrai.

4. Faux. Il existe certaines matrices vérifiant la commutativité. C'est notamment le cas lorsque A ou B est égale à l'identité.

Corrigé exercice 65 :

1. a. $(M - \lambda I_n)(M - \mu I_n) = M^2 - \mu M - \lambda M + \lambda\mu I_n$
$= \lambda^2 A + \mu^2 B - \mu(\lambda A + \mu B) - \lambda(\lambda A + \mu B) + \lambda\mu I_n$
$= \lambda^2 A + \mu^2 B - \lambda\mu A - \mu^2 B - \lambda^2 A - \lambda\mu B + \lambda\mu I_n$
$= \lambda\mu(I_n - A - B)$
$= \lambda\mu 0_n$
$= 0_n$
$(M - \mu I_n)(M - \lambda I_n) = M^2 - \lambda M - \mu M + \lambda\mu I_n$
$= \lambda^2 A + \mu^2 B - \lambda(\lambda A + \mu B) - \mu(\lambda A + \mu B) + \lambda\mu I_n$
$= \lambda^2 A + \mu^2 B - \lambda^2 A - \lambda\mu B - \lambda\mu A - \mu^2 B + \lambda\mu I_n$
$= \lambda\mu(I_n - A - B)$
$= \lambda\mu 0_n$
$= 0_n$

   b. $(M - \lambda I_n)(M - \mu I_n) = (\lambda A + \mu B - \lambda I_n)(\lambda A + \mu B - \mu I_n)$
$= (\lambda(A - I_n) + \mu B)(\lambda A + \mu(B - I_n))$
$= (-\lambda B + \mu B)(\lambda A - \mu A)$
$= (-\lambda + \mu)B \times (\lambda - \mu)A$
$= (-\lambda + \mu)(\lambda - \mu)BA$
$= -(\lambda - \mu)^2 BA$
$(M - \mu I_n)(M - \lambda I_n) = (\lambda A + \mu B - \mu I_n)(\lambda A + \mu B - \lambda I_n)$
$= (\lambda A + \mu(B - I_n))(\lambda(A - I_n) + \mu B)$
$= (\lambda A - \mu A)(-\lambda B + \mu B)$
$= (\lambda - \mu)A \times (-\lambda + \mu)B$
$= (\lambda - \mu)(-\lambda + \mu)AB$
$= -(\lambda - \mu)^2 AB$
Or, $(M - \lambda I_n)(M - \mu I_n) = (M - \mu I_n)(M - \lambda I_n)$ d'où $-(\lambda - \mu)^2 BA = -(\lambda - \mu)^2 AB$, c'est-à-dire, comme λ et μ sont distincts, $BA = AB$.
Aussi, comme $(M - \lambda I_n)(M - \mu I_n) = 0_n$ on en déduit que $-(\lambda - \mu)^2 BA = 0_n$.
Comme λ et μ sont distincts, on a $\lambda - \mu \neq 0$.

Document sous licence libre Creative Commons

D'où $BA = 0_n$ et alors, puisque $BA = AB$, on a $AB = 0_n$.
On a $M^2 = (\lambda A + \mu B)(\lambda A + \mu B) = \lambda^2 A^2 + \lambda\mu AB + \lambda\mu BA + \mu^2 B^2$.
Or, $AB = BA = 0_n$ d'où $M^2 = \lambda^2 A^2 + \mu^2 B^2$
$= \lambda^2 A^2 + \mu^2 (I_n - A)^2$
$= \lambda^2 A^2 + \mu^2 (I_n - 2A + A^2)$
$= \lambda^2 A^2 + \mu^2 I_n - 2\mu^2 A + \mu^2 A^2$
$= (\lambda^2 + \mu^2)A^2 - 2\mu^2 A + \mu^2 I_n$.
Or, $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B = \lambda^2 A + \mu^2(I_n - A) = \lambda^2 A - \mu^2 A + \mu^2 I_n$.
D'où $(\lambda^2 + \mu^2)A^2 - 2\mu^2 A + \mu^2 I_n = \lambda^2 A - \mu^2 A + \mu^2 I_n$.
Ce qui nous donne $\mu^2 A^2 - \mu^2 A = 0_n \Leftrightarrow \mu^2(A^2 - A) = 0_n$.
Or, comme $\mu \neq 0$, on a $A^2 - A = 0_n$, c'est-à-dire $A^2 = A$.
On montre de façon analogue que $B^2 = B$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. On note P_p la proposition $M^p = \lambda^p A + \mu^p B$. On souhaite démontrer que P_p est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$

   $M^0 = I_n$ et $\lambda^0 A + \mu^0 B = A + B = I_n$.

   On en déduit que P_0 est vraie.

   Hérédité : On considère un entier naturel $k \geqslant 0$ quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $M^k = \lambda^k A + \mu^k B$.

   On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $M^{k+1} = \lambda^{k+1} A + \mu^{k+1} B$.

   Par hypothèse de récurrence, on a $M^k = \lambda^k A + \mu^k B$.

   D'où $M^{k+1} = M \times M^k$

   $= (\lambda A + \mu B)(\lambda^k A + \mu^k B)$

   $= \lambda^{k+1} A^2 + \lambda\mu^k AB + \lambda^k \mu BA + \mu^{k+1} B^2$

   $= \lambda^{k+1} A + \mu^{k+1} B$ car $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $AB = BA = 0_n$

   Conclusion : Ainsi, P_0 est vraie et si il existe un entier naturel k tel que P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie également. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, P_p est vraie, et donc $M^p = \lambda^p A + \mu^p B$.

3. a. On a $\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} 3\lambda - 2\mu & -6\lambda + 6\mu \\ \lambda - \mu & -2\lambda + 3\mu \end{pmatrix}$.

   Ainsi, $M = \lambda A + \mu B \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu & = 3 \\ 3\lambda - 2\mu & = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda & = 2 \\ \mu & = -1 \end{cases}$ et on a alors bien $-6\lambda + 6\mu = -18$ et $-2\lambda + 3\mu = -7$. Dans ce cas, on a également $M^2 = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = 2^2 A + (-1)^2 B$.

b. Pour tout entier naturel p, on a $M^p = \lambda^p A + \mu^p B = \begin{pmatrix} 3\lambda^p - 2\mu^p & -6\lambda^p + 6\mu^p \\ \lambda^p - \mu^p & -2\lambda^p + 3\mu^p \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 3\times 2^p - 2\times(-1)^p & -6\times 2^p + 6\times(-1)^p \\ 2^p - (-1)^p & -2\times 2^p + 3\times(-1)^p \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 66 :

1. a. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix}$. D'où $A^2 = 9A - 18I_3$.

   b. On a donc $A^2 - 9A = 18I_3$, d'où $\frac{1}{18}(A^2 - 9A) = I_3$, c'est-à-dire $A \times \frac{1}{18}(A - 9I_3) = I_3$.
   Donc A est inversible et on a $A^{-1} = \frac{1}{18}(A - 9I_3) = \frac{1}{18}A - \frac{1}{2}I_3$.

   c. On a $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{-1}{18} & \frac{-1}{18} \\ \frac{-1}{18} & \frac{5}{18} & \frac{-1}{18} \\ \frac{-1}{18} & \frac{-1}{18} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}$.

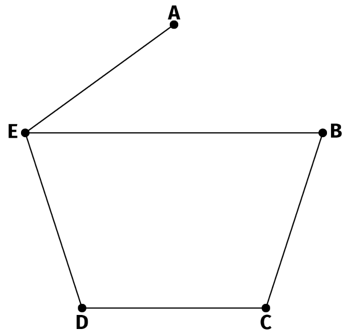
2. a. On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, d'où $(A - I_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   b. On a alors $(A - I_3)^3 = 0_n$.
   Or, $(A - I_3)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I_3$ car $A \times I_3 = I_3 \times A$, d'où $A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 = 0_n$.
   On a alors $A^3 - 3A^2 + 3A = I_3$ c'est-à-dire $A(A^2 - 3A + 3I_3) = I_3$.
   Donc A est inversible et $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

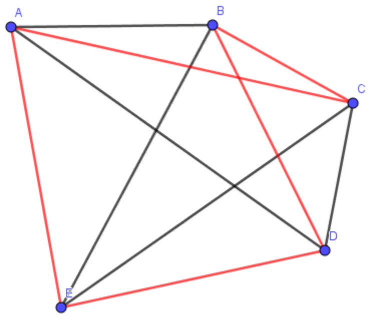
Document sous licence libre Creative Commons

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 67 :



Corrigé exercice 68 :



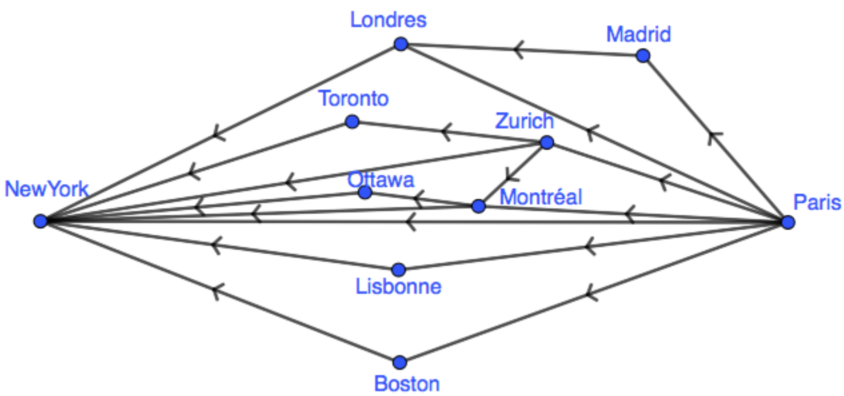
Corrigé exercice 69 :

La chaîne H-E-F-G-C-B-A-D-H passe par tous les sommets du graphe. Elle est de longueur 8 et c'est la longueur minimale pour franchir les 8 sommets et revenir au point de départ.

Corrigé exercice 71 :

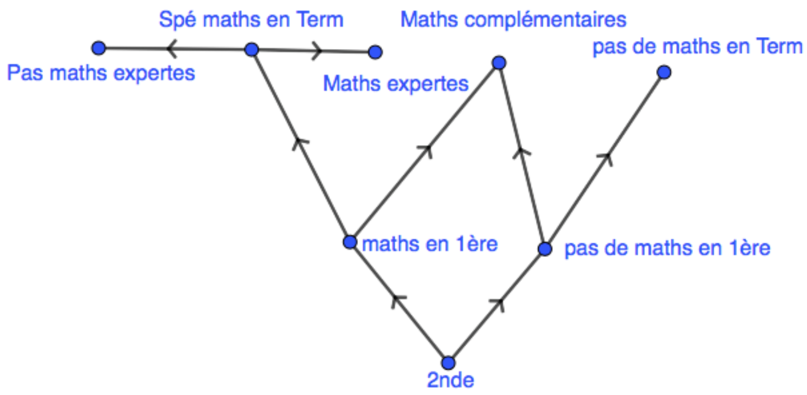
Numérotons les n sommets de 1 à n. Pour tout $k \in \{1; \ldots; n\}$, le sommet k doit être relié à tous les sommets différents de k, donc à $n-1$ sommets.
Ainsi, tous les sommets sont d'ordre $n-1$.

Corrigé exercice 71 :



BY NC SA

Corrigé exercice 72 :



Corrigé exercice 73 :

1. Chaque arête est comptée exactement deux fois lorsqu'on fait la somme des degrés, une fois pour chaque sommet.

2. a. Chaque sommet est adjacent aux 7 autres. Ainsi, le degré de chaque sommet vaut 7.

   Comme il y a 8 sommets, la somme des degrés s'élève à $8 \times 7 = 56$ et il y a donc en tout $\frac{8\times7}{2} = 28$ arêtes.

   b. Chaque sommet est adjacent aux 999 autres. Ainsi, le degré de chaque sommet vaut 999.

   Comme il y a 1000 sommets, il y a en tout $\frac{1000\times999}{2} = 499\,500$ arêtes.

3. On peut modéliser cette situation par un graphe donc les sommets représentent les différents joueurs et les arêtes représentent un match. Il y a donc 15 sommets sur ce graphe.

   Comme on souhaite que chaque joueur en affronte 5 autres, le degré de chacun des sommets est 5.

   Ainsi, la somme des degrés est égale à $15 \times 5 = 75$.

   Ce qui signifie que le graphe possède $\frac{75}{2} = 37,5$ arêtes, ce qui est impossible.

   Le tournoi ne peut donc pas être organisé de cette façon.

Corrigé exercice 74 :

1. Ce graphe est d'ordre 14.

2. a. Les sommets de plus haut degré sont A, B, C, O, P et Q. Ils sont de degré 3.

   b. Les sommets de plus faible degré sont I, S, N et V. Ils sont de degré 1.

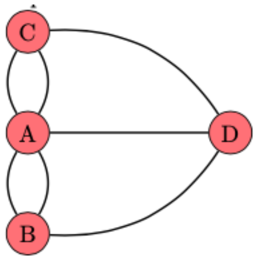
3. Les sommets L et E ne sont pas adjacents car ils ne sont pas reliés par une arête.

4. Ce graphe n'est donc pas complet.

BY NC SA

Corrigé exercice 75 :

1. On obtient :



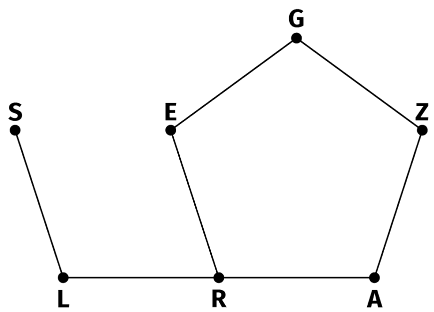
2. Les sommets B et C ne sont pas adjacents donc le graphe n'est pas complet.
3. La chaîne D-C-A-B passe par tous les sommets du graphe, donc il est connexe.

Corrigé exercice 76 :

1. Ce graphe est d'ordre 6.
2. a. Le sommet P est de degré 4.
   b. Le sommet M est de degré 2.
   c. Les sommets R et V sont de degré 3.
3. P et F sont des sommets adjacents.
   M et P sont des sommets qui ne sont pas adjacents.
4. Comme les sommets M et P ne sont pas adjacents, ce graphe n'est pas complet.

Corrigé exercice 77 :

1. En notant chaque sommet par la première lettre du nom de l'animal, on obtient le graphe :



2. Ce graphe est d'ordre 7.
3. Le sommet S est le sommet de plus petit degré (1).
4. Les sommets S et E ne sont pas adjacents donc ce graphe n'est pas complet.
5. La chaîne S-L-R-E-G-Z-A passe par tous les sommets du graphe, donc il est connexe.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

9 Exercices d'entraînement partie 3

Corrigé exercice 78 :

On a $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 79 :

1. On a $M^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

   Donc il y a 2 chaînes de longueur 2 reliant les sommets n ° 2 et n ° 3.

2. On a $M^3 = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 18 \\ 9 & 8 & 18 \\ 18 & 18 & 8 \end{pmatrix}$.

   Donc il y a 18 chaînes de longueur 3 reliant les sommets n ° 2 et n ° 3.

Corrigé exercice 80 :

On a $M^6 = (M^2)^3 = \begin{pmatrix} 6268 & 5409 & 2470 & 7521 \\ 11051 & 9564 & 4348 & 13290 \\ 13553 & 11666 & 5359 & 16259 \\ 2529 & 2174 & 1000 & 3035 \end{pmatrix}$.

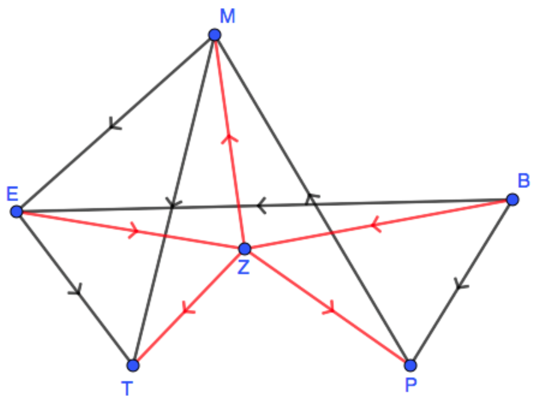
Il y a donc 4 348 chemins de longueur 6 reliant le sommet n ° 2 au sommet n ° 3.

Corrigé exercice 81 :

1. La chaîne B-P-M-E-T passe par tous les sommets du graphe.
2. La matrice d'adjacence associée à ce graphe est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Document sous licence libre Creative Commons

3. On a $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc il y a donc un seul chemin de longueur 3 reliant B à E.
4. On obtient :



Corrigé exercice 82 :

1. Ce graphe est d'ordre 9.
2. Les sommets H et G ne sont pas adjacents donc ce graphe n'est pas complet.
3. La chaîne D-M-H-R-B-V-G-L-J passe par tous les sommets du graphe, donc il est connexe.
4. La matrice d'adjacence de ce graphe est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 83 :

1. Les sommets P et C ne sont pas adjacents donc le graphe n'est pas complet.
   Cela signifie que toutes les gares ne sont pas directement reliées les unes aux autres.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

2. La matrice d'adjacence de ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On a $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 5 & 8 & 2 & 8 & 4 & 9 \\ 9 & 6 & 2 & 5 & 4 & 2 & 8 & 9 & 7 \\ 2 & 2 & 0 & 6 & 2 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 6 & 2 & 6 & 6 & 2 & 8 & 3 \\ 8 & 5 & 2 & 7 & 3 & 2 & 4 & 8 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 6 & 2 & 0 & 6 & 3 & 3 \\ 8 & 9 & 6 & 3 & 5 & 6 & 2 & 7 & 4 \\ 4 & 9 & 2 & 7 & 8 & 2 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$.

   Il existe donc 5 trajets de longueur 3 entre la gare B et la gare F.

Corrigé exercice 84 :

1. On a $M^1 = M$ qui est la matrice d'adjacence du graphe.

   Par définition, son coefficient de la i-ème ligne et de la j-ième colonne donne le nombre de chaînes de longueur 1 reliant le sommet i au sommet j.

2. a. On a $M^{p+1} = M^p \times M$.

      Ainsi, pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on a $c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} b_{i,\ell} a_{\ell,j}$.

   b. $b_{i,\ell}$ donne le nombre de chaînes de longueur p reliant les sommets i et ℓ.

      $a_{\ell,j}$ donne le nombre de chaînes de longueur 1 reliant les sommets ℓ et j.

   c. Pour tout $\ell \in \{1; \ldots; n\}$, $a_{\ell,j}$ vaut 1 si les sommets ℓ et j sont adjacents et 0 sinon. Ainsi, $b_{i,\ell} \times a_{\ell,j}$ vaut $b_{i,\ell}$ si les sommets ℓ et j sont adjacents et 0 sinon. Cela correspond au nombre de chaînes de longueur $p+1$ reliant le sommet i au sommet j pour lesquelles la dernière arête relie le sommet ℓ au sommet j.

