Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 1 : Combinatoire et dénombrement

Table des matières

1 Informations sur ce chapitre

Le B.O. précise les enjeux de ce chapitre comme suit : « Il s'agit ainsi d'enrichir le vocabulaire ensembliste des élèves et d'offrir une initiation aux mathématiques discrètes, qui jouent un rôle important dans le développement de l'informatique. »
Ce travail sur des mathématiques discrètes a été abordé en classe de Première par le biais des suites. Aussi, des rappels sur ces notions sont proposées en tout début de chapitre.
De nombreux exercices de début de chapitre se veulent plutôt théoriques : en effet, il est important pour les élèves de maîtriser les différentes notions en jeu dans le cadre du dénombrement, de savoir distinguer les diverses situations et les outils qui leur sont associés. Ces exercices permettent également de s'entraîner à démontrer, en utilisant un large panel de techniques : contraposées, déduction et raisonnement par récurrence. Ces méthodes serviront tout au long de l'année en classe de Terminale. Ce chapitre est également l'occasion d'introduire la notation Sigma des sommes.
Suivent alors les exercices d'application qui font intervenir des domaines très variés et ne se restreignent pas aux simples mathématiques. Si le chapitre sur les probabilités s'inspirera fortement du chapitre sur le dénombrement, les élèves suivant la spécialité Numérique et Sciences informatiques, par exemple, verront de nombreux liens avec cette deuxième matière (arbres binaires et graphes. . .).

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

1. $u_0 = 2 \times 0^2 - 1 = -1$ $u_1 = 2 \times 1^2 - 1 = 1$ $u_2 = 2 \times 2^2 - 1 = 7$ $u_3 = 2 \times 3^2 - 1 = 17$
2. $u_0 = -2$ $u_1 = u_0^2 = (-2)^2 = 4$ $u_2 = u_1^2 = 4^2 = 16$ $u_3 = u_2^2 = 16^2 = 256$
3. $u_0 = 1$ $u_1 = 2u_0 - 3 \times 0 = 2 \times 1 - 0 = 2$ $u_2 = 2u_1 - 3 \times 1 = 2 \times 2 - 3 = 1$ $u_3 = 2u_2 - 3 \times 2 = 2 \times 1 - 6 = -4$

Corrigé exercice 2 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2(n+1)^2 + 4(n+1) - 3 = 2(n^2 + 2n + 1) + 4n + 4 - 3 = 2n^2 + 8n + 3$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{n+1+3} = \dfrac{2n+2}{n+4}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{3(n+1)^2 + 2(n+1) + 7} = \dfrac{3^{n+1}}{3n^2 + 6n + 3 + 2n + 2 + 7} = \dfrac{3^{n+1}}{3n^2 + 8n + 12}$.

Corrigé exercice 3 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+3} = \dfrac{n+3}{(n+1)(n+3)} - \dfrac{n+1}{(n+1)(n+3)} = \dfrac{2}{(n+1)(n+3)}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n}{n+1} \times \dfrac{n+1}{n+2} \times \dfrac{n+2}{n+3} = \dfrac{n}{n+3}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n^2-4}{n+2} = \dfrac{(n+2)(n-2)}{n+2} = n-2$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n+1)}{(n+2)^2} - \dfrac{n}{n+2} = \dfrac{n(n+1)}{(n+2)^2} - \dfrac{n(n+2)}{(n+2)^2} = \dfrac{-n}{(n+2)^2}$.

Corrigé exercice 4 :

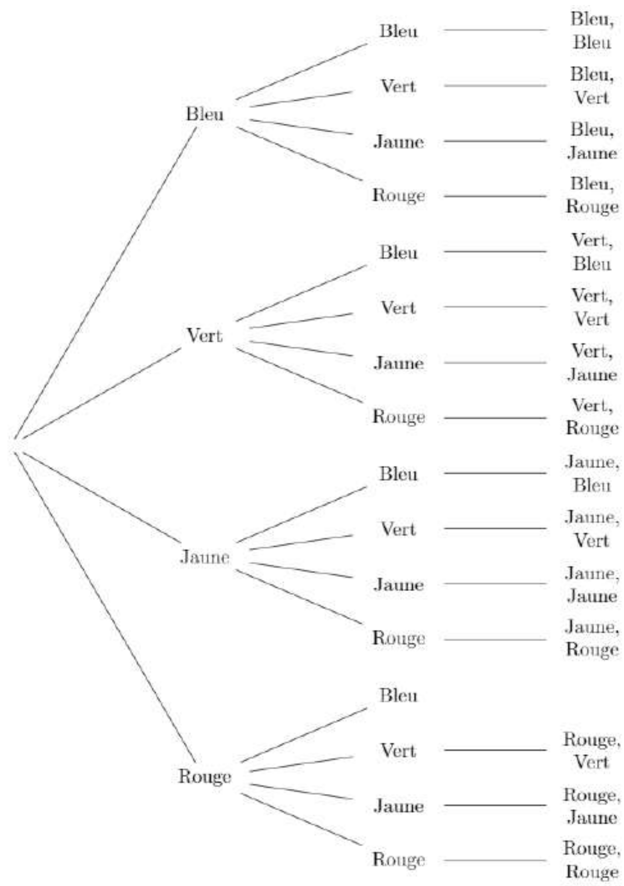
1. L'événement A est réalisé par les issues 2, 4 et 6. L'événement B est réalisé par les issues 3, 4, 5 et 6.

2. $A \cup B$: le nombre est pair OU est supérieur ou égal 3. Cet événement est réalisé par les issues 2, 3, 4, 5 et 6. Cela revient ici à dire que le nombre obtenu est supérieur ou égal à 2. L'événement $A \cap B$ (le nombre est pair ET supérieur ou égal à 3) est réalisé par les issues 4 et 6.

3. Les événements $C = \{1;2\}$ et $D = \{4;5\}$ conviennent.

Corrigé exercice 5 :

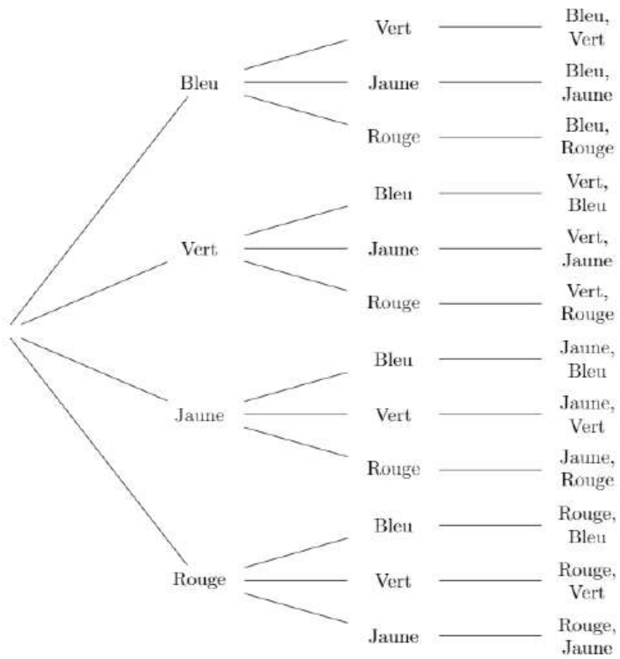
1. a. Au premier tirage, la boule tirée peut être bleue, verte, jaune ou rouge. Puisqu'on remet la boule, au second tirage, les mêmes choix de couleurs sont possibles. On obtient alors l'arbre suivant montrant les 16 possibilités.



b. On notera respectivement B, V, J, R si la boule est de couleur bleue, verte, jaune ou rouge. Les issues sont BB, BV, BJ, BR, VB, VV, VJ, VR, JB, JV, JJ, JR, RB, RV, RJ, RR.

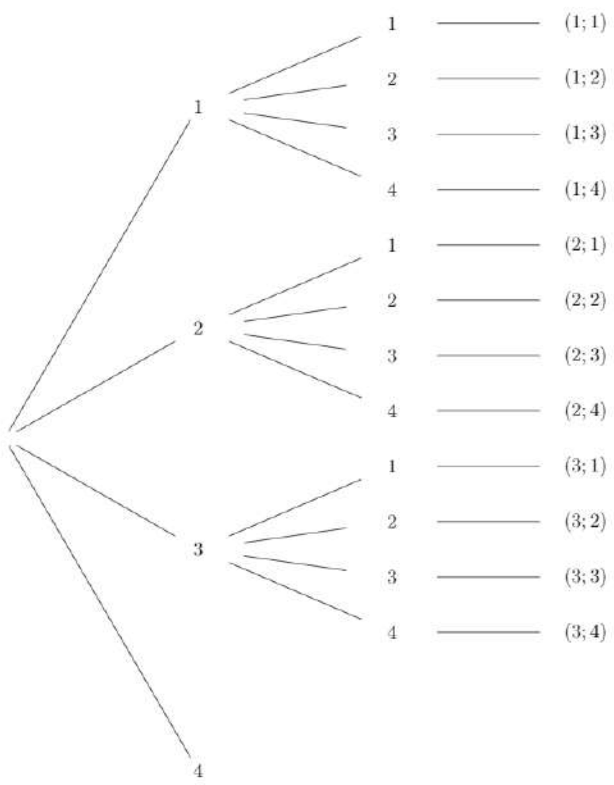
2. a. Les issues BB, BJ, BR, JB, JJ, JR, RB, RJ et RR réalisent l'événement "la boule verte n'a pas été tirée". Il y a donc neuf issues qui réalisent cet événement.
   b. L'issue JJ réalise l'événement "la boule jaune a été tirée deux fois". Il y a donc une seule issue qui réalise cet événement.

3. Cette fois, on ne remet pas la boule dans l'urne. Donc, la même couleur ne peut pas apparaître lors du premier et du second tirage. Il n'y a donc plus que 12 possibilités (arbre ci-après).

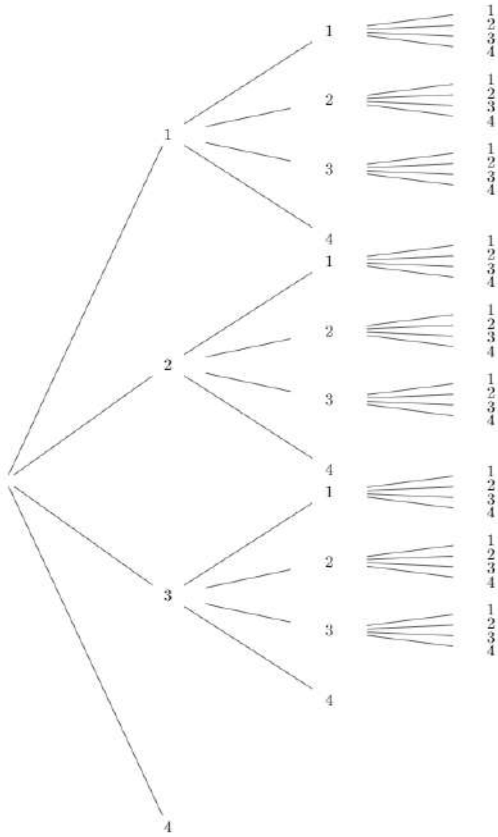


Corrigé exercice 6 :

1. Il y a 13 issues à cette expérience aléatoire.



2. Parmi les 13 issues, 9 n'aboutissent pas à un 4 et demanderont donc un lancer supplémentaire, donnant 4 fois plus de possibilités, soit 36 issues. Les 4 autres ne donnent pas de nouvelle possibilité. Le nombre d'issues est donc $36 + 4 = 40$. L'arbre des possibilités est le suivant mais il commence à être trop imposant pour être dessiné, il est donc préférable d'utiliser des arguments de dénombrement.



3. On a vu que $u_1 = 4$, $u_2 = 13$ et $u_3 = 40$.

4. On raisonne selon les résultats du premier dé.

   - Si le résultat est 1, 2, ou 3, on répète l'expérience qui consiste à lancer $n-1$ fois le dé au maximum. Le nombre d'issues dans chacun de ces trois cas est u_{n-1}.
   - Si le résultat est 4, on ne relance pas le dé, cela ne fait qu'une issue supplémentaire. On aboutit à la relation $u_n = 3u_{n-1} + 1$ valable pour tout $n \geqslant 1$.

5. On a ainsi :

   - $u_4 = 3u_3 + 1 = 3 \times 40 + 1 = 121$
   - $u_5 = 3u_4 + 1 = 3 \times 121 + 1 = 364$
   - $u_6 = 3u_5 + 1 = 3 \times 364 + 1 = 1093$
   - $u_7 = 3u_6 + 1 = 3 \times 1093 + 1 = 3280$

3 Activités

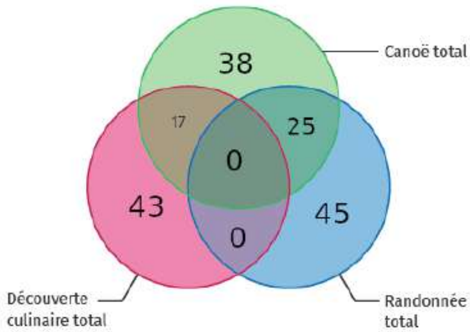
3.1 Corrigé activité A :

Questions :

1. Si le vacancier décide de faire 0 activité ou 3 activités, cela fait 2 possibilités. Si le vacancier décide de ne faire qu'une activité, il a alors 3 choix possibles. Enfin, si le vacancier décide de faire 2 activités parmi les trois, il a 3 paires de choix possibles. Au final, il existe 8 programmes différents.

2. En faisant la somme des inscrits, on obtient 70 + 80 + 60 = 210. Or, il n'y a que 180 vacanciers. Certains sont donc inscrits à plusieurs activités.

3. a. Puisque 80 personnes sont inscrites au canoë et que, parmi elles, 17 sont aussi inscrite à la découverte culinaire, il en reste donc 63. Parmi elles, 25 se sont inscrites à la randonnée. Cela fait donc 38 personnes inscrites uniquement au canoë. Des soustractions nous permettent d'obtenir les autres valeurs.



   b. Sur ce diagramme, on compte 45 + 25 + 43 + 38 + 17 = 168 personnes. 12 personnes ne sont donc inscrites à aucune activité.

4. On obtient $\text{Card}(C) = 38+17+25 = 80$; $\text{Card}(R) = 45+25 = 70$; $\text{Card}(R \cup D) = 45+25+43+17 = 130$ et $\text{Card}(C \cup D) = 38+25+17+43 = 123$.

5. On remarque que $\text{Card}(R) + \text{Card}(D) = \text{Card}(R \cup D)$.

6. Une telle relation n'existe pas pour $\text{Card}(C)$, $\text{Card}(D)$ et $\text{Card}(C \cup D)$ puisque des personnes participent aux deux activités de canoë et de découverte culinaire.

7. Il y a 80 choix pour le prix en canoë, 70 en randonnée et 60 en découverte culinaire. Le nombre de triplets qui peut être formé est donc de $80 \times 70 \times 60 = 336\,000$.

Bilan :

1. Il y a $\text{Card}(A)$ choix pour le premier nombres et $\text{Card}(B)$ choix pour le deuxième. La cardinal du produit cartésien de A et B est donc $\text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$.

2. Le produit cartésien de trois ensemble A, B, et C est l'ensemble des triplets $(x; y; z)$ avec $x \in A$, $y \in B$ et $z \in C$. Son cardinal vaut $\text{Card}(A) \times \text{Card}(B) \times \text{Card}(C)$.

3. Plus généralement, le produit cartésien de A_1, A_2, ... A_n est l'ensemble des $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec $x_i \in A_i$ pour tout i entre 1 et n. Le cardinal de ce produit cartésien est égal au produit des cardinaux des ensembles A_i pour i allant de 1 à n.

3.2 Corrigé activité B :

Questions :

1. a. Pour la première boule, on a 4 possibilités. Pour chacune d'elle, on a 4 possibilités pour la deuxième boule et, pour chacune de ces possibilités, on a 4 possibilités pour la dernière boule. Cela nous donne $4^3 = 64$ issues possibles.
   b. Si la première boule tirée n'est pas verte, alors il n'existe plus que 3 choix possibles au premier tirage. On a alors $3 \times 4 \times 4 = 48$ issues correspondant au résultat "la première boule tirée n'est pas verte".
   c. $64 - 48 = 16$ issues correspondent au résultat "la première boule tirée est verte".

2. a. Les issues $(V; V; R)$, $(J; B; J)$ et $(R; R; R)$ ne peuvent plus êtres obtenues s'il n'y a pas de remise. Une même couleur ne peut plus apparaître 2 fois.
   b. Cette fois, nous avons 4 choix pour la première boule, puis 3 choix pour la deuxième et enfin 2 choix pour la dernière. Il y a donc $4 \times 3 \times 2 = 24$ issues possibles.
   c. Si la première boule tirée n'est pas bleue, alors il reste $3 \times 3 \times 2 = 18$ issues possibles.

Bilan :

Dans le cas d'un tirage avec remise, n boules sont constamment à disposition. Chaque tirage se fait donc avec n boules, ce qui multiplie le nombre de possibilités par n à chaque fois. Les issues sont au nombre de n^k. En revanche, s'il n'y a pas de remise, le nombre de boules disponibles diminue de 1 à chaque fois. Il y en a n pour le premier tirage, $n - 1$ pour le suivant et ainsi de suite jusqu'à $n - k + 1$. Le nombre d'issues est donc $n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

3.3 Corrigé activité C :

Questions :

1. a. Il y a 10 choix pour la première carte.
   b. Une fois la première carte tirée, il ne reste plus que 9 cartes parmi lesquelles on en tire une nouvelle.
   c. Il restera donc 8 cartes pour le dernier tirage. Le nombre de tirages possibles est donc $10 \times 9 \times 8 = 720$.

2. a. Les tirages avec ordre $(1; 3; 5)$, $(1; 5; 3)$, $(3; 5; 1)$, $(3; 1; 5)$, $(5; 1; 3)$ et $(5; 3; 1)$ mènent au tirage sans ordre $\{1; 5; 3\}$. Il y en a 6.
   b. Il y a 720 tirages avec ordre possible. Cependant, chaque tirage sans ordre correspond à 6 tirages avec ordre, le nombre de tirage sans ordre est donc 6 fois moins grand. Il est donc égal à $\dfrac{720}{6} = 120$.

c. Si on note O le nombre de tirages tenant compte de l'ordre et P le nombre de tirages ne tenant pas compte de l'ordre, on a $O = 6P$.

Bilan :

On peut effectuer $\dfrac{n(n-1)...(n-k)}{k(k-1)...1}$ tirages différents. Si on connaît la notation factorielle, on peut aussi l'écrire $\dfrac{n!}{k!}$.

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 7 :

On a ici un tirage avec ordre et sans remise de 5 éléments parmi 5.
Réponse b

Corrigé exercice 8 :

On a 17 possibilités pour le garçon et 12 pour la fille. Il s'agit du produit cartésien de deux ensembles dont un a 17 éléments et l'autre 12.
Réponse a.

Corrigé exercice 9 :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 3} = 2 \times 5 = 10$$

Réponse c.

Corrigé exercice 10 :

C'est un tirage sans remise avec ordre, il y a donc 12 possibilités pour la première carte, 11 pour la deuxième, 10 pour la troisième, etc. soit $12 \times 11 \times 10 = \dfrac{12!}{9!}$ tirages différents.
Réponse b.

Corrigé exercice 11 :

On rappelle que $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$.
Réponses b et d.

Corrigé exercice 12 :

On a une union disjointe, on ajoute donc $\dbinom{11}{4}$ et $\dbinom{11}{5}$. Par ailleurs, la relation de Pascal nous dit que la somme de ces termes vaut $\dbinom{12}{5}$.

Réponses b et c.

Corrigé exercice 13 :

Il faut que les 4 éléments soient présents une seule fois. Dans la réponse b, on en compte seulement 3. La réponse c est un ensemble et non un n-uplet.
Réponses a et d.

Corrigé exercice 14 :

On a 6 possibilités pour le premier chiffre, 5 pour le deuxième, 4 pour le troisième et 3 pour le quatrième, soit $6 \times 5 \times 4 \times 3$. Ceci peut se réécrire $\frac{6!}{2!}$.

$\boxed{\text{Réponses b et d.}}$

Corrigé exercice 15 :

1. a. Si le tirage est effectué avec remise, il y a 9 choix possibles pour chaque chiffre, soit $9^3 = 729$ nombres possibles.
   b. Un nombre est pair si et seulement si son dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8. Ici, le 0 n'est pas disponible, ce qui ne laisse que 4 possibilités pour le dernier chiffre. Les deux premiers n'ont aucune restriction. Il y a donc $9 \times 9 \times 4 = 324$ nombres pairs constructibles.

2. a. On peut construire $9 \times 8 \times 7 = 504$ nombres différents.
   b. Si le chiffre 7 est interdit, cela laisse 8 possibilités pour le premier chiffre, 7 pour le deuxième et 6 pour le troisième, soit $8 \times 7 \times 6 = 336$ possibilités.
   c. On va répartir ces cas selon le dernier chiffre du nombre : - si le dernier chiffre est 5, il y a 8 possibilités pour le premier chiffre et 7 pour le deuxième, soit 56 possibilités ; - le même raisonnement est valable si le dernier chiffre est 8. Il y a donc en tout 112 nombres constructibles ayant 5 ou 8 comme dernier chiffre.

3. a. On fait un choix simultané de 3 boules parmi 9. Il y a donc $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$ tirages possibles.
   b. Si l'on interdit les numéros 3 et 6, il ne reste plus que 7 nombres parmi lesquels on en tire 3, soit $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$ possibilités.
   c. Si le numéro 2 est tiré mais pas le numéro 4 ou le numéro 6, il reste 2 numéros à tirer parmi 6 restants, soit $\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$ combinaisons.

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1

Questions préliminaires

1. Une permutation d'un ensemble à n éléments est un n-uplet d'éléments distincts de cet ensemble.
2. Il existe $n!$ permutations d'un ensemble à n éléments.

Méthode 1

```
1  from random import *
2
3  def permutation_alea(n):
4      liste=list(range(1,n+1))
5      resultat=[]
6      for i in range(n):
7          choix = choice(liste)
8          resultat.append(choix)
9          liste.remove(choix)
10     return resultat
```

On est certain d'avoir ainsi une permutation :

- la ligne 6 nous assure d'avoir un n-uplet puisque l'on aura choisi n éléments ;
- la ligne 9 assure que ces éléments sont distincts : chaque élément, une fois choisi, est retiré de la liste des possibilités.

Méthode 2

1. Manipulation au tableur
2. a. La fonction ALEA() permet de générer aléatoirement un nombre entre 0 et 1.
   b. Manipulation au tableur
3. Manipulation au tableur (les nombres sont obtenus de façon aléatoire donc, évidemment, les élèves n'obtiendront pas le même classement que dans la capture d'écran du manuel).
4. La permutation se situe dans la colonne C. On a bien tous les nombres de 1 à 10 qui sont présent une et une seule fois.

Pour aller plus loin

Il y a plusieurs méthodes pour être certain d'obtenir une permutation sans point fixe.
La première est de créer une fonction qui prend en entrée une permutation et qui renvoie un booléen : True si la permutation a un point fixe, False sinon.

```python
def pointfixe(l):
    for i in range(len(l)):
        if l[i]==i+1:
            return True
    return False
```

Cette fonction regarde s'il y a un point fixe et renvoie True dès qu'elle en voit un. Si elle n'en voit aucun, elle renvoie False.
À partir de cette nouvelle fonction et de la précédente, on peut alors en construire une troisième :

```python
def permutation_sans_fixe(n):
    fixe=True
    while fixe:
        l=permutation_alea(n)
        fixe=pointfixe(l)
    return l
```

Un approfondissement pourrait alors être le suivant : quelle est la probabilité qu'une permutation prise uniformément au hasard n'ait pas de point fixe (on appelle une telle permutation un "dérangement") ?
Lorsque n tend vers l'infini, cette probabilité tend vers $\frac{1}{\mathrm{e}}$.
Une autre possibilité est de considérer la permutation comme un cycle. Par exemple, pour la permutation $(2; 4; 3; 1)$, on considère que le numéro 2 renvoie au numéro 4, qui renvoie au 3, qui renvoie au 1, qui renvoie au 2. Il est alors impossible d'avoir un point fixe puisque chaque nombre n'apparaît qu'une fois dans le n-uplet. Cette représentation peut alors déboucher sur le calcul du nombre de cycle de longueur n.

5.2 Corrigé du TP 2

Questions préliminaires

1. Les coefficients de la première colonne et de la diagonale valent 1 : on a en effet, pour tout entier n, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

2. On construit ainsi les 5 première lignes du triangle de Pascal en utilisant la relation vue dans le cours. $\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$

Méthode 1

1. La colonne C ne contient que des 1.

2. On doit entrer la formule =C4+D4.

3. On obtient le résultat suivant.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1			k									Somme
2			0	1	2	3	4	5	6	7	8	
3		0	1									1
4		1	1	1								2
5		2	1	2	1							4
6		3	1	3	3	1						8
7	n	4	1	4	6	4	1					16
8		5	1	5	10	10	5	1				32
9		6	1	6	15	20	15	6	1			64
10		7	1	7	21	35	35	21	7	1		128
11		8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	256

4. On retrouve que la somme des coefficients binomiaux de la ligne n est égale à 2^n.

Méthode 2

1., 2. et 3. voici le code.

```
1  def pascal(n):
2      l=[[0]*n for x in range(n)]
3      for i in range(n):
4          for j in range(n):
5              if j == 0:
6                  l[i][j]=1 #met les coefficients de la première colonne à 1
7              elif j==i:
8                  l[i][j]=1 #met les coefficients de la diagonale à 1
9              else :
10                 l[i][j]=l[i-1][j-1]+l[i-1][j]
11     return l
```

Pour la ligne 10, on utilise la relation de Pascal. Le coefficient $l[i][j]$ est égal à $\binom{i}{j}$. On a ainsi $\binom{i}{j} = \binom{i-1}{j-1} + \binom{i-1}{j}$, c'est-à-dire $l[i][j] = l[i-1][j-1] + l[i-1][j]$
4. On pourra par exemple compléter le programme de la façon suivante.

```
n = 7
p = pascal(n+1)

S = 0
for j in range(n+1):
    S = S + p[n][j]

print(S)
```

Il faut faire attention que pour $n = 7$, on a doit alors avoir 8 lignes (de $n = 0$ jusqu'à $n = 7$.).

Pour aller plus loin

On note $P(n)$ la proposition “Pour tous réels a et b, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$”. Démontrons par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $P(n)$ est vraie. Pour $n = 1$: $a + b = \binom{1}{0} a^0 b + \binom{1}{1} ab^0$. $P(1)$ est vraie. Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est alors vraie. Soient a et b deux réels.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}
\end{aligned}$$

En posant $j = k + 1$ dans la première somme et en posant $j = k$ dans la seconde, on a alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^j b^{n-j+1} + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j b^{n-j+1} \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1}b^0 + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}a^j b^{n-j+1} + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}a^n b^{n-j+1} \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1}b^0 + \sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}\right)a^j b^{n-j+1} + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1}
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Pascal, qui affirme que $\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}$, puis en regroupant les termes à l'extérieur de la somme, on trouve bien

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}a^j b^{n+1-j}.$$

$P(n+1)$ est donc vraie. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

6 Exercices d'applications directes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 16 :

Les ensembles étant disjoints, on a $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = 7 + 4 = 11$ et $\text{Card}(A \cap B) = 0$. De plus, $\text{Card}(A \cap B) = 0$, $\text{Card}(A \times B) = 7 \times 4 = 28$, $\text{Card}(A^2) = 7^2 = 49$ et $\text{Card}(B^3) = 4^3 = 64$.

Corrigé exercice 17 :

On sait que $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ et $2! = 2 \times 1 = 2$. Ainsi, $M = 3! \times 2! = 6 \times 2 = 12$
$N = (3 \times 2)! = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$
$P = 3! + 2! = 6 + 2 = 8$
$Q = (3 + 2)! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Corrigé exercice 18 :

$R = \dfrac{5!}{4!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \dfrac{5 \times 4!}{4!} = 5$
$S = \dfrac{8!}{10!} = \dfrac{8!}{8! \times 9 \times 10} = \dfrac{1}{90}$
$T = \dfrac{6!}{3!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$
$U = \dfrac{101!}{99!} = \dfrac{101 \times 100 \times 99!}{99!} = 10100$

Corrigé exercice 19 :

1. Pour chaque position, il y a 5 choix différents. On peut donc écrire $5^5 = 3\,125$ mots.
2. Il y a 5 choix pour la première lettre, 5 pour la deuxième, 5 pour la troisième, soit un total de mots de $5^3 = 625$.
3. Si l'on ne peut pas reprendre deux fois la même lettre cela donne :
   - Pour le mot de 5 lettres, 5 possibilités pour la première lettre, 4 pour la deuxième, 3 pour la troisième, 2 pour la quatrième et 1 pour la dernière, soit $5! = 120$ mots possibles.
   - Pour le mot de 3 lettres, il y a $5 \times 4 \times 3 = 60$ possibilités.

Corrigé exercice 20 :

$V = \dbinom{5}{2} = \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$
$W = \dbinom{4}{3} = 4$
$X = \dbinom{7}{1} = 7$
$Y = \dbinom{6}{3} = \dfrac{6!}{3!3!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{6 \times 3!} = 20$

Corrigé exercice 21 :

- $(1; 1; 3; 4; 2)$ est un 5-uplet d'éléments de A.
- $(1; 3; 2)$ est un 3-uplet d'éléments de A. Les éléments étant distincts, c'est également un 3-arrangement.
- Puisque $5 \notin A$, $(1; 5; 2; 4)$ ne correspond à rien de ce qui a été vu ce chapitre.
- $\{3; 1\}$ est une partie de A à 2 éléments et une combinaison de A à 2 éléments.
- $(4; 3; 2; 1)$ est un 4-uplet d'éléments de A. Les éléments étant distincts, c'est également un 4-arrangement. Puisque $\text{Card}(A) = 4$, c'est aussi une permutation.
- Puisque $5 \notin A$, $\{5; 2\}$ ne correspond à rien de ce qui a été vu ce chapitre.
- $\varnothing$ est une combinaison à 0 élément de A et une partie de A.

Corrigé exercice 22 :

Plusieurs résolutions sont envisageables :

- Pour un tintement de verre, il faut prendre 2 invités parmi les 12. Le nombre de tintements de verre est donc de $\binom{12}{2} = \dfrac{12 \times 11}{2} = 66$.
- Chacun des 12 invités trinque avec les 11 autres. On peut donc constituer $12 \times 11 = 132$ paires d'invités. Seulement, en faisant ainsi, chaque paire est comptée deux fois. Il y a donc $\dfrac{132}{2} = 66$ tintements de verre.

6.2 Exercices

Corrigé exercice 23 :

$A \cup B = \{5; 7; 8; 14; 21; 25; 123\}$ $A \cap B = \{7; 14\}$

Corrigé exercice 24 :

On a $B = \{1; 2; 5; 10; 11\}$.

Corrigé exercice 25 :

Puisque A et B sont disjoints, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = 8 + 11 = 19$. Par ailleurs $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = 8 \times 11 = 88$.

Corrigé exercice 26 :

Puisque A et B sont disjoints, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$, soit $\text{Card} B = \text{Card}(A \cup B) - \text{Card}(A) = 32 - 20 = 12$. Par ailleurs, $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = 20 \times 12 = 240$.

Corrigé exercice 27 :

Puisque $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$, on a alors $\text{Card}(B) = \dfrac{\text{Card}(A \times B)}{\text{Card}(A)} = \dfrac{108}{9} = 12$. De plus, A et B étant disjoints, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = 9 + 12 = 21$.

Corrigé exercice 28 :

1. Ici, $\text{Card}(A) = 5$ et $\text{Card}(B) = 2$. On a donc $\text{Card}(A \times B) = 5 \times 2 = 10$.
2. Les éléments de $A \times B$ sont $(m; 0)$, $(m; 1)$, $(a; 0)$, $(a; 1)$, $(t; 0)$, $(t; 1)$, $(h; 0)$, $(h; 1)$, $(s; 0)$, $(s; 1)$. On en trouve bien 10.

Corrigé exercice 29 :

1. Il y a 256^4 adresses IPv4 possibles, soit 4 294 967 296, ce qui est insuffisant pour identifier 5 milliards d'ordinateurs de manière unique.
2. Il existe 256^6 adresses IPv6, soit environ $2,8 \times 10^{14}$ adresses soit approximativement deux cent mille milliards d'adresse.

Corrigé exercice 30 :

1. Un numéro de téléphone est composé de 10 chiffres. Il existe donc 10^7 numéros commençant par 06 7 et 10^7 numéros commençant par 8 (10 possibilités pour chacun des 7 chiffres restants à chaque fois). Pour cette tranche, Orange dispose donc de 2×10^7 numéros.
2. Il existe 10^6 numéros commençant par 06 58. Il en est de même pour les nombres commençant par 06 59, 06 60, ... , 06 68, ce qui donne 11×10^6 soit 11 millions de numéros. De plus, pour les numéros commençant par 06 69, il y a 8 possibilités pour le premier chiffre et 10 pour les 5 restants, soit $8 \times 10^5 = 800\,000$ possibilités. Au total, ce sont donc $11\,800\,000$ numéros qui sont attribués à Bouygues Télécom sur cette tranche.

Corrigé exercice 31 :

1. Pour $n = 2$, il y a $4^2 = 16$ possibilités. Pour $n = 3$, il y en a $4^3 = 64$. C'est insuffisant pour en avoir 1000.
2. On cherche le premier entier naturel n pour lequel $4^n \geqslant 1000$. On a $4^4 = 256$ et $4^5 = 1024$, la réponse est 5. Si le logarithme népérien a été vu, il est possible d'aborder cette question différemment en remarquant que $4^n \geqslant 1000 \Leftrightarrow n\ln(4) \geqslant \ln(1000)$ par croissance du logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $\ln(4) > 0$, cela revient à $n \geqslant \dfrac{\ln(1000)}{\ln(4)} \approx 4,98$, et donc $n = 5$.

Corrigé exercice 32 :

1. $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{(n+2) \times (n+1) \times n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1}{(n+2)(n+1)} = n!$

2. $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{(n+2)\times(n+1)\times n\times(n-1)\times\ldots\times 2\times 1}{(n+2)(n+1)} = n!$

3. $\dfrac{(n+5)!}{(n+7)!} = \dfrac{(n+5)!}{(n+7)(n+6)\times(n+5)!} = \dfrac{1}{(n+7)(n+6)}$

Corrigé exercice 33 :

1. $\dfrac{1}{3\times 2\times 1} = \dfrac{1}{3!}$
2. $5\times 3\times 2\times 4 = 5!$
3. $8\times 7\times 6 = 8\times 7\times 6\times \dfrac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{5\times 4\times 3\times 2\times 1} = \dfrac{8!}{5!}$
4. $\dfrac{1}{13\times 14} = \dfrac{12!}{14\times 13\times 12!} = \dfrac{12!}{14!}$

Corrigé exercice 34 :

C'est faux : $0! = 1! = 1$.

Corrigé exercice 35 :

1. Les arrangements à deux éléments de A sont $(b;i)$, $(b;e)$, $(b;n)$, $(i;b)$, $(i;e)$, $(i;n)$, $(e;b)$, $(e;i)$, $(e;n)$, $(n;b)$, $(n;i)$, $(n;e)$.
2. Il y a $4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$ permutations de A

Corrigé exercice 36 :

1. Il y a $8\times 7\times 6 = 336$ arrangements à 3 éléments de A.
2. Il y a 8 arrangements de A à un élément.
3. Il y a $8! = 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 40320$ permutations de A.

Corrigé exercice 37 :

1. Un classement est une permutations de l'ensemble des huits coureurs. Il en existe $8! = 40320$.
2. Un podium est un 3-arrangement de l'ensemble des coureurs. Il en existe $8\times 7\times 6 = 336$ différents.

Corrigé exercice 38 :

1. Le mot de passe est une permutation des lettres du prénom “Marion”. Il y en a donc $6! = 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 720$ différents.
2. Si le mot de passe est composé de 4 caractères, c'est en fait un 4-arrangement d'un ensemble à 6 éléments (les lettres du prénom). Il y en a $6\times 5\times 4\times 3 = 360$ différents.

Corrigé exercice 39 :

L'ensemble possède 6 éléments, puisque $6! = 720$

Corrigé exercice 40 :

Le nombre de deux arrangements d'un ensemble à n éléments est $n(n-1)$. On doit donc résoudre l'équation $n(n-1) = 306$ ou $n^2-n-306 = 0$. Le discriminant de $x^2-x-306$ vaut $1\,225$, qui est strictement positif. Ce polynôme admet donc deux racines réelles distinctes qui sont $x_1 = \dfrac{-(-1)+\sqrt{1225}}{2} = 18$ et $x_2 = \dfrac{-(-1)-\sqrt{1225}}{2} = -17$. Puisque seules les solutions entières naturelles nous intéressent, on a ainsi $n = 18$. Remarque : il également possible de remarquer que $\sqrt{306} \approx 17,49$, puis de vérifier que $18 \times 17 = 306$.

Corrigé exercice 41 :

Les parties de A sont $\varnothing$, $\{7\}$, $\{8\}$, $\{9\}$, $\{7;8\}$, $\{7;9\}$, $\{8;9\}$ et $\{7;8;9\}$.

Corrigé exercice 42 :

1. Il y a $2^9 = 512$ parties de l'ensemble B.
2. Il y a $\dbinom{9}{3} = \dfrac{9!}{3!6!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$ parties de B à 3 éléments.
3. On sait que $\dbinom{9}{3} = \dbinom{9}{9-3} = \dbinom{9}{6}$. Il y a donc aussi 84 parties de B à 6 éléments.

Corrigé exercice 43 :

Cela revient à choisir 6 cases parmi 16 possibles. Il y a $\dbinom{16}{6} = 8008$ façons de procéder.

Corrigé exercice 44 :

1. a. Il y a $\dbinom{32}{5} = 201376$ mains possibles.

   b. Les piques sont au nombre de 8, il y a donc $\dbinom{8}{5} = 56$ mains possibles ne contenant que des piques.

   c. Une main composée de quatre carreaux possède également une autre carte prise parmi les 24 cartes restantes. Le nombres de mains avec exactement 4 carreaux est donc $\dbinom{8}{4} \times 24 = 1680$ mains.

2. a. Il y a $\dbinom{32}{8} = 10\,518\,300$ mains possibles.

   b. Il y a $\dbinom{8}{5} \times \dbinom{24}{3} = 113\,344$ mains avec exactement 5 coeurs.

c. Il y a $\binom{8}{6} \times \binom{24}{2} = 7728$ mains avec exactement 6 cœurs.
Il y a $\binom{8}{7} \times \binom{24}{1} = 192$ mains avec exactement 7 cœurs.
Il n'y a qu'une seule main avec huit cœurs.

d. Il y a donc $113\,344 + 7\,728 + 192 + 1 = 121\,265$ mains avec au moins 5 cœurs.

Corrigé exercice 45 :

On peut par exemple proposer l'énoncé suivant. « Combien de mains différentes de 4 cartes y a-t-il dans un jeu de 52 cartes différentes ? »

Corrigé exercice 46 :

On remarque que $32 = 2^5$. Tout ensemble à 5 éléments convient. Par exemple, l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Corrigé exercice 47 :

Voici un exemple d'énoncé. « On considère l'alphabet français constitué de 26 lettres différentes. On appelle mot un ensemble de lettres parmi celles de l'alphabet, sans se soucier du sens de ce mot. Par exemple cldck est un mot de 5 lettres. 1- Combien de mots de trois lettres quelconques peut-on écrire ? 2- Combien de mots de trois lettres toutes distinctes peut-on écrire ? 3- Combien de mots de 26 lettres toutes distinctes peut-on écrire ? 4- On considère maintenant un alphabet constitué de n lettres toutes différentes. Combien de mots constitués de 5 lettres différentes peut-on écrire ?

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 48 :

Si les ensembles A et B étaient disjoints, on aurait $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$. Or, $15 + 27 = 42 \neq 35$. Les ensembles A et B ne sont donc pas disjoints.

Corrigé exercice 49 :

Puisque A et B sont disjoints, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = 9 + 7 = 16$. Par ailleurs, $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = 9 \times 7 = 63$.

Corrigé exercice 50 :

Il y a au total $5 \times 3 \times 2 = 30$ tenues différentes à composer.

Corrigé exercice 51 :

En prenant $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$, on a bien $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Corrigé exercice 52 :

Dans les nombres de 1 à 100, on classe les nombres contenant un 3 en deux catégories :

- ceux comptant un 3 en première position et un chiffre quelconque en deuxième position, il y en a 10 ;
- ceux comptant un 3 en deuxième position et un chiffre différent de 3 en première position, il y en a 9 (le nombre 3 est compté parmi ceux-là).

Ces ensembles sont disjoints et leur union donne l'ensemble des nombres contenant un 3. Il y a donc $10 + 9 = 19$ nombres s'écrivant avec un 3 entre 1 et 100.
Une autre stratégie est d'utiliser le complémentaire. Pour un nombre ne s'écrivant avec aucun 3, il y a 9 possibilités pour le premier chiffre et 9 pour le deuxième, soit 81 au total -on assimile ainsi le couple $(0\,;\,6)$ au nombre 6. Il faut exclure le couple $(0\,;\,0)$ mais rajouter le nombre 100 qui ne contient pas de 3 : cela donne 81 nombres sans 3 dans leur écriture parmi ceux entre 1 et 100. Entre 1 et 100, il y a 100 nombres, ce qui donne donc $100 - 81 = 19$ nombres s'écrivant avec un 3.

Corrigé exercice 53 :

Dans un tel diagramme, les régions présentées sont disjointes, on peut donc additionner leur cardinal pour obtenir la population totale (ici, le nombre d'assiettes contrôlées). $190 + 12 + 68 + 46 = 316$ assiettes contrôlées.

Corrigé exercice 54 :

Les diviseurs positifs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24 donc $\text{Card}(A) = 8$. Les diviseurs positifs de 42 sont 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 et 42 donc $\text{Card}(B) = 8$. Dans un diagramme, on pourrait faire apparaître les diviseurs communs dans l'intersection de A et B. On a : $A \cap B = \{1; 2; 3; 6\}$ et $\text{Card}(A \cap B) = 4$. De plus $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 12; 14; 21; 24; 42\}$ et $\text{Card}(A \cup B) = 12$.

Corrigé exercice 55 :

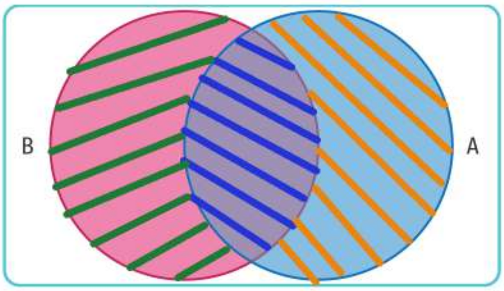
1. Ont été interrogées : $10 + 68 + 17 + 3 + 1 + 35 + 3 + 6 = 143$ personnes.
2. Le cardinal de E est $35+3+1+17 = 56$. Celui de A est $68+3+1+17 = 89$. Celui de I est $6 + 3 + 1 + 3 = 13$.
3. Le cardinal de $A \cup I$ est $68+3+1+17+3+6 = 98$. Le cardinal $A \cap E$ est $17+1 = 18$. Le cardinal de $I \cap E$ est $1 + 3 = 4$.
4. $17 + 1 + 3 + 3 = 24$. 24 personnes parlent au moins deux langues parmi celles présentées ici.

Corrigé exercice 56 :

Puisque A et $\overline{A}$ sont disjoints, $\text{Card}(A \cup \overline{A}) = \text{Card}(A) + \text{Card}(\overline{A})$. Or, $A \cup \overline{A} = E$. Ainsi, $\text{Card}(E) = \text{Card}(A) + \text{Card}(\overline{A})$ d'où $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.

Corrigé exercice 57 :

1. Hachuré en bleu : $A \cap B$; Hachuré en vert : $B \setminus A$; Hachuré en orange : $A \setminus B$.



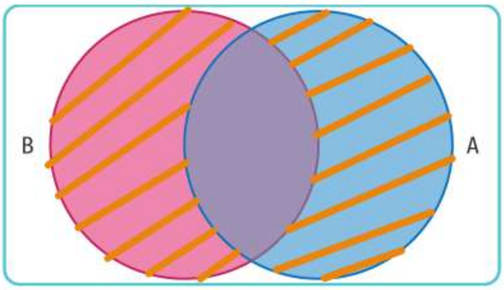
2. Ces trois ensembles sont disjoints :
   - Les éléments de $A \cap B$ sont à la fois dans A et B. Cet ensemble est donc disjoint de $A \setminus B$ qui ne contient aucun élément de B et est disjoint de $B \setminus A$ qui ne contient aucun élément de A.
   - Les ensembles $A \setminus B$ et $B \setminus A$ sont disjoints égalements : si un élément x appartenait à ces deux ensembles, alors il serait à la fois un élément de A car il est dans $A \setminus B$ et un élément de $\overline{A}$ car il est dans $B \setminus A$, ce qui est impossible.
3. $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$ car c'est la réunion de l'ensemble contenant tous les éléments de A qui ne sont pas dans B avec l'ensemble des éléments de A également contenu dans B. On a donc bien regroupé tous les éléments de A.
4. On remarque de plus que $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$ et les ensembles B et $A \setminus B$ sont disjoints. Ainsi, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(B) + \text{Card}(A \setminus B)$. Par ailleurs, puisque $A \setminus B$ et $A \cap B$ sont disjoints, d'union A, on a $\text{Card}(A) = \text{Card}(A \setminus B) + \text{Card}(A \cap B)$ ou encore $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$. En injectant cette égalité dans la première, on trouve $\text{Card}(A) = \text{Card}(A \setminus B) + \text{Card}(A \cap B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$

Corrigé exercice 58 :

Appelons B l'ensemble des joueurs de basketball et F l'ensembles des joueurs de football. On a $\text{Card}(B) = 42$, $\text{Card}(F) = 60$ et $\text{Card}(B \cup F) = 84$. En appliquant la formule du crible, on trouve $\text{Card}(B \cup F) = \text{Card}(B) + \text{Card}(F) - \text{Card}(B \cap F)$ soit $\text{Card}(B \cap F) = 60 + 42 - 84 = 18$. 18 personnes pratiquent les deux sports.

Corrigé exercice 59 :

1. On obtient la figure ci-dessous.



2. $(A\Delta B)$ et $A \cap B$ sont disjoints et leur union vaut $A \cup B$. On a ainsi $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A\Delta B) + \text{Card}(A \cap B)$. En appliquant la formule de l'exercice 55, on a alors $\text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) = \text{Card}(A\Delta B) + \text{Card}(A \cap B)$ d'où $\text{Card}(A) + \text{Card}(B) - 2\text{Card}(A \cap B) = \text{Card}(A\Delta B)$.

Corrigé exercice 60 :

Les éléments de $E \times F$ sont $(1; 2)$, $(1; 3)$, $(3; 2)$, $(3; 3)$, $(7; 2)$, $(7; 3)$. Ceux de $F \times E$ sont $(2; 1)$, $(2; 3)$, $(2; 7)$, $(3; 1)$, $(3; 3)$, $(3; 7)$. Il faut se rappeler que, dans un couple de nombres, l'ordre a de l'importance, comme lorsque l'on écrit des coordonnées.

Corrigé exercice 61 :

Les éléments de E^2 sont $(\pi; \pi)$, $(\pi; \sqrt{2})$, $(\pi; 4)$, $(\sqrt{2}; \pi)$, $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}; 4)$, $(4; \pi)$, $(4; \sqrt{2})$ et $(4; 4)$.

Corrigé exercice 62 :

Il y a $2^3 = 8$ 3-uplets de E. Ceux-ci sont (0 ;0 ;0), (1 ;0 ;0), (0 ;1 ;0), (1 ;1 ;0), (0 ;0 ;1), (0 ;1 ;1), (1 ;0 ;1) et (1 ;1 ;1). Il suffit d'en prendre quatre parmi ceux-là.

Corrigé exercice 63 :

Notons $a = \text{Card}(A)$ et $b = \text{Card}(B)$. Puisque A et B sont disjoints, on a $\text{Card}(A \cup B) = a + b = 23$. Par ailleurs, on a $\text{Card}(A \times B) = ab = 132$.

Méthode 1 : Cela revient donc à résoudre le système $\begin{cases} a + b = 23 \\ ab = 132 \end{cases}$. Ce système est équivalent à $\begin{cases} a = 23 - b \\ (23 - b)b = 132 \end{cases}$. Ou encore $\begin{cases} a + b = 23 \\ -b^2 + 23b - 132 = 0 \end{cases}$. Résolvons donc

$-b^2 + 23b - 132 = 0$ qui est une équation du second degré. Le discriminant du polynôme $-b^2 + 23b - 132$ vaut $23^2 - 4 \times (-1) \times (-132) = 1 > 0$. L'équation possède donc deux solutions qui sont $b_1 = \dfrac{-23 - \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = 12$ et $b_2 = \dfrac{-23 + \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = 11$. Puisque $b > a$, on obtient que $b = 12$ et $a = 11$.
Méthode 2 : On revient aux relations entre coefficients et racines d'un polynôme : si a et b ont pour somme s et pour produit p, alors ce sont les deux racines du polynôme $x^2 - sx + p$, soit $x^2 - 23x + 132$. On continue alors comme pour la méthode 1.
Méthode 3 : a et b étant des entiers naturels, on établit la liste des diviseurs positifs de 132. Ce sont les entiers 1, 2, 3, 6, 11, 12, 22, 44, 66, 132. Puisque $a < b$, les seules possibilités restantes sont alors ($a = 1$, $b = 132$), ($a = 2$, $b = 66$), ($a = 3$, $b = 44$), ($a = 6$, $b = 22$), ($a = 11$, $b = 12$). Le fait que la somme de a et b soit 23 nous oriente naturellement vers la dernière possibilité.

Corrigé exercice 64 :

On utilise la décomposition de 3 087 en produits de facteurs premiers : $3087 = 3^2 \times 7^3$. De plus, $\text{Card}(A^3 \times B^2) = \text{Card}(A)^3 \times \text{Card}(B)^2$. Il en vient que $\text{Card}(A) = 7$ et $\text{Card}(B) = 3$.

Corrigé exercice 65 :

Pour les menus entrée-plat-dessert, il y a $4 \times 2 \times 3 = 24$ possibilités Pour les menus entrée-plat, il y en a $4 \times 2 = 8$ et pour les menus plat-dessert, il y en a $2 \times 3 = 6$. Au total, ce sont $24 + 8 + 6 = 38$ menus qu'il est possible de composer.

Corrigé exercice 66 :

1. Un mot de quatre lettres est un 4-uplet de l'ensemble des lettres $\{A; B; C; D\}$. Il y en a $4^4 = 256$.

2. Il y a $4^5 = 1024$ mots de 5 lettres et $4^6 = 4096$ mots de 6 lettres. Au total, il y a donc $4096 + 1024 = 5120$ mots de 5 ou 6 lettres.

Corrigé exercice 67 :

Dans cet ouvrage, un poème est assimilé à un 14-uplet de l'ensemble des entiers de 1 à 10 inclus, ce nombre étant le numéro du vers conservé pour le poème. Il y a ainsi 10^{14} poèmes possibles, soit cent mille milliards.

Corrigé exercice 68 :

1. Si A ou B est vide, leur cardinal vaut 0 et le produit $A \times B$ est égalements vide, de cardinal 0 également. La formule reste valable.

2.
   a. Les éléments de A_i sont les couples $(a_k; b_i)$ pour k allant de 1 à n. Il y a donc n éléments dans chaque A_i.

   b. Les ensembles A_i sont deux à deux disjoints. En effet, le deuxième élément d'un couple diffère d'un ensemble A_i à un autre.

   c. L'union des A_i pour i allant de 1 à p est $A \times B$.

d. Cette union est disjointe, on a$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A_1) + \ldots + \text{Card}(A_p) = n + \ldots + n = np$

Corrigé exercice 69 :

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{P}_n$ la proposition $\text{Card}(A^n) = \Big[\text{Card}(A)\Big]^n$.

- Initialisation : $\mathcal{P}_1$ est vraie. En effet $A^1 = A$ et $\text{Card}(A) = \Big[\text{Card}(A)\Big]^1$.
- Hérédité : Supposons qu'il existe un entier naturel non nul k pour lequel $\mathcal{P}_k$ est vraie.

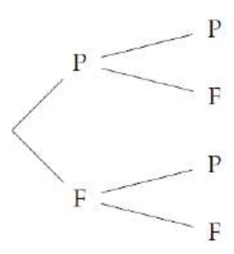
  On assimile alors A^{k+1} à $A^k \times A$. Cette association se faisant de manière univoque, on a alors $\text{Card}(A^{k+1}) = \text{Card}(A^k \times A)$. Ainsi, $\text{Card}(A^{k+1}) = \text{Card}(A^k \times A) = \text{Card}(A^k) \times \text{Card}(A) = \Big[\text{Card}(A)\Big]^k \times \text{Card}(A)$ par hypothèse de récurrence.

  Finalement, on a $\text{Card}(A^{k+1}) = \Big[\text{Card}(A)\Big]^{k+1}$. La proposition $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vraie $\text{Card}(A^{k+1}) = \Big[\text{Card}(A)\Big]^{k+1}$.
- Conclusion : Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a bien $\text{Card}(A^n) = \Big[\text{Card}(A)\Big]^n$

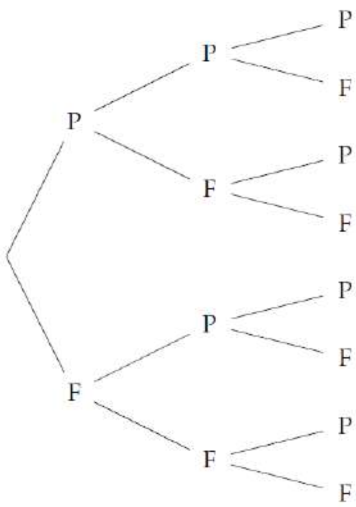
Corrigé exercice 70 :

1. On obtient les arbres suivants.

Cas $n = 2$



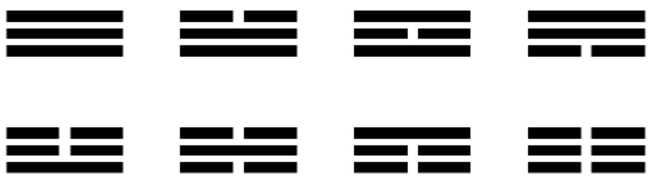
Cas $n = 3$



2. Dans le cas général, à chaque lancer, on a deux possibilités, soit 2^n issues total.

Corrigé exercice 71 :

1. On a deux possibilités pour chaque ligne, soit $2^3 = 8$ trigrammes différents.
2. On donne ici tous les trigrammes possibles.



8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 72 :

- $1! = 1$
- $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$
- $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
- $4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$

Corrigé exercice 73 :

- $\dfrac{12!}{10!} = \dfrac{12 \times 11 \times 10!}{10!} = 12 \times 11 = 132$
- $\dfrac{6!}{8!} = \dfrac{6!}{8 \times 7 \times 6!} = \dfrac{1}{56}$
- $\dfrac{2019!}{2018!} = 2019$
- $\dfrac{9!}{7! \times 2!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2} = 9 \times 4 = 36$

Corrigé exercice 74 :

1. Pour tout entier naturel n, on a $(n+1)! = (n+1) \times n!$. Ainsi, $(n+1)! - n! = (n+1-1)n! = n \times n! \geqslant 0$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $(n+1)! \geqslant n!$. Il est également possible de raisonner à l'aide du quotient, en précisant que pour tout entier naturel n, $n!$ est strictement positif. On a $\dfrac{(n+1)!}{n!} = n+1 \geqslant 1$.
2. Il y a égalité lorsque $n = 0$. En effet, $1! = 1 = 0!$.

Corrigé exercice 75 :

1. a. Il y a 5 choix pour la première lettre, 4 pour la deuxième et 3 pour la troisième, soit $5 \times 4 \times 3 = 60$ mots possibles.
   b. Si la lettre A est en première position, il n'y a plus qu'1 choix pour la première lettre, 4 pour la deuxième et 3 pour la troisième soit $4 \times 3 = 12$ mots possibles.
   c. Sans utiliser la lettre T, cela laisse 4 choix pour la première lettre, 3 pour la deuxième et 2 pour la troisième soit $4 \times 3 \times 2 = 24$ mots possibles.
2. a. Cela revient à choisir une permutation de l'ensemble des lettres, à 5 éléments. Il y en a $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.
   b. Deux lettres sont fixées, il faut encore en placer 3. Il y a 3 choix pour la première, 2 choix pour la deuxième et la lettre restante sera en quatrième position, soit $3 \times 2 \times 1 = 6$ configurations possibles.

Corrigé exercice 76 :

1. $(n+1) \times n! = (n+1)!$
2. $\dfrac{(n-5)!}{(n-7)!} = \dfrac{1}{(n-6)(n-7)}$
3. $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)} = n!$
4. $\dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{n+1}{(n+1)!} = -\dfrac{n}{(n+1)!}$

Corrigé exercice 77 :

1. $\dfrac{n! \times (n+2)!}{(n!)^2} = (n+2)(n+1)$
2. $\dfrac{(n+1)!}{n!} - \dfrac{n!}{(n+1)!} = n+1-\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{(n+1)^2-1}{n+1} = \dfrac{n^2+2n}{n+1}$
3. $\dfrac{(2(n+1))!}{(2n+1)!} = 2n+2$
4. $\dfrac{1}{(n-2)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{n(n-1)}{n!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{n^2-n-1}{n!}$

Corrigé exercice 78 :

On constate que $n!$ est proche de $S(n)$.

	A	B	C
1	n	n!	S(n)
2	1	1	0,9221370089
3	2	2	1,919004351
4	3	6	5,836209591
5	4	24	23,50617513
6	5	120	118,019168
7	6	720	710,0781846
8	7	5040	4980,395832
9	8	40320	39902,39545
10	9	362880	359536,8728
11	10	3628800	3598695,619
12	11	39916800	39615625,05
13	12	479001600	475687486,5
14	13	6227020800	6187239475
15	14	87178291200	86661001741
16	15	1307674368000	1300430722199
17	16	2092278988800(	2081411441522:
18	17	3556874280960(	3539483286661(
19	18	6,40237E+15	6,3728E+15
20	19	1,21645E+17	1,21113E+17
21	20	2,4329E+18	2,42279E+18
22	21	5,10909E+19	5,08886E+19
23	22	1,124E+21	1,11975E+21
24	23	2,5852E+22	2,57585E+22
25	24	6,20448E+23	6,18298E+23
26	25	1,55112E+25	1,54596E+25
27	26	4,03291E+26	4,02001E+26
28	27	1,08889E+28	1,08553E+28
29	28	3,04888E+29	3,03982E+29
30	29	8,84176E+30	8,81639E+30
31	30	2,65253E+32	2,64517E+32

Corrigé exercice 79 :

```
1 def factorielle(n):
2     factorielle=1
3     for i in range(1,n+1):
4         factorielle *= i
5     return factorielle
```

Pour la ligne 3, range(1,n+1) permet d'avoir tous les entiers de 1 à n. Cette liste sera vide si n = 0 et renverra donc bien 1 pour la factorielle de 0. La ligne 4 peut également être écrite factorielle = factorielle * i
Une autre version, récursive, peut être écrite.

```
1 def factorielle(n):
2     if n==0 or n==1:
3         return 1
4     else:
5         return n*factorielle(n-1)
```

Cette version met en évidence le fait que pour tout entier naturel n, $(n+1)! = (n+1)\times n!$. La ligne 2 permet d'indiquer que $1! = 0! = 1$. Si n est égal à 1 ou 0, le programme renvoie directement 1. Sinon, il calcule la factorielle de $n-1$. Par exemple, pour calculer $4!$, ce programme procède grossièrement ainsi : factorielle(4) $= 4 \times$ factorielle(3) $= 4 \times 3 \times$ factorielle(2) $= 4 \times 3 \times 2 \times$ factorielle(1) $= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Corrigé exercice 80 :

1. Puisque A et B sont disjoints, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = n + p$. Le nombre de permutations de $A \cup B$ est donc $(n+p)!$.
2. Il y a deux possibilités pour que les éléments de A et B ne soient pas mélangés :
   - Ou bien on place d'abord tous les éléments de A puis tous les éléments de B.
   - Ou bien on fait l'inverse.

   Dans chacun des deux cas, il y a $n!p!$ façons de le faire. Au total, il y a donc $2n!p!$ permutations qui ne mélangent pas les éléments de A et B.

Corrigé exercice 81 :

Soit n un entier naturel. $(n+2)! = 6n! \Leftrightarrow \dfrac{(n+2)!}{n!} = 6 \Leftrightarrow (n+2)(n+1) = 6 \Leftrightarrow n^2 + 3n - 4 = 0$. Cette équation possède deux solutions réelles : 1 et -4. Puisque l'on ne considère que les solutions entières naturelles, l'unique solution de l'équation est $n = 1$.

Corrigé exercice 82 :

1. Dans la cellule B2, on écrit : =2^A2

   Dans la cellule D2, on écrit : =A2^A2
2. Dans la cellule C2, on écrit : =1
3. Dans la cellule C3, on écrit : =C2*A3 On obtient le tableau suivant.

	A	B	C	D
1	n	2^n	n!	n^n
2	1	2	1	1
3	2	4	2	4
4	3	8	6	27
5	4	16	24	256
6	5	32	120	3125
7	6	64	720	46656
8	7	128	5040	823543
9	8	256	40320	16777216
10	9	512	362880	387420489

4. Il semblerait qu'on ait $2^n \leq n! \leq n^n$ à partir de $n = 4$.
5. On va démontrer cette conjecture par récurrence. Au rang $n = 4$, on a bien $2^4 \leq 4! \leq 4^4$ car $16 \leq 24 \leq 256$. Supposons le résultat acquis au rang n fixé, où $n \geq 4$. On a $2^n \leq n! \leq n^n$ et on veut montrer que $2^{n+1} \leq (n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$. Dans un

premier temps, $(n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1)2^n \geq 2^{n+1}$ car $n+1 \geq 2$. Dans un second temps, $(n+1)! = (n+1)n! \leq (n+1)n^n \leq n^{n+1} \leq (n+1)^{n+1}$. La propriété est prouvée pour tout entier naturel par récurrence.

Corrigé exercice 83 :

Il est possible de constituer $10 \times 9 \times 8 = 720$ entiers différents.

Corrigé exercice 84 :

1. En créant un emploi du temps, Mathilde fera une permutation d'un ensemble à 4 éléments. Il y a $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ emplois du temps possibles.
2. En regroupant les mathématique et la physique, il ne reste que 3 éléments. Il y a $3! = 6$ emplois du temps possibles.

Corrigé exercice 85 :

Une suite d'exercice est un 5-arrangement de l'ensemble d'exercices, à 10 éléments. Il y a donc $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$ suites d'exercices possibles.

Corrigé exercice 86 :

1. Si une même couleur peut être utilisée plusieurs fois, il y a $5^5 = 3125$ coloriages possibles.
2. Si une couleur ne peut être utilisée qu'une fois, il y a alors $5! = 120$ coloriages possibles.
3. Si deux lettres adjacentes ne doivent pas être de la même couleur, cela laisse 5 possibilités pour la première lettre, 4 pour la deuxième, 4 pour la troisième, 4 pour la quatrième et 4 pour la cinquième. Au total, il y a $5 \times 4^4 = 1280$ coloriages possibles.
4. Si une couleur peut être utilisée plusieurs fois, cela laisse 5 possibilité pour le fond puis 4 possibilités pour chacune des lettres, soit $5 \times 4^5 = 5120$ possibilités. Il n'est en revanche pas possible de n'utiliser chaque couleur qu'une seule fois puisqu'il y a 6 zones à colorier. En revanche, si deux lettres adjacentes ne peuvent être de la même couleur, on a alors 5 possibilités pour le fond, 4 pour la première lettre, 3 pour la deuxième, 3 pour la troisième, 3 pour la quatrième et 3 pour la cinquième. Il y a donc $5 \times 4 \times 3^4 = 1620$ possibilités.

Corrigé exercice 87 :

1. a. Si le 0 est autorisé en première position, il y a $4! = 24$ configurations possibles.
   b. Si le 0 est interdit, cela laisse 3 possibilités pour le premier chiffre. On réorganise alors les 3 chiffres restants en faisant une permutation. Le nombre de configurations est donc de $3 \times 3! = 18$.

2. a. Si le chiffre 0 est interdit en première position, cela donne 3 possibilités pour le 1er chiffre, 3 pour le deuxième et 2 pour le troisième, soit 18 possibilités au total.

   b. Rappelons qu'un nombre est un multiple de 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est aussi un multiple de 3. Ici, les seules possibilités pour construire un tel nombre sont d'utiliser les chiffres 1, 2 et 3 ou les chiffres 1, 2 et 0. Dans les deux cas, il y a $3! = 6$ configurations possibles. Au total, il y a donc 12 nombres respectant les conditions imposées.

9 Exercices d'entraînement partie 3

Corrigé exercice 88 :

1. E est de cardinal 3, l'ensemble des parties de E a donc pour cardinal $2^3 = 8$.
2. Les parties de E sont $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{2;3\}$ et $\{1;2;3\}$.

Corrigé exercice 89 :

1. Il y a $2^8 = 256$ parties de l'ensemble A.
2. Le nombre de parties à 3 éléments de l'ensemble A vaut $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 8 \times 7 = 56$.
3. Puisque $5 = 8 - 3$, on a $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$. Il y a 56 parties à 5 éléments de l'ensemble A.

Corrigé exercice 90 :

1. Il y a $\binom{10}{5} = 252$ combinaisons d'exercice possibles.
2. Il reste à choisir 4 exercices sur les 9 restant soit $\binom{9}{4} = 126$ combinaisons.
3. Le 10 étant un bonus, il faut choisir 5 exercices parmi 9, soit $\binom{9}{5} = 126$ possibilités.

Corrigé exercice 91 :

1. Les sous-ensembles de E à deux éléments sont $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{1;4\}$, $\{2;3\}$, $\{2;4\}$, $\{3;4\}$.
2. Il y a donc 6 sous-ensembles à 2 éléments de l'ensemble E à 4 éléments. Ainsi, $\binom{4}{2} = 6$.

Corrigé exercice 92 :

1. Les sous-ensembles de F à 3 éléments sont $\{a;b;c\}$, $\{a;b;d\}$, $\{a;b;e\}$, $\{a;c;d\}$, $\{a;c;e\}$, $\{a;d;e\}$, $\{b;c;d\}$, $\{b;c;e\}$, $\{b;d;e\}$, $\{c;d;e\}$.
2. Il y a donc 10 sous-ensembles à 3 éléments de l'ensemble E à 5 éléments. Ainsi, $\binom{5}{3} = 10$.

Corrigé exercice 93 :

1. On rappelle que $0! = 1$. Ainsi, $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$. Le seul sous-ensemble à 0 élément d'un ensemble à n éléments est l'ensemble vide $\varnothing$.

2. $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = \dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n.$

3. Puisque pour tout entier $k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, on a alors $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n.$

Corrigé exercice 94 :

1. L'ensemble $A \setminus X$ possède $n-k$ éléments.

2. À chaque partie à k éléments de l'ensemble A, on peut associer de manière univoque une partie à $n-k$ éléments de l'ensemble A. Ainsi, le cardinal de l'ensemble des combinaisons à k éléments de A est égal au cardinal de l'ensemble des combinaisons à $n-k$ éléments de A, c'est-à-dire $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Corrigé exercice 95 :

1. $\binom{10}{1} = 10$, $\binom{48}{47} = 48$, $\binom{55}{0} = 1$, $\binom{64}{63} = 64$, $\binom{51}{50} = 51$.

2. $\binom{20}{2} = \dfrac{20 \times 19}{2} = 190$, $\binom{30}{29} = 30$, $\binom{50}{1} = 50$, $\binom{12}{2} = \dfrac{12 \times 11}{2} = 66$, $\binom{14}{14} = 1$.

3. $\binom{6}{3} = \dfrac{6!}{3!3!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$, $\binom{8}{4} = \dfrac{8!}{4!4!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$,
$\binom{10}{4} = \dfrac{10!}{4!6!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$, $\binom{10}{5} = \dfrac{10!}{5!5!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252$.
Enfin, d'après la relation de Pascal, $\binom{10}{4} + \binom{10}{5} = \binom{11}{5}$.
Ainsi, $\binom{11}{5} = 210 + 252 = 462$.

4. $\binom{5}{0} - \binom{5}{1} + \binom{5}{2} - \binom{5}{3} + \binom{5}{4} - \binom{5}{5} = 0$ car $\binom{5}{0} = \binom{5}{5}$, $\binom{5}{1} = \binom{5}{4}$ et $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$.

Corrigé exercice 96 :

1. On a $\binom{n}{2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2 \times (n-2)!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$
2. Pour choisir deux éléments différents parmi n, on a n choix pour le premier et $n-1$ pour le deuxième, soit $n(n-1)$ possibilités. Or, l'ordre n'importe pas dans une combinaison. Par ce procédé, chaque paire est ainsi compté deux fois. Il en vient que le nombre de combinaison de 2 éléments d'un ensemble à n éléments vaut $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Corrigé exercice 97 :

Note : pour cet exercice, on précise que si $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$.

1. L'entier 0 est solution de l'équation $\binom{n}{3} = n$. 1 et 2 ne le sont pas. Soit maintenant n un entier supérieur ou égal à 3.
   $\binom{n}{3} = n \Leftrightarrow \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = n \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} = n \Leftrightarrow \dfrac{n(n^2-3n-4)}{6} = 0$
   n étant supérieur ou égal à 3, cela revient à résoudre $n^2 - 3n - 4 = 0$. L'équation $x^2 - 3x - 4 = 0$, d'inconnue réelle x, possède deux solutions : $x = -1$ et $x = 4$. De fait, l'unique solution entière supérieur ou égale à 3 de l'équation $n^2 - 3n - 4 = 0$ est 4. Les solutions de l'équation $\binom{n}{3} = n$ sont donc 0 et 4.

2. Les entiers 0 et 1 sont solutions de l'équation $\binom{n}{2} = \binom{n}{3}$. 2 ne l'est pas puisque $\binom{2}{2} = 1$ et $\binom{2}{3} = 0$. Soit maintenant n un entier supérieur ou égal à 3.
   $\binom{n}{2} = \binom{n}{3} \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} \Leftrightarrow n(n-1)\dfrac{5-n}{6} = 0,$
   ce qui revient à $5 - n = 0$, n étant supérieur ou égal à 3. L'unique solution dans ce cas est $n = 5$. Les solutions de l'équation $\binom{n}{2} = \binom{n}{3}$ sont donc 0, 1 et 5.

3. Si $n = 0$ ou $n = 1$, l'égalité est vérifiée. Pour $n = 2$, elle ne l'est pas. Supposons maintenant $n \geq 3$.
   $2\binom{n}{2} = 3\binom{n}{3} \iff n(n-1) = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{2} \iff n(n-1)\dfrac{4-n}{2} = 0 \iff 4 - n = 0 \iff n = 4$
   Les solutions sont donc 0, 1 et 4.

Corrigé exercice 98 :

Pour tout entier naturel non nul n, $\binom{2n}{n} > 0$. Calculons donc

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \\ &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \times \frac{n!n!}{(2n)!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{4n+2}{n+1}\end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel n, $4n+2 > n+1$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Corrigé exercice 99 :

Organiser un débat revient à choisir 2 candidats parmi 11. Il y a donc $\binom{11}{2} = \frac{11 \times 10}{2} =$ 55 débats possibles.

Corrigé exercice 100 :

Le nombre de combinaisons possibles est égal à $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84$.

Corrigé exercice 101 :

Le nombre de combinaisons possibles est $\binom{49}{5} \times \binom{10}{1}$, ce qui fait 19 068 840 possibilités.

Corrigé exercice 102 :

1. Une arête correspond à une paire de points : il y en a $\binom{n}{2}$, soit $\frac{n(n-1)}{2}$.

2. Une arête correspond à un couple $(a; b)$ où a est un point du groupe de taille k et b un point du groupe de taille $n-k$. Le nombre d'arêtes tracées vaut donc $k(n-k)$.

Corrigé exercice 103 :

Méthode 1 : À l'aide de la formule.

$$\begin{aligned} n\binom{n-1}{k-1} &= \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{k \times n!}{k \times (k-1)!(n-k)!} \\ &= k\frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= k\binom{n}{k} \end{aligned}$$

Méthode 2 : À l'aide d'un dénombrement. On dispose de n éléments que l'on souhaite découper en 3 groupes de taille 1, $k-1$ et $n-k$. Il y a deux possibilités :

- Choisir k éléments parmi n puis 1 élément parmi les k, ce qui donne un total de $\binom{n}{k}\binom{k}{1} = k\binom{n}{k}$
- Choisir 1 élément parmi n puis $k-1$ parmi les $n-1$ restants, ce qui donne $\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} = n\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.

Les deux méthodes donnent évidemment les mêmes possibilités donc : $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$.

Corrigé exercice 104 :

1. Il y a $\binom{2n}{n}$ parties à n éléments de A.
2. On divise l'ensemble A en deux sous-ensembles A_1 et A_2, chacun ayant n éléments. Soit k un entier inférieur ou égal à n.
   - Il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir k éléments dans A_1.
   - Il y a $\binom{n}{n-k}$ manières de choisir $n-k$ éléments dans A_2. Or, $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$
   - Il y a ainsi $\binom{n}{k}^2$ manières de choisir n éléments dans A en en choisissant k dans A_1

   Le nombre total de manière de choisir n éléments dans A vaut donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. On a donc bien l'égalité recherchée.

10 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 105 :

1. Il existe $\binom{n}{k}$ combinaisons de k éléments de A.

2. L'élément a étant fixé et appartenant à la combinaison considérée, il faut encore choisir $k-1$ éléments parmi les $n-1$ restants : il y a $\binom{n-1}{k-1}$ combinaisons possibles.

3. Si l'élément a n'appartient pas à la combinaison, il faut choisir k éléments parmi les $n-1$ restants, soit $\binom{n-1}{k}$ possibilités.

4. Notons A_a l'ensemble des combinaisons à k éléments de A contenant l'élément a et $\overline{A_a}$ l'ensemble des combinaisons à k éléments de A ne contenant pas l'élément a. Ces ensembles sont évidemment disjoints et leur union vaut l'ensemble des combinaisons à k éléments de A. Ainsi, $\binom{n}{k} = \text{Card}(A_a \cup \overline{A_a}) = \text{Card}(A_a) + \text{card}(\overline{A_a}) = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

5. En procédant méthodiquement, on obtient le calcul ci-après :

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{k}{k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{n-k}{n-k} \times \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= k \times \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} + (n-k) \times \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Corrigé exercice 106 :

1. L'algorithme possède une variable ListeTemp et une variable PartieDeux.
   - Les deux boucles for servent à balayer la liste A deux fois. La première parcourt toute la liste tandis que la deuxième n'en parcourt qu'une partie, du rang i+1 jusqu'à la fin, afin d'éviter d'avoir deux fois le même élément.
   - Dans la variable ListeTemp, qui est une liste, on ajoute deux éléments de la liste A - le i-ième et le j-ième. On construit ainsi un ensemble à deux éléments de A.

- Cet ensemble à deux éléments est ajouté à la liste PartieDeux qui sera l'ensemble des parties à deux éléments de A.
- La liste ListeTemp est réinitialisée à la ligne 10.

Il est possible de créer une nouvelle variable n qui vaut len(A) en début de programme. Cela permet de ne pas avoir à calculer deux fois la longueur. Par ailleurs, ce programme peut être présenté sous la forme d'une fonction. On inscrit alors def partiedeux(A) : au lieu de définir notre liste A, puis un return PartieDeux en fin de programme

2. Pour générer les parties à 3 éléments, il suffit d'ajouter une 3ème boucle après les deux premières

```
ListeTemp est une liste vide
PartieTrois est une liste vide
n ← longueur(A)
Pour i allant de 1 à n
        Pour j allant de i+1 à n
              Pour k allant de j+1 à n
                     Ajouter A[i] à ListeTemp
                     Ajouter A[j] à ListeTemp
                     Ajouter A[k] à ListeTemp
                     Ajouter ListeTemp à PartieTrois
                     ListeTemp ← []
```

Corrigé exercice 107 :

1. Sans restriction de poste, il y a $\binom{23}{11} = 1\,352\,078$ équipes possibles.
2. En tenant compte des postes, cela donne $\binom{3}{1} \times \binom{8}{4} \times \binom{5}{3} \times \binom{7}{3}$ soit 73500 équipes possibles.

Corrigé exercice 108 :

D'après la formule du crible de l'exercice 57, on a $\text{Card}((A \cup B) \cup C) = \text{Card}(A \cup B) + \text{Card}(C) - \text{Card}((A \cup B) \cap C)$ Or :

- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$;
- puisque $(A \cup B) \cap B = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, on a également$\text{Card}((A \cup B) \cap C) = \text{Card}(A \cap C) + \text{Card}(B \cap C) - \text{Card}((A \cap C) \cap (B \cap C))$;
- enfin, $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

En remplaçant le tout dans la première égalité, on retrouve bien la formule demandée.

Corrigé exercice 109 :

1. a. Cette expérience possède 6 issues.
   b. Un événement étant un sous-ensemble de l'univers, il suffit de dénombrer le nombre de parties de cet univers. Puisqu'il est composé de 6 éléments, le nombre de partie de l'univers vaut $2^6 = 64$.
2. a. Le nombre d'issue de cette expérience est le nombre de 6-uplet de $\{0; 1\}$. Il y en a $2^6 = 64$.
   b. Obtenir un nombre pair de fois le nombre 1 signifie que le 6-uplet est composé d'un nombre pair de zéros. Il peut y en avoir 0, 2, 4 ou 6. Il y a $\binom{6}{0} = 1$ issue avec 0 zéro. Il y a $\binom{6}{2} = 15$ issue avec 2 zéros. Il y a $\binom{6}{4} = 15$ issue avec 4 zéros. Il y a $\binom{6}{6} = 1$ issue avec 6 zéros. Au total, il y a 32 issues avec un nombre pair de zéros.

Corrigé exercice 110 :

1. Il y a $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ codes possibles.
2. a. Si deux pions sont bien placés et deux sont mal placés : - il y a $\binom{4}{2} = 6$ possibilités pour désigner les pions bien placés ; - les deux pions restants sont forcément ceux mal placés. Il ne reste donc que 6 positions valides.
   b. Si deux pions sont bien placés et un est mal placé : - il y a $\binom{4}{2} = 6$ possibilités pour désigner les deux pions bien placés ; - il y a $\binom{2}{1} = 2$ possibilités pour désigner celui qui est mal placé et qui sera donc déplacé sur l'autre case ; - le pion restant devra alors être remplacé par un pion d'une des deux couleurs non utilisés. Finalement, le nombre de possibilités vaut $6 \times 2 \times 2 = 24$.
   c. Si un pion est bien placé et un autre mal placé, il y a : - 4 possibilités pour le pion bien placé ; - 3 possibilités pour le pion mal placé, celui-ci peut alors être déplacé sur un des 2 emplacements restants ; - les deux autres pions sont remplacés par les pions des deux couleurs non utilisées, cela laisse deux possibilités, selon l'ordre dans lequel ces pions sont alors positionnés. Au total, il y a $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ possibilités.

Corrigé exercice 111 :

1. Si on tient compte de l'ordre d'arrivée, il y a $10 \times 9 \times 8 = 720$ possibilités.
2. Si on joue sans l'ordre, il y a $\binom{10}{3} = 120$ combinaisons possibles.

Corrigé exercice 112 :

1. 18 possède 6 diviseurs positifs (1 ; 18 ; 2 ; 9 ; 3 ; 6) alors que 25 en possède 3 (1 ; 5 ; 25).

2. Dans le cas général, n possède $(p_1+1)\times(p_2+1)\times\ldots\times(p_k+1)$ diviseurs positifs.

3. $120 = 2^3\times 3^1\times 5^1$ et a donc $(3+1)\times(1+1)\times(1+1) = 16$ diviseurs positifs.

4. On a $35 = 5\times 7 = (4+1)\times(6+1)$. Le plus petit entier positif ayant 35 diviseurs et 2 diviseurs premiers distincts vaut $2^6\times 3^4$, soit 5 184.

Corrigé exercice 113 :

1. Il y a 5 choix pour le premier rotor, 4 pour le deuxième et 3 pour le troisième soit $5\times 4\times 3 = 60$ choix de rotors possibles.

2. Puisque chaque rotor à 26 positions différentes, le nombre de positions du triplet de rotors est $26^3 = 17\,576$.

3. a. On a $\binom{26}{6} = 230\,230$ manières de choisir 6 lettres inchangées parmi 26.

   b. Pour réaliser le premier câblage, on choisit deux lettres parmi 20 restantes, soit $\binom{20}{2}$. Pour le deuxième, on a $\binom{18}{2}$ possibilités, puis $\binom{16}{2}$ et ainsi de suite. Or, $\binom{20}{2}\times\binom{18}{2}\times\binom{16}{2}\times\ldots\times\binom{2}{2} = \frac{20!}{2!18!}\times\frac{18!}{2!16!}\times\frac{16!}{2!14!}\times\ldots\times\frac{2!}{2!0!}$ $= \frac{20!}{2^{10}}$. Puisque l'ordre des câblages n'a pas d'importance, il faut encore diviser par 10! pour obtenir le nombre de câblages différents. En effet, pour choisir un câble, on a 10 choix pour le premier, 9 pour le deuxième et ainsi de suite. Le nombre de câblages est donc $\frac{20!}{10!\times 2^{10}} = 654\,729\,075$.

4. Le nombre de configurations de la machine Enigma est donc $60\times 17\,576\times 230\,230\times 654\,729\,075$ soit $158\,962\,555\,217\,826\,360\,000$, ou environ $1,59\times 10^{20}$.

Corrigé exercice 114 :

Partie A :

1. a. Pour $n=1$: $a+b = \binom{1}{0}a^0b + \binom{1}{1}ab^0$.

   b. Pour $n=2$: $\binom{2}{0}a^0b^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}a^2b^0 = a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$.

   c. Pour $n=3$: $\binom{3}{0}a^0b^3 + \binom{3}{1}ab^2 + \binom{3}{2}a^2b + \binom{3}{3}a^3b^0 = b^3+3ab^2+3a^2b+a^3 = (a+b)^3$.

2. a. En manipulant le symbole $\sum$ de façon méthodique, on obtient :

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k \\ &= (a+b)\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^i b^{k-i} \\ &= a\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^i b^{k-i} + b\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^i b^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{i+1} b^{k-i} + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^i b^{k-i+1}\end{aligned}$$

b. On réalise la substitution $i = j+1$ et on obtient :

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{i+1}b^{k-i} = \sum_{j=1}^{k+1}\binom{k}{j-1}a^j b^{k-j+1}.$$

Puis en renommant :

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1}\binom{k}{i-1}a^i b^{k-i+1} + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^i b^{k-i+1}.$$

c. On obtient alors le calcul ci-dessous :

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= \sum_{i=1}^{k+1}\binom{k}{i-1}a^i b^{k-i+1} + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^i b^{k-i+1} \\ &= \binom{k}{0}a^0 b^{k+1}\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i-1}a^i b^{k-i+1} + \binom{k}{0}a^{k+1}b^0\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}a^i b^{k-i+1} \\ &= b^{k+1} + a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\left(\binom{k}{i-1}+\binom{k}{i}\right)a^i b^{k-i+1}\end{aligned}$$

d. Comme (d'après la formule de Pascal), on a $\binom{k}{i-1}+\binom{k}{i} = \binom{k+1}{i}$ alors :

$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + b^{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1}\binom{k+1}{i}a^i b^{k-i+1}$

e. On a donc $(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}a^i b^{k+1-i}$ et on a montré la formule du binôme de Newton par récurrence.

Partie B :

- On obtient :

$$\begin{aligned}(a+2)^3 &= 2^3 + 3\times 2^2 a + 3\times 2a^2 + a^3 \\ &= a^3 + 6a^2 + 12a + 8\end{aligned}$$

- Ainsi que :

$$\begin{aligned}(a+2)^5 &= 2^5 + 5\times 2^4 a + 10\times 2^3 a^2 + 10\times 2^2 a^3 + 5\times 2a^4 + a^5 \\ &= a^5 + 10a^4 + 40a^3 + 80a^2 + 80a + 32\end{aligned}$$

Corrigé exercice 115 :

1. On a $\binom{n+k-1}{k}$ possibilités pour choisir les places des 1.

2. Reprenons l'exemple donné dans l'énoncé : $A = \{a; b; c; d\}$ (donc $n = 4$) et $k = 6$. On souhaite avoir le $n-$uplet $(0; 2; 3; 1)$ On a alors $n+k-1 = 9$. On construit donc le mot 000 000 000. Pour faire correspondre ce mot au $n-$uplet précédent, on remplace les 0 par un nombre de 1 correspondant aux différentes composantes du $n-$uplet. Ici, ça donne : 011 011 101. Le premier 0 indique que la première composante du $n-$uplet est 0. Ensuite, il y a deux 1 donc la deuxième composante est 2. Puis, le 0 est utilisé comme un “espace”. Il y a ensuite trois 1 puis un “espace” puis un seul 1. Donc les deux dernières composantes sont 3 et 1. Le $n-$uplet obtenu est bien $(0; 2; 3; 1)$.

   On peut utiliser cette méthode pour tous les $n-$uplets.