      Ainsi, $\sum_{\ell=1}^{n} b_{i,\ell} a_{\ell,j}$ correspond au nombre de chaînes de longueur $p+1$ reliant le sommet i au sommet j.

Document sous licence libre Creative Commons

3. Ainsi, la propriété est vraie pour $k = 1$ et, si il existe un entier naturel non nul p quelconque tel que la propriété est vraie au rang p, alors elle est également vraie pour $p+1$. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la propriété est vraie. Ainsi, le terme de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de M^k donne le nombre de chemins de longueur k reliant le sommet i au sommet j.

Corrigé exercice 85 :

1. La matrice d'adjacence de ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a. Il y a 28 chemins de quatre étapes qui partent de E et qui reviennent à E.
   b. Il y a 2 chemins de quatre étapes qui partent de C et qui reviennent à I : C-B-A-D-I et C-B-E-D-I.
   c. D'après la matrice M^4, il n'est pas possible de joindre en quatre étapes les salles C et B.

Corrigé exercice 86 :

1. a. Il s'agit d'un graphe d'ordre 6.
   b. Les sommets P et M ne sont pas adjacents donc le graphe n'est pas complet.

2. a. $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   b. Le nombre de chemins qui vont de Paris à Marseille en 3 étapes est donné par le coefficient de la cinquième ligne et de la troisième colonne de G^3.
   Il vaut 5, donc il y a cinq chemins qui vont de Paris à Marseille en 3 étapes.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 87 :

On détermine la matrice d'adjacence de ce graphe (en classant les sommets par ordre alphabétique) : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a ainsi $M^4 = \begin{pmatrix} 17 & 11 & 8 & 16 & 11 & 8 \\ 11 & 16 & 4 & 11 & 14 & 7 \\ 8 & 4 & 7 & 8 & 7 & 2 \\ 16 & 11 & 8 & 17 & 11 & 8 \\ 11 & 14 & 7 & 11 & 16 & 4 \\ 8 & 7 & 2 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

D'après le coefficient de la première ligne et de la quatrième colonne, on trouve qu'il y a 16 chaînes allant de A à D.

Document sous licence libre Creative Commons

10 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 88 :

1. a. On a $P = H \times C = \begin{pmatrix} 610 \\ 420 \\ 770 \end{pmatrix}$.

   b. Les coefficients de la matrice P donnent le prix de revient de chaque modèle de planche de surf.

2. a. Le coût de revient pour le modèle 1 est $8a + 10b + 14c = 500$.
   Le coût de revient pour le modèle 2 est $6a + 6b + 10c = 350$.
   Le coût de revient pour le modèle 3 est $12a + 10b + 18c = 650$.
   Ainsi, a, b et c sont solutions du système $\begin{cases} 8a + 10b + 14c & = 500 \\ 6a + 6b + 10c & = 350 \\ 12a + 10b + 18c & = 650 \end{cases}$
   que l'on peut écrire $H \times X = B$ avec $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$.

   b. On a $\det(H) = 16$. Ainsi, $\det(H) \neq 0$, donc H est inversible.
   On a $H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$, d'où :
   $$X = H^{-1} \times B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 12,5 \\ 12,5 \end{pmatrix}.$$
   Ainsi $a = 25$, $b = 12,5$ et $c = 12,5$.

Corrigé exercice 89 :

1. On a $f(9) = 9$, d'où $81a + 9b + c = 9$.
   On a $f(11) = 20$, d'où $121a + 11b + c = 20$.
   On a $f(16) = 2$, d'où $256a + 16b + c = 2$.
   Ainsi, a, b et c sont solutions du système $\begin{cases} 81a + 9b + c & = 9 \\ 121a + 11b + c & = 20 \\ 256a + 16b + c & = 2 \end{cases}$.

2. Le système peut s'écrire $A \times X = B$ avec :

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

$$A = \begin{pmatrix} 81 & 9 & 1 \\ 121 & 11 & 1 \\ 256 & 16 & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(A) = -70$. Ainsi, $\det(A) \neq 0$, donc A est inversible.

On a $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{35} \\ -\frac{27}{14} & \frac{5}{2} & -\frac{4}{7} \\ \frac{88}{7} & -\frac{72}{5} & \frac{99}{35} \end{pmatrix}$, d'où :

$$X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{35} \\ -\frac{27}{14} & \frac{5}{2} & -\frac{4}{7} \\ \frac{88}{7} & -\frac{72}{5} & \frac{99}{35} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{10} \\ \frac{63}{2} \\ -\frac{846}{5} \end{pmatrix}.$$

3. Pour tout réel $x \in [9; 16]$, on a $f(x) = -\frac{13}{10}x^2 + \frac{63}{2}x - \frac{846}{5} = -1,3x^2 + 31,5x - 169,2$.
   Ainsi, l'attente est inférieure à 10 minutes lorsque $f(x) < 10$.
   Or, $f(x) < 10 \Leftrightarrow -1,3x^2 + 31,5x - 169,2 < 10 \Leftrightarrow -1,3x^2 + 31,5x - 179,2 < 0$.
   On a $\Delta = 31,5^2 - 4 \times (-1,3) \times (-179,2) = 60,41$.
   Comme $\Delta > 0$, le polynôme $-1,3x^2 + 31,5x - 179,2$ admet deux racines :
   $x = \dfrac{-31,5 - \sqrt{60,41}}{2 \times (-1,3)} \approx 15,1$ et $\dfrac{-31,5 + \sqrt{60,41}}{2 \times (1,3)} \approx 9,1$.
   Or, $f(x)$ est du signe de $-1,3$ à l'extérieur de ses racines, donc $f(x)$ est négatif sur $[9; 9,1]$ et sur $[15,1; 16]$.
   Comme $9,1$ h $= 9$ h 6 min et $15,1$ h $= 15$ h 6 min, alors l'attente peut être inférieure à dix minutes entre 9h et 9h06 puis entre 15h06 et 16h.

Corrigé exercice 90 :

Partie A

1. On a $M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.
2. On a
$$M^2 + 8M + 6I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & 8 \\ 32 & 16 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}.$$
3. Comme $M^2 + 8M + 6I_3 = M^3$, alors $6I_3 = M^3 - M^2 - 8M$ d'où :

$$I_3 = \frac{1}{6}\left(M^3 - M^2 - 8M\right) = \frac{1}{6}\left(M(M^2 - M - 8I_3)\right) = M \times \frac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I_3\right).$$

Comme $M \times \frac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I_3\right) = I_3$, on en déduit que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I_3\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Partie B

1. Comme la parabole passe par les points A, B et C, on a $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$ et $f(2) = 5$.

   Or, $f(1) = a \times 1^2 + b \times 1 + c = a + b + c$, $f(-1) = a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c = a - b + c$ et $f(2) = a \times 2^2 + b \times 2 + c = 4a + 2b + c$.

   D'où $a + b + c = 1$, $a - b + c = -1$ et $4a + 2b + c = 5$.

   Ainsi, a, b et c sont solutions du système $\begin{cases} a + b + c & = 1 \\ a - b + c & = -1 \\ 4a + 2b + c & = 5 \end{cases}$.

   Le système peut s'écrire $M \times X = B$ avec $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2. Comme M est inversible, le système admet une solution :

$$X = M^{-1} \times B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Donc $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$.

   Ainsi, $f(x) = x^2 + x - 1$.

Corrigé exercice 91 :

1. On a $\det(P) = 1 \times 3 - 2 \times (-1) = 5$. Comme $\det(P) \neq 0$ alors P est inversible.

   On a $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

2. On a $D = P^{-1} \times A \times P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Document sous licence libre Creative Commons

3. Comme $D = P^{-1} \times A \times P$ alors :
   $P \times D \times P^{-1} = P \times (P^{-1} \times A \times P) \times P^{-1}$
   $= (P \times P^{-1}) \times A \times (P \times P^{-1})$
   $= I_2 \times A \times I_2$
   $= A$

4. a. Il semble que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P_n la proposition $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$. On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Initialisation : Pour $n = 1$
   $D^1 = D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} (-1)^1 & 0 \\ 0 & 4^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. D'où $D^1 \begin{pmatrix} (-1)^1 & 0 \\ 0 & 4^1 \end{pmatrix}$.
   On en déduit que P_1 est vraie.
   Hérédité : On considère un entier naturel $k \geqslant 1$ quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix}$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $D^{k+1} = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 4^{k+1} \end{pmatrix}$.
   Par hypothèse de récurrence, on a $D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix}$.
   D'où $D^{k+1} = D \times D^k = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 4^{k+1} \end{pmatrix}$.
   Conclusion : Ainsi, P_1 est vraie et, si il existe un entier naturel non nul k tel que P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$.

5. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :
   $A^n = A \times A \times A \times \ldots \times A$
   $= (P \times D \times P^{-1}) \times (P \times D \times P^{-1}) \times \ldots \times (P \times D \times P^{-1})$
   $= P \times D \times (P^{-1} \times P) \times D \times (P^{-1} \times \ldots \times P) \times D \times P^{-1}$
   $= P \times D \times D \times \ldots \times D \times P^{-1}$
   $= P \times D^n \times P^{-1}$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 92 :

1. On a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}$.

2. On a $D = P^{-1} \times A \times P$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{30} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Comme $D = P^{-1} \times A \times P$ alors :

$P \times D \times P^{-1} = P \times (P^{-1} \times A \times P) \times P^{-1}$

$= (P \times P^{-1}) \times A \times (P \times P^{-1})$

$= I_3 \times A \times I_3$

$= A$

4. a. Il semble que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix}$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P_n la proposition $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix}$. On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Initialisation : Pour $n = 1$

   $D^1 = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

   D'où $D^1 = \begin{pmatrix} 1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^1 \end{pmatrix}$.

   On en déduit que P_1 est vraie.

Document sous licence libre Creative Commons

Hérédité : On considère un entier naturel $k \geqslant 1$ quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $D^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix}$.

On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que :
$D^{k+1} = \begin{pmatrix} 1^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^{k+1} \end{pmatrix}$.

Par hypothèse de récurrence, on a $D^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix}$. D'où :

$D^{k+1} = D \times D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^{k+1} \end{pmatrix}$

Conclusion : Ainsi, P_1 est vraie et, si il existe un entier naturel non nul k tel que P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix}$.

5. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :
   $A^n = A \times A \times A \times \ldots \times A$
   $= (P \times D \times P^{-1}) \times (P \times D \times P^{-1}) \times \ldots \times (P \times D \times P^{-1})$
   $= P \times D \times (P^{-1} \times P) \times D \times (P^{-1} \times \ldots \times P) \times D \times P^{-1}$
   $= P \times D \times D \times \ldots \times D \times P^{-1}$
   $= P \times D^n \times P^{-1}$

Corrigé exercice 93 :

1. Pour tout entier naturel n, on a $A^2 = (n-1)I_n + (n-2)A$.
2. On en déduit que $A^2 - (n-2)A = (n-1)I_n$ d'où $\frac{1}{n-1}\left(A^2 - (n-2)A\right) = I_n$, c'est-à-dire $A \times \frac{1}{n-1}\left(A - (n-2)I_n\right) = I_n$.

   Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{n-1}\left(A - (n-2)I_n\right) = \frac{1}{n-1}A - \frac{n-2}{n-1}I_n$.

   A^{-1} est donc la matrice dont tous les coefficients valent $\frac{1}{n-1}$ sauf les coefficients diagonaux qui valent

Corrigé exercice 94 :

Partie A

1. On a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

   Donc les coordonnées de O' sont $(a; b)$.

2. On a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a \\ b \end{pmatrix}$.
   Donc les coordonnées de I' sont $(1+a; b)$.
   On a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1+b \end{pmatrix}$.
   Donc les coordonnées de J' sont $(a; 1+b)$.

3. On a $\overrightarrow{O'I'}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{O'J'}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Or, $\overrightarrow{O'I'} \cdot \overrightarrow{O'J'} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$ et $\left\|\overrightarrow{O'I'}\right\| = \left\|\overrightarrow{O'I'}\right\| = 1$.

   Donc $\left(O'; \overrightarrow{O'I'}, \overrightarrow{O'J'}\right)$ définit un repère orthonormé du plan.

   Par ailleurs, $\overrightarrow{O'I'} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{O'J'} = \overrightarrow{OJ}$ donc $(\overrightarrow{O'I'}; \overrightarrow{O'J'}) = (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

   En conclusion, $\left(O'; \overrightarrow{O'I'}, \overrightarrow{O'J'}\right)$ définit bien un repère orthonormé direct du plan.

4. On a $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}$.
   Or, $\overrightarrow{O'O} = -\overrightarrow{t} = -a\overrightarrow{OI} - b\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$.
   Comme $\overrightarrow{O'I'} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{O'J'} = \overrightarrow{OJ}$, on a alors $\overrightarrow{O'M} = (x-a)\overrightarrow{OI'} + (y-b)\overrightarrow{OJ'}$.
   Ainsi, les coordonnées du point M dans le repère $\left(O'; \overrightarrow{OI'}; \overrightarrow{OJ'}\right)$ sont $(x-a; y-b)$.

5. On a $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'}$.
   Or, $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{t} = a\overrightarrow{OI} + b\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{O'M'} = x\overrightarrow{O'I'} + y\overrightarrow{O'J'}$.
   Comme $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{O'I'}$ et $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{O'J'}$, on a alors $\overrightarrow{OM'} = (x+a)\overrightarrow{OI} + (y+b)\overrightarrow{OJ}$.
   Ainsi, les coordonnées du point M' dans le repère $\left(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ sont $(x+a; y+b)$.

Partie B

1. On a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Donc les coordonnées de O' sont $(0; 0)$.

Document sous licence libre Creative Commons

2. On a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$.
   Donc les coordonnées de I' sont $(a; c)$.
   On a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.
   Donc les coordonnées de J' sont $(b; d)$.

3. a. Les vecteurs $\overrightarrow{O'I'}$ et $\overrightarrow{O'J'}$ définissent un repère du plan si, et seulement si, ils ne sont pas colinéaires.
   Or, on a $\overrightarrow{O'I'}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{O'J'}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.
   Ainsi $\overrightarrow{O'I'}$ et $\overrightarrow{O'J'}$ ne sont pas colinéaires $\Leftrightarrow$ det $\left(\overrightarrow{O'I'}; \overrightarrow{O'J'}\right) \neq 0 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$.
   b. On a $ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow \det(T) \neq 0 \Leftrightarrow T$ est inversible.

4. a. On a $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}$.
   Or, $\overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$.
   D'où $\overrightarrow{O'M} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$.
   Aussi, on a $\overrightarrow{O'I'} = a\overrightarrow{OI} + c\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{O'J'} = b\overrightarrow{OI} + d\overrightarrow{OJ}$.
   D'où $\overrightarrow{OI} = \frac{d}{ad-bc}\overrightarrow{O'I'} - \frac{c}{ad-bc}\overrightarrow{O'J'}$ et $\overrightarrow{OJ} = \frac{-b}{ad-bc}\overrightarrow{O'I'} + \frac{a}{ad-bc}\overrightarrow{O'J'}$.
   On a alors :
   $\overrightarrow{O'M} = x\left(\frac{d}{ad-bc}\overrightarrow{O'I'} - \frac{c}{ad-bc}\overrightarrow{O'J'}\right) + y\left(\frac{-b}{ad-bc}\overrightarrow{O'I'} + \frac{a}{ad-bc}\overrightarrow{O'J'}\right)$
   $= \left(\frac{xd-yb}{ad-bc}\right)\overrightarrow{O'I'} + \left(\frac{ay-xc}{ad-bc}\right)\overrightarrow{O'J'}$
   Donc les coordonnées du point M dans le repère $\left(O; \overrightarrow{OI'}; \overrightarrow{OJ'}\right)$ sont :
   $$\left(\frac{xd-yb}{ad-bc}; \frac{ay-xc}{ad-bc}\right).$$
   Remarque : On remarque que sous la condition de la question 3., T est inversible et $T^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Le calcul donne $T^{-1} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} xd - yb \\ ay - xc \end{pmatrix}$ ce qui correspond aux coordonnées obtenues.
   b. On a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax' + by' \\ cx' + dy' \end{pmatrix}$. Donc les coordonnées de M dans le repère (O, I, J) sont $M(ax' + by'; cx' + dy')$.

Corrigé exercice 95 :

Partie A

1. a. $B^2 = B \times B = \begin{pmatrix} -26 & 70 \\ -21 & 51 \end{pmatrix} = A$.

b. $\begin{pmatrix} -38 & 70 \\ -21 & 39 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -38 & 70 \\ -21 & 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & 70 \\ -21 & 51 \end{pmatrix} = A.$

$\begin{pmatrix} 38 & -70 \\ 21 & -39 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 38 & -70 \\ 21 & -39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & 70 \\ -21 & 51 \end{pmatrix} = A.$

$\begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & 70 \\ -21 & 51 \end{pmatrix} = A.$

2. On a bien $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^2 = I_2.$

Partie B

1. On a $\begin{pmatrix} \sqrt{x} & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{x} & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = D.$

2. a. On a $R^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}.$

Ainsi, $R^2 = D \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc = x \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ bc+d^2 = y \end{cases}$

b. Supposons, par exemple, que $b \neq 0$. On a alors $b(a+d) = 0 \Leftrightarrow a+d = 0 \Leftrightarrow a = -d$.

D'où $\begin{cases} d^2+bc = x \\ a = -d \\ bc+d^2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d^2 = x - bc \\ a = -d \\ d^2 = y - bc \end{cases}.$

On obtient alors $x = d^2 + bc = y$, ce qui est absurde car x et y sont supposés distincts. Donc b et c sont nuls.

c. Comme b et c sont nuls, on a alors $\begin{cases} a^2+bc = x \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ bc+d^2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = x \\ d^2 = y \end{cases}.$

Ainsi, $R = \begin{pmatrix} \sqrt{x} & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix}$ ou $R = \begin{pmatrix} -\sqrt{x} & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix}$ ou $R = \begin{pmatrix} \sqrt{x} & 0 \\ 0 & -\sqrt{y} \end{pmatrix}$ ou $R = \begin{pmatrix} -\sqrt{x} & 0 \\ 0 & -\sqrt{y} \end{pmatrix}.$

d. On a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est une racine carrée de la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Or, on remarque que la matrice n'est pas de la forme $\begin{pmatrix} \pm\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Donc si x et y sont égaux, alors il peut y avoir d'autres racines carrées que celles citées ci-dessus.

Partie C

1. On a $(PRP^{-1})^2 = PRP^{-1} \times PRP^{-1}$
$= PR(P^{-1}P)RP^{-1}$
$= PR \times RP^{-1}$
$= PR^2P^{-1}$
$= PCP^{-1}$

2. a. On a $\det(P) = 2 \times 3 - 5 \times 1 = 1$.
Comme $\det(P) \neq 0$, P est inversible.
On a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b. On a $P \times \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \times P^{-1} = \begin{pmatrix} -21 & 50 \\ -15 & 34 \end{pmatrix} = C$.

c. D'après la partie précédente, les racines carrées de la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ sont exactement $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

d. Les racines carrées de la matrice C sont :
$P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$,
$P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} -27 & 50 \\ -15 & 28 \end{pmatrix}$,
$P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 27 & -50 \\ 15 & -28 \end{pmatrix}$ et
$P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 3 & -28 \end{pmatrix}$.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 96 :

1. On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et
   $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Le trajet « gauche-droite-gauche » correspond à la matrice $I \times G \times D \times G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, ce qui nous donne la fraction $\frac{2+1}{3+2} = \frac{3}{5}$.

3. a. On a $d(a+c) - c(b+d) = ad + cd - bc - cd = ad - bc$.
   Ainsi, si $ad - bc = 1$ alors $d(a+c) - c(b+d) = 1$.

   b. On a $M \times G = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix}$.
   Ainsi, $\Delta_{M \times G} = d(a+b) - c(b+d)$.
   Donc, si $\Delta_M = 1$, alors $\Delta_{M \times G} = 1$ d'après la question 3. a.

4. Il s'agit d'une application du théorème de Bézout à $a+c$ et $b+d$. Ces entiers étant premiers entre eux, la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est irréductible.

5. a.

Affichage		Gauche	Droite	Gauche	Gauche
m	4	4	1	1	1
n	7	3	3	2	1

   b. On peut supposer que l'algorithme fournit le chemin à suivre à partir de la matrice I pour obtenir une fraction $\frac{m}{n}$ donnée. Par exemple, pour obtenir la fraction associée $\frac{4}{7}$, il faut suivre le chemin « gauche - droite - gauche - gauche ».
   En effet, $I \times G \times D \times G \times G = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, ce qui nous donne la fraction $\frac{3+1}{5+2} = \frac{4}{7}$.

Corrigé exercice 97 :

Partie A

1. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
   $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $\varepsilon(\sigma_1) = \frac{1-2}{1-2} \times \frac{1-3}{1-3} \times \frac{2-3}{2-3} = \frac{-1}{-1} \times \frac{-2}{-2} \times \frac{-1}{-1} = 1$
$\varepsilon(\sigma_2) = \frac{1-3}{1-2} \times \frac{1-2}{1-3} \times \frac{3-2}{2-3} = \frac{-2}{-1} \times \frac{-1}{-2} \times \frac{1}{-1} = -1$
$\varepsilon(\sigma_3) = \frac{2-1}{1-2} \times \frac{2-3}{1-3} \times \frac{1-3}{2-3} = \frac{1}{-1} \times \frac{-1}{-2} \times \frac{-2}{-1} = -1$
$\varepsilon(\sigma_4) = \frac{3-1}{1-2} \times \frac{3-2}{1-3} \times \frac{1-2}{2-3} = \frac{2}{-1} \times \frac{1}{-2} \times \frac{-1}{-1} = 1$
$\varepsilon(\sigma_5) = \frac{2-3}{1-2} \times \frac{2-1}{1-3} \times \frac{3-1}{2-3} = \frac{-1}{-1} \times \frac{1}{-2} \times \frac{2}{-1} = 1$
$\varepsilon(\sigma_6) = \frac{3-2}{1-2} \times \frac{3-1}{1-3} \times \frac{2-1}{2-3} = \frac{1}{-1} \times \frac{2}{-2} \times \frac{1}{-1} = -1$

Partie B

1. a. $\det(M) = \sum_{k=1}^{6} \varepsilon(\sigma_k) \times a_{\sigma_k(1),1} \times a_{\sigma_k(2),2} \times a_{\sigma_k(3),3}$
$= \varepsilon(\sigma_1) \times a_{\sigma_1(1),1} \times a_{\sigma_1(2),2} \times a_{\sigma_1(3),3} + \varepsilon(\sigma_2) \times a_{\sigma_2(1),1} \times a_{\sigma_2(2),2} \times a_{\sigma_2(3),3}\varepsilon(\sigma_3) \times a_{\sigma_3(1),1} \times a_{\sigma_3(2),2} \times a_{\sigma_3(3),3}\varepsilon(\sigma_4) \times a_{\sigma_4(1),1} \times a_{\sigma_4(2),2} \times a_{\sigma_4(3),3}\varepsilon(\sigma_5) \times a_{\sigma_5(1),1} \times a_{\sigma_5(2),2} \times a_{\sigma_5(3),3}\varepsilon(\sigma_6) \times a_{\sigma_6(1),1} \times a_{\sigma_6(2),2} \times a_{\sigma_6(3),3}$
$= 1 \times a_{1,1} \times a_{2,2} \times a_{3,3} - 1 \times a_{1,1} \times a_{3,2} \times a_{2,3} - 1 \times a_{2,1} \times a_{1,2} \times a_{3,3} + 1 \times a_{3,1} \times a_{1,2} \times a_{2,3} + 1 \times a_{2,1} \times a_{3,2} \times a_{1,3} - 1 \times a_{3,1} \times a_{2,2} \times a_{1,3}$
$= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$

b. On a $\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -6 \\ 2 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$
$= 5 \times (-4) \times 8 + 2 \times 0 \times (-6) + 0 \times -3 \times 7 - (-6) \times (-4) \times 0 - 7 \times 0 \times 5 - 8 \times (-3) \times 2$
$= -160 + 48$
$= -112$

et $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 4 \times 2 + 2 \times 6 \times 3 + 4 \times 5 \times 7 - 3 \times 4 \times 4 - 7 \times 6 \times 1 - 2 \times 5 \times 2$
$= 8 + 140 + 36 - 48 - 42 - 20 = 74$

c. On a $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = yz^2 + xy^2 + zx^2 - xz^2 - yx^2 - zy^2$

et $(z-y)(z-x)(y-x) = (z-y)(yz-xz-xy+x^2) = yz^2-xz^2-xyz+zx^2-zy^2+xyz+xy^2-yx^2$.

Donc on a bien $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (z-y)(z-x)(y-x)$.

2. a. On a $a \times \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \times \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a(ei-fh)-b(di-fg)+c(dh-eg)$
$= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$
$= \det(M)$

b. D'après la question 2. a, on a $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} d & e \\ 0 & f \end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix} 0 & e \\ 0 & f \end{vmatrix} + c \times \begin{vmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$
$a(df-0)-b(0-0)+c(0-0) = adf$.

Corrigé exercice 98 :

1. On a $f(-5) = 6$ d'où $a \times (-5)^3 + b \times (-5)^2 + c \times (-5) + d = 6$ c'est-à-dire $-125a + 25b - 5c + d = 6$.

   On a $f(-1) = 3$ d'où $a \times (-1)^3 + b \times (-1)^2 + c \times (-1) + d = 3$ c'est-à-dire $-a+b-c+d = 3$.

   On a $f(2) = 4$ d'où $a \times 2^3 + b \times 2^2 + c \times 2 + d = 4$ c'est-à-dire $8a+4b+2c+d = 4$.

   On a $f(5) = -2$ d'où $a \times 5^3 + b \times 5^2 + c \times 5 + d = -2$ c'est-à-dire $125a + 25b + 5c + d = 2$.

   Ainsi, a, b, c et d sont solutions du système $\begin{cases} -125a + 25b - 5c + d & = 6 \\ -a + b - c + d & = 3 \\ 8a + 4b + 2c + d & = 4 \\ 125a + 25b + 5c + d & = 2 \end{cases}$.

2. Le système (S) peut s'écrire sous la forme $M \times X = P$ avec :

   $M = \begin{pmatrix} -125 & 25 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 125 & 25 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. On a $M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{280} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{63} & \frac{1}{180} \\ \frac{3}{140} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{63} & \frac{1}{45} \\ -\frac{3}{280} & -\frac{25}{72} & \frac{25}{63} & -\frac{7}{180} \\ -\frac{1}{28} & \frac{25}{36} & \frac{25}{63} & -\frac{1}{18} \end{pmatrix}$

Document sous licence libre Creative Commons

4. Le système admet une unique solution : $M^{-1} \times P = \begin{pmatrix} -\frac{9}{280} \\ \frac{11}{420} \\ \frac{113}{280} \\ \frac{281}{84} \end{pmatrix}$. Ainsi, $\begin{cases} a & = -\frac{9}{280} \\ b & = \frac{11}{420} \\ c & = \frac{113}{280} \\ d & = \frac{281}{84} \end{cases}$.

Corrigé exercice 99 :

Partie A

1. En parcourant cette chaîne, on arrive à un sommet par une arête et on en repart par une autre, sauf éventuellement pour les extrémités.

   Ainsi, tous les sommets sont de degré pair, sauf éventuellement le premier et le dernier s'ils ne sont pas confondus.

2. Aussi, comme la chaîne est eulérienne, chaque arête est parcourue exactement une fois. Donc si la chaîne est passée k fois par un sommet, elle y est ressorti k fois également. Ainsi, le sommet considéré est de degré $2k$.

3. On considère le sommet formant le "début" de la chaîne. Si la chaîne est sortie k fois de ce sommet, alors elle est rentrée $k-1$ fois dans ce sommet. Le sommet est alors de degré $2k-1$. On raisonne de la même manière pour le sommet formant la "fin" de la chaîne (on entre k fois et on ne ressort que $k-1$ fois).

4. Donc, si une chaîne eulérienne existe alors tous les sommets du graphe sont de degré pair, sauf éventuellement deux qui constituent alors les extrémités de la chaîne.

Partie B

Condition nécessaire : Supposons qu'un cycle eulérien existe. En le parcourant, on on arrive à un sommet par une arête et on en repart par une autre. Ainsi, tous les sommets sont de degré pair.

Condition suffisante : Si tous les sommets du graphe sont de degré pair, alors il existe une chaîne eulérienne. Or, les extrémités de cette chaîne étant de degré pair, on en déduit que les extrémités sont confondues et donc que cette chaîne est un cycle qui passe exactement une fois par toutes les arêtes du graphe. Il s'agit donc d'un cycle eulérien.

Partie C

a. Le graphe est connexe.

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	4	4	4	4	4

Ce graphe n'a que des sommets de degré pair.

D'après le théorème d'Euler, ce graphe est eulérien et il admet un cycle eulérienne.

A-B-C-D-E-A-D-B-E-C-A est un cycle eulérien.

b. Le graphe est connexe.

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	4	4	4	4	4	4

Ce graphe n'a que des sommets de degré pair.

D'après le théorème d'Euler, ce graphe est eulérien et il admet un cycle eulérienne.

Considérons le cycle A-B-C-D-E-F-A. On insère le cycle A-C-E-A et le cycle D-B-F-D.

Ainsi, A-C-E-A-B-C-D-B-F-D-E-F-A est un cycle eulérien.

c. Le graphe est connexe

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	I	J	K	R
Degré	4	4	2	2	4	2	4	4	2	4	4

Ce graphe n'a que des sommets de degré pair.

D'après le théorème d'Euler, ce graphe est eulérien et il admet un cycle eulérienne.

Considérons le cycle A-B-E-A. On insère les cycles B-C-D-B, A-G-J-K-A et E-I-F-R-I-K-G-R-E.

Ainsi, A-G-J-K-A-B-C-D-B-E-I-F-R-I-K-G-R-E-A est un cycle eulérien.

d. Le graphe est connexe.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Degré	4	2	4	4	4	4	2	2	3	4	3

Ce graphe n'a que des sommets de degré pair, sauf deux.

D'après le théorème d'Euler, ce graphe est eulérien mais n'admet pas de cycle eulérien : seulement une chaîne eulérienne.

Partie D

1. La chaîne P-A-E-C-B-D-F-G est un itinéraire qui relie le parking à la gare en desservant une et une seule fois tous les sites.

2. Le graphe est connexe.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	P
Degré	3	4	3	5	5	2	3	3

On compte six sommets de degré impair. D'après le théorème d'Euler, il n'existe pas de tel chemin.

Corrigé exercice 100 :

Partie A

Document sous licence libre Creative Commons

- Soit $\mathcal{G}$ un graphe et Δ le degré maximum de ses sommets.

  Un sommet S de $\mathcal{G}$ est adjacent à, au plus, Δ sommets, donc le nombre de couleurs nécessaires pour colorer ces sommets est inférieur ou égal à Δ. Comme il faut une couleur de plus pour le sommet S, on en déduit que $\gamma \leqslant \Delta + 1$.

- Soit $\mathcal{G}$ un graphe. On note $\mathcal{G}'$ le plus grand sous-graphe complet de $\mathcal{G}$. On suppose que $\mathcal{G}'$ est d'ordre m.

  Il faut donc exactement m couleurs pour colorier $\mathcal{G}'$, d'où $\gamma \geqslant m$.

On a donc $m \leqslant \gamma \leqslant \Delta$.

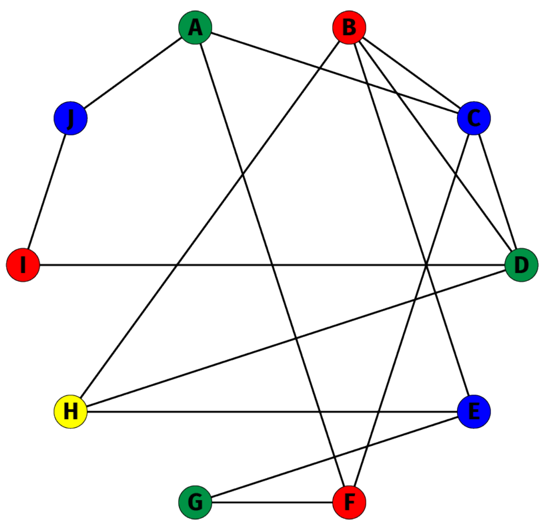
Partie B

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Degré	3	4	4	4	3	3	2	3	2	2

- Ainsi, la liste des sommets par ordre décroissant de degré est : B, C, D, A, E, F, H, G, I et J.

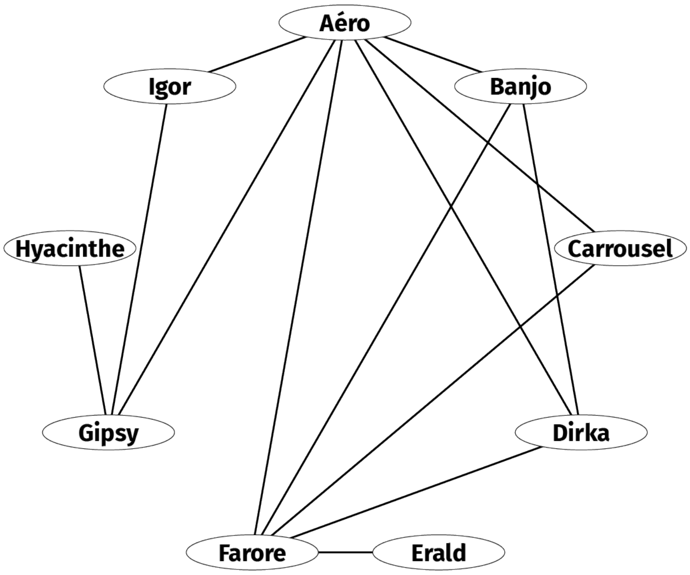
  On attribue donc une première couleur au sommet B.

- On attribue cette même couleur aux sommets F et I.
- On attribue une deuxième couleur au sommet C.
- On attribue cette même couleur aux sommets E et J.
- On attribue une troisième couleur au sommet D.
- On attribue cette même couleur aux sommets G et A.
- Enfin, on attribue une quatrième couleur au sommet H.



Partie C

1. On obtient :



2. La chaîne Hyacinthe - Gipsy - Igor - Aéro - Banjo - Dirka - Farore - Carrousel - Farore - Erald passe par tous les sommets du graphe, donc ce graphe est connexe.

3. a. Le graphe composé des sommets Aéro, Banjo, Dirka et Farore est un sous-graphe complet d'ordre 4 du graphe $\mathcal{G}$.

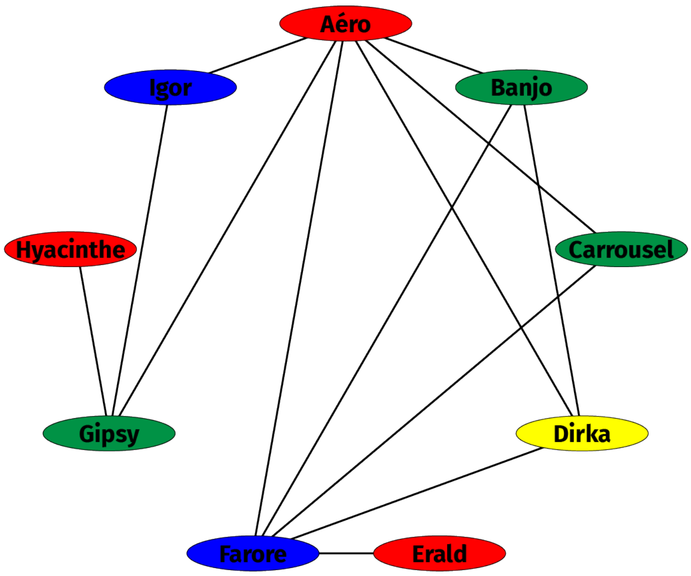
   b. Le nombre chromatique du graphe $\mathcal{G}$ est supérieur ou égal à 4.

4.

Sommet	Aéro	Banjo	Carrousel	Dirka	
Degré	6	3	2	3	
Sommet	Erald	Farore	Gipsy	Hyacinthe	Igor
Degré	1	5	3	1	2

- Ainsi, la liste des sommets par ordre décroissant de degré est : Aéro, Farore, Banjo, Dirka, Gipsy, Carrousel, Igor, Erald et Hyacinthe.
  On attribue donc une première couleur au sommet Aéro.
- On attribue cette même couleur aux sommets Erald et Hyacinthe.
- On attribue une deuxième couleur au sommet Farore.
- On attribue cette même couleur au sommet Igor.
- On attribue une troisième couleur au sommet Banjo.
- On attribue cette même couleur aux sommets Carrousel et Gipsy.
- Enfin, on attribue une quatrième couleur au sommet Dirka.

Document sous licence libre Creative Commons



Ainsi, le nombre chromatique est 4.

5. On ne peut pas proposer de répartition en groupe de 2 ou 3 chiots : Dirka est seule dans un groupe.

Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 7 - Suites et matrices

Table des matières

Document sous licence libre Creative Commons

1 Informations sur ce chapitre

Après un chapitre sur les matrices et sur les graphes, ce dernier chapitre aborde les modélisations d'évolution à l'aide de suites de matrices ou de chaînes de Markov.
Dans une première partie, les notions vues dans le chapitre précédent sont approfondies, afin de les faire interagir avec les notions de suite, et ainsi modéliser des problèmes d'évolution déterministes. Dans une seconde partie, on choisit de présenter la modélisation à l'aide de graphes probabilistes, avant d'utiliser les matrices de transition pour résoudre des problèmes d'évolution probabiliste par l'intermédiaire des chaînes de Markov.
Afin de privilégier le travail sur le sens et l'acquisition des automatismes, de nombreux exercices d'application directe sont proposés. Cela permet de découvrir ensuite des problèmes plus élaborés, certains en rapport avec d'autres disciplines, notamment les sciences de la vie et de la terre.