3. Pour créer le mot de départ avec les 0, on utilise $n + k - 1$ zéros. Parmi ceux-là, on en change $k$qui deviennent des 1. Dans la question 2, on a vu qu'à chacun de ces mots correspond une combinaison à k éléments de A, avec répétitions. Ce nombre de combinaisons est donc bien $\binom{n+k-1}{k}$.

4. Ici, on a $n = 4$ et $k = 10$. $n + k - 1 = 13$ donc le nombre de bouquets possible est $\binom{13}{10} = 286$.

5. L'idée ici est d'avoir un mot avec cinquante 0 puis de modifier uniquement deux 0 en 1. On obtient ainsi trois groupes de 0 séparés par ces 1 (trois groupes car on recherche un triplet). Le nombre x est égal au nombre de 0 du premier groupe (en lisant de gauche à droite). Le nombre y est égal au nombre de 0 du 2e groupe augmenté d'une unité (le premier 1 de séparation). Le nombre z est égal au dernier groupe de 0 avec le dernier 1. On aura bien $x + y + z = 50$ puisque nous avions cinquante zéros au départ.

   Ainsi, déterminer le nombre de triplet revient à déterminer le nombre de possibilité de remplacer deux 0 parmi cinquante, soit $\binom{50}{2} = 1\,225$.

   Exemple plus court avec $x + y + z = 10$. On écrit le mot constitué de dix 0 : 0 000 000 000. On remplace deux 0 par des 1 (n'importe lesquels) : 0 001 010 000. On a alors : $x = 3$; $y = 2$ et $z = 5$. On a bien $3 + 2 + 5 = 10$. Le nombre de triplets $(x; y; z)$ tels que $x + y + z = 10$ est $\binom{10}{2} = 45$.

Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 2 : Vecteurs, droites et plans de l'espace

Table des matières

1 Informations sur ce chapitre

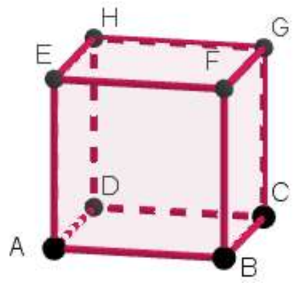
Le B.O. précise que « cette section introduit d'emblée le calcul vectoriel dans l'espace, avec les notions qui l'accompagnent ». C'est pourquoi la première partie de ce chapitre est consacrée aux vecteurs : vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires et vecteurs linéairement indépendants. La notion de base est introduite conformément au programme. Ces notions préparent de plus les élèves à l'enseignement supérieur (algèbre linéaire).
La seconde partie du chapitre étudie la position des droites et des plans dans l'espace. Cette partie nous donne aussi la possibilité d'étudier des problèmes de configurations dans l'espace (alignement, parallélisme, droites et points coplanaires).
La troisième partie est consacrée au repérage de l'espace. Il s'agit de définir les coordonnées des points, des vecteurs de l'espace, de caractériser les droites de l'espace par leurs représentations paramétriques.
Les exercices de ce chapitre sont donc variés, chaque thème est représenté : géométrie vectorielle, géométrie « pure » (problème d'intersection, de parallélisme et section d'un solide par un plan) et géométrie analytique (résolution de problèmes à l'aide de coordonnées). Dans chaque thème d'étude, la difficulté des exercices est graduée. En particulier dans les deux premières parties parfois difficiles pour les élèves, le choix a été fait de mettre des questions intermédiaires dans les premiers exercices afin de faciliter l'apprentissage des notions. Certains exercices permettent également une préparation à l'enseignement supérieur, notamment les approfondissements du programme (barycentre, fonction scalaire de Leibniz).

2 Avant de commencer

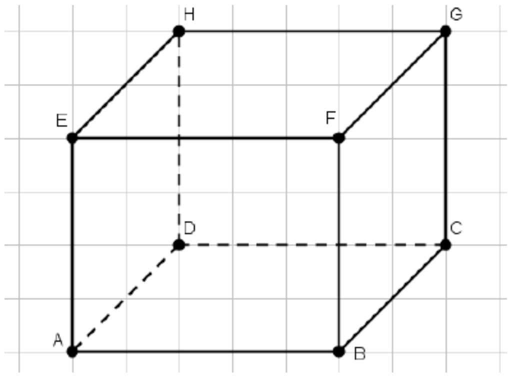
2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

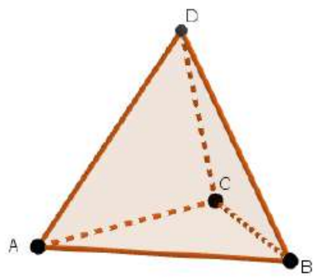
1. Cube :



2. Pavé droit :

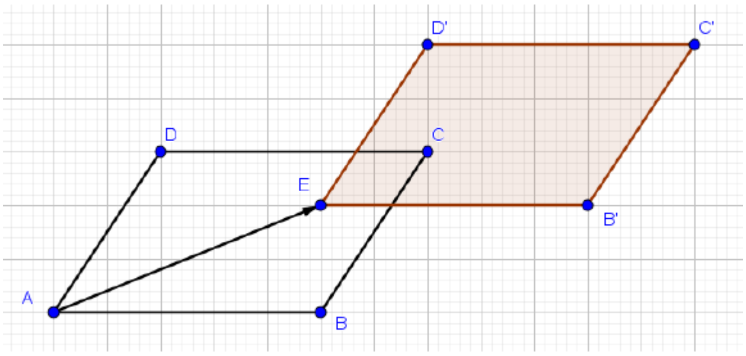


3. Tétraèdre régulier :



Corrigé exercice 2 :

1. t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$. On a donc $E = t(A)$. E est l'image de A par t.
2. On obtient la figure ci-dessous.



3. Comme la translation conserve les longueurs, le quadrilatère $EB'C'D'$ est un parallélogramme.

Corrigé exercice 3 :

$ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ c'est-à-dire si, et seulement si, $\begin{cases} x_D - x_A = x_C - x_B \\ y_D - y_A = y_C - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 1 = 0 + 3 \\ y_D - 3 = -2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 0 \end{cases}$.
Conclusion : $D(4;0)$.

Corrigé exercice 4 :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC} \\
&= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{RS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \\
&= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{RS} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \\
&= \overrightarrow{RS} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\
&= \overrightarrow{RS} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

On obtient alors $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Les droites (RS) et (AC) sont donc parallèles.

Corrigé exercice 5 :

1. $\begin{cases} x + y + z = 0 & (1) \\ x + y = 0 & (2) \\ 2x + y = 0 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 & (1) \\ x + y = 0 & (2) \\ x = 0 & (3) - (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

   $S = \{(0;0;0)\}$

2. $\begin{cases} x + y + z = 1 & (1) \\ 2x - y = 2 & (2) \\ x - y + z = 3 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 & (1) \\ 2x - y = 2 & (2) \\ 2y = -2 & (1) - (3) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1+z=1 \\ 2x+1=2 \\ y=-1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}-1+z=1 \\ x=\frac{1}{2} \\ y=-1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{3}{2} \\ x=\frac{1}{2} \\ y=-1 \end{cases}$$

$S=\left\{\left(\frac{1}{2};-1;\frac{3}{2}\right)\right\}$

Corrigé exercice 6 :

On a $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} x_A-x_O \\ y_A-y_O \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et d'autre part $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} x_B-x_O \\ y_B-y_O \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Comme $\frac{1}{-2}=\frac{\frac{1}{2}}{-1}$, les coordonnées des vecteurs sont proportionnelles donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires. Les points O, A et B sont alignés. On peut aussi utiliser le déterminant : $\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=-1+1=0$ donc les vecteurs sont colinéaires et les points sont alignés.

Corrigé exercice 7 :

1. On a : $A(0;0)$, $C(1;0)$, $B(0;1)$. I étant le milieu de $[AB]$ on a $\begin{cases} x_I=\frac{x_A+x_B}{2} \\ y_I=\frac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$ soit $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$. De même, on calcule $J\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $K\left(\frac{1}{2};0\right)$.
2. L'équation réduite de la droite (AJ) est $y=x$.
3. L'équation réduite de la droite (CI) est $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.
4. L'équation de la droite (BK) est $y=-2x+1$.
5. Soit $G(x,y)$, le point d'intersection des trois droites s'il existe.

   Les coordonnées de G vérifient les équations des trois droites, soit le système :

   $$\begin{cases} y=x \\ y=-2x+1 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{donc} \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}=\frac{1}{3} \end{cases}.$$

   La dernière équation est vérifiée, le système admet une solution. Les trois droites sont concourantes en un point $G\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

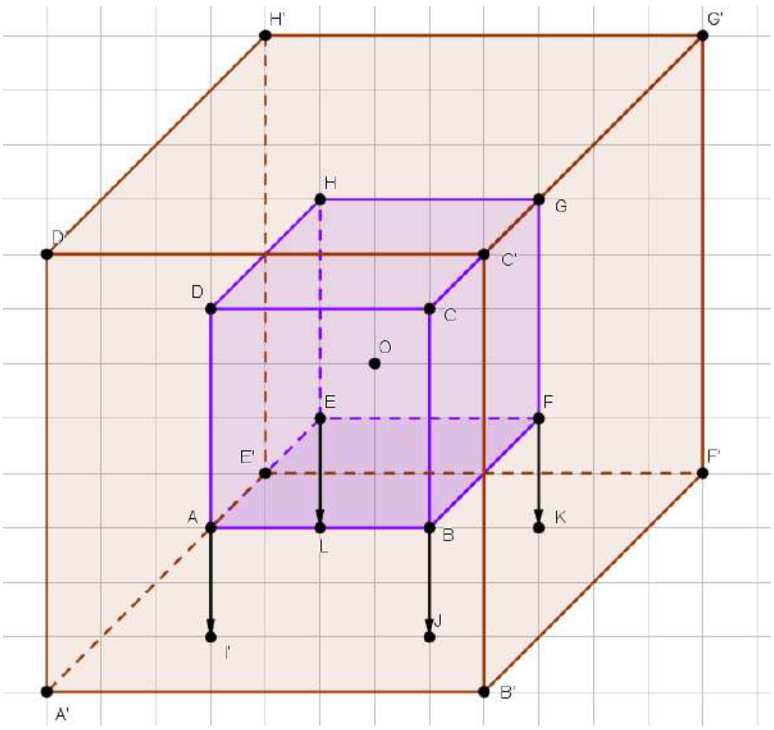
3 Activités

3.1 Corrigé activité A :

L'activité A permet de se familiariser avec l'espace en effectuant une reproduction de solide (le cube) et des constructions de points définis par des relations vectorielles. L'objet de l'activité est la « reproduction » de la grande arche.

Questions :

1. Voir figure.
2. a. Voir figure.
   b. Voir figure.
   c. D'après les relations vectorielles A, O et A' sont alignés, O, G et G' sont alignés. Or A, G et O sont alignés puisque O est le milieu de la diagonale $[AG]$ d'où le résultat.
3. Voir figure.
4. A', I' et F' sont alignés et A, A' et G sont alignés. De plus, $A'A = \frac{1}{4}A'G'$ et $A'I' = \frac{1}{4}A'F'$ d'où, d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(I'A)$ est parallèle à (GF). Or, (GF) est parallèle à (AD) donc $(I'A)$ est parallèle à (AD). Les points A, I' et D sont donc alignés.
5. Voir figure.



Bilan :

Les théorèmes de la géométrie plane s'appliquent à tout plan de l'espace.

3.2 Corrigé activité B :

Le but de cette activité est de familiariser les élèves avec la géométrie dans l'espace, et de découvrir quelques premiers résultats (vus en seconde dans le précédent programme). Par exemple, visualiser la position de droites non coplanaires est une bonne solution pour éviter certaines erreurs rencontrées sur la position des droites. En résumé, cette activité permet aux élèves de se poser la question des positions relatives de droites et de plans dans l'espace.

Questions :

Partie A

1. Manipulations GeoGebra (voir le fichier TICE).
2. a. Manipulations GeoGebra (voir le fichier TICE).
   b. Les droites (BF) et (DE) ne semblent pas sécantes. Pour autant, elles ne semblent pas parallèles non plus. Elles sont donc sans doute non coplanaires.

Partie B

1. On construit un cube $ABCDEFGH$.
   a. Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.
   b. Les plans (EHD) et (EAD) contiennent la même face du cube : ils sont confondus.
2. a. Manipulation GeoGebra.
   b. On peut conjecturer que les plans (FHD) et (EFG) sont sécants et que leur intersection est une droite.

Partie C

1. Manipulation GeoGebra
2. a. L'intersection de (EG) et du plan (FHD) semble être le centre du carré $EFGH$.
   b. La droite (EG) est l'intersection de (EG) et de (EFG) car elle est incluse dans le plan.
   c. L'intersection de (EG) et du plan (ABC) est vide.

Bilan :

Dans l'espace, on peut définir un plan à l'aide de 3 points non alignés. Comme dans le plan, deux droites peuvent être sécantes en un point ou bien parallèles (strictement ou confondues). Dans l'espace, elles peuvent également être non coplanaires (ni parallèles, ni sécantes : il n'existe aucun plan qui les contient toutes les deux). Dans l'espace, deux plans peuvent être sécants selon une droite ou bien parallèles (confondus ou strictement parallèles). Dans l'espace, une droite peut être incluse dans un plan ou bien être sécante à ce plan en un unique point. Elle peut également être strictement parallèle au plan et ne posséder aucun point commun avec lui.

3.3 Corrigé activité C :

L'objectif de cette activité est de faire découvrir les coordonnées de vecteurs et de points dans l'espace. C'est un concept facile pour les élèves puisqu'ils connaissent les coordonnées de points et de vecteurs dans le plan. Aussi dans cette activité, on insiste sur la définition des coordonnées par la relation vectorielle associée, car cette définition est la moins évidente pour les élèves lorsqu'il faut l'utiliser dans les exercices.

Questions :

Partie A

1. $ABCDEFGH$ est un cube donc (AE) est perpendiculaire à (AB) et à (AD). D'autre part (AB) est perpendiculaire à (AD) donc les points ne sont pas coplanaires.
2. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD}$. On a donc : $a = 1$, $b = 1$ et $c = 0$.
3. Par le même procédé, on obtient les coordonnées suivantes $\overrightarrow{A}F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{A}G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{A}H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Partie B

1. On obtient les coordonnées suivantes : $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$ et $H(0;1;1)$.
2. On a $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$. En décomposant, on obtient $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. Ainsi, on a $I\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$.

Bilan :

On peut définir un repère dans l'espace à l'aide d'un point (l'origine) et de trois vecteurs non coplanaires. Si A est l'origine du repère, les coordonnées d'un point M sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la base formée par les trois vecteurs précédents.

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 8 :

En prenant $t = 1$, on obtient les coordonnées du point D.

Réponse d

Corrigé exercice 9 :

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-1; 6; 1)$ et avec, la réponse a, les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ sont $(-2; 12; 2)$ donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ et les points A, B et C sont alignés.

Réponse a

Corrigé exercice 10 :

On pose $M(x; y; z)$.

On doit alors résoudre $\begin{cases} x-1 &= -7 \\ y-2 &= -6 \\ z-1 &= 4 \end{cases}$ et la réponse d) est solution de ce système.

Réponse d

Corrigé exercice 11 :

On veut $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v} + k'\overrightarrow{w}$. Si on prend la réponse c) pour $\overrightarrow{w}$, la relation est vérifiée avec $k = -1$ et $k' = 1$.

Réponse c

Corrigé exercice 12 :

Si $\overrightarrow{w}(1; -1; 2)$ alors $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ et si $\overrightarrow{w}(-1; -2; 1)$ alors $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$. Avec les coordonnées des réponses a) et c), les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont non coplanaires et forment donc une base de l'espace.

Réponses a et c

Corrigé exercice 13 :

On a $\overrightarrow{AB}(3; -1; 1)$ ce qui élimine la réponse c). Les points de coordonnées $(-1; -2; 3)$ et $(11; -6; 7)$ appartient à la droite (AB), ce qui n'est pas le cas du point de coordonnées $(1; 1; 1)$.

Réponses a et d

Corrigé exercice 14 :

Le représentant du vecteur $\overrightarrow{v}$ d'origine A doit être un vecteur appartenant au plan (ABC) et non colinéaire avec $\overrightarrow{u}$. C'est le cas si ses coordonnées sont celles de la réponse b) ou c).

Réponses b et c

Corrigé exercice 15 :

Les droites (IK) et (JA) sont non coplanaires. De même pour les droites (LI) et (GK).
$\boxed{\text{Réponses a et c}}$

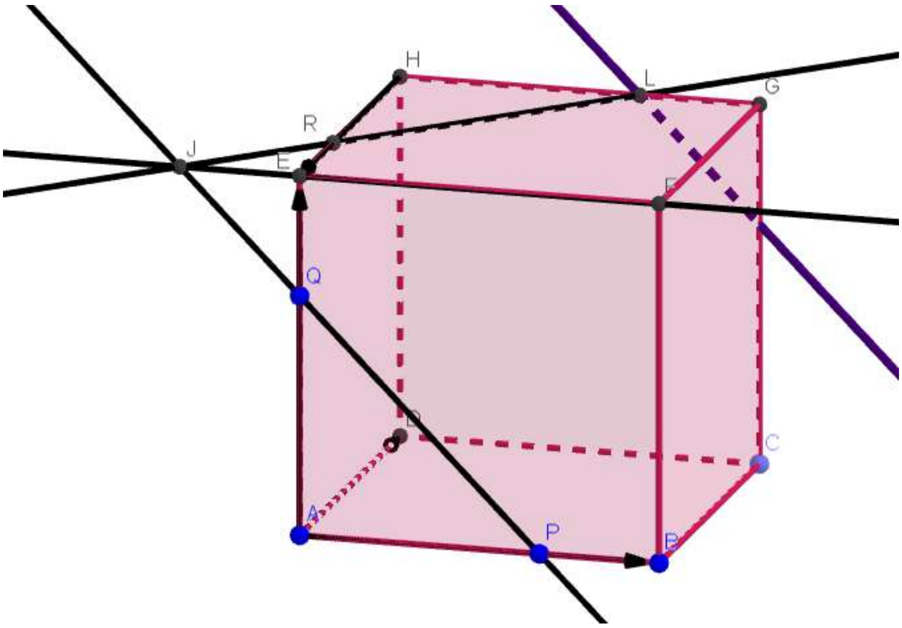
Corrigé exercice 16 :

1. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{k}$. De même $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$
Donc $B(2;0;0), E(0;0;2), F(2;0;2), H(0;2;2)$

2. $\overrightarrow{HR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HE}$ d'où $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ et $R\left(0;\frac{2}{3};2\right)$.

3. On a $\overrightarrow{PQ}\left(-\frac{4}{3};0;\frac{4}{3}\right)$, $\overrightarrow{PI}\left(0;-\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)$ et $\overrightarrow{PR}\left(-\frac{4}{3};\frac{2}{3};2\right)$. Ainsi, on a $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PI}$.
Par conséquent, les points P, Q, R et I sont coplanaires.

4. Les plans (RPQ) et (ABF) sont sécants et leur droite d'intersection est (PQ) ; or (DGC) est parallèle à (ABF) donc l'intersection des plans (DCG) et (PQR) est une droite parallèle à (PQ). (PQ) et (EF) sont coplanaires et sécantes. On appelle J leur point d'intersection. $J \in (PQ)$ donc $J \in (PQR)$. $J \in (EF)$ et $R \in (EH)$ donc $(JR) \in (EFG)$ et $(JR) \in (PQR)$ (JR) et (HG) sont coplanaires et sécantes. On appelle L leur point d'intersection. $L \in (HG)$ donc $L \in (DHG)$ et $L \in (JR)$ donc $L \in (PQR)$. Conclusion : La droite d'intersection des plans (PQR) et (DHG) est la parallèle à (PQ) contenant L.



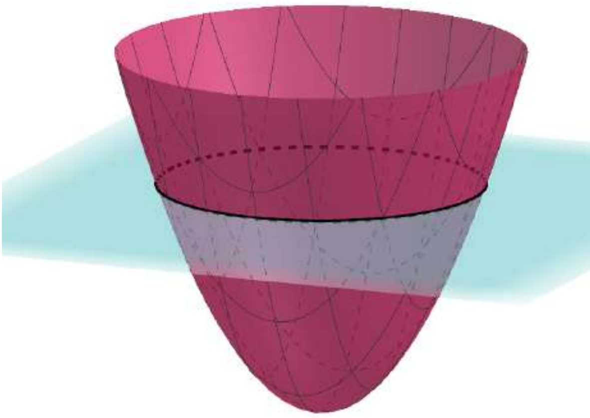
5 TP/TICE

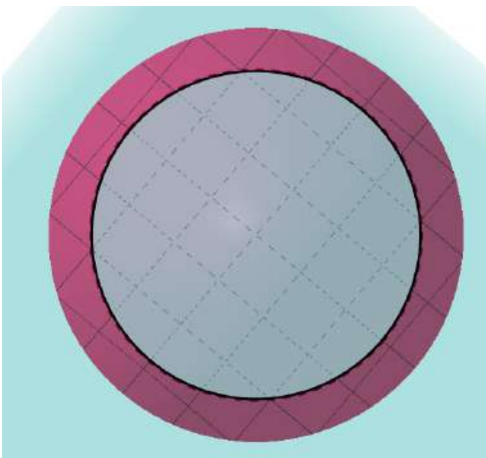
5.1 Corrigé du TP 1

Méthode 1

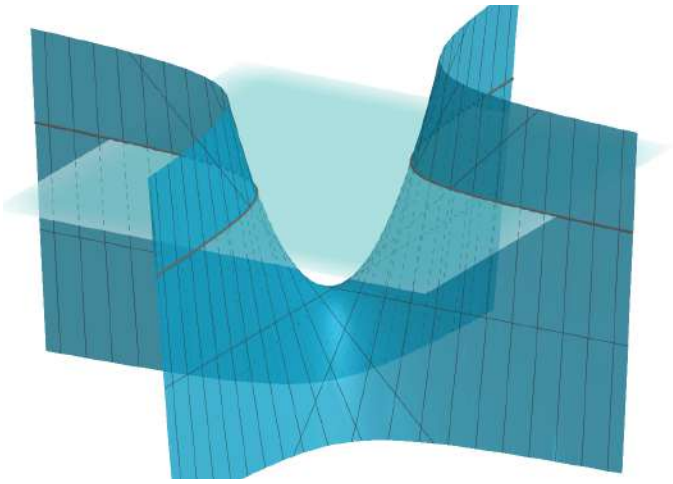
1. a. La surface représentant f est un plan.
   b. L'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $z = 4$ est un plan parallèle à (Oxy).
   c. L'intersection de la surface représentant f et de l'ensemble des points M tels que $z = 4$ est la droite passant par les points $A(0; 5; 4)$ et $B(1; 4; 4)$.

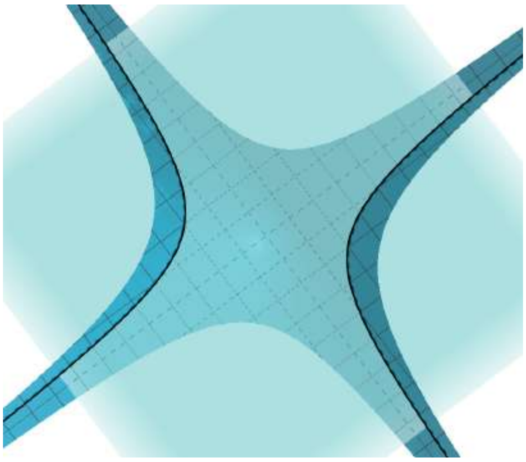
2. a. On utilise la zone de saisie pour définir la fonction g. Sa représentation apparaît alors automatiquement.
   b. On conjecture que le minimum de la fonction g est atteint pour $(x; y) = (0; 0)$. Ce minimum vaut 0.
   c. L'intersection de la surface représentant g et de la surface d'équation $z = 4$ semble être un cercle.





3. a. On utilise la zone de saisie pour définir la fonction h. Sa représentation apparaît alors automatiquement.
   b. L'intersection de la surface représentant f et de la surface d'équation $z = 4$ est une hyperbole.





Méthode 2

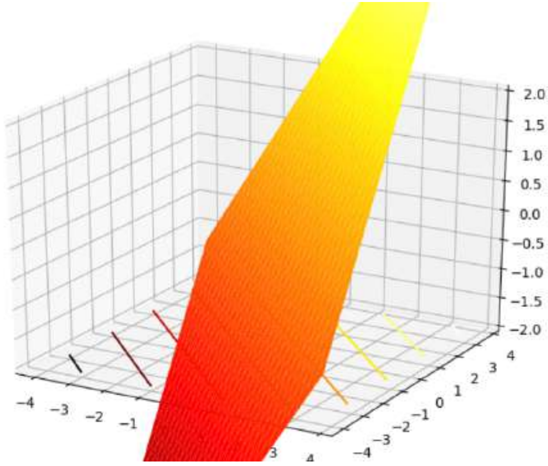
Voir le fichier TICE pour le programme complet.

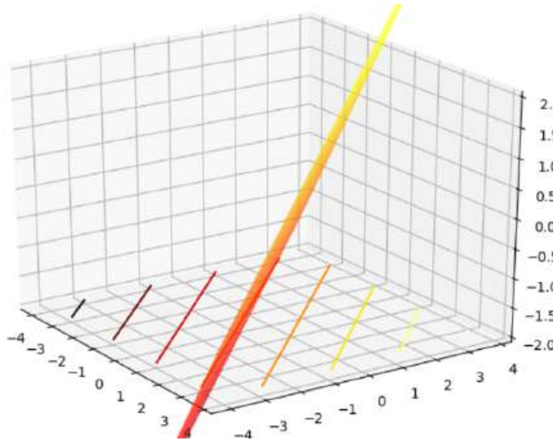
1. a. Voici une fonction possible.

```python
def f(x,y):
    return x+y-1
```

   b. La surface représentant f est un plan.

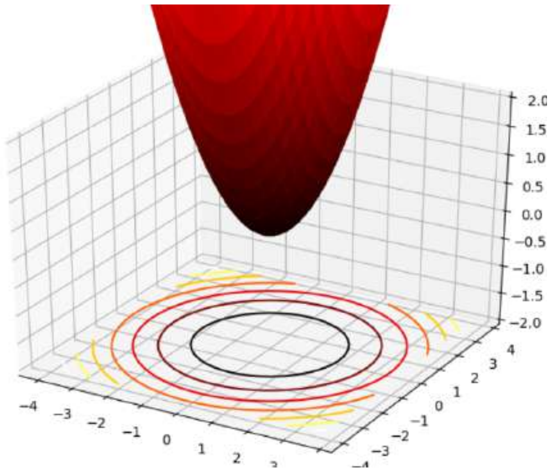
```python
from numpy import *
from matplotlib.pyplot import *
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
def f(x,y):
    return x+y-1
fig=figure()
ax=Axes3D(fig)
x=np.arange(-4,4,0.25)
y=np.arange(-4,4,0.25)
x,y=np.meshgrid(x,y)
z=f(x,y)
ax.plot_surface(x,y,z,rstride=1,cstride=1,cmap=cm.hot)
ax.contour(x,y,z,zdire='z',offset=-2,cmap=cm.hot)
ax.set_zlim(-2,2)
show()
```





2. a. Le code suivant permet représenter la fonction souhaitée.

```
from numpy import *
from matplotlib.pyplot import *
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
def f(x,y):
    return 0.5*x**2+0.5*y**2
fig=figure()
ax=Axes3D(fig)
x=np.arange(-4,4,0.25)
y=np.arange(-4,4,0.25)
x,y=np.meshgrid(x,y)
z=f(x,y)
ax.plot_surface(x,y,z,rstride=1,cstride=1,cmap=cm.hot)
ax.contour(x,y,z,zdire='z',offset=-2,cmap=cm.hot)
ax.set_zlim(-2,2)
show()
```

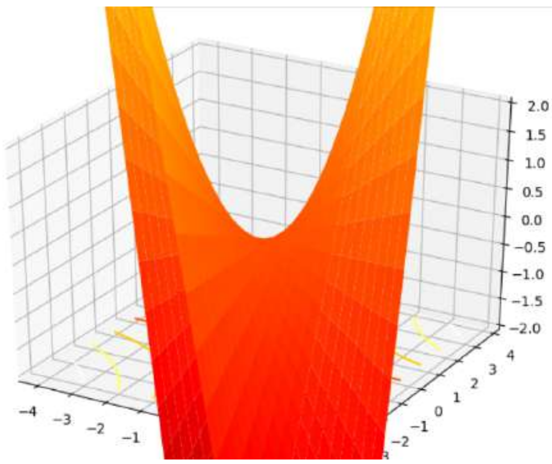


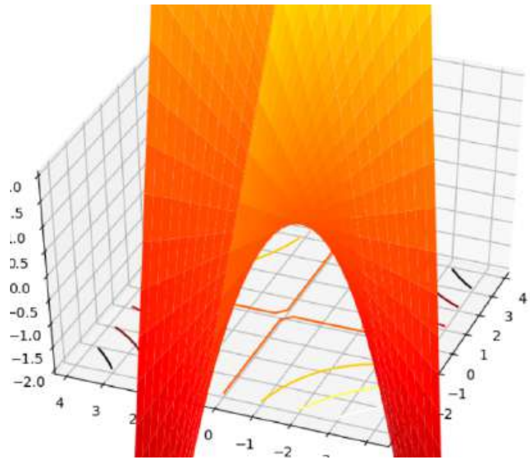
b. On conjecture que le minimum de la fonction vaut 0 et qu'il est atteint en $x = y = 0$

c. L'intersection de la surface représentant f et de la surface d'équation $z = 4$ est un cercle.

3. a. Le code suivant permet représenter la fonction souhaitée.

```python
from numpy import *
from matplotlib.pyplot import *
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
def f(x,y):
    return x*y
fig=figure()
ax=Axes3D(fig)
x=np.arange(-4,4,0.25)
y=np.arange(-4,4,0.25)
x,y=np.meshgrid(x,y)
z=f(x,y)
ax.plot_surface(x,y,z,rstride=1,cstride=1,cmap=cm.hot)
ax.contour(x,y,z,zdire='z',offset=-2,cmap=cm.hot)
ax.set_zlim(-2,2)
show()
```





b. L'intersection de la surface représentant f et de la surface d'équation $z = 4$ est une hyperbole.

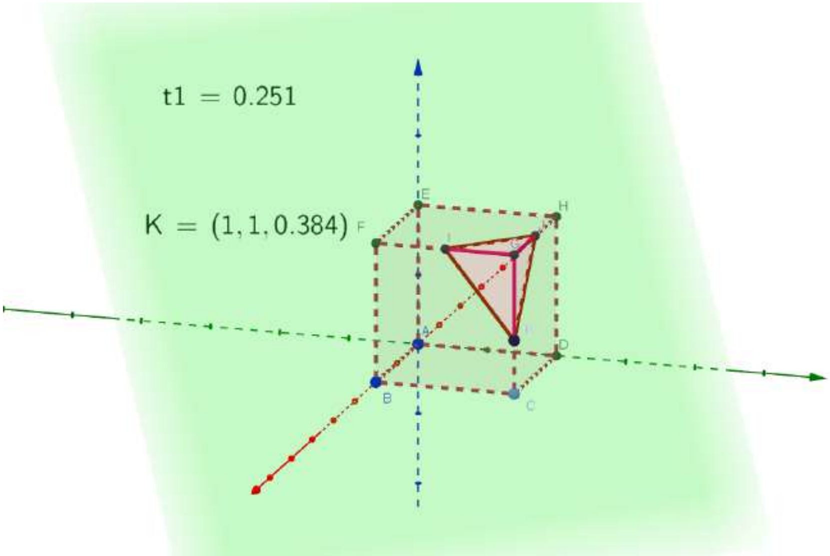
5.2 Corrigé du TP 2

Questions préliminaires

1. La section du cube et du plan (IJK) est le triangle IJK. I et J étant les milieux respectifs des arêtes $[FG]$ et $[GH]$, les longueurs IG et GJ sont égales. Les triangles rectangles GKI et GKJ ont l'arête $[GK]$ en commun. Ils sont donc semblables. On a donc $IK = JK$. Le triangle IJK est isocèle en K.

2. En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle IGJ, on a :
   $IJ = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
   aire de $IJG = \frac{GJ \times GI}{2} = \frac{1}{8}$.
   L'objectif revient donc à déterminer la position du point K telle que :
   aire de $IJK = 2 \times$ aire de $IJG = \frac{1}{4}$.

Méthode 1



Voir le fichier TICE. Pour répondre au problème posé, on a $K(1; 1; 0,384)$, c'est-à-dire $CK = 0,384$.

Méthode 2

1. a. IJK est isocèle en K. Donc le triangle ILK est rectangle en L, milieu de $[IJ]$ car $[LK]$ est la hauteur issue de $[IJ]$. Donc $(LK) \perp (IJ)$.
   b. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ILK, on a $LK^2 = IK^2 - IL^2$. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle IGK, on a $IK^2 = IG^2 + GK^2$. Ainsi, $LK^2 = IG^2 + GK^2 - IL^2 = (\frac{1}{2})^2 + (1-z)^2 - (\frac{\sqrt{2}}{4})^2 = \frac{1}{8} + (1-z)^2$. Et donc $LK = \sqrt{\frac{1}{8} + (1-z)^2}$.
   c. Voici un exemple possible.

```python
from math import *
def hauteur(z):
    return sqrt(1/8+(1-z)**2)
```

d. Voici un exemple possible.

```python
from math import *
def hauteur(z):
    return sqrt(1/8+(1-z)**2)

def aire(z):
    return (sqrt(2)/2*hauteur(z))/2
```

```
>>> aire(1)
0.12500000000000003
```

On retrouve bien l'aire du triangle IJG. On remarque toutefois la difficulté qu'éprouvent les programmes informatiques à gérer les nombres réels.

2. Voici ce que donne le programme une fois complété.

```python
from math import *
def hauteur(z):
    return sqrt(0.125+(1-z)**2)

def aire(z):
    return (sqrt(2)/2*hauteur(z))/2

z=1
A=0.125
pas=0.001
while A<0.25:
    z=z-pas
    A=aire(z)
print(z)
```

```
>>>
0.38699999999999946
```

On obtient $z_K \approx 0.387$.

Méthode 3

1. a. IJK est isocèle en K. Donc le triangle ILK est rectangle en L, milieu de $[IJ]$ car $[LK]$ est la hauteur issue de $[IJ]$. Donc $(LK) \perp (IJ)$.

   b. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ILK, on a $LK^2 = IK^2 - IL^2$. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle IGK, on a $IK^2 = IG^2 + GK^2$.

   Ainsi, $LK^2 = IG^2 + GK^2 - IL^2 = (\frac{1}{2})^2 + (1-z)^2 - (\frac{\sqrt{2}}{4})^2 = \frac{1}{8} + (1-z)^2$.

   Et donc $LK = \sqrt{\frac{1}{8} + (1-z)^2}$.

2. Voir le fichier TICE.

   On trouve $0,38 \leqslant z \leqslant 0,39$.

	A	B	C	D	E	F	G
34	0,32	0,76642025	0,27097048				
35	0,33	0,75756188	0,26783857				
36	0,34	0,74873226	0,26471683		z	LK	Aire IJK
37	0,35	0,73993243	0,26160562		0,38	0,71372264	0,25233906
38	0,36	0,73116346	0,25850532		0,381	0,71285412	0,25203199
39	0,37	0,72242647	0,25541633		0,382	0,71198595	0,25172505
40	0,38	0,71372264	0,25233906		0,383	0,71111813	0,25141823
41	0,39	0,70505319	0,24927395		0,384	0,71025066	0,25111153
42	0,4	0,69641941	0,24622145		0,385	0,70938354	0,25080495
43	0,41	0,68782265	0,24318203		0,386	0,70851676	0,2504985
44	0,42	0,67926431	0,2401562		0,387	0,70765034	0,25019218
45	0,43	0,67074585	0,23714447		0,388	0,70678427	0,24988597
46	0,44	0,66226883	0,23414739		0,389	0,70591855	0,2495799
47	0,45	0,65383484	0,23116553		0,39	0,70505319	0,24927395
48	0,46	0,64544558	0,22819947				

6 Travailler les automatismes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 17 :

$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Ces 3 vecteurs sont donc coplanaires.

Corrigé exercice 18 :

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$.
2. Ces 3 vecteurs sont donc coplanaires.

Corrigé exercice 19 :

Dans le triangle ADC, E et F sont les milieux respectifs des segments $[DA]$ et $[DC]$. La droite (EF) est donc parallèle à la droite (AC) (d'après la réciproque du théorème de Thalès). De la même manière, dans le triangle ABC, on montre que la droite (GH) est parallèle à la droite (AC). Ainsi $(EF)//(AC)//(GH)$ donc $(EF)//(GH)$.

Corrigé exercice 20 :

On a par définition du repère : $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$ et $D(0;1;0)$.
Ensuite, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ d'où $C(1;1;0)$. En appliquant la même méthode, on trouve : $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$, $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $J\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$.

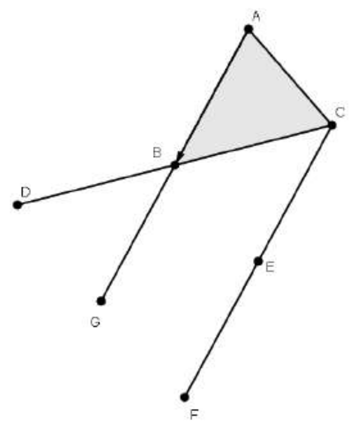
Corrigé exercice 21 :

L'affirmation est fausse. En effet, les droites d et Δ sont parallèles. Elles sont donc coplanaires. Le plan (P') les contenant toutes les deux et le plan (P) sont sécants (leur intersection est la droite d). Les plans (P) et (P') ne sont donc pas parallèles.

6.2 Exercices

Corrigé exercice 22 :

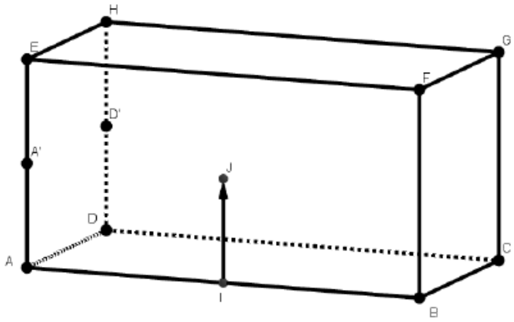
1. Voici une représentation de la figure.



2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BG}$ car $t(C) = E$, $t(E) = F$ et $t(B) = G$. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$ on a donc $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CF}$ et $AGFC$ est donc un parallélogramme.
3. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}$. B est donc le milieu de $[CD]$. $G = t(B)$ donc $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$ donc B est le milieu de $[AG]$ B est le milieu de $[CD]$ et $[AG]$ donc$ACGD$est un parallélogramme et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DG}$. Comme de plus, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{GF}$ puisque $AGFC$ est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{GF}$ et donc G est le milieu de $[FD]$.

Corrigé exercice 23 :

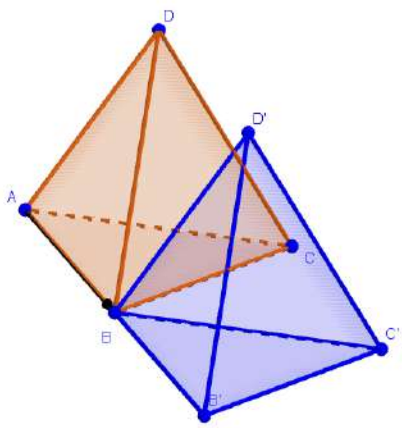
1. Voici une représentation de la figure.



2. Voir ci-dessus.
3. $A' = t(A)$ et $D' = t(D)$ donc $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{AD}$. Dans le pavé $ABCDEFGH$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH}$. Ainsi, $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$. $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{EH}$ donc $A'D'HE$ est un parallélogramme.

Corrigé exercice 24 :

1. Voici une représentation de la figure.



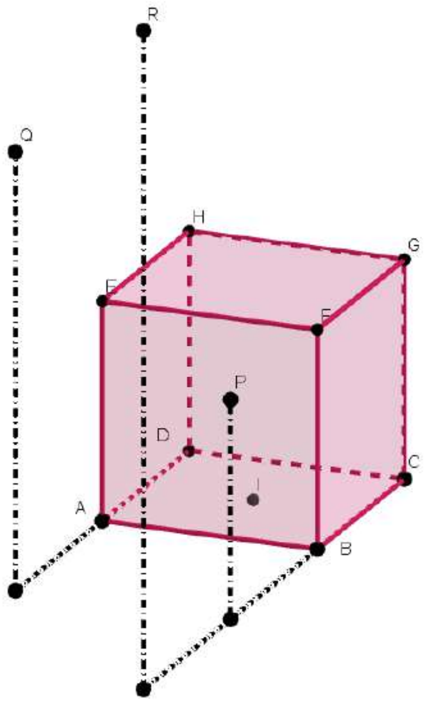
2. La translation conserve les longueurs. Ainsi, $AB = A'B' = BC = B'C' = CD = C'D' = a$ et $AC = A'C' = BD = B'D' = AD = A'D' = a$. $A'B'C'D'$ est donc un tétraèdre régulier de côté a.

Corrigé exercice 25 :

$\overrightarrow{w} = 3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}) + \overrightarrow{IE} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IE}$ $\overrightarrow{w} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont donc coplanaires. Remarque : I est le centre du rectangle $ABCD$ donc I est le milieu de $[BD]$. Et ainsi, $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BD}$.

Corrigé exercice 26 :

1. Voici une représentation de la figure.



2. $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$
$\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AQ}$ sont coplanaires. Les points A, P, Q et R sont coplanaires.

Corrigé exercice 27 :

On cherche les réels a, b et c tels que $a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ soit :

$$a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{i} + (b+c)\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{w}$ sont linéairement indépendants.

Corrigé exercice 28 :

On cherche les réels a, b et c tels que $a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}+c\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$ soit :
$a(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k})+b(\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k})+c(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k})=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow (a+c)\overrightarrow{i}+(a+b)\overrightarrow{j}+(2a+2b+c)\overrightarrow{k}=\overrightarrow{0}$

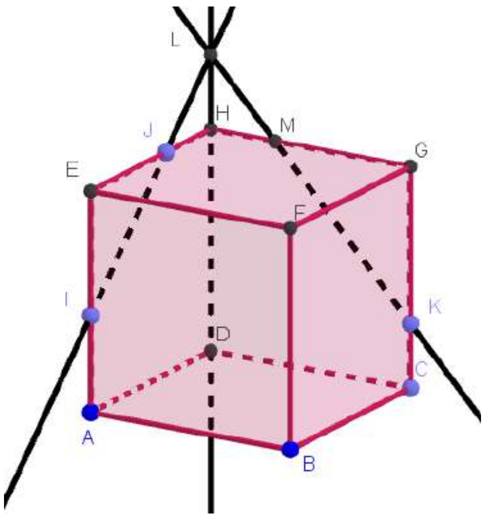
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ a+b=0 \\ 2a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont linéairement indépendants.

Corrigé exercice 29 :

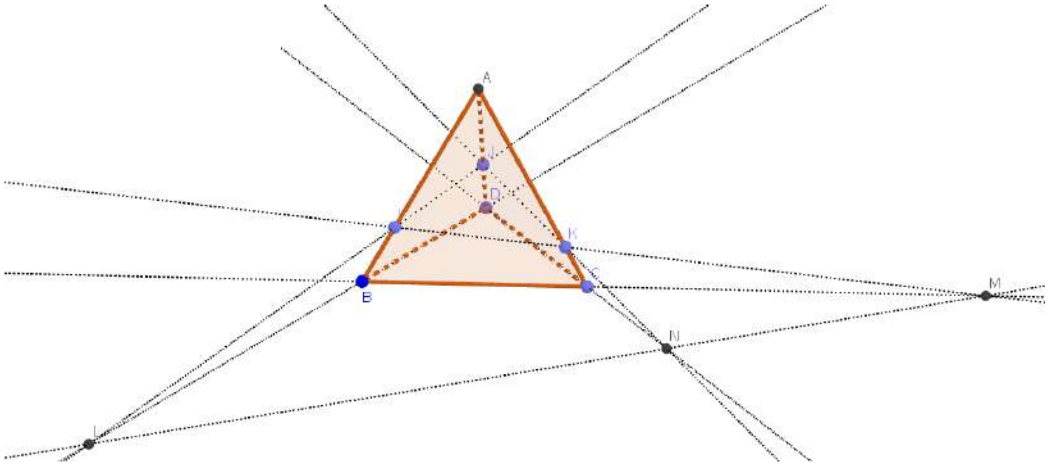
1. On cherche les réels λ et μ tels que :
   $\overrightarrow{w}=\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}$. $3\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}=\lambda(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k})+\mu(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k})$
   $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}=(\lambda+\mu)\overrightarrow{i}+(\lambda-\mu)\overrightarrow{j}+(2\lambda-2\mu)\overrightarrow{k}$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu=3 \\ \lambda-\mu=-1 \\ 2\lambda-2\mu=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=1 \\ \mu=2 \end{cases}$$
   On a donc $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont donc coplanaires.

Corrigé exercice 30 :



$K\in[GC]$ donc $K\in(GCD)$ et $K\in(IJK)$. (IJ) et (DH) sont deux droites sécantes du plan (ADH). Elles se coupent en L. $L\in(IJ)$ donc $L\in(IJK)$. L et K appartiennent tous les deux à (IJK) donc $(LK)\subset(IJK)$. $L\in(DH)$ et $(DH)\subset(GCD)$. Donc $L\in(GCD)$. L et K appartiennent tous les deux à (GCD) donc $(LK)\subset(GCD)$. Ainsi, $(LK)=(IJK)\cap(GCD)$.

Corrigé exercice 31 :



$L \in (IJ)$ donc $L \in (IJK)$. $M \in (IK)$ donc $M \in (IJK)$. $N \in (KJ)$ donc $N \in (IJK)$ Ainsi, L, M et N appartiennent au plan (IJK). $L \in (BD)$ donc $L \in (BCD)$. $M \in (BC)$ donc $M \in (BCD)$. $N \in (CD)$ donc $N \in (BCD)$. Ainsi, L, M, et N appartiennent aussi au plan (BCD). Donc, L, M, et N appartiennent à $(IJK) \cap (BCD)$. Les plans (IJK) et (BCD) sont donc sécants. L'intersection de deux plans est une droite. Les points L, M et N sont donc des points de cette droite. Ils sont alignés.

Corrigé exercice 32 :

1. $S \in (SBO)$ et $S \in (SAC)$ donc $S \in (SBO) \cap (SAC)$. $O \in (SBO)$ et O est le centre du carré $ABCD$. Donc O est le milieu de $[AC]$ donc $O \in (SAC)$ et $O \in (SBO) \cap (SAC)$. Les plans (SBO) et (SAC) sont sécants. L'intersection de ces deux plans est une droite dont deux points sont S et O. L'intersection cherchée est donc la droite (SO).

2. De façon évidente, $S \in (SAB) \cap (SDC)$. $(AB) \in (SAB)$ et $(DC) \in (SDC)$. De plus, $(AB)//(DC)$. D'après le théorème du toit, l'intersection des plans (SAB) et (SDC) est une droite parallèle aux droites (AB) et (DC). Cette droite passe de plus par le point S dont on sait qu'il appartient à l'intersection des deux plans.

Corrigé exercice 33 :

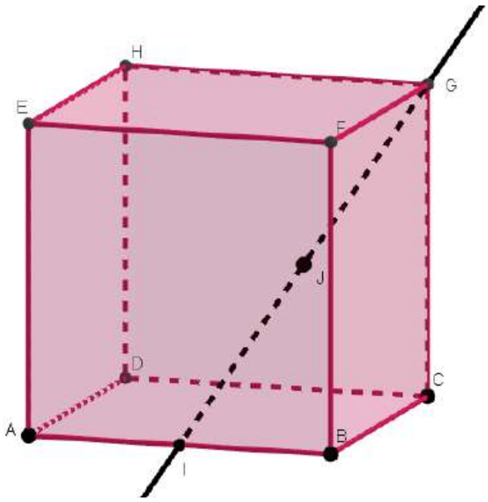
1. D'après le théorème de la droite des milieux, dans le triangle SAB, (IJ) est parallèle à (AB). $ABCD$ est un carré donc (AB) est parallèle à (DC).

   Ainsi, $(IJ)//(AB)//(DC)$ donc $(IJ)//(DC)$.

2. $(DC) \subset (SDC)$. La droite (IJ) est parallèle à la droite (DC) qui est incluse dans le plan (SDC). La droite (IJ) est donc parallèle au plan (SDC).

Corrigé exercice 34 :

I est le milieu de $[AB]$. Donc, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



D'une part, $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. D'autre part, $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, d'où $\overrightarrow{IG} = 2(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}) = 2\overrightarrow{IJ}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires. Les points I, J et G sont alignés.

Corrigé exercice 35 :

On a : $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$.

Et ainsi, $-3\overrightarrow{EG} + 2\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}8\\-5\\0\end{pmatrix}$ et $2\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-5\\4\\-1\end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 36 :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\-1-2\\3-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$. On a aussi $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-1\\-4-2\\5-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-6\\4\end{pmatrix}$.
Ainsi, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc les points A, B et C sont alignés.

Corrigé exercice 37 :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-2\\3-3\\1-(-2)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-2\\1-3\\0-(-2)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix}$.
Comme $\frac{-1}{-3} \neq \frac{0}{-2}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan.

Corrigé exercice 38 :

O, A, B et C sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels non simultanément nuls λ et μ tels que $\overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{OC}$.

On a $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \begin{cases}-\lambda+\mu=1 & (1)\\ -2\lambda+2\mu=2 & (2)\\ 3\lambda+5\mu=1 & (3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\lambda+\mu=1 & (1)\\ 8\mu=4 & (3)+3\times(1)\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}\lambda=-\frac{1}{2}\\ \mu=\frac{1}{2}\end{cases}$.

On a donc $\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$. Les points O, A, B et C sont donc coplanaires.

Corrigé exercice 39 :

1. $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\-6\\-7\end{pmatrix}$ donc d'après le résultat du cours : $\begin{cases}x=-t+4\\ y=-6t+7\\ z=-7t+2\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

2. Un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite δ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\6\\7\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{EF}$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires. Les droites (EF) et δ sont parallèles.

   Pour $E(4;7;2)$ on a donc : $\begin{cases}t+1=4\\ 6t-1=7\\ 7t=2\end{cases}$ soit $\begin{cases}t=3\\ t=\frac{4}{3}\\ t=\frac{2}{7}\end{cases}$.

   Le système n'est pas compatible donc le point E n'appartient pas à la droite δ.

   Les droites (EF) et δ sont donc strictement parallèles.

Corrigé exercice 40 :

Soient A, B et C trois points de l'espace. On note I le point défini par $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB}$ et D le point défini par $\overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{AC}$. Démontrer que A, B, C et D sont coplanaires.

Corrigé exercice 41 :

L'espace est rapporté à un repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$ contenant le point $A(4;-1;1)$.

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 42 :

Comme $\overrightarrow{u}$ est non nul :

$$\begin{aligned}(m+2)^2\overrightarrow{u}-4m\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0} &\Leftrightarrow ((m+2)^2-4m)\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}\\ &\Leftrightarrow (m+2)^2-4m=0\\ &\Leftrightarrow m^2+4=0 \Leftrightarrow m^2=-4\end{aligned}$$

Or, pour tout réel $m, m^2>0$. La somme vectorielle $(m+2)^2\overrightarrow{u}-4m\overrightarrow{u}$ ne peut donc jamais être nulle.

Corrigé exercice 43 :

$B'=t(B) \Leftrightarrow \overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB'}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BB'}=2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{MB}$

Corrigé exercice 44 :

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{v}$.

C'est-à-dire si, et seulement si, il existe un réel k tel que : $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}=k\times 1\\ 1=k\times\sqrt{2}\\ -1=k\times-\sqrt{2}\end{cases}$.

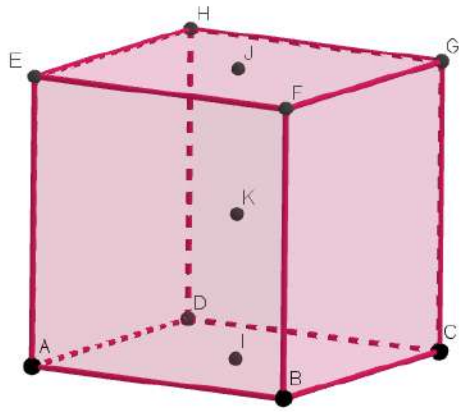
C'est-à-dire $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Les deux vecteurs sont donc colinéaires.

Corrigé exercice 45 :

$2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=4\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{k}+3\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}=4\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}=\overrightarrow{w}$
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas linéairement indépendants, ils ne forment donc pas une base.

Corrigé exercice 46 :

1. Voici une représentation de la figure.



2. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.
3. K est le centre du cube donc $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.
4. On a alors $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$. K est donc le milieu de $[AG]$.

Corrigé exercice 47 :

I est le milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.
J est le milieu de $[CD] \Leftrightarrow \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{0}$.
K est le milieu de $[IJ] \Leftrightarrow \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{0}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD} \\ &= 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}) \\ &= 2(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KJ}) = 4\overrightarrow{MK}\end{aligned}$$

Corrigé exercice 48 :

1. $-2\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} = \overrightarrow{u}$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont donc colinéaires.
2. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$. c'est-à-dire si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\begin{cases} 2 = k \times 3 \\ 4 = k \times 6 \\ -5 = k \times (-\frac{15}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ k = \frac{2}{3} \\ k = \frac{2}{3} \end{cases}$.
Le système est compatible. Les deux vecteurs sont colinéaires.

Corrigé exercice 49 :

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$. c'est-à-dire si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\begin{cases} -3 = k \\ 4 = a \times k \\ -1 = b \times k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ a = -\frac{4}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$.
Ainsi, avec $a = -\frac{4}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$, on obtient $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{v}$.

Corrigé exercice 50 :

1. Les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existes deux réels simultanément non nuls λ et μ tels que $\overrightarrow{e_3} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2}$.
$\overrightarrow{e_3} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ -3\lambda = -1 \\ 2\lambda + \mu = 2 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2 - \lambda = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \\ \lambda = \frac{1}{3} \\ \mu = 2 - 2\lambda = 2 - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \end{cases}$
Le système n'est pas compatible. Les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existes deux réels simultanément non nuls λ et μ tels que $\overrightarrow{e_3} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2}$.

$$\overrightarrow{e_3} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 6\mu = 1 & (1) \\ -6\lambda - 3\mu = 3 & (2) \\ -\lambda + 16\mu = 5 & (3) \end{cases}$$

On résout le système formé de la première et la troisième équation.

$$\begin{cases} \lambda + 6\mu = 1 & (1) \\ -\lambda + 16\mu = 5 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 6\mu = 1 & (1) \\ 22\mu = 6 & (1) + (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 - 6\mu = 1 - 6 \times \frac{3}{11} = -\frac{7}{11} \\ \mu = \frac{3}{11} \end{cases}$$

On vérifie la compatibilité de ces valeurs avec la deuxième équation du système initial : $-6 \times (-\frac{7}{11}) - 3 \times \frac{3}{11} = 3$. L'égalité (2) est bien respectée.

On a donc $\overrightarrow{e_3} = -\frac{7}{11}\overrightarrow{e_1} + \frac{3}{11}\overrightarrow{e_2}$. Les trois vecteurs sont donc coplanaires.

Corrigé exercice 51 :

1. On cherche les réels a, b et c tels que $a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}$ soit :

$a(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}) + b(-\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}) + c(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) = \overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow (a - b + c)\overrightarrow{i} + (2a + 4b + 2c)\overrightarrow{j} + (3a + 3b - c)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ 2a + 4b + 2c = 0 \\ 3a + 3b - c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ 6b = 0 \\ 6b - 4c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ sont linéairement indépendants. Ils forment donc une base de l'espace.

2. On cherche les réels a, b et c tels que $a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}$ soit :

$a(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) + b(-\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}) + c(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) = \overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow (a - b + c)\overrightarrow{i} + (-a - 5b + c)\overrightarrow{j} + (3b - c)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ -a - 5b + c = 0 \\ 3b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ -a - 2b = 0 \\ c = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ b = b \\ c = 3b \end{cases}$$

Ce système admet une infinité de solutions, par exemple $(a;b;c) = (-2;1;3)$.

On a donc $-2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}$ soit $\overrightarrow{e_2} = 2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_3}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ ne sont donc pas linéairement indépendants. Ils sont coplanaires.

Corrigé exercice 52 :

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} &\Leftrightarrow (a-b+2c)\overrightarrow{i} + (a+c)\overrightarrow{j} + (3a+2b)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a-b+2c=0 \\ a+c=0 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c=b \\ a=-c \\ -3b+2b=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=0 \\ b=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont linéairement indépendants. Ils forment une base de l'espace.

Corrigé exercice 53 :

1. $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow (a-b)\overrightarrow{i} - 2b\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ -2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=0 \\ b=0 \end{cases}$.

   $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont linéairement indépendants. Ils ne forment pas une base de l'espace (il faudrait un troisième vecteur linéairement indépendant des deux autres pour former une telle base). En revanche, ils forment une base pour un plan.

2. $\begin{cases} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{i} = \overrightarrow{u} \\ 2\overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i} - \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{i} = \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{j} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{u} - \frac{1}{2}\overrightarrow{v} \end{cases}$

3. $\overrightarrow{s} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = x\overrightarrow{u} + y(-\frac{1}{2}\overrightarrow{u} - \frac{1}{2}\overrightarrow{v}) = (x - \frac{1}{2}y)\overrightarrow{u} - \frac{1}{2}y\overrightarrow{v}$

   On a donc $\lambda = x - \frac{1}{2}y$ et $\mu = -\frac{1}{2}y$.

Corrigé exercice 54 :

1.

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} &\Leftrightarrow a(2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}) + b(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) + c\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow (2a-b)\overrightarrow{i} + (3a+b)\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=0 \\ 3a+b=0 \\ c=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} b=2a=0 \\ a=0 \\ c=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont linéairement indépendants. Ils forment une base de l'espace.

2. On a déjà $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{k} = \overrightarrow{w}$.
   On a aussi $2\overrightarrow{v} = -2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ donc $\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v} = 5\overrightarrow{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{j} = \frac{1}{5}\overrightarrow{u} + \frac{2}{5}\overrightarrow{v}$.
   De même, $\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v} = 5\overrightarrow{i} \Leftrightarrow \overrightarrow{i} = \frac{1}{5}\overrightarrow{u} - \frac{3}{5}\overrightarrow{v}$.
3. $\overrightarrow{s} = 4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.
   $\overrightarrow{s} = 4\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{u} - \frac{3}{5}\overrightarrow{v}\right) + \left(\frac{1}{5}\overrightarrow{u} + \frac{2}{5}\overrightarrow{v}\right) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.

Corrigé exercice 55 :

On pose $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{k}$.
$a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow (2a+b)\overrightarrow{i} + (-3a+5b)\overrightarrow{j} + (a-3b+c)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=0 \\ -3a+5b=0 \\ a-3b+c=0 \end{cases}$$

Le système formé des deux premières équations admet pour solutions $(a;b) = (0;0)$.
Avec ces valeurs et la troisième équation, on obtient $c = 0$.
Dans ce cas, les trois vecteurs sont linéairement indépendants. Ce n'est pas le seul cas (voir le corrigé dans le manuel à la page 453).

Corrigé exercice 56 :

1. a. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites (OA) et (OB) ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes en O. Les points O, A et B ne sont pas alignés.
   b. $R \in (OA)$ donc les points O, A et R sont alignés et les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OR}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel λ tel que $\overrightarrow{OR} = \lambda\overrightarrow{OA}$.
   c. Par construction, les droites (RC) et (OB) sont parallèles. Les vecteurs $\overrightarrow{RC}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont donc colinéaires. Il existe alors un réel μ tel que $\overrightarrow{RC} = \mu\overrightarrow{OB}$. Ainsi, il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.
2. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires, donc $\left(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ est un repère du plan. Soit le point E du plan (OAB) de coordonnées $(\lambda;\mu)$ dans ce repère. On a $\overrightarrow{OE} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$. Or, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{w}$ et comme O, A, B et E sont coplanaires alors les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ le sont également.

Corrigé exercice 57 :

1. $a\vec{v_1} + b\vec{v_2} + c\vec{v_3} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$.
   Les trois vecteurs sont linéairement indépendants.

2. a. On a démontré que les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ étaient linéairement indépendants. Or, trois vecteurs linéairement indépendants forment une base de l'espace, donc tout vecteur, et en particulier $\overrightarrow{v}$, s'exprime de manière unique dans la base$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$.

   b. Soit $(r; s; t)$ tel que $\overrightarrow{v} = r\overrightarrow{v_1} + s\overrightarrow{v_2} + t\overrightarrow{v_3}$.

   On a alors $\begin{cases} 2 = r + s + t \\ 1 = r - s \\ -1 = r + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 - r - s \\ s = r - 1 \\ r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ s = -1 \\ t = 3 \end{cases}$.

   Ainsi $f(x) = -f_2(x) + 3f_3(x)$.

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 58 :

1. Un repère du plan (ABC) peut être $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

2. Un repère de la droite (AE) peut être $(A\,;\overrightarrow{AE})$.

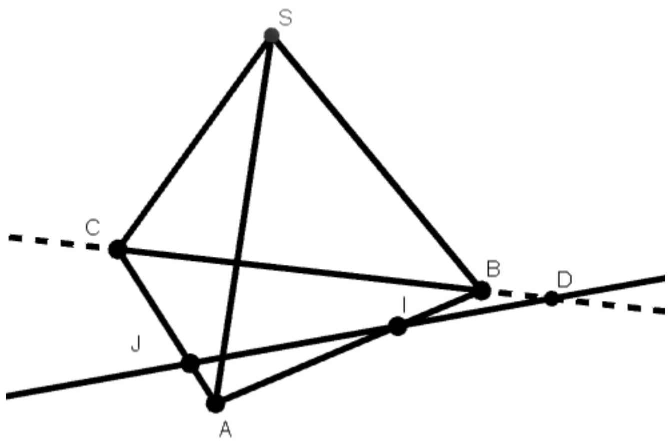
3. $\left(I;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)$ n'est pas un repère du plan car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires. $\left(I\,;\overrightarrow{IE},\overrightarrow{AB}\right)$ est un repère du plan (ABE). En effet, les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires.

4. On peut citer comme base de l'espace $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ ou $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AI})$ ou encore $(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EA})$.

Corrigé exercice 59 :

$I \in (BS)$ donc $I \in (BDS)$ et $J \in (BDS)$. Ainsi, $(IJ) \subset (BDS)$. $I \in (EF)$ donc $I \in (EFG)$ et $J \in (EH)$ donc $J \in (EFG)$. Ainsi $(IJ) \subset (EFG)$ De plus $(BD) \subset (BCD)$. Les plans (EFG) et (BCD) sont parallèles (par les propriétés des faces opposées dans un cube). Le plan (BDS) coupe le plan (EFG) selon la droite (IJ) et le plan (BCD) selon la droite(BD). Les deux droites (IJ) et (BD) sont donc parallèles.

Corrigé exercice 60 :



Les droites (IJ) et (BC) se coupent en D. Le point D appartient à la droite (IJ) donc au plan (SIJ). Le point D appartient aussi à la droite (BC). Le point D est donc l'intersection de la droite (BC) et du plan (SIJ).

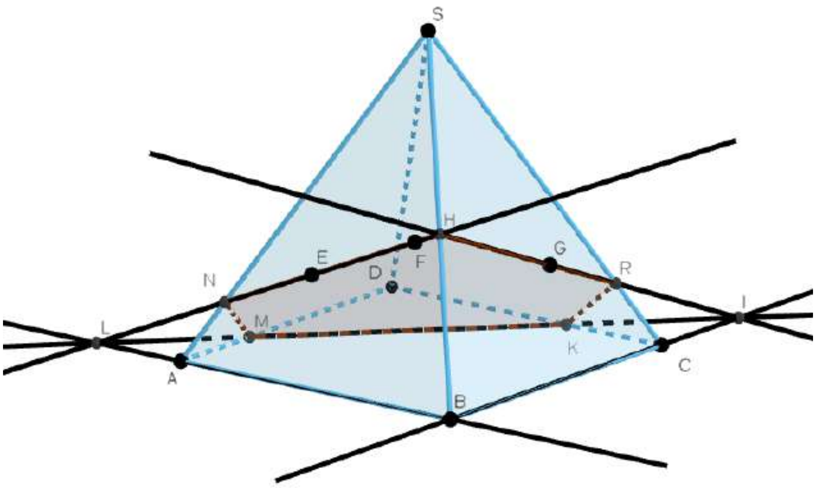
Corrigé exercice 61 :

1. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace car les trois vecteurs ne sont pas coplanaires (propriétés du cube).

2. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HJ}$
   $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
   $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

Corrigé exercice 62 :

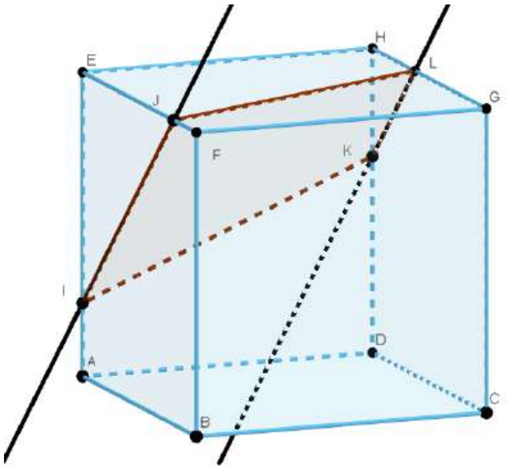
1. Pour toutes les questions suivantes, on se reportera à la figure ci-dessous.



2. $(SAB) \cap (EFG) = (EF) = (HL)$
3. $(SCB) \cap (EFG) = (HI)$
4. a. $I \in (EFG) \cap (ABC)$
   b. $(LI) = (EFG) \cap (ABC)$
5. On note M le point d'intersection des droites (AD) et (LI), K celui de (LI) et$(CD), R$ celui de (HI) et (SC) et N celui de (AD) et (LI).
   Le polygone $MKRHN$ est la trace de la section de la pyramide et du plan (EFG).

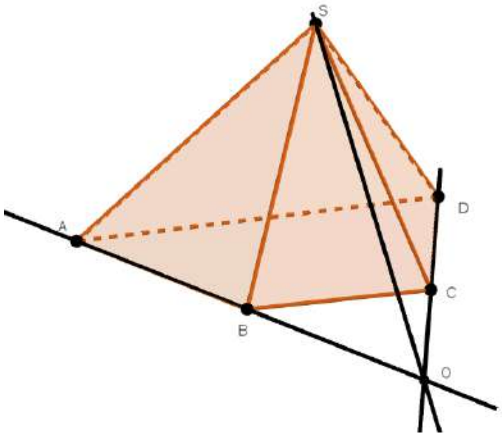
Corrigé exercice 63 :

1. Les plans (ABF) et (DHG) sont parallèles. Le plan (IJK) les coupe selon deux droites parallèles. L'intersection du plan (IJK) et du plan (ABF) est la droite (IJ). Le point K est sur l'arête $[HD]$ donc il appartient au plan (DHG). L'intersection du plan (IJK) et du plan (DHG) est donc la parallèle à la droite (IJ) passant par K.
2. Cette parallèle coupe (HG) en L. La trace de la section du cube par le plan (IJK) est le quadrilatère $IJLK$.



Corrigé exercice 64 :

L'intersection des plans (SAB) et (SDC) est une droite (d). $S \in (SAB)$ et $S \in (SDC)$ donc $S \in (SAB) \cap (SDC)$ soit $S \in (d)$. $O \in (AB)$ donc $O \in (SAB)$ et $O \in (DC)$ donc $O \in (SDC)$. Ainsi, $O \in (SAB) \cap (SDC)$ soit $O \in (d)$. L'intersection des plans (SAB) et (SDC) est donc la droite (SO).



Corrigé exercice 65 :

1. Dans le triangle (SAB), I et J sont les milieux respectifs de $[SA]$ et $[SB]$.

   D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.

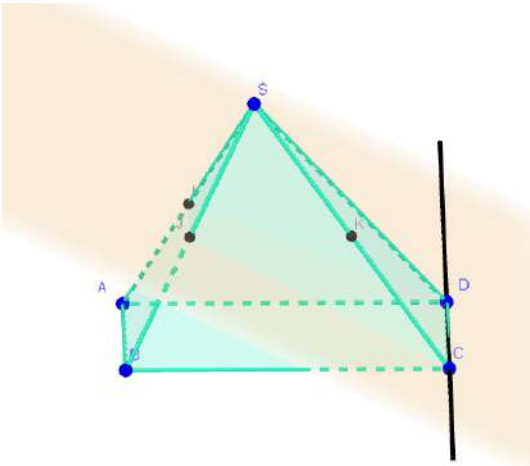
   De la même manière, on prouve que, dans le triangle (SBC), les droites (JK) et (BC) sont parallèles.

   Les droites (IJ) et (JK) sont deux droites sécantes du plan (IJK). Elles sont parallèles à (AB) et (BC), deux droites sécantes du plan (ABC). Les plans (IJK) et (ABC) sont donc parallèles.

2. $(IJ) \subset (CIJ)$ et $(AB) \subset (ABC)$. De plus, les droites (IJ) et (AB) sont parallèles. D'après le théorème du toit, l'intersection des plans (CIJ) et (ABC) est une droite (d) parallèle aux droites (IJ) et (AB).

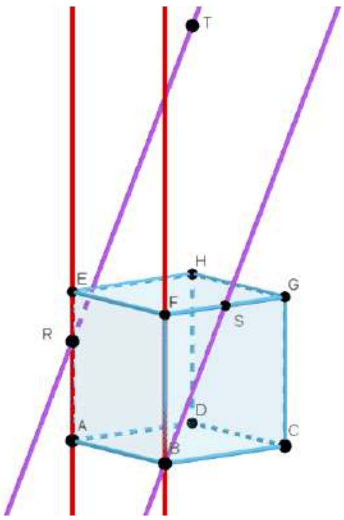
   Le point C est un point commun aux plans (CIJ) et (ABC). On a donc $C \in (d)$.

La droite (d) est donc la parallèle à (AB) passant par C, c'est-à-dire la droite (CD) (car la base de la pyramide est un parallélogramme).



Corrigé exercice 66 :

1. $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{RT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + 2(\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FS})$
   $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BF} + 2\overrightarrow{FS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG}$
   $\overrightarrow{AT} = \frac{8}{3}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$
2. $F \in (BCG)$.
   $\overrightarrow{GS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GF}$ Donc $S \in (GF)$ et $S \in (BCG)$.
   $\overrightarrow{RT} = 2\overrightarrow{BS}$. Les droites (RT) et (BS) sont donc parallèles.
   $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$
   Donc $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BF}$. Les droites (AR) et (BF) sont donc parallèles.
   Les droites (AR) et (RT) sont deux droites sécantes du plan (ART).
   Elles sont parallèles respectivement à (BF) et (BS), deux droites sécantes du plan (BCG).
   Les plans (ART) et (BCG) sont donc parallèles.



9 Exercices d'entraînement partie 3

Corrigé exercice 67 :

$ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - 1 \\ y_D - 2 \\ z_D - 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 5-1 \\ -2-4 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 1 = 4 \\ y_D - 2 = 4 \\ z_D - 3 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = 6 \\ z_D = -3 \end{cases}$
Le point D a pour coordonnées $(5; 6; -3)$.

Corrigé exercice 68 :

1. Notons I le milieu de $[AC]$. Alors : $\begin{cases} x_I = \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 \\ y_I = \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} \\ z_I = \frac{z_A+z_C}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$.

   Donc I a pour coordonnées $\left(0; \frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

2. $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, le milieu I de la diagonale $[AC]$ est le milieu de la diagonale $[BD]$.
   $\begin{cases} x_I = \frac{x_B+x_D}{2} \\ y_I = \frac{y_B+y_D}{2} \\ z_I = \frac{z_B+z_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2x_I - x_B = -3 \\ y_D = 2y_I - y_B = 6 \\ z_D = 2z_I - z_B = 3 \end{cases}$ et D a pour coordonnées $(-3; 6; 3)$.

Corrigé exercice 69 :

1. Une représentation paramétrique de la droite est $\begin{cases} x = t - 8 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

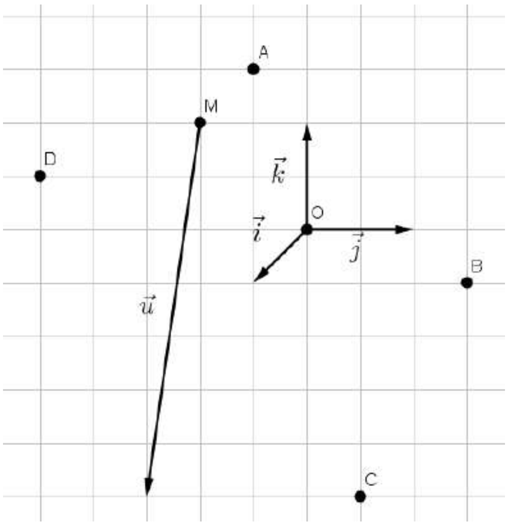
2. Avec $t = 2$, on a $\begin{cases} x = -6 = x_F \\ y = 3 = y_F \\ z = 5 = z_F \end{cases}$. Le point F appartient donc à cette droite.

Corrigé exercice 70 :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
Donc on résout $\begin{cases} x_M + 1 = 1 \\ y_M - 4 = -1 \\ z_M + 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = 3 \\ z_M = -1 \end{cases}$ et M a pour coordonnées $(0; 3; -1)$.

Corrigé exercice 71 :

1. Voici une représentation de la figure.



2. Voir ci-dessus.
3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   On constate alors que $\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$. Les deux vecteurs sont colinéaires.

Corrigé exercice 72 :

Voici une fonction possible si les coordonnées des deux points sont données sous forme de listes.

```
def coordonnees(A, B):
    # L'argument A est une liste (les coordonnées de A)
    # L'argument B est une liste (les coordonnées de B)
    return(B[0] - A[0], B[1] - A[1], B[2] - A[2])
```

Corrigé exercice 73 :

1. a. Par lecture de la figure, on obtient :
   $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$, $D(0;0;1)$, $I(0;0,5;0,5)$, $J(0,5;0;0,5)$.

   b. Par lecture, on obtient $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

2. Par lecture de la figure, on obtient les coordonnées dans le nouveau repère :
   $B(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $C(0;1;0)$, $D(0;0;1)$, $I(0;0,5;0,5)$, $J(0;0;0,5)$.

Corrigé exercice 74 :

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-0\\1-1\\1-1\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3-1\\1-1\\1-1\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$.

   Puisque $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, alors $ABCD$ est donc un parallélogramme.

2. $ACEF$ est un parallélogramme si, et seulement si,

   $$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CE}\Leftrightarrow\begin{cases}x_F-0=2-3\\y_F-1=2-1\\z_F-1=4-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_F=-1\\y_F=2\\z_F=4\end{cases}.$$

3. F est le milieu de $[AI]\Leftrightarrow\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AF}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=2x_F-x_A=-2\\y_I=2y_F-y_A=3\\z_I=2z_F-z_A=7\end{cases}$.

   Ainsi, $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}-2-3\\3-1\\7-1\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}-5\\1\\6\end{pmatrix}$.

   Par ailleurs, $\begin{cases}x_J=\frac{2+(-1)}{2}=\frac{1}{2}\\y_J=\frac{2+2}{2}=2\\z_J=\frac{4+4}{2}=4\end{cases}$ donc $\overrightarrow{CJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-3\\2-1\\4-1\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\1\\3\end{pmatrix}$.

   On a finalement $\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CJ}$ donc J est le milieu de $[IC]$.

   Voici une autre méthode possible.

   D'après l'énoncé, on a :

   $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{FJ}=\overrightarrow{JE}$.

   $\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FJ}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FI}+\overrightarrow{JE}=\overrightarrow{JE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{JI}$

   On a ainsi $\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{JI}$ donc J est le milieu de $[CI]$.

Corrigé exercice 75 :

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-1\\3-1\\4-2\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$. Il faut déterminer les réels λ et μ simultanément non nuls tels que $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}$.

   $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda-2\mu=-2\\\lambda=2\\\mu=2\end{cases}$. Sur la première ligne, on a bien $2-2\times2=-2$ donc le système est compatible.

   Ainsi, $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}$ et ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

2. $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{u}+4\overrightarrow{v}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2\times1+4\times(-2)\\2\times1+4\times0\\2\times0+4\times1\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}-6\\2\\4\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ ne sont pas colinéaires. Les points A, B et M ne sont pas alignés.

Corrigé exercice 76 :

1. Par définition du repère, on a les coordonnées suivantes :
   $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$, $D(0;0;1)$.
   Par définition des points I, on obtient : $\begin{cases} x_I = \frac{x_D+x_C}{2} = 0 \\ y_I = \frac{y_D+y_C}{2} = \frac{1}{2} \\ z_I = \frac{z_D+z_C}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} x_J = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{1}{2} \\ y_J = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{1}{2} \\ z_J = \frac{z_B+z_C}{2} = 0 \end{cases}$.
   Par ailleurs, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ donc $\begin{cases} x_F = \frac{1}{4}x_D = 0 \\ y_F = \frac{1}{4}y_D = 0 \\ z_F = \frac{1}{4}z_D = \frac{1}{4} \end{cases}$
   et $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $\begin{cases} x_E = \frac{1}{4}x_B = \frac{1}{4} \\ y_E = \frac{1}{4}y_B = 0 \\ z_E = \frac{1}{4}z_B = 0 \end{cases}$.
2. $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} x_J - x_I \\ y_J - y_I \\ z_J - z_I \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \\ z_F - z_E \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires donc les droites (EF) et (IJ) sont parallèles.

Corrigé exercice 77 :

1. Les coordonnées de I se calculent ainsi : $\begin{cases} x_I = \frac{1+3}{2} = 2 \\ y_I = \frac{-1+1}{2} = 0 \\ z_I = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$.
   $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G - 1 = \frac{2}{3} \times (2-1) \\ y_G - 2 = \frac{2}{3} \times (0-2) \\ z_G - 1 = \frac{2}{3} \times (\frac{3}{2} - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{5}{3} \\ y_G = \frac{2}{3} \\ z_G = \frac{4}{3} \end{cases}$.
2. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F - 3 = 1 - 1 \\ y_F - 7 = -1 - 2 \\ z_F - 2 = 1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 3 \\ y_F = 4 \\ z_F = 2 \end{cases}$.
3. En utilisant la même méthode que pour le point I, on détermine que J, milieu de $[BE]$, a pour coordonnées $\left(2;3;\frac{3}{2}\right)$.
   $\overrightarrow{GF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{GJ}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.
   $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} = 4$ et $\frac{\frac{10}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{10}{7} \neq 4$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{GJ}$ ne sont pas colinéaires. Les points G, J et F ne sont pas alignés.

Corrigé exercice 78 :

Cette fonction teste la colinéarité de deux vecteurs quand on connaît leurs coordonnées (à condition qu'aucune de celles-ci ne soit nulle).

Corrigé exercice 79 :

1. $\begin{cases} x = 1t - 1 \\ y = 0t + 2 = 2 \\ z = 2t + 5 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. $\begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = 1t + 7 \\ z = -\frac{1}{3}t + 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

3. $\begin{cases} x = 0t - 1 = -1 \\ y = 0t + 0 = 0 \\ z = 1t + 4 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Corrigé exercice 80 :

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc une représentation de (AB) est $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -9t + 5 \\ z = 0t + 3 = 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc une représentation de (AB) est $\begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = 0t + 2 = 2 \\ z = 0t + 1 = 1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Corrigé exercice 81 :

1. La droite d contient le point $A(3; 1; 2)$ et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   La droite d' contient le point $A'(1; 0; 4)$ et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. $\frac{-2}{1} \neq \frac{-3}{-2}$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires et ainsi, les droites d et d' ne sont pas parallèles.

   Si les droites d et d' sont sécantes, les coordonnées $(x; y; z)$ de leur point d'intersection doivent vérifier les deux systèmes de représentation paramétrique.

   C'est-à-dire $\begin{cases} x = -2t + 3 = t' + 1 \\ y = -3t + 1 = -2t' \\ z = t + 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \times 2 + 3 = t' + 1 \\ -3 \times 2 + 1 = -2t' \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -2 \\ t' = \frac{5}{2} \\ t = 2 \end{cases}$.

Ce système n'est pas compatible. Un tel point M n'existe pas. Les droites d et d' ne sont pas sécantes.

3. d et d' ne sont ni parallèles, ni sécantes. Elles ne sont donc pas coplanaires.

Corrigé exercice 82 :

1. La droite d admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

   La droite d' admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

   $\frac{-2}{1} \neq \frac{-3}{2}$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires.

   Les droites d et d' ne sont pas parallèles.

   Si les droites sont sécantes, les coordonnées $(x; y; z)$ du point d'intersection vérifient :

   $$\begin{cases} x = -2t+3 = t'-1 & (1) \\ y = -3t+1 = 2t'+2 & (2) \\ z = t+2 = -t'-3 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+t' = 4 & (1) \\ 3t+2t' = -1 & (2) \\ t+t' = -5 & (3) \end{cases}$$

   On résout le système composé des équations (1) et (3).

   $$\begin{cases} 2t+t' = 4 & (1) \\ t+t' = -5 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 9 & (1)-(3) \\ t+t' = -5 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t' = -14 \end{cases}$$

   On vérifie la compatibilité de ces deux valeurs avec l'équation (2) du système initial :

   $-3t+2t' = 3 \times 9 + 2 \times (-14) = -1$.

   Le système admet comme solution $(t; t') = (9; -14)$

   En remplaçant t par 9 dans la représentation paramétrique de la droite d de l'énoncé, on trouve : $\begin{cases} x = -2 \times 9 + 3 = -15 \\ y = -3 \times 9 + 1 = -26 \\ z = 9 + 2 = 11 \end{cases}$.

   Si l'on avait remplacé t' par -14 dans la représentation paramétrique de la droite d' de l'énoncé, on aurait trouvé les mêmes valeurs.

   Conclusion : les droites d et d' sont coplanaires, sécantes et leur point d'intersection a pour coordonnées $(15; -26; 11)$.

2. La droite d admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

   La droite d' admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$.

   $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{-2}$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires. Les droites d et d' ne sont pas parallèles.

Si les droites sont sécantes, les coordonnées $(x; y; z)$ du point d'intersection vérifient :

$$\begin{cases} x = t - 1 = 3t' \\ y = 2t + 2 = -2t' + 1 \\ z = -t - 3 = t' + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3t' + 1 \\ 2(1 + 3t') + 2 = -2t' + 1 \\ -(3t' + 1) - 3 = t' + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3t' + 1 \\ t' = -\frac{3}{8} \\ t' = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Ce système n'est pas compatible. Les droites d et d' ne sont pas sécantes.

d et d' ne sont ni parallèles, ni sécantes. Elles ne sont donc pas coplanaires.

3. La droite d admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

   La droite d' admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{9}{2} \\ 9 \end{pmatrix}$.

   On constate que $\overrightarrow{u'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{u}$. Les droites d et d' sont parallèles.
   La droite d contient le point $A(7; 1; 2)$. $A \in d'$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} 3t' - 1 = 7 \\ -\frac{9}{2}t' = 1 \\ 9t' + 5 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{8}{3} \\ t' = -\frac{2}{9} \\ t' = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

   Ce système n'est pas compatible d'où $A \notin d'$. Les droites d et d' sont strictement parallèles.

Corrigé exercice 83 :

1. Ce système est la représentation graphique d'une droite d contenant le point $A(-4; 1; 4)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

   Ici, $t \in \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire $t \geqslant 0$.

   Avec $t = 0$, $\begin{cases} x = 2 \times 0 - 4 = -4 \\ y = 0 + 1 = 1 \\ z = -3 \times 0 + 4 = 4 \end{cases}$.

   Avec $t = 1$, $\begin{cases} x = 2 \times 1 - 4 = -2 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = -3 \times 1 + 4 = 1 \end{cases}$.

   L'ensemble cherché est la demi-droite d'origine A contenant le point $B(-2; 2; 1)$.

2. Ce système est la représentation graphique d'une droite d passant par $A(-3; 2; 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Ici, $t \in [-2\,; 3]$.

Avec $t = -2$, $\begin{cases} x = -2 - 3 = -5 \\ y = 3 \times (-2) + 2 = -4 \\ z = -2 + 1 = -1 \end{cases}$.

Avec $t = 3$, $\begin{cases} x = 3 - 3 = 0 \\ y = 3 \times 3 + 2 = 11 \\ z = 3 + 1 = 4 \end{cases}$.

L'ensemble cherché est le segment $[BC]$ avec $B(-5; -4; -1)$ et $C(0; 11; 4)$.

Remarque : $A \in [BC]$ car les coordonnées de A s'obtiennent en choisissant $t = 0$ et $0 \in [-2; 3]$.

Corrigé exercice 84 :

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur et $A(1; -1; 3) \in (AB)$.

   Une représentation graphique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 1 \\ z = 1t + 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. d est parallèle à (AB) donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d. $E(-5; 7; 1) \in d$.

   Une représentation graphique de la droite d est $\begin{cases} x = 2t' - 5 \\ y = 3t' + 7 \\ z = 1t' + 1 \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

3. a. On détermine les coordonnées suivantes : $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   $\frac{-2}{2} \neq \frac{14}{3}$ donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Les droites (AF) et d ne sont donc pas parallèles. Elles sont sécantes ou non coplanaires.

   b. Une représentation graphique de la droite (AF) est $\begin{cases} x = -2t'' + 1 \\ y = 14t'' - 1 \\ z = 3 \end{cases}$ $(t'' \in \mathbb{R})$.

   $M(x; y; z)$ est le point d'intersection des droites (AF) et d si, et seulement si,
   $$\begin{cases} x = -2t'' + 1 = 2t' - 5 \\ y = 14t'' - 1 = 3t' + 7 \\ z = 3 = t' + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t'' + 1 = 2 \times 2 - 5 \\ y = 14t'' - 1 = 3 \times 2 + 7 \\ t' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'' = 1 \\ t'' = 1 \\ t' = 2 \end{cases}$$
   Ce système admet pour solution $(t'; t'') = (2; 1)$. Les deux droites sont sécantes.
   En remplaçant t' par 2 dans le système de représentation paramétrique de la droite d, on trouve : $\begin{cases} x = 2 \times 2 - 5 = -1 \\ y = 3 \times 2 + 7 = 13 \\ z = 2 + 1 = 3 \end{cases}$.

Conclusion : les droites d et (AF) sont coplanaires, sécantes et leur point d'intersection a pour coordonnées $(-1; 13; 3)$. Elles se coupent donc en F.

Corrigé exercice 85 :

1. $\overrightarrow{t}\begin{pmatrix}-1\\4\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d et $\overrightarrow{t'}\begin{pmatrix}-2\\8\\1\end{pmatrix}$ aussi.

2. a. $E(1; 1; 1)$ appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si, il existe λ et μ tels que : $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.
$\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$ équivaut à $\begin{cases} 2 = \lambda - 6\mu \\ -1 = \lambda + 4\mu \\ -4 = \lambda - 3\mu \end{cases}$.
En résolvant le système constitué des deux premières équations on obtient : $\begin{cases}\lambda = \frac{1}{5}\mu = -\frac{3}{10}\end{cases}$.
Or, ces valeurs ne vérifient pas la troisième équation donc le système est incompatible et le point E n'appartient pas au plan.

b. La droite d est parallèle au plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{t'}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{t'} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 6b = -2 & (1) \\ a + 4b = 8 & (2) \\ a - 3b = 1 & (3) \end{cases}$.
On résout le système composé des équations (2) et (3).
$\begin{cases} a + 4b = 8 \\ a - 3b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 4b = 8 \\ 7b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$
On vérifie la compatibilité de ces deux valeurs avec l'équation (1) du système initial : $a - 6b = 4 - 6 \times 1 = -2$. Ce système est compatible. On a donc $\overrightarrow{t'} = 4\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Les trois vecteurs $\overrightarrow{t'}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires. La droite d est donc parallèle au plan $\mathcal{P}$.

c. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ qui dirige la droite Δ est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{P}$. Ainsi, la droite Δ est parallèle à $\mathcal{P}$. Cependant, comme le point E n'appartient pas à $\mathcal{P}$, alors Δ et $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles.

Corrigé exercice 86 :

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$. Or $\frac{1}{-2} \neq \frac{2}{1}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent le plan (ABC).

2. a. $M(x; y; z) \in (ABC)$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires. C'est-à-dire si, et seulement si, il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC}$.

b. Donc $M \in (ABC)$ si, et seulement si, $\begin{cases} x-1 = 1t-2t' \\ y-2 = 2t+t' \\ z+3 = 4t+5t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t-2t'+1 \\ y = 2t+t'+2 \\ z = 4t+5t'-3 \end{cases}$

avec $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$.

c. $E(1;4;-7) \in (ABC)$ si, et seulement si, il existe deux réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} 1 = t-2t'+1 \\ 4 = 2t+t'+2 \\ -7 = 4t+5t'-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-2t' = 0 & (1) \\ 2t+t' = 2 & (2) \\ 4t+5t' = -4 & (3) \end{cases}$$

On résout le système composé des équations (1) et (2).

$$\begin{cases} t-2t' = 0 \\ 2t+t' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-2t' = 0 \\ 5t' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{5} \\ t' = \frac{2}{5} \end{cases}$$

On vérifie la compatibilité de ces deux valeurs avec l'équation (3) du système initial : $4t+5t' = 4 \times \frac{4}{5} + 5 \times \frac{2}{5} = \frac{26}{5} \neq -4$.

Le système n'est pas compatible. Le point E n'appartient pas au plan (ABC).

3. La droite d admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

d est parallèle au plan (ABC) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires. Or, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires et la droite d est parallèle au plan (ABC).

D'après la représentation paramétrique de la droite d, le point $E(1;4;-7)$ appartient à d. Or, $E \notin (ABC)$. La droite d est donc strictement parallèle au plan(ABC).

Corrigé exercice 87 :

1. $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x = 1 \\ y'-y = 2 \\ z'-z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y+2 \\ z' = z-1 \end{cases}$

2. a. On note ici $N(x;y;z)$ et $N'(x';y';z')$.

$$\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y+2 \\ z' = z-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3k+1+1 \\ y' = 2k-2+2 \\ z' = 4k+2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3k+2 \\ y' = 2k \\ z' = 4k+1 \end{cases}$$

b. Pour tout $N \in \mathcal{D}$, $N' \in \mathcal{D}'$ où $\mathcal{D}'$ est la droite passant par le point $A(2;0;1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

La droite $\mathcal{D}'$ est l'image de la droite $\mathcal{D}$ par la translation t.

Corrigé exercice 88 :

Erreur de raisonnement :

On ne peut pas conclure qu'elles sont sécantes. En effet, elles le sont si, et seulement si, elles sont coplanaires (et dans ce cas elles ont un point commun).
Un point $A(x; y : z)$ appartient aux droites Δ et Δ' si, et seulement si,
$$\begin{cases} x = 3k + 1 = \sqrt{2}t + 2 \\ y = 2k - 1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}t - 1 \\ z = -k + 2 = \frac{\sqrt{2}}{3}t + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k - \sqrt{2}t = 1 \\ 2k - \frac{2\sqrt{2}}{3}t = 0 \\ -k - \frac{\sqrt{2}}{3}t = 0 \end{cases}$$
Le système composé des deux dernières équations admet pour solution le couple $(k; y) = (0; 0)$. Ce couple n'est pas compatible avec la première équation du système initial. Celui-ci n'admet donc pas de solution. Les droites Δ et Δ' n'ont pas de point commun et ne sont pas parallèles.
Elles ne sont donc pas coplanaires et non sécantes.

10 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 89 :

Partie A :

1. K est le milieu de $[DC]$ donc $\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{0}$.
   Ainsi, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KD} = 2\overrightarrow{AK}$.

2. I est le milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.
   G est le milieu de $[IK]$ donc $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{0}$.
   Ainsi, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK}) = 2(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GK}) = 4\overrightarrow{AG}$.

3. a. $\overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$

   b. K est le milieu de $[CD]$ donc $\overrightarrow{KC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ et on a alors :
   $\overrightarrow{\Omega A} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$.

   c. Ainsi,
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega A} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

   d. Par conséquent, $\overrightarrow{\Omega A} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.
   On sait que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$. Donc $\overrightarrow{\Omega A} = -\frac{1}{3} \times 4\overrightarrow{AG} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AG}$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires donc les points Ω, A et G sont alignés.

Partie B :

1. Dans le repère $\left(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right)$, on a les coordonnées suivantes :
   $B(0;0;0)$, $C(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $A(0;0;1)$.

2. a. En utilisant les coordonnées du milieu d'un segment, on obtient les résultats suivants : $I\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$, $J\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $L\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

   b. Sachant que G est le milieu de $[IK]$, on obtient $G\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

3. a. Les coordonnées de Ω sont $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};0\right)$. En effet :
   $$\overrightarrow{\Omega B} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \overrightarrow{B\Omega} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BK} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Omega = \frac{2}{3}x_K = \frac{1}{3} \\ y_\Omega = \frac{2}{3}y_K = \frac{1}{3} \\ z_\Omega = \frac{2}{3}z_K = 0 \end{cases}.$$

b. On calcule les coordonnées suivantes : $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\\ -\frac{3}{4}\end{pmatrix}$. Par colinéarité, le vecteur $\overrightarrow{u} = 4\overrightarrow{AG}$ est également un vecteur directeur de la droite (AG) donc $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$.

De plus, $A(0;0;1) \in (AG)$.

Une représentation paramétrique de la droite (AG) est donc $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -3t+1 \end{cases}$

avec $t \in \mathbb{R}$.

c. Pour vérifier que $\Omega \in (AG)$, on utilise la représentation paramétrique déterminée ci-dessus : soit $\begin{cases} \frac{1}{3} = t \\ \frac{1}{3} = t \\ 0 = -3t+1 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

Ainsi, les points G, A et Ω sont alignés.

Corrigé exercice 90 :

1. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k} + x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$
   d'où $\overrightarrow{AM} = (x-1)\overrightarrow{i} + (y+1)\overrightarrow{j} + (z-2)\overrightarrow{k}$.

2. a. $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un repère de l'espace. Donc $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base de l'espace. Donc $(A; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un autre repère de l'espace.

   b. Dans le repère $(A; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, $\overrightarrow{AM} = X\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j} + Z\overrightarrow{k}$.

   On a donc $\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y+1 \\ Z = z-2 \end{cases}$.

3. a. Dans le repère $(A; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, B a pour coordonnées : $\begin{cases} X = -1-1 = -2 \\ Y = 2+1 = 3 \\ Z = 3-2 = 1 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y+1 \\ Z = z-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X+1 \\ y = Y-1 \\ z = Z+2 \end{cases}$

   Dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, C a pour coordonnées $\begin{cases} x = -2+1 = -1 \\ y = 7-1 = 6 \\ z = 10+2 = 12 \end{cases}$.

Corrigé exercice 91 :

Partie A

1. Voir la figure ci-dessous.

2. a. (IJ) et (GC) sont deux droites du plan(CDG).
   Elles ne sont clairement pas parallèles. Elles sont donc sécantes, en L.

   b. Voir la figure ci-dessous.

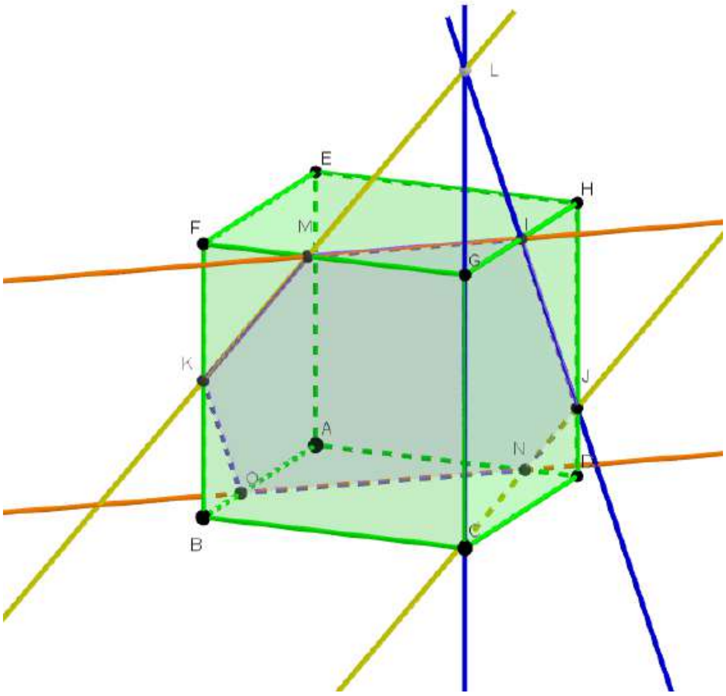
3. L'intersection des plans (IJK) et (BCG) est la droite (KL) (voir la figure ci-dessous).

4. (LK) et (FG) sont deux droites du plan (FBC). Elles se coupent en M.

   Le plan (IJK) coupe les plans parallèles (FBC) et (EAD) selon deux droites parallèles. La parallèle à (MK) passant par J coupe (AD) en N.

   Le plan (IJK) coupe les plans parallèles (ABC) et (EFG) selon deux droites parallèles. La parallèle à (IM) passant par N coupe (AB) en O.

   La trace de la section du cube par le plan (IJK) est le polygone $IJNOKM$.



Partie B
Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \right)$, on a les coordonnées suivantes :
$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$, $C(1;1;0)$.

1. En utilisant les coordonnées du milieu d'un segment, on obtient $I\left(\frac{1}{2};1;1\right)$ et $K\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{HJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J - x_H = \frac{3}{4}(x_D - x_H) \\ y_J - y_H = \frac{3}{4}(y_D - y_H) \\ z_J - z_H = \frac{3}{4}(z_D - z_H) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J = 0 \\ y_J = 1 \\ z_J = \frac{1}{4} \end{cases}$$

2. a. $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AG) et $A(0;0;0)$ appartient

à cette droite. Une représentation paramétrique de (AG) est donc $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. Avec $t = \frac{4}{7}$, on a $\begin{cases} x = \frac{4}{7} \\ y = \frac{4}{7} \\ z = \frac{4}{7} \end{cases}$ donc $P\left(\frac{4}{7}; \frac{4}{7}; \frac{4}{7}\right) \in (AG)$.

3. a. On détermine les coordonnées suivantes par le calcul : $\overrightarrow{IP}\begin{pmatrix} \frac{1}{14} \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\overrightarrow{IP} = a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{IK} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{14} & (1) \\ 0a - b = -\frac{3}{7} & (2) \\ -\frac{3}{4}a - \frac{1}{2}b = -\frac{3}{7} & (3) \end{cases}$$

On résout le système composé des équations (1) et (2).

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{14} & (1) \\ 0a - b = -\frac{3}{7} & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{7} \\ b = \frac{3}{7} \end{cases}$$

On vérifie la compatibilité de ces deux valeurs avec l'équation (3) du système initial :

$-\frac{3}{4}a - \frac{1}{2}b = -\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = -\frac{3}{7}$.

On a donc $\overrightarrow{IP} = \frac{2}{7}\overrightarrow{IJ} + \frac{3}{7}\overrightarrow{IK}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IP}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont coplanaires.

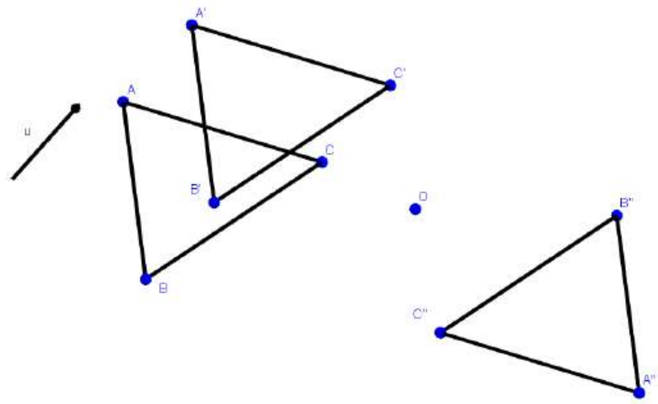
b. On en déduit que le point P est donc un point du plan (IJK).

4. Le point P est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (IJK). Le point P appartient donc à l'intersection des plans (ABG) et (IJK). I est le milieu de $[GH]$. Il est donc un point du plan (ABG). Puisque le point I appartient également au plan (IJK), l'intersection du plan (ABG) et (IJK) est donc la droite (IP).

Corrigé exercice 92 :

Partie A :

1. Voici la figure demandée.



2. Voir figure ci-dessus.

3. a. Par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$. Par la symétrie de centre O, les segments $[A'A'']$ et $[C'C'']$ ont pour milieu O. Le quadrilatère $A'C''A''C'$ est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{C''A''}$ Et donc, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{C''A''}$ soit $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C''A''}$. Le quadrilatère $ACA''C''$ est un parallélogramme de centre Ω.

   b. De la même manière, on montre que $ABA''B''$ est un parallélogramme. Son centre est le milieu de la diagonale $[AA'']$, soit Ω. Ω est donc le milieu des segments $[AA'']$, $[BB'']$ et $[CC'']$.

Partie B

1. Par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$ donc
$$\begin{cases} x' - x = 1 \\ y' - y = -2 \\ z' - z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \\ z' = z + 3 \end{cases}.$$

2. Par la symétrie de centre O, origine du repère, $\overrightarrow{OM''} = -\overrightarrow{OM'}$ donc
$$\begin{cases} x'' = -x' = -x - 1 \\ y'' = -y' = -y + 2 \\ z'' = -z' = -z - 3 \end{cases}.$$

3. $f(I) = I \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -x_I - 1 \\ y_I = -y_I + 2 \\ z_I = -z_I - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -\frac{1}{2} \\ y_I = 1 \\ z_I = -\frac{3}{2} \end{cases}$

4. $\frac{x+x''}{2} = \frac{x-x-1}{2} = -\frac{1}{2} = x_I$; $\frac{y+y''}{2} = \frac{y-y+2}{2} = 1 = y_I$; $\frac{z+z''}{2} = \frac{z-z-3}{2} = -\frac{3}{2} = z_I$.
Ainsi, I est bien le milieu de $[MM'']$.

5. f est donc la symétrie centrale de centre I.

Corrigé exercice 93 :

Dans le repère de l'énoncé, on a : $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$ et $D(0;0;1)$.

1. Par définition du point R, on a $R\left(0;0;\frac{2}{3}\right)$.
$$\overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_S - x_B = \frac{1}{3}(x_D - x_B) \\ y_S - y_B = \frac{1}{3}(y_D - y_B) \\ z_S - z_B = \frac{1}{3}(z_D - z_B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_S = \frac{2}{3} \\ y_S = 0 \\ z_S = \frac{1}{3} \end{cases}$$
$$\overrightarrow{BT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_T - x_B = \frac{1}{3}(x_B - x_C) \\ y_T - y_B = \frac{1}{3}(y_B - y_C) \\ z_T - z_B = \frac{1}{3}(z_B - z_C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_T = \frac{4}{3} \\ y_T = -\frac{1}{3} \\ z_T = 0 \end{cases}$$

2. a. Le vecteur $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (RS) et $R \in (RS)$ donc une représentation paramétrique de (RS) est $\begin{cases} x = \frac{2}{3}t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{3}t + \frac{2}{3} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

   Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) et $A \in (AB)$ donc une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x = t' \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

   b. $I(x;y;z)$ est le point d'intersection des droites (AB) et (SR) si, et seulement si, $\begin{cases} x = \frac{2}{3}t = t' \\ y = 0 = 0 \\ z = -\frac{1}{3}t + \frac{2}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t' = \frac{4}{3} \end{cases}$.
   En remplaçant t par 2 dans la représentation paramétrique de (RS) déterminée précédemment, on a bien $I\left(\frac{4}{3};0;0\right)$.

3. On a $\overrightarrow{TI}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{TI}$. Ces deux vecteurs sont colinéaires donc les droites (TI) et (AC) sont parallèles.

4. On rappelle que deux plans sont parallèles lorsque deux droites sécantes de l'un sont respectivement parallèles à deux droites sécantes de l'autre. Les droites (AC) et (AD) sont deux droites sécantes en A du plan (ADC). Elles sont respectivement parallèles aux droites (TI) (démontré en 3) et (TP) (puisque $DATP$ est un parallélogramme) qui sont deux droites sécantes en T du plan (PIT). Les plans (ADC) et (PIT) sont donc parallèles.

Corrigé exercice 94 :

1. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}$, vecteur directeur de la droite d, a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-6\\8\end{pmatrix}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{u}$ donc d et (AB) sont parallèles.

   L'affirmation est vraie.

2. $\overrightarrow{v}$, vecteur directeur de la droite d', a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\-3\\6\end{pmatrix}$. De plus, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$. d' est parallèle au plan (ABC) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{v}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=1\\-3a-3b=-3\\4a+2b=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$.

   $\overrightarrow{v}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ où $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur de la droite d' donc d' est parallèle au plan (ABC).

   L'affirmation est vraie.

3. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{CD}\neq\overrightarrow{AB}$ donc D n'est pas l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   L'affirmation est fausse.

4. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$. $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ est un repère de l'espace si, et seulement si, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ est une base de l'espace c'est-à-dire si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont linéairement indépendants soit si, et

seulement si, $a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$. On a :

$$a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+2c=0 \\ -3a-3b-3c=0 \\ 4a+2b+2c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+2c=0 \\ 3c=0 \\ 4a+2b+2c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=0 \\ b=0 \end{cases}$$

$(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ est donc bien un repère de l'espace.

L'affirmation est vraie.

5. D'après la première question, les droites (AB) et d sont parallèles. Elles sont donc coplanaires.

   L'affirmation est vraie.

Corrigé exercice 95 :

1. Par lecture graphique, on obtient $C(8;15;0)$.
2. En utilisant le calcul de coordonnées d'un vecteur, on obtient $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\7\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}0\\7\\-3\end{pmatrix}$.
3. $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AK}=a\overrightarrow{IJ}+b\overrightarrow{IC}$.

   K est un point de la droite (EF) donc $\begin{cases} x_K=t \\ y_K=0 \\ z_K=3 \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

   Ainsi, $\overrightarrow{AK}=a\overrightarrow{IJ}+b\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+0b=t \\ 7a+7b=0 \\ 0a-3b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1=t \\ a=1 \\ b=-1 \end{cases}$.

   Avec $t=-1$, on a $K(-1;0;3)$ et $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{IJ}-\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{CJ}$.
4. $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{IJ}+b\overrightarrow{IC}$.

M est un point de la droite (EH) donc $\begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = t \\ z_M = 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 0b = 0 \\ 7a + 7b = t \\ 0a - 3b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -7 = t \\ b = -1 \end{cases}$.

Avec $t = -7$, on a $M(0; -7; 3)$ et $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{IC}$.

5. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CJ}$ donc les droites (AK) et (CJ) sont parallèles.
   $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{IC}$ donc les droites (AM) et (IC) sont parallèles.
   Les droites (AK) et (AM) sécantes en A du plan (AMK) sont respectivement parallèles aux droites (CJ) et (IC) sécantes en C du plan (IJC).
   Les plans (AMK) et (IJC) sont donc parallèles.

Corrigé exercice 96 :

Partie A

1. On obtient $L_0(1; -3; 4)$, $L_1(3; -2; 5)$, $N_0(0; 1; -3)$ et $N_1(1; 2; -2)$.

2. Les points L_0, L_1, N_0 et N_1 sont coplanaires si, et seulement si, il existe des réels a et b tel que $\overrightarrow{L_0L_1} = a\overrightarrow{L_0N_0} + b\overrightarrow{L_0N_1}$.
   $$\begin{cases} (0-1)a + (1-1)b = 3 - 1 \\ (1+3)a + (2+3)b = -2 + 3 \\ (-3-4)a + (-2-4)b = 5 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ -8 + 5b = 1 \\ 14 - 6b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = \frac{9}{5} \\ b = \frac{13}{6} \end{cases}.$$
   Ce système n'a pas de solution. Les quatre points ne sont pas coplanaires.

3. a. Cette trajectoire est la droite passant par L_0 et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   b. Cette trajectoire est la droite passant par N_0 et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Ces deux droites ne sont pas coplanaires si elles ne sont pas parallèles et n'ont pas de point commun. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont clairement pas colinéaires. Les deux droites ne sont donc pas parallèles.
   Il existe un point $M(x; y, z)$ d'intersection de ces deux droites si et seulement s'il existe deux réels t et t' tels que :
   $$\begin{cases} x = 2t + 1 = t' \\ y = t - 3 = t' + 1 \\ z = t + 4 = t' - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 2t + 1 \\ t' = t - 4 \\ t' = t + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 2t + 1 \\ 2t + 1 = t - 4 \\ 2t + 1 = t + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 2t + 1 \\ t = -5 \\ t = 6 \end{cases}$$
   Ce système n'a pas de solution. Les droites ne sont pas parallèles et n'ont pas de point d'intersection. Elles ne sont pas coplanaires.

On remarquera que si les deux droites étaient coplanaires, alors les points L_0, L_1, N_0 et N_1 l'auraient été aussi. Or, ce n'est pas le cas d'après la question 2.

Partie B

1. On détermine par le calcul $\overrightarrow{PL_0}\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PL_1}\begin{pmatrix}6\\-1\\3\end{pmatrix}$.

   Puisque $\frac{4}{6} \neq \frac{-2}{-1}$, alors $\overrightarrow{PL_0})$ et $\overrightarrow{PL_1})$ ne sont pas colinéaires donc $(P; \overrightarrow{PL_0}, \overrightarrow{PL_1})$ définit bien un repère du plan (PL_0L_1).

2. $M \in (PL_0L_1)$ si, et seulement si, il existe des réels k et k' tels que $\overrightarrow{PM} = k\overrightarrow{PL_1} + k'\overrightarrow{PL_0}$ donc si, et seulement si, il existe des réels k et k' tels que

$$\begin{cases} x+3 = 6k+4k' \\ y+1 = -k-2k' \\ z-2 = 3k+2k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6k+4k'-3 \\ y = -k-2k'-1 \\ z = 3k+2k'+2 \end{cases}.$$

3. a. $N_{t'}(x;y;z) \in (PL_0L_1)$ si, et seulement si, ses coordonnées vérifient la représentation paramétrique de la droite (N_0N_1) et celle du plan (PL_0L_1).

$$\begin{cases} x = t' = 6k+4k'-3 \\ y = t'+1 = -k-2k'-1 \\ z = t'-3 = 3k+2k'+2 \end{cases}$$

   b. On résout le système.

$$\begin{cases} t' = 6k+4k'-3 \\ t'+1 = -k-2k'-1 \\ t'-3 = 3k+2k'+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 6k+4k'-3 \\ 6k+4k'-3+1 = -k-2k'-1 \\ 6k+4k'-3-3 = 3k+2k'+2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t' = 6k+4k'-3 \\ 7k+6k' = 1 \\ 3k+2k' = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 13 \\ k = \frac{23}{2} \\ k' = -\frac{53}{4} \end{cases}$$

   On a remplacé t' par l'expression $6k+4k'-3$ puis on a résolu le système à deux équations et deux inconnues k et k'. Avec les valeurs obtenues, on obtient celle de t'.

   Un tel système à trois équations et trois inconnues peut aussi se résoudre à l'aide de la calculatrice. Avec $t' = 13$, on obtient $N_{13}(13;14;10) \in (PL_0L_1)$.

Corrigé exercice 97 :

Pour tous points M et N distincts de l'espace, on a :

$$\begin{aligned} f(M) - f(N) &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{MA_k} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{NA_k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\overrightarrow{MA_k} - \overrightarrow{NA_k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{MN} = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k)\overrightarrow{MN} \end{aligned}$$

Partie A :

1. D'après ce qui précède, pour tous points distincts M et N,
   $f(M) - f(N) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \overrightarrow{MN} = 0 \times \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}$.
   Pour tous points distincts M et N, on a donc $f(M) = f(N)$. Ainsi la fonction f est constante.
2. D'après ce qui précède, f_1 est constante si $k^2 + 7k + 10 = 0$ c'est-à-dire si $k = -2$ ou $k = -5$. On a alors, $f_1(M) = f_1(A) = 7k\overrightarrow{AB} + 10\overrightarrow{AC}$.

Partie B :

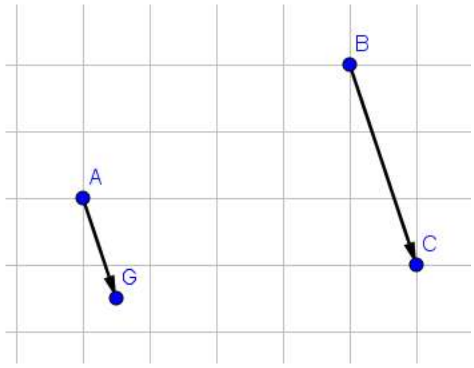
1. a. $f(M) - f(N) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \overrightarrow{MN}$
   $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$ et $M \neq N$ est distinct de N c'est-à-dire $\overrightarrow{MN} \neq \overrightarrow{0}$.
   Donc $f(M) - f(N) \neq \overrightarrow{0}$.
   b. On en déduit que si $M \neq N$ alors $f(M) \neq f(N)$.
2. $f(\Omega) - f(M) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k} \times (f(\Omega) - f(M))$
   Ainsi, $f(M) = \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k} \times (f(\Omega) - \overrightarrow{u})$
3. On suppose que $f(M) = \overrightarrow{u}$. Soit un point N tel que $f(N) = \overrightarrow{u}$.
   Alors, $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k} \times (f(N) - \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$. On en déduit alors que $N = M$ ce qui prouve l'unicité (et la question précédente prouve l'existence).
4. En posant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et en utilisant les questions précédentes, on justifie qu'il existe (question 2) un unique (question 3) point G tel que $f(G) = \overrightarrow{0}$.

Corrigé exercice 98 :

1. a. Pour tout point O, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{GA_k} = \overrightarrow{0} &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_k}) = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{GO} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{OA_k} = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k} (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{OA_k})\end{aligned}$$

   b. Dans ce cas, on a $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2-1+1}(2\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{BC}$.



2. a. $G = \text{bar}\{(A;2),(B;-2),(C;3)\}$ donc $2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
De plus, $K = \text{bar}\{(A;1),(B;1),(C;1)\}$ donc $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$.
$\left\|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| \Leftrightarrow$
$\left\|2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{MG} - 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GC}\right\|$
$= \left\|\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KC}\right\| \Leftrightarrow$
$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MK}\right\| \Leftrightarrow 3\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{MK}\right\| \Leftrightarrow MG = MK$
b. On a prouvé à la question précédente que :
$\left\|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| \Leftrightarrow MG = MK$.
Si $G = K$, tout point de l'espace appartient à l'ensemble cherché.
Si $G \neq K$ est distinct de K, l'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[GK]$.

3. G est le milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ (avec $\alpha \neq 0$) $\Leftrightarrow G = \text{bar}\{(A;\alpha),(B;\alpha)\}$.

4. a. $G = \text{bar}\{(A;\alpha_1),(B;\alpha_2),(C;\alpha_3)\}$ donc $\alpha_1\overrightarrow{GA} + \alpha_2\overrightarrow{GB} + \alpha_3\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ et $H = \text{bar}\{(B;\alpha_2),(C;\alpha_3)\}$ donc $\alpha_2\overrightarrow{HB} + \alpha_3\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\alpha_1\overrightarrow{GA} + (\alpha_2+\alpha_3)\overrightarrow{GH} &= \alpha_1\overrightarrow{GA} + \alpha_2\overrightarrow{GH} + \alpha_3\overrightarrow{GH}\\ &= \alpha_1\overrightarrow{GA} + \alpha_2\overrightarrow{GB} + \alpha_2\overrightarrow{BH} + \alpha_3\overrightarrow{GC} + \alpha_3\overrightarrow{CH}\\ &= \alpha_1\overrightarrow{GA} + \alpha_2\overrightarrow{GB} + \alpha_3\overrightarrow{GC} - (\alpha_2\overrightarrow{HB} + \alpha_3\overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

On en déduit que $G = \text{bar}\{(A;\alpha_1),(H;\alpha_2+\alpha_3)\}$
b. i) A' est la milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0}$ et $A' = \text{bar}\{(B;1),(C;1)\}$.
Ainsi $G = \text{bar}\{(A;1),(B;1),(C;1)\} = \text{bar}\{(A;1);(A';2)\}$.
ii) $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

11 Préparer le bac

Corrigé exercice 99 :

1. Les faces $ABCD$ et $EFGH$ étant parallèles, les plans (EFG) et (BCD) sont également parallèles. Le plan (LMD) coupe donc ces deux plans selon deux droites parallèles. On en déduit que (LM) et (BD) sont parallèles.

2. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$, les coordonnées du point E sont $(0; 0; 6)$ et celles du point F sont $(6; 0; 6)$. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{FE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Puisque $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$, les coordonnées de L sont bien $(2; 0; 6)$.

3. a. Le vecteur $\overrightarrow{BL}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (BL) et $B \in (BL)$ donc une représentation paramétrique de la droite (BL) est $\begin{cases} x = -4t + 6 \\ y = 0 \\ z = 6t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

   b. Par construction, le point S appartient à la fois à la droite (BL) et à la droite (AE). Puisque $S \in (AE)$, alors on sait que $x_S = 0$ et $y_S = 0$. Il reste à déterminer z_S. En utilisant la représentation paramétrique de la droite (BL) de la question précédente, on en déduit que, pour le point S, le paramètre doit respecter l'équation $-4t + 6 = 0$ soit $t = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Par conséquent $z_S = 6t = 9$. Les coordonnées de S sont donc $(0; 0; 9)$.

Corrigé exercice 100 :

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) et A un point de cette droite.

   Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = -2t' \\ y = t' + 1 \\ z = -1 \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

2. a. La droite $\mathcal{D}$ admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Puisque $\frac{-2}{1} \neq \frac{1}{1}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont donc pas colinéaires et les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles.

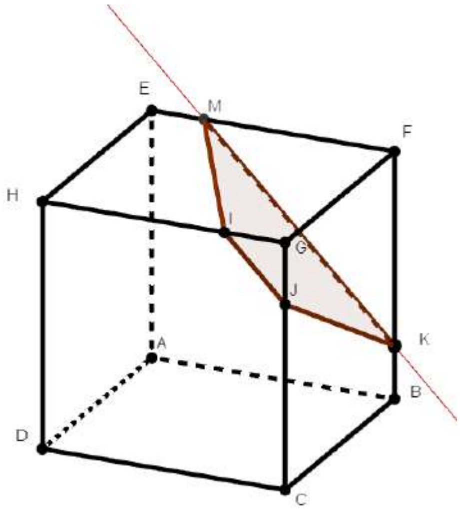
   b. Les deux droites sont sécantes si, et seulement si, le système suivant admet des solutions.
   $$\begin{cases} -2 + t = -2t' \\ 1 + t = t' + 1 \\ 1 - t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 0 \\ t' = t \\ t = 2 \end{cases}.$$

Le système n'admet pas de solution.

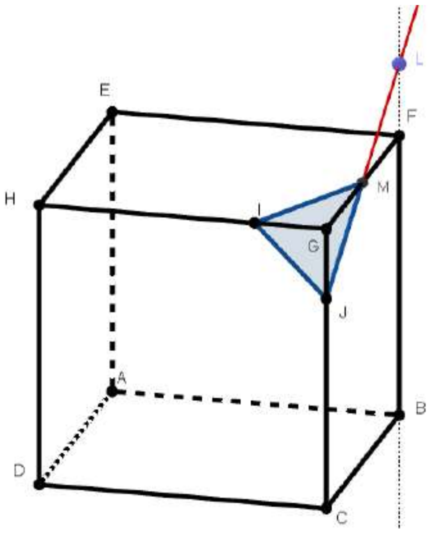
Les deux droites n'ont pas de point d'intersection et ne sont donc pas sécantes.

Corrigé exercice 101 :

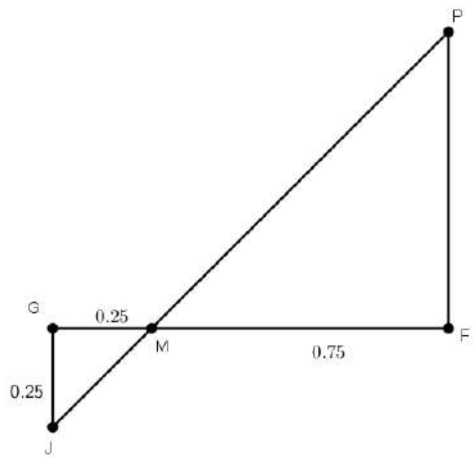
1. Le plan (IJK) coupe les plans parallèles (CGH) et (EFB) selon deux droites parallèles. La parallèle à (IJ) passant par K coupe (EF) en M. Le quadrilatère $IJKM$ est la trace de la section du cube par le plan (IJK).



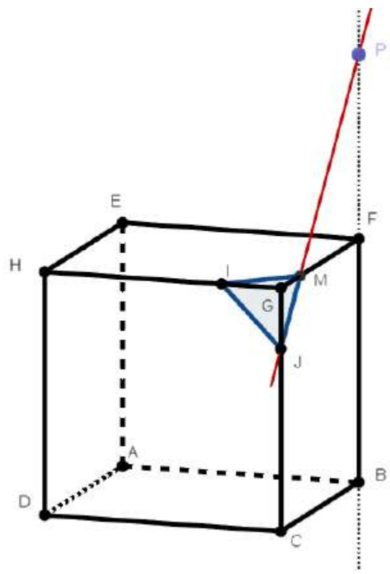
2. Les droites (LJ) et (FG) sont coplanaires, non parallèles et sécantes en M. La section du cube par le plan (IJL) est le triangle IJM.



3. On suppose que le cube a une arête égale à 1. Par construction, $GI = GJ = 0,25$. Pour que le triangle IMJ soit équilatéral, il faut que les trois triangles rectangles GJI, GMI et GMJ soient semblables et donc que $GM = 0,25$. $GM = 0,25 \Leftrightarrow MF = 0,75$. Travaillons dans le plan (CBF).



(GF) et (JP) se coupent en M. (GJ) et (PF) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, $\frac{MG}{MF} = \frac{MJ}{MP} = \frac{GJ}{FP} \Leftrightarrow \frac{0{,}25}{0{,}75} = \frac{0{,}25}{PF} \Leftrightarrow FP = 0,75$. Le point P est le point de la droite (BF) situé à l'extérieur du segment $[BF]$ tel que $FP = 0,75$.



Corrigé exercice 102 :

1. a. Une représentation paramétrique de D_1 est $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 2 \\ z = 3t - 1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

   b. En utilisant la représentation paramétrique donnée dans l'énoncé, on a $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   c. $A_2 \in D_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + k = -1 \\ -2k = 4 \\ 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = -2$

   Donc $A_2 \in D_2$.

2. Puisque $\frac{1}{1} \neq \frac{2}{-2}$ alors $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, les droites D_1 et D_2 ne sont pas parallèles.

   Les deux droites sont sécantes si, et seulement si, le système suivant admet des solutions.

   $$\begin{cases} 1+k=t \\ -2k=2t+2 \\ 2=3t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=-2 \\ t=2 \end{cases}.$$

   Le système n'admet pas de solution. Les deux droites n'ont pas de point d'intersection et elles ne sont pas parallèles. Elles ne sont pas coplanaires.

Corrigé exercice 103 :

1. Affirmation 1 : Fausse

   On calcule $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   Puisque $\frac{2}{-2} \neq \frac{-2}{-2}$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et, par conséquent, les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Affirmation 2 : Fausse

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) et $A \in (AB)$.

   Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-2t+2 \\ z=-2t+3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

   $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (CD) et $C \in (CD)$.

   Une représentation paramétrique de la droite (CD) est $\begin{cases} x=3k-1 \\ y=k \\ z=-2k+1 \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

   Puisque $\frac{2}{3} \neq \frac{-2}{1}$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires et, par conséquent, les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

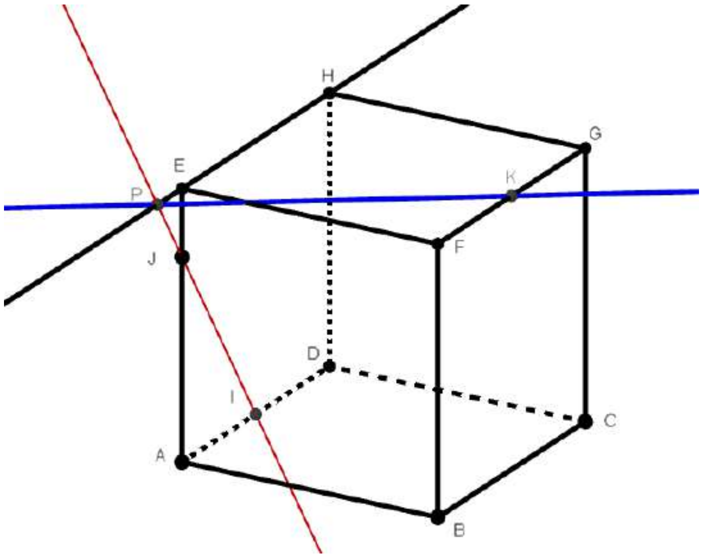
   Les deux droites sont sécantes si, et seulement si, le système suivant admet des solutions.

   $$\begin{cases} 3k-1=2t+1 \\ k=-2t+2 \\ -2k+1=-2t+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-2t+2)-1=2t+1 \\ k=-2t+2 \\ -2(-2t+2)+1=-2t+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ k=-2t+2 \\ t=1 \end{cases}.$$

   Le système n'admet pas de solution. Les deux droites n'ont pas de point d'intersection, elles ne sont pas sécantes.

Corrigé exercice 104 :

1. Les droites (EH) et (IJ) sont coplanaires et non parallèles d'où l'existence de leur point d'intersection P. La droite (PK) est bien contenue dans le plan (IJK) puisque $P \in (IJ)$ et $P \in (PK)$.



2. P appartient à la droite (EH) donc il appartient au plan (EFG). P appartient à la droite (IJ) donc il appartient au plan (IJK). (KP) et (EF) sont coplanaires et sécantes en L.

   K appartient au plan (IJK). K appartient à la droite (FG) donc il appartient au plan (EFG). La droite d'intersection des plans (IJK) et (EFG) est donc la droite (PK).

3. a. Par lecture graphique, on obtient $I\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$, $J\left(0; 0; \frac{3}{4}\right)$ et $K\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$.

   b. Par lecture graphique, on obtient $C(1; 1; 0)$ et $G(1; 1; 1)$. $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (CG) et $C \in (CG)$. Une représentation paramétrique de la droite (CG) est $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 3 : Orthogonalité et distances dans l'espace

Table des matières

1 Informations sur ce chapitre

Ce chapitre s'inscrit dans la continuité du chapitre 2. En effet, les notions de vecteurs linéairement indépendants, de positions relatives d'objets de l'espace et de représentations paramétriques de droites sont des prérequis essentiels à l'étude de l'orthogonalité dans l'espace.
Dans l'introduction de la partie algèbre et géométrie du B.O., on peut lire : "Il importe que l'élève se dote de représentations mentales solides susceptibles d'être réinvesties lors de la poursuite d'études" et, dans la section sur l'orthogonalité, "dans cette section, on continue de combiner les outils algébriques et la vision géométrique de l'espace, notamment autour de l'orthogonalité".
Dans cet esprit, nous avons décidé d'avoir tout d'abord une vision purement géométrique de l'orthogonalité dans l'espace pour ensuite développer les outils analytiques. L'absence, en début de chapitre, d'outils analytiques pour résoudre les problèmes permet de développer une meilleure représentation des outils géométriques, et donc de mieux appréhender les problèmes de fin de chapitre.
L'arrivée de la géométrie analytique allège les démonstrations et permet d'arriver plus rapidement aux résultats souhaités. C'est donc logiquement que nous proposons un travail calculatoire dans la deuxième partie de ce chapitre.
La troisième partie et dernière partie définit la distance entre un point et un plan ou une droite et par la suite, dans les exercices, entre deux objets géométriques.
Nous avons pris le parti de définir dans le cours l'équation d'une sphère de l'espace, alors que cette notion n'apparaît que dans les approfondissements du programme. En effet, cette notion apparaît comme un prolongement direct de l'équation du cercle dans le plan et ne nécessite pas de travail introductif, contrairement à d'autres approfondissements comme l'étude de la sphère circonscrite à un tétraèdre.

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

1. Une sphère	b.
2. Un cône	c.
3. Un tétraèdre	e.
4. Un cube	a.
5. Un cylindre	d.

Corrigé exercice 2 :

Solide	Volume
1. Une sphère de rayon r.	$\frac{4}{3}\pi r^3$
2. Un cône de hauteur h et de base de rayon r.	$\frac{1}{3}\pi \times r^2 \times h$
3. Un tétraèdre d'aire de base $\mathcal{A}$ et de hauteur h.	$\frac{1}{3}\mathcal{A} \times h$
4. Un cube de côté a.	a^3
5. Un cylindre de hauteur h et de base de rayon r.	$\pi r^2 \times h$

Corrigé exercice 3 :

Méthode 1 :
$\overrightarrow{TR} \cdot \overrightarrow{TI} = TR \times TI \times \cos\left(\overrightarrow{TR};\overrightarrow{TI}\right)$. Comme le triangle TRI est équilatéral, on a $\left(\overrightarrow{TR};\overrightarrow{TI}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et donc $\cos\left(\overrightarrow{TR};\overrightarrow{TI}\right) = \frac{1}{2}$. D'où $\overrightarrow{TR} \cdot \overrightarrow{TI} = \frac{1}{2}a^2$.
Méthode 2 :
Soit H le projeté orthogonal de I sur (TR). H est alors le pied de la hauteur issue de I. Le triangle TRI étant équilatéral, H correspond également au pied de la médiane issue de I. Ainsi $TH = \frac{1}{2}a$. On conclut alors grâce à la formule du projeté orthogonal : $\overrightarrow{TR} \cdot \overrightarrow{TI} = \overrightarrow{TR} \cdot \overrightarrow{TH} = TR \times TH = \frac{1}{2}a^2$.

Corrigé exercice 4 :

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + 1 \times (-4) = 6 - 4 = 2$
2. $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = 3^2 + 1^2 = 10$ et $\vec{v}^2 = 2^2 + (-4)^2 = 20$.

Corrigé exercice 5 :

1. On a par exemple la représentation paramétrique suivante $\begin{cases} x = 3t + 3 \\ y = -t + 2 \\ z = 2t + 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

2. On a par exemple la représentation paramétrique suivante $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{3} \\ y = \sqrt{2}t + 3 \\ z = 3t + \dfrac{2}{5} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Corrigé exercice 6 :

1. Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-1 \\ 1-0 \\ 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = t \\ z = -2t + 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

2. De même, comme un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-1) \\ -2-2 \\ -4-(-5) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = -4t + 2 \\ z = t - 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Corrigé exercice 7 :

La droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$ et les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont linéairement indépendants.
Supposons, qu'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{v} + y\overrightarrow{w}$.
On a alors $\begin{cases} 1 = x + y \\ -2 = 2y \\ 1 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x + y \\ y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$. Ce système n'admet pas de solution. On en déduit que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont linéairement indépendants, et donc que la droite d est sécante au plan $\mathcal{P}$.

Corrigé exercice 8 :

1. On a $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -4 \times 2 + (-4) \times (-2) = 0$.

2. On peut en déduire que le triangle ABC est rectangle en C.
3. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = 4\times 6 + 4\times 2 = 32$.
4. $AB = \sqrt{6^2+2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ et $AC = 4\sqrt{2}$.
   Comme $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = AC\times AB\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$. Ainsi, d'après la question précédente, on a $32 = 2\sqrt{10}\times 4\sqrt{2}\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$. D'où $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ et donc $\widehat{BAC}\approx 27°$.

3 Activités

3.1 Corrigé activité A :

Questions :

Partie A

1. a. On a $\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GF}$.
   Or I est le centre du carré $FEHG$ donc $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$. D'où $\overrightarrow{IF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF}$, ce qui donne $\overrightarrow{IF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}) + \overrightarrow{GF}$.
   Ainsi, $\overrightarrow{IF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{EF}\right)$.

   b. De la même façon manière en travaillant dans la face $FBAE$, on obtient $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{FJ}$.
   Donc $\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FB}\right)$.

   c. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FJ}$ donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{FE}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$.

2. On a, d'une part, $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GH}\right)$ et, d'autre part, $\overrightarrow{GL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GH}\right)$.
   Donc $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GH}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{FC}$.

3. D'après les questions précédentes, $\overrightarrow{IJ}$ est colinéaire à $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{IL}$ est colinéaire à $\overrightarrow{FC}$. Donc $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{FC}$. Or $FGCB$ est un carré, donc $(FC)\perp(GB)$ et on a ainsi $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont orthogonaux.

Partie B

1. Dans la partie précédente on a montré que l'on peut exprimer la longueur d'une arête de l'octaèdre comme la moitié de la longueur des diagonales des faces du cube. Toutes les arêtes de l'octaèdre ont donc la même longueur.

2. a. D'après la question 1.c., $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{LN} = \overrightarrow{LG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{JF} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{FI}$ car les faces $ABFE$ et $DCGH$ et les faces $CDAB$ et $HGFE$ sont parallèles. D'où $\overrightarrow{LN} = \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{GB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$ car $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$. Et donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LN}$.

   b. On a $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LN}$, donc $IJNL$ est un parallélogramme. De plus, d'après la question 1. de la partie B, tous ses côtés sont de même longueur et, d'après la question 3. de la partie A, $(IJ)\perp(IL)$. En conclusion, $IJNL$ est un carré.

Bilan :

Les diagonales d'un carré se coupent en angle droit, donc les diagonales de l'octaèdre inscrit dans un cube sont orthogonales.

3.2 Corrigé activité B :

Questions :

1. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$.

   On aurait alors $\begin{cases} 1 = 3\lambda \\ -1 = 5\lambda \\ 1 = 2\lambda \end{cases}$.

   Or, ce système n'admet aucune solution. On en déduit donc que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont linéairement indépendants.

2. M appartient au plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$.

3. L'équation vectorielle précédente est équivalente au système d'équations entre coordonnées suivant $\begin{cases} \lambda + 3\mu = x - 5 \\ -\lambda + 5\mu = y - 4 \\ \lambda + 2\mu = z - 7 \end{cases}$.

4. a. Si l'on soustrait la ligne 3 à la ligne 1 on obtient :
   $$\begin{cases} \lambda + 3\mu = x - 5 \\ -\lambda + 5\mu = y - 4 \\ \lambda + 3\mu - (\lambda + 2\mu) = x - 5 - (z - 7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 3\mu = x - 5 \\ -\lambda + 5\mu = y - 4 \\ \mu = x - z + 2 \end{cases}.$$

   b. $$\begin{cases} \lambda + 3\mu = x - 5 \\ -\lambda + 5\mu = y - 4 \\ \mu = x - z + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 3(x - z + 2) = x - 5 \\ -\lambda + 5\mu = y - 4 \\ \mu = x - z + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2x + 3z - 11 \\ -\lambda + 5\mu = y - 4 \\ \mu = x - z + 2 \end{cases}$$

   c. $$\begin{cases} \lambda = -2x + 3z - 11 \\ -\lambda + 5\mu = y - 4 \\ \mu = x - z + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2x + 3z - 11 \\ -(-2x + 3z - 11) + 5(x - z + 2) = y - 4 \\ \mu = x - z + 2 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2x + 3z - 11 \\ -7x + y + 8z - 25 = 0 \\ \mu = x - z + 2 \end{cases}$$

5. La deuxième équation du système précédent donne qu'une équation du plan $\mathcal{P}$ est $-7x + y + 8z - 25 = 0$.

Bilan :

Si $M(x; y; z)$ appartient au plan, alors il existe trois réels $(a; b; c)$ non tous nuls tels que $ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.

3.3 Corrigé activité C :

Questions :

Partie A

1. a. $\Omega R = \sqrt{(0-1)^2+(-1-3)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{1+16+16} = \sqrt{33}$,
   $\Omega S = \sqrt{(5-1)^2+(2-3)^2+(6-2)^2} = \sqrt{16+1+16} = \sqrt{33}$ et
   $\Omega T = \sqrt{(-3-1)^2+(-1-3)^2+(1-2)^2} = \sqrt{16+16+1} = \sqrt{33}$.

   b. Les points R, S et T sont bien tous équidistants au point Ω. Cependant, ils ne sont pas nécessairement coplanaires. On ne peut donc pas conclure qu'ils appartiennent à un même cercle.

2. a. $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}5-0\\2-(-1)\\6-(-2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\3\\8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix}-3-0\\-1-(-1)\\1-(-2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$

   b. Les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ ne sont pas colinéaires. De plus, $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{n} = 5\times3+3\times(-13)+8\times3 = 0$ et $\overrightarrow{RT}\cdot\overrightarrow{n} = -3\times3+0\times(-13)+3\times3 = 0$.

   Comme le vecteur $\overrightarrow{n}$ est à la fois orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$, il est normal au plan (RST).

   c. On a $\overrightarrow{\Omega R}\begin{pmatrix}-1\\-4\\-4\end{pmatrix}$ et comme $\overrightarrow{\Omega R}\cdot\overrightarrow{n} = -1\times3+(-4)\times(-13)+(-4)\times3 = 37 \neq 0$,

   $\overrightarrow{n}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{\Omega R}$. Donc Ω ne peut pas appartenir au plan (RST).

3. a. $\Omega M^2 = (x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2$

   b. Si la distance entre Ω et M est égale à $\sqrt{33}$, alors, en élevant au carré, on obtient $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2 = 33$.

Partie B

1. a. Le vecteur $\overrightarrow{k}$ est, par définition, normal aux vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$. Il est donc normal au plan $\mathcal{P}_1$. Comme $\overrightarrow{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, on a alors $0\times x+0\times y+1\times z+d = 0$, soit $z+d=0$. Or O appartient au plan $\mathcal{P}_1$, ce qui implique $d=0$. On en déduit qu'une équation de $\mathcal{P}_1$ est $z=0$.

   b. On obtient le système suivant $\begin{cases}(x-2)^2+(y+2)^2+(z+1)^2 = 9\\ z=0\end{cases}$.

   En injectant la deuxième équation dans la première, on obtient $(x-2)^2+(y+2)^2+(0+1)^2 = 9$, ce qui équivaut à l'équation $(x-2)^2+(y+2)^2 = 8$.

c. On remarque que l'équation obtenue à la question précédente est celle d'un cercle. L'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}_1$ est donc le cercle du plan $z = 0$ de centre $\Omega_1(2; -2; 0)$ et de rayon $\sqrt{8}$.

2. On obtient alors pour équation $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (4+1)^2 = 9$ ce qui revient à $(x-2)^2 + (y+2)^2 = -16$.

   Cette équation n'admet pas de solution puisque la somme de deux carrés est nécessairement positive. Il n'y a donc pas d'intersection entre le plan $\mathcal{P}_2$ et la sphère $\mathcal{S}$.

3. Si $k = 2$ ou $k = -4$, alors l'intersection est réduite à un point. Si $-4 < k < 2$, alors l'intersection est un cercle et si $k < -4$ ou $k > 2$, alors l'intersection est vide.

Bilan :

Une équation de la sphère de centre $\Omega(a\,;b\,;c)$ et de rayon R est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

L'intersection entre un plan et une sphère est soit vide, soit un point, soit un cercle.

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 9 :

On lit les coefficients a, b et c dans l'équation du plan. Ils correspondent aux coordonnées d'un vecteur normal au plan.

$\boxed{\text{Réponse c}}$

Corrigé exercice 10 :

Chaque arête issue d'un des quatre sommets d'une face et n'appartenant pas à cette face est orthogonale au plan. Il y a donc 4 arêtes orthogonales à chacune des faces.

$\boxed{\text{Réponse c}}$

Corrigé exercice 11 :

Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan.

On en déduit que $\begin{cases}x = 3t+2\\ y = 4t+3\\ z = -2t+2\end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite perpendiculaire au plan et passant par M.
Si on injecte la représentation paramétrique dans l'équation du plan, on trouve alors $3 \times (3t+2) + 4 \times (4t+3) - 2 \times (-2t+2) + 15 = 0$ et donc $29t = -29$, d'où $t = -1$. Le point d'intersection cherché est donc $H(-1; -1; 4)$.

$\boxed{\text{Réponse b}}$

Corrigé exercice 12 :

Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan.

En notant $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + 2y - 3z + 18 = 0$ et en utilisant la formule du cours, on a $d(K; \mathcal{P}) = \dfrac{|3 \times 1 + 2 \times 1 - 3 \times 3 + 18|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \dfrac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$.

$\boxed{\text{Réponse c}}$

Corrigé exercice 13 :

Si on calcule le produit scalaire entre $\overrightarrow{u}$ et les différents vecteurs $\overrightarrow{v}$, on trouve que $3 \times 2 + (-1) \times (-2) + 4 \times (-2) = 6 + 2 - 8 = 0$.
Tous les autres cas donnent un résultat non nul.

Réponse c

Corrigé exercice 14 :

On constate premièrement que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan de la réponse c en identifiant les coefficients.

Pour le plan de la réponse a, un vecteur normal est donné par $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, ce qui correspond aux coordonnées de $2\overrightarrow{n}$. Donc $\overrightarrow{n}$ est également un vecteur normal de ce plan.

Pour le plan de la réponse b, un vecteur normal est donné par $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ \sqrt{4} \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, ce qui correspond aux coordonnées de $-2\overrightarrow{n}$. Donc $\overrightarrow{n}$ est également un vecteur normal de ce plan.

Pour le plan de la réponse d, un vecteur normal est donné par $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ qui n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{n}$. Donc $\overrightarrow{n}$ n'est pas un vecteur normal à ce plan.

Réponses a, b et c

Corrigé exercice 15 :

Le plan orthogonal à Δ passant par S a pour équation $3x - 4y + 2z - 1 = 0$. On prouve alors que le point d'intersection de Δ et du plan est tel que $t = -1$, ce qui veut dire que le projeté orthogonal est le point B et que la distance entre le point S et la droite Δ vaut donc $SB = \sqrt{94}$.

Réponses c et d

Corrigé exercice 16 :

Suivant la configuration, elles peuvent être parallèles, orthogonales ou non coplanaires. La seule réponse correcte est donc la réponse d.

Réponse d

Corrigé exercice 17 :

D'après le cours, un vecteur normal du plan est le vecteur de la réponse c). On constate que les vecteurs des réponses a) et b) sont colinéaires à celui de la réponse c), ils sont donc également normaux au plan considéré.

Réponses a, b et c

Corrigé exercice 18 :

1. a. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$.

   b. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les points A, B et C ne sont donc pas alignés, ils définissent donc un plan.

   c. On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n} = -3\times 2 + (-2)\times(-4) + (-1)\times 2 = 0$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{n} = -1\times 2 + (-2)\times(-4) + (-3)\times 2 = 0$.
   Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs linéairement indépendants du plan (ABC), il est donc orthogonal à ce plan.

2. a. Si $D \in (ABC)$, alors $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{n}$. Or $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\-4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{n} = -3\times 2 + (-4)\times(-4) + (-1)\times 2 = 8$ donc les vecteurs ne sont pas orthogonaux. Le point D n'appartient donc pas au plan (ABC).

   b. Une équation du plan (ABC) est $2x - 4y + 2z + d = 0$. Or $B(1;3;1)$ est un point de (ABC) donc $2\times 1 - 4\times 3 + 2\times 1 + d = 0$, d'où $d = 8$. Ainsi, le plan (ABC) a pour équation $2x - 4y + 2z + 8 = 0$.
   D'après la formule du cours, on obtient alors :
   $$d(D;(ABC)) = \frac{|2\times 1 - 4\times 1 + 2\times 1 + 8|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{8}{2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1

Questions préliminaires

1. Un vecteur directeur de la droite est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix}$.

2. En remplaçant t par 0 dans l'équation paramétrique de la droite, on obtient $K(-3; 0; -1)$.

Méthode 1

1. Construction.
2. Construction.
3. Construction.
4. Construction
5. En déplaçant le point M on arrive à la longueur minimale de 6,8 pour des valeurs proches de $M(0,11\,;1,55\,;2,11)$.
6. On constate que l'angle $\widehat{KML}$ est alors proche de 90 degrés.

Méthode 2

1. La fonction droite renvoie les coordonnées d'un point de la droite Δ pour une valeur de t donnée. Quand on rentre la valeur 2 la fonction renvoie $[5, 4, 7]$.

2. La fonction distance donne la distance entre un point et le point l donné en paramètre.

   Le résultat donné pour « distance(droite(2)) » est 10.

3. Voici un exemple de code pouvant fonctionner.

```python
# t1 doit être inférieur à t2
# p doit être strictement positif
# Cette fonction renvoie la distance minimale ainsi que les coordonnées du point pour lequel elle est atteinte
def test(t1, t2, p) :
    distance_min = distance(droite(t1))
    t_min = t1
    t = t1
    while t <= t2 :
        if distance_min > distance(droite(t)):
            distance_min = distance(droite(t))
            t_min = t
        t = t + p
    return(distance_min, droite(t_min))
```

4. Avec un pas de 1, on trouve le point de coordonnées $(1; 2; 3)$. Avec un pas de 0,1 on trouve le point de coordonnées $(0,2\,;1,6\,;2,2)$.

Méthode 3

1. Voir tableur dans le dossier « Fichiers TICE ».
2. Voir tableur dans le dossier « Fichiers TICE ».
3. Voir tableur dans le dossier « Fichiers TICE ».
4. On obtient les valeurs suivantes.

	A	B	C	D	E
1	t	x	y	z	Distance
2	-5	-23	-10	-21	35,32704347
3	-4	-19	-8	-17	29,46183973
4	-3	-15	-6	-13	23,66431913
5	-2	-11	-4	-9	18
6	-1	-7	-2	-5	12,64911064
7	0	-3	0	-1	8,246211251
8	1	1	2	3	6,92820323
9	2	5	4	7	10
10	3	9	6	11	14,96662955
11	4	13	8	15	20,49390153
12	5	17	10	19	26,2297541

Le point qui semble le plus proche de L est celui de coordonnées $(1;2;3)$.

5. Avec un pas de 0,1 on trouve le point de coordonnées $(0,2\,;1,6\,;2,2)$. Avec un pas de 0,01 on trouve le point de coordonnées $(0,12\,;1,56\,;2,12)$.

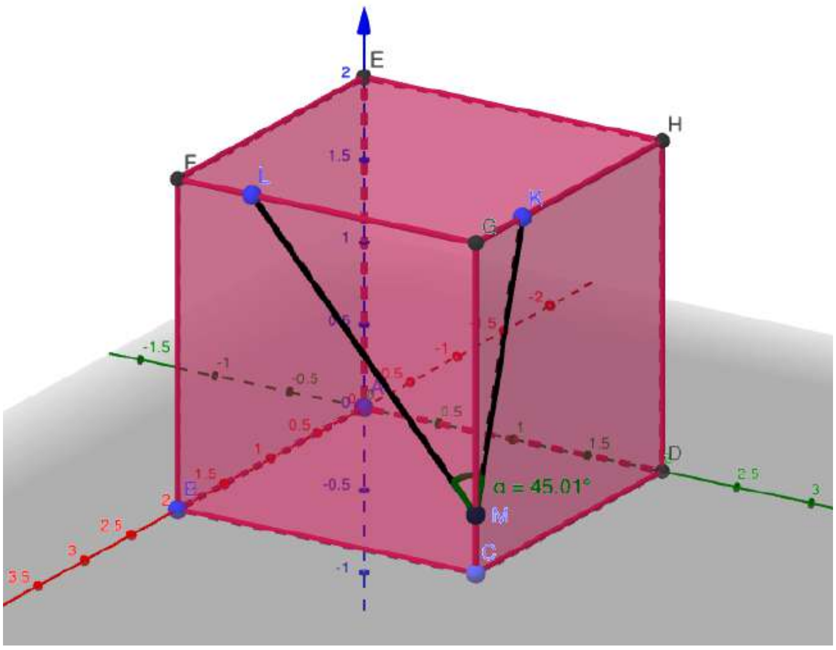
5.2 Corrigé du TP 2

Questions préliminaires

1. Comme $ABCDEFGH$ est un cube, alors les vecteur $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont orthogonaux deux à deux et leur norme est de 2 donc les normes des vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont de 1. on en déduit que le repère $(A;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ est bien orthonormé.
2. On a : $A\,(0;0;0)$, $B\,(2;0;0)$, $C\,(2;2;0)$, $D\,(0;2;0)$, $E\,(0;0;2)$, $F\,(2;0;2)$ $G\,(2;2;2)$, $H\,(0;2;2)$ et $K\left(\dfrac{3}{2};2;2\right)$, $L\left(2;\dfrac{1}{2};2\right)$ et $M\,(2;2;t)$.
3. $\overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}0\\-\dfrac{3}{2}\\2-t\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MK}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\0\\2-t\end{pmatrix}$.
4. $\overrightarrow{ML}\cdot\overrightarrow{MK}=(2-t)^2$ et $ML=\sqrt{\dfrac{9}{4}+(2-t)^2}$ et $MK=\sqrt{\dfrac{1}{4}+(2-t)^2}$.

Méthode 1

1. Voir GeoGebra dans le dossier « Fichiers TICE ».
2. Voir GeoGebra dans le dossier « Fichiers TICE ».
3. Voir GeoGebra dans le dossier « Fichiers TICE ».
4. Voir GeoGebra dans le dossier « Fichiers TICE ».
5. Voir GeoGebra dans le dossier « Fichiers TICE ».
6. Voici la construction que l'on obtient.



L'angle $\widehat{LMK}$ est proche de 45 degrés lorsque $M(2;2;0,36)$.

Méthode 2

1. Voir tableur dans le dossier « Fichiers TICE ».
2. Voir tableur dans le dossier « Fichiers TICE ».
3. Voir tableur dans le dossier « Fichiers TICE ».
4. Voir tableur dans le dossier « Fichiers TICE ».
5. Voici les valeurs obtenues.

	A	B	C	D	E
1	t	ML^2	MK^2	Produit scalaire	Angle
2	0	6,25	4,25	4	39,09385889
3	0,1	5,86	3,86	3,61	40,62034857
4	0,2	5,49	3,49	3,24	42,25197406
5	0,3	5,14	3,14	2,89	43,997627
6	0,4	4,81	2,81	2,56	45,86681141
7	0,5	4,5	2,5	2,25	47,86958524
8	0,6	4,21	2,21	1,96	50,01644651
9	0,7	3,94	1,94	1,69	52,31813751
10	0,8	3,69	1,69	1,44	54,78532555
11	0,9	3,46	1,46	1,21	57,42809283
12	1	3,25	1,25	1	60,2551187
13	1,1	3,06	1,06	0,81	63,27234131
14	1,2	2,89	0,89	0,64	66,4806957
15	1,3	2,74	0,74	0,49	69,87215402
16	1,4	2,61	0,61	0,36	73,42260715
17	1,5	2,5	0,5	0,25	77,07903362
18	1,6	2,41	0,41	0,16	80,73734379
19	1,7	2,34	0,34	0,09	84,20894825
20	1,8	2,29	0,29	0,04	87,18654206
21	1,9	2,26	0,26	0,01	89,2525295
22	2	2,25	0,25	0	90

La valeur de t pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{LMK}$ est la plus proche de 45 degrés est $t = 0,4$.

6. Avec un pas de 0,01 on trouve la valeur $t = 0,36$.

Pour aller plus loin

Si M est le centre du carré alors $M(1;1;1)$. on a alors $\overrightarrow{MF}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MH}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{MH} = 2$ Or $MF = MH = \sqrt{3}$.
On en déduit $\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\cos\left(\widehat{FMG}\right) = 2$ donc $\cos\left(\widehat{FMG}\right) = \dfrac{2}{3}$.
Donc $\widehat{FMG} \approx 48,2$ degrés.

6 Travailler les automatismes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 19 :

Les droites (AE), (BF), (CG) et (DH) sont quatre droites orthogonales au plan (ABC).

Corrigé exercice 20 :

En utilisant la relation de Chasles on a $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DG} = \left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \overrightarrow{DG}$.
Comme $(CB) \perp (DCG)$ on peut en déduire que $(CB) \perp (DG)$, et donc $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DG} = 0$.
On a alors $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DG}$. Le projeté orthogonal de G sur la droite (DC) étant C, il vient $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DC} = DC^2 = AB^2 = 6^2 = 36$.

Corrigé exercice 21 :

Non ce n'est pas un repère orthonormé car les vecteurs n'ont pas tous la même norme.
On pourrait choisir le repère $\left(H; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ avec $\overrightarrow{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HE}$, $\overrightarrow{j} = \frac{1}{6}\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HD}$.

Corrigé exercice 22 :

On a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 1 \times 2 + (-2) \times 1 + 2 \times 0 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, donc l'angle $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ est droit.

Corrigé exercice 23 :

1. L'équation du plan est $1 \times x - 1 \times y + 1 \times z + d = 0$, où d est un réel à déterminer.

   Or S appartient au plan, donc $1 - 3 + 2 + d = 0$. Ainsi, $d = 0$ et donc l'équation du plan est $x - y + z = 0$.

2. Le plan étudié passe par l'origine du repère car les coordonnées du point $O(0; 0; 0)$ vérifient son équation.

6.2 Exercices

Corrigé exercice 24 :

Comme (AE) orthogonale au plan (EFH), on en déduit que (AE) et (FH) sont orthogonales. De plus, comme $EFGH$ est un carré, $(EG) \perp (FH)$ et comme $(AC) \parallel (EG)$, on peut en déduire que $(FH) \perp (AC)$.
Comme (FH) est orthogonale à deux droites non parallèles du plan (AEC), on peut en déduire que $(FH) \perp (AEC)$.

Corrigé exercice 25 :

1. $(IL) \parallel (BC)$ et, comme $(BC) \perp (DCG)$, on en déduit que $(IL) \perp (DCG)$.

2. Si (HJ) était orthogonale à (ABF), alors (HJ) serait orthogonale à toutes des droites incluses dans (ABF). Or (HJ) et (EF) ne sont pas orthogonales et $(EF) \subset (ABF)$. Donc (HJ) n'est pas orthogonale à (ABF).

3. On a $(KI) \perp (FC)$ et $(KI) \perp (FE)$. (KI) est donc orthogonale à deux droites non parallèles du plan (EFC). D'où $(KI) \perp (EFC)$.

4. Les droites (DK) et (DC) ne sont pas orthogonales. Or $(DC) \subset (ABC)$. Donc (DK) n'est pas orthogonale au plan (ABC).

Corrigé exercice 26 :

1. Les diagonales du carré $IJKL$ se coupent perpendiculairement, donc (IK) et (JL) sont orthogonales.

2. (DH) est orthogonale à (HEG) et $(JH) \subset (HEG)$. Les droites (DH) et (JH) sont orthogonales.

3. $(IL) \parallel (BC)$ et $(BC) \perp (DCG)$. On en déduit $(IL) \perp (DCG)$. Or $(HG) \subset (DCG)$ donc $(IL) \perp (HG)$.

4. $JKCB$ est un rectangle car $JB > JK$ et donc les diagonales ne sont pas perpendiculaires. Les droites (JC) et (KB) ne sont donc pas orthogonales.

Corrigé exercice 27 :

Le triangle AIB est rectangle en I car la médiane d'un triangle équilatéral est aussi une hauteur. D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AI^2 + IB^2$ donc $AI^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2$, d'où $AI = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Comme $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left[AI^2 + AB^2 - BI^2\right]$, on a alors $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}a^2 + a^2 - \frac{1}{4}a^2\right]$ et donc $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}a^2$.
On obtient le même résultat en utilisant le projeté orthogonal.

Corrigé exercice 28 :

1. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD}^2$ par projection orthogonale du point L sur la droite (AD). Donc $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AL} = 16$.
   De plus, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AL} = \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \left\|\overrightarrow{AL}\right\| \cos(\alpha) = 4 \times 2\sqrt{5} \times \cos(\alpha) = 16$ où α désigne l'angle formé par les vecteurs considérés. On obtient $\alpha \approx 26,56$ degrés.

2. On remarque que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{JH} = -\overrightarrow{JE} \cdot \overrightarrow{JH}$. Puis, par projection orthogonale de H sur (JE), on obtient $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{JH} = -\overrightarrow{JE}^2 = -2^2 = -4$. On obtient $\alpha \approx 116,56$ degrés.

3. On a $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CF} = \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\right) \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF})$. Comme $(CB) \perp (BF)$, $(BA) \perp (CB)$ et $(BA) \perp (BF)$ on a donc $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CF} = CB^2 = 16$. On obtient $\alpha = 60$ degrés.
   Remarque : Ce résultat était prévisible car ACF est un triangle équilatéral.

4. $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EL} = EK^2$ par projection orthogonale de L sur (EK). Dans le triangle EHK rectangle en H, on a, d'après le théorème de Pythagore, $EK^2 = 2^2 + 4^2$, donc $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EL} = 20$. On obtient $\alpha \approx 41,81$ degrés.

Corrigé exercice 29 :

1. Deux arêtes successives d'un cube sont perpendiculaires.
   On en déduit que $(AB) \perp (AD)$, et donc que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.
2. Le quadrilatère $EFGH$ est un carré. Ses diagonales sont donc perpendiculaires, ce qui donne $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{FH} = 0$.
3. Les droites (AE) et (FA) sont coplanaires et non perpendiculaires. Le produit scalaire considéré n'est donc pas nul.
4. Le quadrilatère $CGEA$ est un rectangle non carré. Ses diagonales ne sont donc pas perpendiculaires et le produit scalaire considéré n'est donc pas nul.

Corrigé exercice 30 :

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 1 \times 0 + 1 \times 4 + (-2) \times 2 = 0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.
2. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 11 \times 4 + 2 \times (-25) + \dfrac{3}{2} \times 4 = 0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.
3. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 1 \times 2 + 3 \times (-1) + (-4) \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) = 0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.
4. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 1 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times (-1) + (-\sqrt{2}) \times \sqrt{8} = -4$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas orthogonaux.

Corrigé exercice 31 :

Les droites (AB), (AC) et (AD) issues d'un tétraèdre régulier ne sont pas orthogonales. Donc le repère considéré n'est pas un repère orthonormé de l'espace.

Corrigé exercice 32 :

1. Comme le cube est d'arête 1, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont bien orthogonaux deux à deux et de norme 1. $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ définit donc bien un repère orthonormé l'espace.
2. Dans ce cas $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $C(1;1;0)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$, $I\left(\dfrac{1}{2};0;0\right)$, $J\left(\dfrac{1}{2};0;1\right)$, $K\left(\dfrac{1}{2};1;1\right)$ et $L\left(\dfrac{1}{2};1;0\right)$.

3. $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} x_C - x_E \\ y_C - y_E \\ z_C - z_E \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. De même $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et on a alors $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{HB} = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times (-1) = 1$.

   Comme le produit scalaire est non nul, les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{HB}$ ne sont pas orthogonaux. Donc les droites (EC) et (HB) ne sont pas orthogonales.

Corrigé exercice 33 :

Si le plan cherché est parallèle au plan $\mathcal{L}$, alors il admet également $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ comme vecteur normal. Une équation du plan cherché est donc de la forme $\sqrt{6}x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}z+d = 0$.
Comme le point G appartient à ce plan, on en déduit que $\sqrt{6}\times\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{3}-\sqrt{3}\times 1+d = 0$, c'est-à-dire $2\sqrt{3}+3-\sqrt{3}+d = 0$. On obtient $d = -3-\sqrt{3}$ et donc le plan cherché admet pour équation $\sqrt{6}x + \sqrt{3}y - \sqrt{3}z - 3 - \sqrt{3} = 0$.

Corrigé exercice 34 :

1. Un vecteur normal est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. De plus, $x_Z - 2y_Z + z_Z + 4 = 1-6+5+4 = 4 \neq 0$, donc Z n'appartient pas à ce plan.

2. Un vecteur normal du plan est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. De plus, $5 \times 1 - 5 = 0$, donc Z appartient à ce plan.

3. Un vecteur normal est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. De plus, $1+3+5+9 = 18 \neq 0$, donc Z n'appartient pas à ce plan.

4. Un vecteur normal est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. De plus, $3 \times 1 + 2 \times 3 - 3 \times 5 + 6 = 0$, donc Z appartient à ce plan.

Corrigé exercice 35 :

Il suffit de remplacer les coordonnées du point R dans l'équation du plan. Si les coordonnées vérifient l'équation du plan, le point appartient à ce plan. Sinon, le point n'appartient pas au plan.

1. On a $\sqrt{8}x_R - 2y_R + \sqrt{3}z_R - 2 = \sqrt{8} \times \sqrt{2} - 2 \times 1 + \sqrt{3} \times 0 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$, donc R appartient au plan.
2. On a $\sqrt{2} - 1 + 0 + 1 - \sqrt{2} = 0$, donc R appartient au plan.
3. On a $\sqrt{2} - \sqrt{2} + 3 \times 0 = 0$, donc R appartient au plan.
4. On a $2\sqrt{2} - 1 + 3 \times 0 - 2\sqrt{2} + 3 = 2 \neq 0$, donc R n'appartient pas au plan.

Corrigé exercice 36 :

1. Comme le vecteur $\overrightarrow{n'}$ est normal au plan, on en déduit qu'une équation est du type$-\frac{2}{3}x - y + 2z + d = 0$. Comme, de plus, le point M appartient à ce plan, on en déduit que $-\frac{2}{3} \times 3 - 2 + 2 \times 3 + d = 0$, d'où $d = -2$.

   Une équation du plan $\mathcal{P}'$ est donc $-\frac{2}{3}x - y + 2z - 2 = 0$.

2. a. Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

   b. $2x_M + 3y_M - 6z_M + 12 = 2 \times 3 + 3 \times 2 - 6 \times 3 + 12 = 6 \neq 0$, donc $M \notin \mathcal{P}$.

3. On obtient $-3\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{n} = -3\overrightarrow{n'}$. Ainsi, $\overrightarrow{n}$ est donc également un vecteur normal à $\mathcal{P}'$.

   On en déduit que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles. Comme, de plus, le point M n'appartient qu'au plan $\mathcal{P}'$, on peut dire que ces plans sont strictement parallèles.

Corrigé exercice 37 :

1. Oui, il s'agit de l'équation d'un plan. Un vecteur normal est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. Non, il ne s'agit pas de l'équation d'un plan car elle comporte un terme quadratique (x^2) non simplifiable.

3. Si l'on développe et que l'on regroupe tout dans le membre de gauche, on obtient $-4x + 4y - z + 4 = 0$. Il s'agit bien de l'équation d'un plan et un vecteur normal est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-4\\4\\-1\end{pmatrix}$.

4. Si l'on regroupe tout dans le membre de gauche on obtient $x - y = 0$. Il s'agit bien de l'équation d'un plan et un vecteur normal est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 38 :

Si la droite est orthogonale au plan $\mathcal{L}$, alors elle admet comme vecteur directeur un vecteur normal du plan. Comme $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ est normal au plan et puisque G appartient à cette droite, on en déduit la représentation paramétrique de la droite suivante $\begin{cases}x = t+3\\y = 2t+3\\z = -2t+3\end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Le projeté orthogonal de G sur $\mathcal{L}$ se trouve à l'intersection de la droite et du plan (puisque la droite est orthogonale au plan).

Ses coordonnées vérifient donc $\begin{cases}x = t+3\\y = 2t+3\\z = -2t+3\\x + 2y - 2z + 15 = 0\end{cases}$.

En injectant les trois premières équations dans la quatrième, on obtient $t+3+2(2t+3)-2(-2t+3)+15 = 0$. On obtient alors $9t = -18$, d'où $t = -2$.

Ainsi, on a $\begin{cases}x = 1\\y = -1\\z = 7\\t = -2\end{cases}$.

Le projeté orthogonal de G sur $\mathcal{L}$ a donc pour coordonnées $(1; -1; 7)$.

Corrigé exercice 39 :

1. La droite orthogonale à $\mathcal{R}$ et passant par S admet pour représentation paramétrique $\begin{cases}x = 2t+1\\y = -t-1\\z = 0\end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique dans l'équation du plan et on obtient : $2 \times (2t+1) - (-t-1) - 16 = 0 \Leftrightarrow 5t - 13 = 0$, d'où $t = \frac{13}{5}$.

Les coordonnées du projeté orthogonal de S sur le plan $\mathcal{R}$ sont donc $H\left(\frac{31}{5}; -\frac{18}{5}; 0\right)$.

2. La droite orthogonale à $\mathcal{R}$ et passant par S a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t+2 \\ y = t+1 \\ z = t+3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique dans l'équation du plan et on obtient $t+2+t+1+t+3 = 0 \Leftrightarrow 3t+6 = 0$, d'où $t = -2$.

   Les coordonnées du projeté orthogonal de S sur le plan $\mathcal{R}$ sont donc $H(0; -1; 1)$.

Corrigé exercice 40 :

1. Si le plan est orthogonal à la droite d, cela veut dire qu'un vecteur directeur de la droite est normal au plan. Ici, $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d, on en déduit qu'une équation du plan est du type $2x + y - 2z + d = 0$. Comme le plan passe par S, on a $2 + 1 - 2 + d = 0$, d'où $d = -1$. Donc une équation du plan est $2x + y - 2z - 1 = 0$.

2. On injecte la représentation paramétrique dans l'équation du plan et on a :

   $2 \times (2t+1) + (t-3) - 2 \times (-2t+4) - 1 = 0$, soit $9t - 10 = 0$ et donc $t = \frac{10}{9}$.

   Si on note H ce point d'intersection, on a alors $H\left(\frac{29}{9}; -\frac{17}{9}; \frac{16}{9}\right)$.

3. Comme les points S et H appartiennent au plan orthogonal à la droite d passant par S, la droite (SH) est perpendiculaire à d. On en déduit que H est le projeté orthogonal de S sur d.

Corrigé exercice 41 :

Une équation du plan orthogonal à la droite est de la forme $x - 3y + 2z + d = 0$. Or A appartient à ce plan, donc $1 - 3 \times 0 + 2 \times (-2) + d = 0$, soit $d = 3$. Une équation du plan est donc $x - 3y + 2z + 3 = 0$. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite et du plan, on injecte la représentation paramétrique dans l'équation du plan. On obtient $(t-1) - 3 \times (-3t) + 2 \times 2t + 3 = 0$, soit $14t + 2 = 0$. On a alors $t = -\frac{1}{7}$.

Les coordonnées du projeté orthogonal de A sur d sont $H\left(-\frac{8}{7}; \frac{3}{7}; -\frac{2}{7}\right)$ et donc $HA = \sqrt{\left(1+\frac{8}{7}\right)^2 + \left(0-\frac{3}{7}\right)^2 + \left(-2+\frac{2}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{378}{49}} = 3\sqrt{\frac{6}{7}}$.

La distance entre le point A et la droite d est donc $3\sqrt{\dfrac{6}{7}}$.

Corrigé exercice 42 :

D'après la formule du cours, la distance d vaut $d = \dfrac{|-3\times 4 - 9 + 1|}{\sqrt{(-3)^2+1}} = \dfrac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}$.

Corrigé exercice 43 :

D'après la formule du cours, la distance d vaut $d = \dfrac{|1-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$.

Corrigé exercice 44 :

1. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = 25$
2. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 = 1$
3. $x^2+y^2+z^2 = 3$
4. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2 = 4$

Corrigé exercice 45 :

1. La sphère de centre $\Omega(4;-2;0)$ et de rayon 4.
2. La sphère de centre $\Omega(0;1;-1)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

Corrigé exercice 46 :

1. Tout plan de la forme $4x-2y+z+d=0$ avec d réel convient.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ sont des exemples qui conviennent.
3. Il suffit de trouver une équation de plan telle que, lorsque l'on injecte les coordonnées du point A dans l'équation, on obtient 0. L'équation $x+y+z-5=0$ est un exemple qui convient.

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 47 :

On a $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}\right) \cdot \left(\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GC}\right)$.
On obtient alors $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GC}$ car tous les autres produits scalaires du développement sont nuls. On a alors $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CG}$.
Donc $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC} = 1 + 1 - 1 = 1$. Comme ce produit scalaire n'est pas nul, les diagonales du cube ne sont pas orthogonales.

Corrigé exercice 48 :

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 3 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 6\sqrt{2}$.
2. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} \times \cos(\pi)$ donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\frac{9}{8}$.
3. Les diagonales d'un losange sont orthogonales donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Corrigé exercice 49 :

On a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on en déduit donc que $24 = 8 \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et, ainsi, $\|\overrightarrow{v}\| = 6$.

Corrigé exercice 50 :

1. Les côtés du quadrilatère $ABCD$ sont tous égaux puisque toutes les faces sont des triangles sont équilatéraux. $ABCD$ est donc un losange. De plus, si on note O le milieu de $[DB]$, alors (EO) est orthogonale à (BD) car DEB est un triangle isocèle en E : la médiane (EO) est donc également une médiatrice. De même, $(EO)\perp(AC)$, donc les triangles EOD et EOA sont rectangles en O et ont deux côtés de même longueur. On en déduit que les diagonales de $ABCD$ ont la même longueur. $ABCD$ est donc un carré.

2. Comme nous avons montré dans la question précédente que $(EO)\perp(AC)$, on peut montrer en étudiant le triangle FAC que $(FO)\perp(AC)$. Ainsi, les droites (EO) et (FO) sont perpendiculaires à une même droite, elles sont donc parallèles et comme elles ont un point en commun, on peut en déduire que $O \in (EF)$.

3. Nous avons montré dans les questions précédentes que (EF) est orthogonale aux droites (AC) et (BD). Comme ces droites sont sécantes, on en déduit que $\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD}\right)$ forme une base d'un plan orthogonal à (EF). Donc $(EF)\perp(ABC)$.

Corrigé exercice 51 :

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier. Montrons que $(AB)\perp(CD)$. Pour cela calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. On a, par exemple, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}\right) = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}a^2$.
Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, ce qui prouve que les arêtes opposées d'un tétraèdre régulier sont orthogonales.

Corrigé exercice 52 :

1. On a $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$ et $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$.
2. On en déduit alors que $2 \times \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2$ et donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right]$ et, d'autre part, que $2 \times \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$ et donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right]$.

Corrigé exercice 53 :

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$	$\|\overrightarrow{u}\|$	$\|\overrightarrow{v}\|$	$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|$	$\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$
$\frac{3}{2}$	3	2	4	$\sqrt{10}$
5	2	3	$\sqrt{23}$	$\sqrt{3}$
8	3	4	$\sqrt{41}$	3

Corrigé exercice 54 :

1. On a $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HR} = \frac{1}{2}[HA^2 + HR^2 - AR^2] = \frac{1}{2}(3^2 + 2^2 - 4^2) = -\frac{3}{2}$.
2. $\cos\left(\widehat{RHA}\right) = \dfrac{-\frac{3}{2}}{3 \times 2} = -\frac{1}{4}$ donc $\widehat{RHA} \approx 104,5$ degrés.