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

1. $AB = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 16 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

2. Voici deux manières permettant de calculer le produit demandé :

$$A(I_3 - B) = AI_3 - AB = A - AB = \begin{pmatrix} -6 & -8 & -15 \\ -1 & -1 & -7 \\ -2 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A(I_3 - B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -8 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -8 & -15 \\ -1 & -1 & -7 \\ -2 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

Corrigé exercice 2 :

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a donc bien $AB = BA$.

Document sous licence libre Creative Commons

3. $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ car $AB = BA$.

Corrigé exercice 3 :

1. Le graphe n'est pas complet. En effet, les sommets A et E, par exemple, ne sont pas adjacents. Le graphe est connexe car le chaîne A-B-C-D-E-C-F relie tous les sommets.

2. Il s'agit d'un graphe d'ordre 6 car ce graphe est composé de 6 sommets.

Corrigé exercice 4 :

1. On doit avoir $P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1$,
   d'où $\alpha + 0,4 + 0,1 + \alpha = 1$, soit $\alpha = 0,25$.

2. $E(X) = 0,25 \times 1 + 0,4 \times 2 + 0,1 \times 3 + 0,25 \times 4 = 2,35$
   On a ainsi : $V(X) = 0,25(1-2,35)^2 + 0,4(2-2,35)^2 + 0,1(3-2,35)^2 + 0,25(4-2,35)^2$.
   D'où $V(X) = 1,2275$.

Corrigé exercice 5 :

1. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,4 \times 0,1 = 0,04$.

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,2 - 0,04 = 0,56$.

Corrigé exercice 6 :

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B) = 0,22.$$

Corrigé exercice 7 :

1. a. $\lim_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$ car $3 > 1$.
   b. $\lim_{n \to +\infty} 0,3^n = 0$ car $-1 < 0,3 < 1$.
   c. La suite de terme général $(-3)^n$ n'admet pas de limite car $-3 < -1$.

2. Si $|\theta| < 1$, $\lim_{n \to +\infty} \cos(\theta^n) = \cos 0 = 1$.
   Si $|\theta| = 1$, $\lim_{n \to +\infty} \cos(\theta^n) = \cos 1$ (en utilisant la parité de la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$ pour le cas $\theta = -1$).
   Si $|\theta| > 1$, la suite (u_n) de terme général $u_n = \cos(\theta^n)$ n'admet pas de limite, même si elle est encadrée par -1 et 1.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 8 :

1. Pour tout entier naturel n :

   $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0,5u_n + 3 - 6 = 0,5(v_n + 6) - 3 = 0,5v_n$

   De plus, $v_0 = u_0 - 6 = -5$.

   Donc (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = -5$ et de raison $q = 0,5$.

2. (v_n) est une suite géométrique donc, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = -5 \times 0,5^n$.

   Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n = 6 - 5 \times 0,5^n$.

3. On a $-1 < 0,5 < 1$ donc $0,5^n$ tend vers 0. Ainsi, $\lim_{n \to +\infty} u_n = 6$.

4.
```
u ← 1
n ← 0
Tant que u < 5,5 :
    u ← 0,5u + 3
    n ← n + 1
Fin Tant que
Renvoyer n
```

Document sous licence libre Creative Commons

3 Activités

3.1 Corrigé activité A :

Questions :

1. $A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,01 \\ -1 & 1,01 \end{pmatrix}$
2. Pour tout entier naturel n, on a $X_n = A^n X_0$.

   Remarque : Ce résultat se démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
3. a. Pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$ avec $B = \begin{pmatrix} -10 \\ 1000 \end{pmatrix}$.

   b. Les calculs successifs donnent $X_1 = \begin{pmatrix} 99 \\ 11090 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 190 \\ 12101,9 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 282,019 \\ 13032,92 \end{pmatrix}$.

Bilan :

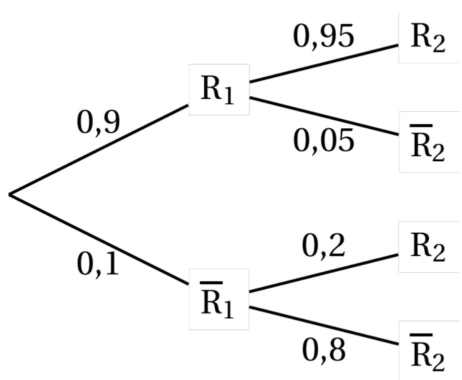
On reconnaît un équivalent des suites arithmético-géométriques numériques. On peut imaginer que l'utilisation d'une suite auxiliaire, qui aurait des propriétés proches des suites géométriques numériques, pourrait permettre de déterminer le terme général de la suite par une formule explicite.

3.2 Corrigé activité B :

Questions :

Partie A

1. D'après l'énoncé, $r_1 = 0,9$.



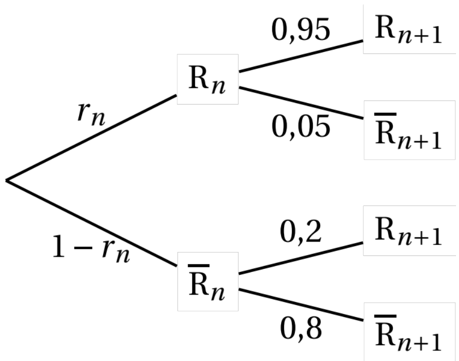
BY NC SA

D'après la formule des probabilités totales,

$r_2 = P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(\overline{R}_1 \cap R_2) = 0,9 \times 0,95 + 0,1 \times 0,2 = 0,875$

La probabilité que le client ait ramené la bouteille à l'issue de la seconde semaine s'élève donc à 0,875.

2. On obtient :



3. D'après la formule des probabilités totales, pour tout entier naturel n non nul :

$r_{n+1} = r_n \times 0,95 + (1 - r_n) \times 0,2 = 0,95r_n + 0,2 - 0,2r_n = 0,75r_n + 0,2.$

4. Pour tout entier naturel non nul n, on note H_n la propriété H_n :

$$r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8.$$

Initialisation : Pour $n = 1$, $0,1 \times 0,75^0 + 0,8 = 0,9$. H_1 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier naturel non nul n tel que H_n est vraie.

On sait que $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $r_{n+1} = 0,75 \times (0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8) + 0,2$.

D'où $r_{n+1} = 0,1 \times 0,75^n + 0,6 + 0,2$.

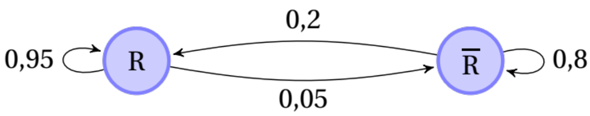
Ainsi, $r_{n+1} = 0,1 \times 0,75^n + 0,8$.

Donc H_{n+1} est vrai.

Conclusion : On a démontré que la propriété était vraie au rang 1, puis que s'il existait un rang n tel que H_n est vraie, alors H_{n+1} est également vraie. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel non nul n, $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.

Partie B

1. Chaque flèche porte la probabilité de passer de l'état de départ à l'état d'arrivée.



Document sous licence libre Creative Commons

2. $\pi_n P = \begin{pmatrix} P(R_n) & P(\overline{R}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{R_n}(R_{n+1}) & P_{R_n}(\overline{R}_{n+1}) \\ P_{\overline{R}_n}(R_{n+1}) & P_{\overline{R}_n}(\overline{R}_{n+1}) \end{pmatrix}$

   $\pi_n P = \begin{pmatrix} P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) + P(\overline{R}_n)P_{\overline{R}_n}(R_{n+1}) & P(R_n)P_{R_n}(\overline{R}_{n+1}) + P(\overline{R}_n)P_{\overline{R}_n}(\overline{R}_{n+1}) \end{pmatrix}$

   On reconnaît la formule des probabilités totales.

   Ainsi, $\pi_n P = \begin{pmatrix} P(R_{n+1}) & P(\overline{R_{n+1}}) \end{pmatrix}$, d'où $\pi_n P = \pi_{n+1}$.

3. $r_n = P(R_n)$ et $t_n = P(\overline{R}_n)$ sont les probabilités de deux événements contraires, donc $r_n + t_n = 1$.

   Par ailleurs, $\pi_{n+1} = \pi_n P$.

   D'où $\begin{pmatrix} r_{n+1} & t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n & t_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

   Ainsi, $\begin{pmatrix} r_{n+1} & t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95r_n + 0,2t_n & 0,05r_n + 0,8t_n \end{pmatrix}$.

   Par identification des coefficients, on obtient $r_{n+1} = 0,95r_n + 0,2t_n$.

   Or $t_n + r_n = 1$ donc $r_{n+1} = 0,95r_n + 0,2(1 - r_n)$.

   Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.

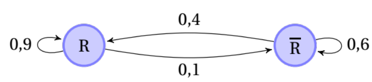
Bilan :

À l'aide d'un arbre pondéré, on modélise cette situation par une succession de colonnes pour lesquelles des duos de branches apparaissent à chaque fois : une correspondant à la réalisation de A et l'autre à la réalisation de $\overline{A}$. Chaque colonne correspond à une répétition de l'expérience aléatoire.
À l'aide d'un graphe, on modélise directement les évolutions, ce qui est un gain de temps (et de place !).

3.3 Corrigé activité C :

Questions :

1. On obtient :



2. On a $\pi_1 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \end{pmatrix}$ et $\pi_2 = \begin{pmatrix} 0,725 & 0,275 \end{pmatrix}$.

3. D'après la simulation, $\pi = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.

4. La modification de la distribution initiale ne semble pas modifier la distribution asymptotique.

Document sous licence libre Creative Commons

Bilan :

On sait qu'on a, pour tout entier naturel n, $\pi_{n+1} = \pi_n P$. Dans le cas d'une distribution asymptotique, on peut imaginer que cette distribution n'est pas modifiée par passage au "terme suivant", donc $\pi = \pi P$. On dit qu'il s'agit d'une distribution invariante.

Document sous licence libre Creative Commons

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 9 :

$U_1 = AU_0 + B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Réponse : a

Corrigé exercice 10 :

La somme des probabilités de tous les événements élémentaires d'un univers valant 1, la réponse c. est exacte.

Réponse : c

Corrigé exercice 11 :

Le coefficient situé en i-ème ligne et j-ième colonne de la matrice de transition correspond à la probabilité de passer de l'état i à l'état j.

Réponse : c

Corrigé exercice 12 :

On a $P_1 = P_0B = \begin{pmatrix} 0,38 & 0,28 & 0,34 \end{pmatrix}$.

Réponse : a

Corrigé exercice 13 :

La matrice de transition P ne contient aucun 0, il existe donc une unique distribution invariante π pour la chaîne de Markov. Pour trouver π, on résout le système :
$\begin{cases} 0,28x + 0,65y & = x \\ 0,72x + 0,35y & = y \end{cases}$
On obtient $x = \dfrac{65}{137}$ et $y = \dfrac{72}{137}$. La réponse c. est donc exacte.

Réponses : b, c

Corrigé exercice 14 :

$\pi_0 P = \pi_1 = \begin{pmatrix} 0,465 & 0,535 \end{pmatrix}$ et $\pi_1 P = \pi_2 = \begin{pmatrix} 0,4731 & 0,5268 \end{pmatrix}$. La réponse c ne donne que des approximations des coefficients de π_3 et $\pi_4 P \neq \pi_4$.

Réponses : a, b

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 15 :

D'après le cours, $\pi_{10} = \pi_0 P^{10}$ définit la loi de probabilité de X_{10}.

Réponses : b, c

Corrigé exercice 16 :

Pour toute matrice ligne de taille 3 π, $\pi I_3 = \pi$.

Réponses : a, b, c

Corrigé exercice 17 :

1. La somme des nombres portés par les flèches sortant du sommet a vaut 1. On a donc : $0,4 + \frac{3p}{2} = 1 \iff p = 0,4$. Ainsi, $P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$.
2. La calculatrice donne $P^2 = \begin{pmatrix} 0,32 & 0,24 & 0,44 \\ 0,31 & 0,25 & 0,44 \\ 0,31 & 0,24 & 0,45 \end{pmatrix}$ et $P^3 = \begin{pmatrix} 0,312 & 0,244 & 0,444 \\ 0,313 & 0,243 & 0,444 \\ 0,314 & 0,241 & 0,445 \end{pmatrix}$.
3. D'après le cours, $\pi_3 = \pi_0 P^3 = \begin{pmatrix} 0,3133 & 0,2423 & 0,4444 \end{pmatrix}$.

Document sous licence libre Creative Commons

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1

Méthode 1

1. =ALEA.ENTRE.BORNES(0;$A2-1)
2. =SI(D$2=$B3;1-C3;C3)
3. Voir le fichier TICE.
4. Cette proportion semble converger vers 0,5.
5. Il suffit d'ajouter des colonnes au tableur pour simuler de nouvelles étapes (voir le fichier TICE).

Méthode 2

1. La variable Boules est une liste de n nombres égaux à 0 ou 1. Le k-ème élément de la liste est égal à 1 si la boule numérotée k est dans l'urne A, et 0 sinon.
2. Voir le fichier TICE.
3. La proportion fluctue autour de 0,5.
4. On retrouve la même valeur.
5. On retrouve encore la même valeur. Il semble que plus N et n augmentent, plus on se rapproche de 0,5.

Document sous licence libre Creative Commons

5.2 Corrigé du TP 2

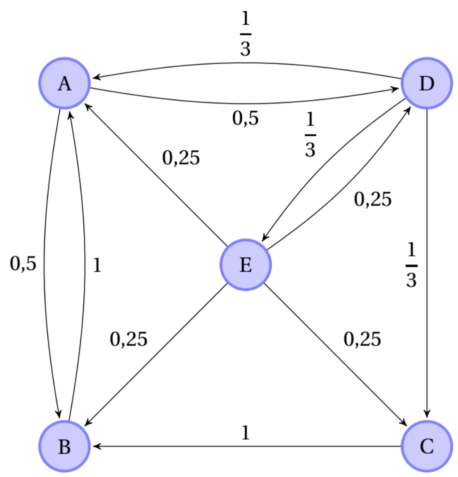
Questions préliminaires

1. Pour être en c à l'instant $t = 2$, un seul chemin est possible : aller en d puis en c. Partant de a, on a une chance sur deux d'arriver en d, et, partant de d, on a une chance sur 3 d'arriver en c et ainsi, la probabilité d'être en c en $t = 2$ vaut $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

2. Pour être en a au temps $t = 2$, il y a deux chemins : aller en b puis revenir en a ou aller en d et revenir en a. Ainsi, la probabilité recherchée vaut $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

Méthode 1

1. On obtient :



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On obtient

SOMME	=F$1*$A6+F$2*$B6+F$3*$C6+F$4*$D6+F$5*$E6									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1						0	0,5	0	0,5	0
2						1	0	0	0	0
3						0	1	0	0	0
4						0,333333	0	0,333333	0	0,333333
5						0,25	0,25	0,25	0,25	0
6	0	0,5	0	0,5	0	=F$1*$A6	0	0,166667	0	0,166667
7	1	0	0	0	0	0	0,5	0	0,5	0
8	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
9	0,333333	0	0,333333	0	0,333333	0,083333	0,583333	0,083333	0,25	0
10	0,25	0,25	0,25	0,25	0	0,333333	0,375	0,083333	0,125	0,083333
11	0	0,5	0	0,5	0					
12	1	0	0	0	0					
13	0	1	0	0	0					
14	0,333333	0	0,333333	0	0,333333					
15	0,25	0,25	0,25	0,25	0					
16	0	0,5	0	0,5	0					
17	1	0	0	0	0					
18	0	1	0	0	0					
19	0,333333	0	0,333333	0	0,333333					
20	0,25	0,25	0,25	0,25	0					
21	0	0,5	0	0,5	0					
22	1	0	0	0	0					
23	0	1	0	0	0					
24	0,333333	0	0,333333	0	0,333333					
25	0,25	0,25	0,25	0,25	0					
26	0	0,5	0	0,5	0					
27	1	0	0	0	0					
28	0	1	0	0	0					
29	0,333333	0	0,333333	0	0,333333					
30	0,25	0,25	0,25	0,25	0					
31	0	0,5	0	0,5	0					
32	1	0	0	0	0					
33	0	1	0	0	0					
34	0,333333	0	0,333333	0	0,333333					
35	0,25	0,25	0,25	0,25	0					
36										
37										

Voir le fichier TICE

3. En calculant des puissances supérieures de la matrice P, à l'aide du tableur ou de la calculatrice, on obtient que la probabilité d'arriver en a est de 0,36677, celle d'arriver en b de 0,28325, celle d'arriver en c de 0,08335, celle d'arriver en d de 0,19994 et celle d'arriver en e de 0,06669.

4. De même, en calculant des puissances élevées de P, on voit que chaque ligne devient identique à la précédente, ce qui veut dire qu'il y a autant de chance d'arriver en j quel que soit le point i de départ.

Document sous licence libre Creative Commons

Méthode 2

1. On obtient

```
1 import random
2 def promenade():
3     sommet = "a"
4     for pas in range(1000):
5         alea = random.random()
6         if sommet == "a":
7             if alea < 0.5 :
8                 sommet = "b"
9             else :
10                sommet = "d"
11        elif sommet == "b":
12            sommet = "a"
13        elif sommet == "c":
14            sommet = "b"
15        elif sommet == "d":
16            if alea < 0.3333 :
17                sommet = "a"
18            elif alea < 0.6667 :
19                sommet = "c"
20            else :
21                sommet = "e"
22        else :
23            if alea < 0.25 :
24                sommet = "a"
25            elif alea < 0.5 :
26                sommet = "b"
27            elif alea < 0.75 :
28                sommet = "c"
29            else :
30                sommet = "d"
31    return sommet
```

2. On obtient

```
def PR():
    effectifs = 5*[0]
    surfeurs = 1000
    for k in range(surfeurs) :
        sommetfinal = promenade()
        if sommetfinal == "a":
            effectifs[0] = effectifs[0] + 1/surfeurs
        elif sommetfinal == "b":
            effectifs[1] = effectifs[1] + 1/surfeurs
        elif sommetfinal == "c":
            effectifs[2] = effectifs[2] + 1/surfeurs
        elif sommetfinal == "d":
            effectifs[3] = effectifs[3] + 1/surfeurs
        else :
            effectifs[4] = effectifs[4] + 1/surfeurs
    return effectifs
```

3. Il suffit de changer la ligne 5 et de refaire tourner le programme. On remarque que les résultats ne changent pas.

Document sous licence libre Creative Commons

6 Travailler les automatismes

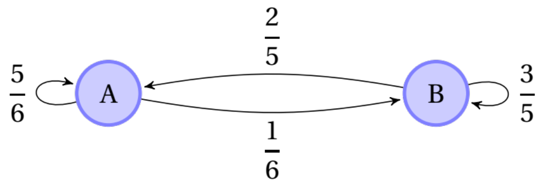
6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 18 :

Si P est une matrice de transition associée à une chaîne de Markov à deux états, alors il existe deux nombres réels p et q compris entre 0 et 1 tels que $P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$.