Corrigé exercice 55 :

1. Non car $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 \neq 0$ par projection orthogonale.
2. Non car les diagonales d'un rectangle ne sont pas orthogonales.
3. Non car les diagonales d'un rectangle ne sont pas orthogonales.
4. Oui car $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC}$ et que les droites (DC) et (DH) sont orthogonales.

Corrigé exercice 56 :

Dans le cube $ABCDEFGH$ de côté a, on a :

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}\right) \cdot \left(\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GC}\right).$$

On obtient alors $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GC}$, tous les autres produits scalaires du développement étant nuls.
On a alors $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CG} = a^2 + a^2 - a^2 = a^2$.

De plus $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC} = AG \times EC \times \cos\left(\overrightarrow{AG}; \overrightarrow{EC}\right)$.
Dans le triangle ACG rectangle en C on a $AC = \sqrt{2}a$ et $CG = a$. D'après le théorème de Pythagore, on a donc $AG^2 = 3a^2$, d'où $AG = \sqrt{3}a$.
Au final, on obtient $a^2 = 3a^2 \times \cos\left(\overrightarrow{AG}; \overrightarrow{EC}\right)$. Ainsi, $\cos\left(\overrightarrow{AG}; \overrightarrow{EC}\right) = \dfrac{1}{3}$.
D'après la calculatrice, la valeur de l'angle est donc d'environ 71 degrés.

Corrigé exercice 57 :

On a $BR = \dfrac{1}{2}a$ donc le théorème de Pythagore permet de démontrer que $BE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a = BT$. Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{BT} \cdot \overrightarrow{BE}$ de deux façons différentes.
Première manière :
$\overrightarrow{BT} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BT} \cdot \left(\overrightarrow{BR} + \overrightarrow{RE}\right) = \overrightarrow{BT} \cdot \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{BT} \cdot \overrightarrow{RE}$
Or les triangles sont tous équilatéraux. Ainsi, $(BT) \perp (BR)$ et $\overrightarrow{BT} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BT} \cdot \overrightarrow{RE}$.
D'où $\overrightarrow{BT} \cdot \overrightarrow{BE} = \left(\overrightarrow{BR} + \overrightarrow{RT}\right) \cdot \overrightarrow{RE} = -\overrightarrow{RB} \cdot \overrightarrow{RE} + \overrightarrow{RT} \cdot \overrightarrow{RE}$.
En utilisant les propriétés métriques dans le tétraèdre régulier, on obtient $\overrightarrow{BT} \cdot \overrightarrow{BE} = -\dfrac{1}{2}a^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + a^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{4}a^2$.
Deuxième manière :
$\overrightarrow{BT} \cdot \overrightarrow{BE} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \times \cos(\alpha)$ donc $\dfrac{3}{4}a^2 \cos(\alpha) = \dfrac{1}{4}a^2$.
D'où $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{3}$ et $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right) \approx 71°$.

Corrigé exercice 58 :

On a $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KL} \cdot \left(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MJ}\right) = \overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{MJ}$.
Comme I est le milieu de $[KL]$, (MI) est la médiane issue de M du triangle équilatéral MKL. (MI) est donc aussi une hauteur de ce triangle. On peut en déduire que $(MI) \perp (KL)$ et donc que $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{KL} = 0$.
De plus, comme $\overrightarrow{MJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ et que les arêtes opposées d'un tétraèdre régulier sont orthogonales (voir exercice 51), alors $\overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{KL} = 0$. On en déduit donc que $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$.

Corrigé exercice 59 :

1. Comme I est le milieu de $[MF]$ on a $\overrightarrow{IM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{FM}$. De même, on a $\overrightarrow{MJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{MC}$.

   Si on ajoute ces deux égalités, on obtient $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{FC}$. Les droites (IJ) et (FC) sont donc parallèles. Comme (FC) est parallèle à (ED), on en déduit que (IJ) est parallèle à (ED).

2. Comme $(AB) \perp (BCF)$, on a $(FC) \perp (AB)$. Or $FBCG$ est un carré, ses diagonales sont donc orthogonales donc $(FC) \perp (BG)$.

   D'où $(FC) \perp (ABG)$ et donc $(IJ) \perp (ABG)$.

3. Comme (GH) est parallèle à (AB), (GH) est une droite incluse dans le plan (ABG) et donc $H \in (ABG)$. On peut ainsi en déduire que $(IJ) \perp (BH)$.

Corrigé exercice 60 :

Si l'on appelle A' le milieu de $[BC]$ et D' celui de $[EF]$, on a les égalités vectorielles $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{DG'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{DD'}$. De plus, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$ car le prisme est droit. On a également $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{A'D}$. On obtient alors, en utilisant les deux dernières équations, que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD'}$ et donc $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{DG'}$ soit $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AD}$ et comme on travaille dans un prisme droit, $(AD) \perp (ABC)$. On en déduit que $\overrightarrow{GG'}$ est orthogonal au plan (ABC).

Corrigé exercice 61 :

1. Dans le triangle ABC rectangle en B, le théorème de Pythagore donne $AC^2 = AB^2 + BC^2$ et, comme $BC = AD = 5$, on en déduit que $AC^2 = 3^2 + 5^2 = 34$ donc $AC = \sqrt{34}$.

2. Comme les rectangles $ABCD$ et $EFGH$ ont les mêmes mesures, on en déduit que $AC = EG$. De plus, comme I est le milieu de $[EG]$, on a $GI = \dfrac{AC}{2}$, d'où $GI = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$.

   Dans le triangle IAE rectangle en E, on a $IA^2 = IE^2 + EA^2$ et, comme $IE = GI$, on a $IA^2 = \dfrac{34}{4} + 4 = \dfrac{25}{2}$ soit $IA = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

   Dans le triangle GAE rectangle en E on a $GA^2 = GE^2 + EA^2$ donc $GA^2 = \sqrt{34}^2 + 2^2 = 38$ donc $GA = \sqrt{38}$.

3. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GI} = \dfrac{1}{2}\left[GA^2 + GI^2 - AI^2\right]$ donc $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GI} = \dfrac{1}{2}\left(38 + \dfrac{17}{2} - \dfrac{25}{2}\right) = 17$.

   De plus, $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GI} = GA \times GI \times \cos\left(\widehat{AGI}\right)$

   Donc $\cos\left(\widehat{AGI}\right) = \dfrac{17}{\sqrt{38}\dfrac{\sqrt{34}}{2}} = \dfrac{\sqrt{323}}{19}$.

   On obtient grâce à la calculatrice que $\widehat{AGI} \approx 19$ degrés.

Corrigé exercice 62 :

Dans le cube on se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. Dans ce repère, on a $H(0;1;1)$, $I\left(\dfrac{1}{2};0;0\right)$ et $L\left(\dfrac{1}{2};1;0\right)$ et donc $\overrightarrow{HI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HL}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HL} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + (-1) \times 0 + (-1) \times (-1) = \dfrac{5}{4}$.

De plus, $HI = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 1 + 1} = \dfrac{3}{2}$ et $HL = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, d'où :

$$\cos\left(\widehat{IHL}\right) = \frac{\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HL}}{HI \times HL} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Donc $\widehat{IHL} \approx 42$ degrés.

Corrigé exercice 63 :

1. On a $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LC} = \overrightarrow{KC}$ donc les droites (EI) et (KC) sont parallèles ce qui veut dire que la droite (EI) est incluse dans le plan (EKC) et donc que $I \in (EKC)$.

2. On a vu dans la question précédente que $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{KC}$ donc $EICK$ est un parallélogramme. Il est facile de montrer que $EI = EK$ donc $EICK$ est un losange.

3. On considère le quadrilatère $EJIA$. Comme ses côtés opposés sont de même longueur, ce quadrilatère est donc un parallélogramme donc le milieu de $[AJ]$ (le point M) est aussi celui de $[EI]$. On a montré à la question 1 que $I \in (EKC)$. Le point M appartient donc aux plans (AJH) et (EKC).

   De la même façon, le point N est le milieu de $[JH]$ donc aussi celui de $[EK]$. Donc N appartient aux plans (AJH) et (EKC).

   La droite (MN) appartient aux deux plans (EKC) et (AJH), c'est donc l'intersection de ces deux plans.

4. Comme $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EK}$, on en déduit que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IK}$.

   Or, comme $EKCI$ est un losange, ses diagonales sont orthogonales et comme les droites (MN) et (IK) sont parallèles, on peut en déduire que $(MN) \perp (EC)$.

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 64 :

1. $AB = \sqrt{14}$
2. $AB = \sqrt{66}$
3. $AB = \sqrt{(1-1)^2 + (6-14)^2 + (1-7)^2} = 10$
4. $AB = \sqrt{(-4-1)^2 + (7-(-5))^2 + (3-3)^2} = 13$

Corrigé exercice 65 :

On connaît les coordonnées de chacun des vecteurs, on peut utiliser la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$
3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -17$
4. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$

Corrigé exercice 66 :

L'équation d'un plan qui admet comme vecteur normal le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est donnée par $ax+by+cz+d=0$. Le réel d est déterminé en résolvant l'équation $ax_A+by_A+cz_A+d=0$, où $A(x_A; y_A; z_A)$ désigne un point appartenant au plan.
On obtient les équations de plan suivantes.

1. $x + z - 2 = 0$
2. $3x + 2y - 2z + 6 = 0$
3. $-2x + y + 2z - 6 = 0$
4. $\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y + \frac{1}{4}z - \frac{1}{4} = 0$

Corrigé exercice 67 :

1. Soit O le milieu de $[EF]$. Or $EBFD$ est un carré donc les diagonales se coupent en leur milieu. O est donc aussi le milieu de $[BD]$. Si on se place maintenant dans le carré $ABCD$, on en déduit de la même façon que O est le milieu de $[AC]$.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont linéairement indépendants car, par construction, le point E n'appartient pas au plan (OAB). De plus, comme tous les côtés des carrés sont de même longueur, les demi-diagonales le sont également, donc $OA = OB = OE$. Or, dans un carré, les diagonales sont perpendiculaires. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont orthogonaux, tout comme les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OE}$.
   Ainsi, $\left(O; \dfrac{\overrightarrow{OA}}{\|OA\|}; \dfrac{\overrightarrow{OB}}{\|OB\|}; \dfrac{\overrightarrow{OE}}{\|OE\|}\right)$ définit bien un repère orthonormé de l'espace.

Corrigé exercice 68 :

1. Cette fonction renvoie la norme du vecteur dont les trois coordonnées sont données en argument. On obtient donc 5 lorsqu'on appelle norme(4,3,0).

2. Ce programme sert à calculer la norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

3. Voici un exemple de programme.

```python
from math import sqrt

def norme(x, y, z):
    l = sqrt(x**2 + y**2 + z**2)
    return l

def distance(x1, y1, z1, x2, y2, z2):
    x = x2 - x1
    y = y2 - y1
    z = z2 - z1
    return(norme(x, y, z))
```

Corrigé exercice 69 :

1. Comme $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$, on a $M(x; y; z)$.

2. $B(x; y; 0)$, $E(x; 0; z)$ et $G(0; y; z)$.

3. Dans le triangle OAB rectangle en A, on a $OA = x$ et $AB = y$ et, d'après le théorème de Pythagore, $OB = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. Comme la droite (BM) est orthogonale à la face $OABC$, on en déduit en particulier que $(BM) \perp (OB)$, et donc OBM est rectangle en B.

5. Comme $BM = z$, on déduit du théorème de Pythagore appliqué au triangle OBM rectangle en B que $OM^2 = \sqrt{x^2 + y^2}^2 + z^2$, d'où $OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

6. Comme $OM = \|\overrightarrow{u}\|$, on a bien $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Corrigé exercice 70 :

Dans un cube $ABCDEFGH$ d'arête a, on définit $\overrightarrow{i} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{j} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{k} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$.
Ainsi, $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.
$A(0;0;0)$ et $G(a;a;a)$ sont des sommets opposés du cube et on a
$AG = \sqrt{(a-0)^2 + (a-0)^2 + (a-0)^2}$ donc la distance entre deux sommets opposés du cube est $\sqrt{3}a$.

Corrigé exercice 71 :

1. En posant $a = RE$, on définit les trois vecteurs $\overrightarrow{i} = \frac{\overrightarrow{RE}}{a}$, $\overrightarrow{j} = \frac{\overrightarrow{RC}}{a}$ et $\overrightarrow{k} = \frac{\overrightarrow{RT}}{a}$.
Comme les triangles sont rectangles en R, les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont deux à deux orthogonaux.

   De plus, leur norme vaut 1. En effet, on a par exemple $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \frac{\|\overrightarrow{RE}\|}{a} = \frac{a}{a} = 1$.

   On en déduit que $\left(R; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.

2. Dans le triangle REC rectangle et isocèle en R, on a $EC^2 = RE^2 + RC^2$, soit $EC^2 = 2a^2$ et donc $EC = \sqrt{2}a$. On montre de la même façon que $CT = TE = \sqrt{2}a$.
Le triangle ECT est donc un triangle équilatéral.

Corrigé exercice 72 :

On a $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{UD}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$.

Si on calcule le produit scalaire de ces deux vecteurs on obtient $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{UD} = 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 2 \times \frac{2}{3} + 0 \times 2 = 0$.
Les droites considérées sont donc orthogonales.

Corrigé exercice 73 :

1. Non, il ne doit pas y avoir de terme quadratique dans une équation de plan.

2. Oui, cette équation peut s'écrire $2x - y + 4 = 0$. Un vecteur normal est alors le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Après développement et réduction, on obtient $-2x+8y+3z+17=0$. Un vecteur normal est alors le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\8\\3\end{pmatrix}$.

4. Oui et un vecteur directeur est alors le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 74 :

1. $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-2\\\frac{5}{4}\end{pmatrix}$

3. $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$

Corrigé exercice 75 :

Si la droite est orthogonale au plan, alors un vecteur directeur de la droite est colinéaire à un vecteur normal du plan. Un vecteur normal de ce plan est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite. Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, la droite n'est donc pas orthogonale au plan.

2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite. Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ sont égaux et donc colinéaires. La droite est donc orthogonale au plan.

3. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite. On a ainsi $\overrightarrow{u} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{n}$. Ces vecteurs sont donc colinéaires et la droite est alors orthogonale au plan.

Corrigé exercice 76 :

1. En plus d'être orthogonaux deux à deux, ces vecteurs doivent avoir une norme de 1.

   Avec ces conditions, on obtient $\overrightarrow{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.
2. $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(2;3;0)$, $D(0;3;0)$, $E(0;0;2)$, $F(2;0;2)$, $G(2;3;2)$ et $H(0;3;2)$.
3. On travaille dans un repère orthonormé donc :
4. a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times2+0\times3+0\times0 = 4$
   b. $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{HF} = 2\times2+3\times(-3)+0\times0 = -5$
   c. $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE} = 2\times(-2)+0\times0+2\times2 = 0$
   d. $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{EF} = 0\times2+0\times0+2\times0 = 0$

Corrigé exercice 77 :

1. Le repère n'étant pas orthonormé, on ne peut pas calculer de produit scalaire, la méthode de résolution est donc fausse.
2. Calculons $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ de façon correcte. On a, par exemple, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right) = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

   Or, comme $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, on peut en déduire que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}a^2$.

   Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$, ce qui prouve que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Corrigé exercice 78 :

1. La première composante de $\overrightarrow{v}$ vaut deux fois celle de $\overrightarrow{u}$ ce qui n'est pas le cas de la deuxième et de la troisième composante. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. Comme $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = 0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v} = 0$.

   On obtient ainsi le système $\begin{cases}a+3b+4c=0\\2a-b+c=0\end{cases}$.

3. Si $c = -3$, alors $\begin{cases} a + 3b = 12 \\ 2a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 - 3b \\ 24 - 6b - b = 3 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a = 12 - 3b \\ 7b = 21 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a = 12 - 9 \\ b = 3 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases}$.

4. D'après la question précédente, $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan. Donc une équation du plan est de la forme $3x + 3y - 3z + d = 0$. Comme A est un point du plan, on en déduit que $3 + 3 - 3 + d = 0$ donc $d = -3$.

   Une équation du plan est donc $3x + 3y - 3z - 3 = 0$.

Corrigé exercice 79 :

On pose $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On écrit alors le système $\begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \end{cases}$ puis on le résout.

1. On a $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$. En posant $x = 1$, on a alors le système $\begin{cases} y + z = -1 \\ y + 2z = -3 \end{cases}$.

   $\begin{cases} y = -z - 1 \\ -z - 1 + 2z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z - 1 \\ z = -2 \end{cases}$, d'où $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. On obtient le système $\begin{cases} 3x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$.

   En posant $x = 1$, on obtient $\begin{cases} z = -3 \\ y = -1 \end{cases}$ et, ainsi, $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 80 :

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 - 3 \\ 2 - (-2) \\ 1 - (-1) \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 - 3 \\ 2 - (-2) \\ 1 - (-1) \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \times (-4) + 4 \times 4 + 2 \times 2 = 28$.

2. On a $AB = \sqrt{(-2)^2+4^2+2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ et $AC = \sqrt{(-4)^2+4^2+2^2} = \sqrt{36} = 6$. Comme $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$, on obtient $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{28}{6\times 2\sqrt{6}}$. On trouve alors $\widehat{BAC} \approx 17,7°$ à l'aide de la calculatrice.

Corrigé exercice 81 :

1. On obtient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. $ABCD$ est donc un parallélogramme.
2. $AC^2+BD^2 = 14+30 = 44$ et $2AB^2+2AD^2 = 2\times 13+2\times 9 = 44$.
   On remarque que $2AB^2+2AC^2 = AC^2+BD^2$.
3. D'après les formules de polarisation, on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\left[AB^2+AD^2-BD^2\right]$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\left[(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2-AB^2-AD^2\right]$.
   Comme $ABCD$ est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. On obtient donc que : $AB^2+AD^2-BD^2 = AC^2-AB^2-AD^2$ et donc : $2AB^2+2AC^2 = AC^2+BD^2$

Corrigé exercice 82 :

Partie A

1. Comme $\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \cos(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})$, alors :
$$\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{v}\|\times\|\overrightarrow{u}\|\cos(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})$$
   et donc $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$.
2. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.
   D'une part, $\lambda\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}$ donc $(\lambda\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\begin{pmatrix}\lambda x+x'\\\lambda y+y'\\\lambda z+z'\end{pmatrix}$ et ainsi :
$$(\lambda\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w} = (\lambda x+x')a+(\lambda y+y')b+(\lambda z+z')c.$$
   D'autre part, $\lambda\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w} = \lambda(xa+yb+zc)+x'a+y'b+z'c = (\lambda x+x')a+(\lambda y+y')b+(\lambda z+z')c$.
   On a ainsi démontré l'égalité demandée.

Partie B

1. a. Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

b. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à tous les vecteurs du plan puisqu'il est orthogonal au plan.

c. Comme $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont des vecteurs directeurs du plan, alors $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{v}$ et à $\overrightarrow{w}$. On vient de démontrer que si une droite d est orthogonale à un plan, alors un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à une base du plan.

2. a. On a $\overrightarrow{u} \cdot (\lambda\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \lambda\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 0$ puisque $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{v}$ et à $\overrightarrow{w}$. Donc $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à $\lambda\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.

b. Comme $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à toute combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ qui dirigent le plan. On en déduit qu'il est orthogonal à tout vecteur du plan. La droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est donc orthogonale au plan.

Corrigé exercice 83 :

1. On a, par exemple, $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$.

2. On constate que les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont donc sécants.

3. En posant $x = t$ et en utilisant les équations des deux plans on obtient le système : $\begin{cases}x = t\\ y - 3z = -4t - 1\\ -3y + 2z = -2t - 4\end{cases}$, d'où $\begin{cases}x = t\\ y - 3z = -4t - 1\\ -7z = -14t - 7\end{cases}$ et donc $\begin{cases}x = t\\ y = 2t + 2\\ z = 2t + 1\end{cases}$.

4. D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t; 2t+2; 2t+1)$ appartient aux deux plans. Une représentation paramétrique de la droite d'intersection est donc $\begin{cases}x = t\\ y = 2t + 2\\ z = 2t + 1\end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Corrigé exercice 84 :

1. On a $L\left(\dfrac{x_H + x_K}{2}; \dfrac{y_H + y_K}{2}; \dfrac{z_H + z_K}{2}\right)$ donc $L\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{3}{2}; \dfrac{-7}{2}\right)$.

2. Comme $\overrightarrow{HK}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, le plan recherché admet une équation du type $x - y + z + d = 0$.

   Comme L est un point de ce plan, $\dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2} + \dfrac{-7}{2} + d = 0$ donc $d = \dfrac{5}{2}$.

   Le plan a donc pour équation $x - y + z + \dfrac{5}{2} = 0$.

3. Si on isole z dans l'équation du plan, on obtient $z = -x + y - \dfrac{5}{2}$.

   Donc le point $M\left(x; y; -x + y - \dfrac{5}{2}\right)$ appartient bien au plan.

4. D'une part, $MH^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + \left(-x + y + \dfrac{3}{2}\right)^2$. En développant cette expression, il vient $MH^2 = 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 7x - y + \dfrac{41}{4}$.

   D'autre part, $MK^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 + \left(-x + y + \dfrac{1}{2}\right)^2$. En développant cette expression, il vient $MK^2 = 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 7x - y + \dfrac{41}{4}$.

   On constate que le point M est équidistant des points H et K. N'importe quel point du plan est donc équidistant des points H et K.

9 Exercices d'entraînement partie 3

Corrigé exercice 85 :

Le projeté orthogonal d'un point V sur un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est l'intersection entre ce plan et la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ passant par V.
Le point R est donc le projeté orthogonal du point V sur le plan $\mathcal{P}$ si les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{RV}$ sont colinéaires et si $R \in \mathcal{P}$.

1. On remarque que $2 - 1 + 4 - 2 = 3 \neq 0$ donc $R \notin \mathcal{P}$. R n'est donc pas le projeté orthogonal de V sur $\mathcal{P}$.

2. On remarque que $2 \times 2 - 5 - 4 \times 1 + 5 = 0$ donc $R \in \mathcal{P}$.

3. Cependant, $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RV}\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$. On ne peut pas trouver de nombre k tel que $\overrightarrow{n} = k\overrightarrow{RV}$, ces vecteurs ne sont donc pas colinéaires. On en déduit que R n'est pas le projeté orthogonal de V sur $\mathcal{P}$.

Corrigé exercice 86 :

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de (d). Pour que K soit le projeté orthogonal de H sur (d), il faut que $K \in (d)$ et que les vecteurs $\overrightarrow{HK}$ et $\overrightarrow{u}$ soient orthogonaux. On a dans cet exercice $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. En prenant $t = 1$, on remarque que $K \in (d)$.

   De plus, $\overrightarrow{HK}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{u} = 1 - 3 \times (-3) + 2 \times 2 = 14$.

   Donc K n'est pas le projeté orthogonal de H sur (d).

2. En prenant $t = 1$, on remarque que $K \in (d)$.

   De plus, $\overrightarrow{HK}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{u} = 1 - 3 \times (-3) + (-5) \times 2 = 0$.

   Donc K est le projeté orthogonal de H sur (d).

3. En prenant $t = 1$, on remarque que $K \in (d)$.

De plus, $\overrightarrow{HK}\begin{pmatrix}-13\\-3\\2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{u} = -13-3\times(-3)+2\times 2 = 0$.

Donc K est le projeté orthogonal de H sur (d).

4. On remarque que $\begin{cases}1 = t+2\\ 0 = -3t+4\\ 2 = 2t-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = -1\\ t = \dfrac{3}{4}\\ t = \dfrac{7}{2}\end{cases}$ donc $K \notin (d)$.

   K ne peut donc pas être le projeté orthogonal de H sur (d).

Corrigé exercice 87 :

Le vecteur normal au plan est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\-6\end{pmatrix}$ donc $\|\overrightarrow{n}\| = \sqrt{(-2)^2+3^2+(-6)^2} = 7$.

En appliquant la formule du cours on trouve les résultats suivants.

1. $d\left(C;\mathcal{M}\right) = \dfrac{|-2\times(-2)+3\times 1-6\times 2+12|}{7} = 1$
2. $d\left(C;\mathcal{M}\right) = \dfrac{|-2\times 1+3\times 1-6\times 0+12|}{7} = \dfrac{13}{7}$
3. $d\left(C;\mathcal{M}\right) = \dfrac{|-2\times 7+3\times(-2)-6\times 1+12|}{7} = 2$
4. $d\left(C;\mathcal{M}\right) = \dfrac{|-2\times 3+3\times 2-6\times 2+12|}{7} = 0$

Corrigé exercice 88 :

1. a. On sait que $ABCD$ est un carré donc ses diagonales sont perpendiculaires. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux.
   De plus, comme $(FB)\perp(ABC)$, on en déduit que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont orthogonaux. Donc $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (FBD).
   b. Comme P est le centre de $EFGH$, $P \in (FH)$. Or $(FH) \parallel (BD)$donc $P \in (FBD)$.
   Par ailleurs, $P \in (EG)$.
   Donc P est le point d'intersection de la droite (EG) et du plan (FBD).
   c. Comme $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$, $(EG)\perp(FBD)$ d'après la question 1.a.
   Donc P est le projeté orthogonal de G sur (FBD) en utilisant le résultat de la question 1.b.
2. De la même façon, on en déduit que R est le projeté orthogonal de D sur (EAC).

Corrigé exercice 89 :

1. Une représentation paramétrique de la droite orthogonale à $\mathcal{B}$ et passant par R est $\begin{cases} x = -k+7 \\ y = k-2 \\ z = 3k+6 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$. On cherche le point d'intersection de cette droite avec le plan. On injecte les composantes de la représentation paramétrique dans l'équation du plan et on obtient $-(-k+7)+k-2+3(3k+6)+2=0$, d'où $k=-1$. Ainsi, $H(8;-3;3)$.

2. Une représentation paramétrique de la droite orthogonale à $\mathcal{B}$ et passant par R est $\begin{cases} x = k+5 \\ y = 2k+2 \\ z = -k-3 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$. On cherche le point d'intersection de cette droite avec le plan. On injecte les composantes de la représentation paramétrique dans l'équation du plan et on obtient $(k+5)+2(2k+2)+-(-k-3)+3=0$, d'où $k=-\frac{5}{2}$. Ainsi, $H\left(\frac{5}{2};-3;-\frac{1}{2}\right)$.

3. Une représentation paramétrique de la droite orthogonale à $\mathcal{B}$ et passant par R est $\begin{cases} x = k-1 \\ y = k-2 \\ z = 2k-1 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$. On cherche le point d'intersection de cette droite avec le plan. On injecte les composantes de la représentation paramétrique dans l'équation du plan et on obtient $(k-1)+(k-2)+2(2k-1)-2=0$, d'où $k=\frac{7}{6}$ et donc $H\left(\frac{1}{6};-\frac{5}{6};\frac{4}{3}\right)$

Corrigé exercice 90 :

Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d. Dans chacun des cas, il faut déterminer le point P tel que $P \in d$ et $\overrightarrow{UP}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux.

1. On a $\overrightarrow{UP}\begin{pmatrix} -2t+1 \\ -t-2 \\ 2t \end{pmatrix}$.

   On doit avoir $0 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{UP} = -2(-2t+1)+(-1)(-t-2)+2\times 2t$, soit $4t-2+t+2+4t = 0$, d'où $t=0$.

   En injectant dans l'équation paramétrique de d, on obtient $H(3;0;-2)$

2. $H(1;-1;0)$

3. $H\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$
4. $H(1; -1; 0)$

Corrigé exercice 91 :

Soit M un point quelconque de la droite $\mathcal{D}$ tel que $M \neq H$. Le triangle AHM est rectangle en H et on a $AM > AH$ car $[AM]$ est l'hypoténuse de ce triangle. Donc $d(A, \mathcal{D}) = AH$.

Corrigé exercice 92 :

L'équation du plan perpendiculaire à la droite Δ est de la forme $2x+y-5z+d=0$. Pour que ce plan passe par E, il faut que $d = -2x_E - y_E + 5z_E$. Les coordonnées du projeté orthogonal du point E sur la droite Δ doivent respecter le système $\begin{cases} x = 2k-4 \\ y = k+1 \\ z = -5k+6 \\ 2x+y-5z+d=0 \end{cases}$.

On en déduit que la valeur de k doit être $k = \frac{37-d}{30} = \frac{37+2x_E+y_E-5z_E}{30}$.
Cette valeur permet d'obtenir les coordonnées du projeté orthogonal recherché en l'injectant dans l'équation paramétrique de la droite Δ. On peut ensuite calculer la distance entre ce point et le point E. On obtient les valeurs suivantes.

1. On a alors $k = 1$ et donc le projeté orthogonal de E sur Δ, noté P, a pour coordonnées $P(-2; 2; 1)$. Ainsi, $d\left(E; (\Delta)\right) = \|\overrightarrow{EP}\| = \sqrt{5}$
2. On a alors $k = 0$ et donc le projeté orthogonal de E sur Δ, noté P, a pour coordonnées $P(-4; 1; 6)$. Ainsi, $d\left(E; (\Delta)\right) = \|\overrightarrow{EP}\| = \sqrt{11}$.
3. On a alors $k = 0,1$ et donc le projeté orthogonal de E sur Δ, noté P, a pour coordonnées $P(-3,8; 1,1; 5;5)$ et donc les points P et E sont confondus. Ainsi, $d\left(E; (\Delta)\right) = 0$.
4. On a alors $k = -\frac{7}{3}$ et donc le projeté orthogonal de E sur Δ, noté P, a pour coordonnées $P\left(-\frac{26}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{53}{3}\right)$.

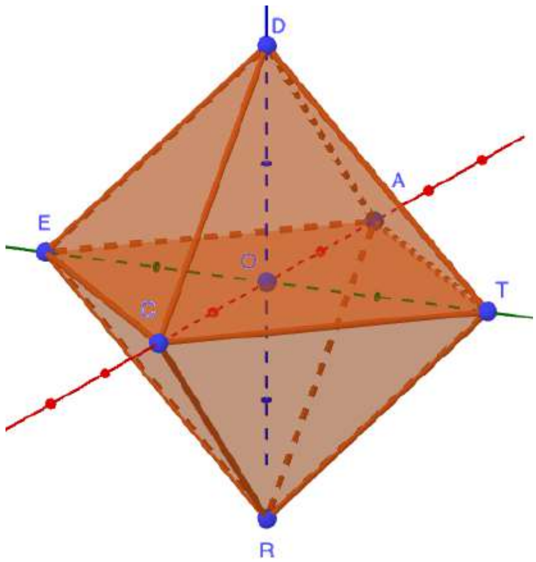
   Ainsi, $d\left(E; (\Delta)\right) = \sqrt{\frac{1073}{3}} \approx 18.9$.

Corrigé exercice 93 :

1. $d\left(N; \mathcal{R}\right) = \frac{|2\times 3 - 2\times 4 + 1 + 4|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$
2. $d\left(N; \mathcal{R}\right) = \frac{|-4\times 4 + \sqrt{5}\times\sqrt{5} + 2\times 4 + 13|}{\sqrt{(-4)^2+\sqrt{5}^2+2^2}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$
3. $d\left(N; \mathcal{R}\right) = \frac{|1\times 1 + 1\times 1 + 1\times 1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

Corrigé exercice 94 :

1. Lorsque l'on représente dans un logiciel de géométrie, on remarque que $CTAEDR$ est un octaèdre. Si l'on se place dans le triangle OAD rectangle isocèle en O, on trouve que $AD = \sqrt{2}$. On retrouve le même résultat dans les triangles OED, OCD, OTD, ORA, ORE, ORC et ORT. L'octaèdre est donc régulier.



2. $O \in (CTA)$ car $O \in (CA)$ et, de plus, par définition du repère, (OD) est orthogonale au plan (CTA). Donc O est le projeté orthogonal de D sur le plan (CTA).

3. a. Si l'on remplace les coordonnées des points A, E et D dans l'équation donnée, elles la vérifient. Pour le point A par exemple, on a bien $x_A + y_A - z_A + 1 = -1 + 0 - 0 + 1 = 0$. Les trois points appartiennent donc au plan d'équation $x + y - z + 1 = 0$. Cette équation est donc bien une équation du plan (AED) dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

   b. La droite orthogonale au plan (AED) passant par O a pour équation paramétrique $\begin{cases}x = t\\y = t\\z = -t\end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

   On cherche l'intersection entre cette droite et le plan $x + y - z + 1 = 0$.

   On doit donc résoudre le système $\begin{cases}x = t\\y = t\\z = -t\\x + y - z + 1 = 0\end{cases}$.

   On trouve $t = -\dfrac{1}{3}$ et donc le point recherché a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$.

Corrigé exercice 95 :

1. Les coordonnées de $A(0;0;0)$, $C(1;1;0)$ et $E(0;0;1)$ vérifiant l'équation donnée, on en déduit que ces trois points non alignés définissent bien le plan d'équation $x-y=0$.

2. Le point K a pour coordonnées $K\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$. D'après la question 1, un vecteur normal au plan (ACE) a pour coordonnées $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$. La droite orthogonale au plan (ACE) passant par K a pour équation paramétrique $\begin{cases}x=t+\frac{1}{2}\\y=-t\\z=\frac{1}{2}\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

   On doit donc résoudre le système $\begin{cases}x=t+\frac{1}{2}\\y=-t\\z=\frac{1}{2}\\x-y=0\end{cases}$. On trouve $t=-\frac{1}{4}$ et donc le point recherché a pour coordonnées $H\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$.

Corrigé exercice 96 :

1. On a $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}\right)\cdot\overrightarrow{n}$. Or, comme H et M sont deux points du plan $\mathcal{P}$ et que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur orthogonal à ce plan, on en déduit que $\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{n}=0$ et donc $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}$.

2. En utilisant la formule on obtient $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}=AH\times\|\overrightarrow{n}\|\times\cos\left(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{n}\right)$.

3. L'angle $\left(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{n}\right)$ est soit nul soit plat puisque ces deux vecteurs sont colinéaires.

4. D'après la question précédente, $\cos\left(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{n}\right)=\pm1$ et donc on a $\left|\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}\right|=AH\times\|\overrightarrow{n}\|$.

5. En utilisant les coordonnées des vecteurs on obtient $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=(x-x_A)\times a+(y-y_A)\times b+(z-z_A)\times c=ax+bc+cz-a\times x_A-b\times y_A-c\times z_A=-d-a\times x_A-b\times y_A-c\times z_A$.

6. La distance entre le point A et le plan est, par définition, la distance AH. D'après la question 4, on a $AH=\frac{\left|\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}$. Comme $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}$ on en déduit, grâce à la question 5, que $d(A;\mathcal{P})=AH=\frac{|x_A\times a+y_A\times b+z_A\times c+d|}{\|\overrightarrow{n}\|}$.

Corrigé exercice 97 :

1. On a $H(0;3;3)$ et $B(3;0;0)$. Un vecteur directeur de la droite (HB) est $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}3\\-3\\-3\end{pmatrix}$.

   Donc une représentation paramétrique de cette droite est $\begin{cases}x=3t+3\\y=-3t\\z=-3t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

   On a O_1 milieu de $[AC]$ et O_2 celui de $[AF]$ avec $A(0;0;0)$, $C(3;3;0)$ et $F(3;0;3)$ donc $O_1\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};0\right)$ et $O_2\left(\frac{3}{2};0;\frac{3}{2}\right)$.

   L'équation du plan orthogonal à (HB) et passant par O_1 est $3x-3y-3z=0$. Ce plan passe aussi par O_2 puisque les coordonnées de O_2 respectent également cette équation.

   Soit H le point d'intersection de la droite et du plan on a alors $3\times(3t+3)-3\times(-3t)-3\times(-3t)=0 \Leftrightarrow 27t+9=0$.

   On en déduit que $t=-\frac{1}{3}$ et donc que $H(2;1;1)$.

   On obtient au final $O_1H=\sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2+\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+(1-0)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $O_2H=\sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2+(1-0)^2+\left(1-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

2. a. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ on en déduit que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n}=3\times0+0\times1+0\times(-1)=0$ et $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{n}=3\times0+3\times1+3\times(-1)=0$.
   Comme $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, il est normal au plan (ABG).

   b. Une équation du plan (ABG) est de la forme $y-z+d=0$. Or A est un point de ce plan, donc les coordonnées de A permettent d'obtenir que $d=0$.
   Ainsi, une équation du plan (ABG) est $y-z=0$.

   c. $d\left(O_1;(ABG)\right)=\dfrac{\left|\frac{3}{2}-0\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ et $d\left(O_2;(ABG)\right)=\dfrac{\left|0-\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

Corrigé exercice 98 :

1. On a $1+0+0-1=0$, $0+1+0-1=0$ et $0+0+1-1=0$. Les coordonnées des points R, I et E vérifient bien l'équation du plan considéré.

   Cette équation est donc une équation du plan (RIE).

2. La représentation paramétrique de la droite orthogonale au plan (RIE) et passant par le point N est $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t+1 \\ z = t+1 \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$.

   Les coordonnées de J vérifient l'équation du plan et la représentation paramétrique donc $(t+1)+(t+1)+(t+1)-1 = 0 \Leftrightarrow 3t = -2$, d'où $t = -\frac{2}{3}$. Ainsi, $J\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

3. J est le centre de gravité de RIE si $\overrightarrow{JR} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{JE} = \overrightarrow{0}$.

   On a $\overrightarrow{JR}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JE}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

   On a donc bien $\overrightarrow{JR} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{JE} = \overrightarrow{0}$, J est donc le centre de gravité de RIE.

Corrigé exercice 99 :

1. Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ce vecteur est un vecteur directeur de la droite (FP). Ainsi, une représentation paramétrique de cette droite est $\begin{cases} x = k \\ y = -1-k \\ z = 1+2k \end{cases}$ $, k \in \mathbb{R}$.

   Comme P est à la fois un point de cette droite et un point du plan $\mathcal{P}$, alors les coordonnées de P vérifient $\begin{cases} x - y + 2z + 3 = 0 \\ x = k \\ y = -1-k \\ z = 1+2k \end{cases}$ $, k \in \mathbb{R}$ et on trouve alors $k = -1$, puis $P(-1; 0; -1)$.

   De même, on obtient $Q(0; 1; -1)$ et $R(1; -2; -3)$.

2. On a $\overrightarrow{FG}(2; 0; 2)$ et $\overrightarrow{FH}(4; -4; 2)$ donc $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FH} = 2 \times 4 + 0 \times (-4) + 2 \times 2 = 12$.

   On a $\overrightarrow{PQ}(1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{PR}(2; -2; -2)$ donc $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 1 \times 2 + 1 \times (-2) + 0 \times (-2) = 0$.

3. Les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont orthogonaux. Les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FH}$ ne le sont pas. Donc la projection orthogonale ne conserve pas les angles.

Corrigé exercice 100 :

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix}$. De plus, $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$. Montrons que $\overrightarrow{CH}$ est normal au plan (ABD). On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH} - 2\times 3 - 2\times(-3) - 2\times 0 = 0$ et $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CH} - 2\times 0 - 2\times(-3) - 2\times 3 = 0$.

   $\overrightarrow{CH}$ est donc normal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABD), il est donc normal au plan (ABD).

   On en déduit que $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, qui est colinéaire à $\overrightarrow{CH}$, est également normal au plan.

   Ainsi, une équation de ce plan est $x+y+z+d=0$.

   Comme le point A appartient à ce plan, on obtient $d=3$ et, au final, une équation du plan est $x+y+z+3=0$. Les coordonnées du point H vérifient l'équation du plan puisque $-2-2+1+3=0$ donc H est un point du plan (ABD).

   H est donc le projeté orthogonal de C sur le plan (ABD).

2. On prouve de même que $\overrightarrow{GA}$ est un vecteur normal au plan (BCD), puis qu'une équation de ce plan est $x-y+z-3=0$. On remarque que G appartient bien à ce plan.

   De plus, comme $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$, on a bien que $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ et $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ donc G est le projeté orthogonal de A sur (BCD).

3. a. On a $-3-0-0+3=0$, $0-0-3+3=0$ et $-3+3-3+3=0$. Les coordonnées des points non alignés A, C et D vérifient l'équation proposée.

   Cette équation est donc bien celle du plan (ACD).

   b. Un vecteur normal au plan a pour coordonnées $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et une représentation paramétrique de la droite orthogonale au plan et passant par B est $\begin{cases}x=t\\y=-t-3\\z=-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

   Les coordonnées du point situé à l'intersection du plan (ACD) et de cette droite doivent respecter ces conditions ainsi que l'équation du plan. On en déduit que $t+t+3+t+3=0 \Leftrightarrow t=-2$, puis que $F(-2;-1;2)$.

4. a. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, on en déduit que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   b. Une équation du plan (ABC) est donc $x+y-z+3=0$ et une représentation paramétrique de la droite orthogonale à ce plan passant par D est $\begin{cases}x=t-3\\y=t-3\\z=-t+3\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.
   Les coordonnées du point situé à l'intersection du plan et de la droite doivent respecter ces conditions ainsi que l'équation du plan (ABC). On en déduit que $t-3+t-3+t-3+3=0 \Leftrightarrow t=2$, et donc que $E(-1;-1;1)$.

5. On montre facilement que $EF=EG=EH=FG=FH=GH=\sqrt{2}$ donc $EFGH$ est bien un tétraèdre régulier.

Corrigé exercice 101 :

1. On a $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}5,5\\3,5\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}4,5\\-1,5\\6\end{pmatrix}$.

2. Comme, d'une part, $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{ED}=-9\times5,5+5\times3,5+8\times4=0$ et, d'autre part, $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{EF}=-9\times4,5+5\times(-1,5)+8\times6=0$, on en déduit que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (EFD).

3. Le vecteur $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-1\\-5\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (DF) donc une représentation paramétrique de cette droite est $\begin{cases}x=-t+3\\y=-5t+4\\z=2t+3\end{cases}, t\in\mathbb{R}$. De plus, une équation du plan normal à (DF) passant par E est $-x-5y+2z+2=0$. Les coordonnées du point situé à l'intersection du plan et de la droite doivent respecter cette condition ainsi que l'équation de la droite paramétrique. On en déduit que $t-3-5(-5t+4)+2(2t+3)+2=0 \Leftrightarrow 30t=15$ et donc que $t=\dfrac{1}{2}$. On en déduit que $H\,(2,5;1,5;4)$.

4. L'aire du triangle EDF est donnée par $\dfrac{1}{2}\times EH\times DF$ or :
   $DF=\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+(-2)^2}=\sqrt{30}$ et $EH=\sqrt{(5)^2+(1)^2+(5)^2}=\sqrt{51}$ donc $\mathcal{A}_{EDF}=\dfrac{\sqrt{30}\times\sqrt{51}}{2}\approx 19,56$.

10 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 102 :

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-2\\6-4\\0-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4-2\\6-8\\1-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

   On en déduit donc que $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{DC}$, ou que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Les vecteurs étants égaux, on en déduit que $ABDC$ est un parallélogramme, et donc que les points A, B, C et D sont coplanaires. Ses diagonales sont de même longueur puisque $AD=\sqrt{17}$ et $BC=\sqrt{17}$. Comme $AB=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2}=3$ et $AC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, ses côtés consécutifs ne sont pas de même longueur. On en déduit que $ABDC$ est un rectangle.

2. a. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-1\times(-2)+1\times 2-1\times 4=0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-1\times 4+0\times 1+1\times 4=0$, alors $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, on en déduit qu'il est normal au plan (ABC).

   b. Une équation du plan est $-x+y+4z-6=0$ et comme $1+9+4\times 12,5-6=54\neq 0$, on en déduit que S n'appartient pas au plan (ABC).

3. En utilisant la formule du cours, $d\left(S;(ABC)\right)=\dfrac{|54|}{3\sqrt{2}}=9\sqrt{2}$.

4. L'aire de $ABDC$ est $AB\times AC=6\sqrt{2}$ puisque $ABDC$ est un rectangle. Donc le volume de la pyramide est $\dfrac{6\sqrt{2}\times 9\sqrt{2}}{3}=36$.

Corrigé exercice 103 :

1. a. De par la définition d'une représentation paramétrique, le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

   b. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ et donc (AB) : $\begin{cases}x=2t+1\\y=-1\\z=t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

   Comme $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u}=2\times 1+0\times 3+1\times(-2)=0$, les vecteurs directeurs des droites sont orthogonaux, les droites sont donc elles aussi orthogonales.

Vérifions si elles possèdent un point d'intersection grâce à leur équation paramétrique. On a $\begin{cases} t+4=2t'+1 \\ 3t-1=-1 \\ -2t+2=t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+4=2t'+1 \\ t=0 \\ -2t+2=t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t'=\dfrac{3}{2} \\ t=0 \\ t'=2 \end{cases}$ donc le système n'a pas de solution. Les deux droites ne sont donc pas coplanaires.

2. a. $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ puisque Δ est orthogonale à $\mathcal{P}$. On a alors une équation du type $x+3y-2z+d=0$ et comme A est un point du plan, ses coordonnées vérifient l'équation donc $1-3-2\times 0+d=0$ soit $d=2$.
   Donc une équation du plan est $x+3y-2z+2=0$.
   b. Comme $(AB)\perp\Delta$, alors (AB) est parallèle au plan $\mathcal{P}$ et comme A est un point de ce plan, on en déduit que (AB) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

3. a. En injectant les coordonnées de la représentation paramétrique de la droite Δ dans l'équation du plan, on obtient $(t+4)+3(3t-1)-2(-2t+2)+2=0 \Leftrightarrow 14t-1=0$.
   En prenant la valeur $t=\dfrac{1}{14}$, on obtient $H\left(\dfrac{57}{14};-\dfrac{11}{14};\dfrac{13}{7}\right)$.
   b. Pour cela déterminons l'équation du plan orthogonal à (AB) passant par H. Il est de la forme $2x+z+d=0$ et comme H appartient au plan on a $2\times\dfrac{57}{14}+\dfrac{13}{7}+d=0 \Leftrightarrow d=-10$. Donc le plan orthogonal à (AB) passant par H a pour équation $2x+z-10=0$.
   En injectant les coordonnées de la représentation paramétrique de (AB) dans l'équation du plan on obtient $2(2t+1)+t-10=0$ soit $5t=8$.
   En prenant $t=\dfrac{8}{5}$, on obtient $K\left(\dfrac{21}{5};-1;\dfrac{8}{5}\right)$.

4. On obtient $HK=\sqrt{\left(\dfrac{21}{5}-\dfrac{57}{14}\right)^2+\left(-1+\dfrac{11}{14}\right)^2+\left(\dfrac{8}{5}-\dfrac{13}{7}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{9}{70}}\approx 0,36$.

Corrigé exercice 104 :

1. $\overrightarrow{FI}$, $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont orthogonaux deux à deux et, comme le cube est d'arête 1, on a bien $FI=FA=FB=1$ donc $\left(F;\overrightarrow{FI},\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FB}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.

2. On a $\overrightarrow{SI}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{SI}\cdot\overrightarrow{BA}=0$ et $\overrightarrow{SI}\cdot\overrightarrow{BE}=0$, ce qui signifie que $(SI)\perp(BAE)$.

3. Le vecteur $\overrightarrow{SI}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (BAE).

   Une équation du plan (BAE) est de la forme $x-y-z+d=0$. Comme $B(0;0;1)$ appartient au plan, on obtient $d=1$ et donc l'équation $x-y-z+1=0$.

4. Une représentation paramétrique de (SI) est $\begin{cases}x=t+1\\y=-t\\z=-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

5. Les coordonnées de J vérifient à la fois l'équation du plan (BAE) et la représentation paramétrique de la droite (SI). En injectant les coordonnées de la représentation paramétrique de la droite on obtient $t+1+t+t+1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{2}{3}$. On a donc $J\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

6. On a $\overrightarrow{JA}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{JB}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JE}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$. On obtient $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JE}=\overrightarrow{0}$. J est bien le centre de gravité du triangle BAE.

Corrigé exercice 105 :

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}$ qui ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. On a $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=2\times(-5)-2\times(-5)-2\times 0=0$.

   Le triangle ABC est rectangle en C. De plus, $CA=5\sqrt{2}$ et $CB=2\sqrt{3}$ donc $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{5\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{6}\approx 12,25$.

3. a. Pour que $\overrightarrow{n}$ soit normal au plan (ABC), on doit avoir $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0$.

   On obtient donc $\begin{cases}5+5b=0\\2-2b-2c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-1\\c=2\end{cases}$, soit $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

b. Une équation du plan (ABC) est de la forme $x - y + 2z + d = 0$.
Comme A est un point du plan, ses coordonnées vérifient l'équation et on a $-4 + 2 + d = 0$ soit $d = 2$.
Donc une équation du plan (ABC) est $x - y + 2z + 2 = 0$.

c. Si l'on injecte les coordonnées de D dans l'équation du plan, on obtient $0 - 2 + 2 \times 6 + 2 = 12 \neq 0$ donc D n'appartient pas au plan (ABC).

4. a. $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de cette droite. Comme elle passe par D, on obtient l'équation paramétrique $d : \begin{cases} x = t \\ y = -t + 2 \\ z = 2t + 6 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

b. En injectant les coordonnées de la représentation paramétrique dans l'équation du plan, on obtient $t + t - 2 + 2(2t + 6) + 2 = 0$ soit $6t = -12$, d'où $t = -2$.
On obtient ainsi $H(-2; 4; 2)$.

5. a. On a alors $DH = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

b. $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times DH$ donc $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times 5\sqrt{6} \times 2\sqrt{6} = 20$.

6. On a $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = -4 \times 3 - 2 \times 1 - 5 \times (-7) = 21$. De plus, $DA = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{45}$ et $DB = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-7)^2} = \sqrt{59}$.
Donc $\cos\left(\widehat{ADB}\right) = \frac{21}{\sqrt{45} \times \sqrt{59}}$ et on obtient $\widehat{ADB} \approx 66°$.

Corrigé exercice 106 :

Partie A

1. Soit $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ deux vecteurs respectivement normaux aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
On a $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles. Les vecteurs normaux au plan $\mathcal{P}$ ne sont pas colinéaires à ceux du plan $\mathcal{P}'$ et donc les plans sont sécants.

2. a. Les coordonnées d'un point situé à l'intersection des deux plans doivent vérifier les deux équations à la fois.
On obtient donc le système $\begin{cases} 2x - 3y - 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + z - 6 = 0 \end{cases}$.

b. On a :

$$\begin{cases} 2x-3y-2z+1=0 \\ x-2y+z-6=0 \\ y=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2z=3t-1 \\ x+z=2t+6 \\ y=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=2t+6 \\ 2x-2z=3t-1 \\ y=t \end{cases}.$$

En soustrayant deux fois la ligne 1 à la ligne 2, on obtient bien :

$$\begin{cases} x+z=2t+6 \\ -4z=-t-13 \\ y=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=2t+6 \\ z=\dfrac{t}{4}+\dfrac{13}{4} \\ y=t \end{cases}.$$

c. En remplaçant z dans la ligne 1 par la valeur de la ligne 2, on obtient :

$$\begin{cases} x+\dfrac{t}{4}+\dfrac{13}{4}=2t+6 \\ z=\dfrac{t}{4}+\dfrac{13}{4} \\ y=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{4}t+\dfrac{11}{4} \\ z=\dfrac{t}{4}+\dfrac{13}{4} \\ y=t \end{cases}$$

donc une représentation paramétrique de la droite d'intersection est $\begin{cases} x=\dfrac{7}{4}t+\dfrac{11}{4} \\ y=t \\ z=\dfrac{t}{4}+\dfrac{13}{4} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Partie B

En utilisant la même méthode que dans la partie A on obtient les équations paramétriques suivantes.

1. $\begin{cases} x=t \\ y=2t-3 \\ z=t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

2. $\begin{cases} x=t-1 \\ y=t-3 \\ z=1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

3. $\begin{cases} x=129t \\ y=86t-\dfrac{5}{3} \\ z=172t-\dfrac{1}{3} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Partie C

1. Si $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$, cela signifie que $\begin{cases} \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}=0 \\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}=0 \end{cases}$ donc :

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases}.$$

2. a. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ étaient colinéaires, il existerait un réel λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$.
Les coordonnées des deux vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

   b. On a le système $\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 4y + z = 0 \end{cases}$.

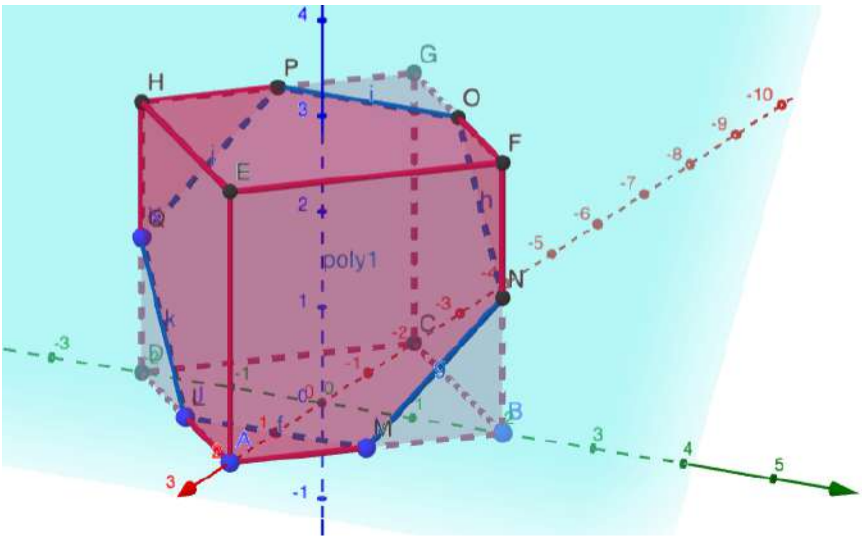
   c. En choisissant $y = t$, on obtient $\begin{cases} y = t \\ 3x + 2z = t \\ z = -4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t \\ x = 3t \\ z = -4t \end{cases}$.

   d. Les vecteurs normaux à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de la forme $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} t \\ 3t \\ -4t \end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Corrigé exercice 107 :

Partie A

1. Voir fichier GeoGebra.
2. Voir fichier GeoGebra.
3. Ces points correspondent respectivement aux milieux des segments $[AB]$, $[AD]$ et $[DH]$.
4. On obtient la figure suivante.



5. La nature de cette section semble être un hexagone.

Partie B

1. Il faut vérifier si les coordonnées des points I, J et K respectent l'équation donnée. On a bien $2 \times 1 + 0 \times 1 + \sqrt{2} \times 0 - 2 = 0$, $2 \times 1 + 0 \times (-1) + \sqrt{2} \times 0 - 2 = 0$ et $2 \times 0 + 0 \times -2 + \sqrt{2} \times \sqrt{2} - 2 = 0$ donc le plan (IJK) admet bien pour équation $2x + \sqrt{2}z - 2 = 0$.

2. a. On a $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$ donc (GH) : $\begin{cases}x=2t-2\\y=-2t\\z=2\sqrt{2}\end{cases}$ $, t\in\mathbb{R}$. L est le point d'intersection de cette droite avec le plan (IJK). Si l'on injecte les coordonnée de la représentation paramétrique dans l'équation du plan on obtient $2(2t-2)+\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}-2=0 \Leftrightarrow 4t=2$. En prenant $t=\dfrac{1}{2}$ dans l'équation paramétrique de la droite (GH) on obtient $L(-1;-1;2\sqrt{2})$. De même, on montre que $M(-1;1;2\sqrt{2})$ et $N(0;2;\sqrt{2})$.

   b. Ces point représentent les milieux des arêtes $[AD]$, $[AB]$ et $[BF]$.
   Or $ABCDEFGH$ est un cube donc chacun des côtés de l'hexagone sont égaux.

3. On a $LI=\sqrt{2^2+2^2+(2\sqrt{2})^2}=4$. On montre de même que $MJ=4$ et $KN=4$.

Corrigé exercice 108 :

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1-x_D\\2-y_D\\-1-z_D\end{pmatrix}$.

   Ces deux vecteurs sont égaux puisque $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. On obtient $D(4;1;-1)$. De la même manière, $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}x_F+2\\y_F\\z_F\end{pmatrix}$ sont égaux, on obtient donc $F(0;-1;2)$. Comme $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}x_H-4\\y_H-1\\z_H+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}x_G-1\\y_G-2\\z_G+1\end{pmatrix}$ sont égaux, on obtient $G(3;1;1)$ et $H(6;0;1)$.

2. $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times(-3)+(-1)\times 1+2\times 0=-7$.

3. On a $AE=3$ et $AB=\sqrt{10}$ donc $\cos\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{-7}{3\times\sqrt{10}}$ donc $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AB}\right)\approx 137,5°$.

4. a. On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ donc

$$(BC) : \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b. Le plan orthogonal à (BC) passant par A admet pour équation $3x+2y-z-1 = 0$. On en déduit le point d'intersection entre la droite (BC) et le plan orthogonal à (BC) passant par A est $H\left(-\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}\right)$.

Donc $AH = \sqrt{\frac{13}{2}}$. Cette distance est la hauteur du parallélogramme $ABCD$ dont l'aire vaut $\mathcal{A}_{ABCD} = AH \times BC = \sqrt{\frac{13}{2}} \times \sqrt{14} = \sqrt{91} \approx 9,54$.

5. a. On note $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à (ABC).

On a alors que $\begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 + b = 0 \\ 3 + 2b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c = 9 \end{cases}$ donc $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC). Une équation de ce plan est du type $x + 3y + 9z + d = 0$. Comme B appartient au plan, on a que $d = 2$ et donc une équation du plan est $x + 3y + 9z + 2 = 0$.

b. En appliquant la formule du cours, on obtient :

$$d\,(E; (ABC)) = \frac{|3 + 3 \times (-2) + 9 \times 2 + 2|}{\sqrt{91}} = \frac{17\sqrt{91}}{91} \approx 1,78.$$

c. Le volume d'un parallélépipède est égal à l'aire de sa base multipliée par sa hauteur.

On a donc $\mathcal{V}_{ABCDEFGH} = \mathcal{A}_{ABCD} \times d(E; (ABC)) = \frac{17\sqrt{91}}{91} \times \sqrt{91} = 17$.

Corrigé exercice 109 :

1. Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ étant normal au plan $\mathcal{P}$, ce plan admet une équation de la forme $2x - y + z + d = 0$. Le point A appartient à ce plan. On en déduit qu'une équation de ce plan est $2x - y + z - 5 = 0$.

2. Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ un est vecteur normal à $\mathcal{P}$. Étant donné que $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 1\times 2 + 3\times(-1) + 1\times 1 = 0$, ces vecteurs sont orthogonaux.
   Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont donc orthogonaux.

3. a. Comme $2+3\times 1+2-7=0$ et $2\times 2-1+2-5=0$, les coordonnées de B vérifient les deux équations. B appartient donc aux deux plans.
   De même, $-2+3\times 0+9-7=0$ et $2\times(-2)-0+9-5=0$ donc C appartient également aux deux plans.

   b. Comme $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\-1\\7\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'intersection entre les deux plans, cette droite admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4t+2 \\ y = -t+1 \\ z = 7t+2 \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

4. a. D'après la formule du cours $d(A;\mathcal{P}) = \dfrac{|3+3\times 5+4-7|}{\sqrt{11}} = \dfrac{15\sqrt{11}}{11}$.

   b. On a $BC = \sqrt{(-4)^2+(-1)^2+7^2} = \sqrt{66}$.
   La longueur calculée à la question précédente correspond à la hauteur issue de A du triangle ABC, son aire vaut donc $\dfrac{\sqrt{66}\times\dfrac{15\sqrt{11}}{11}}{2} = \dfrac{15\sqrt{6}}{2}$.

Corrigé exercice 110 :

1. a. Si l'on cherche l'intersection de la droite et de la sphère, alors les coordonnées doivent vérifier à la fois la représentation paramétrique de la droite et l'équation de la sphère.
   Si on injecte les coordonnées de la représentation paramétrique dans l'équation de la sphère, on obtient $(2t+5-1)^2+(-t-2-2)^2+(3t+5+3)^2=81$ donc $4t^2+16t+16+t^2+8t+16+9t^2+48t+64=81$ et donc $14t^2+72t+15=0$.

   b. Il faut résoudre une équation du second degré dont le déterminant vaut $\Delta = 72^2-4\times 14\times 15 = 4344$. Il y a donc deux solutions t_1 et t_2 dont les valeurs sont $t_1 = \dfrac{-72-\sqrt{4344}}{28}$ et $t_2 = \dfrac{-72+\sqrt{4344}}{28}$.
   En injectant ces valeurs dans la représentation paramétrique on obtient les points $A(-4,85;2,93;-9,78)$ et $B(4,56;-1,78;4,35)$.

2. Une représentation paramétrique de cette droite est $\begin{cases} x = t+6 \\ y = t+6 \\ z = t+4 \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$

Si on injecte dans l'équation de la sphère on a $(t+5)^2+(t+4)^2+(t+7)^2=81$ et donc $3t^2+32t+9=0$, on a $\Delta=32^2-4\times3\times9=916$. On a donc deux solutions qui sont $t_1=\dfrac{-32-\sqrt{916}}{6}$ et $t_2=\dfrac{-32+\sqrt{916}}{6}$.

On a alors $C(-3,44;-5,44;-5,44)$ et $D(6,11;4,11;4,11)$.

Corrigé exercice 111 :

1. Une équation de cette sphère est $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$.
2. En injectant les coordonnées de la représentation paramétriques dans l'équation de la sphère, on obtient $(3t)^2+(2t+2)^2+(2t-2)^2=25$, soit $17t^2-17=0$, ce qui revient à étudier l'équation $t^2-1=0$.
3. Les solutions de cette équation sont $t_1=-1$ et $t_2=1$.

   Ces valeurs correspondent aux points $M_1(-1;1;-1)$ et $M_2(5;5;3)$.
4. a. Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}$. La droite orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par Ω admet donc pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=3t+2\\y=1\\z=4t+3\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

   Si on note H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$, ce point appartient au plan et à la droite. On obtient ainsi l'équation $3(3t+2)+4(4t+3)+7=0$, soit $9t+6+16t+12+7=0$, d'où $25t+25=0$ et donc $t=-1$. Cette valeur donne $H(-1;1;-1)$. Ce point est confondu avec $M_1(-1;1;-1)$.

   b. On a $\Omega H=\sqrt{3^2+0^2+4^2}=5$. Comme H est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$, alors, pour tout point M du plan $\mathcal{P}$ distinct de H, $M\Omega>MH=5$.

   c. L'intersection entre le plan et la sphère est donc réduite au point H.
5. On a $\overrightarrow{\Omega M_1}\begin{pmatrix}-3\\0\\-4\end{pmatrix}$.
6. a. Comme $\overrightarrow{\Omega M}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}'$, alors M est le projeté orthogonal du point Ω sur ce plan. Donc pour tout point N de $\mathcal{P}'$, on a la relation $\Omega N>\Omega M$.

   b. La sphère $\mathcal{S}$ et le plan $\mathcal{P}'$ ont un unique point d'intersection qui est le point M.

   c. Si un plan est tangent à une sphère de centre Ω en un point M, alors le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ est un vecteur normal au plan.

Corrigé exercice 112 :

1. a. $I(1;1;1)$ est le milieu du segment $[AB]$ et appartient au plan $\mathcal{P}_1$. De plus, $\overrightarrow{AB}(4;4;0)$ est un vecteur normal du plan $\mathcal{P}_1$.
   Donc le plan $\mathcal{P}_1$ admet pour équation $4x+4y-8=0$, soit $x+y-2=0$.

   b. Le plan $\mathcal{P}_1$ est donc formé par l'ensemble des points M de l'espace donc les coordonnées de la forme $M(x;2-x;z)$. Pour tout point M de $\mathcal{P}_1$, on a alors : $AM^2=(x+1)^2+(3-x)^2+(z-1)^2=2x^2+z^2-4x-2z+11$ et $BM^2=(x-3)^2+(-1-x)^2+(z-1)^2=2x^2+z^2-4x-2z+11$.
   Donc $AM=BM$.

2. En procédant comme à la question 1.a on obtient $\mathcal{P}_2 : 4y-2z=0$, soit $2y-z=0$ et $\mathcal{P}_3 : 2x-2y-2z+4=0$, soit $x-y-z+2=0$.

3. Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ sont respectivement des vecteurs normaux aux plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$. Ces vecteurs étant deux à deux non colinéaires, on en déduit que les plans sont deux à deux sécants.

4. a. La droite d'intersection entre les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ doit respecter le système $\begin{cases}x+y-2=0\\2y-z=0\end{cases}$. On pose $y=t$ et on a alors le système $\begin{cases}x=2-t\\z=2t\\y=t\end{cases}$.

   Ainsi, une représentation paramétrique de la droite d_1 est $\begin{cases}x=2-t\\y=t\\z=2t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

   La droite d'intersection entre les plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ doit respecter le système suivant $\begin{cases}x-y-z+2=0\\2y-z=0\end{cases}$.

   On pose $y=t'$ et on a alors le système $\begin{cases}x=3t'-2\\z=2t'\\y=t'\end{cases}, t'\in\mathbb{R}$.

   Ainsi, une représentation paramétrique de la droite d_2 est $\begin{cases}x=3t'-2\\y=t'\\z=2t'\end{cases}, t'\in\mathbb{R}$.

   b. Si $M\in\mathcal{P}_1$, alors $AM=BM$ et si $M\in\mathcal{P}_2$, alors $BM=CM$.
   Ainsi, si $M\in d_1$, alors $AM=BM=CM$.

   c. De la même façon, si $M\in\mathcal{P}_2$, alors $BM=CM$ et si $M\in\mathcal{P}_3$, alors $CM=DM$. Donc si $M\in d_2$, alors $BM=CM=DM$.

5. $\begin{cases} 2-t=3t'-2 \\ t=t' \\ 2t=2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t=4 \\ t=t' \\ t=t' \end{cases}$. On a donc $t=t'=1$. Il y a bien un point d'intersection entre les droites d_1 et d_2 dont les coordonnées sont $E(1;1;2)$.
6. Comme E appartient à d_1, alors $EA=EB=EC$. Par ailleurs, E appartient à d_2, donc $EB=EC=ED$. Le point E est donc équidistant des points A, B, C et D.
7. On a $EA=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=\sqrt{9}=3$. La sphère de centre E et de rayon 3 est circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

Corrigé exercice 113 :

1. En utilisant la relation de Chasles, on obtient :
$f(M)=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\left(\overrightarrow{A_iN}+\overrightarrow{NM}\right)^2=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\left(\overrightarrow{A_iN}^2+2\times\overrightarrow{A_iN}\cdot\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NM}^2\right)$.
On a ainsi $f(M)=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{A_iN}^2+\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\overrightarrow{MN}^2+2\overrightarrow{NM}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{A_iN}$, soit :
$f(M)=F(N)+\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\overrightarrow{MN}^2+2\overrightarrow{MN}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{NA_i}$.

2. a. Supposons qu'il existe un deuxième point G' tel que $a_1\overrightarrow{G'A_1}+...+a_n\overrightarrow{G'A_n}=\overrightarrow{0}$. On a alors $a_1\overrightarrow{G'A_1}+...+a_n\overrightarrow{G'A_n}=a_1\overrightarrow{GA_1}+...+a_n\overrightarrow{GA_n}$ et donc $a_1(\overrightarrow{G'A_1}-\overrightarrow{GA_1})+...+a_n(\overrightarrow{G'A_n}-\overrightarrow{GA_n})=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{G'G}=\overrightarrow{0}$. Comme $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\neq 0$, on en déduit que $\overrightarrow{G'G}=\overrightarrow{0}$ et donc que $G=G'$.
Le point est donc unique.
   b. Comme $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{GA_i}=\overrightarrow{0}$, on en déduit que $f(M)=f(G)+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{MG}^2$ en utilisant le résultat de la question 1.
   c. $f(M)=k\Leftrightarrow f(G)+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{MG}^2=k$. On obtient :
$f(M)=k\Leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{MG}^2=k-f(G)$ et donc $f(M)=k\Leftrightarrow\overrightarrow{MG}^2=\dfrac{k-f(G)}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}$.
   d. Si $\ell<0$, $MG^2=\ell$ ce qui n'est pas possible puisque MG^2 est positif ou nul. Aucun point M ne peut donc respecter cette condition.
Si $\ell=0$, alors $MG^2=0$ n'est possible que si M et G sont confondus.
Enfin, si $\ell>0$, l'ensemble des points tels que $MG^2=\ell$ est la sphère de centre G et de rayon $\sqrt{\ell}$.
   e. Les points A_1, A_2 et A_3 associés aux coefficient $a_1=1$, $a_2=-1$ et $a_3=1$ définissent une fonction scalaire de Leibniz notée f. Posons $G(-1;10;7)$. Ainsi $\overrightarrow{GA_1}\begin{pmatrix}3\\-7\\-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{GA_2}\begin{pmatrix}5\\-12\\-11\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GA_3}\begin{pmatrix}2\\-5\\-5\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{GA_1}-\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GA_3}=\overrightarrow{0}$. On

obtient alors $f(G) = 94 - 290 + 54 = -142$. La condition que les points M doivent respecter peut être réécrite par $f(M) = -21$. On obtient alors, en utilisant la question 2.c, $\overrightarrow{MG}^2 = \dfrac{-21-(-142)}{1-1+1} = 121$. L'ensemble des points M respectant l'égalité donnée est donc la sphère de centre $G(-1; 10; 7)$ et de rayon $\sqrt{121} = 11$.

11 Exercices Préparer le bac

Corrigé exercice 114 :

1. a. On a $P(2;0;0)$, $Q(0;0;2)$ et $\Omega(3;3;3)$.

   b. On a d'abord $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-2\\4\\6\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{n}$ est normal au plan s'il est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ donc si $\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=0\\\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PR}=0\end{cases}$.

   On obtient $\begin{cases}-2+2c=0\\-2+4b+6c=0\end{cases}$ soit $\begin{cases}c=1\\b=-1\end{cases}$ donc $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

   c. Comme $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (PQR), une équation de ce plan est de la forme $x-y+z+d=0$. Comme P appartient au plan, on obtient que $2-0+0+d=0$, d'où $d=-2$. Ainsi, $x-y+z-2=0$ est bien une équation du plan (PQR).

2. a. Un vecteur directeur de la droite Δ est donc $\overrightarrow{n}$. Comme cette droite passe par $\Omega(3;3;3)$, on obtient la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases}x=t+3\\y=-t+3\\z=t+3\end{cases},t\in\mathbb{R}.$$

   b. On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique dans l'équation du plan et on obtient $(t+3)-(-t+3)+t+3-2=0$, soit $3t=-1$ et donc $t=-\frac{1}{3}$. En remplaçant la valeur de t dans la représentation paramétrique, on obtient $I\left(\frac{8}{3};\frac{10}{3};\frac{8}{3}\right)$.

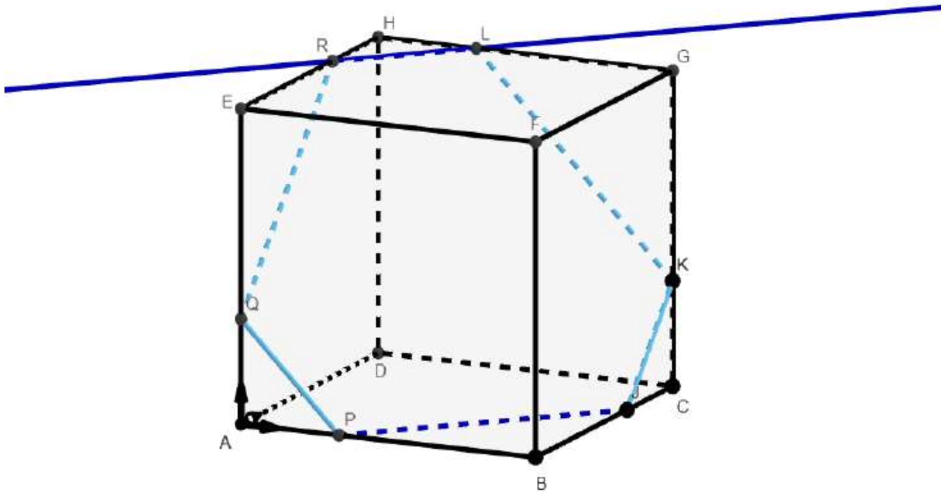
   c. Le repère étant orthonormé :

$$\Omega I=\sqrt{\left(3-\frac{8}{3}\right)^2+\left(3-\frac{10}{3}\right)^2+\left(3-\frac{8}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3. a. $6-4+0-2=0$ donc le point J appartient bien au plan (PQR).

   b. On a $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{QR}=2\overrightarrow{JK}$. Comme ces vecteurs sont colinéaires, on en déduit que les droites (JK) et (QR) sont parallèles.

   c. En utilisant le fait que les droites (JK) et (QR) sont parallèles et que J appartient au plan (PQR), on obtient le résultat suivant.



Corrigé exercice 115 :

1. a. On a $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}10\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\7\\1\end{pmatrix}$. On obtient alors $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 11 \neq 0$ donc les droites (OA) et (OB) ne sont donc pas perpendiculaires.

   b. Par définition, $\cos\left(\widehat{AOB}\right) = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{OA \times OB}$. Comme $OA = \sqrt{101}$ et $OB = \sqrt{51}$, on en déduit que $\widehat{AOB} \approx 81,2°$.

2. On a que $7\times0+9\times0-70\times0 = 0$ (pour le point O), $7\times10+9\times0-70\times1 = 0$ (pour le point A) et $7\times1+9\times7-70\times1 = 0$ (pour le point B). Donc les coordonnées des points O, A et B vérifient bien l'équation du plan. On peut en déduire que $7x+9y-70z = 0$ est bien une équation du plan (OAB).

3. Comme $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}10\\0\\-4\end{pmatrix}$ et que la droite passe par le point C, une représentation paramétrique de la droite est $\begin{cases} x = 10t \\ y = 0 \\ z = -4t+5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

4. Le point D a pour coordonnées $D\left(0;0;\dfrac{5}{2}\right)$. Comme le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (OAB), son équation est de la forme $7x+9y-70z+d = 0$. En injectant les coordonnées de D dans l'équation du plan, on trouve $d = 175$. On a donc $\mathcal{P} : 7x+9y-70z+175 = 0$.

5. En injectant les coordonnées de la représentation paramétrique de la droite (CA) dans l'équation du plan $\mathcal{P}$, on trouve la valeur de t telle que le point appartienne à

la fois au plan et à la droite. On obtient : $7 \times 10t + 9 \times 0 - 70 \times (-4t + 5) + 175 = 0 \Leftrightarrow 350t - 175 = 0$ donc $t = \dfrac{1}{2}$.
En replaçant cette valeur dans la représentation paramétrique on trouve $F(5; 0; 3)$.

6. On a $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} \dfrac{9}{2} \\ -\dfrac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{EF}$. Comme ces vecteurs sont colinéaires, les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

Corrigé exercice 116 :

1. a. On a $F(1; 0; 1)$, $H(0; 1; 1)$ et $K\left(0; \dfrac{1}{4}; 0\right)$ donc $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FK}\begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{1}{4} \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Donc on a $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{FH} = 4 \times (-1) + 4 \times 1 - 3 \times 0 = 0$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{FK} = 4 \times (-1) + 4 \times \dfrac{1}{4} - 3 \times (-1) = 0$.
   Comme $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FHK), on peut en déduire qu'il est normal plan (FHK).

   b. Une équation du plan (FHK) est de la forme $4x + 4y - 3z + d = 0$. Comme $H(0; 1; 1)$ appartient au plan, on a $4 \times 0 + 4 - 3 + d = 0$ donc $d = -1$.
   Une équation du plan (FHK) est $4x + 4y - 3z - 1 = 0$.

   c. Comme $\mathcal{P}$ et (FHK) sont parallèles, on en déduit qu'une équation de $\mathcal{P}$ est de la forme $4x + 4y - 3z + d = 0$. De plus, $I\left(\dfrac{1}{2}; 0; 1\right)$ appartient au plan donc $4 \times \dfrac{1}{2} + 4 \times 0 - 3 \times 1 + d = 0$ donc $d = 1$ et $\mathcal{P} : 4x + 4y - 3z + 1 = 0$.

   d. Une représentation paramétrique de la droite (AE) est $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

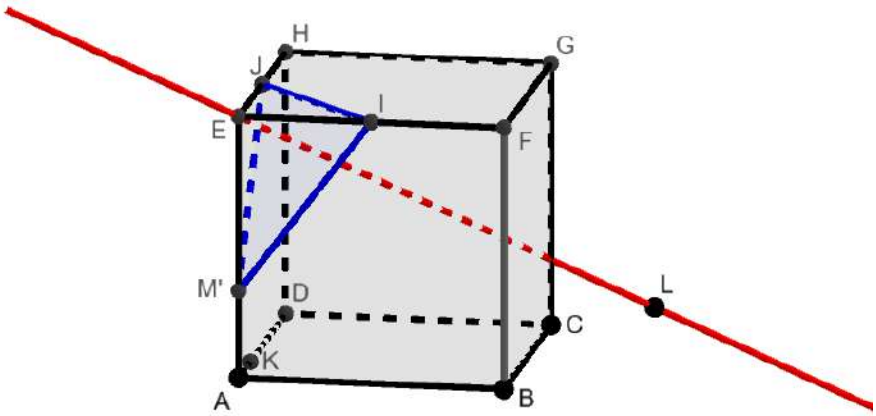
   On injecte ces coordonnées dans l'équation de $\mathcal{P}$ et on obtient $4 \times 0 + 4 \times 0 - 3t + 1 = 0$, soit $t = \dfrac{1}{3}$ donc $M'\left(0; 0; \dfrac{1}{3}\right)$.

2. a. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan $\mathcal{P}$ est donc un vecteur directeur de la droite Δ. Comme cette droite passe par $E(0; 0; 1)$, on en déduit une représentation paramétrique de Δ : $\begin{cases} x = 4k \\ y = 4k \\ z = -3k + 1 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.

   b. Une équation du plan (ABC) est $z = 0$. En injectant les coordonnées de la représentation paramétrique de la droite Δ dans cette équation, on obtient

$k = \dfrac{1}{3}$ et donc $L\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{4}{3}; 0\right)$.

c. Le droite Δ est représentée en rouge dans la figure suivante.



d. Le point L n'appartient pas au plan (ABF) mais le point E oui. Comme (BF) est incluse dans ce plan et que (EL) non, on en déduit que les droites (BF) et Δ ne sont pas sécantes.

Les équations paramétriques des droites Δ et (CG) sont :

$$\Delta : \begin{cases} x = 4k \\ y = 4k \\ z = -3k + 1 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \text{ et } (CG) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On a alors $\begin{cases} 4k = 1 \\ 4k = 1 \\ -3k + 1 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{4} \\ k = \dfrac{1}{4} \\ t = \dfrac{1}{4} \end{cases}$. Donc le point de coordonnées $\left(1; 1; \dfrac{1}{4}\right)$ est le point d'intersection des droites Δ et (CG).

Corrigé exercice 117 :

1. On a $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc une représentation paramétrique de (CD) est :

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 3 \\ z = -4t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. a. On a $BM^2 = (4t-4)^2 + (3+1)^2 + (-4t+2)^2 = 32t^2 - 48t + 36$. BM est minimale lorsque BM^2 est minimale et, comme BM^2 est une fonction du second degré

en t, on en déduit que BM^2 est minimale si $t = \dfrac{-(-48)}{2 \times 32} = \dfrac{3}{4}$. On a alors $M(3;3;-1)$.

b. On a $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} = -1 \times 4 + 4 \times 0 - 1 \times (-4) = 0$. Ces vecteurs sont orthogonaux, donc les droites (BH) et (CD) sont orthogonales. Comme H est un point commun aux deux droites, on en déduit qu'elles sont perpendiculaires.

c. On obtient $\mathcal{A}_{BCD} = \dfrac{1}{2}CD \times BH = \dfrac{1}{2}\sqrt{32} \times \sqrt{18} = 12 \text{ cm}^2$.

3. a. On a que $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{BH} = 2 \times (-1) + 1 \times 4 + 2 \times (-1) = 0$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 2 \times 4 + 1 \times 0 + 2 \times (-4) = 0$. Comme $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, on en déduit que c'est un vecteur normal au plan.

b. On a donc $(BCD) : 2x + y + 2z - 7 = 0$.

c. $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de la droiteΔ. Une représentation paramétrique est donc $\Delta : \begin{cases} x = 2t' + 2 \\ y = t' + 1 \\ z = 2t' + 4 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$.

d. Si on injecte les coordonnées de la représentation paramétrique dans l'équation du plan, on obtient $2(2t'+2) + t' + 1 + 2(2t'+4) - 7 = 0 \Leftrightarrow 9t' + 6 = 0$ donc en prenant $t' = -\dfrac{2}{3}$ on obtient $I\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{8}{3}\right)$.

4. Comme Δ est orthogonale au plan (BCD), alors AI est la hauteur du tétraèdre issue de A. On obtient $AI = \sqrt{\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2} = 2$ et donc $\mathcal{V}_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \times AI \times \mathcal{A}_{BCD} = 8 \text{ cm}^3$.

Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 4 : Suites

Table des matières

1 Informations sur ce chapitre

Les suites ont été introduites en classe de Première et sont un outil indispensable pour modéliser des phénomènes discrets avec des utilisations dans plusieurs autres disciplines. Dans ce chapitre on formalise l'étude du comportement asymptotique des suites amorcé en classe de Première. Pour cela, on commence avec l'étude des suites convergentes et la notion de limite finie. Dans un premier temps, nous reviendrons systématiquement à la définition pour prouver qu'une suite converge. Ensuite, nous pourrons recourir au théorème de convergence monotone en faisant bien remarquer aux élèves que, bien qu'il permette de prouver la convergence d'une suite, il ne permet pas en général de déterminer sa limite.

Nous passerons dans un second temps à l'étude des suites ayant une limite infinie. De façon analogue, nous prouverons qu'une suite diverge vers $\pm\infty$ en se ramenant à la définition. Nous pourrons ensuite traiter du cas particulier des suites monotones.

Dans un troisième temps, nous allons mettre en place les théorèmes d'opérations sur les limites de façon progressive, en commençant par la limite d'une somme de deux suites, puis la limite d'un produit de deux suites et enfin la limite d'un quotient de deux suites. Il est important de faire comprendre aux élèves que certaines limites ne peuvent pas être calculées en utilisant directement ces théorèmes et on montre que l'on ne peut pas conclure dans le cas général. Lorsque ces cas se rencontrent, on parlera de façon traditionnelle de « Forme Indéterminées ». Viendra ensuite un temps où les élèves vont devoir acquérir certains automatismes afin de lever l'indétermination, notamment en factorisant par le terme de plus haut degré.

Dans un dernier temps, nous étudierons la convergence de suites à l'aide des théorèmes de comparaison (pour montrer qu'une suite diverge vers $\pm\infty$) ou du théorème des gendarmes (pour montrer qu'une suite converge).

Ce chapitre est aussi l'occasion de travailler les différents types de raisonnements, notamment le raisonnement par récurrence et la recherche de contre-exemples.

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

1. $u_1 = 3 \times 1 + 5 = 8$

   $u_2 = 3 \times 2 + 5 = 11$

   $u_3 = 3 \times 3 + 5 = 14$

   $u_5 = 3 \times 5 + 5 = 20$

2. $u_1 = 2^1 - 1 = 1$

   $u_2 = 2^2 - 1 = 3$

   $u_3 = 2^3 - 1 = 7$

   $u_5 = 2^5 - 1 = 31$

3. $u_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

   $u_2 = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$

   $u_3 = \dfrac{3}{3+1} = \dfrac{3}{4}$

   $u_5 = \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{6}$

4. Pour les suites définies par récurrence, on constate que le calcul de u_4 est nécessaire pour calculer u_5 même si ce n'est pas explicitement demandé. $u_1 = 2 \times u_0 + 7 = 2 \times 1 + 7 = 9$

   $u_2 = 2 \times u_1 + 7 = 2 \times 9 + 7 = 25$

   $u_3 = 2 \times u_2 + 7 = 2 \times 25 + 7 = 57$

   $u_4 = 2 \times u_3 + 7 = 2 \times 57 + 7 = 121$ $u_5 = 2 \times u_4 + 7 = 2 \times 121 + 7 = 249$

5. $u_1 = 3 \times u_0 - 2 \times 0 = 3 \times 2 - 2 \times 0 = 6$

   $u_2 = 3 \times u_1 - 2 \times 1 = 3 \times 6 - 2 \times 1 = 16$

   $u_3 = 3 \times u_2 - 2 \times 2 = 3 \times 16 - 2 \times 2 = 44$

   $u_4 = 3 \times u_3 - 2 \times 3 = 3 \times 44 - 2 \times 3 = 126$

   $u_5 = 3 \times u_4 - 2 \times 4 = 3 \times 126 - 2 \times 4 = 370$

Corrigé exercice 2 :

1. $t_{n+1} = 2(n+1) + 4 = 2n + 2 + 4 = 2n + 6$

   $t_{n-1} = 2(n-1) + 4 = 2n - 2 + 4 = 2n + 2$

   $t_{2n} = 2(2n) + 4 = 4n + 4$

   $t_{3n-2} = 2(3n-2) + 4 = 6n - 4 + 4 = 6n$

2. $t_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 = n^2 + n + 1$
   $t_{n-1} = (n-1)^2 - (n-1) + 1 = n^2 - 2n + 1 - n + 1 + 1 = n^2 - 3n + 3$
   $t_{2n} = (2n)^2 - 2n + 1 = 4n^2 - 2n + 1$
   $t_{3n-2} = (3n-2)^2 - (3n-2) + 1 = 9n^2 - 12n + 4 - 3n + 2 + 1 = 9n^2 - 15n + 7$
3. $t_{n+1} = \dfrac{(n+1)-2}{(n+1)+1} = \dfrac{n-1}{n+2}$
   $t_{n-1} = \dfrac{(n-1)-2}{(n-1)+1} = \dfrac{n-3}{n}$
   $t_{2n} = \dfrac{2n-2}{2n+1}$
   $t_{3n-2} = \dfrac{(3n-2)-2}{(3n-2)+1} = \dfrac{3n-4}{3n-1}$

Corrigé exercice 3 :

1. La fonction $f\colon x \mapsto 4x - 5$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est strictement positif. Elle est donc croissante sur $[0;+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_n = f(n)$, donc la suite (v_n) est croissante.
2. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $v_{n+1} - v_n = 1 + \dfrac{2}{n+1} - \left(1 + \dfrac{2}{n}\right) = 1 + \dfrac{2}{n+1} - 1 - \dfrac{2}{n}$ $= \dfrac{2}{n+1} - \dfrac{2}{n} = \dfrac{2n-2n-2}{n(n+1)} = -\dfrac{2}{n(n+1)}$. Or, pour tout $n \geqslant 1$, on a $n \geqslant 0$ et $n+1 \geqslant 0$ d'où $n(n+1) \geqslant 0$.

   Donc $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ et donc la suite (v_n) est décroissante.
3. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $v_n > 0$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \dfrac{2^{n+1}}{n+1} \times \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{2n}{n+1}$.

   Or, pour tout $n \geqslant 1$, on a $2n \geqslant n+1$ d'où $\dfrac{2n}{n+1} \geqslant 1$.

   Donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 1$ et donc la suite (v_n) est croissante.
4. La fonction $f\colon x \mapsto (x-5)^2$ est une fonction polynôme du second degré donnée sous forme canonique. Elle est décroissante sur $[0;5]$ et croissante sur $[5;+\infty[$.

   Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = f(n)$, alors la suite (v_n) est croissante à partir de $n = 5$.

Corrigé exercice 4 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n = w_0 + n \times r = 2 - 3n$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n = w_0 + n \times r = 18 + 5n$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $w_n = w_1 + (n-1) \times r = \dfrac{3}{4} + (n-1)\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}n$.

Corrigé exercice 5 :

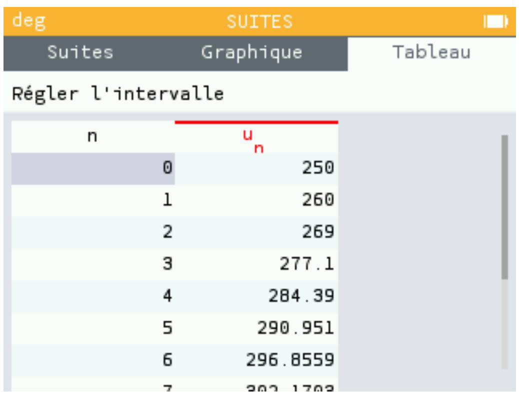
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_n = p_0 \times q^n = 3 \times 4^n$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_n = p_0 \times q^n = \dfrac{1}{2} \times (-2)^n = -(-2)^{n-1}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $p_n = p_1 \times q^{n-1} = 5 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Corrigé exercice 6 :

1. $u_0 = -2$
   $u_1 = 0,5 \times u_0 + 3 = 0,5 \times (-2) + 3 = -1 + 3 = 2$
   $u_2 = 0,5 \times u_1 + 3 = 0,5 \times 2 + 3 = 1 + 3 = 4$
2. a. Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0,5u_n + 3 - 6 = 0,5u_n - 3 = 0,5(u_n - 6) = 0,5v_n$. Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -2 - 6 = -8$.
   b. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $v_n = v_0 \times q^n = -8 \times 0,5^n$.
   c. Donc, pour tout entier naturel n, on a $u_n = v_n + 6 = -8 \times 0,5^n + 6$.

Corrigé exercice 7 :

1. En 2020, il y a $u_1 = 250 \times 0,9 + 35 = 260$ élèves inscrits dans l'école de musique.
   En 2021, il y a $u_2 = 260 \times 0,9 + 35 = 269$ élèves inscrits dans l'école de musique.
2. Comme $u_1 - u_0 = 260 - 250 = 10$ et $u_2 - u_1 = 269 - 260 = 9$, on en déduit que la suite (u_n) n'est pas arithmétique. Comme $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{260}{250} = 1,04$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{269}{260} \approx 1,03$, on en déduit que la suite (u_n) n'est pas géométrique.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = 0,9 \times u_n + 35$ et $u_0 = 250$. D'après le tableau de valeur de la calculatrice, la suite (u_n) semble être croissante.



4. 2050 correspond à l'année $2019 + 31$. Grâce à la calculatrice, on trouve $u_{31} \approx 346$.

3 Activités

3.1 Activité A : Ne pas faire les choses à moitié

Corrigé activité A :

Questions :

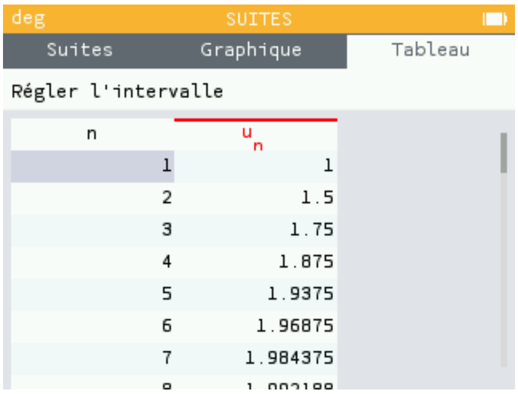
1. L'aire totale du rectangle est $1 \times 2 = 2$ m^2. A_1 est l'aire totale coloriée après une seule étape. Ainsi, on a $A_1 = \dfrac{2}{2} = 1$.

   L'aire non colorée est donc de 1 m^2. Ainsi, $A_2 = A_1 + \dfrac{1}{2} = 1,5$.

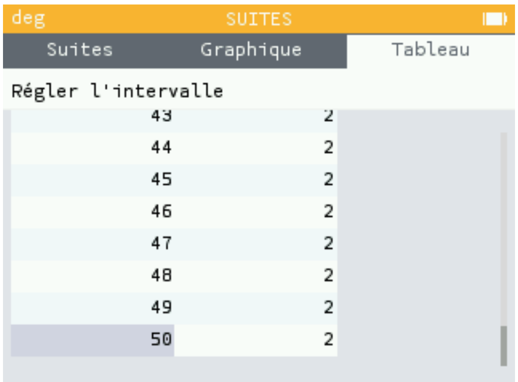
   L'aire non colorée est alors de 0,5 m^2. Ainsi, $A_3 = A_2 + \dfrac{0,5}{2} = 1,75$.

2. Lors de l'étape n, il reste à colorier une surface égale à $2 - A_n$. Lors de l'étape $n+1$, on colorie la moitié de cette surface restante et l'aire totale coloriée est donc $A_{n+1} = A_n + \dfrac{1}{2}(2 - A_n) = A_n + \dfrac{1}{2} \times 2 - \dfrac{1}{2}A_n = 1 + \dfrac{1}{2}A_n$.

3. a. On remarque que les termes de la suite se rapprochent de la valeur 2.



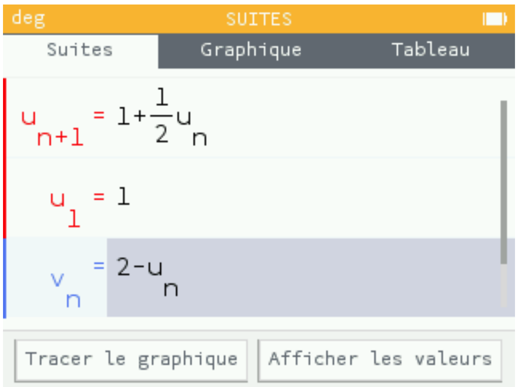
n	u_n
1	1
2	1.5
3	1.75
4	1.875
5	1.9375
6	1.96875
7	1.984375



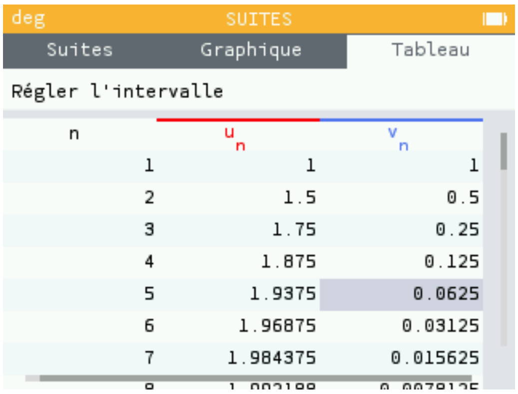
43	2
44	2
45	2
46	2
47	2
48	2
49	2
50	2

   b. Si on continue d'afficher les termes de la suite (A_n) bien au-delà de $n = 50$, on constate qu'ils se rapprochent toujours de 2 (la calculatrice indique même rapidement qu'ils sont égaux à 2). Cela n'est pas étonnant puisqu'avec le procédé de coloriage, on colorie une surface qui se rapproche de plus en plus de la surface totale du rectangle.

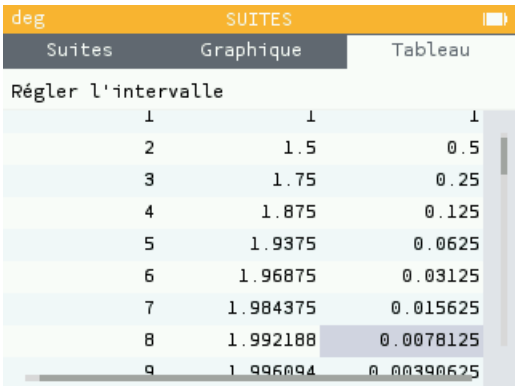
4. On définit une nouvelle suite dans la calculatrice.



C'est à partir du rang 5 que l'on a $|A - A_n| < 0,1$.



C'est à partir du rang 8 que l'on a $|A - A_n| < 0,01$.



Au bout de la cinquième étape, l'aire restante est inférieure à $0,1$ m^2. Au bout de la huitième étape, l'aire restante est inférieure à $0,01$ m^2.

5. Avec ce procédé de coloriage, il reste toujours une surface non-coloriée, quelque soit l'étape à laquelle on se place. Ainsi l'aire de la surface coloriée ne sera jamais égale à A. Cependant, la surface restante devient aussi proche de 0 que l'on veut (sans jamais atteindre 0).

Bilan : La suite (A_n) possède une limite finie car les termes de la suite semble devenir aussi proches de 2 que l'on veut.

3.2 Activité B : Ne pas dépasser les limites

Corrigé activité B :

Questions :

1. On a $a_1 = \mathcal{A} \times \dfrac{p_1}{100}$ et $a_2 = a_1 + (\mathcal{A} - a_1) \times \dfrac{p_2}{100} = \mathcal{A} \times \dfrac{p_1}{100} + \left(\mathcal{A} - \mathcal{A} \times \dfrac{p_1}{100}\right) \times \dfrac{p_2}{100}$ $= \mathcal{A} \times \dfrac{100(p_1 + p_2) - p_1 p_2}{10\,000}$.
2. Il nous manque les valeurs de p_1 et p_2 pour calculer a_1 et a_2.
3. La suite (a_n) est croissante car, à chaque étape, on ajoute une nouvelle surface colorée à la surface déjà colorée.
4. L'aire totale colorée ne peut pas être supérieure à $\mathcal{A}$ donc nécessairement, $a_n \leqslant \mathcal{A}$.
5. On peut supposer que, lorsque n tend vers l'infini, la suite (a_n) va tendre vers $\mathcal{A}$.

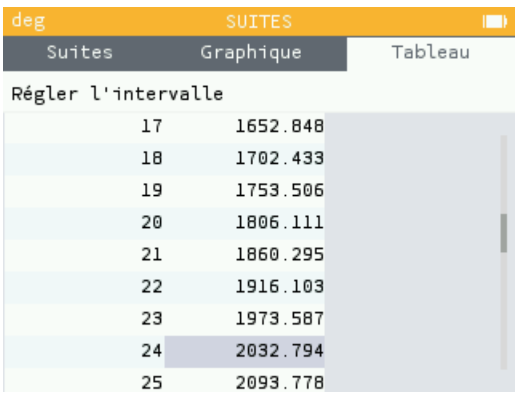
Bilan : On sait que la surface totale colorée ne peut pas dépasser $\mathcal{A}$ et on peut supposer qu'au bout d'un grand nombre d'étapes, on aura fini par colorier toute l'étoile. Cela justifie que la suite (a_n) admet une limite finie.

3.3 Activité C : Évolution d'une population de bactéries

Corrigé activité C :

Questions :

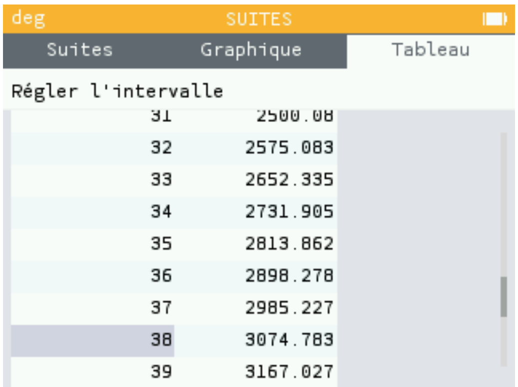
1. Augmenter de 3 % revient à multiplier par 1,03. $b_1 = b_0 \times 1,03 = 1000 \times 1,03 = 1030$
   $b_2 = b_1 \times 1,03 = 1030 \times 1,03 \approx 1061$
2. Pour tout entier naturel n, on a $b_{n+1} = b_n \times 1,03$.
3. (b_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1,03$ et de premier terme $b_0 = 1000$.
4. a. On calcule les termes de la suite (b_n) grâce à la calculatrice.



17	1652.848
18	1702.433
19	1753.506
20	1806.111
21	1860.295
22	1916.103
23	1973.587
24	2032.794
25	2093.778

On obtient qu'au bout de 24 jours la population de bactéries aura doublé.

b. De même, on obtient qu'au bout de 38 jours la population de bactéries aura dépassé les 3 000 individus.



5. a. $N \leftarrow 0$
   $B \leftarrow 1000$
   Tant que $B \leqslant S$:
   $\quad N \leftarrow N + 1$
   $\quad B \leftarrow B \times 1,03$
   Fin Tant que
   Afficher N

   b. Pour déterminer au bout de combien de jours il y aura plus de 5 000 bactéries, on remplace S par 5 000 dans l'algorithme.
   D'après la calculatrice, c'est au bout de 55 jours que la population de bactéries aura dépassé les 5 000 individus (on pourrait aussi programmer cet algorithme avec Python pour obtenir le résultat).

6. a. Le nombre d'individus de cette population semble être strictement croissant.

   b. Quelle que soit la valeur de M choisie, il semble qu'en attendant assez longtemps, le nombre de bactéries le dépasse.

Bilan : Quel que soit le nombre M choisi, le nombre de bactéries de cette population semble pouvoir le dépasser si on attend assez longtemps. Ainsi, on peut dire que la suite (b_n) a pour limite $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Cette suite ne peut pas être bornée.

3.4 Activité D : Une suite bien encadrée

Corrigé activité D :

Questions :

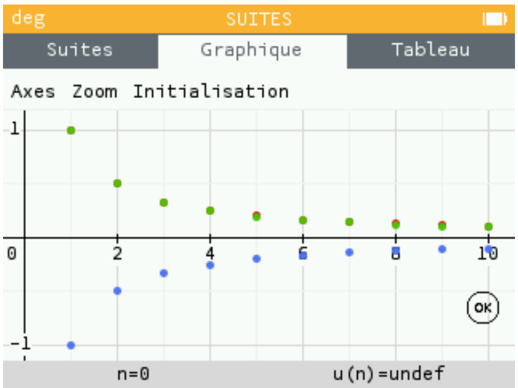
1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ donc la suite (u_n) est décroissante. De plus, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

   De même, la fonction $x \mapsto \dfrac{-1}{x}$ est croissante sur $]0;+\infty[$ donc la suite (v_n) est croissante. De plus, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

2. À l'aide de la calculatrice, on constate que la suite (w_n) n'est pas monotone.

3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$. D'où $\dfrac{-1}{n} \leqslant \dfrac{\cos(n)}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$, car n est strictement positif. Par conséquent, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n \leqslant w_n \leqslant u_n$.

4. On obtient le résultat ci-dessous. Les points verts représentent la suite (w_n), les points bleus la suite (u_n) et les points rouges (qui sont bien cachés), la suite (v_n).



5. La limite de la suite (w_n) semble être 0.

6. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ d'où $-3 \leqslant 3\sin(n) \leqslant 3$.

   On a alors $\dfrac{-3}{n} \leqslant \dfrac{3\sin(n)}{n} \leqslant \dfrac{3}{n}$ et $\dfrac{-3}{n} + 2 \leqslant \dfrac{3\sin(n)}{n} + 3 \leqslant \dfrac{3}{n} + 2$.

   Ainsi en posant, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $y_n = \dfrac{-3}{n} + 2$ et $x_n = \dfrac{3}{n} + 2$, on a $y_n \leqslant z_n \leqslant x_n$. Or, la suite (x_n) est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 2$ par opérations sur les limites. De même, la suite (y_n) est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 2$ par opérations sur les limites. Ainsi, on peut supposer que $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = 2$.

Bilan : On encadre la suite dont on cherche à déterminer la limite par deux autres suites ayant toutes deux la même limite. On conjecture ensuite que la limite de la suite encadrée est la même que celle des deux autres suites.

4 Auto-évaluation

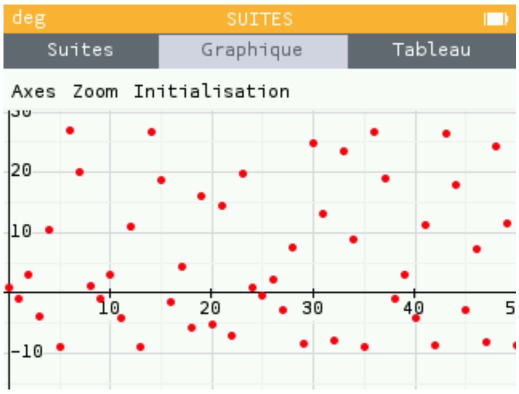
Corrigé exercice 8 :

Pour tout entier naturel n, on a $u_n = \dfrac{3n+2}{5+2n} = \dfrac{n\left(3+\dfrac{2}{n}\right)}{n\left(\dfrac{5}{n}+2\right)} = \dfrac{3+\dfrac{2}{n}}{\dfrac{5}{n}+2}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ d'où, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\dfrac{2}{n} = 3$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$ d'où, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n}+2 = 2$. Ainsi, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$.

$\boxed{\text{Réponse : b.}}$

Corrigé exercice 9 :

En représentant les premiers termes de la suite (v_n) sur la calculatrice, on remarque qu'elle n'est ni croissante, ni décroissante, ni convergente. Elle semble bornée entre -10 et 30.



$\boxed{\text{Réponse : a.}}$

Corrigé exercice 10 :

La suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$ est majorée par 4 et converge vers un réel ℓ. Pourtant, aucune information nous permet d'affirmer que $\ell = 4$, ni que (u_n) est croissante ou encore que (u_n) constante égale à 4 à partir d'un certain rang.

$\boxed{\text{Réponse : c.}}$

Corrigé exercice 11 :

- Si (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$ et (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = -n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = -\infty$ car, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{n^2}{-n} = -n$.
- Si (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n$ et (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = -n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = -1$ car, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{n}{-n} = -1$.

On ne peut donc pas conclure dans le cas général.

$\boxed{\text{Réponse : d.}}$

Corrigé exercice 12 :

À partir d'un certain rang, tous les termes d'une suite qui converge vers 1 sont contenus dans un intervalle ouvert contenant 1. Ainsi, la suite est bien bornée à partir d'un certain rang.
En particulier, en prenant comme intervalle $]0;1+\varepsilon[$ où ε est un réel positif, tous les termes de la suite sont positifs à partir d'un certain rang.
En revanche, cette suite n'est ni croissante ni majorée par 1.
Par exemple, la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + 1$ converge vers 1 mais elle n'est ni croissante, ni majorée par 1.

$\boxed{\text{Réponses : b. et c.}}$

Corrigé exercice 13 :

Considérons la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = (-1)^n$. Elle est bornée entre -1 et 1 mais n'est ni monotone, ni convergente.
En revanche, la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = \dfrac{1}{n}$ est bornée entre 0 et 1. De plus, elle est décroissante et convergente.
On ne peut donc pas conclure dans le cas général.

$\boxed{\text{Réponse : d.}}$

Corrigé exercice 14 :

Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

- $u_n = n^2$ et $v_n = n$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.
- $u_n = n$ et $v_n = n^2$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
- $u_n = n$ et $v_n = n$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

En revanche, on ne peut jamais avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = -\infty$.

$\boxed{\text{Réponses : a., b. et c.}}$

Corrigé exercice 15 :

a. C'est le théorème de comparaison.

b. C'est encore le théorème de comparaison.

c. Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par $u_n = 1$ et $v_n = n$. On a bien $u_n \leqslant v_n$ pour tout entier naturel n et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Pourtant, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

d. Considérons les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = -1 - \frac{1}{n}$, $v_n = 1$ et $w_n = 2 + \frac{1}{n}$. On a bien $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n < 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n > 0$. Pourtant, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

$\boxed{\text{Réponses : a. et b.}}$

Corrigé du problème 16 :

1. a. Pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 550$
$= 0,96u_n + 22 - 550$
$= 0,96u_n - 528$
$= 0,96\left(u_n - \frac{528}{0,96}\right)$
$= 0,96\,(u_n - 550)$
$= 0,96v_n$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 550 = -250$.

   b. Pour tout entier naturel n, on a $v_n = v_0 \times q^n = -250 \times 0,96^n$.

   c. D'où $u_n = 550 + v_n = 550 - 250 \times 0,96^n$.

2. Comme $-1 < 0,96 < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,96^n = 0$. D'où, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} -250 \times 0,96^n = 0$. Ainsi, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 550 - 250 \times 0,96^n = 550$.

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1 : Étude de la convergence des séries de Riemann

Méthode 1

1. Le programme complété est le suivant.

```python
def Somme(alpha) :
  S = 1
  for p in range(2,501) :
    S = S+1/(p**alpha)
    print(S)
```

2. a. Pour $\alpha = 1$, la suite (S_n) semble diverger vers $+\infty$.
   b. Pour $\alpha = 1,1$, la suite (S_n) semble converger.
   c. Pour $\alpha = 0,5$, la suite (S_n) semble diverger vers $+\infty$.
   d. Pour $\alpha = 2$, la suite (S_n) semble converger.
   e. Pour $\alpha = 0,8$, la suite (S_n) semble diverger vers $+\infty$.
   f. Pour $\alpha = 20$, la suite (S_n) semble converger.
   g. Pour $\alpha = 10$, la suite (S_n) semble converger.
   h. Pour $\alpha = 0,1$, la suite (S_n) semble diverger vers $+\infty$.

3. Il semble que la suite (S_n) converge lorsque $\alpha > 1$ et diverge vers $+\infty$ lorsque $\alpha \leqslant 1$.

Méthode 2

1. Il suffit d'entrer la valeur 4 dans la cellule A1.

fx 4

	A
1	4
2	

2. On rentre les valeurs dans la colonne C.

C
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

3. a. On a $S_1 = 1$.

   b. Voici la formule à entrer.

fx =D1+1/(C2^$A$1)

	A	B	C	D
1	4		1	1,0625 × 1
2			2	=D1+1/(C2^$A$1)
3			3	1,074845679

4. On obtient le résultat suivant :

	A	B	C	D
1	4		1	1
2			2	1,0625
3			3	1,074845679
4			4	1,078751929
5			5	1,080351929
6			6	1,081123534
7			7	1,081540027
8			8	1,081784168
9			9	1,081936583
10			10	1,082036583
11			11	1,082104885
12			12	1,08215311
13			13	1,082188123
14			14	1,082214154
15			15	1,082233907
16			16	1,082249166
17			17	1,082261139
18			18	1,082270665
19			19	1,082278338
20			20	1,082284588
21			21	1,08228973
22			22	1,082293999
23			23	1,082297572
24			24	1,082300586
25			25	1,082303146
26			26	1,082305335
27			27	1,082307216
28			28	1,082308843
29			29	1,082310257
30			30	1,082311492

5. a. Pour $\alpha = 1$, la suite (S_n) semble diverger vers $+\infty$.

   b. Pour $\alpha = 1,1$, la suite (S_n) semble converger.

   c. Pour $\alpha = 0,5$, la suite (S_n) semble diverger vers $+\infty$.

   d. Pour $\alpha = 2$, la suite (S_n) semble converger.

   e. Pour $\alpha = 0,8$, la suite (S_n) semble diverger vers $+\infty$.

   f. Pour $\alpha = 20$, la suite (S_n) semble converger.

g. Pour $\alpha = 10$, la suite (S_n) semble converger.

h. Pour $\alpha = 0,1$, la suite (S_n) semble diverger vers $+\infty$.

6. Il semble que la suite (S_n) converge lorsque $\alpha > 1$ et diverge vers $+\infty$ lorsque $\alpha \leqslant 1$.

Pour aller plus loin

1. Si α est un nombre négatif, alors $\dfrac{1}{k^\alpha} = k^{-\alpha}$ où $-\alpha$ est positif et la suite $\left(\dfrac{1}{k^\alpha}\right)$ est alors croissante. Ainsi, en ajoutant des valeurs de plus en plus grandes, il est impossible que la somme converge.

2. a. Pour tout entier $2 \leqslant k \leqslant n$, on a $0 \leqslant k^2 - 1 \leqslant k^2$. Or, comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, on a $\sqrt{k^2-1} \leqslant k$. Et comme la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{k^2-1}} \geqslant \dfrac{1}{k}$.

   b. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $v_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha = 1$. Or, on a vu précédemment que la suite $\left(\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}\right)$ semble diverger vers $+\infty$.

   c. Pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = 1 + v_n$ donc $u_n > v_n$. Par comparaison, on en déduit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

5.2 Corrigé du TP 2 : Approximation de π par la méthode d'Archimède

Question préliminaire

Le carré rouge est un carré de côté 1 (diamètre du cercle) donc $T_4 = 4$. Le carré bleu est un carré donc les diagonales valent 1. Ainsi, d'après le théorème de Pythagore, la longueur d'un côté du carré est $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et ainsi on a $S_4 = 2\sqrt{2}$.

Méthode 1

1. On utilise les valeurs de T_4 et S_4 calculées dans les questions préliminaires pour compléter le tableau (le tableau initial se trouve dans le dossier TICE).

	A	B	C
1	n	T	2,828427125
2	4	4	= 2*SQRT(2)

2. On utilise le fait que $T_8 = \dfrac{2S_4T_4}{S_4 + T_4}$.

	T	
4	3,313708499	2,8
8	=(2*C2*B2)/(C2+B2)	0

3. On utilise le fait que $S_8 = \sqrt{S_4T_8}$.

S
3,061467459
=SQRT(C2*B3)

4. On trouve une valeur approchée de π à 10^{-5} près, ce qui, pour l'époque d'Archimède, est tout à fait extraordinaire.

11	2048	3,141595118	3,141591422

Méthode 2

1. Les lignes 4 et 5 correspondent aux premiers termes des suites (T_{2^n}) et (S_{2^n}) calculés dans la question préliminaire.

```
T = 4
S = 2*sqrt(2)
```

2. On utilise le fait que $T_{2n} = \dfrac{2S_nT_n}{S_n+T_n}$ donc $T_{2^n} = \dfrac{2S_{2^{n-1}}T_{2^{n-1}}}{S_{2^{n-1}}+T_{2^{n-1}}}$. On a également $S_{2^n} = \sqrt{S_{2^{n-1}}T_{2^n}}$.

```python
from math import *

def archimede(n) :
    T = 4
    S = 2*sqrt(2)
    for k in range(n) :
        T = (2*S*T)//(S+T)
        S = sqrt(S*T)
    print("T =", T, "S =", S)
```

3. On doit saisir $n = 9$. On obtient alors l'encadrement suivant.

```
T= 3.1415926535897927 S = 3.1415926535897927
```

Pour aller plus loin

1. Pour tout entier $1 \leqslant k < n$, on note $A_k$le k-ième sommet du polygone bleu et O le centre du polygone.

   OA_kA_{k+1} est un triangle isocèle en O tel que $OA_k = OA_{k+1} = \dfrac{1}{2}$ et on a :

   $$\left(\overrightarrow{OA_k};\overrightarrow{OA_{k+1}}\right) = \frac{2\pi}{n}.$$

   Notons H le pied de la hauteur issue de O. OHA_k est un triangle rectangle en H tel que $OA_k = \dfrac{1}{2}$ et $\left(\overrightarrow{OA_k};\overrightarrow{OH}\right) = \dfrac{\pi}{n}$. On a $\sin\left(\overrightarrow{OA_k};\overrightarrow{OH}\right) = \dfrac{HA_k}{OA_k}$ d'où $\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) = \dfrac{HA_k}{\frac{1}{2}}$ et alors $HA_k = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$. On en déduit alors que $A_kA_{k+1} = \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

   Pour tout entier $1 \leqslant k < n$, on note B_k le k-ième sommet du polygone rouge et O le centre du polygone.

   OB_kB_{k+1} est un triangle isocèle en O tel que $\left(\overrightarrow{OB_k};\overrightarrow{OB_{k+1}}\right) = \dfrac{2\pi}{n}$.

   Notons P le pied de la hauteur issue de O. OPB_k est un triangle rectangle en P tel que $OP = \dfrac{1}{2}$ et $\left(\overrightarrow{OB_k};\overrightarrow{OP}\right) = \dfrac{\pi}{n}$. On a $\tan\left(\overrightarrow{OB_k};\overrightarrow{OP}\right) = \dfrac{PB_k}{OP}$ d'où $\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right) = \dfrac{PB_k}{\frac{1}{2}}$ et alors $PB_k = \dfrac{1}{2}\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$. On en déduit alors que $B_kB_{k+1} = \tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$. Enfin, $A_1A_2\ldots A_n$ est un polygone régulier à n côtés de longueur $\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ d'où $S_n = n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$. Et $B_1B_2\ldots B_n$ est un polygone régulier à n côtés de longueur $\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ d'où $T_n = n\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

2. On a $\dfrac{2S_nT_n}{S_n+T_n} = \dfrac{2\times n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\times n\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)+n\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}$

$= \dfrac{2n\times\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\times\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)+\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}$.

Or, $\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}$.

D'où $\dfrac{2S_nT_n}{S_n+T_n} = \dfrac{2n\times\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\times\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)+\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}}$

$= \dfrac{2n\times\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\left(\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)+1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}\right)} = \dfrac{2n\times\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}}{\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)+1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}} = \dfrac{2n\times\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)+1}$

$= 2n\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$, car $\cos(\theta)+1 = 2\cos^2(\dfrac{\theta}{2})$.

3. a. On a $S_nT_{2n} = n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\times 2n\tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) = 2n^2\times 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$ $= 4n^2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$. D'où $\sqrt{S_nT_{2n}} = \sqrt{4n^2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)} = 2n\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$. Or, puisque $\sin(\theta) = 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, on a $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\sin(\theta)}{2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$. On en déduit alors que $\sqrt{S_nT_{2n}} = n\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$.

b. On a $\dfrac{2S_nT_n}{S_n+T_n} = 2n\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$

$= 2n\dfrac{2\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$, d'après la formule de l'énoncé

$$= 2n\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)} = 2n\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) = T_{2n}.$$

De plus, on a vu que $\sqrt{S_nT_{2n}} = 2n\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$ d'où $\sqrt{S_nT_{2n}} = S_{2n}$.

6 Travailler les automatismes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 17 :

Cette suite semble diverger vers $-\infty$.

Corrigé exercice 18 :

Il semble que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3$.

Corrigé exercice 19 :

La suite semble être majorée par 6.

Corrigé exercice 20 :

Cette suite semble converger vers 4.

6.2 Exercices

Corrigé exercice 21 :

1. a. On a $w_n \in]1,99;2,01[\Leftrightarrow 1,99 < 2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2,01$

   $\Leftrightarrow -0,01 < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 0,01$

   $\Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right| < 0,01$

   $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 0,01$ car $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0$

   $\Leftrightarrow \sqrt{n} > \dfrac{1}{0,01}$

   $\Leftrightarrow n > 10\,000$

   Ainsi, en prenant $n_0 = 10\,001$, on a bien $w_n \in]1,99;2,01[$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.

   b. On a $|w_n - 2| \leqslant 10^{-4} \Leftrightarrow \left|2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\right| \leqslant 10^{-4}$

   $\Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right| \leqslant 10^{-4}$

   $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 10^{-4}$ car $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0$

   $\Leftrightarrow n \geqslant 10^8$

   Ainsi, en prenant $n_1 = 10^8$, on a bien $|w_n - 2| \leqslant 10^{-4}$ pour tout entier $n \geqslant n_1$.

   c. On a $w_n \in]2-\varepsilon;2+\varepsilon[\Leftrightarrow 2 - \varepsilon < 2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2 + \varepsilon$

   $\Leftrightarrow -\varepsilon < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ car $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{n} > \dfrac{1}{\varepsilon}$
$\Leftrightarrow n > \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^2$
Ainsi, en posant n_2 comme étant le plus petit entier strictement supérieur à $\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^2$, on a bien $w_n \in]2-\varepsilon ; 2+\varepsilon[$ pour tout entier $n \geqslant n_2$.

2. On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$.

Corrigé exercice 22 :

1. a. On a $u_n \geqslant 100 \Leftrightarrow 3n-4 \geqslant 100 \Leftrightarrow 3n \geqslant 104 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{104}{3}$.
   Or, comme $\dfrac{104}{3} \approx 34,6$, en prenant $n_0 = 35$, on a bien $u_n \geqslant 100$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.
   b. On a $u_n \geqslant 1000 \Leftrightarrow 3n-4 \geqslant 1000 \Leftrightarrow 3n \geqslant 1004 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{1004}{3}$.
   Or, comme $\dfrac{1004}{3} \approx 334,6$, en prenant $n_1 = 335$, on a bien $u_n \geqslant 1000$ pour tout entier $n \geqslant n_1$.
   c. On a $u_n \geqslant A \Leftrightarrow 3n-4 \geqslant A \Leftrightarrow 3n \geqslant A+4 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{A+4}{3}$.
   Ainsi, en prenant comme valeur de n_2 le plus petit entier supérieur ou égal à $\dfrac{A+4}{3}$, on a bien $u_n \geqslant A$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.
2. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Corrigé exercice 23 :

1. a. On a $v_n \leqslant -720 \Leftrightarrow -5n^2 \leqslant -720 \Leftrightarrow n^2 \geqslant 144 \Leftrightarrow n \geqslant 12$ car n est un entier naturel.
   Ainsi, en prenant $n_0 = 12$, on a bien $v_n \leqslant -720$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.
   b. On a $v_n \leqslant -3125 \Leftrightarrow -5n^2 \leqslant -3125 \Leftrightarrow n^2 \geqslant 625 \Leftrightarrow n \geqslant 25$ car n est un entier naturel.
   Ainsi, en prenant $n_1 = 25$, on a bien $v_n \leqslant -3125$ pour tout entier $n \geqslant n_1$.
   c. On a $v_n \leqslant A \Leftrightarrow -5n^2 \leqslant A \Leftrightarrow n^2 \geqslant \dfrac{-A}{5} \Leftrightarrow n \geqslant \sqrt{\dfrac{-A}{5}}$ car n est un entier naturel.
   Ainsi, en prenant comme valeur de n_2 le plus petit entier supérieur ou égal à $\sqrt{\dfrac{-A}{5}}$, on a bien $v_n \leqslant A$ pour tout entier $n \geqslant n_2$.
2. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Corrigé exercice 24 :

1. $u_n \leqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{2n+3}{n+2} \leqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{2n+3-2n-4}{n+2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{n+2} \leqslant 0$. Or, pour tout entier naturel n, on a $n+2 \geqslant 0$ donc $\dfrac{-1}{n+2} \leqslant 0$. Ainsi, la suite (u_n) est bien majorée par 2.

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \Leftrightarrow n^2-1 \leqslant n^2+(-1)^n \leqslant n^2+1$. Par ailleurs, $\dfrac{1}{n+1} > 0$ donc $\dfrac{n^2-1}{n+1} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{n^2+1}{n+1}$. Or, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $n^2 \geqslant 1$ d'où $n^2-1 \geqslant 0$ et donc $0 \leqslant v_n$.

3. Pour tout entier naturel n, on a $n \leqslant n+1$. Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$, on a $\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n+1}$. D'où $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \geqslant 0$. D'autre part, $w_n = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Or, $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \geqslant 1$ d'où $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant 1$. Ainsi la suite (w_n) est bien bornée entre 0 et 1.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la proposition : « $-3 \leqslant t_n \leqslant -1$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : $t_0 = -\sqrt{2}$ et $-3 \leqslant -\sqrt{2} \leqslant -1$ donc P_0 est vraie.

   Hérédité : On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $-3 \leqslant t_k \leqslant -1$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $-3 \leqslant t_{k+1} \leqslant -1$.

   Par hypothèse de récurrence, on a $-3 \leqslant t_k \leqslant -1$.

   D'où $-\dfrac{3}{4} \leqslant \dfrac{1}{4}t_k \leqslant -\dfrac{1}{4}$ donc $-\dfrac{11}{4} \leqslant \dfrac{1}{4}t_k - 2 \leqslant -\dfrac{9}{4} \Leftrightarrow -3 \leqslant t_{k+1} \leqslant -1$.

   Ainsi, P_0 est vraie et, pour tout entier k, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie donc $-3 \leqslant t_n \leqslant -1$.

Corrigé exercice 25 :

1. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$. D'où, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}+n^2 = +\infty$.

2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^4} = 0$. D'où, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\dfrac{1}{n^4} = 3$.

3. Comme $\dfrac{4}{3} > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^n = +\infty$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$. D'où, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^n + \dfrac{1}{n^2} = +\infty$.

4. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$. D'où, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} - n^3 = -\infty$.

5. Comme $\pi > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \pi^n = +\infty$. De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.

   D'où, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} n + \pi^n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -(n + \pi^n) = -\infty$.

6. Comme $-1 < \dfrac{7}{10} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{7}{10}\right)^n = 0$. De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} n^5 = +\infty$.

   D'où, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} -4 + \left(\dfrac{7}{10}\right)^n + n^5 = +\infty$.

Corrigé exercice 26 :

1. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -n = -\infty$. On obtient donc une forme indéterminée.

   Mais, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $r_n = n^2 - n = n^2\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$. Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. D'où par somme, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$. De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$. Ainsi, par produit, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = +\infty$.

2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $s_n = -n + \sqrt{n} = -n\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

   Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$. D'où par somme, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1$.
   De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} -n = -\infty$. Ainsi, par produit, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = -\infty$.

3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $t_n = -(-\sqrt{n} + n^7) = -n^7\left(-\dfrac{1}{n^6\sqrt{n}} + 1\right)$.

   Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^6 = +\infty$. D'où, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^6\sqrt{n} = +\infty$. On en déduit alors, par quotient, qu'on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^6\sqrt{n}} = 0$. Et donc, par somme, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n^6\sqrt{n}} + 1 = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = \lim\limits_{n \to +\infty} -n^7 = -\infty$.

4. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $u_n = -(n^6 - n^3) = -n^6 + n^3 = -n^6\left(1 - \dfrac{1}{n^3}\right)$.

   Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n^3} = 0$. D'où, par somme, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{n^3} = 1$.
   On a $\lim\limits_{n \to +\infty} -n^6 = -\infty$. Ainsi, par produit, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

5. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $v_n = n^5 - n^3 + n = n^5\left(1 - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^4}\right)$.

   Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n^4} = 0$. D'où, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^4} = 1$.
   On a $\lim\limits_{n \to +\infty} n^5 = +\infty$. Ainsi, par produit, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

6. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $w_n = n^6 - n^4 + n^2 - n = n^6\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^5}\right)$.

   Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n^4} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n^5} = 0$. D'où, par somme, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^5} = 1$. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} n^6 = +\infty$. Ainsi, par produit, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$.

Corrigé exercice 27 :

1. Par somme, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} n^5 + 4 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 3 = +\infty$.

   D'où, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^5 + 4)(n - 3) = +\infty$.

2. Comme $-1 < \frac{185}{192} < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{185}{192}\right)^n = 0$.

   D'où, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} 5 \times \left(\frac{185}{192}\right)^n = 0$.

3. Par somme, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 8n - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 + \frac{1}{\sqrt{n}} = 3$.

   D'où, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} (8n - 2)\left(3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$.

4. Comme $\frac{144}{121} > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{144}{121}\right)^n = +\infty$.

   D'où, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} -2 \times \left(\frac{144}{121}\right)^n = -\infty$.

5. Par somme, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 6 - n^4 = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} + 7 = 7$.

   D'où, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} (6 - n^4)\left(\frac{1}{n^3} + 7\right) = -\infty$.

6. Par somme, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 4 - n^7 = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^9 + 1 = +\infty$.

   D'où, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} (4 - n^7)(n^9 + 1) = -\infty$.

Corrigé exercice 28 :

1. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n + 4 = +\infty$.

   On ne peut pas conclure directement.

   Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $\frac{1}{n^2}(2n + 4) = \frac{2n + 4}{n^2} = \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}$.

   Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{4}{n^2} = 0$. D'où, par somme, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2} = 0$.

2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $\frac{1}{n}(2n+4) = \frac{2n+4}{n} = 2 + \frac{4}{n}$.

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$. D'où, par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \frac{4}{n} = 2$.

3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $\frac{1}{n^4}(n^3+2n^2) = \frac{n^3+2n^2}{n^4} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}$.

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2} = 0$. D'où, par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} = 0$.

4. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $\frac{1}{\sqrt{n}}(-n-\sqrt{n}) = \frac{-n-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = -\sqrt{n} - 1$.

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty$. D'où, par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} - 1 = -\infty$.

Corrigé exercice 29 :

1. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^5} = 0$ et par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} -8 - n^6 = -\infty$.
   Donc on obtient une forme indéterminée. Mais, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $\frac{1}{n^5}(-8-n^6) = \frac{-8-n^6}{n^5} = -\frac{8}{n^5} - n$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{8}{n^5} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$.
   D'où, par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{8}{n^5} - n = -\infty$.

2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $\frac{1}{n}(-n^3+3) = \frac{-n^3+3}{n} = -n^2 + \frac{3}{n}$.

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$. D'où, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 + \frac{3}{n} = -\infty$.

3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $\frac{1}{\sqrt{n}}(2n-3) = \frac{2n-3}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} - \frac{3}{\sqrt{n}}$.

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{3}{\sqrt{n}} = 0$. D'où, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{n} - \frac{3}{\sqrt{n}} = +\infty$.

4. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $\frac{1}{n^3}(1-n^3) = \frac{1-n^3}{n^3} = \frac{1}{n^3} - 1$.

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$. D'où, par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} - 1 = -1$.

Corrigé exercice 30 :

1. Par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 4 = +\infty$. D'où, par quotient, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2-4} = 0$.

2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ et, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 + \frac{1}{n} = 4$. D'où, par quotient, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^3}{4+\frac{1}{n}} = +\infty$.

3. Par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 4-\dfrac{1}{\sqrt{n}}=4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3}-6=-6$.

   D'où, par quotient, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n^3}-6}=\dfrac{4}{-6}=-\dfrac{2}{3}$.

4. Comme $\dfrac{4}{3}>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{3}\right)^n=+\infty$. D'où, par quotient, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{4}{3}\right)^n}=0$.

5. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} -n=-\infty$ et comme $-1<\dfrac{3}{4}<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n=0$.

   D'où, par quotient, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-n}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}=-\infty$.

6. Comme $-1<\dfrac{5}{7}<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5}{7}\right)^n=0$. Par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}-9=-9$.

   D'où, par quotient, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(\dfrac{5}{7}\right)^n}{\dfrac{1}{n^2}-9}=0$.

Corrigé exercice 31 :

1. Par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2+4=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+2=+\infty$. On ne peut pas conclure directement. Mais, pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{3n^2+4}{2n+2}=\dfrac{n^2\left(3+\dfrac{4}{n^2}\right)}{n\left(2+\dfrac{2}{n}\right)}=\dfrac{n\left(3+\dfrac{4}{n^2}\right)}{2+\dfrac{2}{n}}$. Or, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\dfrac{4}{n^2}=3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{2}{n}=2$. Ainsi, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(3+\dfrac{4}{n^2}\right)=+\infty$. Donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\left(3+\dfrac{4}{n^2}\right)}{2+\dfrac{2}{n}}=+\infty$.

2. Pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{\left(\dfrac{7}{5}\right)^n}{\left(\dfrac{4}{3}\right)^n}=\left(\dfrac{\dfrac{7}{5}}{\dfrac{4}{3}}\right)^n=\left(\dfrac{21}{20}\right)^n$.

   Or, comme $\dfrac{21}{20}>1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{21}{20}\right)^n=+\infty$.

3. Pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{2n-4}{7-3n} = \dfrac{n\left(2-\dfrac{4}{n}\right)}{n\left(\dfrac{7}{n}-3\right)} = \dfrac{2-\dfrac{4}{n}}{\dfrac{7}{n}-3}$.

   Or, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-\dfrac{4}{n} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{n}-3 = -3$.

   Donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2-\dfrac{4}{n}}{\dfrac{7}{n}-3} = \dfrac{2}{-3} = -\dfrac{2}{3}$.

4. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{12n^2}{5n^7} = \dfrac{12}{5n^5}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n^5 = +\infty$.

   Donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{12}{5n^5} = 0$.

5. Pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n} = \left(\dfrac{\dfrac{3}{5}}{\dfrac{2}{3}}\right)^n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

   Or, comme $-1 < \dfrac{2}{5} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$.

6. Pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{n^2-1}{n+1} = \dfrac{(n+1)(n-1)}{n+1} = n-1$.

   Donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$.

Corrigé exercice 32 :

1. Par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 4-5n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2+1 = +\infty$. On ne peut pas conclure directement. Pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{4-5n}{2n^2+1} = \dfrac{n\left(\dfrac{4}{n}-5\right)}{n^2\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{\dfrac{4}{n}-5}{n\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)}$.

   Or, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n}-5 = -5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{1}{n^2} = 2$. Ainsi, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right) = +\infty$. Donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{4}{n}-5}{n\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)} = 0$.

2. Pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{\left(\dfrac{6}{19}\right)^n}{\left(\dfrac{4}{11}\right)^n} = \left(\dfrac{\dfrac{6}{19}}{\dfrac{4}{11}}\right)^n = \left(\dfrac{33}{38}\right)^n$.

   Or, comme $-1 < \dfrac{33}{38} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{33}{38}\right)^n = 0$.

3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{-6n^2+3}{-n-2n^2} = \dfrac{n^2\left(-6+\dfrac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(-\dfrac{1}{n}-2\right)} = \dfrac{-6+\dfrac{3}{n^2}}{-\dfrac{1}{n}-2}$.

   Or, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} -6+\dfrac{3}{n^2} = -6$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n}-2 = -2$.

   Donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-6+\dfrac{3}{n^2}}{-\dfrac{1}{n}-2} = \dfrac{-6}{-2} = 3$.

4. Pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{\left(\dfrac{18}{5}\right)^n}{\left(\dfrac{16}{11}\right)^n} = \left(\dfrac{\dfrac{18}{5}}{\dfrac{16}{11}}\right)^n = \left(\dfrac{99}{40}\right)^n$.

   Or, comme $\dfrac{99}{40} > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{99}{40}\right)^n = +\infty$.

5. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{n^2+n+1}{n^3} = \dfrac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^3} = \dfrac{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{n}$.

   Or, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

   Donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{n} = 0$.

6. Pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{n^2-4}{n+2} = \dfrac{(n+2)(n-2)}{n+2} = n-2$.

   Donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} n-2 = +\infty$.

Corrigé exercice 33 :

1. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+1 = +\infty$ donc, par théorème de comparaison, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n-4 = -\infty$ donc, par théorème de comparaison, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.
3. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} -1+2n = +\infty$ donc par théorème de comparaison, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

Corrigé exercice 34 :

Pour tout entier naturel n, on a $n^3 \leqslant n^3+1$. Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$, on en déduit que $\sqrt{n^3} \leqslant \sqrt{n^3+1}$ c'est-à-dire $n\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n^3+1}$.
Or, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n} = +\infty$.
Ainsi, par théorème de comparaison, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^3+1} = +\infty$.

Corrigé exercice 35 :

1. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On note P_n la proposition : « $t_n \leqslant -n^2$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : Pour $n = 2$.

   On a $t_0 = 5$, $t_1 = t_0 - 5 \times 0 - 4 = 1$ et $t_2 = t_1 - 5 \times 1 - 4 = -8$.

   On a $t_2 = -8$ et $-2^2 = -4$ donc $t_2 \leqslant -2^2$. On en déduit que P_2 est vraie.

   Hérédité : On considère un entier naturel $k \geqslant 2$ quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $t_k \leqslant -k^2$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $t_{k+1} \leqslant -(k+1)^2$.

   Par hypothèse de récurrence, on a $t_k \leqslant -k^2$.

   D'où $t_k - 5k - 4 \leqslant -k^2 - 5k - 4$.

   Or, $-(k+1)^2 = -(k^2+2k+1) = -k^2 - 2k - 1$ donc $-k^2 - 5k - 4 \leqslant -(k+1)^2$.

   Donc $t_{k+1} \leqslant -(k+1)^2$.

   Ainsi, P_2 est vraie et, pour tout entier $k \geqslant 2$, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 2$, P_n est vraie donc $t_n \leqslant -n^2$.

2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$ donc, par théorème de comparaison, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = -\infty$.

Corrigé exercice 36 :

1. Pour tout entier naturel n, on a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.

   D'où $4 \leqslant 5 + (-1)^n \leqslant 6$ et donc $4 \times 0,59^n \leqslant u_n \leqslant 6 \times 0,59^n$.

2. Comme $-1 < 0,59 < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,59^n = 0$.

   D'où, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 \times 0,59^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 6 \times 0,59^n = 0$.

   Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Corrigé exercice 37 :

1. Pour tout entier naturel n non nul, on a $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$.

   D'où $\dfrac{-1}{n^3} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^3}$.

2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n^3} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$.

   Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Corrigé exercice 38 :

$u_n = 4 + \dfrac{1}{n}$
$v_n = 4 - \dfrac{1}{n^2}$
$w_n = \dfrac{4n+2}{n-5}$
$r_n = \dfrac{2n+3}{n-1} \times \dfrac{7+2n^2}{n^2-4}$
$s_n = 3 \times 0{,}52^n + 4$

Corrigé exercice 39 :

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies pour tout entier naturel n par $u_n = -5 - \dfrac{1}{n^2}$, $v_n = -5 + \dfrac{1}{n}$ et $w_n = -5 + \dfrac{1}{n^3}$. Déterminer la limite de la suite (w_n).
Pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -5$.
D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -5$.

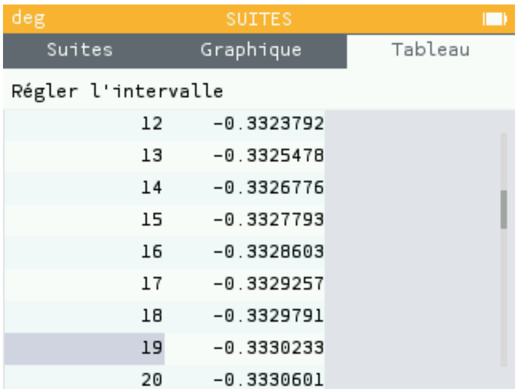
7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 40 :

1. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0$.
2. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = 0$.
3. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$.
4. Comme $-1 < \dfrac{7}{9} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
5. Comme $-1 < \dfrac{17}{21} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.
6. Comme $n^{-7} = \dfrac{1}{n^7}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

Corrigé exercice 41 :

On calcule les termes de la suite grâce à la calculatrice.

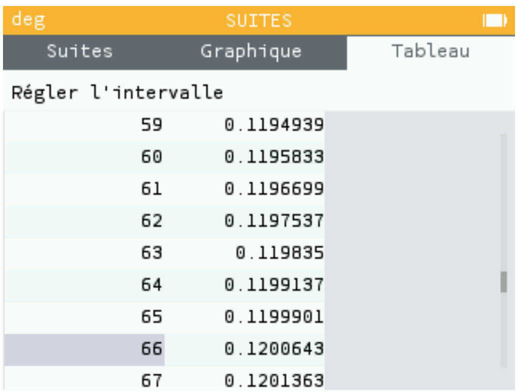


12	-0.3323792
13	-0.3325478
14	-0.3326776
15	-0.3327793
16	-0.3328603
17	-0.3329257
18	-0.3329791
19	-0.3330233
20	-0.3330601

En prenant $n_0 = 19$, on a bien $\dfrac{-2n^4 + 3n\sqrt{n} - 6}{6n^4} \in]-0,334; -0,333[$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Corrigé exercice 42 :

On calcule les termes de la suite grâce à la calculatrice.



59	0.1194939
60	0.1195833
61	0.1196699
62	0.1197537
63	0.119835
64	0.1199137
65	0.1199901
66	0.1200643
67	0.1201363

En prenant $n_0 = 66$, on a bien $\dfrac{3n^2 - 8n + 12}{24n^2} \in]0,12; 0,13[$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Corrigé exercice 43 :

1. La suite (u_n) semble converger vers 4.
2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $4 - \dfrac{2}{n^2} = \dfrac{4n^2 - 2}{n^2} = u_n$.
3. Soit $\varepsilon > 0$ un réel.

   $u_n \in]4 - \varepsilon; 4 + \varepsilon[\Leftrightarrow 4 - \varepsilon < 4 - \dfrac{2}{n^2} < 4 + \varepsilon$

   $\Leftrightarrow -\varepsilon < -\dfrac{2}{n^2} < \varepsilon$

   $\Leftrightarrow \left|-\dfrac{2}{n^2}\right| < \varepsilon$

   $\Leftrightarrow 0 < \dfrac{2}{n^2} < \varepsilon$

   $\Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$

   $\Leftrightarrow n^2 > \dfrac{2}{\varepsilon}$

   $\Leftrightarrow n > \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$

   Ainsi, en prenant comme valeur de n_0 le plus petit entier supérieur à $\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$, on a bien $u_n \in]4 - \varepsilon; 4 + \varepsilon[$ pour tout entier $n \geqslant n_0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$.

Corrigé exercice 44 :

1. Pour tout entier naturel n, on a $-3 + \dfrac{7}{2n+3} = \dfrac{-3(2n+3)+7}{2n+3}$

   $= \dfrac{-6n - 9 + 7}{2n+3}$

   $= \dfrac{-6n - 2}{2n+3}$

   $= v_n$.
2. Soit $\varepsilon > 0$ un réel.

   $v_n \in]-3 - \varepsilon; -3 + \varepsilon[\Leftrightarrow -3 - \varepsilon < -3 + \dfrac{7}{2n+3} < -3 + \varepsilon$

   $\Leftrightarrow -\varepsilon < \dfrac{7}{2n+3} < \varepsilon$

   $\Leftrightarrow \left|\dfrac{7}{2n+3}\right| < \varepsilon$

   $\Leftrightarrow \dfrac{7}{2n+3} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2n+3} < \dfrac{\varepsilon}{7}$

$\Leftrightarrow 2n+3 > \dfrac{7}{\varepsilon}$

$\Leftrightarrow 2n > \dfrac{7}{\varepsilon} - 3$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{\dfrac{7}{\varepsilon} - 3}{2}$

Ainsi, en prenant comme valeur de n_0 le plus petit entier supérieur à $\dfrac{\dfrac{7}{\varepsilon} - 3}{2}$, on a bien $v_n \in]-3-\varepsilon; -3+\varepsilon[$ pour tout $n \geqslant n_0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -3$.

Corrigé exercice 45 :

1. a. L'appel fonction(0,1) renvoie 39.
   b. L'appel fonction(0,001) renvoie 499 481.
2. L'appel fonction(e) renvoie le plus petit entier N tel que $|u_N - 3| < e$.
3. La suite (u_n) semble converger vers 3.

Corrigé exercice 46 :

1. a. L'appel fonction(0,001) renvoie 11.
   b. L'appel fonction(0,00001) renvoie 18.
2. L'appel fonction(e) renvoie le plus petit entier N tel que $|w_N - 1| < e$.
3. La suite (w_n) semble converger vers 1.

Corrigé exercice 47 :

1. Cette affirmation est fausse. Prenons comme contre-exemple (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$. Cette suite est bien bornée entre -1 et 1 mais ne converge pas.
2. Cette affirmation est vraie. Supposons par l'absurde que la suite (v_n) converge vers ℓ et n'est pas bornée. Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Il n'existe alors aucun entier n_0 tel que $v_n \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$ pour tout $n \geqslant n_0$, car cette suite n'est pas bornée, ce qui contredit le fait que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.
3. Cette affirmation est fausse. Prenons comme contre-exemple (w_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $w_n = -\dfrac{1}{n}$. Cette suite est croissante et majorée par 10 mais elle ne converge pas vers 10.

Corrigé exercice 48 :

1. a. La formule saisie dans la cellule B3 est = 1/3*B2+2.
   b. La suite (t_n) semble être décroissante.
   c. La suite (t_n) semble converger vers 3.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la proposition : « $0 < t_{n+1} < t_n$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$.

   $t_0 = 5$ et $t_1 = \dfrac{1}{3}t_0 + 2 = \dfrac{11}{3}$ donc $0 < t_1 < t_0$. On en déduit que P_0 est vraie.

   Hérédité : On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $0 < t_{k+1} < t_k$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $0 < t_{k+2} < t_{k+1}$.

   Par hypothèse de récurrence, on a $0 < t_{k+1} < t_k$.

   D'où $0 < \dfrac{1}{3}t_{k+1} < \dfrac{1}{3}t_k$. Et donc $2 < \dfrac{1}{3}t_{k+1} + 2 < \dfrac{1}{3}t_k + 2$ c'est-à-dire $0 < t_{k+2} < t_{k+1}$.

   Ainsi, P_0 est vraie et, pour tout entier k, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie donc $0 < t_{n+1} < t_n$.

3. La suite (t_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers un réel ℓ.

4. On a $\ell = \dfrac{1}{3}\ell + 2 \Leftrightarrow \ell - \dfrac{1}{3}\ell = 2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}\ell = 2 \Leftrightarrow \ell = 3$.

Corrigé exercice 49 :

1. a. La formule saisie dans la cellule B3 est = B2/(RACINE(B2ˆ2+1)).
   b. La suite (r_n) semble être décroissante.
   c. La suite (r_n) semble converger vers 0.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la proposition : « $0 < r_n \leqslant 1$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$. On a $r_0 = 1$ donc $0 < r_0 \leqslant 1$. On en déduit que P_0 est vraie.

   Hérédité : On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $0 < r_k \leqslant 1$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $0 < r_{k+1} \leqslant 1$.

   Par hypothèse de récurrence, on a $0 < r_k \leqslant 1$. Comme la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on a $0^2 + 1 < r_k^2 + 1 \leqslant 1^2 + 1 \Leftrightarrow 1 < r_k^2 + 1 \leqslant 2$.

   De plus, la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, d'où $\sqrt{1} < \sqrt{r_k^2 + 1} \leqslant \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{r_k^2 + 1} \leqslant \sqrt{2}$.

   Comme la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$, on a alors $1 > \dfrac{1}{\sqrt{r_k^2 + 1}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$.

Enfin, par hypothèse de récurrence, on a $r_k > 0$ d'où $r_k > \dfrac{r_k}{\sqrt{r_k^2+1}} > 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant r_k > r_{k+1} > 0$, par hypothèse de récurrence.

Ainsi, P_0 est vraie et, pour tout entier k, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie donc $0 < r_n \leqslant 1$.

3. D'après la question précédente, pour tout entier naturel n on a $r_{n+1} < r_n$ donc la suite (r_n) est décroissante.

4. Comme la suite (r_n) est décroissante et minorée, alors elle converge.

5. $\ell = \dfrac{\ell}{\sqrt{\ell^2+1}} \Leftrightarrow \ell(\sqrt{\ell^2+1}-1) = 0$

   $\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\sqrt{\ell^2+1}-1=0$

   $\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell^2+1=1$

   $\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 0$

   Donc la suite (r_n) converge vers 0.

Corrigé exercice 50 :

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k^3} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^3} = \dfrac{1}{(n+1)^3}$.

   Or $\dfrac{1}{(n+1)^3} > 0$, on en déduit que la suite (u_n) est croissante.

2. a. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

   D'où, $-\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{(n+1)^3} \leqslant -\dfrac{1}{n+1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \geqslant \dfrac{1}{(n+1)^3}$

   $\Leftrightarrow \dfrac{1}{n(n+1)} \geqslant \dfrac{1}{(n+1)^3}$

   Or, pour tout entier $n \geqslant 1$, $n(n+1) \leqslant (n+1)^2 \leqslant (n+1)^3$.

   D'où $\dfrac{1}{n(n+1)} \geqslant \dfrac{1}{(n+1)^2} \geqslant \dfrac{1}{(n+1)^3}$.

   Ainsi, on a bien $-\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{(n+1)^3} \leqslant -\dfrac{1}{n+1}$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P_n la proposition : « $u_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Initialisation : Pour $n = 1$.

   $u_1 = \dfrac{1}{1^3} = 1$ et $2 - \dfrac{1}{1} = 1$ donc $u_1 \leqslant 2 - \dfrac{1}{1}$. On en déduit que P_1 est vraie.

   Hérédité : On considère un entier naturel $k \geqslant 1$ quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $u_k \leqslant 2 - \dfrac{1}{k}$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $u_{k+1} \leqslant 2 - \dfrac{1}{k+1}$.

Par hypothèse de récurrence, on a $u_k \leqslant 2 - \frac{1}{k} \Leftrightarrow u_k + \frac{1}{(k+1)^3} \leqslant 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^3}$.

Or, d'après la question 2.a., $2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^3} \leqslant 2 - \frac{1}{k+1}$.

D'où $u_{k+1} \leqslant 2 - \frac{1}{k+1}$.

Ainsi, P_1 est vraie et, pour un entier $k \geqslant 1$, P_k est vraie, donc P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie donc $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$. De plus, la suite (v_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par $2 - \frac{1}{n}$ est strictement croissante et de limite 2 lorsque n tend vers $+\infty$. Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $(u_n) \leqslant v_n \leqslant 2$. Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée par 2 donc elle converge vers un réel ℓ.

Corrigé exercice 51 :

1. En 2015, cette personne aura $2000 \times 1,03 + 150 = 2210$ € sur son compte épargne.
   En 2016, elle aura $2210 \times 1,03 + 150 = 2426,3$ € sur son compte épargne.
2. D'une année à l'autre, le solde disponible sur le compte épargne augmente de 3 % grâce aux intérêts. Il est donc multiplié par 1,03. De plus, chaque année la personne dépose 150 € sur son compte épargne, on ajoute donc 150 au solde disponible. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1,03u_n + 150$.
3. Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = u_{n+1} + 5000$
   $= 1,03u_n + 150 + 5000$
   $= 1,03u_n + 5150$
   $= 1,03\left(u_n + \frac{5150}{1,03}\right)$
   $= 1,03(u_n + 5000)$
   $= 1,03v_n$.
   Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,03$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 5000 = 7000$.
4. Pour tout entier naturel n, on a $v_n = v_0 \times q^n = 7000 \times 1,03^n$.
   D'où $u_n = v_n - 5000 = 7000 \times 1,03^n - 5000$.
5. Comme $1,03 > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,03^n = +\infty$. D'où, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 7000 \times 1,03^n = +\infty$. Ainsi, par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 7000 \times 1,03^n - 5000 = +\infty$.
6. a. L'appel programme(4000) renvoie 9.
   b. Au bout de 9 ans, le solde disponible sur le compte épargne dépassera les 4000 €.

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 52 :

1. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = +\infty$.
2. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n^5 = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = -\infty$.
3. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = +\infty$.
4. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
5. Comme $\dfrac{16}{9} > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
6. Comme $\dfrac{4}{3} > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$.

Corrigé exercice 53 :

On obtient le tableau de valeurs suivant à la calculatrice.

deg SUITES

Suites Graphique Tableau

Régler l'intervalle

23	-226
24	-166
25	-100
26	-28
27	50
28	134
29	224
30	320

En prenant $n_0 = 28$, on a $3n^2 - 81n + 50 \geqslant 100$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Corrigé exercice 54 :

On calcule les termes de la suite grâce à la calculatrice.

deg SUITES

Suites Graphique Tableau

Régler l'intervalle

5	148.4132
6	403.4288
7	1096.633
8	2980.958
9	8103.084
10	22026.47
11	59874.14
12	162754.8
13	442413.4

En prenant $n_0 = 12$, on a $e^n \geqslant 10^6$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Corrigé exercice 55 :

1. $u_n \geqslant A \Leftrightarrow (3n-4)^2 \geqslant A \Leftrightarrow 3n-4 \geqslant \sqrt{A} \Leftrightarrow 3n \geqslant \sqrt{A}+4 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\sqrt{A}+4}{3}$

2. En prenant comme valeur de n_0 le plus petit entier supérieur ou égal à $\dfrac{\sqrt{A}+4}{3}$, on a $u_n \geqslant A$ pour tout $n \geqslant n_0$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Corrigé exercice 56 :

1. $v_n \geqslant A \Leftrightarrow \dfrac{3n^2+1}{2n} \geqslant A \Leftrightarrow 3n^2+1 \geqslant 2An \Leftrightarrow 3n^2 - 2\times A\times n + 1 \geqslant 0$

2. $4A^2 - 12 = 4(A^2-3) = 4(A-\sqrt{3})(A+\sqrt{3})$.

A	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
Signe de A $-\sqrt{3}$		$-$	0	$+$	
Signe de A $+\sqrt{3}$		$+$		$+$	
Signe de $4(A+\sqrt{3})(A-\sqrt{3})$		$-$	0	$+$	

Si $A \geqslant \sqrt{3}$ alors $4A^2 - 12 \geqslant 0$.

Si $0 < A < \sqrt{3}$ alors $4A^2 - 12 < 0$.

3. $3n^2 - 2An + 1$ est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-2A)^2 - 4\times 3\times 1 = 4A^2 - 12$. D'après la question précédente, si $0 < A \leqslant -\sqrt{3}$ alors pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $3n^2 - 2nA + 1 \geqslant 0$ et donc $v_n \geqslant A$. Dans cette situation $n_0 = 1$ convient. Si $A > \sqrt{3}$ alors $3n^2 - 2nA + 1 \geqslant 0$ lorsque $n \geqslant \dfrac{2A+\sqrt{4A^2-12}}{6}$. Ainsi en prenant comme valeur de n_0 le plus petit entier supérieur ou égal à $\dfrac{2A+\sqrt{4A^2-12}}{6} = \dfrac{A+\sqrt{A^2-3}}{3}$, on a $v_n \geqslant A$ pour tout $n \geqslant n_0$.

4. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Corrigé exercice 57 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la proposition : « $(1+a)^n \geqslant 1+an$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$.

   $(1+a)^0 = 1$ et $1 + a\times 0 = 1$ donc $(1+a)^0 \geqslant 1 + a \times 0$. P_0 est vraie.

   Hérédité : On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $(1+a)^k \geqslant 1+ak$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $(1+a)^{k+1} \geqslant 1 + a(k+1)$.

   On a $(1+a)^{k+1} = (1+a)\times(1+a)^k$. Or, par hypothèse de récurrence, on a $(1+a)^k \geqslant 1+ak$.

D'où $(1+a)\times(1+a)^k \geqslant (1+a)\times(1+ak)$, car $1+a>0$.

Or, $(1+a)\times(1+ak) = 1+ak+a+a^2k = 1+(k+1)a+a^2k$.

Comme $k \geqslant 0$ et $a^2>0$, alors $1+(k+1)a+a^2k \geqslant 1+(k+1)a$.

On a donc $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a$.

Ainsi, P_0 est vraie et, pour tout entier k, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie donc $(1+a)^n \geqslant 1+an$.

2. On a $1+an \geqslant A \Leftrightarrow an \geqslant A-1 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{A-1}{a}$.

   Ainsi, en prenant comme valeur de n_0 le plus petit entier supérieur ou égal à $\dfrac{A-1}{a}$, on a bien $1+an \geqslant A$ pour tout $n \geqslant n_0$.

3. D'après l'inégalité de Bernoulli, $(1+a)^n \geqslant 1+an$. D'où $(1+a)^n \geqslant A$ pour tout $n \geqslant n_0$, c'est-à-dire $q^n \geqslant A$ pour tout $n \geqslant n_0$. Donc on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Corrigé exercice 58 :

1. Pour tout réel A, il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant A$.
2. a. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors pour tout réel A, il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant A$. D'où, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $-u_n \leqslant -A$.

   b. Ainsi, en posant $B=-A$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $-u_n \leqslant B$. Donc on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = -\infty$.

Corrigé exercice 59 :

1. On a $u_n \leqslant A \Leftrightarrow -\sqrt{5n+7} \leqslant A$

   $\Leftrightarrow \sqrt{5n+7} \geqslant -A$

   $\Leftrightarrow 5n+7 \geqslant (-A)^2$

   $\Leftrightarrow 5n+7 \geqslant A^2$

   $\Leftrightarrow 5n \geqslant A^2-7$

   $\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{A^2-7}{5}$

   Ainsi, en prenant comme valeur de n_0 le plus petit entier supérieur ou égal à $\dfrac{A^2-7}{5}$, on a bien $u_n \leqslant A$ pour tout $n \geqslant n_0$.

2. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Corrigé exercice 60 :

1. a. L'appel fonction(10) renvoie 5.
   b. L'appel fonction(50) renvoie 7.
2. L'appel fonction(p) renvoie le plus petit entier N tel que $v_N \leqslant -10^P$.
3. La suite (v_n) semble diverger vers $-\infty$.

Corrigé exercice 61 :

1. L'affirmation est fausse. Prenons comme contre-exemple (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-2)^n$. Cette suite n'est pas majorée mais n'a pas de limite.
2. L'affirmation est vraie. Supposons par l'absurde que la suite (v_n) est majorée par M. Il n'existe alors aucun entier n_0 tel que $v_n \geqslant M$ pour tout $n \geqslant n_0$, ce qui contredit le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. C'est absurde. La suite ne peut donc pas être majorée.
3. L'affirmation est fausse. La suite (w_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $w_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ est strictement croissante et pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$.
4. L'affirmation est fausse. La suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = n + 2\cos(n)$ a bien pour limite $+\infty$ (par théorème de comparaison) mais n'est pas croissante.

Corrigé exercice 62 :

1. L'appel fonction(2) renvoie 5. L'appel fonction(5) renvoie 8.
2. L'appel fonction(p) renvoie le plus petit entier N tel que $z_N \geqslant 10^P$.
3. La suite (z_n) semble diverger vers $+\infty$.

9 Exercices d'entraînement partie 3

Corrigé exercice 63 :

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^7} = 0$. D'où, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^7} + 8 = 8$.

Corrigé exercice 64 :

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$. On ne peut donc pas conclure.

Pour tout entier naturel n non nul, on a $-2n^2 + 3n + 4 = n^2\left(-2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}\right)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2} = 0$. Donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} -2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2} = -2$. Or, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, alors, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^2+3n+4 = -\infty$. Aussi, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ alors, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}(-2n^2 + 3n + 4) = -\infty$.

Corrigé exercice 65 :

Par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 - 3n + 1 = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 + 4 = +\infty$.
On ne peut donc pas conclure.

Pour tout entier naturel n non nul, on a $\dfrac{-n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 4} = \dfrac{n^2\left(-1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \frac{4}{n^2}\right)} = \dfrac{-1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{4}{n^2}}$.

Or, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} -1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \frac{4}{n^2} = 2$.

Ainsi, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 4} = -\dfrac{1}{2}$.

Corrigé exercice 66 :

1. a. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

   b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \times v_n = \frac{1}{n} \times n = 1$.

   c. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = 1$

2. a. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

   b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \times v_n = \frac{1}{n} \times n^2 = n$.

   c. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = +\infty$

3. Le produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite qui diverge vers $\pm\infty$ est une forme indéterminée car on ne peut pas conclure de façon générale quant à sa convergence. Lorsqu'on obtient ce type de cas, on doit alors trouver une autre méthode pour calculer la limite.

Corrigé exercice 67 :

1. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
2. a. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n^2} \times \dfrac{n}{1} = \dfrac{1}{n}$.

   b. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
3. a. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{n^2}{1} = n$.

   b. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = +\infty$.
4. Le quotient de deux suites qui convergent vers 0 est une forme indéterminée car on ne peut pas conclure de façon générale quant à sa convergence. Lorsqu'on obtient ce type de cas, on doit alors trouver une autre méthode pour calculer la limite.

Corrigé exercice 68 :

1. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
2. a. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{n^2}{n} = n$.

   b. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.
3. a. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$.

   b. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 0$. 3. Le quotient de deux suites qui divergent vers $\pm\infty$ est une forme indéterminée car on ne peut pas conclure de façon générale quant à sa convergence. Lorsqu'on obtient ce type de cas, on doit alors trouver une autre méthode pour calculer la limite.

Corrigé exercice 69 :

1. Si $q = 0$ alors (q^n) est la suite constante égale à 0. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
2. a. Si $0 < q < 1$ alors $\dfrac{1}{q} > 1$.

   b. Comme $\dfrac{1}{q} > 1$ on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{q}\right)^n = +\infty$.

   c. Par quotient, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

3. Si $-1 < q < 0$ alors $-\dfrac{1}{q} > 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{q}\right)^n = +\infty$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (-q)^n = 0$. Or, $q^n = (-1)^n \times (-q)^n$ et la suite $((-1)^n)$ est bornée entre -1 et 1 donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Corrigé exercice 70 :

1. a. Pour tout entier $2 \leqslant k \leqslant n$, on a $1 - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{k^2-1}{k^1} = \dfrac{(k-1)(k+1)}{k^2}$.

   b. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $u_n = \left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$
   $= \dfrac{1\times 3}{2^2} \times \dfrac{2\times 4}{3^2} \times \dots \times \dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \dfrac{1\times(n+1)}{2\times n} = \dfrac{n+1}{2n}$.

2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$. On ne peut donc pas conclure.

   Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $u_n = \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n\times 2} = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ d'où, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$.

   Ainsi, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Corrigé exercice 71 :

1. a. Pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, on a
   $$\frac{(2k^2+2k+1)-(2k^2-2k+1)}{(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1)}$$
   $$= \frac{2k^2+2k+1-2k^2+2k-1}{4k^4-4k^3+2k^2+4k^3-4k^2+2k+2k^2-2k+1}$$
   $$= \frac{4k}{4k^4+1}.$$

   b. D'où $\dfrac{4k}{4k^4+1} = \dfrac{1}{2k^2-2k+1} - \dfrac{1}{2k^2+2k+1}$.
   Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :
   $$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1}$$
   $$= \left(1-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{13}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n^2-2n+1} - \frac{1}{2n^2+2n+1}\right)$$
   $$= 1 - \frac{1}{2n^2+2n+1}.$$

2. Par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2+2n+1 = +\infty$. D'où, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{2n^2+2n+1} = 0$.

   Et donc, par somme à nouveau, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{2n^2+2n+1} = 1$.

Corrigé exercice 72 :

1. a. Pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{k+1-k}{k(k+1)}-\frac{1}{2}\times\frac{k+2-(k+1)}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{1}{2k(k+1)}-\frac{1}{2(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k+2-k}{2k(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{2}{2k(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

b. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$c_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{n+2-(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right]$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n+2=+\infty$.

D'où, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2(n+1)(n+2)=+\infty$.

Ainsi, par inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}=0$.

Et donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=\dfrac{1}{4}$.

Corrigé exercice 73 :

1. Chaque année, 80 % des abonnés de l'année précédente renouvellent leur abonnement, le nombre d'abonnés de l'année précédente est donc multiplié par 0,8. De plus, il y a 450 nouvelles inscriptions. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1}=0,8a_n+450$.

2. a. Pour tout entier naturel n, on a $b_{n+1}=a_{n+1}-2250$

$$=0,8a_n+450-2250$$
$$=0,8a_n-1800$$
$$=0,8\left(a_n-\frac{1800}{0,8}\right)$$
$$=0,8(a_n-2250)$$
$$=0,8b_n.$$

Ainsi, (b_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $b_0 = a_0 - 2250 = 1250$.

b. Pour tout entier naturel n, on a alors $b_n = b_0 \times q^n = 1250 \times 0,8^n$.

c. On a donc $a_n = b_n + 2250 = 1250 \times 0,8^n + 2250$.

3. Comme $-1 < 0,8 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$.

   D'où, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1250 \times 0,8^n = 0$.

   Ainsi, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1250 \times 0,8^n + 2250 = 2250$. Sur le long terme, on peut donc supposer que le nombre d'inscriptions va se stabiliser autour de 2250.

Corrigé exercice 74 :

1. Chaque année, 90 % des oiseaux bagués l'année précédente reviennent dans la réserve, le nombre d'oiseaux de l'année précédente est donc multiplié par 0,9. De plus, il y a 100 nouveaux oiseaux qui rejoignent la réserve. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0,9u_n + 100$.

2. a. Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000$
   $= 0,9u_n + 100 - 1000$
   $= 0,9u_n - 900$
   $= 0,9\left(u_n - \dfrac{900}{0,9}\right)$
   $= 0,9(u_n - 1000)$
   $= 0,9v_n$.
   Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1000 = -400$.

   b. Pour tout entier naturel n, on a alors $v_n = v_0 \times q^n = -400 \times 0,9^n$.
   D'où $u_n = v_n + 1000 = -400 \times 0,9^n + 1000$.

3. Comme $-1 < 0,9 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$.

   D'où, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} -400 \times 0,9^n = 0$.

   Ainsi, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} -400 \times 0,9^n + 1000 = 1000$.

   Au bout d'un très grand nombre d'années, le nombre d'oiseaux présents dans la réserve va se stabiliser autour de 1000 individus.

4. a. On complète l'algorithme comme ci-dessous.

```
N ← 0
U ← 600
Tant que U ⩽ 900
    N ← N + 1
    U ← 0,9 × U + 100
Fin Tant que
Afficher N
```

b. On peut programmer cet algorithme en Python comme ci-dessous, par exemple.

```python
def oiseaux() :
    N = 0
    U = 600
    while U <= 900 :
        N = N+1
        U = 0.9*U+100
    return(N)
```

L'appel oiseaux() renvoie la valeur 14. Ainsi, en $2019 + 14 = 2033$, le nombre d'oiseaux dans la réserve sera supérieur à 900.

Corrigé exercice 75 :

1. a. D'une étape à l'autre, on noircit $\dfrac{1}{9}$ de la surface verte restante.

   b. Si à l'étape n, la surface noircie est A_n alors la surface verte restante est $1-A_n$. Or, comme à chaque étape on noircit $\dfrac{1}{9}$ de la surface verte restante on a, pour tout entier $n \geqslant 1$, $A_{n+1} = A_n + \dfrac{1}{9}(1 - A_n) = A_n + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{9}A_n = \dfrac{8}{9}A_n + \dfrac{1}{9}$.

2. a. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $B_{n+1} = A_{n+1} - 1$
   $= \dfrac{8}{9}A_n + \dfrac{1}{9} - 1$
   $= \dfrac{8}{9}A_n - \dfrac{8}{9}$
   $= \dfrac{8}{9}(A_n - 1)$
   $= \dfrac{8}{9}B_n$.
   Donc (B_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{8}{9}$ et de premier terme $B_1 = A_1 - 1 = -\dfrac{8}{9}$.

   b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $B_n = B_1 \times q^{n-1} = -\dfrac{8}{9} \times \left(\dfrac{8}{9}\right)^{n-1} = -\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$.

   c. D'où $A_n = B_n + 1 = -\left(\dfrac{8}{9}\right)^n + 1$.

   d. Comme $-1 < \dfrac{8}{9} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{8}{9}\right)^n = 0$.
   D'où, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -\left(\dfrac{8}{9}\right)^n + 1 = 1$.

Corrigé exercice 76 :

1. a. D'une étape à l'autre, un segment est partagé en 4 segments de même longueur.

   b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a donc $c_{n+1} = 4c_n$. Donc (c_n) est une suite géométrique de raison $q = 4$ et de premier terme $c_1 = 3$.

c. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $c_n = c_1 \times q^{n-1} = 3 \times 4^{n-1}$.

2. a. À chaque étape, la longueur du segment précédent est divisée par 3. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\ell_{n+1} = \frac{1}{3}\ell_n$. Donc (ℓ_n) est une suite géométrique de raison $q' = \frac{1}{3}$ et de premier terme ℓ_1.

b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a alors $\ell_n = \ell_1 \times (q')^{n-1} = \ell_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

c. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $p_n = c_n \times \ell_n = 3 \times 4^{n-1} \times \ell_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3\ell_1 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$.

d. Comme $\frac{4}{3} > 1$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = +\infty$. Or, comme ℓ_1 représente une longueur, on a $3\ell_1 > 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.

3. Notons $\mathcal{A}_n$ l'aire du flocon à l'étape n.

Pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on ajoute à l'aire précédente l'aire de $3\times4^{n-1}$ triangles équilatéraux de côté ℓ_{n+1}. Notons ABC un de ces triangles et H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$. ABH est un triangle rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore, on a $AB^2 = AH^2 + BH^2$ d'où $AH^2 = AB^2 - BH^2 = \ell_{n+1}^2 - \left(\frac{\ell_{n+1}}{2}\right)^2 = \ell_{n+1}^2 - \frac{\ell_{n+1}^2}{4} = \frac{3}{4}\ell_{n+1}^2$ et donc $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell_{n+1}$.

Ainsi, l'aire du triangle ABC est $\dfrac{\ell_{n+1} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\ell_{n+1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell_{n+1}^2$.

On a donc $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n + 3 \times 4^{n-1} \times \frac{\sqrt{3}}{4}\ell_{n+1}^2$

$= \mathcal{A}_n + 3 \times 4^{n-1} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\ell_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)^2 = \mathcal{A}_n + 3 \times 4^{n-1} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\ell_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)^2 = \mathcal{A}_n + 3 \times 4^{n-1} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2 \times \left(\frac{1}{9}\right)^n = \mathcal{A}_n + \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2 \times \frac{4^{n-1}}{9^n}$ Soit $n \geqslant 2$ un entier. On note P_n la proposition : « $\mathcal{A}_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2 \left(1 + \frac{3}{9^1} + \frac{3\times4}{9^2} + \frac{3\times4^2}{9^3} + \ldots + \frac{3\times4^{n-2}}{9^{n-1}}\right)$ ».
On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

Initialisation : Pour $n = 2$. $\mathcal{A}_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2 + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_2^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2 + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\ell_1\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2 + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9}\ell_1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2\left(1 + \frac{1}{3}\right)$ et $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2\left(1 + \frac{3}{9^1}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2\left(1 + \frac{3}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2\left(1 + \frac{1}{3}\right)$ donc $\mathcal{A}_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2\left(1 + \frac{3}{9^1}\right)$. On en déduit que P_2 est vraie.

Hérédité : On considère un entier naturel $k \geqslant 2$ quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que :

$\mathcal{A}_k = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2 \left(1 + \dfrac{3}{9^1} + \dfrac{3 \times 4}{9^2} + \dfrac{3 \times 4^2}{9^3} + \ldots + \dfrac{3 \times 4^{k-2}}{9^{k-1}}\right)$.

On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que :

$\mathcal{A}_{k+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2 \left(1 + \dfrac{3}{9^1} + \dfrac{3 \times 4}{9^2} + \dfrac{3 \times 4^2}{9^3} + \ldots + \dfrac{3 \times 4^{k-1}}{9^{k}}\right)$.

On a $\mathcal{A}_{k+1} = \mathcal{A}_k + \dfrac{3\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2 \times \dfrac{4^{k-1}}{9^k}$.

D'où $\mathcal{A}_{k+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2 \left(1 + \dfrac{3}{9^1} + \dfrac{3 \times 4}{9^2} + \dfrac{3 \times 4^2}{9^3} + \ldots + \dfrac{3 \times 4^{k-2}}{9^{k-1}}\right) + \dfrac{3\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2 \times \dfrac{4^{k-1}}{9^k}$
$= \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2 \left(1 + \dfrac{3}{9^1} + \dfrac{3 \times 4}{9^2} + \dfrac{3 \times 4^2}{9^3} + \ldots + \dfrac{3 \times 4^{k-2}}{9^{k-1}} + \dfrac{3 \times 4^{k-1}}{9^k}\right)$.

Conclusion : Ainsi, P_2 est vraie et, pour un entier $k \geqslant 2$, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \geqslant 2$, P_n est vraie donc $\mathcal{A}_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2 \left(1 + \dfrac{3}{9^1} + \dfrac{3 \times 4}{9^2} + \dfrac{3 \times 4^2}{9^3} + \ldots + \dfrac{3 \times 4^{n-2}}{9^{n-1}}\right)$. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $\mathcal{A}_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2 \left(1 + \dfrac{3}{9^1} + \dfrac{3 \times 4}{9^2} + \dfrac{3 \times 4^2}{9^3} + \ldots + \dfrac{3 \times 4^{n-2}}{9^{n-1}}\right)$
$= \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2 \left(1 + \dfrac{3}{9}\left(1 + \dfrac{4}{9} + \dfrac{4^2}{9^2} + \ldots + \dfrac{4^{n-2}}{9^{n-2}}\right)\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2 \left(1 + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}}{1 - \dfrac{4}{9}}\right)$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2 \left(1 + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}}{\dfrac{5}{9}}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2 \left(1 + \dfrac{1}{3} \times \left(1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right) \times \dfrac{9}{5}\right)$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2 \left(1 + \dfrac{3}{5} \times \left(1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right)\right)$. Or, $-1 < \dfrac{4}{9} < 1$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1} = 0$.