Ainsi, la somme des coefficients de cette matrice est égale à 2.

Corrigé exercice 19 :



- $P_A(A) = 1 - P_A(B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.
- $P_B(B) = 1 - P_B(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

Corrigé exercice 20 :

La somme des coefficients sur une ligne de la matrice de transition d'une chaîne de Markov est 1. Ainsi, le coefficient manquant vaut $0,8$.

Corrigé exercice 21 :

L'affirmation est vraie, car, sur un graphe probabiliste, les coefficients sont toujours dans l'intervalle $[0, 1]$.

Corrigé exercice 22 :

1. On obtient

2. Le graphe nous donne $P_B(A) = P_A(B) = 0$. Donc :
   - $P_A(A) = 1 - P_A(B) = 1 - 0 = 1$.
   - $P_B(B) = 1 - P_B(A) = 1 - 0 = 1$.

   La matrice de transition de cette chaîne de Markov est donc l'identité de taille 2 : I_2. Or, pour toute matrice ligne à deux colonnes π, $\pi I_2 = \pi$.

   Ainsi, toute distribution est invariante.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 23 :

1. Faux : La chaîne de Markov de l'exercice 19 est un contre-exemple.
2. Vrai : La somme des probabilités des événements élémentaires d'un univers vaut toujours 1.
3. Faux : La chaîne de Markov de l'exercice 19 est un contre exemple.
4. Faux : La chaîne de Markov de l'exercice 19 est un contre exemple.

6.2 Exercices

Corrigé exercice 24 :

1. $U_1 = AU_0 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. a. D'après le cours, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$. D'où $U_n = A^n \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,25 \end{pmatrix}$.

   b. $U_5 = A^5 U_0$. Or $A^5 = \begin{pmatrix} 3321 & 3564 \\ 4455 & 4212 \end{pmatrix}$. Donc $U_5 = \begin{pmatrix} -2551,5 \\ -3280,5 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 25 :

1. $V_1 = BV_0 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $V_2 = BV_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. a. Pour tout entier naturel n, $V_n = B^n V_0 = B^n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   b. On a $V_{10} = B^{10} V_0$. Or $B^{10} = \begin{pmatrix} 16807 & 0 \\ 0 & 16807 \end{pmatrix}$ et donc $V_{10} = \begin{pmatrix} -16807 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 26 :

1. $U_1 = AU_0 + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

2. a. $A - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   Comme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} (A - I_2) = I_2$, $A - I_2$ est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$.

b. $C = -(A - I_2)^{-1}B = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. $V_{n+1} = U_{n+1} - C$
   $V_{n+1} = AU_n + B + (A - I_2)^{-1}B$
   $V_{n+1} = A(V_n + C) + B + (A - I_2)^{-1}B$
   $V_{n+1} = AV_n + AC + B + (A - I_2)^{-1}B$
   $V_{n+1} = AV_n - A(A - I_2)^{-1}B + B + (A - I_2)^{-1}B$
   $V_{n+1} = AV_n - (A - I_2)(A - I_2)^{-1}B + B$
   $V_{n+1} = AV_n$

4. Comme $V_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, on a, pour tout entier naturel n :
   $V_n = A^n V_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \times 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3^{n+1} \end{pmatrix}$
   et $U_n = V_n + C = \begin{pmatrix} 0 \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$.

5. On obtient donc $U_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 728 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 27 :

1. $U_1 = AU_0 + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$
   et $U_2 = AU_1 + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -34 \end{pmatrix}$.

2. a. On a $A - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$. Comme $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 \\ 0,5 & -0,1 \end{pmatrix}(A - I_2) = I_2$, $A - I_2$ est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 \\ 0,5 & -0,1 \end{pmatrix}$.

   b. $C = -(A - I_2)^{-1}B = -\begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 \\ 0,5 & -0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}$

3. Pour tout entier naturel n :
   $V_{n+1} = U_{n+1} - C$

$V_{n+1} = AU_n + B + (A - I_2)^{-1}B$
$V_{n+1} = A(V_n + C) + B + (A - I_2)^{-1}B$
$V_{n+1} = AV_n + AC + B + (A - I_2)^{-1}B$
$V_{n+1} = AV_n - A(A - I_2)^{-1}B + B + (A - I_2)^{-1}B$
$V_{n+1} = AV_n - (A - I_2)(A - I_2)^{-1}B + B$
$V_{n+1} = AV_n$

4. Comme $V_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} 1,1 \\ -1,1 \end{pmatrix}$, on a, pour tout entier naturel n :

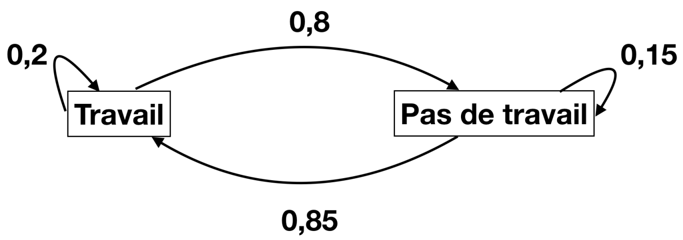
$V_n = A^n V_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1,1 \\ -1,1 \end{pmatrix}$

5. $U_n = V_n + C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1,1 \\ -1,1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}$.

Donc $U_8 = \begin{pmatrix} 68113 \\ -439033 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 28 :

On obtient le graphe probabiliste suivant :



Corrigé exercice 29 :

- La somme des coefficients des arêtes sortant du sommet A est 1. De même, la somme des coefficients des arêtes sortant du sommet B est 1. De plus, tous les coefficients appartiennent à l'intervalle $[0; 1]$. Donc le graphe donné est un graphe probabiliste.
- La somme des coefficients sortant de B est $1,15$. Ainsi, le graphe donné n'est pas un graphe probabiliste.
- Le coefficient sortant de A (et entrant dans A) n'appartient pas à l'intervalle $[0, 1]$. Ainsi, le graphe donné n'est pas un graphe probabiliste.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 30 :

1. $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

2. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{1+2\times 0,7^n}{3} & \frac{2-2\times 0,7^n}{3} \\ \frac{1-0,7^n}{3} & \frac{2+0,7^n}{3} \end{pmatrix}$$

Initialisation :

Pour $n = 1$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1+2\times 0,7^1}{3} & \frac{2-2\times 0,7^1}{3} \\ \frac{1-0,7^1}{3} & \frac{2+0,7^1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = P.$$

Donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier naturel n non nul tel que :

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{1+2\times 0,7^n}{3} & \frac{2-2\times 0,7^n}{3} \\ \frac{1-0,7^n}{3} & \frac{2+0,7^n}{3} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$P^{n+1} = P^n P$

$$P^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1+2\times 0,7^n}{3} & \frac{2-2\times 0,7^n}{3} \\ \frac{1-0,7^n}{3} & \frac{2+0,7^n}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$P^{n+1} = \begin{pmatrix} 0,8\frac{1+2\times 0,7^n}{3} + 0,1\frac{2-2\times 0,7^n}{3} & 0,2\frac{1+2\times 0,7^n}{3} + 0,9\frac{2-2\times 0,7^n}{3} \\ 0,8\frac{1-0,7^n}{3} + 0,1\frac{2+0,7^n}{3} & 0,2\frac{1-0,7^n}{3} + 0,9\frac{2+0,7^n}{3} \end{pmatrix}$$

$$P^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1+2\times 0,7^{n+1}}{3} & \frac{2-2\times 0,7^{n+1}}{3} \\ \frac{1-0,7^{n+1}}{3} & \frac{2+0,7^{n+1}}{3} \end{pmatrix}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : On a montré par que la propriété était vraie au rang 1, puis que s'il existait un entier naturel non nul n tel que la propriété était vraie au rang n, alors elle l'est au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n non nul, on a :

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

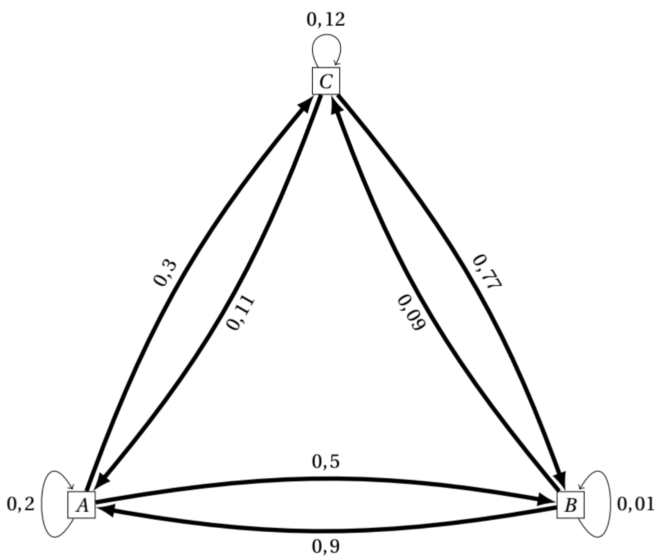
$$P^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+2\times 0,7^n}{3} & \dfrac{2-2\times 0,7^n}{3} \\ \dfrac{1-0,7^n}{3} & \dfrac{2+0,7^n}{3} \end{pmatrix}.$$

3. Comme $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} P^{100} \approx \begin{pmatrix} 0,333333 & 0,666667 \end{pmatrix}$, la probabilité que l'état 1 soit réalisé après 100 itérations est environ $0,333333$.

Corrigé exercice 31 :

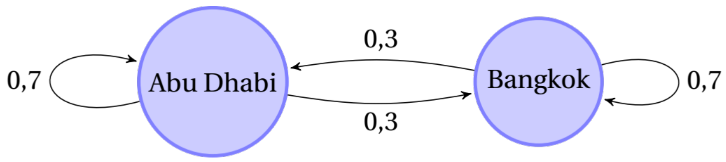
Pour compléter la matrice de transition, il suffit d'utiliser le fait que la somme des coefficients d'une même ligne est 1. Ainsi, la matrice est : $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

Corrigé exercice 32 :



Corrigé exercice 33 :

1. On obtient



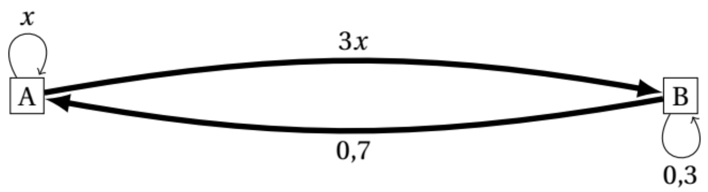
2. La distribution initiale est $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ (probabilité de présence respectivement à Abu Dhabi et Bangkok initialement).
La matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$. La distribution de probabilité dans deux ans correspond à $\pi_2 = \pi_0 P^2 = \begin{pmatrix} 0,58 & 0,42 \end{pmatrix}$.

Document sous licence libre Creative Commons

La probabilité pour que Martin soit à Abu Dhabi dans deux ans vaut donc $0,58$.

Corrigé exercice 34 :

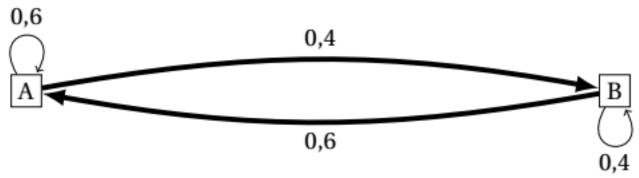
1. On obtient



La somme des probabilités sortant de A est 1 donc $3x+x+1$, d'où $4x=1$ et donc $x=0,25$. Ainsi, la matrice de transition est $P=\begin{pmatrix}0,25 & 0,75\\ 0,7 & 0,3\end{pmatrix}$. La distribution au bout de trois itérations sera donnée par $\begin{pmatrix}0,8 & 0,2\end{pmatrix}P^3=\begin{pmatrix}0,45385 & 0,54615\end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 35 :

1. $P_A(B)=1-P_A(A)=0,4$, $P_B(A)=1-P_B(B)=0,6$.



2. On a $P=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\ 0,6 & 0,4\end{pmatrix}$.

3. $\pi P=\begin{pmatrix}0,6\times 0,4+0,6\times 0,6 & 0,4\times 0,4+0,4\times 0,6\end{pmatrix}=\pi$.
   Donc π est une distribution invariante.

Corrigé exercice 36 :

1. La matrice P ne contient aucun 0, il existe donc une unique distribution invariante.

2. Une distribution invariante $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ vérifie $\begin{cases}0,2x+0,5y=x\\ x+y=1\end{cases}$.
   En résolvant le système, on obtient $x=\dfrac{5}{13}$ et $y=\dfrac{8}{13}$.
   Donc l'unique distribution invariante est donnée par $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{5}{13} & \dfrac{8}{13}\end{pmatrix}$.

Document sous licence libre Creative Commons

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 37 :

1. $U_1 = AU_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,4 \\ 4 \end{pmatrix}$

   et $U_2 = AU_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3,4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,52 \\ 3,7 \end{pmatrix}$.

2. Soient x et y deux réels et on pose $V_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

   $AV_0 = V_0$ si, et seulement si, $\begin{cases} 0,8x + 0,2y & = x \\ 0,5x + 0,5y & = y \end{cases}$, soit $\begin{cases} -0,2x + 0,2y & = 0 \\ -0,5x + 0,5y & = 0 \end{cases}$.

   Ce système d'équations est équivalent à l'équation unique : $x = y$.

   Réciproquement, pour tout réel x, $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ est solution de l'équation matricielle.

   En conclusion, V_0 est solution de l'équation $AV_0 = V_0$ si, et seulement si, il existe un réel x tel que $V_0 = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 38 :

On peut montrer que la suite (X_n) est constante si, et seulement si, $X_0 = AX_0 + B$.
On cherche donc la matrice B telle que $AX_0 + B = X_0$.

Ainsi, $B = X_0 - AX_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 39 :

$X_1 = AX_0 + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1,1 \end{pmatrix}$

et $X_2 = AX_1 + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1,1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,1 \\ -2,21 \end{pmatrix}$.

D'où $X_3 = AX_2 + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3,1 \\ -2,21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,81 \\ -5,521 \end{pmatrix}$.

C'est donc la réponse 2. qui est la bonne.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 40 :

1. Si on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = AW_n$.
2. On a $W_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $W_1 = AW_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $u_1 = 3$ et $v_1 = -1$.

   On peut aussi calculer directement ces valeurs : $u_1 = u_0 + v_0 = 3$ $v_1 = u_0 - v_0 = -1$.
3. D'après le cours, pour tout entier naturel n, $W_n = A^n W_0$.
4. $A^{50} = \begin{pmatrix} 33554432 & 0 \\ 0 & 33554432 \end{pmatrix}$ donc $W_{50} = \begin{pmatrix} 33554432 \\ 67108864 \end{pmatrix}$.

   On a donc $u_{50} = 33554432$ et $v_{50} = 67108864$.

   On peut conjecturer que les suites (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$.

Corrigé exercice 41 :

1. On obtient $u_2 = 2$ et $u_3 = 3$.
2. a. On a $X_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} + u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = AX_n.$$

   c. D'après le cours, pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

   d. $X_{20} = A^{20} X_0 = \begin{pmatrix} 17711 \\ 10946 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{20} \end{pmatrix}$. Donc $u_{20} = 10946$ et $u_{21} = 17711$.

Corrigé exercice 42 :

1. On commence par calculer $N(AZ)$.

   Pour $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $AZ = \begin{pmatrix} 0,6x - 0,2y \\ 0,2x + 0,6y \end{pmatrix}$

   Donc $N(AZ) = (0,6x - 0,2y)^2 + (0,2x + 0,6y)^2$. Ainsi, $N(AZ) \geqslant 0$ en tant que somme de deux carrés.

   Par ailleurs, $N(AZ) = 0,36x^2 - 0,24xy + 0,04y^2 + 0,04x^2 + 0,24xy + 0,36y^2$

   D'où $N(AZ) = 0,4(x^2 + y^2)$, ce qui conduit à l'inégalité $N(AZ) < \dfrac{1}{2}N(Z)$.

   En conclusion : $0 \leqslant N(AZ) \leqslant \dfrac{1}{2}N(Z)$

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

2. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, la proposition $P_n : 0 \leqslant N(A^nZ) \leqslant \frac{1}{2^n}$ est vraie n.

   Initialisation :

   Pour $n = 0$, $A^nZ = Z$.

   Or, d'après l'énoncé, $N(Z) = 1$ et $1 = \frac{1}{2^0}$. On a donc bien $N(A^0Z) \leqslant \dfrac{1}{2^0}$.

   Donc P_0 est vraie.

   Hérédité :

   Supposons qu'il existe un entier naturel n, tel que P_n est vraie.

   On a donc $0 \leqslant N(A^nZ) \leqslant \frac{1}{2^n}$

   Montrons que P_{n+1} est vraie.

   $N(A^{n+1}Z) = N(A(A^nZ))$, or, d'après la première question, pour $X = A^nZ$,

   $0 \leqslant N(AX) \leqslant \dfrac{1}{2}N(X)$

   $0 \leqslant N(A(A^nZ)) \leqslant \dfrac{1}{2}N(A^nZ)$

   Or P_n est vraie, donc $0 \leqslant N(A^{n+1}Z) \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$

   Donc P_{n+1} est vraie.

   Conclusion :

   On a montré que la propriété est vraie au rang 0, puis que s'il existe un rang n tel que la propriété est vraie, alors elle est vraie au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant N(A^nZ) \leqslant \frac{1}{2^n}$.

3. Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, on déduit de la question précédente, en utilisant le théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} N(A^nZ) = 0$.

Corrigé exercice 43 :

1. En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, on a :

   $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} - u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

   Donc $X_{n+1} = MX_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. D'après le cours, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^nX_0$.

Corrigé exercice 44 :

1. $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 \\ 64 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 \\ 32 \end{pmatrix}$

   et $U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 62 \\ 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 \\ 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 16 \end{pmatrix}$

   et $U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 8 \end{pmatrix}$.

2. Il semble que, pour tout entier naturel n : $U_n = \begin{pmatrix} 64 - 2n \\ 64 \times 0,5^n \end{pmatrix}$.

3. Montrons par récurrence la propriété P_n : $U_n = \begin{pmatrix} 64 - 2n \\ 64 \times 0,5^n \end{pmatrix}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$, $U_0 = \begin{pmatrix} 64 \\ 64 \end{pmatrix}$. P_0 est vraie.

   Hérédité : Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que P_n est vraie. Montrons alors que P_{n+1} est vraie. On a $U_n = \begin{pmatrix} 64 - 2n \\ 64 \times 0,5^n \end{pmatrix}$.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 - 2n \\ 64 \times 0,5^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} 64 - 2n \\ 0,5 \times 64 \times 0,5^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} 64 - 2(n+1) \\ 64 \times 0,5^{n+1} \end{pmatrix}$$

   P_{n+1} est vraie.