Ainsi, par somme, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1} = 1$. D'où, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{5} \times \left(1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right) = \dfrac{3}{5}$. Et, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{3}{5} \times \left(1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right) = \dfrac{8}{5}$. Donc, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{A}_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \ell_1^2 \left(1 + \dfrac{3}{5} \times \left(1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right)\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}\ell_1^2$. Ainsi, la suite $(\mathcal{A}_n)$ converge vers $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}\ell_1^2$. Il est surprenant que cette suite converge car on ajoute toujours de nouveaux triangles, on pourrait donc imaginer que cette suite diverge vers $+\infty$. La figure vers laquelle on tend a donc un périmètre qui diverge mais une aire qui converge.

10 Exercices d'entraînement partie 4

Corrigé exercice 77 :

Pour tout entier naturel n, on a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ d'où $n^3 - 1 \leqslant n^3 + (-1)^n \leqslant n^3 + 1$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - 1 = +\infty$. Donc, par théorème de comparaison, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 + (-1)^n = +\infty$.

Corrigé exercice 78 :

Pour tout entier naturel n, on a $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$.
D'où $-2n^7 - 1 \leqslant -2n^7 + \cos(n) \leqslant -2n^7 + 1$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^7 + 1 = -\infty$.
Donc, par théorème de comparaison, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^7 + \cos(n) = -\infty$.

Corrigé exercice 79 :

Pour tout entier naturel n non nul, on a $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ d'où $-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Ainsi, $\dfrac{7}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{7}{3} + \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ d'où, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{7}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{7}{3}$.
Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{3} + \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}} = \dfrac{7}{3}$.

Corrigé exercice 80 :

1. Soit $n \geqslant 5$ un entier. On note P_n la proposition : « $b_n \geqslant n - 3$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \geqslant 5$.

   Initialisation : Pour $n = 5$.
   $b_5 = \dfrac{1}{3}b_4 + 4 - 2 = \dfrac{553}{243}$ et $5 - 3 = 2$ donc $b_5 \geqslant 5 - 3$. On en déduit que P_5 est vraie.
   Hérédité : On considère un entier naturel $k \geqslant 5$ quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $b_k \geqslant k - 3$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $b_{k+1} \geqslant (k+1) - 3$.

   Par hypothèse de récurrence, on a $b_k \geqslant k - 3$ d'où $\dfrac{1}{3}b_k \geqslant \dfrac{1}{3}(k-3) \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}b_k \geqslant \dfrac{1}{3}k - 1$.

   On a donc, $\dfrac{1}{3}b_k + k - 2 \geqslant \dfrac{1}{3}k - 1 + k - 2 \Leftrightarrow b_{k+1} \geqslant \dfrac{4}{3}k - 3$.

   Or, $\dfrac{4}{3}k - 3 \geqslant k - 2 \Leftrightarrow \dfrac{4}{3}k - 3 - (k-2) \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}k - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow k \geqslant 3$. Donc, comme $k \geqslant 5$, on a bien $\dfrac{4}{3}k - 3 \geqslant k - 2$ et ainsi $b_{k+1} \geqslant (k+1) - 3$.

   Ainsi, P_5 est vraie et, pour un entier $k \geqslant 5$, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \geqslant 5$, P_n est vraie donc $b_n \geqslant n - 3$.

2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n - 3 = +\infty$ donc, par théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

Corrigé exercice 81 :

1. La fonction $x \mapsto x^2 - 3x + 5$ est un trinôme du second degré dont le discriminant $\Delta = 3^2 - 4 \times 5 = -11$ est négatif. Donc, pour tout entier naturel n, $n^2 - 3n + 5 > 0$ d'où $\sqrt{n^2 - 3n + 5} > 0$. Ainsi, $n^4 + \sqrt{n^2 - 3n + 5} - 8 \geqslant n^4 - 8$.
2. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} n^4 - 8 = +\infty$ donc, par théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = +\infty$.

Corrigé exercice 82 :

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $-1 \leqslant \sin(2n) \leqslant 1 \Leftrightarrow -3 \leqslant 3\sin(2n) \leqslant 3$
$\Leftrightarrow -11 \leqslant 3\sin(2n) - 8 \leqslant -5$
$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{11} \geqslant \dfrac{1}{3\sin(2n) - 8} \geqslant -\dfrac{1}{5}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$
$\Leftrightarrow -\dfrac{2-4n}{11} \leqslant \dfrac{2-4n}{3\sin(2n) - 8} \leqslant -\dfrac{2-4n}{5}$ car, pour tout $n \geqslant 1$, $2 - 4n < 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{4n-2}{11} \leqslant \dfrac{2-4n}{3\sin(2n) - 8} \leqslant \dfrac{4n-2}{5}$
$\Leftrightarrow \dfrac{4n-2}{11} \leqslant d_n \leqslant \dfrac{4n-2}{5}$.
2. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4n-2}{11} = +\infty$ donc, par théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = +\infty$.

Corrigé exercice 83 :

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a
$-1 \leqslant \sin(2n) \leqslant 1 \Leftrightarrow -4 \leqslant 4\sin(2n) \leqslant 4$
$\Leftrightarrow -11 \leqslant 4\sin(2n) - 7 \leqslant -3$
$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{11} \geqslant \dfrac{1}{4\sin(2n) - 7} \geqslant -\dfrac{1}{3}$
$\Leftrightarrow -\dfrac{11n^2}{11} \geqslant \dfrac{11n^2}{4\sin(2n) - 7} \geqslant -\dfrac{11n^2}{3}$
$\Leftrightarrow -n^2 \geqslant \dfrac{11n^2}{4\sin(2n) - 7} \geqslant -\dfrac{11n^2}{3}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a bien $e_n \leqslant -n^2$.
2. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} -n^2 = -\infty$ donc, par théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} e_n = -\infty$.

Corrigé exercice 84 :

1. Pour tout entier naturel n, on a
$\cos(3n) = \cos(2n)\cos(n) - \sin(2n)\sin(n)$
$= \left[\cos^2(n) - \sin^2(n)\right]\cos(n) - 2\sin^2(n)\cos(n)$
$= \cos(n)\left[\cos^2(n) - \sin^2(n) - 2\sin^2(n)\right]$
$= \cos(n)\left[\cos^2(n) - 3\sin^2(n)\right]$

$= \cos(n)\left[4\cos^2(n) - 3(\cos^2(n) + \sin^2(n))\right]$
$= \cos(n)\,[4\cos^2(n) - 3]$.

2. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $t_n = \sqrt{n} + \cos(3n) + 1$.
Or, $-1 \leqslant \cos(3n) \leqslant 1 \Leftrightarrow \sqrt{n} - 1 \leqslant \sqrt{n} + \cos(3n) \leqslant \sqrt{n} + 1$
$\Leftrightarrow \sqrt{n} \leqslant \sqrt{n} + \cos(3n) + 1 \leqslant \sqrt{n} + 2$
$\Leftrightarrow \sqrt{n} \leqslant t_n \leqslant \sqrt{n} + 2$. Et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$.

Corrigé exercice 85 :

1. La suite (k_n) semble converger vers 0.
2. Pour tout entier naturel n, on a $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1 \Leftrightarrow n^2 - 1 \leqslant n^2 + \sin(n) \leqslant n^2 + 1$. De plus, la fonction $f : x \mapsto x^3 - 2x + 5$ est définie dérivable sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée $x \mapsto 3x^2 - 2$. Cette fonction admet donc un minimum global en $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ sur $\mathbb{R}^+$ et $f\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) > 0$ d'où, pour tout entier naturel n, $n^3 - 2n + 5 > 0$ et donc $\dfrac{n^2-1}{n^3-2n+5} \leqslant k_n \leqslant \dfrac{n^2+1}{n^3-2n+5}$.
3. a. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - 2n + 5 = +\infty$.
On ne peut donc pas conclure directement.
Or, pour tout entier naturel n :
$$\frac{n^2-1}{n^3-2n+5} = \frac{n^2\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{5}{n^3}\right)} = \frac{1-\dfrac{1}{n^2}}{n\left(1-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{5}{n^3}\right)}.$$
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n^2} = 1$. Et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{5}{n^3} = 1$ ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ d'où, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{5}{n^3}\right) = +\infty$.
En conclusion, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-1}{n^3-2n+5} = 0$.
On montre de même que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{n^3-2n+5} = 0$.
b. D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = 0$.

Corrigé exercice 86 :

1. Pour tout entier naturel n, on a $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1 \Leftrightarrow \sqrt{n} - 1 \leqslant \sqrt{n} + \cos(n) \leqslant \sqrt{n} + 1$.
Or, $n^2 + n + 1 > 0$ d'où $\dfrac{\sqrt{n}-1}{n^2+n+1} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{\sqrt{n}+1}{n^2+n+1}$.

2. a. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}-1=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+n+1=+\infty$.
   On ne peut pas conclure directement.
   Or, pour tout entier naturel n :
   $$\frac{\sqrt{n}-1}{n^2+n+1}=\frac{\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}.$$
   De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{\sqrt{n}}=1$. Et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ d'où, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=+\infty$.
   En conclusion, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{n^2+n+1}=0$.
   On montre de même que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n^2+n+1}=0$.

   b. D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$.

Corrigé exercice 87 :

1. Pour tout entier $n\geqslant 4$, on a $-1\leqslant(-1)^n\leqslant 1$ et $-1\leqslant\cos(n)\leqslant 1$ d'où $-1\leqslant(-1)^n\cos(n)\leqslant 1$. D'où $2n-1\leqslant 2n+(-1)^n\cos(n)\leqslant 2n+1$.
   Or, comme $3-n<0$, on a alors $\frac{2n-1}{3-n}\geqslant c_n\geqslant\frac{2n+1}{3-n}$.
2. a. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n-1=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3-n=-\infty$.
   On ne peut pas conclure directement.
   Or, pour tout entier $n\geqslant 4$, $\frac{2n-1}{3-n}=\frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{3}{n}-1\right)}=\frac{2-\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}-1}$.
   De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-\frac{1}{n}=2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}-1=-1$.
   Ainsi, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{3-n}=-2$.
   On montre de même que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{3-n}=-2$

   b. D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=-2$.

Corrigé exercice 88 :

1. Pour tout entier naturel n, on a $1-\cos^2(n)=\sin^2(n)$. D'où $c_n=\frac{\sin^2(n)}{3n^2-2n+2+(-1)^n}$.
   On a $-1\leqslant(-1)^n\leqslant 1$ et comme $3n^2-2n+2>0$ (car la fonction $x\mapsto 3x^2-2x+2$ est un trinôme du second degré de discriminant négatif), alors $3n^2-2n+1\leqslant 3n^2-2n+2+(-1)^n\leqslant 3n^2-2n+3$.

D'où $\dfrac{1}{3n^2-2n+1} \geqslant \dfrac{1}{3n^2-2n+2+(-1)^n} \geqslant \dfrac{1}{3n^2-2n+3}$.

Comme $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ alors $0 \leqslant \sin^2(n) \leqslant 1$.

Donc $\dfrac{\sin^2(n)}{3n^2-2n+3} \leqslant \dfrac{\sin^2(n)}{3n^2-2n+2+(-1)^n} \leqslant \dfrac{\sin^2(n)}{3n^2-2n+1}$.

Et enfin $0 \leqslant \dfrac{\sin^2(n)}{3n^2-2n+2+(-1)^n} \leqslant \dfrac{1}{3n^2-2n+1}$.

2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2-2n+1=+\infty$ d'où, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3n^2-2n+1}=0$.

   D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$.

Corrigé exercice 89 :

1. Pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant v_n \leqslant 1$. Or, comme $u_n \geqslant 0$, on a alors $0 \leqslant u_n \times v_n \leqslant u_n$.

   De même, on montre que $0 \leqslant u_n \times v_n \leqslant v_n$.

2. Pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \times v_n \leqslant u_n$ et $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

   D'où $u_n \times v_n \leqslant u_n \leqslant 1$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. On montre de même que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

Corrigé exercice 90 :

1. a. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $1-\sin^2(n)=\cos^2(n)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+n\right)=\cos(n)$.

   Ainsi,$d_n = \dfrac{1-\sin^2(n)}{\sqrt{n}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+n\right)} = \dfrac{\cos^2(n)}{\sqrt{n}\cos(n)} = \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$.

   b. On a $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ d'où $-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant d_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

   D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$.

11 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 91 :

1. a. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{n^2+2n+1}{2n^2} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ d'où, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2} = 1$.

Ainsi, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2} = \frac{1}{2}$.

b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a montré que $v_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $1+\frac{1}{n} > 1 \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} > 1 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 > 1 \Leftrightarrow v_n \geqslant \frac{1}{2}$.

c. On a $v_n \leqslant \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \sqrt{\frac{3}{2}} - 1$ car $1+\frac{1}{n} > 0 \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}-1}$.

Or, $\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}-1} \approx 4,45$ donc le plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n < \frac{3}{4}$ est $n_0 = 5$.

d. Pour tout entier $n \geqslant 5$, on a $v_n \leqslant \frac{3}{4}$.

Or, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ d'où, pour tout entier $n \geqslant 5$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{3}{4}$. Or, comme pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 0$ alors pour tout entier $n \geqslant 5$, on a $u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}u_n$.

2. a. Soit $n \geqslant 5$. On note P_n la proposition : « $u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \geqslant 5$.

Initialisation : Pour $n = 5$.
$\left(\frac{3}{4}\right)^{5-5} = 1$ donc $u_5 = \left(\frac{3}{4}\right)^{5-5} u_5$. On en déduit que P_5 est vraie.

Hérédité : On considère un entier naturel $k \geqslant 5$ quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $u_k \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{k-5} u_5$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $u_{k+1} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{k-4} u_5$.

D'après la question 1.d., $u_{k+1} \leqslant \frac{3}{4}u_k$. Par hypothèse de récurrence, on a $u_k \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{k-5} u_5$. D'où $u_{k+1} \leqslant \frac{3}{4}u_k \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{k-4} u_5$.

Ainsi, P_5 est vraie et, pour tout entier $k \geqslant 5$, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \geqslant 5$, P_n est vraie donc $u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

b. Pour tout entier $n \geqslant 5$, on a $u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

D'où $u_5 + u_6 + \ldots + u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{5-5} u_5 + \left(\frac{3}{4}\right)^{6-5} u_5 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$

Soit $S_n \leqslant u_5 \left[1 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right]$.

c. Pour tout entier $n \geqslant 5$, on a $1 + \frac{3}{4} + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} = \dfrac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}}{1 - \frac{3}{4}}$

$= 4\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}\right]$ (somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{3}{4}$).

Ainsi, $S_n \leqslant 4u_5\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}\right]$. Or, $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} \leqslant 1$ d'où $S_n \leqslant 4u_5$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 5$, on a $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=5}^{n+1} u_k - \sum_{k=5}^{n} u_k = u_{n+1}$. Or, comme pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 0$ alors la suite (S_n) est croissante. Comme la suite (S_n) est croissante et majorée par $4u_5$ alors elle converge.

Corrigé exercice 92 :

1. a. Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - \dfrac{2u_n + v_n}{3}$

$= \dfrac{3u_n + 9v_n - 8u_n - 4v_n}{12} = \dfrac{5}{12}(v_n - u_n)$.

b. Pour tout entier naturel n, on a $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n) = \frac{5}{12}w_n$.

Donc la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{5}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $w_n = w_0 \times q^n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

2. a. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \dfrac{2u_n + v_n - 3u_n}{3}$

$= \dfrac{-u_n + v_n}{3} = \dfrac{w_n}{3}$.

Or, comme pour tout entier naturel n, $w_n = w_0 \times q^n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$, on en déduit que $w_n \geqslant 0$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et donc la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \dfrac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4}$
$= \dfrac{u_n - v_n}{4} = \dfrac{-w_n}{4}$

Or, comme pour tout entier naturel n, $w_n \geqslant 0$, alors $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$.

Donc la suite (v_n) est décroissante.

b. Comme la suite (v_n) est décroissante, pour tout entier naturel n, on a $v_n \leqslant v_0$ c'est-à-dire $v_n \leqslant 10$. Or, pour tout entier naturel n, on a $w_n \geqslant 0$ c'est-à-dire $v_n - u_n \geqslant 0$ d'où $v_n \geqslant u_n$. On a donc $u_n \leqslant v_n \leqslant 10$ c'est-à-dire $u_n \leqslant 10$.

Comme la suite (u_n) est croissante, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant u_0$ c'est-à-dire $u_n \geqslant 2$. Or, pour tout entier naturel n, on a $v_n \geqslant u_n$ d'où $v_n \geqslant u_n \geqslant 2$ c'est-à-dire $v_n \geqslant 2$.

c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 10 donc elle converge vers un réel ℓ.

La suite (v_n) est décroissante et minorée par 2 donc elle converge vers un réel ℓ'.

3. Pour tout entier naturel n, on a $w_n = v_n - u_n$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell' - \ell$.

Or, comme $\dfrac{5}{12} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5}{12}\right)^n = 0$ et donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

On en déduit alors que $\ell' - \ell = 0$ c'est-à-dire $\ell = \ell'$.

4. a. Pour tout entier naturel n, on a $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1}$
$= 3 \times \dfrac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \dfrac{u_n + 3v_n}{4} = 3u_n + 4v_n = t_n$.

Donc la suite (t_n) est constante égale à $3u_0 + 4v_0 = 6 + 40 = 46$.

b. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 46$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 3\ell + 4\ell = 7\ell$ par opérations sur les limites.

D'où $7\ell = 46 \Leftrightarrow \ell = \dfrac{46}{7}$.

Corrigé exercice 93 :

1. a. (S_n) est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1}{3}$. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $S_n = \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}\left[1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$.

b. Comme $\dfrac{1}{3} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$. Ainsi, par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 1$. Et donc, par produit, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{2}\left[1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right] = \dfrac{3}{2}$.

2. a. Pour tout entier naturel n, on a $T_{n+1} - T_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{3^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$.

   Comme $\frac{n+1}{3^{n+1}} \geqslant 0$, on en déduit que la suite (T_n) est croissante.

   b. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$3T_{n+1} - T_n = 3\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{3^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$$
$$= 3\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{3^n}\right)$$
$$= 1 + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n}{3^{n-1}} + \frac{n+1}{3^n} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{3^n}\right)$$
$$= 1 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{n+1}{3^n} - \frac{n}{3^n}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^n} = S_n.$$

   D'où $T_{n+1} = \frac{S_n + T_n}{3}$.

   c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P_n la proposition : « $T_n \leqslant 1$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Initialisation : Pour $n = 1$.

   $T_1 = \frac{0}{3^0} + \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3} \leqslant 1$. On en déduit que P_1 est vraie.

   Hérédité : On considère un entier naturel $k \geqslant 1$ quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $T_k \leqslant 1$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $T_{k+1} \leqslant 1$.

   On a $T_{k+1} = \frac{S_k + T_k}{3}$. Or, la suite (S_n) est croissante, car $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$, et converge vers $\frac{3}{2}$ donc, pour tout entier naturel n, $S_n \leqslant \frac{3}{2}$. Ainsi, $T_{k+1} \leqslant \frac{\frac{3}{2} + T_k}{3}$. De plus, par hypothèse de récurrence, on a $T_k \leqslant 1$ d'où $T_{k+1} \leqslant \frac{5}{6} \leqslant 1$.

   Ainsi, P_1 est vraie et, pour tout entier k, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie donc $T_n \leqslant 1$.

   d. La suite (T_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge vers un réel ℓ.

   e. On a $\ell = \frac{\ell + \frac{3}{2}}{3} \Leftrightarrow 3\ell = \ell + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\ell = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ell = \frac{3}{4}$.

Corrigé exercice 94 :

1. On peut construire l'arbre de probabilité ci-dessous.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P_n la proposition : « $p_n > 0,8$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Initialisation : Pour $n = 1$.

   $p_1 = 1 > 0,8$. On en déduit que P_1 est vraie.

Hérédité : On considère un entier naturel $k \geqslant 1$ quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $p_k > 0,8$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $p_{k+1} > 0,8$.
Par hypothèse de récurrence, on a $p_k > 0,8$.
D'où $0,5p_k > 0,4 \Leftrightarrow 0,5p_k + 0,4 > 0,8 \Leftrightarrow p_{k+1} > 0,8$.
Ainsi, P_1 est vraie et, pour un tout entier k, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie donc $p_n > 0,8$.

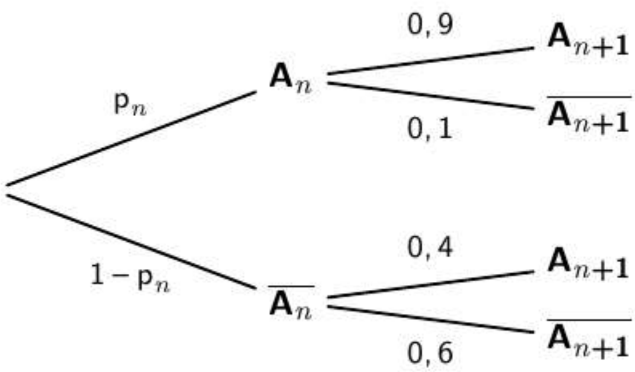
b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $p_{n+1} - p_n = 0,5p_n + 0,4 - p_n = -0,5p_n + 0,4$.
Or, $p_n > 0,8 \Leftrightarrow -0,5p_n < -0,4 \Leftrightarrow -0,5p_n + 0,4 < 0$.
Donc $p_{n+1} - p_n < 0$ et alors la suite (p_n) est décroissante.

c. La suite (p_n) est décroissante et minorée par 0,8 donc elle converge vers un réel ℓ.

3. a. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $v_{n+1} = p_{n+1} - 0,8 = 0,5p_n + 0,4 - 0,8$
$= 0,5p_n - 0,4 = 0,5(p_n - 0,8) = 0,5v_n$.
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = p_1 - 0,8 = 0,2$.

b. On a alors $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,2 \times 0,5^{n-1}$.
D'où $p_n = 0,8 + v_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

c. Comme $-1 < 0,5 < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^{n-1} = 0$. Ainsi, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,2 \times 0,5^{n-1} = 0$. Et donc, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,8$.



D'après la formule des probabilités totales, on a :
$p_{n+1} = p_n \times 0,9 + (1 - p_n) \times 0,4 = 0,5p_n + 0,4$.

Corrigé exercice 95 :

1. On a $x = ax + b \Leftrightarrow x(1-a) = b \Leftrightarrow x = \dfrac{b}{1-a}$.

2. Pour tout entier naturel n, on a $v_n = u_n - \alpha = u_n - \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{u_n - au_n - b}{1-a}$.

D'où $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{a(u_n - au_n - b)}{1-a} = av_n$.

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison a et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0 - au_0 - b}{1-a}$.

3. Pour tout entier naturel n, on a $v_n = v_0 \times a^n = \dfrac{u_0 - au_0 - b}{1-a} \times a^n$.

   D'où, $u_n = v_n + \alpha = a^n \times \dfrac{u_0 - au_0 - b}{1-a} + \dfrac{b}{1-a}$.

4. Si $|a| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$. Ainsi, par produit, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n \times \dfrac{u_0 - au_0 - b}{1-a} = 0$ et donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{b}{1-a}$.
   Si $a < -1$, alors la suite (a^n) diverge et donc la suite (u_n) aussi.
   Si $a > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ et donc la suite (u_n) diverge et a une limite infinie.
   Par produit et par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ lorsque $u_0 \geqslant \alpha$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ lorsque $u_0 \leqslant \alpha$.

Corrigé exercice 96 :

1. a. Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = a_{n+1} - c_{n+1}$
   $= \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{4}b_n - \left(\dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{3}c_n\right) = \dfrac{1}{3}(a_n - c_n) = \dfrac{1}{3}u_n$.
   Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = a_0 - c_0 = 1$.

   b. Ainsi, pour tout entier naturel n on a $u_n = u_0 \times q^n = 1 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

2. a. Le lapin se trouve forcément dans une des trois galleries A, B ou C.
   Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $a_n + b_n + c_n = 1$.
   Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = b_{n+1} - \dfrac{4}{7} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{2}{3}c_n - \dfrac{4}{7}$
   $= \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{2}{3}b_n - \dfrac{2}{3}b_n + \dfrac{2}{3}c_n - \dfrac{4}{7} = \dfrac{2}{3}(a_n + b_n + c_n) - \dfrac{1}{6}b_n - \dfrac{4}{7}$
   $= \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6}b_n - \dfrac{4}{7} = -\dfrac{1}{6}b_n - \dfrac{2}{21} = -\dfrac{1}{6}\left(b_n - \dfrac{4}{7}\right) = -\dfrac{1}{6}v_n$.

   b. (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q' = -\dfrac{1}{6}$ et de premier terme $v_0 = b_0 - \dfrac{4}{7} = -\dfrac{4}{7}$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times (q')^n = -\dfrac{4}{7} \times \left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$.

3. Pour tout entier naturel n, on a donc $b_n = \dfrac{4}{7} + v_n = \dfrac{4}{7} - \dfrac{4}{7} \times \left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$.

   Comme $a_n = 1 - b_n - c_n$ et $a_n = u_n + c_n$ alors, pour tout entier naturel n,
   $1 - b_n - c_n = u_n + c_n \Leftrightarrow 2c_n = 1 - b_n - u_n$

$\Leftrightarrow 2c_n = 1 - \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\Leftrightarrow 2c_n = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\Leftrightarrow c_n = \frac{3}{14} + \frac{2}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

D'où, pour tout entier naturel n, $a_n = 1 - b_n - c_n$

$= 1 - \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n - \frac{3}{14} - \frac{2}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= \frac{3}{14} + \frac{2}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

4. Comme $-1 < -\frac{1}{6} < 1$ et $-1 < \frac{1}{3} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.
Ainsi, par opérations sur les limites, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{4}{7}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \frac{3}{14}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{3}{14}$. Après un très grand nombre d'étapes, la probabilité que le lapin soit dans la galerie A est $\frac{3}{14}$, la probabilité qu'il soit dans la galerie B est $\frac{4}{7}$ et la probabilité qu'il soit dans la galerie C est $\frac{3}{14}$.

Corrigé exercice 97 :

1. On a $u_1 = 0,9u_0(1 - u_0) = 0,189$ donc au début de l'année 2001 il y a 189 tortues.
On a $u_2 = 0,9u_1(1 - u_1) \approx 0,138$ donc au début de l'année 2002 il y a 138 tortues.

2. a. On a $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$.
Comme $u_n \geqslant 0$ alors $0 \leqslant u_n(1 - u_n) \leqslant u_n$.
D'où $0 \leqslant 0,9u_n(1 - u_n) \leqslant 0,9u_n$ c'est-à-dire $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9u_n$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la proposition : « $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : Pour $n = 0$.
$u_0 = 0,3$ et $0,3 \times 0,9^0 = 0,3$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 0,3 \times 0,9^0$. On en déduit que P_0 est vraie.
Hérédité : On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $0 \leqslant u_k \leqslant 0,3 \times 0,9^k$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 0,3 \times 0,9^{k+1}$.
On a montré que $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 0,9u_k$. Or, par hypothèse de récurrence, on a $0 \leqslant u_k \leqslant 0,3 \times 0,9^k$, d'où $0 \leqslant 0,9u_k \leqslant 0,3 \times 0,9^{k+1}$. Donc $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 0,3 \times 0,9^{k+1}$.
Ainsi, P_0 est vraie et, pour un entier k, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie donc $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.

c. Comme $-1 < 0,9 < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$. Par produit, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,3 \times 0,9^n = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. On en déduit alors que cette population de tortues s'éteindra à long terme.

3. L'algorithme suivant convient :

$u \leftarrow 0,3$

$n \leftarrow 0$

Tant que $u \geqslant 0,03$:

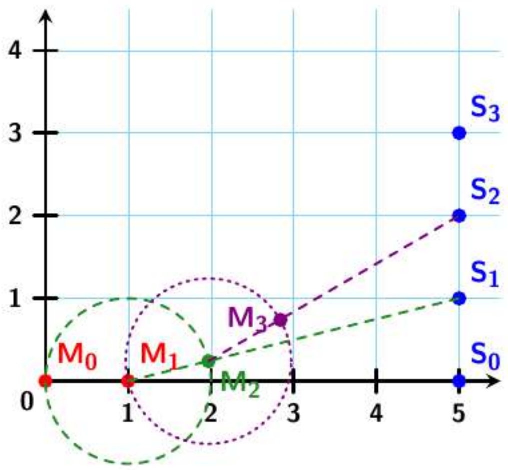
  $u \leftarrow 0,9 \times u \times (1-u)$

  $n \leftarrow n+1$

Fin Tant que

Corrigé exercice 98 :

1. La figure complétée est la suivante.



2. On a $d_0 = M_0S_0 = 5$ et $d_1 = M_1S_1 = \sqrt{(5-1)^2+(1-0)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$.

3. Notons $(x_{M_2}; y_{M_2})$ les coordonnées du point M_2.

On sait que les points M_1, M_2 et S_1 sont alignés. Donc les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1S_1}$ sont colinéaires. On sait aussi que $M_1M_2 = 1$ d'où $\overrightarrow{M_1M_2} = \dfrac{1}{d_1}\overrightarrow{M_1S_1}$.

Or, $\overrightarrow{M_1S_1}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{M_1M_2}\begin{pmatrix}\dfrac{4}{\sqrt{17}}\\\dfrac{1}{\sqrt{17}}\end{pmatrix}$. On a aussi $\overrightarrow{M_1M_2}\begin{pmatrix}x_{M_2}-1\\y_{M_2}\end{pmatrix}$.

D'où $x_{M_2} = 1 + \dfrac{4}{\sqrt{17}}$ et $y_{M_2} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$.

Donc les coordonnées du point M_2 sont $\left(1+\dfrac{4}{\sqrt{17}}; \dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

4. a. La formule saisie dans la cellule B4 est = B3 + (5-B3)/F3. La formule saisie dans la cellule C4 est = C3 + (A3-C3)/F3.
   La formule saisie dans la cellule F4 est = SQRT((D4-B4)ˆ2+(E4-C4)ˆ2).
   b. Comme d_n représente une longueur, on a $d_n \geqslant 0$.
   La suite (d_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel ℓ.
   Il semble que $\ell \approx 2,773\,166$.

Corrigé exercice 99 :

Soit $A > 0$ un réel. Notons N le plus petit entier supérieur ou égal à A.
Le nombre de termes inférieurs strictement à N est $1 + 2 + \ldots + (N-1) = \dfrac{N(N-1)}{2}$.
Ainsi, en prenant comme valeur de n_0 le plus petit entier supérieur ou égal à $\dfrac{N(N-1)}{2}$, on a $k_n \geqslant A$ pour tout $n \geqslant n_0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = +\infty$.

Corrigé exercice 100 :

1. a. Pour tout entier naturel n, on a $(v_{n+1}-u_{n+1})-(v_n-u_n) = v_{n+1}-v_n-(u_{n+1}-u_n)$.
   Or, comme (v_n) est décroissante, on a $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ et comme (u_n) est croissante, on a $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Ainsi, $(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) \leqslant 0$ et donc la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante.
   b. Comme la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et converge vers 0 alors elle est minorée par 0. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $v_n - u_n \geqslant 0 \Leftrightarrow v_n \geqslant u_n$.

2. a. Pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_0$. Donc la suite (u_n) est majorée par v_0.
   b. La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 donc elle converge vers un réel ℓ.

3. a. Par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = \ell' - \ell$.
   b. Or, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$ d'où $\ell' - \ell = 0$ et donc $\ell = \ell'$.

4. a. Commençons par montrer que la suite (u_n) est croissante.
   Pour tout entier naturel n, on a
   $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}$.
   Or, comme $(n+1)! = 1 \times 2 \times \ldots \times n \times (n+1) > 0$ alors $\dfrac{1}{(n+1)!} > 0$.
   Donc la suite (u_n) est croissante.
   Montrons à présent que la suite (v_n) est décroissante.
   Pour tout entier naturel n, on a :
   $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)! \times (n+1)} - \left(u_n + \dfrac{1}{n! \times n}\right)$
   $= u_{n+1} - u_n + \dfrac{1}{(n+1)! \times (n+1)} - \dfrac{1}{n! \times n}$

$= \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{n! \times n - (n+1)! \times (n+1)}{n! \times (n+1)! \times n(n+1)}$

$= \dfrac{-1}{(n+1)! \times n(n+1)}$

Or, pour tout entier naturel n, on a $(n+1)! > 0$ et $n(n+1) > 0$ d'où $\dfrac{-1}{(n+1)! \times n(n+1)} < 0$ donc la suite (v_n) est croissante.

Montrons à présent que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$.

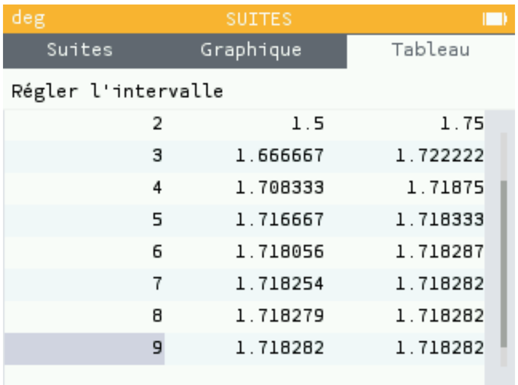
Pour tout entier naturel n, on a $u_n - v_n = u_n - \left(u_n + \dfrac{1}{n! \times n}\right) = -\dfrac{1}{n! \times n}$.

Or, $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ donc $n! \geqslant n$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$.

Ainsi, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} n! \times n = +\infty$.

D'où, par inverse, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n! \times n} = 0$. Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$.

b. Grâce à la calculatrice, en calculant u_9 et v_9, on trouve que la limite commune de ces deux suites vaut environ $1,718\,282$ à 10^{-6} près.



2	1.5	1.75
3	1.666667	1.722222
4	1.708333	1.71875
5	1.716667	1.718333
6	1.718056	1.718287
7	1.718254	1.718282
8	1.718279	1.718282
9	1.718282	1.718282

Corrigé exercice 101 :

1. Une équation de la tangente à f au point d'abscisse x_n est $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$. Et, pour tout entier naturel n, on a

$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0 \Leftrightarrow x_{n+1} f'(x_n) - x_n f'(x_n) + f(x_n) = 0$

$\Leftrightarrow x_{n+1} f'(x_n) = x_n f'(x_n) - f(x_n) \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

2. a. Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $f'(x) = 2x$.

D'où, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \dfrac{2x_n^2 - x_n^2 + 2}{2x_n} = \dfrac{x_n^2 + 2}{2x_n}$.

b. La fonction g est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions définies, dérivables et ne s'annulant pas sur cet intervalle.

Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$g'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{[v(x)]^2} = \dfrac{2x \times 2x - 2(x^2+2)}{(2x)^2} = \dfrac{x^2 - 2}{2x^2}$.

Or, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $2x^2 \geqslant 0$ et $x^2 - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 2 \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{2}$.

Ainsi, la fonction g est décroissante sur $\left]0; \sqrt{2}\right[$ et croissante sur $\left]\sqrt{2}; +\infty\right[$.

Elle admet donc un minimum en $\sqrt{2}$ qui vaut $g(\sqrt{2}) = \dfrac{(\sqrt{2})^2+2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la proposition : « $\sqrt{2} \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $n = 0$.

$x_0 = 2$ et $x_1 = \dfrac{x_0^2+2}{2x_0} = \dfrac{2^2+2}{2\times 2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ donc $\sqrt{2} \leqslant x_1 \leqslant x_0$. On en déduit que P_0 est vraie.

Hérédité : On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $\sqrt{2} \leqslant x_{k+1} \leqslant x_k$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $\sqrt{2} \leqslant x_{k+2} \leqslant x_{k+1}$.

Par hypothèse de récurrence, on a $\sqrt{2} \leqslant x_{k+1} \leqslant x_k$. Or, comme la fonction g est croissante sur $\left[\sqrt{2}; +\infty\right[$, on a alors $g(\sqrt{2}) \leqslant g(x_{k+1}) \leqslant g(x_k)$ c'est-à-dire $\sqrt{2} \leqslant x_{k+2} \leqslant x_{k+1}$.

Ainsi, P_0 est vraie et, pour tout entier k, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie donc $\sqrt{2} \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$.

d. La suite (x_n) est donc décroissante et minorée par $\sqrt{2}$: elle converge vers un réel $\ell \geqslant \sqrt{2}$.

e. On a $\ell = \dfrac{\ell^2+2}{2\ell} \Leftrightarrow 2\ell^2 = \ell^2 + 2 \Leftrightarrow \ell^2 = 2 \Leftrightarrow \ell = \sqrt{2}$ ou $\ell = -\sqrt{2}$. Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$ donc $\ell = \sqrt{2}$.

3. a. On a $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$. Comme $\Delta > 0$, l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ admet deux solutions réelles : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

b. Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $f'(x) = 2x - 1$.

D'où, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - x_n - 1}{2x_n - 1} = \dfrac{x_n^2+1}{2x_n-1}$.

c. La fonction g est définie et dérivable sur $[1; +\infty[$ comme quotient de fonctions définies, dérivables et ne s'annulant pas sur cet intervalle. Et, pour tout $x \geqslant 1$, $g'(x) = \dfrac{2x^2-2x-2}{(2x-1)^2} = \dfrac{2(x^2-x-1)}{(2x-1)^2}$.

Or, pour tout réel $x \geqslant 1$, on a $(2x-1)^2 \geqslant 0$ et $x^2 - x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \Phi$.

Ainsi, la fonction g est décroissante sur $[1; \Phi[$ et croissante sur $]\Phi; +\infty[$.

Elle admet donc un minimum en Φ qui vaut $g(\Phi) = \dfrac{\Phi^2+1}{2\Phi-1} = \Phi$. (Remarque : $\Phi^2 - 1\Phi - 1 = 0$ d'où $2\Phi^2 - \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ et donc $2\Phi^2 - \Phi = \Phi^2 + 1$ et par conséquent $\Phi(2\Phi - 1) = \Phi^2 + 1$ d'où la valeur de $g(\Phi)$.)

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la proposition : « $\Phi \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $n = 0$.

$x_0 = 2$ et $x_1 = \dfrac{x_0^2+1}{2x_0-1} = \dfrac{2^2+1}{2\times 2-1} = \dfrac{5}{3}$ donc $\Phi \leqslant x_1 \leqslant x_0$. On en déduit que P_0 est vraie.

Hérédité : On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $\Phi \leqslant x_{k+1} \leqslant x_k$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $\Phi \leqslant x_{k+2} \leqslant x_{k+1}$.

Par hypothèse de récurrence, on a $\Phi \leqslant x_{k+1} \leqslant x_k$. Or, comme la fonction g est croissante sur $[\Phi;+\infty[$, on a alors $g(\Phi) \leqslant g(x_{k+1}) \leqslant g(x_k)$ c'est-à-dire $\Phi \leqslant x_{k+2} \leqslant x_{k+1}$.

Ainsi, P_0 est vraie et, pour tout entier naturel k, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie donc $\Phi \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$.

e. La suite (x_n) est donc décroissante et minorée par Φ : elle converge vers un réel $\ell \geqslant \Phi$.

f. On a $\ell = \dfrac{\ell^2+1}{2\ell-1} \Leftrightarrow \ell(2\ell-1) = \ell^2+1 \Leftrightarrow \ell^2-\ell-1=0 \Leftrightarrow \ell = \Phi$ car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant \Phi$.

Corrigé exercice 102 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la proposition : « $u_n > 0$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$.

   $u_0 \in \mathbb{R}^{*+}$ donc $u_0 > t0$. On en déduit que P_0 est vraie.

   Hérédité : On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $u_k > 0$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $u_{k+1} > 0$. On a $u_k^2 + a > 0$ car un carré est toujours positif et a est un nombre réel strictement positif. Donc $\dfrac{u_k^2+a}{u_k} > 0$ par hypothèse de récurrence, c'est-à-dire $u_{k+1} > 0$.

   Ainsi, P_0 est vraie et, pour tout entier naturel k, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie donc $u_n > 0$.

2. a. Pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{(u_n-\sqrt{a})^2}{2u_n} = \dfrac{u_n^2 - 2u_n\sqrt{a} + a}{2u_n}$
   $= \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a} = u_{n+1} - \sqrt{a}$.

   b. D'après la question précédente, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - \sqrt{a} = \dfrac{(u_n-\sqrt{a})^2}{2u_n}$. Or, $(u_n-\sqrt{a})^2 \geqslant 0$ car un carré est toujours positif dans $\mathbb{R}$ et $u_n \geqslant 0$ d'après la question 1. Ainsi, $\dfrac{(u_n-\sqrt{a})^2}{2u_n} \geqslant 0$ et donc $u_{n+1} - \sqrt{a} \geqslant 0$.

   c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) - u_n = \dfrac{(\sqrt{a}-u_n)(\sqrt{a}+u_n)}{2u_n}$

   Or, d'après la question 2.b., on a $u_n - \sqrt{a} \geqslant 0$ d'où $\sqrt{a} - u_n \leqslant 0$.

De plus, comme $u_n \geqslant 0$ alors $\sqrt{a}+u_n \geqslant 0$. Ainsi, on a $(\sqrt{a}-u_n)(\sqrt{a}+u_n) \leqslant 0$.
Et comme, $2u_n \geqslant 0$, alors $\dfrac{(\sqrt{a}-u_n)(\sqrt{a}+u_n)}{2u_n} \leqslant 0$.
Donc la suite (u_n) est décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 (d'après la question 1., elle est aussi minorée par $\sqrt{a}$ d'après la question 2.b.) donc elle converge vers un réel ℓ.

4. On a $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{a}{\ell}\right) \Leftrightarrow \ell = \dfrac{\ell^2+a}{2\ell} \Leftrightarrow \ell = \sqrt{a}$ ou $\ell = -\sqrt{a}$.
Or, comme (u_n) est minorée par 0, alors $\ell \geqslant 0$ et donc $\ell = \sqrt{a}$.

Corrigé exercice 103 :

Partie A

1. On a $u_0 = \lambda r_1^0 + \mu r_2^0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda r_1^1 + \mu r_2^1 = \lambda r_1 + \mu r_2$.
Ainsi, $u_1 - r_1 u_0 = \lambda r_1 + \mu r_2 - r_1(\lambda+\mu) = \mu(r_2 - r_1)$.
Donc $\mu = \dfrac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}$.
De même, $u_1 - r_2 u_0 = \lambda r_1 + \mu r_2 - r_2(\lambda+\mu) = \lambda(r_1 - r_2)$.
Donc $\lambda = \dfrac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1}$.

2. a. On a $\lambda r_1^0 + \mu r_2^0 = \lambda + \mu = \dfrac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1} + \dfrac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} = \dfrac{u_0(r_2 - r_1)}{r_2 - r_1} = u_0$.
Donc $P(0)$ est vraie.
$\lambda r_1^1 + \mu r_2^1 = \lambda r_1 + \mu r_2 = \dfrac{r_2 u_0 - u_1}{r_2 - r_1} r_1 + \dfrac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} r_2 = \dfrac{u_1(r_2 - r_1)}{r_2 - r_1} = u_1$.
Donc $P(1)$ est vraie.
b. Comme $P(k)$ est vraie, on a $u_k = \lambda r_1^k + \mu r_2^k$ et comme $P(k+1)$ est vraie, on a $u_{k+1} = \lambda r_1^{k+1} + \mu r_2^{k+1}$.
$u_{k+2} = a u_{k+1} + b u_k = a(\lambda r_1^{k+1} + \mu r_2^{k+1}) + b(\lambda r_1^k + \mu r_2^k) = a\lambda r_1^{k+1} + a\mu r_2^{k+1} + b\lambda r_1^k + b\mu r_2^k = \lambda r_1^k(a r_1 + b) + \mu r_2^k(a r_2 + b)$
$= \lambda r_1^k \times r_1^2 + \mu r_2^k \times r_2^2$, car r_1 et r_2 sont solutions de (E).
$= \lambda r_1^{k+2} + \mu r_2^{k+2}$.
Ainsi,$P(k+2)$ est vraie.
c. Ainsi, $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies et, pour tout entier naturel k, lorsque $P(k)$ et $P(k+1)$ sont vraies, alors $P(k+2)$ est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie donc $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

3. L'équation caractéristique associée est $r^2 = r + 1 \Leftrightarrow r^2 - r - 1 = 0$.
On a $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5$. Comme $\Delta > 0$, l'équation $r^2 = r + 1$ admet deux solutions $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On a donc $\lambda = \dfrac{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\times 1 - 1}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\dfrac{1+\sqrt{5}-2}{2}}{\dfrac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\dfrac{2\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

et $\mu = \dfrac{1 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\times 1}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\dfrac{2-1+\sqrt{5}}{2}}{\dfrac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}{\dfrac{2\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

Donc, pour tout entier naturel n, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Partie B

1. Comme r_0 est l'unique solution de l'équation (E), on a $r_0^2 = ar_0 + b$, c'est-à-dire $r_0^2 - ar_0 - b = 0$. Ainsi, r_0 est l'unique racine du polynôme $x^2 - ax - b = 0$ d'où $x^2 - ax - b = (x - r_0)^2$. Or, $(x - r_0)^2 = x^2 - 2r_0x + r_0^2$. D'où $x^2 - ax - b = x^2 - 2r_0x + r_0^2$. Ainsi, par identification, on a $-a = -2r_0$ et $-b = r_0^2$. On obtient bien $r^2 = 2r_0r - r_0^2$.

2. On a $u_0 = \lambda r_0^0 + \mu \times 0 \times r_0^0 = \lambda$ et $u_1 = \lambda r_0^1 + \mu \times 1 \times r_0^1 = \lambda r_0 + \mu r_0$.

   D'où $u_1 - r_0u_0 = \lambda r_0 + \mu r_0 - r_0\lambda = \mu r_0$ et alors $\mu = \dfrac{u_1 - r_0u_0}{r_0}$.

3. **Initialisation :** On a $\lambda r_0^0 + \mu \times 0 \times r_0^0 = \lambda = u_0$ Donc $P(0)$ est vraie.

   Et $\lambda r_0^1 + \mu \times 1 \times r_0^1 = \lambda r_0 + \mu r_0 = u_1$. Donc $P(1)$ est vraie.

   Hérédité : Supposons que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire $u_k = \lambda r_0^k + \mu k r_0^k$, et que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} = \lambda r_0^{k+1} + \mu(k+1)r_0^{k+1}$.

   On a $u_{k+2} = au_{k+1} + bu_k = a(\lambda r_0^{k+1} + \mu(k+1)r_0^{k+1}) + b(\lambda r_0^k + \mu k r_0^k)$, par hypothèse donc

   $u_{k+2} = a\lambda r_0^{k+1} + a\mu(k+1)r_0^{k+1} + b\lambda r_0^k + b\mu k r_0^k$

   $= \lambda r_0^k(ar_0+b) + \mu r_0^k(k(ar_0+b)+ar_0) = \lambda r_0^k \times r_0^2 + \mu r_0^k(kr_0^2+r_0^2-b)$, car r_0 solution de (E) $= \lambda r_0^{k+2} + \mu r_0^k(kr_0^2+r_0^2+r_0^2)$, car $-b = r_0^2$ d'après 1. $= \lambda r_0^{k+2} + \mu(k+2)r_0^{k+2}$. Donc $P(k+2)$ est vraie. Ainsi, $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies et, pour tout entier naturel k, lorsque $P(k)$ et $P(k+1)$ sont vraies, alors $P(k+2)$ est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie donc $u_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n$.

4. L'équation caractéristique associée est $r^2 = 4r - 4 \Leftrightarrow r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r-2)^2 = 0 \Leftrightarrow r - 2 = 0 \Leftrightarrow r = 2$.

   Ainsi, l'équation caractéristique admet une unique solution $r_0 = 2$.

   On a donc $\lambda = u_0 = 4$ et $\mu = \dfrac{3 - 2\times 4}{2} = \dfrac{-5}{2}$.

   Donc, pour tout entier naturel n, $u_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n = 4 \times 2^n - \dfrac{5}{2}n \times 2^n$.

12 Exercices Préparer le bac

Corrigé exercice 104 :

1. D'après le contexte, on peut supposer que la suite (T_n) est décroissante. En effet, le café devrait naturellement se refroidir.

2. Pour tout entier naturel n, on a $T_{n+1}-T_n = -0,2(T_n-10) \Leftrightarrow T_{n+1} = T_n-0,2T_n+2 = 0,8T_n + 2$.

3. a. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = T_{n+1} - 10 = 0,8T_n + 2 - 10 = 0,8T_n - 8 = 0,8(T_n - 10) = 0,8u_n$.
   Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $u_0 = T_0 - 10 = 70$.
   b. Pour tout entier naturel n, on a alors $u_n = u_0 \times q^n = 70 \times 0,8^n$.
   D'où $T_n = u_n + 10 = 70 \times 0,8^n + 10$.
   c. Comme $-1 < 0,8 < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$.
   D'où, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 70 \times 0,8^n = 0$.
   Et alors, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 70 \times 0,8^n + 10 = 10$.

4. a. À la fin de l'exécution de cet algorithme, la variable n contient la valeur 4.
   b. Au bout de 4 minutes, la température du café sera inférieure ou égale à 40°C.

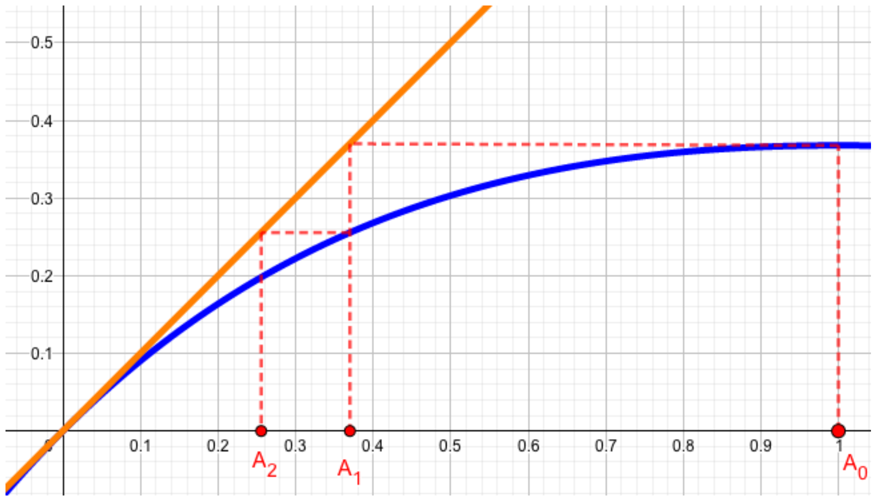
Corrigé exercice 105 :

Partie A
La fonction f est une fonction définie et dérivable sur $[0;\infty[$ comme produit de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle. Et, pour tout $x \in [0;\infty[$, $f'(x) = 1\times e^{-x}+(-e^{-x})\times x = e^{-x}(1-x)$. Or, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $1-x$.
Or, $1-x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$. Donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $[0;1]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $[1;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f	0	↗	e^{-1}	↘	0

Partie B

1. On obtient le graphique suivant.



2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la proposition : « $1 \geqslant u_n > 0$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$.

   $u_0 = 1$ donc on a bien $1 \geqslant u_0 > 0$. On en déduit que P_0 est vraie.

   Hérédité : On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $1 \geqslant u_k > 0$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $1 \geqslant u_{k+1} > 0$.

   Par hypothèse de récurrence, on a $1 \geqslant u_k > 0$. Or, comme la fonction f est croissante sur $[0; 1]$, on en déduit que $f(1) \geqslant f(u_k) > f(0)$ c'est-à-dire $\mathrm{e}^{-1} \geqslant u_{k+1} > 0$.

   Donc $1 \geqslant u_{k+1} > 0$.

   Ainsi, P_0 est vraie et, pour tout entier naturel k, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie donc $1 \geqslant u_n > 0$.

3. Montrer que (u_n) est décroissante revient à montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$, c'est-à-dire $f(u_n) \leqslant u_n$. Comme $u_n > 0$, nous allons prouver que $f(x) \leqslant x$ pour tout réel $x > 0$. On a $-x < 0$ d'où $\mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^0$ par croissance de la fonction exponentielle sur $]-\infty; 0]$. Ainsi, on a $\mathrm{e}^{-x} < 1$ et comme $x > 0$, alors $x\mathrm{e}^{-x} < x$. La suite (u_n) est donc bien décroissante.

4. a. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

   b. On a $x\mathrm{e}^{-x} = x \Leftrightarrow x\mathrm{e}^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x(\mathrm{e}^{-x} - 1) = 0$
   $\Leftrightarrow x = 0$ ou $\mathrm{e}^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $-x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
   Ainsi, la limite de la suite (u_n) vaut 0.

Partie C

$u \leftarrow 1$
$S \leftarrow u$
Pour k variant de 1 à 100 :
  $u \leftarrow u \times \mathrm{e}^{-u}$
  $S \leftarrow S + u$
Fin Pour

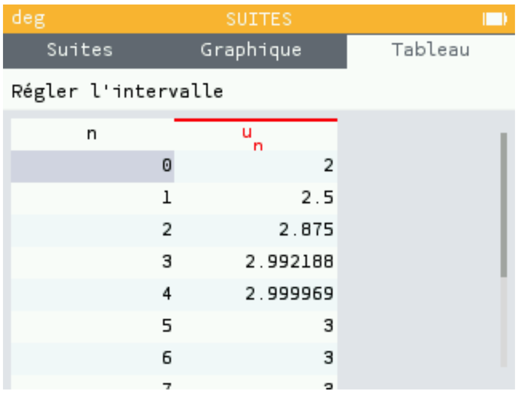
Corrigé exercice 106 :

Partie A

1. $u_1 = -\dfrac{1}{2}u_0^2 + 3u_0 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2} \times 2^2 + 3 \times 2 - \dfrac{3}{2} = -2 + 6 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$

   $u_2 = -\dfrac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + 3 \times \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{25}{8} + \dfrac{15}{2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{23}{8}$

2. On a $u_3 \approx 2,99219$ et $u_4 \approx 2,99997$.



3. La suite (u_n) semble être croissante et converger vers 3.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{3}{2} - 3 = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{9}{2}$

   et $-\dfrac{1}{2}v_n^2 = -\dfrac{1}{2}(u_n - 3)^2 = -\dfrac{1}{2}(u_n^2 - 6u_n + 9) = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{9}{2}$.

   Donc on a bien $v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n^2$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la proposition : « $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$.

   $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$ donc $-1 \leqslant v_0 \leqslant 0$. On en déduit que P_0 est vraie.

   Hérédité : On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $-1 \leqslant v_k \leqslant 0$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $-1 \leqslant v_{k+1} \leqslant 0$.

   Par hypothèse de récurrence, on a $-1 \leqslant v_k \leqslant 0$. D'où $0 \leqslant v_k^2 \leqslant 1$ car la fonction carrée est décroissante sur $[-1; 0]$. Donc $-\dfrac{1}{2} \leqslant -\dfrac{1}{2}v_k^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant v_{k+1} \leqslant 0$.

   Ainsi, P_0 est vraie et, pour tout entier naturel k, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie donc $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

3. a. Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{2}v_n^2 - v_n = -v_n\left(\dfrac{1}{2}v_n + 1\right)$.

b. Pour tout entier naturel n, on a $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$ d'où $0 \leqslant -v_n \leqslant 1$ et $0 < \frac{1}{2} \leqslant v_n \leqslant 1$. Donc $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ et alors la suite (v_n) est croissante.

4. La suite (v_n) est croissante et majorée par 0, donc elle converge.

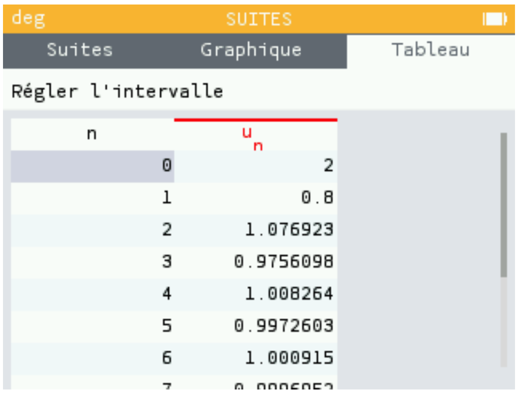
5. $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ell^2 + \ell = 0 \Leftrightarrow \ell\left(\frac{1}{2}\ell + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\frac{1}{2}\ell + 1 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = -2$.

   Or, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$, donc $\ell = 0$.

6. Pour tout entier naturel n, on a $u_n = v_n + 3$. Or, comme (v_n) converge, alors (u_n) converge aussi. Par somme, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$. On a montré que la suite (u_n) est croissante et admet pour limite 3. Nos conjectures sont donc bien validées.

Corrigé exercice 107 :

1. a. $u_1 = \dfrac{u_0 + 2}{2u_0 + 1} = \dfrac{2+2}{4+1} = \dfrac{4}{5}$. On effectue les mêmes types de calculs pour les autres valeurs et on obtient $u_1 = 0,8$, $u_2 \approx 1,08$, $u_3 \approx 0,98$ et $u_4 \approx 1,01$.



n	u_n
0	2
1	0.8
2	1.076923
3	0.9756098
4	1.008264
5	0.9972603
6	1.000915
7	[illegible]

b. $u_1 - 1 = -0,2$ est négatif et $(-1)^1 = -1$ est négatif aussi.
$u_2 - 1 \approx 0,08$ est positif et $(-1)^2 = 1$ est positif aussi.
$u_3 - 1 \approx -0,02$ est négatif et $(-1)^3 = -1$ est négatif aussi.
$u_4 - 1 \approx 0,01$ est positif et $(-1)^2 = 1$ est positif aussi.

c. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} - 1 = \dfrac{u_n + 2 - 2u_n - 1}{2u_n + 1} = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la proposition : « $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$ ». On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : Pour $n = 0$.
$u_0 - 1 = 1$ est positif et $(-1)^0 = 1$ est aussi positif. Donc P_0 est vraie.
Hérédité : On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $u_k - 1$ a le même signe que $(-1)^k$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $u_{k+1} - 1$ a le même signe que $(-1)^{k+1}$.

Par hypothèse de récurrence, $u_k - 1$ a le même signe que $(-1)^k$.
Montrons que $u_{k+1} - 1$ est du signe contraire de $u_k - 1$.
On a $u_{k+1} - 1 = \dfrac{-u_k + 1}{2u_k + 1} = \dfrac{-(u_k - 1)}{2u_k + 1}$.
Or, $-(u_k - 1)$ est du signe contraire de $u_k - 1$ et $2u_k + 1$ est positif car d'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
Donc $\dfrac{-(u_k - 1)}{2(u_k - 1) + 3}$ est du signe contraire de $u_k - 1$ c'est-à-dire $u_{k+1} - 1$ est du signe contraire de $u_k - 1$. Donc $u_{k+1} - 1$ a le même signe que $(-1)^{k+1}$.
Ainsi, P_0 est vraie et, pour tout entier naturel k, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie donc $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

2. a. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} - 1}{\dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} + 1} = \frac{\dfrac{u_n + 2 - (2u_n + 1)}{2u_n + 1}}{\dfrac{u_n + 2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1}} = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1} \times \frac{2u_n + 1}{3u_n + 3}$$
$$= \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}.$$

b. Pour tout entier naturel n, $-\dfrac{1}{3}v_n = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3} = v_{n+1}$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{2 - 1}{2 + 1} = \dfrac{1}{3}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $v_n = v_0 \times q^n = \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

c. Pour tout entier naturel n, on a donc $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n} = \dfrac{1 + \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n}$.

Or, comme $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$.

D'où, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$. Ainsi, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 1$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 + \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n} = 1$.

Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 5 : Limites de fonctions

Table des matières

1 Informations sur ce chapitre

Le B.O. souligne la part centrale qu'occupe l'analyse en mathématiques et le rôle essentiel qu'elle joue comme outil de modélisation et de calcul permettant l'étude de phénomènes issus d'autres disciplines.
L'introduction de la notion de limites s'appuie sur une approche intuitive à partir d'exemples élémentaires. Puis les définitions de limite à l'infini et en un point sont explicitées sans qu'une maîtrise parfaite du formalisme ne soit attendue.
Ce chapitre commence par une activité permettant d'introduire la notion de limite de façon intuitive et par observation du comportement de quelques fonctions. Ensuite le cours présente dans une première partie les définitions de limites à l'infini et en un point ainsi que la définition d'asymptote horizontale et verticale. Les définitions sont données volontairement de façon assez formelle et rigoureuse pour donner aux élèves des outils concrets pour aborder les démonstrations. Une formulation plus simple et plus imagée est donnée en remarque pour aider les élèves à bien appréhender cette nouvelle notion. Dans une deuxième partie, les théorèmes d'opérations sur les limites sous forme de tableaux sont présentés et enfin, une dernière partie donne les autres théorèmes permettant de déterminer des limites (théorèmes de comparaison, de croissance comparée, etc.).
Les premiers exercices proposent de s'approprier la notion de limite par lecture graphique ou lecture de tableau de variation puis de s'essayer à quelques démonstrations de limites simples. Il est ensuite proposé de nombreux exercices de calculs de limites de difficulté croissante. Assez simples au début et ne nécessitant que l'utilisation des théorèmes d'opérations sur les limites pour faciliter une bonne appropriation de ces derniers, ils permettent par la suite de balayer différentes techniques permettant de lever l'indétermination lorsqu'il y en a une. Une troisième partie d'exercices fait intervenir les théorèmes des comparaisons.
Une fois ces méthodes acquises, des problèmes plus complets, mettant en jeu les différentes définitions et méthodes de ce chapitre, pourront être abordés ainsi que des démonstrations plus complexes et quelques approfondissements permettant d'aller un peu plus loin dans l'étude du comportement asymptotique des fonctions. Certains problèmes présentent également quelques applications concrètes de la notion de limite.

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

1. Le nombre 1 est une racine évidente de ce trinôme. Notons x_2 son autre racine. De plus, le coefficient dominant de ce trinôme vaut 1. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la forme factorisée de ce trinôme s'écrit $f(x) = (x-1)(x-x_2)$. On obtient donc que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (1+x_2)x + x_2$ et donc, puisque $f(x) = x^2 - 3x + 2$, on a $x_2 = 2$. Au final, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)$.

2. Ce trinôme admet pour discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 49 > 0$. Il admet donc deux racines réelles : $x_1 = -2$ et $x_2 = \frac{1}{3}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 3(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

3. On reconnaît l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, avec $a = 2x$ et $b = 5$. La forme factorisée de ce trinôme est donc $h(x) = (2x-5)^2$.

4. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = -19$. Ce trinôme n'admet donc aucune racine réelle et n'est donc pas factorisable dans $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 2 :

1. Pour tout $x \neq 0$, $A(x) = x - x \times \frac{3}{x} = x\left(1 - \frac{3}{x}\right)$.

2. Pour tout $x \neq 0$, $B(x) = x^2 - x^2 \times \frac{3}{x} + x^2 \times \frac{5}{x^2} = x^2\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)$.

3. Pour tout $x > 0$, $C(x) = x\left(2 + \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$. Dans ce chapitre, pour déterminer la limite en $+\infty$de cette fonction, on écrira plutôt $C(x) = x\left(2 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right)$.

4. Pour tout $x > 0$, $D(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x}\right)$.

Corrigé exercice 3 :

1. f est un polynôme et est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

2. f est la somme de la fonction carré, dérivable sur $\mathbb{R}$, et de la fonction racine carrée, dérivable sur $]0;+\infty[$. f est donc dérivable sur $]0;+\infty[$. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition, ici $\mathbb{R}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{(2x-1)(x^4+1) - 4x^3(x^2-x)}{(x^4+1)^2} = \frac{-2x^5+3x^4+2x-1}{(x^4+1)^2}$.

4. La fonction f est de la forme $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = \sqrt{x} + x$ et $v(x) = x - 1$. u est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, et v est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus $v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Donc f est dérivable sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)(x-1) - (\sqrt{x}+x)}{(x-1)^2} = \frac{-x-2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$.

Corrigé exercice 4 :

1. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, d'après la formule de dérivation d'un produit, $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

2. a. Pour tout $h > 0$, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h}$.

   b. On a $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$ donc la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Corrigé exercice 5 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(x+1)$.

2. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{2x+1} \times \mathrm{e}^{-3x} = \mathrm{e}^{2x+1-3x} = \mathrm{e}^{-x+1}$.

   b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{-4x} + 5\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-4x} + 5\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-x} + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-2x} + 6\mathrm{e}^x$.

3. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(1 + 3\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-2x}\right) = \mathrm{e}^{2x}\left(1 + 3\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}\right)$.

   b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(1 - \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{-2x}\right) = \mathrm{e}^{2x}(1 - \mathrm{e}^{-4x})$.

Corrigé exercice 6 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. Donc pour tout $x \geqslant 0$, $-x \leqslant x\sin x \leqslant x$, d'où $-x-1 \leqslant f(x) \leqslant x-1$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Donc pour tout $x \geqslant 0$, $-x \leqslant x\cos x \leqslant x$, d'où $-x+2 \leqslant x\cos x + 2 \leqslant x+2$. Et donc, pour tout $x \geqslant 0$, $\frac{-x+2}{x^2+1} \leqslant g(x) \leqslant \frac{x+2}{x^2+1}$ car $x^2+1 > 0$ pour tout réel x.

Corrigé exercice 7 :

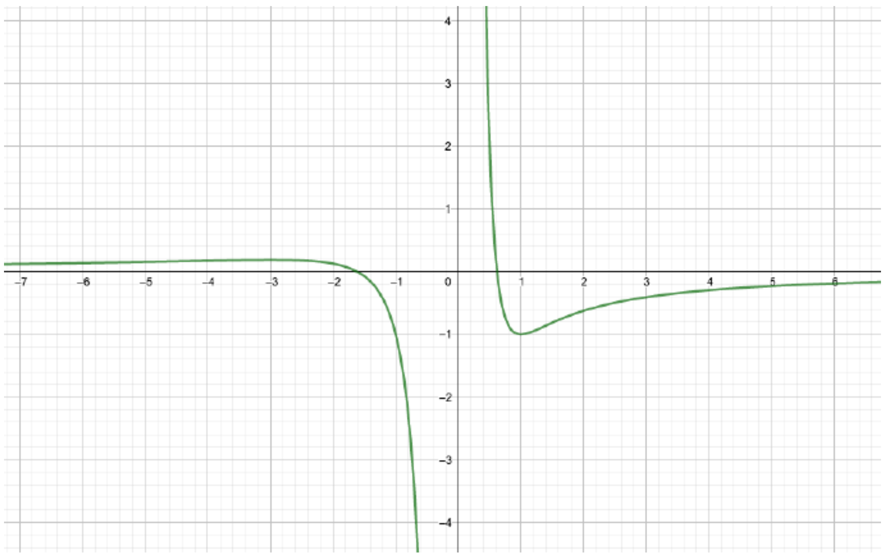
1. On a $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

2. f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Le dénominateur de ce quotient ne s'annule pas sur cet ensemble. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}^* = \mathcal{D}_f$. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \frac{(-2x-1)\times x^3 - 3x^2(-x^2-x+1)}{(x^3)^2} = \frac{x^2+2x-3}{x^4}$. On vérifie bien que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $(x-1)(x+3) = x^2+2x-3$ d'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^4} = \frac{(x-1)(x+3)}{x^4}$.

3. Le tableau de variations de f est le suivant.

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^4		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{5}{27}$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

4. Avec GeoGebra, on obtient la courbe suivante.



3 Activités

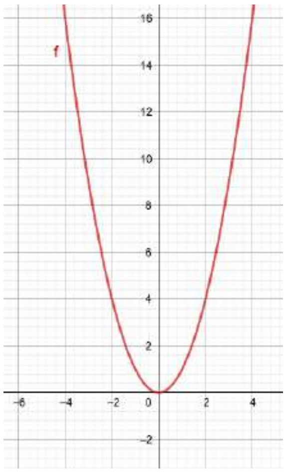
3.1 Activité A : Notion de limite en l'infini

Corrigé activité A :

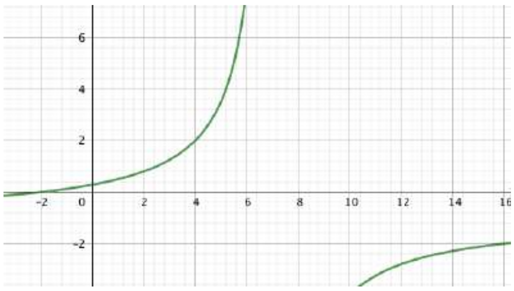
Questions :

1. La fonction f est la fonction carré. Elle est donc définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. La fonction g n'est pas définie lorsque $7 - x = 0$. D'où $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{7\}$. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont définies sur $\mathbb{R}$ donc la fonction h est définie sur $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$. La fonction i est la fonction racine carrée, d'ensemble de définition $\mathcal{D}_i = [0; +\infty[$. La fonction j est définie lorsque $\frac{1}{x}$ est définie, d'où $\mathcal{D}_j = \mathbb{R}^*$. La fonction k n'est pas définie lorsque $(2 - x^2) = 0$, d'où $\mathcal{D}_k = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. La fonction m est définie lorsque $\frac{1}{x}$ est définie, d'où $\mathcal{D}_m = \mathbb{R}^*$.

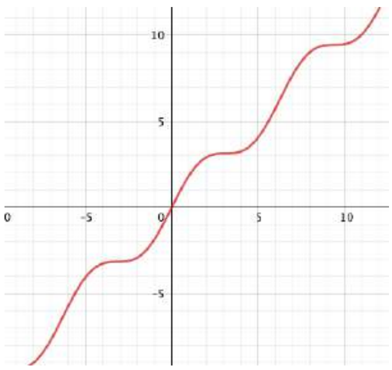
2. a. On obtient les courbes ci-dessous.



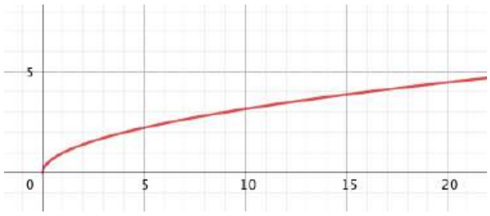
Fonction f



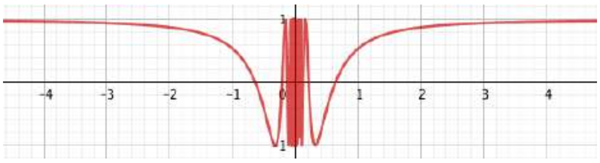
Fonction g



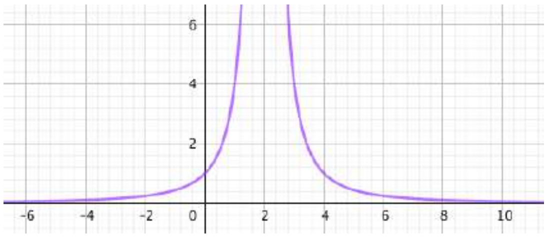
Fonction h



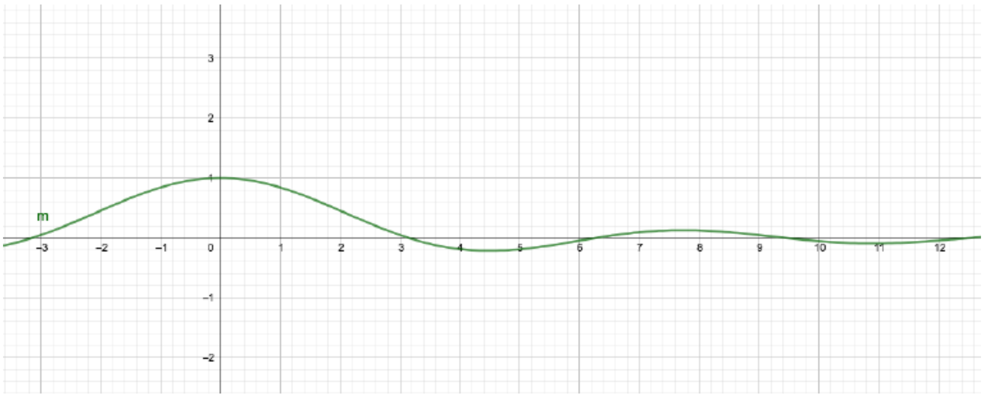
Fonction i



Fonction j



Fonction k



Fonction m

b. On peut regrouper ces fonctions en deux catégories. La première contenant les fonctions f, h et i : les courbes ont l'air de monter de plus en plus haut lorsque x devient de plus en plus grand. La deuxième contenant les fonctions g, j, k et m : les images semblent être proches d'un même nombre lorsque x devient de plus en plus grand.

3. a. On utilise les variations de la fonction carré. Pour que $x^2 > 25$, on doit prendre $x > 5$ ou $x < -5$. De même, pour que $x^2 > 10^2$, on doit prendre $x > 10$ ou $x < -10$. Et enfin, pour avoir $x^2 > 10^8$, on doit prendre $x > 10^4$ ou $x < -10^4$.

b. On utilise la stricte croissance de la fonction racine carrée. Pour avoir $\sqrt{x} > 25$, on doit prendre $x > 625$. Pour avoir $\sqrt{x} > 100$, on doit prendre $x > 10^4$. Et enfin, pour avoir $\sqrt{x} > 10^8$, on doit prendre $x > 10^{16}$.

c. Une fonction f a pour limite $+\infty$ lorsque que x tend vers $+\infty$ lorsque, quel que soit le nombre A réel, on peut trouver un x assez grand tel que $f(x) > A$.

4. a. On résout dans $\mathbb{R} \setminus \{7\}$ l'inéquation $-1 - g(x) < 1 \Leftrightarrow \frac{7-x+x+2}{7-x} > -1 \Leftrightarrow \frac{16-x}{7-x} > 0$. Le tableau de signe de cette expression est le suivant.

x	$-\infty$		7		16		$+\infty$
$16 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$7 - x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{16-x}{7-x}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Pour avoir $-1 - g(x) < 1$, on doit donc choisir $x < 7$ ou $x > 16$. De même, on obtient que pour avoir $-1 - g(x) < 0,1$, on doit choisir $x < 7$ ou $x > 97$. Et pour avoir $-1 - g(x) < 0,01$, on doit choisir $x < 7$ ou $x > 907$.

b. On procède de la même façon que dans la question précédente. Pour avoir $k(x) < 1$, on doit prendre $x < 0$ ou $x > 4$. Pour avoir $k(x) < 0,1$, on doit prendre $x < -2\sqrt{10} + 2$ ou $x > 2\sqrt{10} + 2$. Pour voir $k(x) < 0,01$, on doit prendre $x < -18$ ou $x > 22$.

c. Une fonction f a pour limite ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ si $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut dès que x est assez grand. Ou encore, si $|f(x) - \ell|$ est aussi proche de 0 que l'on veut dès que x est assez grand.

d. Pour visualiser graphiquement cette limite, on peut tracer sur le même graphique que la représentation de la fonction, f la droite d'équation $y = \ell$.

5. La fonction h a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. La fonction j a pour limite 1 en $+\infty$. La fonction m a pour limite 0 en $+\infty$.

Bilan : On dit qu'une fonction a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, lorsqu'elle dépasse n'importe quel nombre, aussi grand que l'on veut, si x est assez grand. On dit qu'une fonction a pour limite un réel ℓ en $+\infty$, lorsque la distance entre ℓ et $f(x)$ est aussi proche de 0 que l'on veut, si x est assez grand.

3.2 Activité B : Notion de limite infinie en un réel

Corrigé activité B :

Questions :

1. La fonction f est définie lorsque $x - 1 \neq 0$, d'où $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. La courbe représentative de f est « en deux parties ». Si on trace la droite d'équation $x = 1$, la courbe représentative de f ne la traverse pas. Avant $x = 1$, la courbe « plonge », de plus en plus à mesure qu'elle s'approche de la droite $x = 1$. En s'approchant de $x = 1$ par la droite, la courbe monte de plus en plus.

3. a. On a $f(2) = 1$, $f(1,1) = 10$, $f(1,01) = 100$ et $f(1,001) = 1000$. On remarque que plus x se rapproche de 1, en prenant des valeurs supérieures à 1, plus $f(x)$ devient grand.

   b. On a $f(0) = -1$, $f(0,9) = -10$, $f(0,99) = -100$ et $f(0,999) = -1000$. On remarque que plus x se rapproche de 1, en prenant des valeurs inférieures à 1, plus $f(x)$ devient petit.

4. La droite d d'équation $x = 1$ ne coupe pas $\mathcal{C}_f$ car 1 n'admet pas d'image par f. La droite et la courbe n'ont donc pas de point commun.

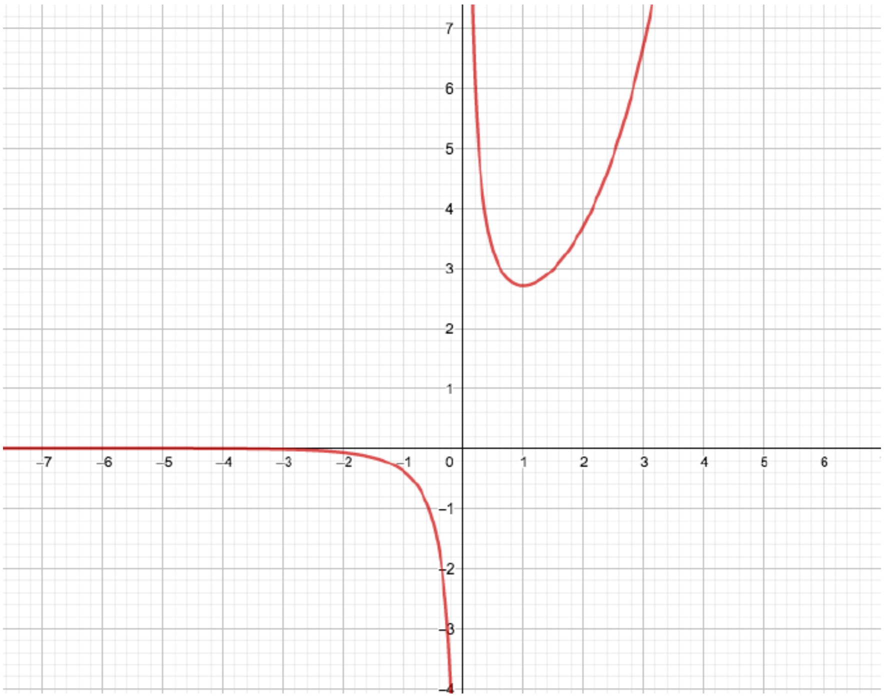
Bilan : La courbe représentative de f est de plus en plus proche de la droite d'équation $x = 1$ à mesure que x se rapproche de 1. Quand x se rapproche de 1, tout en prenant des valeurs inférieures, la courbe « plonge » de plus en plus : la fonction f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 1 en prenant des valeurs inférieures à 1. Quand x se rapproche de 1, tout en prenant des valeurs supérieures, la courbe « monte » de plus en plus : la fonction f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1 en prenant des valeurs supérieures à 1.

3.3 Activité C : Croissance comparée

Corrigé activité C :

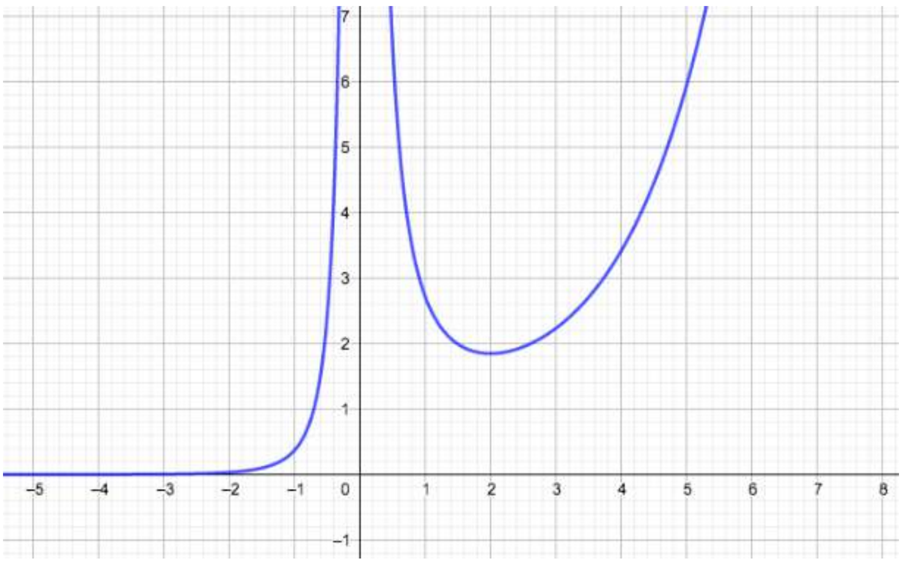
Questions :

1. a. On obtient la courbe ci-dessous.



   b. Cette fonction semble tendre vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. On obtient la courbe ci-dessous.



   Cette fonction semble tendre vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Ces deux fonctions semblent tendre vers 0 en $+\infty$.

4. a. (manipulation tableur)

b. On écrit dans la cellule B1 la formule = EXP(A1)/A1^{10}, puis on étire vers le bas. On obtient la feuille de calcul ci-dessous.

18	1,839E-05
19	2,9111E-05
20	4,7379E-05
21	7,9066E-05
22	0,00013497
23	0,00023523
24	0,00041779
25	0,00075503
26	0,00138651
27	0,00258412
28	0,00488276
29	0,00934458
30	0,01809764
31	0,03544149
32	0,0701332
33	0,14014529
34	0,28263323
35	0,57494516
36	1,17916978
37	2,43712941
38	5,07404537
39	10,6374792
40	22,4480883
41	47,6689066
42	101,829904
43	218,765164
44	472,531145
45	1025,95083
46	2238,55542
47	4907,51991
48	10807,4381
49	23903,9027
50	53091,3846

On constate alors que plus x est grand, plus $f(x)$ semble aussi l'être. On peut donc conjecturer que la fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

5. a. On écrit dans la cellule C1 la formule =EXP(A1)/A1^{50}, puis on étire vers le bas. On constate alors que plus x est grand, plus $g(x)$ semble s'approcher de 0. On peut donc conjecturer que la fonction g tend vers 0 en $+\infty$.

   b. (manipulation tableur)

   c. On écrit dans la cellule E1 la formule =EXP(D1)/D1^{50}, puis on étire vers le bas. On constate alors que plus x est grand, plus $g(x)$ semble aussi l'être. On peut donc conjecturer que la fonction g tend vers $+\infty$ en $+\infty$, ce qui remet en question l'hypothèse de la question 5.a. : on s'était arrêté trop tôt, à des valeurs de x trop petites.

Bilan : On peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 8 :

f est une fonction rationnelle. En $+\infty$ et $-\infty$, elle a donc même limite que la fonction $x \mapsto \frac{2x^2}{x^2}$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{2x^2}{x^2} = 2$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$, d'où $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 2$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$.

Réponse : c

Corrigé exercice 9 :

C'est faux. Pour le prouver, prenons un contre-exemple. Si on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = -x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$, alors on a bien $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, mais $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)g(x) = -1 \neq 0$.

Réponse : b

Corrigé exercice 10 :

Puisqu'on ne se trouve pas dans le cadre d'application du théorème des gendarmes, on ne peut pas conclure sur l'existence ou non d'une limite. Les réponses c. et d. peuvent donc être exclues. La réponse a. est fausse. Pour le prouver, prenons le contre-exemple suivant : on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$, $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $h(x) = 1$. Alors on a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) < f(x) < h(x)$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ qui n'est pas strictement supérieure à 0.

Réponse : b

Corrigé exercice 11 :

C'est faux. On peut le prouver en prenant comme contre-exemple la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x$. On a alors bien $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ mais $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{f(x)} = +\infty$.

Réponse : b

Corrigé exercice 12 :

f est une fonction rationnelle. En $+\infty$ et $-\infty$, elle a donc même limite que la fonction $x \mapsto \frac{-4x}{x}$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{-4x}{x} = -4$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$, d'où $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = -4$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$. Donc la réponse a. est vraie et la réponse b. est fausse. De plus, la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$, ainsi que $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty$,donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$. La réponse c. est donc vraie, et la réponse b. est fausse.

Réponses : a et c

Corrigé exercice 13 :

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant x^2$. Donc, pour tout $x > 0$, $0 \leqslant \frac{f(x)}{\mathrm{e}^x} \leqslant \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}$,car $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout x réel. Or, d'après le théorème de croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$ donc, par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$. Enfin, d'après le théorème des gendarmes, on déduit de ce qui précède que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\mathrm{e}^x} = 0$. La réponse b. est donc vraie. Puisque pour tout $x \in]0;+\infty[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant x^2$,le théorème des gendarmes nous permet aussi de déduire que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{\mathrm{e}^x} = 0$. La réponse a. est donc vraie. C_f admet une asymptote verticale si, et seulement si, il existe $a \in]0;+\infty[$ tel que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$. Ce qui est impossible puisque, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant x^2$. La réponse c. est donc fausse. Enfin, la réponse c. est fausse. On peut prendre la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 0$ comme contre-exemple.