   Conclusion : On a montré que la propriété était vraie au rang 0, puis que s'il existait un rang n tel que la propriété est vraie, alors elle est vraie au rang $n + 1$. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} 64 - 2n \\ 64 \times 0,5^n \end{pmatrix}$.

   La suite des premiers coefficients est une suite arithmétique de premier terme 64 et de raison -2.

La suite des seconds coefficients est une suite géométrique de premier terme 64 et de raison 0,5.

Corrigé exercice 45 :

1. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Si on choisit $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}$, on a :
   $x_{n+1} - 100 = 0,98(x_n - 100) + 2 = 0,98(x_n - 100)$
   $y_{n+1} - 100 = 0,95(y_n - 100) + 5 = 0,95(y_n - 100)$
   $z_{n+1} - 50 = 1,2(z_n - 50) - 10 = 1,2(z_n - 50)$.
   On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = AV_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0,95 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2 \end{pmatrix}$.

2. $V_0 = \begin{pmatrix} -80 \\ -70 \\ 10 \end{pmatrix}$. On note $V_n = \begin{pmatrix} x_n - 100 \\ y_n - 100 \\ z_n - 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
   Les suites $(x_n - 100)$, $(y_n - 100)$ et $(z_n - 50)$ sont des suites géométriques d'après la question précédente donc on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 \times 0,98^n = -80 \times 0,98^n$, $b_n = -70 \times 0,95^n$ et $c_n = 10 \times 1,2^n$.
   On a alors : $V_n = A^nV_0 = \begin{pmatrix} -80 \times 0.98^n \\ -70 \times 0,95^n \\ 10 \times 1,2^n \end{pmatrix}$.

3. $V_n = A^nV_0$ donc $U_n = A^nV_0 + \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}$.

4. $U_{20} \approx \begin{pmatrix} 46,59 \\ 74,91 \\ 433,38 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 46 :

1. Remarquons tout d'abord que $A - I_3$ est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En posant $C = -(A - I_3)^{-1}B = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

on en déduit, d'après le cours, qu'en choisissant :

$C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, la suite (V_n) vérifie $V_{n+1} = AV_n$.

2. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

   Initialisation :

   Pour $n = 0$, $\begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 0 \times 2^{0-1} \\ 0 & 2^0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix} = I_3 = A^0$.

   Hérédité :

   Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

   $A^{n+1} = A^n A$

   $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & (n+1)2^{(n+1)-1} \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$

   Conclusion : On a montré que la propriété était vraie au rang 0, puis que s'il existait un rang n tel que la propriété est vraie, alors elle l'est au rang $n + 1$. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

3. $V_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_n = A^n V_0$, soit $V_n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + n2^{n-1} \\ 2^n \\ 2^n \end{pmatrix}$.

4. $U_n = V_n + C$ donc $U_n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + n2^{n-1} \\ 2^n + 1 \\ 2^n + 1 \end{pmatrix}$.

5. On en déduit que $U_{10} = \begin{pmatrix} 7168 \\ 1025 \\ 1025 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 47 :

1. $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

2. $A = 6I_2 + J$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On remarque que $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, la proposition P_n :
$A^n = \begin{pmatrix} 6^n + n6^{n-1} & -n6^{n-1} \\ n6^{n-1} & 6^n - n6^{n-1} \end{pmatrix}$ est vraie.
Initialisation : Pour $n = 1$, $A^1 = A$ et :

$$\begin{pmatrix} 6^1 + 1 \times 6^{1-1} & -1 \times 6^{1-1} \\ 1 \times 6^{1-1} & 6^1 - 1 \times 6^{1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = A.$$

Donc P_1 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier naturel non nul n tel que P_n est vraie. Montrons alors que P_{n+1} est vraie.
$A^{n+1} = A^n \times A$
$A^{n+1} = A^n \times (6I_2 + J)$
$A^{n+1} = 6A^n + A^n \times J$
$A^{n+1} = 6 \begin{pmatrix} 6^n + n6^{n-1} & -n6^{n-1} \\ n6^{n-1} & 6^n - n6^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6^n + n6^{n-1} & -n6^{n-1} \\ n6^{n-1} & 6^n - n6^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 6^{n+1} + n6^n & -n6^n \\ n6^n & 6^{n+1} - n6^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6^n + n6^{n-1} - n6^{n-1} & -(6^n + n6^{n-1}) + n6^{n-1} \\ n6^{n-1} + 6^n - n6^{n-1} & -(n6^{n-1} + 6^n) + n6^{n-1} \end{pmatrix}$

Document sous licence libre Creative Commons

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 6^{n+1} + n6^n & -n6^n \\ n6^n & 6^{n+1} - n6^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6^n & -6^n \\ 6^n & -6^n \end{pmatrix}$$

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 6^{n+1} + (n+1)6^n & -(n+1)6^n \\ (n+1)6^n & 6^{n+1} - (n+1)6^n \end{pmatrix}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : On a montré que la propriété était vraie au rang 1, puis que s'il existait un rang n tel que P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie également. D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel non nul n, la proposition P_n :

$A^n = \begin{pmatrix} 6^n + n6^{n-1} & -n6^{n-1} \\ n6^{n-1} & 6^n - n6^{n-1} \end{pmatrix}$ est vraie.

4. D'après le cours, $U_n = A^n U_0$, d'où $u_n = (6^n + n6^{n-1}) + 4 \times (-n6^{n-1}) = 6^n - 3n6^{n-1}$ et $v_n = n6^{n-1} + 4 \times (6^n - n6^{n-1}) = 4 \times 6^n - 3n6^{n-1} = 6^{n-1}(24 - 3n)$

   On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

Corrigé exercice 48 :

1. A et I_k sont des matrices carrées d'ordre k, donc $A - I_k$ et $(A - I_k)^{-1}$ (dont l'existence est supposée par l'énoncé) le sont également.

   Le produit d'une matrice carrée d'ordre k et d'une matrice colonne à k lignes est une matrice colonne à k lignes, et son opposé également.

   Or $C = -(A - I_k)^{-1}B$, donc C est une matrice colonne à k lignes.

2. On a, par définition :

   $V_{n+1} = U_{n+1} - C$ or $U_{n+1} = AU_n + B$ donc :

   $$V_{n+1} = AU_n + B - C.$$

   De plus $U_n = V_n + C$ donc :

   $$V_{n+1} = A(V_n + C) + B - C = AV_n + AC - C + B = AV_n + (A - I_k)C + B.$$

   Comme $C = -(A - I_k)^{-1}B$, on obtient :

   $$V_{n+1} = AV_n + (A - I_k)(-(A - I_k)^{-1}B) + B = AV_n - B + B.$$

   Finalement, $V_{n+1} = AV_n$.

3. On en déduit que, pour tout entier naturel n, on a $V_n = A^n V_0$.

   Comme $V_0 = U_0 - C$, et $V_n = U_n - C$, on en déduit, pour tout entier naturel n :

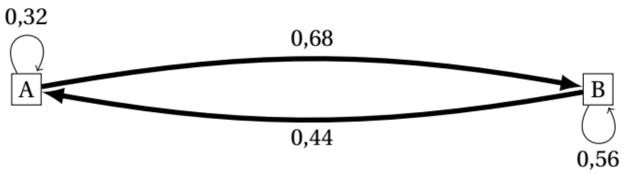
   $U_n - C = A^n(U_0 - C)$ donc $U_n = A^n(U_0 - C) + C$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

8 Exercices d'entraînement partie 2

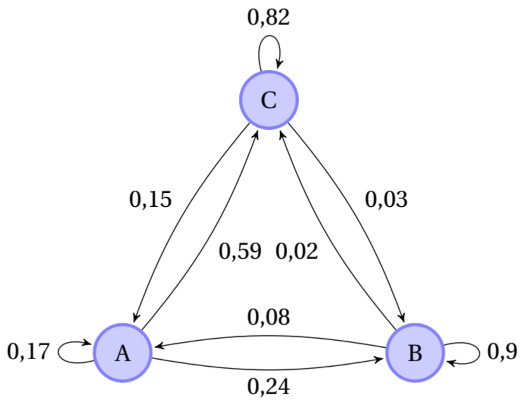
Corrigé exercice 49 :

$P_B(B) = 1 - P_B(A) = 0,56$
$P_A(B) = 1 - P_A(A) = 0,68$



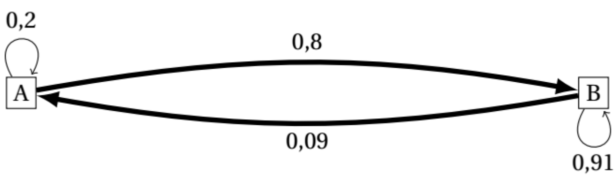
Corrigé exercice 50 :

La somme des probabilités portées par les arcs sortant d'un sommet est 1. On en déduit les probabilités de transition manquantes.

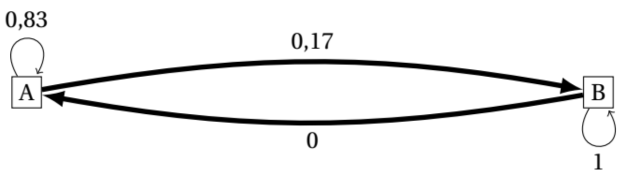


Corrigé exercice 51 :

1. $M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}$



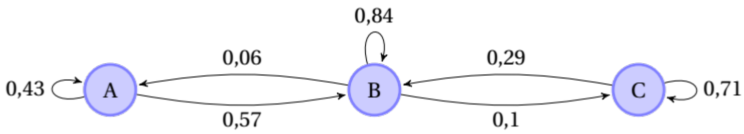
2. $N = \begin{pmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



Document sous licence libre Creative Commons

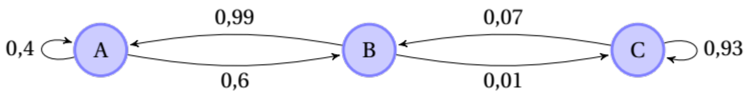
Corrigé exercice 52 :

$P_B(A) + P_B(B) + P_B(C) = 1$ donc $P_B(A) = 0,06$
$P_A(A) + P_A(B) = 1$ donc $P_A(A) = 0,43$
$P_C(B) + P_C(C) = 1$ donc $P_C(B) = 0,29$

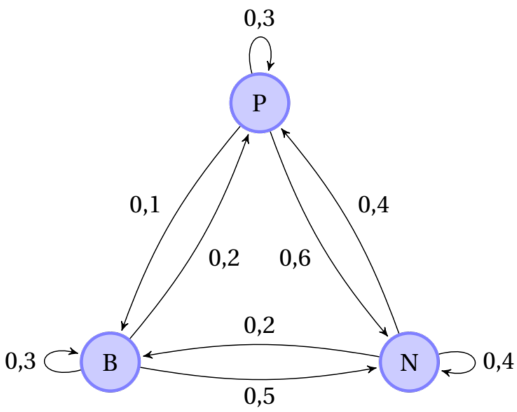


Corrigé exercice 53 :

$P_B(A) + P_B(C) = 1$ donc $P_B(A) = 0,99$
$P_A(A) + P_A(B) = 1$ donc $P_A(B) = 0,6$
$P_C(B) + P_C(C) = 1$ donc $P_C(C) = 0,93$

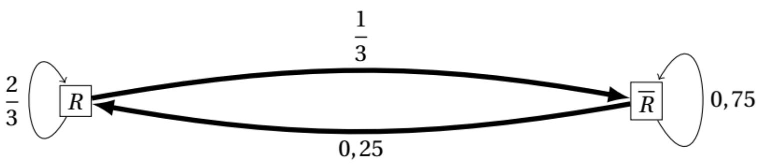


Corrigé exercice 54 :



Corrigé exercice 55 :

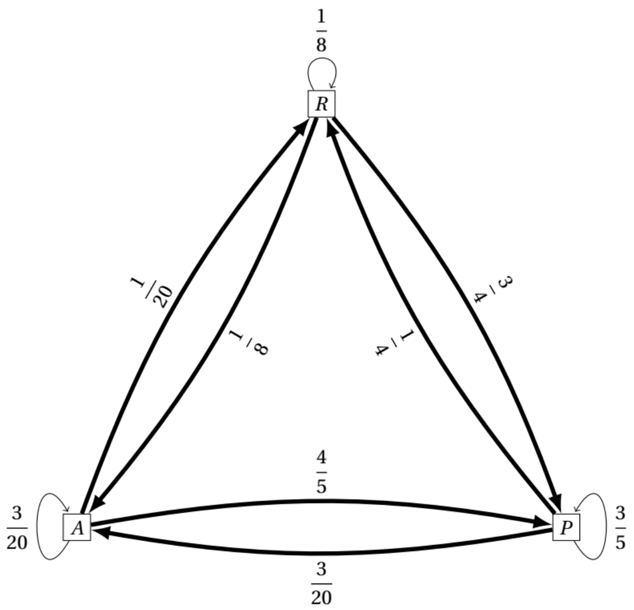
$P_{\overline{R}}(\overline{R}) = 1 - P_{\overline{R}}(R) = 0,75$
$P_R(\overline{R}) = 1 - P_R(\overline{R}) = \dfrac{1}{3}$



La matrice de transition est : $\begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$

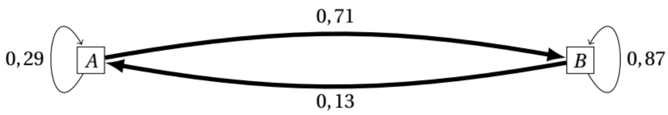
Document sous licence libre Creative Commons

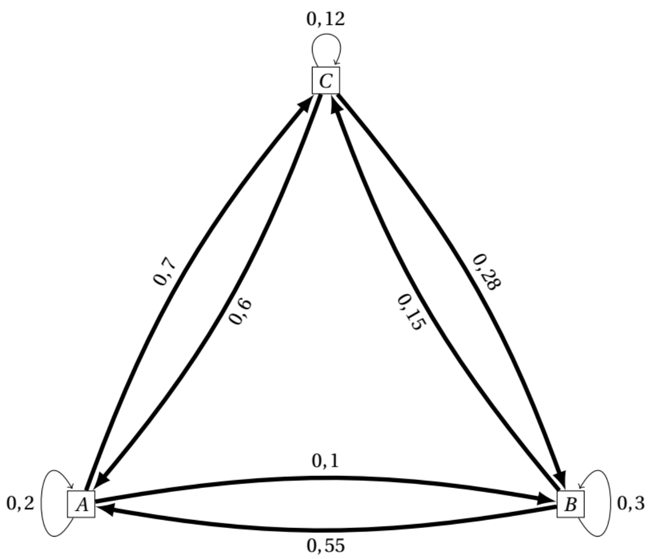
Corrigé exercice 56 :



La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{20} & \frac{4}{5} & \frac{1}{20} \\ \frac{3}{20} & \frac{3}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 57 :

1. 

2. 

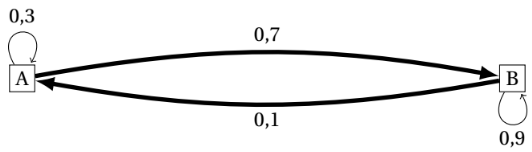
Corrigé exercice 58 :

1. Pour tout $p \in [0,1]$, on définit la fonction f par $f(p) = p(2-p) = -p^2 + 2p$. Il s'agit d'une fonction trinôme du second degré dont le maximum est obtenu pour $p = 1$ et $f(1) = 1$. De plus f est croissante sur $[0,1]$ ainsi le minimum de f sur $[0;1]$ est atteint pour $p = 0$ et $f(0) = 0$. Ainsi pour tout $p \in [0,1]$ on a $p(2-p) \in [0,1]$.

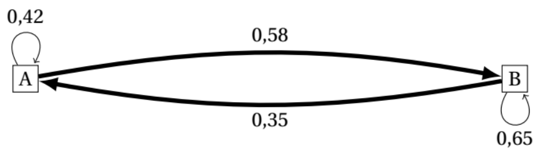
2. $P_A(A) = 1 - P_A(B) = 1 - p(2-p) = p^2 - 2p + 1 = (p-1)^2 = (1-p)^2 = (1 - P_B(A))^2 = (P_B(B))^2$

Corrigé exercice 59 :

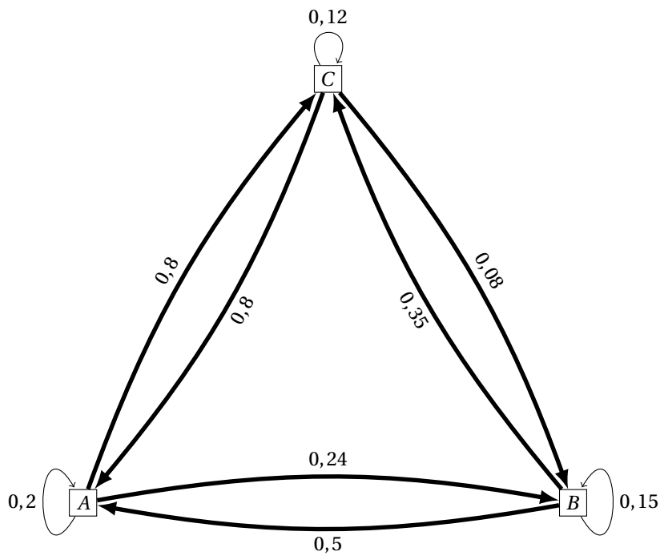
1. $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

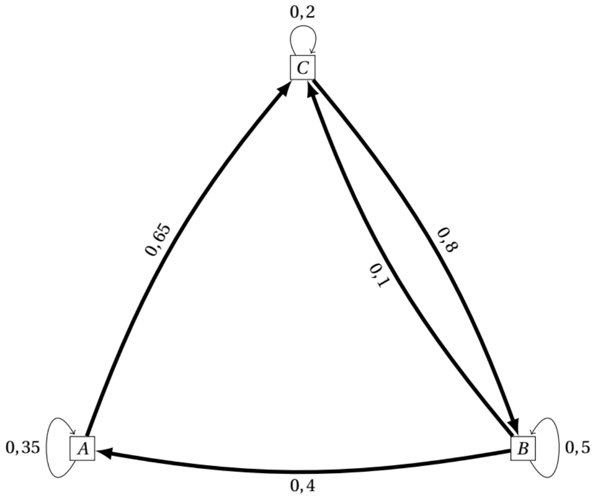


2. $\begin{pmatrix} 0,42 & 0,58 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$



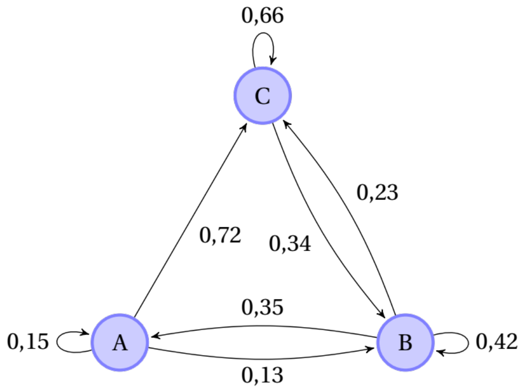
Corrigé exercice 60 :

1. 