$\boxed{\text{Réponses : a et b}}$

Corrigé exercice 14 :

Si $x = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et donc, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Mais si $x = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x = -1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et donc, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Donc f n'a pas de limite en $+\infty$. La réponse a. est donc vraie et la réponse b. est fausse. Pour tout x réel, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, d'où $-\mathrm{e}^x \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^x$ car $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout x réel. Or $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Donc la réponse d. est vraie et la réponse c. est fausse.

$\boxed{\text{Réponses : a et d}}$

Corrigé exercice 15 :

Par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ donc la réponse c. est vraie et les réponses a. et d. sont fausses. Par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ donc la réponse b. est vraie.

$\boxed{\text{Réponses : b et c}}$

Corrigé problème 16 :

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Et on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

2. La fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$. La courbe représentative de la fonction g admet donc la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$. De plus, $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} x^2 - x - 2 = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} x^2 - x - 2 = 4$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} 2x^2 - 8 = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} 2x^2 - 8 = 0^+$ donc, par

quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} g(x) = +\infty$. La courbe représentative de la fonction g admet donc la droite d'équation $x = -2$ comme asymptote verticale.

3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $h(x) = 2\frac{\sin(x)}{x} + 1 + \frac{1}{x}$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}$ d'où, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$. Par addition, on peut donc en déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 1$. La courbe représentative de la fonction h admet doncla droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} 2\sin(x) + x + 1 = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 2\sin(x) + x + 1 = 1$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x) = +\infty$. La courbe représentative de la fonction h admet doncla droite d'équation $x = 0$ comme asymptote verticale.

4. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = 0$. La courbe représentative de la fonction k admet donc la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $-\infty$. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x^2 = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^2 = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$. La courbe représentative de la fonction k admet donc la droite d'équation $x = 0$ comme asymptote verticale.

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1

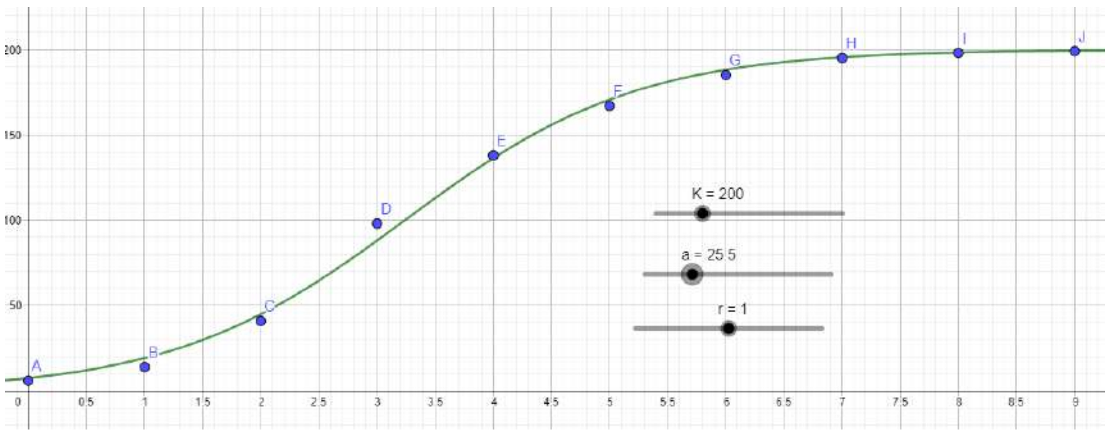
Méthode 1

1.

2.

3.

4. Voilà des valeurs que l'on peut par exemple utiliser.



5. La fonction N semble tendre vers 200 lorsque t vers $+\infty$. Le nombre d'habitants infectés ne semble donc pas dépasser le seuil des 200 personnes.

6. On place un point M sur la courbe de la fonction N, puis on trace la tangente à la courbe en ce point. La vitesse de propagation correspond alors au coefficient directeur de cette tangente. On cherche donc en quel point M ce nombre dérivé atteint sa valeur maximale. Expérimentalement, on obtient $x \approx 3,25$.

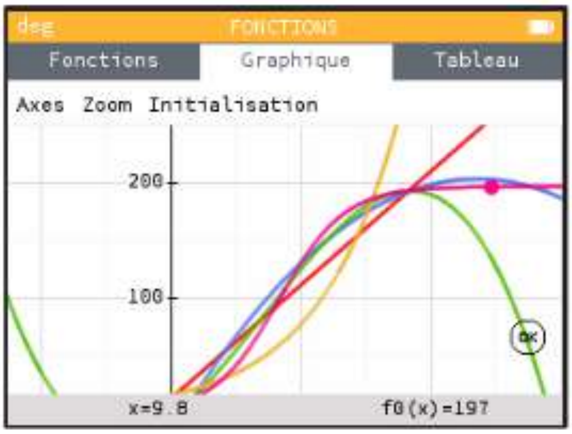
Méthode 2

1.

2. a. b. La calculatrice donne pour expression de f : $f(x) = 24,8x + 12,7$.

3. La calculatrice donne les expression suivantes : $g(x) = -2,5x^2 + 47,0x - 16,9$, $h(x) = -0,6x^3 + 5,2x^2 + 20,9x - 2,7$, $\ell(x) = 15,7 \times \mathrm{e}^{0,4x}$ et $m(x) = \frac{197,3}{1+27,5\mathrm{e}^{-1,0x}}$.

4. On obtient les courbes ci-dessous.



5. Les deux modèles semblant suivre au mieux les points sont la régression cubique et la logistique.

6. Dans notre problème, le nombre de personnes infectées ne peut pas diminuer. Or, avec le modèle cubique, la fonction devient décroissante à partir d'un certain nombre de jours. Le modèle logistique semble donc le plus approprié.

5.2 Corrigé du TP 2

Questions préliminaires

1. Dans l'écriture de f interviennent le quotient deux fonctions affines $x \mapsto 4x + 1$ et $x \mapsto x$ et la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$.

2. En posant, pour tout $x > 0$, $g(x) = \frac{4x+1}{x}$, on obtient bien $f(x) = \sqrt{g(x)}$.

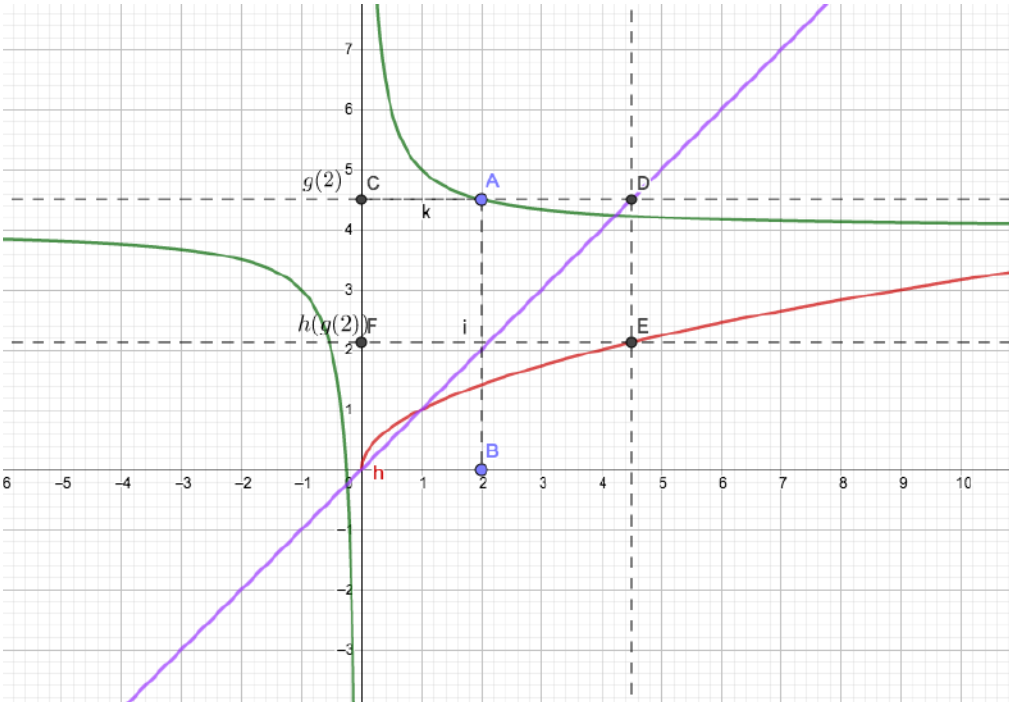
Méthode 1

1.

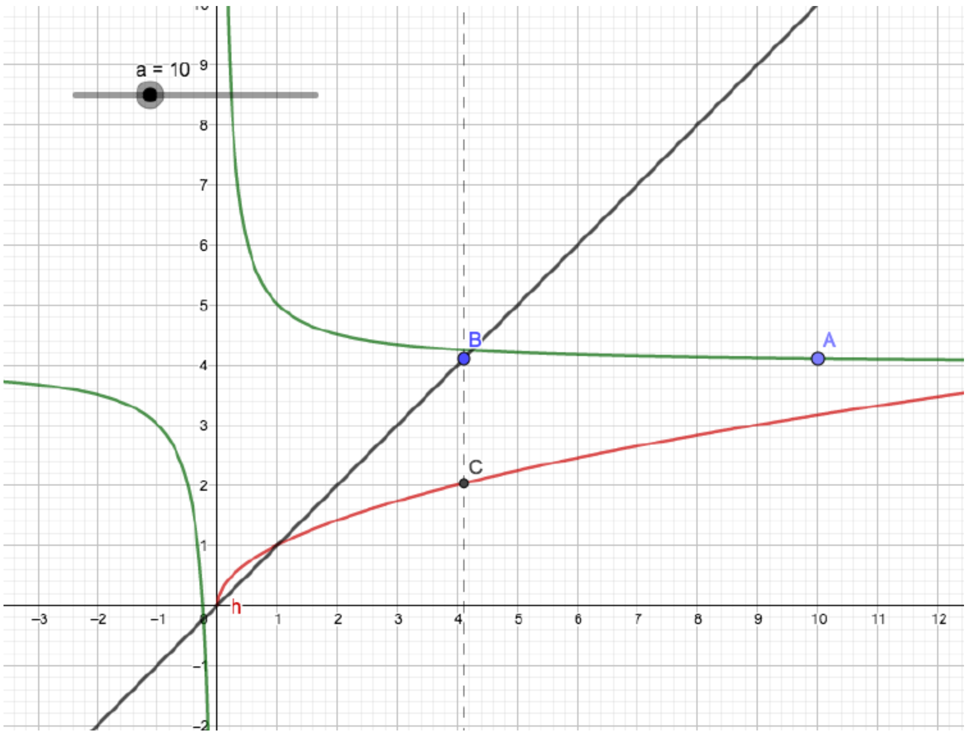
2.

3.

4. a. b. On obtient la figure ci-dessous.



5. a. b. c. d. e. On obtient la figure ci-dessous.



f. Lorsque le curseur a prend de grandes valeurs, l'ordonnée du point C semble s'approcher de la valeur 2. On peut donc conjecturer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

6. On modifie le curseur a pour le faire varier, par exemple, entre 0 et 2 avec un pas de 0,01. On observe alors que, lorsque le curseur a prend des valeurs de plus en plus proche de 0, l'ordonnée du point C prend des valeurs de plus en plus grande. On peut donc conjecturer que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Méthode 2

1.

2. On doit écrire dans la cellule B2 la formule = (4*A2+1)/A2.

3. On écrit dans la cellule C2 la formule = SQRT(B2), puis on l'étire vers le bas. On obtient ainsi la feuille de calcul ci-dessous.

21	4,047619048	2,01186954
22	4,045454545	2,011331535
23	4,043478261	2,010840188
24	4,041666667	2,01038968
25	4,04	2,009975124
26	4,038461538	2,009592381
27	4,037037037	2,009237924
28	4,035714286	2,00890873
29	4,034482759	2,00860219
30	4,033333333	2,008316044
31	4,032258065	2,008048322
32	4,03125	2,007797301
33	4,03030303	2,007561464
34	4,029411765	2,007339474
35	4,028571429	2,007130147
36	4,027777778	2,00693243
37	4,027027027	2,006745382
38	4,026315789	2,006568162
39	4,025641026	2,006400016
40	4,025	2,006240265
41	4,024390244	2,006088294
42	4,023809524	2,00594355
43	4,023255814	2,005805527
44	4,022727273	2,00567377
45	4,022222222	2,005547861
46	4,02173913	2,005427418
47	4,021276596	2,005312094
48	4,020833333	2,005201569
49	4,020408163	2,00509555
50	4,02	2,004993766

4. Lorsque x prend de grandes valeurs, $f(x)$ semble prendre des valeurs s'approchant de plus en plus de 2. On peut donc conjecturer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

5. On procède de même mais en prenant des valeurs de x de plus en plus proches de 0. On obtient la feuille de calcul suivante.

x	g(x)	h(g(x))
0,1	14	3,741657387
0,01	104	10,19803903
0,001	1004	31,68595904
0,0001	10004	100,019998
0,00001	100004	316,2340905
0,000001	1000004	1000,002
0,0000001	10000004	3162,278293
0,00000001	100000004	10000,0002
0,000000001	1000000004	31622,77666
0,0000000001	10000000004	100000
0,00000000001000	100000000004	316227,766
0,00000000000100	1000000000004	1000000
0,0000000000000100000000	1000000000000	3162277,66
0,0000000000000010000000	1000000000000	10000000
0,0000000000000001000000	1E+15	31622776,6
0,0000000000000000100000	1E+16	100000000
0,0000000000000000010000	1E+17	316227766
0,0000000000000000001000	1E+18	1000000000
0,0000000000000000000100	1E+19	3162277660

Et on peut ainsi conjecturer que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

6 Exercices d'applications directes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 17 :

1. a. L'ensemble de définition de cette fonction est $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

   b. On peut conjecturer que la fonction f, admettant la courbe $\mathcal{C}_1$ comme représentation graphique, admet les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$.

   c. $\mathcal{C}_1$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$ d'équation $y = 1$,une asymptote verticale d'équation $x = -1$ et une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

2. a. L'ensemble de définition de cette fonction est $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R}$.

   b. On peut conjecturer que la fonction f, admettant la courbe $\mathcal{C}_2$ comme représentation graphique, admet les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

   c. $\mathcal{C}_2$ admet une asymptote horizontale en $-\infty$, d'équation $y = -1$.

Corrigé exercice 18 :

1. a. L'ensemble de définition de cette fonction est $\mathcal{D}_3 = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$.

   b. On peut conjecturer que la fonction f, admettant la courbe $\mathcal{C}_3$ comme représentation graphique, admet les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$.

   c. $\mathcal{C}_3$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$ d'équation $y = 0$,une asymptote verticale d'équation $x = -3$ et une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

2. a. L'ensemble de définition de cette fonction est $\mathcal{D}_4 = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$.

   b. On peut conjecturer que la fonction f, admettant la courbe $\mathcal{C}_3$ comme représentation graphique, admet les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

   c. $\mathcal{C}_4$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$, d'équation $y = 0$,une asymptote verticale d'équation $x = -3$ et une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

6.2 Exercices

Corrigé exercice 19 :

1. On peut conjecturer le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
f	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$f(\beta)$	↘	1

   Où $\alpha \approx -0,5$, $f(\alpha) \approx -1,8$, $\beta \approx 1,8$ et $f(\beta) \approx 1,8$.

2. $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$ et $-\infty$.

Corrigé exercice 20 :

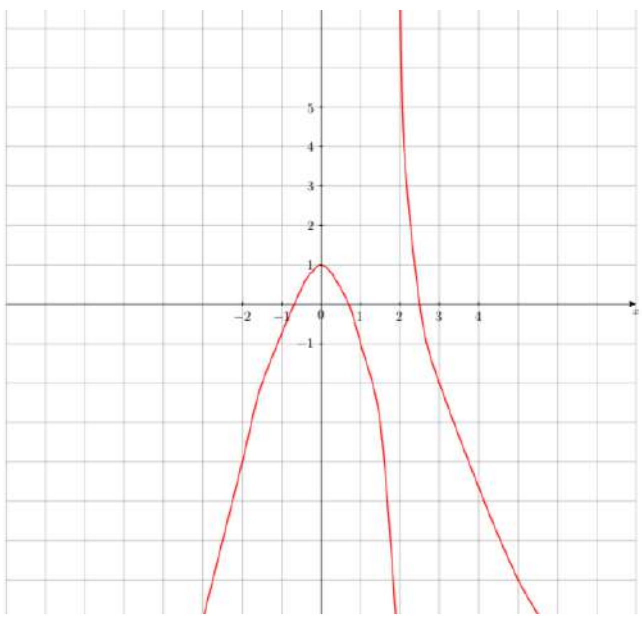
D'après le tableau de variations, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$. Donc $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $-\infty$. Et, comme d'après le tableau de variations on a $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 5$, alors $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$ en $+\infty$.

Corrigé exercice 21 :

1. D'après le tableau de variations $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2. On peut en déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

3. La courbe ci-dessous, par exemple, convient.

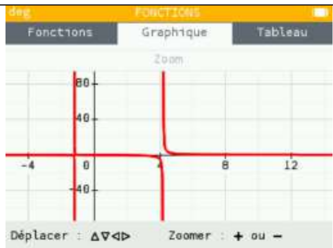
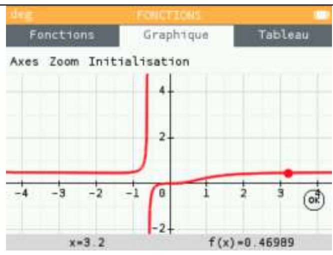
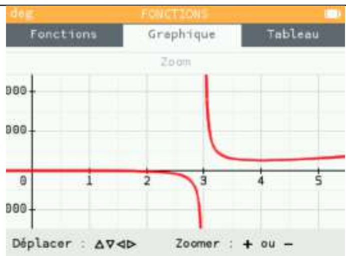


Corrigé exercice 22 :

1. $\mathcal{C}_f$ peut admettre au maximum deux asymptotes horizontales : une en $-\infty$ et une en $+\infty$. Elle peut admettre une infinité d'asymptotes verticales.

2. $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$,admet une asymptote d'équation $y = 1$ en $-\infty$ et une asymptote d'équation $y = 0$ en $+\infty$. $\mathcal{C}_g$, la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x) = \tan(x)$,admet une infinité d'asymptotes verticales : ces asymptotes sont les droites d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Corrigé exercice 23 :

Expression	Courbe obtenue	Asymptote
1. $\mathcal{C}_f$ d'équation $y = \frac{x+1}{x^2-3x-5}$		**d.** L'axe des abscisses
2. $\mathcal{C}_g$ d'équation $y = \frac{x^3}{2x^3+x+1}$		**a.** d_1 d'équation $y = \frac{1}{2}$
3. $\mathcal{C}_h$ d'équation $y = \frac{2x^4+5}{x-3}$		**b.** d_2 d'équation $x = 3$
4. $\mathcal{C}_k$ d'équation $y = -4 - \frac{x}{x^2+7}$		**c.** d_3 d'équation $y = -4$

Corrigé exercice 24 :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

   et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x}+2) = +\infty$ et donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

4. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}(x-2) = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} k(x) = +\infty$. Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}(x-2) = 0^-$ alors, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} k(x) = -\infty$.

Corrigé exercice 25 :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+x) = +\infty$ et donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{3}{x^2+x} = 0$. D'où, en conclusion, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}}(x-4) = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}} \frac{1}{x-4} = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}}(x-4) = 0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}} \frac{1}{x-4} = -\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$. D'où, par somme, $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}} g(x) = -\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x}-1) = +\infty$. On a donc au final, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0^+$.

4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} k(x) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\infty$.

Corrigé exercice 26 :

1. $\lim\limits_{x\to1}(x^3-2x^2) = -1$ et $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2 = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to-4}(5x+2) = -18$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\x>-4}}(x+4) = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\x>-4}} g(x) = -\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\x<-4}}(x+4) = 0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\x<-4}} g(x) = +\infty$.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}(x^2-1) = 0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} h(x) = -\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}(x^2-1) = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} h(x) = +\infty$.

4. $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}}(\sqrt{x}-2) = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}} k(x) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}}(\sqrt{x}-2) = 0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}} k(x) = -\infty$.

Corrigé exercice 27 :

Dans cet exercice, on applique les théorèmes sur la limite à l'infini d'un polynôme et d'une fonction rationnelle.

1. f a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que la fonction $x \mapsto x^2$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2. g a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que la fonction $x \mapsto -x^5$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

3. h a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{x}$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{x^2}{x} = x$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$.

4. k a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que la fonction $x \mapsto \frac{3x^2}{x^2}$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{3x^2}{x^2} = 3$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = 3$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} k(x) = 3$.

Corrigé exercice 28 :

Dans cet exercice, on applique les théorèmes sur la limite à l'infini d'un polynôme et d'une fonction rationnelle.

1. f a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que la fonction $x \mapsto 3x^4$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2. g a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que la fonction $x \mapsto \frac{-x^3}{2x}$. Or, pour tout $x \neq 0$, $\frac{-x^3}{2x} = \frac{-x^2}{2}$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

3. h a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que la fonction $x \mapsto \frac{4x^2}{x^7}$. Or, pour tout $x \neq 0$, $\frac{4x^2}{x^7} = \frac{4}{x^5}$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$.

4. k a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{5x^2}$. Or, pour tout $x \neq 0$, $\frac{x^2}{5x^2} = \frac{1}{5}$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = \frac{1}{5}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} k(x) = \frac{1}{5}$.

Corrigé exercice 29 :

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x+2) = -\infty$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant x + 2$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-2) = +\infty$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant x - 2$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Corrigé exercice 30 :

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3 - \frac{1}{x^2}\right) = 3$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3 + \frac{1}{x^2}\right) = 3$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $3 - \frac{1}{x^2} \leqslant g(x) \leqslant 3 + \frac{1}{x^2}$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 3$. De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{1}{x^2}\right) = 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{x^2}\right) = 3$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 3$. Enfin, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to 0} \left(3 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \left(3 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$. On ne peut donc pas conclure sur la limite de g en 0.

Corrigé exercice 31 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ell(x) = \mathrm{e}^x\left(1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell(x) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ell(x) = -\infty$.

Corrigé exercice 32 :

1. Pour tout x réel, $-1 \leqslant \cos x \Leftrightarrow -2 \leqslant 2\cos x \Leftrightarrow x^2 - 2 \leqslant x^2 + 2\cos x$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2) = +\infty$d'où, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Pour tout x non nul, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
3. Pour tout x réel, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Leftrightarrow x - 1 \leqslant \cos x + x \leqslant x + 1$, d'où, pour tout $x > 1$, $\frac{1}{x-1} \geqslant \frac{1}{x+\cos x} \geqslant \frac{1}{x-1}$, par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0$. De même $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.
4. Pour tout $x \geqslant 0$, $x^2 + 2 \geqslant x^2$. La fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$ donc, pour tout $x \geqslant 0$, $\sqrt{x^2+2} \geqslant \sqrt{x^2}$ et donc $k(x) \geqslant x$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$.

Corrigé exercice 33 :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^x+1) = +\infty$ et, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x+1) = 1$ et, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.
2. Pour tout $x \neq 0$, $g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x} + \frac{1}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, d'après un théorème de croissances comparées. Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x+1) = 1$ d'où, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 2$.

Corrigé exercice 34 :

1. On utilise le théorème de la limite à l'infini d'une fraction rationnelle. $x \mapsto \frac{3x^2-1}{4x^2+2}$ a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que la fonction $x \mapsto \frac{3x^2}{4x^2}$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{3x^2}{4x^2} = \frac{3}{4}$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2-1}{4x^2+2} = \frac{3}{4}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2-1}{4x^2+2} = \frac{3}{4}$.

2. On utilise le théorème de la limite à l'infini d'une fraction rationnelle. $x \mapsto \frac{x^2+1}{x-3}$ a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{x}$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{x^2}{x} = x$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = -\infty$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{x+2}{x^2 \mathrm{e}^x} = \frac{x+2}{x^2} \frac{1}{\mathrm{e}^x}$. D'une part, d'après le théorème de la limite à l'infini d'une fraction rationnelle, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x^2} = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$. Et enfin, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x^2 \mathrm{e}^x} = 0$.

4. Pour tout x réel, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Leftrightarrow -3 \leqslant \cos x - 2 \leqslant -1$ donc, pour tout $x \geqslant 0$, $-\frac{3}{x+4} \leqslant \frac{\cos x - 2}{x+4} \leqslant -\frac{1}{x+4}$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{3}{x+4} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x+4} = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x - 2}{x+4} = 0$.

Corrigé exercice 35 :

La fonction f définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$ par $f : x \mapsto 3 - \frac{1}{(x-5)^2}$ convient, par exemple.

Corrigé exercice 36 :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \mathrm{e}^x + 2$ convient, par exemple.

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 37 :

Dire que f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ signifie que, quel que soit le réel A, il existe $m > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, si $x > m$, alors $f(x) < A$. Dire que f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ signifie que, quel que soit le réel A, il existe $m < 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, si $x < m$, alors $f(x) > A$.

Corrigé exercice 38 :

1. $f(x) > 10^4 \Leftrightarrow x^2-2x > 10^4 \Leftrightarrow x^2-2x-10^4 > 0$. $\Delta = (-2)^2-4\times1\times(-10^4) = 40004$. Ce trinôme du second degré admet donc deux racines réelles : $x_1 = \frac{2-\sqrt{40004}}{2} = 1-\sqrt{10001}$ et $x_2 = \frac{2+\sqrt{40004}}{2} = 1+\sqrt{10001}$. De plus, un trinôme ax^2+bx+c est du signe de a sauf entre ses racines, si elles existent. D'où, en posant $m = 1+\sqrt{10001}$, on a bien quesi $x > m$ alors $f(x) > 10^4$.
2. De même, $f(x) > 10^{32} \Leftrightarrow x^2-2x-10^{32} > 0$. Le discriminant de cette expression vaut $\Delta = 4(1+10^{32})$, le trinôme admet donc deux racines réelles : $x_1 = 1-\sqrt{1+10^{32}}$ et $x_2 = 1+\sqrt{1+10^{32}}$. D'où, en posant $m = 1+\sqrt{1+10^{32}}$, on a bien que si $x > m$ alors $f(x) > 10^{32}$.
3. D'après les questions précédentes, on peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Corrigé exercice 39 :

1. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$, $0 < f(x) < 10^{-4} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x^2+1} < 10^{-4} \Leftrightarrow x^2+1 > 10^4$ donc, d'après les variations de la fonction carré sur $\mathbb{R}$, $0 < f(x) < 10^{-4} \Leftrightarrow x > \sqrt{10^4-1}$ ou $x < -\sqrt{10^4-1}$. D'où, en posant $m = 3\sqrt{1111}$, on a bien que si $x > m$ alors $0 < f(x) < 10^{-4}$.
2. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$, $0 < f(x) < 10^{-32} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x^2+1} < 10^{-32} \Leftrightarrow x^2+1 > 10^{32}$ donc, d'après les variations de la fonction carré sur $\mathbb{R}$, $0 < f(x) < 10^{-32} \Leftrightarrow x > \sqrt{10^{32}-1}$ ou $x < -\sqrt{10^{32}-1}$. D'où, en posant $m = \sqrt{10^{32}-1}$, on a bien que si $x > m$ alors $0 < f(x) < 10^{-32}$.
3. D'après les questions précédentes, on peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Corrigé exercice 40 :

1. Graphiquement, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3;2\}$.
2. On peut conjecturer le tableau de variations et les limites ci-dessous.

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
f	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2

3. $\mathcal{C}_f$ semble admettre une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $-\infty$ et $+\infty$, et deux asymptotes verticales d'équation $x = -3$ et $x = 2$.

Corrigé exercice 41 :

On peut conjecturer le tableau de variations et les limites ci-dessous.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	2

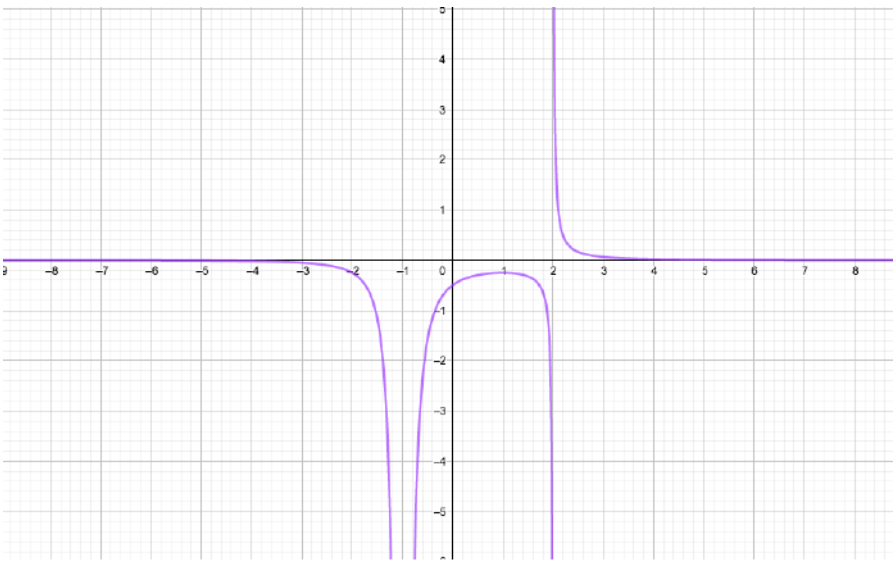
$\mathcal{C}_f$ semble admettre une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $-\infty$ et $+\infty$.

Corrigé exercice 42 :

1. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

2. $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que deux asymptotes verticales d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

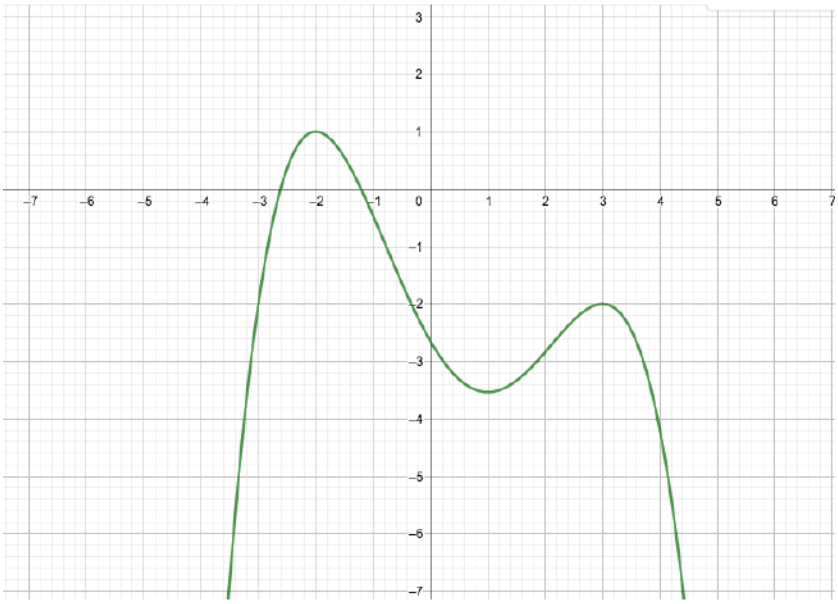
3. La courbe ci-dessous est une représentation graphique possible de la fonction f.



Corrigé exercice 43 :

1. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. $\mathcal{C}_f$ n'admet aucune asymptote.

2. La courbe ci-dessous est une représentation graphique possible de la fonction f.



Corrigé exercice 44 :

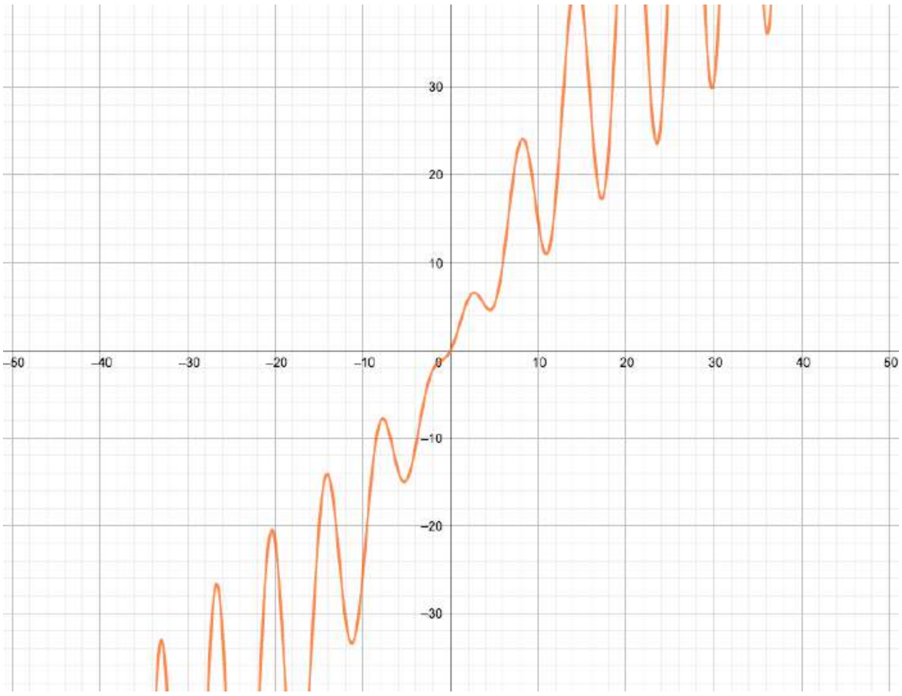
1. On obtient la représentation graphique ci-dessous.

2. On peut conjecturer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

3. $\mathcal{C}_f$ semble admettre une asymptote horizontale d'équation $y = 3$ en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi qu'une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

Corrigé exercice 45 :

1. On obtient la représentation graphique ci-dessous.



2. On conjecture : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Corrigé exercice 46 :

1. On pose $m = 10^2$. Alors si $x > m$, on a bien $x^2 > 10^4$.

2. Soit $A > 0$. On pose $m = \sqrt{A}$. Alors si $x > m$, on a bien $x^2 > A$, car la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

3. On vient de montrer que, pour tout $A > 0$, on peut trouver $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > m$, $x^2 > A$. On peut donc en déduire que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4.
   a. Soit $A > 0$. Si $x > \sqrt[n]{A}$, alors $x^n > A$ car la fonction g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Donc $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

   b. Soit x un nombre réel. Si n est pair, alors $g(-x) = (-x)^n = x^n = g(x)$. Si n est impair, $g(-x) = (-x)^n = -x^n = -g(x)$.

   c. Cas n pair : Soit $A > 0$. Comme $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, il existe $m > 0$ tel que, si $x > m$, alors $x^n > A$. Prenons maintenant $x < -m$ et posons $y = -x$. Si $x < -m$, alors $y > m$ et donc $y^n > A$. Or $y^n = (-x)^n = x^n = g(x)$ car n est pair. Donc si $x < -m$, alors $g(x) > A$. D'où $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$. Cas n impair : soit $A < 0$. Comme $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, il existe $m > 0$ tel que, si $x > m$, alors $x^n > -A$. Prenons maintenant $x < -m$ et posons $y = -x$. Si $x < -m$, alors $y > m$ et donc $y^n > -A$. Or $y^n = (-x)^n = -x^n = -g(x)$ car n est impair. Donc si $x < -m$, alors $-g(x) > -A$ et donc $g(x) < A$. D'où $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

Corrigé exercice 47 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 10^4 \Leftrightarrow 2x^2-3x > 10^4 \Leftrightarrow 2x^2-3x-10^4 > 0$. Le discriminant de ce trinôme du second degré vaut $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-10^4) = 80009$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles : $x_1 = \frac{3-\sqrt{80009}}{4}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{80009}}{4}$. Un trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre ses racines, si elles existent. Le tableau de signe de cette expression est donc le suivant.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$2x^2-3x-10^4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En posant $m = \frac{3+\sqrt{80009}}{4}$ on a alors bien que,si $x > m$, alors $f(x) > 10^4$.

2. Soit $A > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > A \Leftrightarrow 2x^2 - 3x > A \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - A > 0$. Le discriminant de ce trinôme du second degré vaut $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-A) = 9 + 8A > 0$ car $A > 0$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles : $x_1 = \frac{3-\sqrt{9+8A}}{4}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{9+8A}}{4}$. Un trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre ses racines, si elles existent. Le tableau de signe de cette expression est donc le suivant.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$2x^2-3x-A$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En posant $m = \frac{3+\sqrt{9+8A}}{4}$ on a alors bien que, si $x > m$, alors $f(x) > A$.

3. On vient donc de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Corrigé exercice 48 :

1. a. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc, si $x > A^2 > 0$, alors $\sqrt{x} > \sqrt{A^2}$ et donc $f(x) > A$ car A est positif.
   b. On peut conclure de la réponse à la question précédente que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

2. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < g(x) < 10^{-4} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{x}} < 10^{-4} \Leftrightarrow \sqrt{x} > 10^4$, car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, d'où $0 < g(x) < 10^{-4} \Leftrightarrow x > 10^8$,car la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. En posant $m = 10^8$ on a alors bien que, si $x > m$, alors $0 < g(x) < 10^{-4}$.
   b. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < g(x) < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{1}{\varepsilon}$, car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, d'où $0 < g(x) < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon^2}$,car la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. En posant $m = \frac{1}{\varepsilon^2}$ on a alors bien que, si $x > m$, alors $0 < g(x) < \varepsilon$.
   c. On peut conclure de la réponse à la question précédente que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 49 :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^x + 2x) = -\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = 0$.

Corrigé exercice 50 :

1. Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x^3 \left(1 - \frac{4}{x} - \frac{15}{x^2} + \frac{100}{x^3}\right)$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \mathrm{e}^x \left(1 - \frac{x^5}{\mathrm{e}^x}\right)$.
3. Pour tout $x \neq 0$, $h(x) = x^3 \left(\frac{\sqrt{x}}{x^3} - \frac{2}{x^2} + 1\right)$.
4. Pour tout $x \neq 0$, $k(x) = x\sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)$.

Corrigé exercice 51 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(2x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$. Et, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \frac{x^3+x^2-3x}{2x^2-x} = \frac{x^2+x-3}{2x-1}$.
2. Pour tout $x \in \mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$, $g(x) = \frac{x^2-4}{(x-2)(x+3)} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x+2}{x+3}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -5$. Donc $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{-5; 0\}$. Et, pour tout $x \in \mathcal{D}_h$, $h(x) = \frac{x^2+10x+25}{x^2+5x} = \frac{(x+5)^2}{x(x+5)} = \frac{x+5}{x}$.
4. On cherche les racines de $x^2 + 4x + 3$: -1 est une racine évidente, le produit des deux racines de ce polynôme de degré 2 est égal à 3, donc son autre racine est –3. Donc $\mathcal{D}_k = \mathbb{R} \setminus \{-3; -1\}$ et, pour tout réel x, $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$. On cherche maintenant les racines de $x^2 - x - 12$. On a $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 49$. Ce trinôme admet donc deux racines réelles : $x_1 = \frac{1-\sqrt{49}}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{49}}{2} = 4$. Donc, pour tout réel x, $x^2 - x - 12 = (x+3)(x-4)$. D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_k$, $k(x) = \frac{x^2-x-12}{x^2+4x+3} = \frac{(x+3)(x-4)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x-4}{x+1}$.

Corrigé exercice 52 :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$. Et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$. D'où, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^3 - x^2 + 12) = -\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$.

Corrigé exercice 53 :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x} = +\infty$ et donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x\sqrt{x}+1) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2) = +\infty$. Finalement, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
3. Pour tout $x > 0$, $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + x\sqrt{x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x} = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.
4. Pour tout $x > 0$, $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 0$.

Corrigé exercice 54 :

1. $\lim\limits_{x\to3}(x-3)^2 = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to3}(x+1) = 4$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to3}(x-3)^2(x+1) = 0^+$. Et donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to3} f(x) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to2} x^2+1 = 5$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}(x-2) = 0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} g(x) = -\infty$. Et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}(x-2) = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} g(x) = +\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to2}(\sqrt{x}-3) = \sqrt{2}-3 < 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} 2x-4 = 0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} h(x) = +\infty$. Et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} 2x-4 = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} h(x) = -\infty$.
4. $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x<\frac{1}{2}}}(1-2x) = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x<\frac{1}{2}}} k(x) = -\infty$. Et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x>\frac{1}{2}}}(1-2x) = 0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\x>\frac{1}{2}}} k(x) = +\infty$.

Corrigé exercice 55 :

1. On a $\lim\limits_{x\to0} \mathrm{e}^x = 1$. Or $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}(\mathrm{e}^x-1) = 0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\infty$. Et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(\mathrm{e}^x-1) = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$.
2. On a $\lim\limits_{x\to3}(x^2+1) = 10$. Or, pour tout réel x, $x^2-9 = (x-3)(x+3)$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}(x^2-9) = 0^-$ d'où, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} g(x) = -\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}(x^2-9) = 0^+$d'où, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} g(x) = +\infty$.

3. On a $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-4) = -5$. Or, pour tout réel x, on a $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}(x^2+3x+2) = 0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} h(x) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}(x^2+3x+2) = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} h(x) = -\infty$.
4. On a $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x-1) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(x^3-8) = 0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} k(x) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(x^3-8) = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} k(x) = -\infty$.

Corrigé exercice 56 :

Dans cet exercice, on applique le théorèmes sur la limite à l'infini d'un polynôme.

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} -x^4 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} -x^4 = -\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} 4x^5 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} 4x^5 = -\infty$.

Corrigé exercice 57 :

Dans cet exercice, on applique le théorème sur la limite à l'infini d'une fonction rationnelle.

1. f a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que $x \mapsto \frac{2x^2}{x}$. Or, pour tout $x \neq 0$, $\frac{2x^2}{x} = 2x$. Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} 2x = -\infty$.
2. g a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que $x \mapsto \frac{-x^3}{x^3}$. Or, pour tout $x \neq 0$, $\frac{-x^3}{x^3} = -1$. Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = -1$.
3. h a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que $x \mapsto \frac{2x^2}{3x^5}$. Or, pour tout $x \neq 0$, $\frac{2x^2}{3x^5} = \frac{2}{3x^3}$. Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{3x^3} = 0$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2}{3x^3} = 0$.
4. Le monôme de plus haut degré du numérateur est $4x^3$ donc k a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que $x \mapsto \frac{4x^3}{x^3}$. Or, pour tout $x \neq 0$, $\frac{4x^3}{x^3} = 4$. Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} k(x) = 4$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} k(x) = 4$.

Corrigé exercice 58 :

1. f est une fonction rationnelle donc a même limite en $+\infty$ que $x \mapsto \frac{x^2}{x}$. Or, pour tout $x \neq 0$, $\frac{x^2}{x} = x$. D'où $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$.
2. On a $\lim\limits_{x\to -2}(x^3+x-2) = -12$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2-4 = (x-2)(x+2)$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}(x-2)(x+2) = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} g(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}(x-2)(x+2) = 0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} g(x) = +\infty$.

3. -2 appartient au domaine de définition de h, donc $\lim\limits_{x\to-2} h(x) = h(-2) = -\frac{67}{17}$.

4. Pour tout x réel, $x^4 - 16 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$. Donc, pour tout $x \neq 2$, $k(x) = (x+2)(x^2+4)$. D'où $\lim\limits_{x\to2} k(x) = 32$.

Corrigé exercice 59 :

1. La fonction sinus est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, donc $x < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{3}\\x<\frac{\pi}{3}}} \left(\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0^-$ et donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{3}\\x<\frac{\pi}{3}}} f(x) = -\infty$. Et, d'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{3}\\x>\frac{\pi}{3}}} \left(\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{3}\\x>\frac{\pi}{3}}} f(x) = +\infty$.

2. La fonction cosinus est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$, donc $0 > x > -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 1 > \cos x > \frac{1}{2}$ et donc $0 > x > -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2 > 2\cos x > 1$ d'où $0 > x > -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 1 > 2\cos x - 1 > 0$. On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{3}\\x<-\frac{\pi}{3}}} (2\cos x - 1) = 0^-$ et donc, par quotient, que $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{3}\\x<-\frac{\pi}{3}}} g(x) = -\infty$. De même, $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{3}\\x>-\frac{\pi}{3}}} (2\cos x - 1) = 0^+$ et donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{3}\\x>-\frac{\pi}{3}}} g(x) = +\infty$.

3. La fonction sinus est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, donc $0 < x < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $0 < x < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 < \sin^2 x < \frac{1}{2}$,car la fonction carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, et donc $0 < x < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -1 < 2\sin^2 x - 1 < 0$. D'où $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\x<\frac{\pi}{4}}} (2\sin^2 x - 1) = 0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\x<\frac{\pi}{4}}} h(x) = -\infty$. De même, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\x>\frac{\pi}{4}}} (2\sin^2 x - 1) = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\x>\frac{\pi}{4}}} h(x) = +\infty$.

Corrigé exercice 60 :

1. Pour tout x positif, $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x} - 2) = +\infty$. Par produit, on obtient alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. Pour tout $x > 0$, $g(x) = \frac{x^2\left(1-\frac{3}{x^2}\right)}{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = x\sqrt{x}\frac{1-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = 0$ donc, par addition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2}\right) = 1$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$. D'où, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x} = +\infty$ donc, finalement, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

3. Pour tout réel x, $h(x) = \frac{\mathrm{e}^x\left(2+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1-\frac{2}{\mathrm{e}^x}\right)} = \frac{2+\frac{1}{\mathrm{e}^x}}{1-\frac{2}{\mathrm{e}^x}}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^x} = 0$ d'où, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{2}{\mathrm{e}^x}\right) = 1$. Et donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 2$.

4. Pour tout réel x, $k(x) = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1)$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x - 1) = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$.

Corrigé exercice 61 :

1. a. Soit n un entier naturel non nul pair. Il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2k$. D'où, $X^n = \left(X^k\right)^2$. Puisque $X \neq 0$, car $\frac{1}{x} \neq 0$ quel que soit $x \neq 0$, alors $X^k \neq 0$. De plus le carré d'un nombre réel est toujours positif, donc $X^n = \left(X^k\right)^2 > 0$.
   b. On a $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} X = +\infty$, et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} X = -\infty$. On a $\lim\limits_{X\to+\infty} X^n = +\infty$ et, si n pair, $\lim\limits_{X\to-\infty} X^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0} X^n = +\infty$.
   c. On a $X^n = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$. D'après la question précédente et le théorème de la limite de la composée de deux fonctions, on obtient alors que $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^n} = +\infty$.

2. a. Soit n un entier naturel impair. Alors on a, si $x > 0$, $X > 0$ et donc $X^n > 0$. Et, si $x < 0$, on a $X < 0$ et donc $X^n < 0$.
   b. On a $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} X = +\infty$, et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} X = -\infty$.
   c. Si n est impair, $\lim\limits_{X\to+\infty} X^n = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} X^n = -\infty$. Donc d'après le théorème de la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$.

Corrigé exercice 62 :

1. Le taux d'accroissement d'une fonction f entre 0 et x est donné par $\frac{f(0+x)-f(0)}{x}$. En posant, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = e^x$, alors on a $f(0) = 1$ et on obtient donc bien $\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$.

2. La limite en 0 du taux d'accroissement d'une fonction entre 0 et x, si elle existe, est le nombre dérivé en 0 de la fonction. La fonction exponentielle est dérivable en 0 et $\exp'(0) = \exp(0) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1$.

Corrigé exercice 63 :

Le taux d'accroissement de la fonction sinus entre 0 et x est donné par $\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x} = \frac{\sin(x)}{x}$. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $\sin'(x) = \cos(x)$. Donc $\sin'(0) = \cos(0) = 1$ et on obtient $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Corrigé exercice 64 :

1. $f(x)$ correspond au taux d'accroissement entre 0 et $x$de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{3x+2}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$de dérivée $x \mapsto 3\mathrm{e}^{3x+2}$. Donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 3\mathrm{e}^2$.

2. $g(x)$ correspond au taux d'accroissement entre 0 et x de la fonction cosinus. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$de dérivée $x \mapsto -\sin(x)$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\sin(0) = 0$.

3. $h(x)$ correspond au taux d'accroissement entre 0 et x de la fonction $x \mapsto (x+2)^3$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$de dérivée $x \mapsto 3(x+2)^2$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 3(0+2)^2 = 12$.

4. $k(x)$ correspond au taux d'accroissement entre 0 et x de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+5}$. Cette fonction est dérivable sur $]-5;+\infty[$de dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} k(x) = \frac{1}{2\sqrt{5}}$.

Corrigé exercice 65 :

1. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{x^3\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\sqrt{x}\left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)} = x^2\sqrt{x} \times \frac{1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{3}{\sqrt{x}}}$. On a, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1+\frac{3}{\sqrt{x}} = 1$. Et, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\sqrt{x} = +\infty$. Donc, en conclusion, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2.
   a. Cet algorithme permet d'afficher le plus petit entier x tel que $f(x) > 10^5$.
   b. La boucle va s'arrêter car la fonction tend vers $+\infty$: il existe donc $m > 0$ tel que, pour tout $x > m$, $f(x) > 10^5$.
   c. On peut écrire, par exemple, le programme Python ci-dessous.

```python
from math import sqrt

def f(x):
  return (x**3-2*x+1)/(sqrt(x)+3)

x=50
while f(x)<=10**5:
  x=x+1
print(x)
```

Cet algorithme renvoie $x = 111$.

Corrigé exercice 66 :

1.
   a. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x\sqrt{x}}}$. On a, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1+\frac{1}{x\sqrt{x}} = 1$. Donc, par quotient, $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
   b. Graphiquement, la représentation graphique de la fonction f s'approche de plus en plus de la droite d'équation $y = 1$, son asymptote en $+\infty$.

2.
   a. L'algorithme ci-dessous, par exemple, fonctionne.
   $N \leftarrow 6$
   Tant que $f(N) - 1 \geqslant 10^{-5}$

$N \leftarrow N+1$

Afficher N

b. On peut écrire, par exemple, le programme Python ci-dessous.

```python
from math import sqrt

def f(x):
    return (x**2+2*x-3)/(x**2+sqrt(x))

N=6
while f(N)-1>=10**(-5):
    N=N+1
print(N)
```

Cet algorithme renvoie $N = 199\,775$.

c. L'écart entre la droite d'équation $y = 1$ et la courbe représentative de f devient inférieure à 10^{-5} pour des abscisses supérieures ou égales à 199 775.

Corrigé exercice 67 :

1. Cette affirmation est fausse. On peut prendre la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ comme contre-exemple.

2. Cette affirmation est vraie. Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, il existe $m_1 > 0$ tel que, si $x > m_1$, alors $|f(x) - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$ c'est-à-dire $\ell - \frac{\epsilon}{2} < f(x) < \ell + \frac{\epsilon}{2}$. De même, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$,il existe $m_2 > 0$ tel que, si $x > m_2$, alors $|g(x) - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$ c'est-à-dire $\ell - \frac{\epsilon}{2} < g(x) < \ell + \frac{\epsilon}{2}$, ce qui est équivalent à $-\ell - \frac{\epsilon}{2} < -g(x) < -\ell + \frac{\epsilon}{2}$. Prenons maintenant $m = max\{m_1; m_2\}$. Alors si $x > m$, on a à la fois $\ell - \frac{\epsilon}{2} < f(x) < \ell + \frac{\epsilon}{2}$ et $-\ell - \frac{\epsilon}{2} < -g(x) < -\ell + \frac{\epsilon}{2}$. Et en ajoutant ces deux inégalités, on obtient $-\epsilon < f(x) - g(x) < \epsilon$,soit encore $|f(x) - g(x)| < \epsilon$. Ce qui prouve alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$.

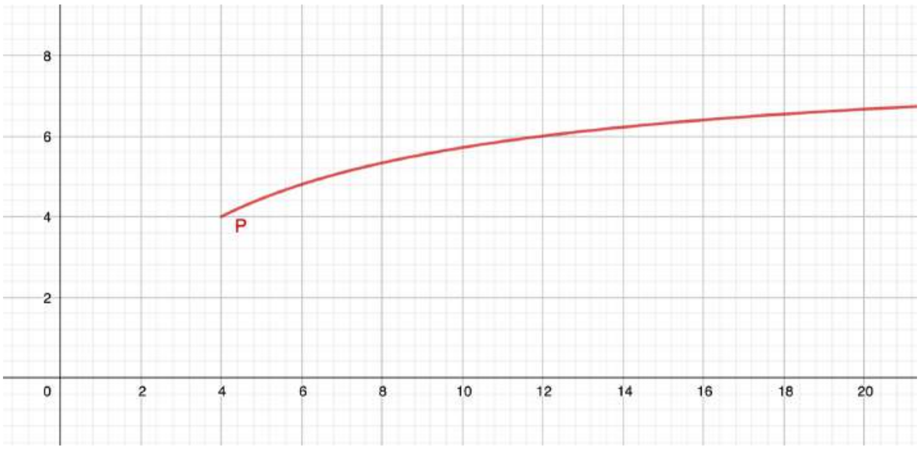
3. Cette affirmation est fausse. On peut prendre comme contre-exemples les fonctions $f : x \mapsto x^2 + 1$ et $g : x \mapsto x^2$, qui tendent bien toutes les deux vers $+\infty$ mais telles que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 1 - x^2 = 1 \neq 0$.

Corrigé exercice 68 :

1. $D = \frac{2 \times 1{,}5 \times 3}{1{,}5 + 3} = 2$

2. a. Pour tout $\mathrm{P}_2 \geqslant 0$, $D = \frac{2 \times 4\mathrm{P}_2}{4 + \mathrm{P}_2} = \frac{8\mathrm{P}_2}{4 + \mathrm{P}_2}$. Or, pour tout $\mathrm{P}_2 \geqslant 0$, $8 - \frac{32}{4 + \mathrm{P}_2} = \frac{32 + 8\mathrm{P}_2 - 32}{4 + \mathrm{P}_2}$. D'où $D = 8 - \frac{32}{4 + \mathrm{P}_2}$.

   b. On pose $x = \mathrm{P}_2$. La fonction D définie par $D(x) = 8 - \frac{32}{4+x}$ est définie et dérivable sur $[4; +\infty[$. Et, pour tout $x \in [4; +\infty[$, $D'(x) = \frac{32}{(4+x)^2}$. La dérivée de D est strictement positive sur $[4; +\infty[$, la fonction est donc strictement croissante sur ce même intervalle.



c. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} D(x) = 8$. La distance de mise au point pour que la netteté s'étende de 4 m à l'infini est donc égale à 8 m.

Corrigé exercice 69 :

1. La fonction f est définie sur $[0;7[\cup]7;+\infty[$ par $f(x) = \frac{7+\sqrt{x}}{x-7}$.
2. On obtient $g(100) = 0,09375$, $g(500) = 0,01171875$ et $g(1000) = 0,005859375$.
3. (manipulation Python)
4. Il semble que quelque soit le choix de $N > 0$, il existe m tel que pour tout x entre 7 et m, $f(x) > N$. Il semble donc que $\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ x>7}} f(x) = +\infty$.
5. On a $\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ x>7}} (7+\sqrt{x}) = 7+\sqrt{7}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ x>7}} (x-7) = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ x>7}} f(x) = +\infty$.

Corrigé exercice 70 :

On peut prendre, par exemple, les fonction f et g définies sur leurs ensembles de définition par :

1. $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = x^2$.
2. $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$.
3. $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$.
4. $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{5}{x^2}$.
5. $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.
6. $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$.
7. $f(x) = 3x^2 + 1$ et $g(x) = 3x^2 + x - 1$.
8. $f(x) = x$ et $g(x) = x^2 + 1$.

Corrigé exercice 71 :

1. D'après le théorème de limite à l'infini des fonctions rationnelles, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$. Or, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = -2$ donc $a = -2$. On veut de plus que la courbe $\mathcal{C}_f$ admette pour asymptotes les droites $x = 1$ et $x = -4$. Le trinôme du dénominateur doit donc admettre 1 et –4 comme racines. Ce trinôme s'écrit donc $(x-1)(x+4) = x^2+3x-4$, d'où $b = 3$ et $c = -4$.

2. De même, comme $\mathcal{C}_f$ admet la droite $y = 3$ comme asymptote, on a $a = 3$. On veut de plus que la courbe $\mathcal{C}_f$ admette pour asymptote la droite $x = -2$. –2 est donc racine du trinôme au dénominateur. On sait de plus que le trinôme au dénominateur n'admet pas de racine double, il s'écrit donc sous la forme $(x+2)(x-a)$, avec $a \in \mathbb{R}$ la deuxième racine de ce polynôme, distincte de –2. Or, la droite $x = a$ n'est pas asymptote de la courbe $\mathcal{C}_f$, donc a doit aussi être racine du trinôme au numérateur. Les racines du trinôme $3x^2+2x-5$ sont 1 et $-\frac{5}{3}$. Il y a donc deux possibilités : les racines du trinôme dénominateur sont 1 et –2 et donc $b = 1$ et $c = -2$; ou bien les racines du polynôme au dénominateur sont $-\frac{5}{3}$ et –2 et donc $b = \frac{11}{3}$ et $c = \frac{10}{3}$.

9 Exercices d'entraînement partie 3

Corrigé exercice 72 :

1. Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $x+1 > x$. Donc, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f(x) > g(x)$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
2. Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f(x) \geqslant g(x)$.

Corrigé exercice 73 :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+\sqrt{x}) = +\infty$. D'où, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{2}{x^2} = 1$. D'où,d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.
   b. En utilisant le même raisonnement que précédemment, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.
   c. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $1+\frac{1}{x^2} \leqslant g(x)$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} 1+\frac{1}{x^2} = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.
3. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x^2} - 1 \leqslant h(x)$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - 1 = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = +\infty$.
   b. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} + 1 = 1$. Cet encadrement ne permet donc pas de conclure sur la limite de h en $+\infty$.

Corrigé exercice 74 :

1. L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \mathrm{e}^x\left(1 - \frac{1}{x\mathrm{e}^x}\right)$.
2. L'ensemble de définition de g est $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, $g(x) = \mathrm{e}^x \frac{1+x\mathrm{e}^{-x}}{x-1}$.
3. L'ensemble de définition de h est $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathcal{D}_h$, $h(x) = \mathrm{e}^x\left(1 - x^3 + 2\mathrm{e}^{-x}\right)$.

Corrigé exercice 75 :

D'après le théorème de limite à l'infini d'une fonction rationnelle :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3}{3x^2-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+5x}{3x^2-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2}{3}$.

Corrigé exercice 76 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $x-1 \leqslant E(x) \leqslant x \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} \leqslant \frac{E(x)}{x} \leqslant 1$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Corrigé exercice 77 :

1. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 \leqslant 2\sin x \leqslant 2 \Leftrightarrow x-2 \leqslant x+2\sin x \leqslant x+2$. Donc, pour tout $x>0$, $\frac{x-2}{x} \leqslant \frac{x+2\sin x}{x} \leqslant \frac{x+2}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. De même, pour tout $x<0$, $\frac{x-2}{x} \geqslant \frac{x+2\sin x}{x} \geqslant \frac{x+2}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

2. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant 2+\cos x \leqslant 3$. Donc pour tout $x>0$, $x^3 \leqslant (2+\cos(x))x^3 \leqslant$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. De même, pour tout $x<0$, $x^3 \geqslant (2+\cos(x))x^3$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

3. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Leftrightarrow x-1 \leqslant x+\sin x \leqslant x+1$, donc, pour tout $x>1$, $\frac{1}{x-1} \geqslant \frac{1}{x+\sin x} \geqslant \frac{1}{x+1}$, car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, et donc $\frac{x}{x-1} \geqslant \frac{x}{x+\sin x} \geqslant \frac{x}{x+1}$, pour tout $x>1$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$. De même, pour tout $x<-1$, $\frac{1}{x-1} \geqslant \frac{1}{x+\sin x} \geqslant \frac{1}{x+1}$,car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$. Donc $\frac{x}{x-1} \leqslant \frac{x}{x+\sin x} \leqslant \frac{x}{x+1}$ pour tout $x<-1$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 1$.

4. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Leftrightarrow -3 \leqslant 3\sin x \leqslant 3 \Leftrightarrow x^2-3 \leqslant 3\sin x \leqslant x^2+3$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3 = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$. Et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-3 = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = +\infty$.

Corrigé exercice 78 :

1. Pour tout $x>0$, $1+\frac{1}{x} > 1$ donc $\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 \geqslant 1+\frac{1}{x}$ car si $X>1$ alors $X^2>X$. Et donc, pour tout $x>0$, $1 \leqslant 1+\frac{1}{x} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^2$.

2. D'après la question précédente, pour tout $x>0$, $1 \leqslant 1+\frac{1}{x} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^2$. On en déduit que, pour tout $x>0$, $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{1+\frac{1}{x}} \leqslant \sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}$, car la fonction racine carrée est croissante sur $]0;+\infty[$. Comme, pour tout $x>0$, $1+\frac{1}{x}>0$, on a $\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = 1+\frac{1}{x}$ et donc $1 \leqslant f(x) \leqslant 1+\frac{1}{x}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Corrigé exercice 79 :

1. a. Pour tout x réel, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant 2+\cos x \leqslant 3 \Leftrightarrow 1 \geqslant \frac{1}{2+\cos x} \geqslant \frac{1}{3}$, car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. Or, si$x \geqslant -\frac{5}{4}$, alors $4x+5 \geqslant 0$. On a donc, pour tout $x \geqslant -\frac{5}{4}$, $4x+5 \geqslant \frac{4x+5}{2+\cos x} \geqslant \frac{4x+5}{3}$ c'est-à-dire $f(x) \geqslant \frac{4x+5}{3}$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x+5}{3} = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. On a déjà montré que, pour tout x réel, $1 \geqslant \frac{1}{2+\cos x} \geqslant \frac{1}{3}$. Or, si $x \leqslant -\frac{5}{4}$, alors $4x+5 \leqslant 0$. On adonc, pour tout $x \leqslant -\frac{5}{4}$, $4x+5 \leqslant \frac{4x+5}{2+\cos x} \leqslant \frac{4x+5}{3}$ c'est-à-dire $f(x) \leqslant \frac{4x+5}{3}$. Et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x+5}{3} = -\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Corrigé exercice 80 :

1. Soit $x \geqslant 0$. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$.

2. Pour tout $x \geqslant 0$, $x+2 \geqslant x$ d'où $\sqrt{x+2} \geqslant \sqrt{x}$,car la fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+2} = +\infty$.

3. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x}\right) = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Corrigé exercice 81 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ et $x^2+1 \geqslant 0$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Et on a alors, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2}}$ c'est-à-dire, pour tout $x \geqslant 0$, $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$. De plus, pour tout $x \geqslant 0$, $x^2+1 \geqslant x^2$, donc $\sqrt{x^2+1} \geqslant \sqrt{x^2}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$ et donc $\sqrt{x^2+1} \geqslant x$,pour tout $x \geqslant 0$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$. Et, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = +\infty$. D'où, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. On a $3x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$ et $3x+4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{4}{3}$ donc $\mathcal{D}_g = [0;+\infty[$. Et on alors, pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, $\sqrt{3x} - \sqrt{3x+4} = -\frac{4}{\sqrt{3x}+\sqrt{3x+4}}$. Or,pour tout $x \geqslant 0$, $3x+4 \geqslant 3x$ donc $\sqrt{3x+4} \geqslant \sqrt{3x}$, car la fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x} = +\infty$ et donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x+4} = +\infty$. Enfin, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x} + \sqrt{3x+4}\right) = +\infty$, d'où, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Corrigé exercice 82 :

1. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$ alors il existe $m_1 > 0$ tel que, pour tout $x > m_1$, $\ell - \epsilon < g(x) < \ell + \epsilon$.

2. De même, il existe m_2 tel que pour tout $x > m_2$, $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$.

3. On pose $M = max\{m_1; m_2\}$. Alors, si $x > M$, alors $\ell - \epsilon < g(x)$ et $h(x) < \ell + \epsilon$, et donc, puisque pour tout $x \in \mathrm{I}$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$.

Corrigé exercice 83 :

1. a. Pour tout $x > 0$, $3x+2 > x$ donc $\mathrm{e}^{3x+2} > \mathrm{e}^x$, car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{3x+2} = +\infty$.
2. a. Pour tout $x > 1$, $2x-1 > x$ donc $\mathrm{e}^{2x-1} > \mathrm{e}^x$, car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x-1} = +\infty$.
   b. Pour tout $x > 1$, $5x-3 > x$ donc $\mathrm{e}^{5x-3} > \mathrm{e}^x$, car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et donc $0 < \frac{2}{\mathrm{e}^{5x-3}} < \frac{2}{\mathrm{e}^x}$,car la fonction $x \mapsto \frac{2}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^x} = 0$ et donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^{5x-3}} = 0$.
   c. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-4x-1} = \frac{1}{\mathrm{e}^{4x+1}}$. En suivant le même raisonnement qu'à la question b., on trouve alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-4x-1} = 0$.

Corrigé exercice 84 :

1. On a d'une part, d'après un théorème de croissance comparée, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x = 0$. Et d'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty$. Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
2. On a d'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-x) = +\infty$. Et d'autre part comme, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ alors, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Et donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
3. Pour tout x réel, $x^2\mathrm{e}^{-x} = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}$. Or, d'après un théorème de croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k(x) = \frac{\mathrm{e}^x - x}{\mathrm{e}^x+1} = \frac{\mathrm{e}^x\left(1-\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)} = \frac{1-\frac{x}{\mathrm{e}^x}}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}}$. Or, d'après un théorème de croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$. D'où, au final, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 1$.
5. Pour tout $x > 0$, $\ell(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - x^3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+x} = \frac{\mathrm{e}^{2x}\left(1-\frac{x^3}{\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1+\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)} = \mathrm{e}^x\frac{1-\frac{x^3}{\mathrm{e}^x}}{1+\frac{x}{\mathrm{e}^x}}$. Or, d'après un théorème de croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. Et, d'après un théorème de croissance comparé, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^3} = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\mathrm{e}^x} = 0$. Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par somme, quotient et produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell(x) = +\infty$.

Corrigé exercice 85 :

1. D'une part $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. D'autre part, d'après le théorème de limite à l'infini d'un polynôme, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - 2x^2 + 1) = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x (x^3 - 2x^2 + 1) = +\infty$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{\mathrm{e}^x+1}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} + \frac{1}{x^2}$. On a, d'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$, d'après un théorème de croissance comparée, et, d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x+1}{x^2} = +\infty$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2x - 5 = \mathrm{e}^x \left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}} - 2\frac{x}{\mathrm{e}^x} - \frac{5}{\mathrm{e}^x}\right)$. Or, d'après un théorème de croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$. Enfin, comme, pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{2x} \geqslant \mathrm{e}^x$, car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} = +\infty$ et donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}} = 0$. Et au final, par somme puis produit, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2x - 5 = +\infty$.

Corrigé exercice 86 :

1. D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty} (x + 1) = -\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^x + 3) = 3$. D'où, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\mathrm{e}^x+3} = -\infty$.

2. Pour tout $x \neq 0$, $\frac{x+1}{\mathrm{e}^x+3} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1+\frac{3}{\mathrm{e}^x}\right)} = \frac{x}{\mathrm{e}^x} \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{\mathrm{e}^x}}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$,d'après un théorème de croissance comparée,donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc, par produit puis somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{3}{\mathrm{e}^x} = 1$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{\mathrm{e}^x}} = 1$. D'où, au final, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\mathrm{e}^x+3} = 0$.

3. D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, d'après un théorème de croissance comparée,donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} (x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x - 5) = -5$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{2x} - 3) = -3$. Et, au final, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x-5}{\mathrm{e}^{2x}-3} = \frac{5}{3}$.

4. Pour tout $x \neq 0$, $\frac{x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x-5}{\mathrm{e}^{2x}-3} = \frac{x\mathrm{e}^x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^{2x}\left(1-\frac{3}{\mathrm{e}^{2x}}\right)} = \frac{x}{\mathrm{e}^x} \times \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x\mathrm{e}^x}}{1-\frac{3}{\mathrm{e}^{2x}}}$. D'après un théorème de croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^x = +\infty$ et donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x\mathrm{e}^x} = 0$. Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x\mathrm{e}^x}\right) = 1$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} = +\infty$, d'où, par quotient puis par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{\mathrm{e}^{2x}}\right) = 1$. D'où, au final, par quotient puis produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x-5}{\mathrm{e}^{2x}-3} = 0$.

10 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 87 :

1. $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$.

2. D'après le théorème de limite en l'infini des fonctions rationnelles, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} x^2+x-2=-\frac{9}{4}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ x<-\frac{1}{2}}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ x>-\frac{1}{2}}} f(x)=-\infty$.

3. $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=-\frac{1}{2}$.

4. f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Et, pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, $f'(x)=\frac{2x^2+2x+5}{(2x+1)^2}$. Comme le carré d'un nombre réel est toujours positif, f' est du signe de $2x^2+2x+5$ de discriminant $\Delta=-36<0$. Ce trinôme n'admet donc pas de racines réelles et est donc du signe de $2>0$ sur son ensemble de définition. Le tableau de variations de f est donc le suivant.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
f	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

Corrigé exercice 88 :

1. Le trinôme au dénominateur a pour discriminant $\Delta=16>0$, il admet donc deux racines réelles : 1 et –3. D'où $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-3;1\}$.

2. D'après le théorème de limite en l'infini des fonctions rationnelles, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. De plus $\lim\limits_{x\to-3} x^2+1+1=7$ et $\lim\limits_{x\to1} x^2+1+1=3$ d'où, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\ x<-3}} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\ x>-3}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x<1}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x>1}} f(x)=+\infty$.

3. $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes verticales d'équation respective $x=-3$ et $x=1$, et une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ d'équation $y=1$.

4. f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Et, pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, $f'(x)=\frac{x^2-8x-5}{(x^2+2x-3)^2}$. Comme le carré d'un nombre réel est toujours positif, f' est du signe de x^2-8x-5 de discriminant $\Delta=84>0$. Ce trinôme admet donc deux racines réelles distinctes : $4-\sqrt{21}$ et $4+\sqrt{21}$, et est négatif entre ses racines.

x	$-\infty$		-3		$4-\sqrt{21}$		1		$4+\sqrt{21}$		$+\infty$
x^2-8x-5		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x^2+2x-3)^2$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(4-\sqrt{21})$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(4+\sqrt{21})$	$\nearrow$	1

Corrigé exercice 89 :

1. f est définie lorsque $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie, d'où $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Enfin, $\lim\limits_{x\to0} \mathrm{e}^x = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ d'où, par somme, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = -\infty$.

3. $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ d'équation $y = 0$.

4. f est dérivable sur son ensemble de définition comme somme de fonctions dérivables sur cet ensemble. Et, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x^2}$. D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Corrigé exercice 90 :

1. a. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

   b. D'après le théorème de limite en l'infini des fonctions rationnelles, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$. De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to-5\\x<-5}} x+5 = 0^-$, $\lim\limits_{\substack{x\to-5\\x>-5}} x+5 = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to-5} 2x-1 = -11$ d'où, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-5\\x<-5}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-5\\x>-5}} f(x) = -\infty$.

   c. $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -5$ et une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ d'équation $y = 2$.

2. a. $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

   b. D'après le théorème de limite en l'infini des fonctions rationnelles, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\frac{3}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\frac{3}{2}$. De plus, $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ x < -\frac{1}{2}}} 2x + 1 = 0^-$, $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2}}} 2x + 1 = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} -3x + 7 = \frac{17}{2}$ d'où, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ x < -\frac{1}{2}}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2}}} g(x) = +\infty$.

   c. $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ d'équation $y = -\frac{3}{2}$.

Corrigé exercice 91 :

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur cet ensemble. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. Or, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$. La fonction f admet donc pour tableau de variations, le tableau suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 1$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > x$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

4. On pose $X = -x$. On a donc $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-X} = \frac{1}{\mathrm{e}^X}$. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^X} = 0$. C'est-à-dire, d'après le théorème de la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

Corrigé exercice 92 :

Partie A : cas $n = 1$

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur cet ensemble. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - x$.

2. Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - x > 0$, le tableau de variations de la fonction f est le suivant.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

3. Pour tout $x > 0$, $f(x) > 1 > 0$ donc, pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^x > \frac{x^2}{2}$. D'où, pour tout $x > 0$, $\frac{\mathrm{e}^x}{x} > \frac{x}{2}$.
4. Pour tout $x > 0$, $\frac{\mathrm{e}^x}{x} > \frac{x}{2}$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

Partie B : cas $n > 1$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. $\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n \times \left(\frac{1}{n}\right)^n = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\right)^n \times \left(\frac{n}{x}\right)^n \times \left(\frac{1}{n}\right)^n = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\right)^n \times \left(\frac{n}{nx}\right)^n = \frac{\mathrm{e}^x}{x^n}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc, d'après le théorème de la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$ d'où, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n \times \left(\frac{1}{n}\right)^n = +\infty$, car $\left(\frac{1}{n}\right)^n > 0$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.

Corrigé exercice 93 :

1. On pose $X = -x$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^n \mathrm{e}^x = (-X)^n \mathrm{e}^{-X} = \frac{(-X)^n}{\mathrm{e}^X}$.
2. a. D'après un théorème de croissance comparée, $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X^n} = +\infty$.
   b. Par passage à l'inverse, on a donc $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X^n}{\mathrm{e}^X} = 0$.
   c. Pour tout $X > 0$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, d'où $-\frac{X^n}{\mathrm{e}^X} \leqslant \frac{(-X)^n}{\mathrm{e}^X} \leqslant \frac{X^n}{\mathrm{e}^X}$. De plus, $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X^n}{\mathrm{e}^X} = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{(-X)^n}{\mathrm{e}^X} = 0$.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{(-X)^n}{\mathrm{e}^X} = 0$ donc, d'après le théorème de la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$.

Corrigé exercice 94 :

1. $\forall A \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}, x > m \Rightarrow f(x) < A$.
2. $\forall \epsilon > 0, \exists m \in \mathbb{R}, x > m \Rightarrow |f(x) - 3| < \epsilon$.
3. a. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$.
   b. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$.
   c. $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) < m$.

Corrigé exercice 95 :

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

2. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

   b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

   c. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, trouver la limite de h en $+\infty$ revient à trouver la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

Partie B

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

2. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

   b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$

   c. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, trouver la limite de h en $+\infty$ revient à trouver la limite de la fonction exponentielle en $-\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

Corrigé exercice 96 :

1. D'après le théorème de limite en l'infini des fonctions rationnelles, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^30}{x^15} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. a. D'après la calculatrice, on a : $f(0,5) \approx 80,00003047$, $f(0,2) \approx 79,95605469$, $f(0,1) \approx 0$ et $f(0,01) \approx 0$.

   b. On peut conjecturer que f tend vers 0 en 0.

   c. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1600+80x^{15}+x^{30}-1600}{x^{15}} = \frac{80x^{15}+x^{30}}{x^{15}} = 80 + x^{15}$.

   d. $\lim\limits_{x\to0} x^{15} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 80$. La conjecture n'est donc pas vérifiée.

Corrigé exercice 97 :

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si, et seulement si, quel que soit $\epsilon > 0$, $|f(x) - \ell| < \epsilon$ pour x suffisamment proche de a. On pose maintenant $g(x) = f(x) - \ell$. On peut donc réécrire l'assertion précédente ainsi : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si, et seulement si, quel que soit $\epsilon > 0$, $|g(x)| < \epsilon$ pour x suffisamment proche de a. C'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si, et seulement si, quel que soit $\epsilon > 0$, $|g(x) - 0| < \epsilon$ pour x suffisamment proche de a. En conclusion, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - \ell) = 0$.

Corrigé exercice 98 :

1. La vitesse v_2 est forcément strictement positive, donc $\mathcal{D}_v =]0;+\infty[$.

2. $d = v_1 \times t_1 = v_2 \times t_2$ c'est-à-dire $d = 25t_1 = xt_2$. De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}_v$, $v(x) = \frac{2d}{t_1+t_2}$. Donc, pour tout $x \in \mathcal{D}_v$, $v(x) = \frac{2xt_2}{\frac{xt_2}{25}+t_2} = \frac{2x}{\frac{x}{25}+1} = \frac{50x}{x+25}$.

3. v est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Et, pour tout $x \in \mathcal{D}_v$, $v'(x) = \frac{50(x+25)-50x}{(x+25)^2} = \frac{1250}{(x+25)^2}$. D'où $v'(x) > 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$ et donc v est croissante sur $]0;+\infty[$.

4. a. $\lim\limits_{x\to 0} v(x) = 0$ et, d'après le théorème de limite en l'infini d'une fonction rationnelle, $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 50$.

   b. D'après la question précédente, quelle que soit la deuxième vitesse, la vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet ne dépassera jamais 50km.h-1. Ce qui peut sembler paradoxal. On peut en effet s'imaginer que si la deuxième vitesse devient très très grande alors la moyenne aussi sera très très grande. Prenons par exemple $d = 25$ km. Grégoire parcourt donc 50 km aller-retour. En effectuant le trajet aller à une vitesse de 25 km.h-1, Grégoire parcourt l'aller en 1 h. Imaginons maintenant que la vitesse moyenne sur ce trajet soit de 50 km.h-1. Grégoire devrait alors parcourir la totalité des 50 km en 1 h, ce qui est impossible puisque, au bout d'une heure, Grégoire n'a effectué que le trajet aller. Le résultat n'est donc, au final, pas si paradoxal que ça : il indique juste le fait, assez concret, que Grégoire ne peut pas se téléporter ou remonter dans le temps.

Corrigé exercice 99 :

1. La fonction C est dérivable sur $[0;+\infty[$ et, pour tout x dans cet intervalle, $C'(t) = 12\left(0 - \left(-\frac{7}{80}\right)\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right) = \frac{21}{20}\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}$. Pour tout $t \in [0;+\infty[$, $C'(t) > 0$,donc la fonction C est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. $\lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{7}{80}t = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc, d'après le théorème de la limite de la composée de deux fonctions, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t} = 0$. Par somme puis produit, on en déduit donc que $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} 12\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right) = 12$. Le plateau est donc égal à 12 et le traitement n'est pas adapté.

Corrigé exercice 100 :

Partie A : Étude graphique

1. À l'aide de la représentation graphique, on peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-5\\x<-5}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-5\\x>-5}} f(x) = -\infty$.

2. $\mathcal{C}_f$ admet en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ et une asymptote verticale d'équation $x = -5$.

   Partie B : Étude algébrique

1. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x-1} - 2 \leqslant \mathrm{e}^{2x-1} - 2\cos x \leqslant \mathrm{e}^{2x-1} + 2$. Si $x > -5$, alors $x + 5 > 0$ et donc $\frac{\mathrm{e}^{2x-1}-2}{x+5} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{2x-1}-2\cos x}{x+5} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{2x-1}+2}{x+5}$. Or, pour tout $x > -5$, $\frac{\mathrm{e}^{2x-1}-2}{x+5} + 2 \geqslant \frac{\mathrm{e}^{2x-1}-2}{x+5}$, car $2 > 0$, d'où, pour tout $x > -5$, $f(x) \geqslant \frac{\mathrm{e}^{2x-1}-2}{x+5}$.

   b. Pour tout $x \neq -5$, on a $\frac{\mathrm{e}^{2x-1}-2}{x+5} = \frac{\mathrm{e}^{2x-1}}{x+5} - \frac{2}{x+5}$. Or, pour tout $x \neq -5$ et $x \neq 0$, $\frac{\mathrm{e}^{2x-1}}{x+5} = \frac{(\mathrm{e}^x)^2}{\mathrm{e}(x+5)} = \frac{(\mathrm{e}^x)^2}{x\mathrm{e}\left(1+\frac{5}{x}\right)} = \frac{\mathrm{e}^x}{x} \times \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}\left(1+\frac{5}{x}\right)}$. On a d'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x} = 0$ donc, par somme puis produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}\left(1+\frac{5}{x}\right) = \mathrm{e}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$d'où, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}\left(1+\frac{5}{x}\right)} = +\infty$. D'autre part, d'après un théorème de croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x-1}}{x+5} = +\infty$. Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x+5} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x-1}-2}{x+5} = +\infty$. Et puisque, pour tout $x > -5$, $f(x) \geqslant \frac{\mathrm{e}^{2x-1}-2}{x+5}$, d'après un théorème de comparaison, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ce résultat est cohérent avec les considérations graphiques de la partie A.

2. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{2x-1} - 2 \leqslant \mathrm{e}^{2x-1} - 2\cos x \leqslant \mathrm{e}^{2x-1} + 2$. Si $x < -5$, alors $x + 5 < 0$ et donc $\frac{\mathrm{e}^{2x-1}-2}{x+5} \geqslant \frac{\mathrm{e}^{2x-1}-2\cos x}{x+5} \geqslant \frac{\mathrm{e}^{2x-1}+2}{x+5}$. D'où, pour tout $x < -5$, $\frac{\mathrm{e}^{2x-1}-2}{x+5} + 2 \geqslant f(x) \geqslant \frac{\mathrm{e}^{2x-1}+2}{x+5} + 2$.

   b. Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{2x-1} = \frac{(\mathrm{e}^x)^2}{\mathrm{e}}$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(\mathrm{e}^x)^2}{\mathrm{e}} = 0$. Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{2x-1} - 2) = -2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{2x-1} + 2) = 2$. D'où, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x-1}-2}{x+5} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x-1}+2}{x+5} = 0$. Enfin, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x-1}-2}{x+5} + 2 = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x-1}+2}{x+5} + 2 = 2$. Et, en conclusion, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$. Ce résultat est cohérent avec les considérations graphiques de la partie A.

3. $\lim\limits_{x\to-5} (\mathrm{e}^{2x-1} - 2\cos x) = \mathrm{e}^{-11} - 2\cos(-5) < 0$. Or, $\lim\limits_{\substack{x\to-5\\x<-5}} (x+5) = 0^-$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-5\\x<-5}} \frac{\mathrm{e}^{2x-1}-2\cos x}{x+5} = +\infty$ et donc, par somme $\lim\limits_{\substack{x\to-5\\x<-5}} f(x) = +\infty$.

   De même, comme $\lim\limits_{\substack{x\to-5\\x>-5}} (x+5) = 0^+$ alors, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-5\\x>-5}} \frac{\mathrm{e}^{2x-1}-2\cos x}{x+5} = -\infty$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to-5\\x>-5}} f(x) = -\infty$.

Corrigé exercice 101 :

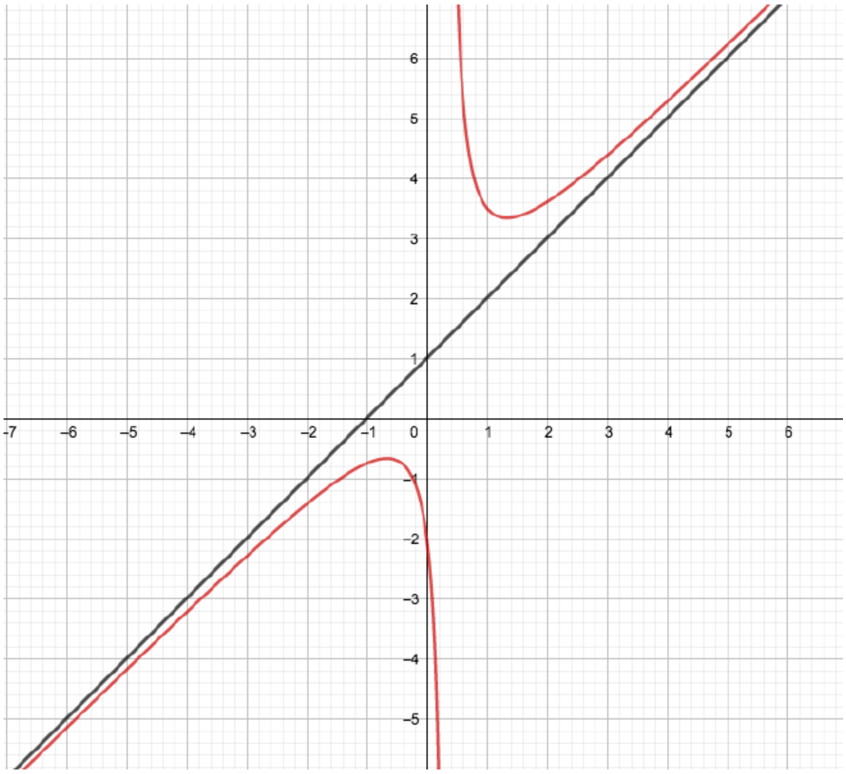
1. a. D'après le théorème de limite en l'infini des fonctions rationnelles, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{3x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} f(x) = 3 > 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\x<\frac{1}{3}}} 3x - 1 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\x>\frac{1}{3}}} 3x - 1 = 0^+$, d'où $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\x<\frac{1}{3}}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\x>\frac{1}{3}}} f(x) = +\infty$.

   b. $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = \frac{1}{3}$.

2. f est une fonction rationnelle et est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f'(x) = \frac{9x^2-6x-8}{(3x-1)^2}$. $f'(x)$ est du signe de $9x^2 - 6x - 8$, qui est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 324 > 0$, et qui admet donc deux racines réelles distinctes : $-\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{3}$. La fonction f admet donc le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$9x^2-6x-8$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(3x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$-\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{10}{3}$	↗	$+\infty$

3. On obtient les courbes ci-dessous.



4. On observe que $\mathcal{C}_f$ semble se rapprocher de plus en plus de la droite d'équation $y = x + 1$ quand x tend vers $-\infty$ et quand x tend vers $+\infty$.

5. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

   $f(x) - (x+1) = \frac{3x^2+2x+2}{3x-1} - (x+1) = \frac{3x^2+2x+2-(x+1)(3x-1)}{3x-1} = \frac{3}{3x-1}$.

6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{3x-1} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$. Et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{3x-1} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$.