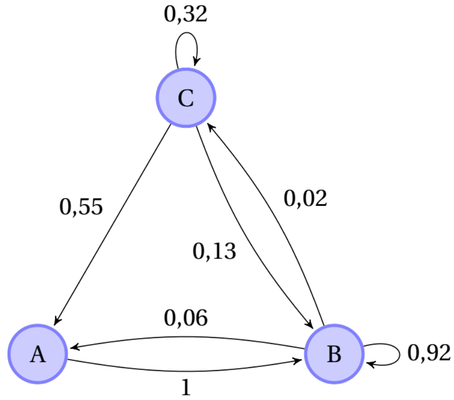
2. 

Corrigé exercice 61 :

1. $A = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,13 & 0,72 \\ 0,35 & 0,42 & 0,23 \\ 0 & 0,34 & 0,66 \end{pmatrix}$

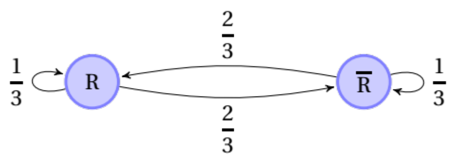


2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,06 & 0,92 & 0,02 \\ 0,55 & 0,13 & 0,32 \end{pmatrix}$



Corrigé exercice 62 :

1. La distribution initiale est $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.
2. La probabilité d'obtenir une boule noire sachant que la boule tirée à l'étape précédente est noire est égale à $\dfrac{1}{3}$ car il reste 3 boules dans l'urne dont une seule noire.
3. Le graphe probabiliste correspondant est :



La matrice de transition correspondante est $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

9 Exercices d'entraînement partie 3

Corrigé exercice 63 :

La probabilité de chaque état à l'étape 3 est donnée par P_0M^3. Or $M^3 = \begin{pmatrix} 0.447 & 0.553 \\ 0.474 & 0.526 \end{pmatrix}$ et donc $P_0M^3 = \begin{pmatrix} 0,4605 & 0,5395 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 64 :

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ admet par exemple la distribution $(0,1;0,9)$ comme distribution invariante car $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 65 :

La matrice de transition de la chaîne de Markov est $M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$. Pour montrer que l'état $\pi\left(\frac{b}{b+a}, \frac{a}{b+a}\right)$ est un état invariant, il faut montrer que $\pi M = \pi$.
Or $\pi M = \left(\frac{b(1-a)}{b+a} + \frac{ab}{b+a}, \frac{ab}{b+a} + \frac{(1-b)a}{b+a}\right) = \left(\frac{b}{b+a}, \frac{a}{b+a}\right)$.
Donc π est une distribution invariante de la chaîne de Markov.
Comme M ne contient aucun coefficient égal à 0, π est l'unique distribution invariante de la chaîne de Markov.

Corrigé exercice 66 :

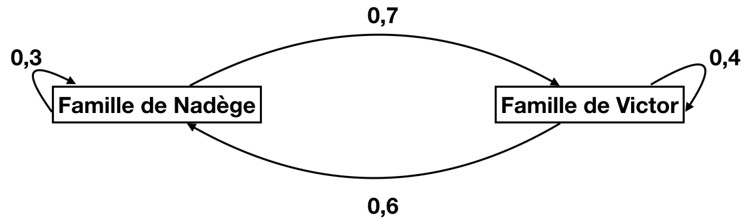
Notons $\pi(\alpha;\beta;\gamma)$ une distribution invariante de la chaîne de Markov. On notera M sa matrice de transition. L'égalité $\pi M = \pi$ se traduit par

- $(1-x-y)\alpha + x\beta + y\gamma = \alpha$, c'est-à-dire $(-x-y)\alpha + x\beta + y\gamma = 0$, soit $(-x-y)\alpha + x\beta + y(1-\alpha-\beta) = 0$, d'où$(-x-2y)\alpha + (x-y)\beta = -y$.
- $y\alpha + (1-x-y)\beta + x\gamma = \beta$, c'est-à-dire $y\alpha + (-x-y)\beta + x\gamma = 0$, soit $y\alpha + (-x-y)\beta + x(1-\alpha-\beta) = 0$, d'où $(y-x)\alpha + (-2x-y)\beta = -x$

Ce système admet une unique solution d'après le cours sur les matrices. Or, avec $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{1}{3}$, on obtient $\gamma = \frac{1}{3}$.

Document sous licence libre Creative Commons

Corrigé exercice 67 :



La matrice de transition est $M\begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.

et $M^{15} = \begin{pmatrix} 0,4615 & 0,5385 \\ 0,4615 & 0,5385 \end{pmatrix}$. Or la distribution initiale est $(0,1)$. Ainsi la distribution au bout de 15 étapes est $\begin{pmatrix} 0,4615 & 0,5385 \end{pmatrix}$.

La probabilité pour que Nadège fête Noël chez sa famille en 2035 vaut environ 0,4615.

Corrigé exercice 68 :

On sait que, quelle que soit la distribution initiale, la distribution de probabilité asymptotique est la distribution invariante. Donc, pour conjecturer la distribution invariante il suffit de calculer πM^{100} où π désigne une distribution de probabilité quelconque et M la matrice de transition de la chaîne de Markov.

```
from numpy import *
A=array([[0.8,0.2],[0.3,0.7]])



def puissance(n,A):
    R=eye(2)
    for i in range(n):
        R=R.dot(A)
    return R

etat=puissance(100,A)
distribution=[0.5,0.5]
distribution=[distribution[0]*etat[0][0]+distribution[1]*etat[1][0],
           distribution[0]*etat[0][1]+distribution[1]*etat[1][1]]

print(distribution)
```

La distribution invariante semble être $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.

Le programme suivant simule des marches aléatoires, et permet de conjecturer que l'état invariant est $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.

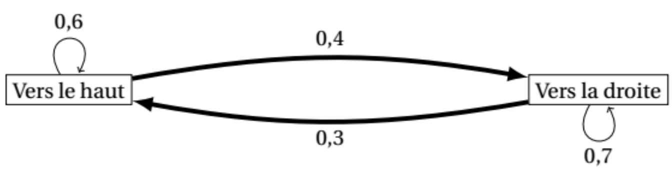
```python
from random import random

def marche_aleatoire(n):
    sommet = "A"
    for pas in range(n):
        if sommet == "A":
            if random() < 0.2:
                sommet = "B"
        else:
            if random() < 0.3:
                sommet = "A"
    return sommet

def distribution_invariante(N):
    effectif_A = 0
    for marche in range(N):
        if marche_aleatoire(100) == "A":
            effectif_A = effectif_A + 1
    return (effectif_A/N,1-effectif_A/N)
```

Corrigé exercice 69 :

1. $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ vaut alternativement $(0\,;1)$ et $(1\,;0)$.



2. a. =SI(D3="abscisse" ; SI(ALEA()<0,7 ; "abscisse" ; "ordonnée") ; SI(ALEA()<0,4 ; "abscisse" ; "ordonnée"))

   b. =SI(D4="abscisse" ; B3+1 ;B3)

   c. =SI(D4="ordonnée" ; C3+1 ; C3)

   d. =C4/B4

3. Il semble que la limite soit 0,7.

Corrigé exercice 70 :

1. Soient C, D et I les trois événements :

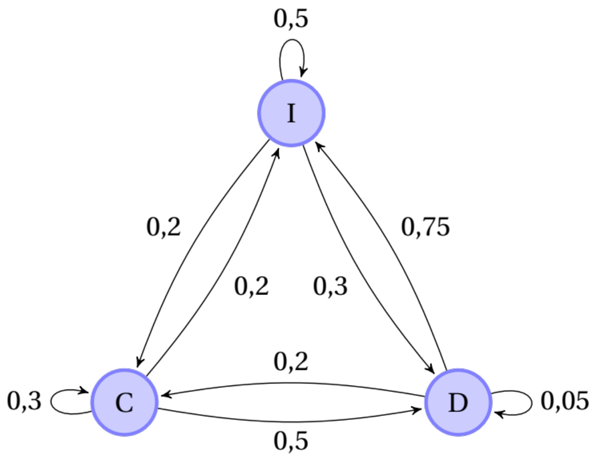
   C : “Ramanujan conjecture de nouvelles formules mathématiques” ;

   D : “Ramanujan démontre des résultats” ;

   I : “ Ramanujan imagine des applications”.

   Le graphe probabiliste suivant modélise la situation :

BY NC SA



Avec les sommets rangés dans l'ordre alphabétique, la matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,05 & 0,75 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

2. Ramanujan commence toujours la journée par conjecturer de nouvelles formules : la distribution initiale est donc $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Quatre heures plus tard, la distribution est : $\pi_0 M^4 \approx \begin{pmatrix} 0,222 & 0,273 & 0,505 \end{pmatrix}$

   La probabilité qu'il soit en train de démontrer des résultats au bout de quatre heures est donc environ $0,273$.

3. Neuf heures plus tard, la distribution pour la dixième heure de travail est :

   $\pi_0 M^9 \approx \begin{pmatrix} 0,222 & 0,276 & 0,502 \end{pmatrix}$

   La probabilité qu'il soit en train de conjecturer des résultats est donc environ $0,222$.

   La probabilité qu'il soit en train de démontrer des résultats est donc environ $0,276$.

   La probabilité qu'il soit en train d'imaginer des applications est donc environ $0,502$.

Corrigé exercice 71 :

1. La probabilité $P_A(B)$ et $P_B(A)$ sont situés sur la diagonale montante. Donc si ces deux valeurs sont égales, alors la matrice est symétrique.

2. De plus, comme ces deux valeurs sont différentes de 1 et de 0, aucun des termes de la matrice de transition n'est nul. Ainsi, il existe une unique distribution invariante pour la chaîne de Markov. Or une telle matrice de transition s'écrit $P = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ avec $a \in [0,1]$, et on remarque que $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

   Donc $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ est l'unique distribution invariante. Or, quelle que soit la distribution de départ, la distribution de probabilité converge vers cette distribution. Donc, à long terme, la probabilité de chaque état est $0,5$. Les états tendent donc à devenir équiprobables.

Corrigé exercice 72 :

1. Un cas est prévisible, qui permet de maximiser la deuxième composante de la distribution de probabilité au bout de deux transitions : si $p = 0$, dès la première transition, pour toutes les distributions suivantes, la distribution de probabilité est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Déterminons si c'est l'unique valeur de p qui convient.

   Soit M la matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} p(2-p) & (1-p)^2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$.

   La distribution initiale est $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

   Soit $f(p)$ la deuxième composante au bout d'une transition.

   $f(p) = 0,3(1-p)^2 + 0,7(1-p) = 0,3p^2 - 1,3p + 1$

   La dérivée $f'(p)$ est $f'(p) = 0,6p - 1,3$. On a donc $f'(p) = 0 \iff p = \frac{13}{6}$

   Sur $[0,1]$, $f'(p) < 0$, et f est donc strictement décroissante sur $[0,1]$. La seule valeur qui permet de maximiser la deuxième composante au bout d'une transition est $p = 0$.

2. La somme des coefficients d'une distribution associée à une chaîne de Markov vaut 1. La première composante vaut donc 0 lorsque la seconde vaut 1.

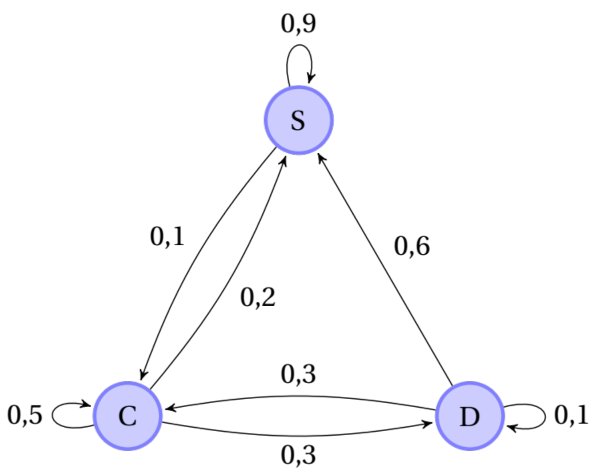
Corrigé exercice 73 :

1. Les événements C, D et S correspondent à :

   C : "L'habitant est un citoyen."

   D : "L'habitant est un dirigeant."

   S : "L'habitant est un soldat."



2. La matrice de transition M est (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique) :

Document sous licence libre Creative Commons

$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

L'habitant est un citoyen. La distribution initiale est $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\pi_0 M^2 = \begin{pmatrix} 0,36 & 0,18 & 0,46 \end{pmatrix}$

La probabilité qu'il soit dirigeant dans deux ans est $0,18$.

$\pi_0 M^3 = \begin{pmatrix} 0,28 & 0,126 & 0,594 \end{pmatrix}$

La probabilité qu'il soit dirigeant dans deux ans est $0,126$.

Corrigé exercice 74 :

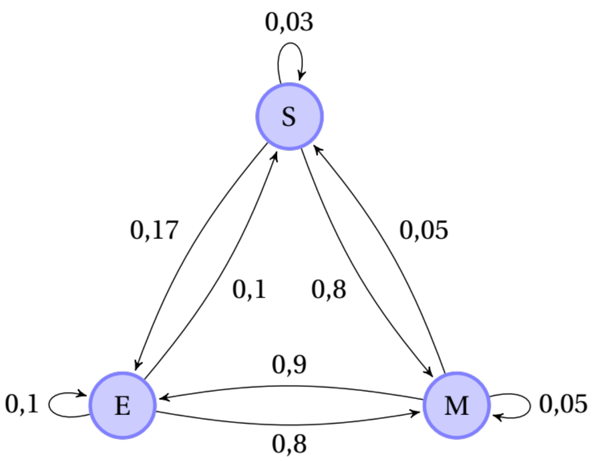
1. Les événements E, M et S sont :

   E : "L'essaim essaime" ;

   M : "L'essaim produit du miel" ;

   S : "L'essaim contracte une maladie".

   Le graphe probabiliste correspondant est :



   La matrice de transition, obtenue en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique, est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,9 & 0,05 & 0,05 \\ 0,17 & 0,8 & 0,03 \end{pmatrix}.$$

   La première année, la ruche a essaimé : la distribution initiale est : $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Dans trois ans, la distribution de probabilité est : $\pi_0 M^3 \approx \begin{pmatrix} 0,264 & 0,65 & 0,086 \end{pmatrix}$.

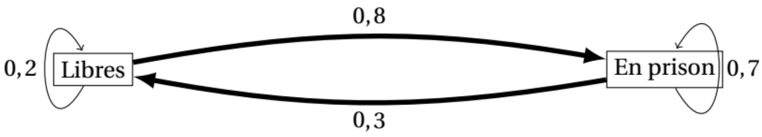
   La probabilité que la ruche soit en train d'essaimer est environ $0,264$.

Document sous licence libre Creative Commons

2. En calculant $\pi_0 M^{50} \approx \begin{pmatrix} 0,471 & 0,457 & 0,072 \end{pmatrix}$, on en déduit que la proportion d'années où la ruche essaime est environ $47,1$ %.

Corrigé exercice 75 :

1. On obtient



2. La matrice de transition associée à ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$ et la distribution initiale est $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule $\pi_0 M^8 = \begin{pmatrix} 0,273 & 0,727 \end{pmatrix}$. La probabilité qu'ils soient en liberté au bout de 8 semaines est $0,273$.

3. Les Dalton doivent rester quatre semaines de suite en prison. On peut modéliser la question en modifiant le graphe de probabilité. La probabilité de rester libre s'ils sont libres devient 1. Avec cette nouvelle matrice, $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$. On calcule $\pi_0 M'^4 = \begin{pmatrix} 0,7599 & 0,2401 \end{pmatrix}$. Il y a donc $24,01\%$ de chances qu'ils purgent leur peine en une fois.

   On peut aussi calculer directement ce nombre : ils doivent rester quatre semaines en prison. La probabilité que cela se produise est donc $0,7^4 = 0,2401$.

Corrigé exercice 76 :

1. La première ligne du système se ramène à $\frac{-1}{3}x + \frac{1}{6}y = 0$.

   Or $x + y = 1$, et donc $\frac{-1}{3}(1-y) + \frac{1}{6}y = 0$ donc $y = \frac{2}{3}$ et $x = \frac{1}{3}$.

   Ce couple solution vérifie également la deuxième équation.

2. La distribution invariante est donc $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 77 :

On note P la matrice de transition de la chaîne de Markov X_n donc P^2 est la matrice de transition de la chaîne de Markov Z_n. Ainsi, si π est une distribution invariante de X_n, on a $\pi P = \pi$ et donc $\pi P^2 = (\pi P)P = \pi P = \pi$.
Ainsi π est une distribution invariante de Z_n.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 78 :

1. Pour tout entier naturel n, on note respectivement a_n et b_n les probabilités respectives des deux états 1 et 2 de la chaîne de Markov après n transitions.

   D'après la définition d'une chaîne de Markov, l'état après $n+1$ transitions dépend uniquement des états après n transitions. D'après la formule des probabilités totales, on a donc $a_{n+1} = P_{\{1\}}(\{1\})a_n + P_{\{2\}}(\{1\})b_n$ et $b_{n+1} = P_{\{1\}}(\{2\})a_n + P_{\{2\}}(\{2\})b_n$.

   En posant, pour tout entier naturel n, $\pi_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} P_{\{1\}}(\{1\}) & P_{\{1\}}(\{2\}) \\ P_{\{2\}}(\{1\}) & P_{\{2\}}(\{2\}) \end{pmatrix}$, on retrouve bien l'égalité matricielle $\pi_{n+1} = \pi_n P$.

2. Montrons par récurrence sur l'entier naturel n la propriété $\pi_n = \pi_0 P^n$ notée P_n.

   Initialisation :

   $\pi_0 = \pi_0 P^0$ donc P_0 est vraie.

   Hérédité :

   Supposons qu'il existe un entier naturel $n$tel que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est alors également vraie.

   $\pi_{n+1} = \pi_n P = \pi_0 P^n P = \pi_0 P^{n+1}$

   Donc P_{n+1} est vraie.

   Conclusion :

   On a montré que la propriété est vraie au rang 0, puis que s'il existait un rang n tel que la propriété est vraie, alors elle est vraie au rang $n+1$.

   D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel n, $\pi_n = \pi_0 P^n$.

3. Pour 3 états, il suffit de considérer la probabilité c_n du troisième état, et reprendre le raisonnement précédent, avec :

   $a_{n+1} = P_{\{1\}}(\{1\})a_n + P_{\{2\}}(\{1\})b_n + P_{\{3\}}(\{1\})c_n$

   $b_{n+1} = P_{\{1\}}(\{2\})a_n + P_{\{2\}}(\{2\})b_n + P_{\{3\}}(\{2\})c_n$ $c_{n+1} = P_{\{1\}}(\{3\})a_n + P_{\{2\}}(\{3\})b_n + P_{\{3\}}(\{3\})c_n$

Document sous licence libre Creative Commons

10 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 79 :

1. $M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,35 & 0,45 & 0,2 \end{pmatrix}$

2. La distribution initiale est $\pi_1 = \begin{pmatrix} 0,355 & 0,405 & 0,24 \end{pmatrix}$.

3. Pour calculer la distribution à l'état 2, on calcule :

$$\pi_2 = \pi_1 M = \begin{pmatrix} 0,43365 & 0,40725 & 0,1596 \end{pmatrix}.$$

4. Il a raison car au bout d'un temps long, la distribution tend vers la distribution invariante (unique car la matrice de transition ne contient aucun 0). On peut le confirmer en calculant la distribution le 12ème jour $P_{12} \approx \begin{pmatrix} 0,4312 & 0,4102 & 0,1591 \end{pmatrix}$ et, au 13ème jour, $P_{13} \approx \begin{pmatrix} 0,4312 & 0,4102 & 0,1591 \end{pmatrix}$.

   Ces matrices sont égales jusqu'à la 4ème décimale.

Corrigé exercice 80 :

1. La matrice de transition obtenue en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique est $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Au début, le client est en A, donc $a_0 = 1$. L'état initial est donc : $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une distribution invariante (une fois en C, le client y reste).

4. L'attente minimale d'un client est égale à 2 minutes : cela arrive lorsque le client passe dès la première transition en B, et dès la suivante en C.

5. a. D est une matrice diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Document sous licence libre Creative Commons
cc BY NC SA

b. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,04 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On dit que la matrice N est nilpotente d'ordre 3.

c. Montrons par récurrence sur n la propriété :

$$\mathcal{P}_n : P^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,2 \times 0,8^{n-1} \times n & 1-(0,8+0,2n) \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n & 1-0,8^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 1$,

$$\begin{pmatrix} 0,8^1 & 0,2 \times 0,8^{1-1} \times 1 & 1-(0,8+0,2 \times 1) \times 0,8^{1-1} \\ 0 & 0,8^1 & 1-0,8^1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$$

La proposition est vraie au rang 1.

Supposons la proposition vraie au rang n.

On a alors :

$P^{n+1} = P \times P^n$

$$P^{n+1} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,2 \times 0,8^{n-1} \times n & 1-(0,8+0,2n) \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n & 1-0,8^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{n+1} = \begin{pmatrix} 0,8^{n+1} & 0,2 \times 0,8^n \times (n+1) & 1-(0,8+0,2(n+1)) \times 0,8^n \\ 0 & 0,8^{n+1} & 1-0,8^{n+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La proposition est donc également vraie au rang $(n+1)$, et la propriété est donc démontrée pour tout entier naturel non nul.

d. La distribution au bout de n minutes est donnée par :

$\pi_n = \pi_0 \times P^n$

$$\pi_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,2 \times 0,8^{n-1} \times n & 1-(0,8+0,2n) \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n & 1-0,8^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,2 \times 0,8^{n-1} \times n & 1-(0,8+0,2n) \times 0,8^{n-1} \end{pmatrix}$$

Or $0 \leqslant 0,8 < 1$. Ainsi, lorsque n tend vers l'infini, π_n tend vers la matrice π obtenue à la question 3.

6. a. Une attente de n minutes signifie qu'à $n-1$ minutes, le client était encore en B, et qu'il vient d'arriver en C au bout de n minutes. La probabilité de $X = n$ est donc égale à la différence de c_{n-1} et c_n.

Document sous licence libre Creative Commons

b. L'espérance de X est : (attention, X peut prendre toute valeur entière supérieure ou égale à 2).
$E(X) = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=2}^{N} kP(X=k) = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=2}^{N} k(c_k - c_{k-1})$

c. On a :
$P(X=n) = c_n - c_{n-1}$
$P(X=n) = (1-(0,8+0,2n)\times 0,8^{n-1}) - ((1-(0,8+0,2(n-1))\times 0,8^{n-2}))$
$P(X=n) = (-0,64+0,6+0,04n)\times 0,8^{n-2}$
$P(X=n) = 0,04(n-1)\times 0,8^{n-2}$
$E(X) = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=2}^{N} k(0,04(k-1)\times 0,8^{k-2})$
$E(X) = 0,04 \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=2}^{N} k(k-1)\times 0,8^{k-2}$
D'après le cours sur les suites géométriques, on sait que, pour une suite géométrique de raison q différente de 1 et de premier terme $u_0 = 1$:
$f_N(q) = \sum\limits_{k=0}^{N} q^k = \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q}$
En calculant les dérivées première et seconde de f (par rapport à q), on trouve :

$$\begin{aligned} f'_N(x) &= \sum_{k=1}^{N} kq^{k-1} \\ &= \frac{(-(N+1)q^N(1-q)) - ((1-q^{N+1})\times(-1))}{(1-q)^2} \\ &= \frac{Nq^{N+1} - (N+1)q^N + 1}{(1-q)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''_N(x) &= \sum_{k=2}^{N} k(k-1)q^{k-2} \\ &= \frac{(N(N+1)q^N - N(N+1)q^{N-1})(1-q)^2 - (Nq^{N+1} - (N+1)q^N + 1)\times(-2)(1-q}{(1-q)^4} \\ &= \frac{-N(N+1)q^{N-1}(1-q)^2 - (Nq^{N+1} - (N+1)q^N + 1)\times(-2)}{(1-q)^3} \end{aligned}$$

On a donc $E(X) = 0,04 \lim\limits_{N\to+\infty} f''_N(0,8) = 0,04 \times \dfrac{2}{(1-0,8)^3} = 10$

d. Le temps d'attente moyen est égal à 10 minutes.

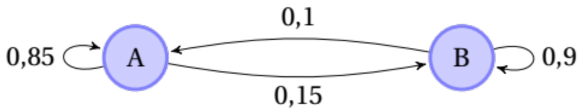
Corrigé exercice 81 :

1. La loi de probabilité de X_1 est :

x	a	b
$P(X_1 = x)$	1	0

Document sous licence libre Creative Commons
cc BY NC SA

2. On obtient



3. $P = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

4. Comme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \end{pmatrix}$, la loi de probabilité de X_2 est :

x	a	b
$P(X_2 = x)$	$0,85$	$0,15$

5. a. Comme $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85a_n + 0,1b_n & 0,15a_n + 0,9b_n \end{pmatrix}$, on a :
$a_{n+1} = 0,85a_n + 0,1b_n$.
Or $a_n + b_n = 1$, donc $a_{n+1} = 0,85a_n + 0,1(1 - a_n) = 0,75a_n + 0,1$.

b. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $v_n = a_n - 04$.
Montrons que la suite (v_n) est une suite géométrique.
$v_{n+1} = a_{n+1} - 0,4$ or $a_{n+1} = 0,75a_n + 0,1$ donc :

$$v_{n+1} = 0,75a_n + 0,1 - 0,4 = 0,75a_n - 0,3.$$

Comme $a_n = v_n + 0,4$:

$$v_{n+1} = 0,75(v_n + 0,4) - 0,3 = 0,75v_n + 0,3 - 0,3 = 0,75v_n.$$

De plus, $v_1 = a_1 - 0,4 = 1 - 0,4 = 0,6$.
Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_1 = 0,6$ et de raison $q = 0,75$.

c. La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_1 = 0,6$ et de raison $q = 0,75$. Son terme général est donc, pour tout entier naturel n non nul, donné par :
$v_n = v_1 \times q^{n-1}$
$v_n = 0,6 \times 0,75^{n-1}$
$v_n = \dfrac{0,6}{0,75} \times 0,75^n$
$v_n = 0,8 \times 0,75^n$
Comme $a_n = v_n + 0,4$, on en déduit que le terme général de la suite (a_n) vaut :
$a_n = 0,8 \times 0,75^n + 0,4$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

Corrigé exercice 82 :

En prenant les sommets dans l'ordre alphabétique, les pondérations obtenues à l'aide de PageRank sont proches de $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0\end{pmatrix}$.
Lors de la marche aléatoire, on finit presque toujours piégé en d ou en e, ce qui surévalue leurs pondérations, et sous-évalue celles des autres sommets.

Corrigé exercice 83 :

1. X_j peut prendre les valeurs 0, 1 et 2.
2. Pour tout $i \in \{0;1;2\}$, $P_{X_j=i}(X_{j+1}=i)=0$ car une boule change d'urne à chaque étape (le nombre de boules dans l'urne A change donc à chaque étape).
3. $P_{X_j=0}(X_{j+1}=2)=0$ et $P_{X_j=2}(X_{j+1}=0)=0$ car une seule boule, et pas deux, change d'urne à chaque étape.
4. $P_{X_j=0}(X_{j+1}=1)=1$ et $P_{X_j=1}(X_{j+1}=0)=1$.
5. $P_{X_j=1}(X_{j+1}=0)=P_{X_j=1}(X_{j+1}=2)=\frac{1}{2}$
   La matrice de transition associée à cette chaîne de Markov est (sommets dans l'ordre croissant du nombre de boules) :
$$M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0,5 & 0 & 0,5\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$
6. Tout d'abord, remarquons que $M^1=M$.
   Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel k non nul :
$$M^{2k}=\begin{pmatrix}0,5 & 0 & 0,5\\ 0 & 1 & 0\\ 0,5 & 0 & 0,5\end{pmatrix} \text{ et } M^{2k+1}=M.$$
   Pour $k=1$: $M^2=\begin{pmatrix}0,5 & 0 & 0,5\\ 0 & 1 & 0\\ 0,5 & 0 & 0,5\end{pmatrix}$
   $M^3=M$ par calcul.
   Supposons qu'il existe un entier naturel k non nul tel que :
$$M^{2k}=\begin{pmatrix}0,5 & 0 & 0,5\\ 0 & 1 & 0\\ 0,5 & 0 & 0,5\end{pmatrix} \text{ et } M^{2k+1}=M.$$

Alors $M^{2k+2} = M^{2k+1} \times M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$ et $M^{2k+3} = M^{2k+2} \times M = M$.

On vient de montrer que, pour tout entier naturel j, si j est impair, $M^j = M$ et, si j est pair, $M^j = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$.

7. Toutes les boules sont placées initialement dans l'urne A donc $X_0 = 2$. La distribution initiale est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Si j est impair, la distribution au bout de j étapes est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

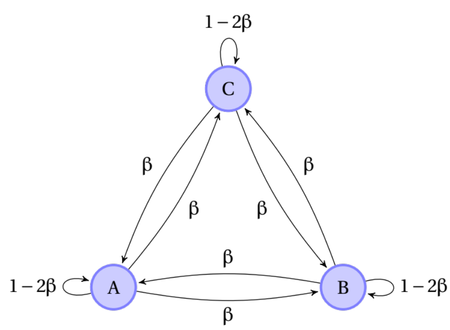
Si j est pair, la distribution au bout de j étapes est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

9. Il y a en moyenne une boule dans l'urne A à la $j$ème étape (car $0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 0,5 \times 0 + 0 \times 1 + 0,5 \times 2 = 1$).

Corrigé exercice 84 :

1. On obtient



2. On veut $0 \leq \beta \leq 1$ et $0 \leq 1 - 2\beta \leq 1 \iff 0 \leqslant \beta \leqslant 0,5$

3. a. $P = (1 - 3\beta)I + \beta M$
   On a donc $\alpha = 1 - 3\beta$

b. Pour $k = 1$:
$M^1 = 3^0 M = M$. Donc la propriété est vraie au rang 1.
Supposons la propriété vraie au rang k fixé. Montrons qu'elle est alors vraie au rang $k+1$.
$M^{k+1} = M^k M = 3^{k-1} M^2$
Or $M^2 = 3M$ donc $M^{k+1} = 3^k M$.
La propriété est ainsi prouvée pour tout k non nul par récurrence.

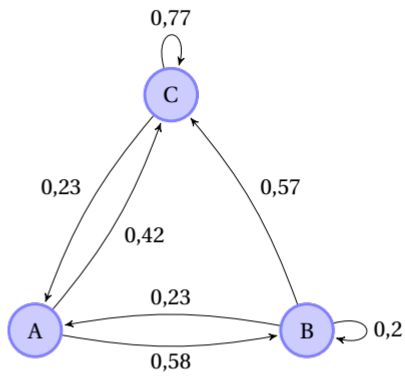
c. $I_3 M = M$ et $MI_3 = M$. On peut appliquer l'aide :
$P^n = (\alpha I_3 + \beta M)^n$
$P^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha I_3)^{n-k} (\beta M)^k$
$P^n = \alpha^n I_3 \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k M^k$
$P^n = \alpha^n I_3 \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k \times 3^{k-1} \right) M$

4. a. $\pi_0 P^n = \begin{pmatrix} \alpha^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k \times 3^{k-1} & \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k \times 3^{k-1} & \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k \times 3^{k-1} \end{pmatrix}$

b. Si $\beta = 0$, on tend vers la distribution $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Sinon, par passage à la limite, on se rapproche de $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Il existe donc deux distributions asymptotiques selon la valeur de β.

Corrigé exercice 85 :

1. On obtient

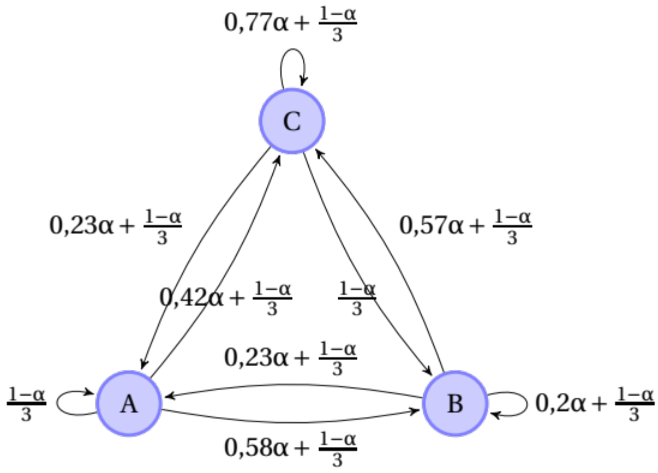


$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0,58 & 0,42 \\ 0,23 & 0,2 & 0,57 \\ 0,23 & 0 & 0,77 \end{pmatrix}$$

2. a. Soit α un nombre réel appartenant à $]0;1[$, et $\hat{P}$ la matrice :
$\hat{P} = \alpha P + (1-\alpha)E$.
On note $a_{i,j}$ les coefficients de P

Pour tout coefficient $\hat{a}_{i,j}$ de $\hat{P}$, on a $\hat{a}_{i,j} = \alpha a_{i,j} + (1-\alpha)\frac{1}{3}$.
Montrons que $0 < \hat{a}_{i,j} < 1$. P étant une matrice de transition, $0 \leqslant a_{i,j} \leqslant 1$ et donc, α étant positif, $0 \leqslant \alpha a_{i,j} \leqslant \alpha$.
Or $0 < (1-\alpha)\frac{1}{3} < 1-\alpha < 1$ donc $0 < \alpha a_{i,j} + (1-\alpha)\frac{1}{3} \leqslant \alpha + (1-\alpha)$.
Ainsi, $0 < \hat{a}_{i,j} < \alpha + 1 - \alpha$, d'où $0 < \hat{a}_{i,j} < 1$.

b. Le graphe probabiliste correspondant est :



Corrigé exercice 86 :

Partie A

1. Soit $U_n = \begin{pmatrix} b_n \\ g_n \end{pmatrix}$ le terme général d'une suite de matrices donnant la population de brochets et de gardons l'année n dans l'étang.
D'après l'énoncé, la suite (U_n) vérifie :

$$\begin{cases} U_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 2000 \end{pmatrix} \\ U_{n+1} = AU_n, \qquad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{où } A \text{ est la matrice } A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,01 \\ -0,2 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

2. On en déduit, d'après le cours, que pour tout entier naturel n :

$$U_n = A^n U_0 = A^n \begin{pmatrix} 100 \\ 2\,000 \end{pmatrix}.$$

3. a. Avec la calculatrice $U_{30} \approx \begin{pmatrix} 3 \\ 60 \end{pmatrix}$.
Cela signifie qu'au bout de 30 ans, il devrait rester 3 brochets et 60 gardons dans l'étang.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA

b. Au 1er janvier 2110, la calculatrice donne $U_{90} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On en conclut donc l'absence de brochets et de gardons dans l'étang à cette date.

4. a. $D^n = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{20-\sqrt{5}}{25}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{20+\sqrt{5}}{25}\right)^n \end{pmatrix}$.

b. Montrons par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$pour tout entier naturel n non nul.
Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien $A = PDP^{-1}$, d'après l'énoncé.
Hérédité :
Supposons qu'il existe un entier naturel n non nul tel que $A^n = PD^nP^{-1}$.
Alors $A^{n+1} = A^nA = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1})$
$= PD^nDP^{-1}) = PD^{n+1}P^{-1}$.
Conclusion : On a montré que la propriété est vraie au rang 1, puis que s'il existe un rang n tel que la propriété est vraie, alors elle l'est au rang $n + 1$. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel non nul n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

c. Comme les éléments diagonaux de D appartiennent à $]-1; 1[$, la limite des deux coefficients diagonaux de D^n, lorsque n tend vers $+\infty$, est nulle.

Ainsi, la suite de matrices (U_n) tend vers la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On en déduit que la limite des suites (b_n) et (g_n) est nulle, quel que soit le choix des valeurs de b_0 et g_0.

Partie B

1. Soit $V_n = \begin{pmatrix} b_n \\ g_n \end{pmatrix}$ le terme général d'une suite de matrices donnant la population de brochets et de gardons l'année n dans l'étang.

D'après l'énoncé, la suite (V_n) vérifie : $\begin{cases} U_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 2000 \end{pmatrix} \\ V_{n+1} = A'U_n + B', \qquad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

où A' est la matrice $A' = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,01 \\ -0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix}$.

On remarque que $A' = A$.

2. a. On a $\det(A' - I_2) \neq 0$ donc $A' - I_2$ est inversible.

b. D'après le cours, la suite (W_n) définie par $W_n = V_n - C$ avec $C = -(A - I_2)^{-1}B$ vérifie $W_{n+1} = A'W_n = AW_n$.

Document sous licence libre Creative Commons

Ainsi, on a, pour tout entier naturel n, $W_n = A^n W_0$.

Remarque : On peut vérifier à la calculatrice que $C = \begin{pmatrix} 15,625 \\ 468,75 \end{pmatrix}$ et donc calculer $W_0 = V_0 - C$.

c. On en déduit que, pour tout entier naturel n, $V_n = W_n + C = A^n W_0 + C$.

3. a. On a, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, $V_n = PD^nP^{-1}W_0 + C$.

b. Lorsque n tend vers $+\infty$, les coefficients de la matrice D^n tendent vers 0 et V_n tend donc la matrice C et cela quelles que soient les valeurs de b_0 et de g_0.
Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 15,625$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n = 468,75$.

Document sous licence libre Creative Commons
BY NC SA