Corrigé exercice 102 :

1. a. Pour tout $x \in]3;+\infty[$, $f(x)-(x-1) = \frac{x^2-4x+2}{x-3}-(x-1) = \frac{-1}{x-3}$. Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x-3} = 0$, donc d est bien une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

   b. Pour tout $x \neq 1$ et $x \neq 3$, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x^2-4x+2}{x-3}}{x-1} = \frac{x^2-4x+2}{(x-3)(x-1)} = \frac{x^2-4x+2}{x^2-4x+3}$. D'après le théorème de limite à l'infini des fonctions rationnelles, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

2. On peut prendre par exemple $h(x) = x$ et $\ell(x) = x+1$.

3. On peut prendre, par exemple, la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = x^3$, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2}{x^3} = 1$, d'après le théorème de limite à l'infini des fonctions rationnelles.

4. Pour tout $x \neq 0$, $\frac{x^3}{x^2} = x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

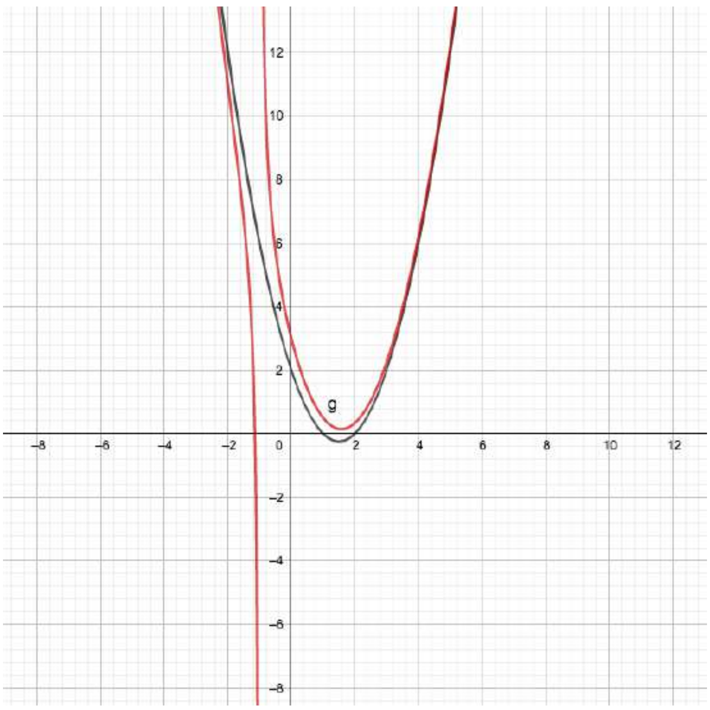
5. Un synonyme de « prépondérante » est le mot « dominant ».

Corrigé exercice 103 :

1. a. D'après le théorème de limite à l'infini des fonctions rationnelles, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\mapsto-1} x^3-2x^2-x+3 = 1 > 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = 0^+$, d'où $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty$.

   b. On peut en déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

2. On obtient les courbes ci-dessous.



3. En $-\infty$ et en $+\infty$, on observe que la courbe de f semble s'approcher de plus en plus de la parabole.

4. a. Pour tout $x \neq -1$:

$$x^2 - 3x + 2 + \frac{1}{x+1} = \frac{(x^2-3x+2)(x+1)+1}{x+1} = \frac{x^3-2x^2-x+3}{x+1}.$$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x^2 - 3x + 2)) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$.

11 Préparer le bac

Corrigé exercice 104 :

1. a. Étude de la limite de g en $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ donc, par produit par -1 puis par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} (1-x) = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$. Étude de la limite de g en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc, par produit puis par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty$. Mais $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. On ne peut donc pas conclure directement.Pour tout $x \neq 0$, $g(x) = 1 + x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right)$. D'après un théorème de croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right) = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right) = +\infty$. En conclusion, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

   b. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout réel x, $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. Or, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$ et $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. La fonction g admet donc le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

   D'après le tableau ci-dessus, g admet en 0 un minimum égal à 2. Donc, pour tout réel x, $g(x) \geqslant 2$ d'où, pour tout réel x, $g(x) > 0$.

2. Étude de la limite de f en $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$ donc,par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = -\infty$. Et ainsi, par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Étude de la limite de f en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$. D'autre part, d'après un théorème de croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et donc, par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. Ainsi, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur cet ensemble. Pour tout réel x, $f'(x) = 1 + \frac{\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = 1 + \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^x + 1 - x\right) = \mathrm{e}^{-x} g(x)$.

4. D'après la question 1.b., pour tout réel x, $g(x) > 0$. De plus, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. La fonction f admet donc le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5. a. Si une fonction f est dérivable en a, alors une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Or $f'(0) = 2$ et $f(0) = 1$. La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 admet donc pour équation $y = 2(x-0)+1$ soit $y = 2x+1$.

   b. On pose, pour tout réel x, $h(x) = f(x) - (2x+1)$. On a alors : $h(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x} - (2x+1) = \frac{x}{e^x} - x = \frac{x}{e^x}(1 - e^x)$. Or $e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$ donc $1 - e^x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$. La fonction h admet donc le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$1 - e^x$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$	
$h(x)$		$-$	0	$-$	

   Pour tout x réel, on a donc $h(x) \leqslant 0$. On en déduit que $\mathcal{C}$ est toujours située en dessous de T.

Corrigé exercice 105 :

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x + e^x$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, d'après un théorème de croissance comparée, et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ d'où, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$.

3. Pour tout réel x, $e^x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $x+2$. On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1. a. $g_m(x) = 0 \iff x + 1 = m\mathrm{e}^{-x} \iff (x+1)\mathrm{e}^{x} = m \iff f(x) = m$.
   b. D'après la question précédente et le tableau de variations de la question 3. de la partie A :
      - si $m < -\mathrm{e}^{-2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ n'admet aucune solution, donc $\mathcal{C}_m$ ne coupe pas l'axe des abscisses ;
      - si $m = -\mathrm{e}^{-2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ admet pour unique solution -2, donc $\mathcal{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en un point ;
      - si $-\mathrm{e}^{-2} < m < 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ admet deux solutions, donc $\mathcal{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en deux points ;
      - si $m \geqslant 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ admet une unique solution, donc $\mathcal{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en un point.

2. La courbe 1 ne coupe pas l'axe des abscisses, elle correspond donc à une fonction g_m telle que $m < -\mathrm{e}^{-2}$. D'où $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_{-\mathrm{e}}$. Si $m = 0$, g est une fonction affine et donc $\mathcal{C}_0$ est une droite. Donc $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_0$. Enfin, la courbe 3 correspond à donc à $m = \mathrm{e}$. On peut par ailleurs vérifier qu'elle coupe bien l'axe des abscisses en un seul point. On a donc $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_{\mathrm{e}}$.

3. Pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) = -m\mathrm{e}^{x}$ qui est du signe de $-m$. On en déduit que :
   - si $m > 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) < 0$, donc $\mathcal{C}_m$ est en-dessous de $\mathcal{D}$;
   - si $m < 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) > 0$, donc $\mathcal{C}_m$ est au-dessus de $\mathcal{D}$;
   - si $m = 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) = 0$, donc $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{D}$ sont confondues.

Corrigé exercice 106 :

1. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-2x+1} = \mathrm{e}^{-2x} \times \mathrm{e}^{1} = \frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}^{x})^2}$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}^{x})^2} = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} (1 + x + x^2 + x^3) = -\infty$, d'après le théorème de la limite à l'infini d'un polynôme. Et donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. a. On multiplie les deux membres de l'inégalité $x > 1$ par x, qui est strictement positif puisque strictement supérieur à 1. On obtient alors $x^2 > x$. On multiplie cette dernière inégalité par x et on obtient alors $x^3 > x^2$. Donc, pour tout pour $x > 1$, on a bien $1 < x < x^2 < x^3$.

   b. Puisque $x > 1$, on a, d'après la question précédente, $1 < x < x^2 < x^3$. D'où $4 < 1 + x + x^2 + x^3 < 4x^3$ et donc $0 < 1 + x + x^2 + x^3 < 4x^3$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-2x+1} > 0$. D'où, pour tout $x > 1$, $0 < f(x) < 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}$.

   c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $4 \times \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x} \times \frac{x^3}{\mathrm{e}^x} = \frac{4x^3\mathrm{e}}{(\mathrm{e}^x)^2} = 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}$. Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^3} = +\infty$ d'où, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\mathrm{e}^x} = 0$. D'autre part, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x} = 0$. Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1} = 0$.

   d. Pour tout $x > 1$, $0 < f(x) < 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1} = 0$ d'où, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. L'axe des abscisses est donc une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$.

Corrigé exercice 107 :

1. La courbe $\mathcal{C}_u$ passe par le point $A(1;0)$ donc $u(1) = 0$, et par le point $B(4;0)$ donc $u(4) = 0$.

2. La droite $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_u$ en $+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 1$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{b}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{c}{x^2} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = a$. Par unicité de la limite, $a = 1$.

3. D'après la première question $u(1) = 0$ d'où $1 + \frac{b}{1} + \frac{c}{1^2} = 0 \Leftrightarrow b + c = -1$. De même, on a $u(4) = 0$ d'où $1 + \frac{b}{4} + \frac{c}{4^2} = 0$. $1 + \frac{b}{4} + \frac{c}{4^2} = 0 \Leftrightarrow 4b + c = -16$. On résout alors le système $\begin{cases} b + c = -1 \\ 4b + c = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ b = -5 \end{cases}$. Et donc, en conclusion, pour tout $x > 0$, $u(x) = 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-5x+4}{x^2}$.

Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 6 : Continuité

Table des matières

1 Informations sur ce chapitre

Le B.O. précise qu'à travers le théorème des valeurs intermédiaires, l'étude de la continuité permet de préciser les arguments assurant qu'une équation du type $f(x) = k$ a des solutions.
La notion de continuité est donc introduite d'abord d'un point de vue graphique pour essayer de fixer une image mentale, puis ensuite du point de vue algébrique. Le théorème des valeurs intermédiaires est alors présenté, ce qui va permettre de répondre aux questions « existe-t-il au moins une solution à une équation du type $f(x) = k$? » Un de ses corollaires permet d'obtenir l'unicité de cette solution sur un intervalle I dans les cas des fonctions continues et strictement monotones sur I.
Une application aux suites est ensuite proposée, notamment avec le théorème dit du point fixe. Le programme ne donne pas explicitement ce théorème mais il est signalé que les élèves doivent être capables d'étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Dans cette étude, on peut donc chercher à démontrer dans un premier temps que la suite est convergente puis, dans un deuxième temps, la valeur de sa limite, d'où l'introduction d'un théorème du point fixe. Les exercices proposés sont au départ assez calculatoires pour permettre aux élèves de bien acquérir les automatismes. Ces exercices peuvent servir de base pour des rituels de début de séances de type échauffement ou bien des exercices à la maison. On utilise ensuite le théorème des valeurs intermédiaires. L'utilisation du corollaire du cours permet de prouver l'unicité de la solution sur un intervalle où la fonction continue est strictement monotone. L'utilisation des algorithmes permet d'obtenir des encadrements de la solution. La plupart du temps, pour des raisons pratiques, un algorithme de balayage à la calculatrice est privilégié. Cependant, l'utilisation de Python, notamment pour l'algorithme de dichotomie, reste bien présente.

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

1. Voici le tableau de variations de la fonction exponentielle.

x	$-\infty$	$+\infty$
$(\mathrm{e}^x)'$	$+$	
e^x	0 $\nearrow$	$+\infty$

2. Les limites aux bornes de son ensemble de définition sont $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Corrigé exercice 2 :

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x + 2$.

2. g est un produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$, elle est donc dérivable sur $]0; +\infty[$. On applique alors la formule de dérivation d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = x$, $v(x) = \sqrt{x}$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. On a alors, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{\sqrt{x}}{2} = 3\frac{\sqrt{x}}{2}$.

3. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée d'une fonction affine avec la fonction exponentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 3\mathrm{e}^{3x}$.

4. ℓ est dérivable sur $]-1; +\infty[$ en tant que quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. On applique la formule de dérivation du quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x$, $v(x) = x + 1$, $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = 1$. On a alors $\ell'(x) = \frac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}$.

Corrigé exercice 3 :

f est une fonction du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 3$ et $c = 1$. Comme $a > 0$, sa courbe représentative est une parabole tournée vers le haut et son minimum est atteint en $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$.
f est donc strictement décroissante sur $]-\infty; -\frac{3}{2}]$ et strictement croissante sur $[-\frac{3}{2}; +\infty[$.

Corrigé exercice 4 :

1. En utilisant la formule de la dérivation d'un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + x \times \mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x$.

2. On étudie le signe de f'. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^x > 0$, donc f' a le même signe que $x \mapsto x + 1$. On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	$-\mathrm{e}^{-1}$	↗	

Corrigé exercice 5 :

1. $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x+7} = \sqrt{9} = 3$

2. $\lim\limits_{x \to 5} \mathrm{e}^{2x-5} = \mathrm{e}^5$

3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$

4. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$

Corrigé exercice 6 :

1. Pour tout $x \neq 0$ et $x \neq -1$, $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x} = \frac{x+1}{x\times(x+1)} = \frac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Pour tout $x \neq \frac{2}{3}$, $g(x) = \frac{x^3}{3x-2} = \frac{x^2}{3-\frac{2}{x}}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 - \frac{2}{x} = 3$. Ainsi, puisque $3 > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3-\frac{2}{x}} = \frac{1}{3}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

2. Pour tout $x \neq 0$ et $x \neq -1$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Pour tout $x \neq \frac{2}{3}$, $g(x) = \frac{x^2}{3-\frac{2}{x}}$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 3 - \frac{2}{x} = 3$. Puisque $3 > 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$.

3. Pour tout $x \neq \frac{2}{3}$, $g(x) = \frac{x^2}{3-\frac{2}{x}}$. Or, $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}} x^2 = \frac{4}{9}$. Puisque $\frac{4}{9} > 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{2}{3}\\ x<\frac{2}{3}}} 3 - \frac{2}{x} = 0$ avec $3 - \frac{2}{x} < 0$, d'où $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{2}{3}\\ x<\frac{2}{3}}} g(x) = -\infty$.

Corrigé exercice 7 :

1. Réponses a et b. La fonction exponentielle est croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2. Réponse d. On utilise la formule de dérivation de la composée d'une fonction affine avec une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vue en première et on obtient donc comme fonction dérivée $x \mapsto a\mathrm{e}^{ax+b}$.

3. Réponse c. D'une part $\mathrm{e}^x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'autre part $\mathrm{e}^x - 1 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$. L'ensemble des solutions est donc $[0; +\infty[$.

4. Réponses b et c. La suite (u_n) est une suite décroissante et minorée par 1. Elle est donc convergente vers une valeur supérieure ou égale à 1. Comme cette suite est également majorée par 2, la valeur vers laquelle elle converge est également inférieure ou égale à 2.

Corrigé exercice 8 :

1. $u_1 = \sqrt{16} = 4$ et $u_2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

2. Soit la proposition $P(n)$: « $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 8$ ». Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 8$ et $u_1 = 4$. On a donc bien $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 8$. Ainsi, $P(0)$ est vraie.Hérédité : On suppose qu'à un rang n, $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 8$. Montrons alors que $P(n+1)$ est vraie. En multipliant par 2 l'inégalité, on a alors, $0 \leqslant 2u_{n+1} \leqslant 2u_n \leqslant 16$. On applique la fonction racine carrée qui est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, d'où $\sqrt{0} \leqslant \sqrt{2u_{n+1}} \leqslant \sqrt{2u_n} \leqslant \sqrt{16}$. On obtient alors $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4 \leqslant 8$ donc $P(n+1)$ est vraie. Conclusion : $P(0)$ est vraie et la proposition P est héréditaire. $P(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. (u_n) est une suite décroissante minorée par 0 et majorée par 8. Elle converge donc vers une valeur qui se trouve entre 0 et 8.

3 Activités

3.1 Corrigé activité A :

Partie A

1. On peut tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ sans lever le stylo alors que ce n'est pas le cas pour tracer la courbe $\mathcal{C}_g$.
2. C'est donc la courbe $\mathcal{C}_f$ qui semble représenter une fonction continue.

Partie B

1. a. Les deux limites valent 3, en effet :
   $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x+2 = 1+2 = 3$
   $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} x+2 = 3$
   et $f(1) = 3$.
   b. On constate que ces trois valeurs sont égales.
2. a. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} g(x) = \mathrm{e}^1 = e$ car sur $]-\infty;1[$ on a $g(x) = \mathrm{e}^x$.
   $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} g(x) = 1$ et $g(1) = 1$ car sur $[1;+\infty[$, $g(x) = x$.
   b. Ces valeurs ne sont pas toutes égales, la fonction g n'est pas continue en 1.

Bilan :

Graphiquement, il y a continuité lorsqu'on ne lève pas le stylo pour tracer la représentation graphique de la fonction.Algébriquement, f est continue en un réel a si les limites à gauche et à droite de a sont égales à $f(a)$..

3.2 Corrigé activité B :

Partie A

1. Il est passé par la profondeur 200 m et 100 m pour atteindre la profondeur maximale de 300 m. Ce sous-marin ne peut descendre sous le seuil des 300 m, la profondeur 400 m ne sera donc pas atteinte. Il est forcément passé par les profondeurs de 100 m et 200 m puisque qu'il peut passer d'une profondeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.
2. Oui. De la même manière que pour le sous-marin, la pointe du pont doit forcément passer par toutes les valeurs intermédiaires pour passer de la position levée à la position baissée.

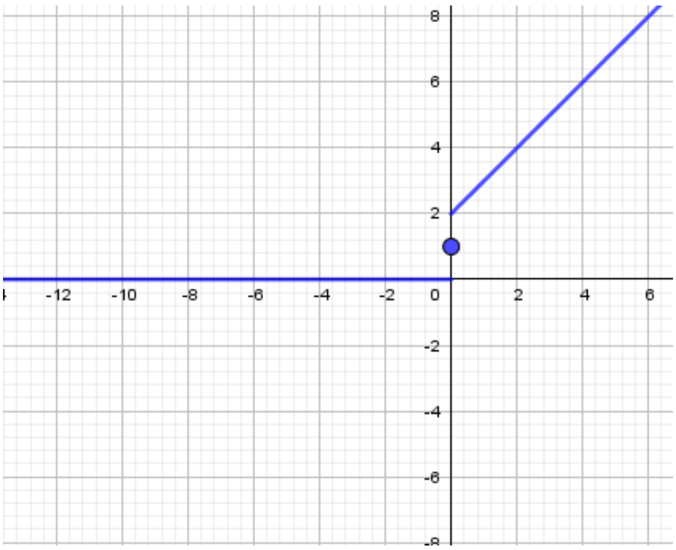
Partie B

1. a. On cherche à résoudre $x^3 = 3x \Leftrightarrow x(x^2-3) = 0$. Il y a 3 solutions : 0, $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$. Il existe donc trois nombres dont le cube est égal au triple. Par exemple $\left(\sqrt{3}\right)^3 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

b. Savoir s'il existe des nombres tels que la différence entre leur cube et leur triple est égale à $k \in \mathbb{R}$ revient à déterminer lorsque les fonctions $f_k : x \mapsto x^3 - 3x - k$ s'annulent. On peut constater grâce à GeoGebra ou la calculatrice que f_k s'annule :

- une fois si $k \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$;
- 2 fois si $k = 2$ ou $k = -2$;
- 3 fois si $k \in [-2; 2]$.

2. Voici ce que l'on obtient.



La commande GeoGebra pour tracer g est « g(x) = Si(x < 0, 0, Si(x > 0, x + 2, 1)) »

3. Il faut ici étudier l'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec la droite d'équation $y = k$.Si $k < 0$, il n'y a aucune solution.Si $k = 0$, l'ensemble des solutions est l'intervalle $]-\infty; 0]$.Si $0 < k < 1$, il n'y a aucune solution. Si $k = 1$, il y a une unique solution : 1.Si $1 < k \leqslant 2$, il n'y a aucune solution. Attention, $= g(0) = 1$ donc les points de coordonnées $(0; 0)$ et $(0; 2)$ n'appartient pas à la courbe représentative de g. Si $k > 2$, il y a une unique solution.

4. On constate qu'il existe des réels k qui n'ont pas d'antécédents par la fonction g. C'est le cas lorsque $k < 0$ car g est une fonction positive. Mais c'est aussi le cas lorsque $k \in]0; 1[\cup]1; 2[$ parce que la fonction g n'est pas continue.

Bilan :

Il suffit que la fonction f soit continue sur $[a; b]$. En effet, si c'est le cas, la fonction f prendra alors nécessairement au moins une fois toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$. Elle prendra donc au moins une fois la valeur k.

3.3 Corrigé activité C :

Partie A

1. f est une fonction dérivable sur $]-1;+\infty[$ en tant que composée d'une fonction affine strictement positive sur $]-1;+\infty[$ avec la fonction racine carrée. Pour tout $x > -1$, $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1+x}{2}}}$ et donc $f'(x) > 0$. Ainsi, la fonction f est croissante sur $]-1;+\infty$. Or, $f(-1) = 0$ et pour tout $x \geqslant -1$, $f(x) \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant f(-1)$ donc, f est donc croissante sur I.

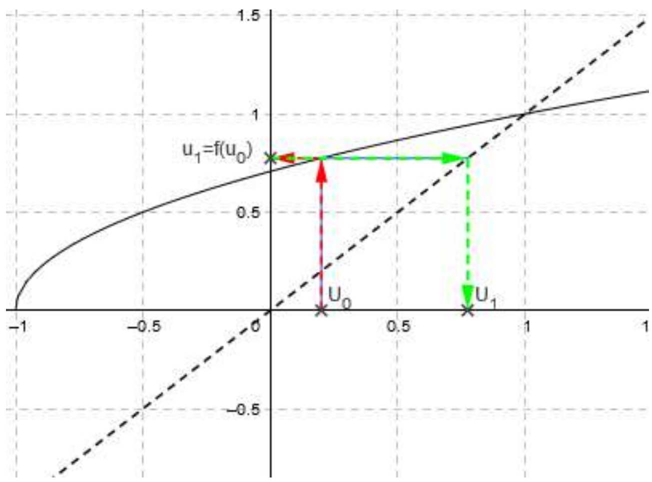
2. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, comme f est croissante sur I, on a $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$. Or, $f(0) = \sqrt{\frac{1}{2}} > 0$ et $f(1) = \sqrt{\frac{1+1}{2}} = 1$, d'où le résultat.

3. La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$. Elle est donc continue sur cet intervalle. Pour résoudre $f(x) = x$ sur $[0;+\infty[$, on commence par élever chaque membre de cette égalité au carré. On obtient ainsi $f(x) = x \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$. On obtient une équation du second degré à résoudre.Le déterminant de cette équation vaut $\Delta = 9 > 0$, l'équation admet donc deux solutions. On obtient $x_1 = -0,5 \notin [0;+\infty[$ et $x_2 = 1 \in [0;+\infty[$. L'équation $f(x) = x$ admet donc une unique solution sur $[0;+\infty[$.

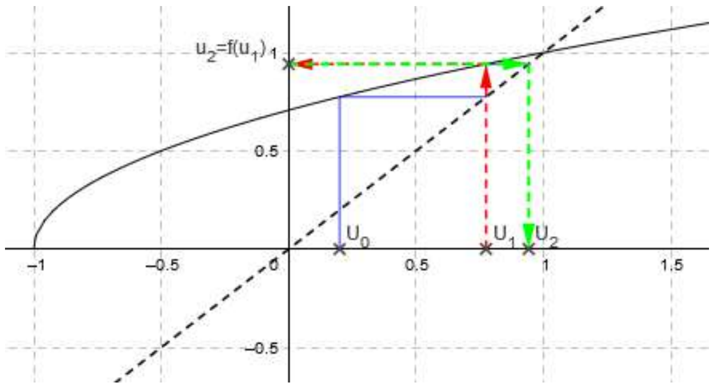
Partie B

1. Manipulations GeoGebra.

2. On place $u_0 = 0,2$ directement sur l'axe des abscisses. Pour placer u_1, on repère $f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées grâce à la courbe représentative de f. On reporte ensuite cette valeur sur l'axe des abscisse grâce à la droite d'équation $y = x$.



On procède de la même manière pour placer u_2 en partant cette fois de u_1.



3. À partir du graphique, il semble que la suite (u_n) soit croissante.Limite : à partir du graphique, il semble que la suite (u_n) tende vers 1. On peut construire les termes suivants pour s'en convaincre.

4. En utilisant la définition de la limite d'une suite, on sait que si la limite de (u_n) vaut ℓ, alors pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un entier n_0 pour lequel pour tout entier $n > n_0$, $u_n \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$. Sachant que $n + 1 > n > n_0$, on a $n + 1 > n_0$ donc $u_{n+1} \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$, c'est à dire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = +\infty$.

5. Si (u_n) converge vers une limite ℓ, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$.

6. (u_n) et (u_{n+1}) ayant la même limite, ℓ sera donc une solution de l'équation $f(\ell) = \ell$. Comme nous l'avons vu à la question 3. de la partie A, l'équation $f(x) = x$ admet $x_2 = 1$ comme unique solution sur I. On en déduit donc que $\ell = 1$.

Bilan :

La limite α de la suite (u_n) est aussi une solution de l'équation $f(x) = x$. On peut donc résoudre cette équation algébriquement comme on l'a fait dans cette activité ou bien utiliser un outil informatique (calculatrice ou GeoGebra par exemple) pour déterminer une valeur approchée.
Attention, lorsqu'une suite admet une limite, cette limite est unique. Donc, si l'équation $f(x) = x$ admet plusieurs solutions, il faut être capable de déterminer celle qui correspond à la limite.

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 9 :

La seule courbe où l'on doit lever le stylo pour la tracer est la courbe rouge.
Réponse c

Corrigé exercice 10 :

La fonction racine carrée est définie et continue sur $[0; +\infty[$ mais pas sur $\mathbb{R}$. Il en est donc de même pour la fonction f considérée. De plus, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout k appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.
Réponse b

Corrigé exercice 11 :

On considère que la limite en $-\infty$ n'est pas atteinte. Par application d'un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution à l'équation $f(x) = -3$.
Réponse b

Corrigé exercice 12 :

La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$ mais elle est dérivable sur $]0; +\infty[$ uniquement. De plus, l'équation $f(x) = k$ n'admet de solution que pour $k \geqslant 0$.
Réponse b

Corrigé exercice 13 :

$x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.$x \mapsto |x+1|$ est continue sur $[-1; +\infty[$ et sur $]-\infty; -1]$. De plus, en -1, les limites à gauche et à droite sont égales à l'image de -1 donc la fonction est continue sur $\mathbb{R}$.$x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. $x \mapsto \frac{2}{x+1}$ est continue sur son domaine de définition, donc sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Réponses a, b et c

Corrigé exercice 14 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + x + 1 - \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Résoudre l'équation considérée revient à trouver les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ s'annule. Cette fonction est continue sur $]0; +\infty[$. On calcule sa dérivé et on obtient $f'(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$. Comme cette fonction est strictement positive sur $]0; +\infty[$, f est strictement croissante. On calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et on obtient, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On obtient donc le tableau de variations suivant.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
f	||	$-\infty$	$+\infty$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. De plus, 0 appartient à l'ensemble des images de f. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $]0;+\infty[$.

Réponse b

Corrigé exercice 15 :

D'après le cours le produit de deux fonctions continues sur I est continue sur I.D'après le cours, $\sqrt{f}$ est continue à la condition que f soit à la fois continue et positive sur I. Or, la positivité de f n'est pas mentionnée ici. D'après le cours, $5f$ et $6g$ sont continues sur I, donc la somme de ces deux fonction est aussi continue sur I. D'après le cours, $f-g$ est continue sur I, $f+g$ est continue sur I, donc le produit de ces deux fonctions est continue sur I.

Réponses a, c et d

Corrigé exercice 16 :

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{2}{x+1}$. Cette fonction est décroissante sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$. On montre par récurrence que $u_n \in [0;2]$, pour tout entier naturel n.Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0,5 \in [0;2]$. La propriété est donc vraie au rang 0. Hérédité : Supposons qu'au rang n, on ait $u_n \in [0;2]$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et comme f est décroissante sur $]-1;+\infty[$, on a alors $f(u_n) \in [f(2); f(0)]$ donc $f(u_n) \in \left[\frac{2}{3}; 2\right]$ et ainsi $f(u_n) \subset [0;2]$, d'où $u_{n+1} \in [0;2]$, il y a donc hérédité.Conclusion : la propriété est vraie au rang 0, il y a hérédité, la propriété est donc vraie pour tout entier naturel n.De plus (u_{2n}) est une suite monotone. Comme $u_{2n} \in [0;2]$, elle est à la fois minorée et majorée, elle est donc convergente.De même (u_{2n+1}) est également une suite monotone. Comme $u_{2n+1} \in [0;2]$, elle est à la fois minorée et majorée, elle est donc convergente.Les suites $(u_{2n}$ et (u_{2n+1}) converge vers une une limite ℓ. Cette limite est alors une solution de l'équation $f(\ell) = \ell$ avec $\ell \in [0;2]$. L'équation $f(\ell) = \ell$ admet deux solutions 1 et -2. La condition $\ell \in [0;2]$, implique que $\ell = 1$.

Réponses a et c

Corrigé Problème 17

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$. Pour calculer sa dérivée, on utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{V^2}$ avec $u(x) = x+1$, $u'(x) = 1$, $v(x) = \sqrt{x}$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. On a donc, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$. Cette fonction est strictement négative sur $]0;1[$ et strictement positive sur $]1;+\infty[$, d'où le tableau de variations suivant.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Sur $]0;1]$, la fonction f est strictement décroissante, continue. De plus $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ et $f(1) = 2 \leqslant 3$ donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution sur cet intervalle. De même, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1;+\infty[$. En conclusion, l'équation $f(x) = 3$ admet donc deux solutions sur $]0;+\infty[$.

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1

Questions préliminaires

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0;2]$. On a $f'(x) = 0,5\mathrm{e}^{0,5x} + 2x$.Sur $[0;2]$, on a $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0;2]$.

2. La fonction f est dérivable sur $[0;2]$, elle est donc continue sur ce même intervalle. Elle est de plus strictement croissante sur $[0;2]$. D'autre part, $f(0) = -3$ et $f(2) = e$. Or, $0 \in [-3;e]$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution α sur $[0;2]$.

Méthode 1

1. Il suffit d'utiliser la définition de la fonction f. Dans la cellule E2 on entre « =EXP(0,5*B2) + B2*B2 - 4 ».Dans la cellule F2 on entre « =EXP(0,5*C2) + C2*C2 - 4 ».

2. Si $f(a) \times f(m) < 0$ alors on ne change pas la valeur de a. Dans le cas contraire, a doit prendre la valeur m. On doit donc écrire ans la cellule A3 « =SI(D2*F2 < 0 ; A2 ; C2) ». De même, il faut écrire dans la cellule B3 « =SI(E2*F2 < 0 ; B2 ; C2) ».

3. a. Il suffit d'étirer les formules précédentes.
   b. On obtient un encadrement de α à 10^{-4} à partir de la ligne 17. On a $\alpha \in [1,4068; 1,4069]$.

Méthode 2

1. Voici comment compléter le code.

```python
from math import *
def f(x) :
    return exp(0.5*x) + x**2 - 4
```

2. Voici comment compléter le code.

```python
def dichotomie(a, b, epsilon) :
    while b-a > epsilon :
        m = (a+b)/2
        if f(a)*f(m) <= 0 :
            b = m
        else :
            a = m
    return a,b

print(dichotomie(0, 2, 10**-4))
```

3. En effectuant le programme, on obtient comme encadrement $1,4068 < \alpha < 1,4069$.

Pour aller plus loin

En remplaçant la troisième ligne du programme Python par « return exp(0.5*x) + x**2 - 2 », on trouve que la solution de l'équation $f(x) = -2$ appartient à l'intervalle $[0,7421; 0,7422$.

5.2 Corrigé du TP 2

Questions préliminaires

1. La fonction f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.On a $f'(x) = x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + 1$. Nous ne pouvons pas obtenir le signe de f' directement, l'idée est donc d'étudier f'. f' est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors $f''(x) = (x+3)\mathrm{e}^x$. Sachant que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, f'' a le même signe que $x \mapsto x+3$ d'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$	$1 - \mathrm{e}^{-3} > 0$	$\nearrow$	
f	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

   f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Sur $[-1; 0]$, la fonction f est continue (car dérivable) et est strictement croissante. De plus, 0 se trouve entre $f(-1) = -1$ et $f(0) = 1$ donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α appartenant à l'intervalle $[-1; 0]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

3. Les coordonnées de M_1 sont $(0; f(0))$, c'est-à-dire $(0; 1)$.Les coordonnées de M_0 sont $(-1; f(-1))$, c'est-à-dire $(-1; -1)$.L'équation réduite de la droite (M_0M_1) est donnée par $y = 2x + 1$.On a $0 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ donc la droite (M_0M_1) coupe bien l'axe des abscisses au point d'abscisse $-0,5$.

Méthode 1

Voir le fichier GeoGebra. On obtient $-0,42$ comme valeur arrondie de l'abscisse de C_2.

Méthode 2

1. Voici le code Python à écrire.

```
from math import *
def f(x) :
    return (x + 1)*exp(x) + x
```

2. Voici comment compléter la fonction secante.

```
def secante(a, b, epsilon) :
    x1, x2 = a, b
    accroissement = (f(x2) - f(x1))/(x2 - x1)
    while abs(x2 - x1) > epsilon :
        x1 = x2
        x2 = x2 - f(x2)/accroissement
        accroissement = (f(x2) - f(x1))/(x2 - x1)
    return x1, x2

print(secante(-1, 0, 10**-3))
```

3. En appliquant ce programme, on obtient $-0,400 < \alpha < -0,401$.

6 Travailler les automatismes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 18 :

$\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ représentent des fonctions continues, les tracés se font sans lever le crayon. Ce n'est pas le cas pour les deux autres fonctions.

Corrigé exercice 19 :

La dérivabilité implique la continuité, la proposition est donc vraie. Cependant, la réciproque est fausse. Voici un contre-exemple : la fonction valeur absolue est continue en 0, mais le taux d'accroissement à gauche de 0 vaut -1 et il vaut 1 à droite de 0. Cette fonction n'est donc pas dérivable en 0 bien qu'elle soit continue. La fonction racine carrée est également continue mais non dérivable en 0.

Corrigé exercice 20 :

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et elle est strictement croissante sur $]-\infty;4]$. De plus, $0 \in]-3;2]$ donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in]-\infty;4]$ tel que $f(\alpha) = 0$. La fonction f est strictement décroissante sur $[4;+\infty[$. De plus, $0 \in]-7;2]$ donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\beta \in [4;+\infty[$ tel que $f(\beta) = 0$. Il y a donc exactement deux solutions réelles à l'équation $f(x) = 0$.

Corrigé exercice 21 :

1. Par lecture du tableau de variations, le maximum de f vaut 2, donc l'équation $f(x) = 3$ n'admet pas de solution.

2. En suivant le même raisonnement que dans l'exercice 20, on constate que : -1 appartient à l'intervalle image de $]-\infty;4]$ avec f strictement croissante sur $]-\infty;4]$. Donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in]-\infty;4]$ solution de $f(x) = -1$. -1 appartient à l'intervalle image de $[4;+\infty[$avec f strictement décroissante sur $[4;+\infty[$. Donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\beta \in [4;+\infty[$ solution de $f(x) = -1$. L'équation $f(x) = -1$ admet donc deux solutions réelles.

3. La lecture du tableau de variations nous indique que sur $]-\infty;4]$, le minimum de la fonction vaut $-3 > -5$. L'équation $f(x) = -5$ n'admet donc pas de solution sur $]-\infty;4]$. Sur $[4;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante. De plus -5 appartient à l'intervalle image de $[4;+\infty[$. Donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -5$ admet une unique solution.

4. La lecture du tableau de variations indique que la fonction f prend la valeur 2 lorsque $x = 4$ uniquement. Il y a donc une unique solution.

Corrigé exercice 22 :

La fonction est continue et strictement croissante sur $[0\ ;\ 5]$. De plus, $1 \in [-3; 10]$ donc, par application du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $[0; 5]$.

6.2 Exercices

Corrigé exercice 23 :

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = f(2) = 7$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = 7$donc f est continue en 2.

Corrigé exercice 24 :

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = f(3) = 2 \times 3 + 5 = 11$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = -3 + 14 = 11$donc f est continue en 3.

Corrigé exercice 25 :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0 + 0 = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = f(0) = 0 + 1 = 1$, donc f n'est pas continue en 0.

Corrige exercice 26 :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = f(1) = 1^2 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -1^3 + 2 = 1$, donc f est continue en 1.
2. Sur $]-\infty; 1[$, f est continue puisqu'elle est dérivable. De même, elle est continue sur $]1; +\infty[$. Comme f est continue en 1, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 27 :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = f(0) = \mathrm{e}^{3\times 0} + 1 = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \sqrt{0+2} = \sqrt{2}$, donc f n'est pas continue en 0.
2. f n'est pas continue en 0 donc elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 28 :

$x \mapsto \mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}^+$. $x \mapsto (x^2 + 3)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}^+$. $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. $f$est le produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ et est donc continue sur $\mathbb{R}^+$.

Corrigé exercice 29 :

1. f est une fonction polynôme de degré 3, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0; 3]$. On a $f(0) = -1$ et $f(3) = 23$. De plus, $0 \in [-1\ ;\ 23]$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[0\ ;\ 3]$.

2. De la même manière, f est continue sur $[1 ; 3]$. On a $f(1) = -1$ et $f(3) = 23$. De plus, $0 \in [-1 ; 23]$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[1 ; 3]$.

3. Comme $f(0) = -1$ et $f(1) = -1$, on ne peut rien dire sur les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0 ; 1]$.

Corrigé exercice 30 :

1. La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$. Nous connaissons les limites aux bornes de $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. Si $k \in]0; +\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $\mathrm{e}^x = k$ admet donc au moins une solution réelle.

2. Pour $k \leqslant 0$, comme la fonction exponentielle est strictement positive, l'équation $f(x) = k$ n'admet aucune solution réelle.

Corrigé exercice 31

Soit $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{3x+1} - 3x$, le problème revient à résoudre $f(x) = 0$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 3\mathrm{e}^{3x+1} - 3 = 3(\mathrm{e}^{3x+1} - 1)$, on a donc $f'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^{3x+1} > 1 = \mathrm{e}^0 \iff 3x + 1 > 0 \iff x > \frac{-1}{3}$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$. On a donc le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Le minimum de f vaut 2, l'équation $f(x) = 0$ n'admet donc pas de solution. Ainsi, l'équation $\mathrm{e}^{3x+1} = 3x$ n'admet pas non plus de solution.

Corrigé exercice 32 :

1. Sur $]-\infty ; 4]$, le minimum de la fonction est -3. L'équation $f(x) = -4$ n'admet donc pas de solution sur cet intervalle. Sur $[4 ; +\infty[$, f est continue, $f(4) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -7$. Comme $-4 \in]-7 ; 2]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -4$ admet au moins une solution sur $[4 ; +\infty[$. Comme la fonction est strictement décroissante sur $[4 ; +\infty[$, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -4$ admet une unique solution réelle.

2. Le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ vaut 2. Or, $3 > 2$ donc l'équation $f(x) = 3$ n'admet donc pas de solution.

Corrigé exercice 33 :

Sur $]-\infty\,;\,4]$, la fonction f est continue et strictement croissante.
De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$, $f(4) = 2$ et $0 \in]-3\,;\,2]$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $]-\infty\,;\,4]$.

Corrigé exercice 34 :

- Sur $[4\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante.

  De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -7$, $f(4) = 2$ et $-6 \in]-7\,;\,2]$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -6$ admet donc une unique solution sur $[4\,;\,+\infty[$.
- Sur $]-\infty\,;\,4]$, le minimum de f vaut -3, l'équation $f(x) = -6$ n'admet donc pas de solution sur cet intervalle.
- Sur $\mathbb{R}$, il y a donc une unique solution à l'équation $f(x) = -6$.

Corrigé exercice 35 :

- Sur $]-\infty\,;\,1]$, la fonction f est continue et strictement décroissante. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $f(1) = -4$ et $0 \in [-4\,;\,+\infty[$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $]-\infty\,;\,1]$.
- Pour tout x appartient à $[1\,;\,+\infty[$, $f(x) < -1$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[1\,;\,+\infty[$.

Corrigé exercice 36 :

- Pour tout x appartient à $[1\,;\,+\infty[$, $f(x) < -1$ donc l'équation $f(x) = 5$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

  Sur $]-\infty\,;\,1]$, la fonction f est continue et strictement décroissante. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $f(1) = -4$ et $5 \in [-4\,;\,+\infty[$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution sur $]-\infty\,;\,1]$. Cette solution est donc unique sur $\mathbb{R}$.
- Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ vaut $-4 > -5$, l'équation $f(x) = -5$ n'admet donc pas de solution réelle.

Corrigé exercice 37 :

1. f est une fonction polynôme de degré 3, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

   On a $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$. On obtient donc le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. On calcule $f(-4) = -17$ et $f(4) = 111$. Sur $[-4; -2]$, f est continue et strictement croissante. De plus, $2 \in [-17; 3]$. Un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires implique que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[-4; -2]$. Sur $[-2; 0]$, f est continue et strictement décroissante. De plus, $2 \in [-1; 3]$. Un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires implique que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[-2; 0]$.Sur $[0; 4]$, f est continue et strictement croissante. De plus, $2 \in [-1; 111]$. un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires implique que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[0; 4]$.L'équation $f(x) = 2$ admet donc 3 solutions distinctes sur $[-4; 4]$.

Corrigé exercice 38 :

1. h est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. $h'(x) = 3x^2 + 3$ donc, pour tout réel x, $h'(x) > 0$ et la fonction h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

2. En utilisant la méthode du balayage avec la calculatrice, on obtient $1,15 \leqslant \alpha \leqslant 1,16$. On peut par exemple choisir comme valeur approchée $\alpha \approx 1,16$.

Corrigé exercice 39 :

1. Il s'agit de la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{6}{x+1}$.

2. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition.$f'(x) = \frac{-6}{(x+1)^2}$ donc f' est strictement négative sur son domaine de définition. On en déduit le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

Sur $[0;6]$ on a donc le tableau suivant.

x	0 $\qquad\qquad$ 6
$f'(x)$	$-$
f	6 $\searrow$ $\frac{6}{7}$

Donc, pour tout $x \in [0;6]$, $f(x) \in [\frac{6}{7};6] \subset [0;6]$.

3. On admet que (u_n) converge vers $\ell \in [0;6]$.ℓ est donc une solution sur $[0;6]$ de l'équation $f(x) = x$ soit $x^2 + x - 6 = 0$.Les solutions de cette équation sont $\ell_1 = 2$ et $\ell_2 = -3$. Comme $\ell \in [0;6]$, on en déduit que $\ell = 2$.

Corrigé exercice 40 :

1. Il s'agit de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+4}$ avec $x \in [-4;+\infty[$.
2. f est dérivable sur $]-4;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$ donc f' est strictement positive sur $]-4;+\infty[$.On en déduit le tableau de variations de f sur $[2;5]$.

x	2 $\qquad\qquad$ 5
$f'(x)$	$+$
f	$\sqrt{6}$ $\nearrow$ 3

Donc, pour tout $x \in [2;5]$, $f(x) \in [\sqrt{6};3] \subset [2;5]$.

3. On admet que (u_n) converge vers un réel ℓ. On sait que ℓ sera solution sur $[2;5]$ de l'équation $f(x) = x$ soit $x^2 - x - 4 = 0$. Les solutions de cette équation sont $x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$. La solution doit appartenir à $[2;5]$, on a donc $\ell = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Corrigé exercice 41 :

ℓ est solution de l'équation $f(\ell) = \ell \iff \ell^2 = \ell \iff \ell = 1$ ou $\ell = 0$.

Corrigé exercice 42 :

ℓ est solution de l'équation de $f(\ell) = \ell$ sur I. On a donc $\frac{1}{1+\ell} = \ell \iff 1 = \ell(1+\ell) \iff \ell^2 + \ell - 1 = 0$. Les solutions de cette équation du second degré sont $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Comme ℓ appartient à I, on a donc $\ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Corrigé exercice 43 :

ℓ est solution de l'équation de $f(\ell) = \ell$ donc $\mathrm{e}^{1-\ell} = \ell$. On trouve une solution "évidente" $\ell = 1$. La fonction $f \mapsto \mathrm{e}^{1-x} - x$ est une fonction continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires implique qu'il existe une seule racine pour cette fonction. Donc, $\ell = 1$ est l'unique valeur possible.

Corrigé exercice 44 :

La fonction suivante est un exemple qui fonctionne $f\colon x \mapsto \begin{cases} 2x \text{ si } x < 2 \\ 6 \text{ si } x = 2 \\ 4x \text{ si } x > 2 \end{cases}$.

Corrigé exercice 45 :

On considère la fonction $f\colon x \mapsto 10x^3 + 75x^2 + 180x + 140$ et l'équation $f(x) = 10$. Cette fonction respecte bien les contraintes de l'énoncé. On obtient le tableau suivant.

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	5	↘	0	↗	$+\infty$

La fonction $f\colon x \mapsto \begin{cases} x + 7 \text{ si } x < -2 \\ x + 4 \text{ si } x \geqslant -2 \end{cases}$ correspond aux contraintes données dans l'énoncé. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas continue en -2.

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 46 :

1. f est un produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ donc en 0.
2. On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} g(x) = 0$ et $g(0) = 0$, la fonction g est donc continue en 0.
3. h n'est pas définie en 0, elle ne peut donc pas être continue en 0.
4. La fonction k est définie en 0 et $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} k(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} = k(0) = 0$. La fonction k est donc continue en 0.
5. $x \mapsto x^3$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en 0. La fonction racine carrée est continue en 0. La somme de deux fonctions continues est une fonction continue donc m est continue en 0.
6. $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en 0. $x \mapsto \mathrm{e}^x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas en 0, donc le quotient de ces deux fonctions est continue en 0.

Corrigé exercice 47 :

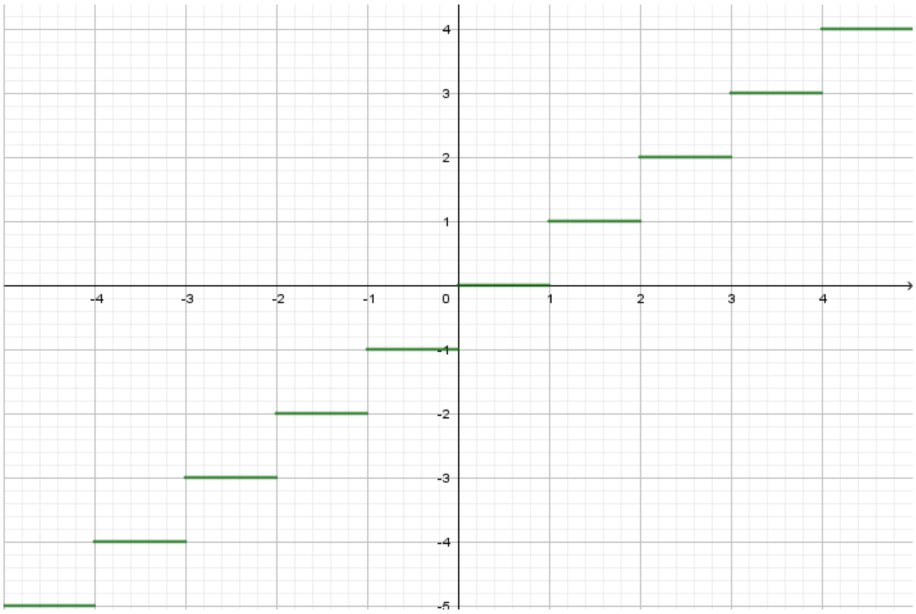
Non, cette condition n'est pas suffisante. Il faut également que ces deux limites soient égales à l'image $f(3)$ (si elle existe !).

Corrigé exercice 48 :

1. Oui, Puisque f et g sont continues sur I, alors la fonction produit $f \times g$ est continue sur I. La somme de f et de $f \times g$ est donc continue sur I.
2. Oui. En effet, $f - g$ est continue sur I comme différence de fonctions continues sur I. $f + g$ est continue sur I comme somme de fonctions continues sur I. La fonction $(f - g)(f + g)$ est continue sur I comme produit de fonctions continues sur I.
3. Non, il faut que $f + g$ ne s'annule jamais sur I pour que cette fonction soit continue.

Corrigé exercice 49 :

1. Par définition, on a $E(3,4) = 3$, $E(2) = 2$ et $E(-4,6) = -5$.
2. On obtient la représentation suivante.



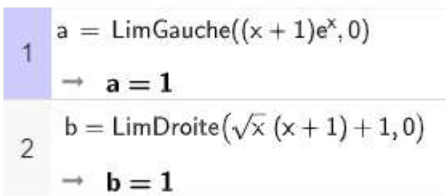
3. La fonction ne semble pas continue sur $[-5\,;\,5]$.
4. On constate que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} E(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} E(x) = 0$. La fonction n'est pas continue en 1. Donc, elle n'est pas continue sur $[-5\,;\,5]$.

Corrigé exercice 50 :

La fonction racine carrée et la fonction exponentielle sont continues sur I, leur produit est donc continue sur I. La fonction $x \mapsto x^2+1$ est continue et strictement positive sur I.La fonction f est donc continue car le quotient de fonctions continues sur I dont la fonction dénominateur ne s'annule pas sur I est continu.

Corrigé exercice 51 :

1. GeoGebra nous donne $a = 1$ et $b = 1$.



2. La fonction est continue en 0 puisque la limite à gauche de 0, à droite de 0 et l'image de 0 sont toutes égales à 1.

Corrigé exercice 52 :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$, d'où la continuité en 0. Pour étudier la dérivabilité en 0, on étudie la limite du taux d'accroissement à droite de 0. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Corrigé exercice 53 :

Continuité en 0 : Si $x > 0$, alors $|x| = x$, d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} |x| = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = 0$. Si $x < 0$, alors $|x| = -x$, d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} |x| = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} -x = 0$. Si $x = 0$, alors $|0| = 0$. La fonction valeur absolue est donc continue en 0.
Pour montrer que la fonction n'est pas dérivable en 0, on montre que les taux d'accroissement à gauche et à droite de 0 sont différents. Pour $x > 0$, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x}{x} = 1$. Pour $x < 0$, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x}{x} = 1$. On en conclut que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Corrigé exercice 54 :

Pour déterminer la valeur de k, il faut déterminer la limite de f à gauche et à droite de $1.\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = f(1) = 1^2 + \mathrm{e}^{1-1} = 1 + 1 = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = 1 + k$. Pour que f soit continue en 1, il faut que $2 = 1 + k$, c'est-à-dire $k = 1$.

Corrigé exercice 55 :

La fonction affine $x \mapsto x - 1$ étant continue et non nulle sur $]1\ ;\ +\infty[$, son inverse est définie et continue sur cet intervalle. f est donc continue sur $]1\ ;\ +\infty[$ comme différence de deux fonctions continues sur cet intervalle.

Corrigé exercice 56 :

Les fonctions valeur absolue et exponentielle sont continues sur $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions continue sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 57 :

Nous allons décomposer l'étude en introduisant des fonctions g et h. Soit la fonction $g \colon x \mapsto 1 - x^2$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-1\ ;\ 1]$. Elle est également positive sur $[-1; 1]$. La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}^+$. Donc $h \colon x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ est continue sur $[-1\ ;\ 1]$ comme composée de fonctions continues. D'où la continuité de f comme somme de deux fonctions continues sur $[-1\ ;\ 1]$.

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 58 :

1. On ne peut pas conclure, nous ne sommes pas dans le cadre d'application du théorème des valeurs intermédiaires puisque $f(1)$ et $f(2)$ ont le même signe.

2. Il y a au moins une solution car un produit de deux facteurs est nul si, et seulement si, au moins l'un des facteurs est nul. On a donc $f(1) = 0$ ou $f(2) = 0$ ce qui nous donne au moins une solution à $f(x) = 0$.

3. $f(1)$ et $f(2)$ n'ont pas le même signe et f est continue. On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et conclure qu'il y a au moins une solution à l'équation $f(x) = 0$.

Corrigé exercice 59 :

Pour $f(x) = 0$, on peut appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires du cours sur $]-\infty; 2]$, puis sur $[2; 5]$ et sur $[5; +\infty[$. En effet, pour chacun de ces intervalles, la fonction est continue et strictement monotone et 0 appartient à l'intervalle image de la fonction. Il y a donc 3 solutions sur $\mathbb{R}$. Sur l'intervalle $]-\infty; 5]$, le maximum de f vaut 3 en 2. L'équation $f(x) = 3$ a donc une unique solution sur $]-\infty; 5]$. Sur $[5; +\infty[$ on peut appliquer un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires puisque f est continue et strictement monotone sur cet intervalle et que $3 \in [-3; 5]$. L'équation $f(x) = 3$ admet donc deux solutions sur $\mathbb{R}$. L'équation $f(x) = 10$ n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$. En effet, le maximum de f sur $\mathbb{R}$ vaut 5.

Corrigé exercice 60 :

f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.La dérivée de f est donnée par $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$. C'est un polynôme du second degré dont les racines sont $x_1 = \frac{-2-\sqrt{13}}{3}$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{13}}{3}$. Comme $3 > 0$, cette fonction est négative entre les racines et positive à l'extérieur. Donc f est croissante sur $]-\infty; x_1]$, décroissante sur $[x_1; x_2]$ et croissante sur $[x_2; +\infty[$. De plus, comme les limites en l'infini de f sont les mêmes que la fonction cube, que $f(x_1) > 0$ et que $f(x_2) < 0$, on peut appliquer un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur les 3 intervalles où f est strictement monotone. L'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution sur chacun de ces intervalles soit 3 solutions en tout.

Corrigé exercice 61 :

La fonction g est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. On en déduit que g' est strictement négative sur $\mathbb{R}$. La fonction g est donc continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -3$. Comme $0 \in [-3; +\infty[$, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution réelle sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 62 :

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme d'un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et d'une constante. On en déduit qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times (-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$.La fonction exponentielle étant toujours positive, f' a le même signe que $x \mapsto 1 - x$, d'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}+1$	$\searrow$	1

Sur $[1; +\infty[$, le minimum de f vaut 1 qui est strictement positif. L'équation $f(x) = 0$ n'admet donc pas de solution sur cet intervalle. Sur $]-\infty; 1]$, la fonction est continue et strictement croissante. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $f(1) = \mathrm{e}^{-1} + 1 > 0$. Comme $0 \in]-\infty\,;\, \mathrm{e}^{-1}+1]$, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty\,;\,1]$ et donc une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α dans l'énoncé.

2. On obtient, à l'aide de la calculatrice par exemple, $-0,6 < \alpha < -0,5$.

Corrigé exercice 63 :

1. f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable et continue sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^2 + 1$. On a donc, pour tout réel x, $f'(x) > 0$. On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. f est continue et strictement croissante sur $[-1; 0]$. De plus, $f(-1) = -1$ et $f(0) = 1$. Comme $0 \in [-1\,;\,1]$, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-1\,;\,0]$.

3. Comme $f(-1) = -1$ et $f(0) = 1$, pour tout $k \in [-1\,;\,1]$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur $[-1\,;\,0]$.

Corrigé exercice 64 :

1. h est une somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.On a $h'(x) = \mathrm{e}^x + 1$ et comme la fonction exponentielle est toujours positive, on a $h'(x) > 0$. Donc h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. Comme $0 \in]-\infty; +\infty[$, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution réelle.

2. Par balayage, à l'aide de la calculatrice par exemple, on montre que cette valeur est comprise entre $-0,6$ et $-0,5$.

Corrigé exercice 65 :

1. f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Elle est donc également continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3\mathrm{e}^{-x} + (3x-4)(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}(7-3x)$.La fonction exponentielle étant toujours positive, f' a le même signe que $x \mapsto 7 - 3x$ d'où le tableau de variations suivant sur l'intervalle $[0; 4]$.

x	0		$\frac{7}{3}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-4	$\nearrow$	$3\mathrm{e}^{-\frac{7}{3}}$	$\searrow$	$8\mathrm{e}^{-4}$

Comme f est strictement décroissante sur $\left[\frac{7}{3} ; 4\right[$ et que pour tout $s \in \left[\frac{7}{3} ; 4\right[$, on a $f(x) \geqslant f(4) > 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\left[\frac{7}{3} ; 4\right[$. Sur $\left[0 ; \frac{7}{3}\right]$, f est continue et strictement croissante. De plus, $f(0) < 0$ et $f\left(\frac{7}{3}\right) > 0$, donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0 ; 4]$.

2. Par balayage, on obtient $1,333 < \alpha < 1,334$.

Corrigé exercice 66 :

Soit $g = f_1 - f_2$. Résoudre $f_1(x) = f_2(x)$ équivaut à résoudre $g(x) = 0$. Comme $g(x) = \mathrm{e}^x + x - 2$, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \mathrm{e}^x + 1$. La fonction exponentielle étant toujours positive, on a donc, pour tout réel x, $g'(x) > 0$. g est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $g(0) = -1$ et $g(1) = e - 1 > 0$. Comme $0 \in [-1; e-1]$, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0 ; 1]$.

Corrigé exercice 67 :

Soit $f\colon x \mapsto 2\mathrm{e}^{2x} - \sqrt{5-x}$ définie pour tout $x \in]-\infty\ ;\ 5]$. Résoudre l'équation de l'énoncé revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$. Cette fonction est dérivable sur $]-\infty; 5[$. On obtient $f'(x) = 2 \times 2\mathrm{e}^{2x} - \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} = 4\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2\sqrt{5-x}}$. La fonction exponentielle étant toujours positive, f' a le même signe que $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{5-x}}$. Sur $]-\infty; 5[$, $\sqrt{5-x}$ est strictement positif donc f' est strictement positive sur son ensemble de définition. Donc f est continue et strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 5]$ (f est bien continue en 5 car $f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x<5}}$). De plus, $f(0) = 2 - \sqrt{5} < 0$ et $f(1) = 2\mathrm{e}^2 - 2 > 0$. Comme $0 \in [f(0)\ ;\ f(1)]$, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\ ;\ 1]$. L'équation $2\mathrm{e}^{2x} = \sqrt{5-x}$ admet donc une unique solution sur $[0\ ;\ 1]$.

Corrigé exercice 68 :

Soit $f\colon x \mapsto 2(x-1)\mathrm{e}^{x-1} - x^2$. Résoudre l'équation de l'énoncé revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$. La fonction f est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $x, f'(x) = 2x(\mathrm{e}^{x-1} - 1)$. D'après les propriétés de la fonction exponentielle, $\mathrm{e}^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ donc $\mathrm{e}^{x-1} > 1 \Leftrightarrow x > 1$ et finalement $\mathrm{e}^{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. De plus, $\mathrm{e}^{1-1} - 1 = 0$. On en déduit le tableau suivant.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\mathrm{e}^{x-1} - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-2\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Sur l'intervalle $]-\infty; 1]$, on constate que la fonction f est strictement négative donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cette intervalle. Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus, $f(1) = -1 < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (par croissance comparée) donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur cette intervalle donc une unique solution sur $\mathbb{R}$. De plus, à l'aide de la calculatrice, on constate que $f(1,7) < 0$ et que $f(1,8) > 0$. On en conclut que la solution de cette équation appartient à l'intervalle $[1,7\ ;\ 1,8]$.

Corrigé exercice 69 :

Une fonction polynôme est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$. Les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$ sont les mêmes que son monôme de plus haut degré. On note signe(a_n) le signe du coefficient a_n. Comme n est impair, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\text{signe}(a_n)\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$

+signe(a_n)∞. Dans tous les cas, comme $a_n \neq 0$, les deux limites sont de signes contraires et la fonction f prend toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$. Comme $0 \in]-\infty\,;\,+\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution réelle sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 70 :

On reconnaît la méthode de résolution de $f(x) = 0$ par dichotomie.Les lignes 3 et 4 permettent de définir la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^x - 2$ Les lignes 6 à 13 permettent de définir la méthode de dichotomie qui prend en argument les bornes a et b de l'intervalle d'étude, et en dernier argument la précision ε désirée (voir TP 1 page 200 pour utiliser cette méthode).

Corrigé exercice 71 :

On introduit la fonction $g = f - 1$. Une fois que cette fonction est implémentée en Python, le programme peut être complété de la façon suivante (on utilise la méthode de dichotomie).

```python
from math import *

# On considère par exemple la fonction f de l'exercice précédent
def f(x):
    return exp(x) - 2

def g(x):
    return f(x) - 1

print(fct(0, 2, 0.001))
def fct(a, b, eps):
    while b - a > eps:
        m = (a + b)/2
        if g(a)*g(m) <= 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a, b
```

Corrigé exercice 72 :

1. Le logiciel de calcul formel indique que $f'(x) = -0,5x\mathrm{e}^{-0,5x}$. Sur $[0; 50]$, on a donc $f'(x) \leqslant 0$ puisque f' est du signe de $-x$.La fonction f est donc continue et strictement décroissante sur $[0; 50]$. De plus $f(0) = 2$ et $f(50) = -52\mathrm{e}^{-25} \approx -7,2\times10^{-10} < 0$. Donc comme $0,1 \in [f(50); f(0)]$, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α dans l'intervalle $[0; 50]$ pour lequel $f(x) = 0,1$.

2. En utilisant la méthode du balayage par exemple, on obtient $9,48 < \alpha < 9,49$.

Corrigé exercice 73 :

1. Comme f est continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans I.

2. Supposons qu'il existe plus d'une solution sur I à l'équation $f(x) = k$. Dans ce cas, il existe α et β dans I avec $\alpha \neq \beta$ tels que $f(\alpha) = f(\beta) = k$. Nous allons montrer que, en supposant ceci, on arrive à une contradiction dans tous les cas de figure. Considérons le cas où f est strictement croissante pour commencer. Si $\alpha < \beta$, alors $f(\alpha) < f(\beta)$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $f(\alpha) = f(\beta) = k$. Si $\alpha > \beta$, alors $f(\alpha) > f(\beta)$ ce qui est encore en contradiction avec l'hypothèse $f(\alpha) = f(\beta) = k$. On raisonne de la même façon pour le cas où f est strictement décroissante. On conclut qu'il ne peut pas exister plus d'une solution à l'équation $f(x) = k$ sur I et que la solution identifiée à la question 1 est donc unique.

9 Exercices d'entraînement partie 3

Corrigé exercice 74 :

En utilisant la propriété du cours, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{x\to 5} f(x) = 10$.

Corrigé exercice 75 :

1. Si (u_n) converge vers ℓ, alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. On obtient donc $\ell = \sqrt{10-\ell^2}$.

2. $\ell \in I$ et $\ell^2 = 10 - \ell^2 \Leftrightarrow \ell \in I$ et $\ell = \sqrt{5}$ ou $\ell = -\sqrt{5} \Leftrightarrow \ell = \sqrt{5}$ puisque $-\sqrt{5}$ n'appartient pas à I.

Corrigé exercice 76 :

1. Pour tout intervalle ouvert J contenant b, comme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, il existe un intervalle ouvert J' contenant a tel que, pour tout x appartenant à J', $f(x)$ appartient à J. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, u_n appartient à J' pour tout n assez grand. Dans ce cas, pour tout n assez grand, $v_n = f(u_n)$ appartient à J. On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$.

2. Si f est continue sur I, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. On a donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = f(a) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)$.

Corrigé exercice 77

1. Par définition de la suite (u_n), on a $u_n \leqslant \pi$ pour tout entier naturel n puisque $\sin(x) \leqslant 1 < \pi$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On rappelle que la fonction sinus est croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $u_0 = \pi$ donc $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$. Hérédité : Supposons qu'au rang n on ait $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. En divisant par 2, les membres de cette inégalité, on obtient $0 \leqslant \frac{u_{n+1}}{2} \leqslant \frac{u_n}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$.En utilisant la croissance de la fonction sinus sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, on obtient $0 \leqslant \sin(\frac{u_{n+1}}{2}) \leqslant \sin(\frac{u_n}{2})$, c'est-à-dire $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. Il y a donc bien hérédité.Conclusion : La propriété est vraie au rang $n = 0$ et il y a hérédité. Par principe de récurrence on a donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout entier naturel n.

2. Soit la fonction f définie sur $[0; \pi]$ par $f(x) = \sin(\frac{x}{2}) - x$. Trouver les solutions de l'équation $\sin(\frac{x}{2}) = x$ revient à trouver les éventuelles valeurs de x pour lesquelles la fonction f s'annule. Cette fonction est dérivable sur $[0; \pi]$ et on a $f'(x) = \frac{1}{2}\cos(\frac{x}{2}) - 1 < 0$. On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0	π
$f'(x)$	$-$	
f	0 ↘	$1-\pi$

Le tableau de variations nous indique que 0 est l'unique solution de $f(x) = 0$. L'équation $\sin(\frac{x}{2}) = x$ admet donc 0 comme unique solution.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite. La suite (u_n) est définie à l'aide de la fonction $g(x) = \sin(\frac{x}{2})$ qui est continue. De plus $g([0;\pi]) \subset [0;\pi]$, on sait donc que la suite (u_n) converge vers un point fixe de g. La question précédente nous indique donc que la suite converge vers 0.

Corrigé exercice 78

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$ donc f' a le même signe que $x \mapsto 2x-1$ d'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

2. Pour résoudre $f(x) = x$, on élève au carré les deux membres et on obtient $x^2-x+1 = x^2$ soit $x = 1$.

3. a. On montre par récurrence que $0,5 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2$. Initialisation : On a $u_0 = 2$ et $u_1 = \sqrt{3}$ donc $0,5 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 2$. Hérédité : On suppose qu'au rang n on ait $0,5 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2$. Sachant que f est croissante sur $[0,5;+\infty[$, on a :$f(0,5) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(2)$ c'est-à-dire $0 \leqslant f(0,5) \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant f(2) \leqslant 2$. Il y a donc hérédité. Conclusion : la propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.

   b. D'après la question précédente, (u_n) est convergente.f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de plus $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, la limite de (u_n) est donc solution de l'équation $f(x) = x$. En utilisant le résultat de la question 2, on en déduit que la suite (u_n) converge vers 1.

Corrigé exercice 79

1. On commence par étudier les variations de f qui est définie sur $[-6;+\infty[$ et dérivable sur $]-6;+\infty[$. on a alors : $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{6+x}}>0$ pour tout x appartenant à $]-6;+\infty[$. On obtient le tableau de variations suivant.

x	-6		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ce tableau de variations restreint à $[0;3]$ devient :

x	0		3
$f'(x)$		$+$	
f	$\sqrt{6}$	$\nearrow$	3

On en déduit que l'intervalle $[0;3]$ est stable par f.Montrons par récurrence que (u_n) est croissante et majorée par 3.Initialisation : $u_0=0$ et $u_1=\sqrt{6}$ donc on a bien $u_0\leqslant u_1\leqslant 3$. La propriété est donc vraie au rang $n=0$.Hérédité : Supposons qu'à rang n quelconque on ait $u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 3$. On applique alors la fonction f à cette inégalité. Il y a conservation de l'ordre puisque f est croissante sur $[0;3]$. On obtient donc $f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(3)$, c'est-à-dire $u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 3$. Il y a donc hérédité. Conclusion : La propriété est vraie pour $n=0$ et elle est héréditaire. Par principe de récurrence, la suite (u_n) est croissante et majorée par 3.

2. La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente.

3. Cette suite converge donc vers un point fixe de f. Les solutions de $f(x)=x$ sont les solutions de l'équation $x^2-x-6=0$ qui appartiennent à $[0;3]$. Les solutions sont -2 et 3. La suite (u_n) converge donc vers 3 puisque -2 n'appartient pas à $[0;3]$.

Corrigé exercice 80

1. Il s'agit de la fonction définie par $f(x)=\frac{x^2}{5}$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x)=\frac{2x}{5}$, d'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. L'équation $f(x) = x$ implique $\frac{x^2}{5} = x \Leftrightarrow x(x-5) = 0$. Les solutions de cette équation sont $x = 0$ et $x = 5$.

4. Prouvons par récurrence que (u_n) est décroissante et positive, c'est-à-dire que, pour tout n, on a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.Initialisation : $u_0 = 4$ et $u_1 = 3,2$ donc on a bien $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.Hérédité : supposons qu'au rang n on ait $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.La fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$ et $f(0) = 0$. On a donc $f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$, c'est-à-dire $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. Il y a donc bien hérédité.Conclusion : La propriété est vraie au rang $n = 0$ et il y a hérédité. Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

5. La suite est décroissante et minorée, elle est donc convergente.Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue et que $f([0;+\infty[) \subset [0;+\infty[$, la suite converge donc vers une solution de l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire 0 ou 5 d'après la question 3. Comme la suite est décroissante, elle est majorée par son premier terme $u_0 = 4$. La suite ne peut donc pas converger vers 5. On en déduit qu'elle converge vers 0.

Corrigé exercice 81 :

1. La fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et, pour tout $x \leqslant 0$, on a $f'(x) = \frac{x}{e^x} > 0$. La fonction exponentielle est toujours positive donc f' a le même signe que $x \mapsto x$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Soit la fonction $g\colon x \mapsto f(x) - x$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$. Résoudre l'équation $f(x) = x$ revient à trouver les valeurs de x pour lesquelles la fonction g s'annule. La fonction g est dérivable donc continue sur $[0\ ;\ +\infty[$. Pour tout $x \leqslant 0$, $g'(x) = \frac{x - e^x}{e^x} < 0$ sur $[0;+\infty[$ puisque $e^x > x$ sur $[0;+\infty[$. La fonction g est donc strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. De plus, $g(0) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$. Comme $0 \in]-\infty;2]$, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$, c'est-à-dire l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. Par balayage, on obtient l'encadrement $2,76 < \alpha < 2,77$.

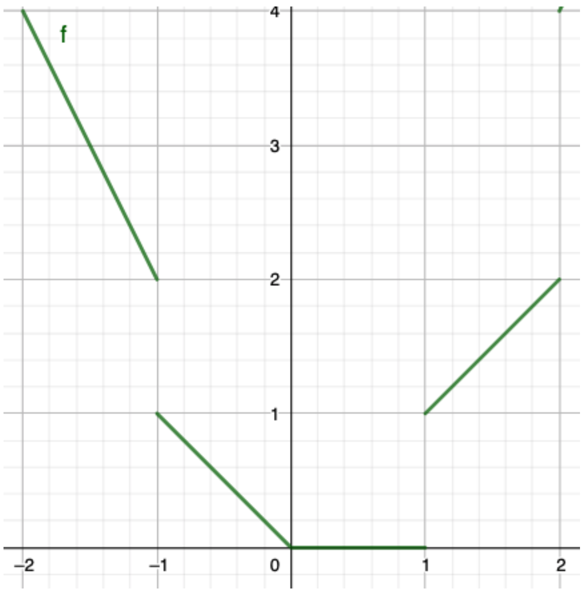
4. On souhaite montrer par récurrence que (u_n) est croissante et majorée par α c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$. Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = 3 - \frac{2}{e} \approx 2,26$. On a bien $u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$.Hérédité : On suppose qu'au rang n on ait $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$. La fonction f étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$, on a $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha)$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$. Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et il y a hérédité, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. La suite (u_n) est une suite croissante et majorée, elle est donc convergente. La limite ℓ de cette suite est solution de l'équation $f(x) = x$ donc $\ell = \alpha$ d'après la question 2.

10 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 82 :

1. Voici la courbe que l'on obtient.



2. Le calcul des limites donne $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = 0$ (la limite de $E(x)$ à gauche et à droite de 0 n'est pas la même mais elle est finie et $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$). De plus $f(0) = 0$ ce qui prouve la continuité de f en 0.

Corrigé exercice 83 :

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^x \ si \ x \leqslant 0 \\ \frac{x+k_1}{x^2+1} \ si \ 0 < x \leqslant 8 \\ \sqrt{x+1} + k_2 \ si \ x > 8 \end{cases}$. f est continue sur $]-\infty\,;\,0[$ et, pour qu'elle soit continue en 0, il suffit que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = f(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$. D'une part $f(0) = 1$ et d'autre part $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = k_1$. Il suffit donc d'avoir $k_1 = 1$. f est continue sur $]0\,;\,8[$ et, pour qu'elle soit continue en 8, il suffit $\lim\limits_{\substack{x \to 8 \\ x<8}} f(x) = f(8) = \lim\limits_{\substack{x \to 8 \\ x>8}} f(x)$. D'une part $f(8) = \frac{9}{65}$ et d'autre part $\lim\limits_{\substack{x \to 8 \\ x>8}} f(x) = 3 + k_2$. Il suffit donc d'avoir $k_2 = \frac{9}{65} - 3 = \frac{-186}{65}$.

Corrigé exercice 84 :

1. Soit $f : x \mapsto x^3+x+5$. Résoudre l'équation considérée revient à trouver les valeurs de x pour lesquelles la fonction f s'annule. Cette fonction est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$et on a, pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 1$. La fonction dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $f(-2) = -5$ et $f(-1) = 3$. Comme $0 \in [-5\,;\,3]$, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in [-2\,;\,-1]$ tel que $f(x) = 0$.

2. Par balayage on obtient $-1,52 < \alpha < -1,51$.

3. Voici un algorithme utilisant la méthode de dichotomie et permettant de répondre au problème posé.

```
Tant que (b - a) > 10^-n
        m ← (a + b) / 2
        Si ( f(a) * f(m) ≤ 0 ) alors
                b ← m
        sinon
                a ← m
        FinSi
Fin Tant que
Afficher a, b
```

Corrigé exercice 85 :

1. f est une somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, elle est donc dérivable sur $]0;+\infty[$. Pour tout $x>0$, $f'(x)=\frac{1}{2}(1-\frac{5}{x^2})=\frac{1}{2}\frac{x^2-5}{x^2}$ donc f' est du même signe que $x\mapsto x^2-5$ c'est-à-dire négative sur $]0;\sqrt{5}]$ et positive sur $[\sqrt{5};+\infty[$. On en déduit que f est décroissante sur $]0;\sqrt{5}]$ et croissante sur $[\sqrt{5};+\infty[$.

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n>0$, on a $\sqrt{5}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$.Initialisation : Pour $n=1$ on a $u_1=3$ et $u_2=f(3)=\frac{7}{3}\approx 2,33>\sqrt{5}$. Donc la propriété est vraie au rang $n=1$. Hérédité : On suppose qu'à un rang n, on ait $\sqrt{5}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$. On sait que f est croissante sur $[\sqrt{5};+\infty[$ donc $f(\sqrt{5})\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(u_n)$ soit finalement $\sqrt{5}\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$. Il y a donc hérédité. Conclusion : La propriété est vraie au rang $n=1$, elle est héréditaire, on a donc pour tout $n>0$, $\sqrt{5}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$. On en déduit que (u_n) est une suite décroissante et minorée par $\sqrt{5}$.

3. Tout suite décroissante et minorée est convergente, il existe donc ℓ réel pour lequel $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$. On sait que ℓ respecte l'égalité $f(\ell)=\ell$ avec $\ell\in]0\,;\,+\infty[$. On en déduit que $\ell=\sqrt{5}$.

4. On pourra par exemple utiliser l'algorithme de dichotomie vu en TP.

Corrigé exercice 86 :

1. La fonction f étant le produit de deux fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, elle est donc dérivable (et par conséquent continue) sur $]0\,;\,+\infty[$.Pour tout $x>0$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^x+\sqrt{x}\mathrm{e}^x>0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. Pour tout $x\geqslant 0$, $f(x)\geqslant f(0)$ donc f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$. De plus, $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Comme $1\in[0\,;\,+\infty[$, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution $\alpha\in[0\,;+\infty[$.

2. En utilisant la méthode du balayage, on obtient $0,4<\alpha<0,5$.

3. Il faut que k appartienne à l'intervalle image de $[0\,;+\infty[$ c'est-à-dire $[0\,;+\infty[$. Ainsi, pour tout $k\geqslant 0$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution sur $[0\,;\,+\infty[$.

Corrigé exercice 87 :

1. La fonction f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable (et continue) sur I.Pour tout $x > -4$, $f'(x) = \frac{2\times(x+4)-(2x+3)\times 1}{(x+4)^2} = \frac{2x+8-2x-3}{(x+4)^2} = \frac{5}{(x+4)^2} > 0$. Donc f est strictement croissante sur I.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la proposition $P(n)$: « $u_n \in [0\ ;\ 1]$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$ ».Initialisation : Pour $n = 0$ on a $u_0 = 0,1$ et $u_1 = \frac{3,2}{4,1}$. On a donc bien $u_0 \in [0;1]$ et $u_0 \leqslant u_1$. $P(0)$ est donc vraie.Hérédité : on suppose qu'à un rang $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ soit vraie. On sait que $f(0) = 0,75$, $f(1) = 1$ et que f est croissante sur $[0;1]$, donc si $u_n \in [0;1]$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [f(0); f(1)] \subset [0;1]$. D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \leqslant u_{n+1}$. f étant croissante, on a alors $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.Donc si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.Conclusion : $P(0)$ vraie et il y a hérédité. $P(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente vers ℓ tel que $f(\ell) = \ell$. On obtient $2\ell + 3 = \ell^2 + 4\ell$ soit $\ell^2 + 2\ell - 3 = 0 \Leftrightarrow (\ell - 1)(\ell + 3) = 0$. On peut donc avoir $\ell = -3$ ou $\ell = 1$. Puisque $u_n \in [0;1]$, on a alors $\ell = 1$.

Corrigé exercice 88 :

1. La fonction f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.Pour tout réel x, $f'(x) = 2 - 2x = 2(1 - x)$. On en déduit le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2. Sur $[0;1]$, la fonction f est croissante, on a donc $f([0;1]) = [f(0); f(1)] = [0;1]$. L'intervalle $[0;1]$ est donc stable par f.

3. Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0,2 \in [0;1]$.Hérédité : Supposons qu'au rang n on ait $u_n \in [0;1]$. Comme $[0;1]$ est stable par f, on a $f(u_n) \in [0;1]$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in [0;1]$.Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et il y a hérédité. Par principe de récurrence $u_n \in [0;1]$ pour tout entier naturel n.

4. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.Initialisation : $u_0 = 0,2$ et $u_1 = f(u_0) = 0,2(2 - 0,2) = 0,36$ donc $u_0 < u_1$ et la propriété est vraie au rang $n = 0$. Hérédité : On suppose qu'à un rang n, on ait $u_n \geqslant u_{n+1}$. On sait que f est croissante sur $[0;1]$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$. Dans ce cas, puisque, par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant u_{n+1}$, alors $f(u_n) \geqslant f(u_{n+1})$ soit finalement $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$. Il y a donc hérédité. Conclusion : La propriété est vraie au rang $n = 0$, elle est héréditaire, donc la suite (u_n) est croissante. De plus, elle est majorée par

1. On en déduit qu'elle est donc convergente vers une limite ℓ telle que $f(\ell) = \ell$. $f(x) = x$ équivaut à $2x - x^2 = x$ soit $x = 0$ ou $x = 1$. La suite converge vers 0 ou 1. Le premier terme cette suite croissante étant $0,2$, elle ne peut pas converger vers 0, elle converge donc vers 1.

Corrigé exercice 89 :

1. f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur $]-1;+\infty[$.Pour tout $x > 1$, $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ donc f' est strictement positive sur $[1;2]$, d'où le tableau de variations suivant.

x	1	2
$f'(x)$	$+$	
f	$\frac{3}{2}$ $\nearrow$	$\frac{5}{3}$

2. f est croissante sur $[1;2]$, on a donc $f([1;2]) = [\frac{3}{2};\frac{5}{3}] \subset [1;2]$.

3. Montrons par récurrence que $u_n \in [1;2]$.Initialisation : On a bien $u_0 = 1,5 \in [1;2]$.Hérédité : Supposons qu'à un rang n on ait $u_n \in [1;2]$. Comme $[1;2]$ est stable par f, alors $f(u_n) \in [1;2]$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in [1;2]$.Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et il y a hérédité. Donc, pour tout entier n, on a $u_n \in [1;2]$.

4. On démontre par récurrence sur n que (u_n) est une suite croissante.Initialisation : $u_0 = 1,5$ et $u_1 = f(u_0) = 1,6$, on a bien $u_0 \leqslant u_1$. Hérédité : On suppose qu'à un rang n on ait $u_n \leqslant u_{n+1}$.On sait d'après la question précédente que pour tout entier n on a $u_n \in [1;2]$, comme f est croissante sur $[1;2]$, on a $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, c'est à dire $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.Conclusion : La propriété est vraie au rang $n = 0$ et il y a hérédité. Donc la suite (u_n) est croissante.

5. La suite (u_n) est croissante et majorée par 2, elle est donc convergente. Comme f est continue sur $[1;2]$ et que $[1;2]$ est stable par f, la suite converge vers un point fixe de f.Les points fixes de f sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Or, $u_0 = 1,5$ et (u_n) est croissante, donc la seule possibilité est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Corrigé exercice 90 :

1. La fonction f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable (et continue) sur $\mathbb{R}$.Pour tout réel x, $f'(x) = 3e^x \times e^{3x} + (3e^x - 4) \times 3e^{3x} = 12e^{3x}(e^x - 1)$. La fonction exponentielle étant toujours positive et 12 l'étant aussi, f' a le même signe que $x \mapsto e^x - 1$. On a $e^x - 1 \leqslant 0 \iff e^x \leqslant e^0 \iff x \leqslant 0$. On obtient alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. À la lecture du tableau de variations et en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, on constate que :Si $k < -1$ l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.Si $k = -1$, il y a une unique solution 0. Si $k \in]-1; 0]$, il y a exactement deux solutions. Sinon il y a exactement une solution.

Corrigé exercice 91 :

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-8x - 10)\mathrm{e}^{-0,5x} + (-4x^2 - 10x + 8) \times (-0,5\mathrm{e}^{-0,5x}) = \mathrm{e}^{-0,5x}(2x^2 - 3x - 14)$. Une exponentielle étant toujours positive, f' a le même signe que $x \mapsto 2x^2 - 3x - 14$. Cette fonction du second degré admet pour racine -2 et $\frac{7}{2}$, d'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-2		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f(\frac{7}{2})$	$\nearrow$	1

On calcule $f(-2) \approx 33,6$ et $f(\frac{7}{2}) \approx -12,2$.

2. Sur $[-4; -2]$, on a le tableau de variations suivant.

x	-4		-2
$f'(x)$		$+$	
f	$f(-4)$	$\nearrow$	$f(-2)$

On calcule $f(-4) \approx -116$ et $f(-2) \approx 33,6$.La fonction f est continue et strictement croissante sur $[-4; -2]$ et $0 \in [f(-4); f(-2)]$. Par application d'un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-4; -2]$.

3. On reconnaît l'algorithme de dichotomie. En effet à chaque boucle on calcule le centre de l'intervalle, puis l'image par f de celui-ci.

	Initialisation	Passage 1	Passage 2	Passage 3	Passage 4	Passage 5
m		-3	-3,5	-3,25	-3,125	-3,1875
Signe de p		< 0	> 0	> 0	< 0	> 0
a	-4	-4	-3,5	-3,25	-3,25	-3,1875
b	-2	-3	-3	-3	-3,125	-3,125
$b-a$	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
$b-a>0,1$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

4. On obtient que $-3,1875 < \alpha < -3,125$.

Corrigé exercice 92 :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ nous donne $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ nous donne $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. La fonction f est une différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.Pour tout réel x, $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x-(-\mathrm{e}^{-x})}{2} = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$. Une somme d'exponentielle étant toujours positive, on en déduit la positivité de f', d'où le tableau de variations de f.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty \nearrow +\infty$

3. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, elle prend toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, il existe donc, par application d'un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, un unique réel α_k tel que $f(\alpha_k) = k$.

4. Par la méthode du balayage, on obtient $0,88 < \alpha_1 < 0,89$.

5. Par la méthode du balayage, on obtient $2,99 < \alpha_{10} < 3$.

Corrigé exercice 93 :

1. La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$.Pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{1-x^2} + (-x^2)(-2x\mathrm{e}^{1-x^2}) = 2x\mathrm{e}^{1-x^2}(x^2-1)$, donc sur $[0;+\infty[$, f' a le même signe que $x \mapsto x^2-1$, d'où le tableau de variations suivant.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

2. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$ et $0,5 \in [0;1]$ (l'intervalle image que prend f sur $[0;1]$), donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution sur $[0;1]$.La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et $0,5 \in [0;1]$ (l'intervalle image que prend f sur $[1;+\infty[$), donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution sur $[1;+\infty[$. L'équation $f(x) = 0,5$ admet donc 2 solutions sur $[0;+\infty[$.

3. On démontre, de la même manière qu'à la question 2, en utilisant un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions u_n et v_n comprises respectivement entre $[0\ ;\ 1]$ et $[1\ ;\ +\infty[$. En effet, puisque $\frac{1}{n} \in [\frac{1}{2}, 0]$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, cette valeur sera toujours comprise dans l'intervalle image de f sur $[0\ ;\ 1]$ ainsi que dans l'intervalle image de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

4. La suite (u_n) est croissante. En effet si la suite était strictement décroissante, on aurait alors $u_n > u_{n+1}$. Or on sait d'après la question précédente que pour tout entier naturel n, on a $u_n \in [0;1]$. f étant décroissante sur $[0;1]$, on aurait $f(u_n) < f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $\frac{1}{n} < \frac{1}{n+1}$ ce qui est impossible, d'où le résultat. On démontre en utilisant les mêmes arguments que la suite (v_n) est décroissante.

5. (u_n) étant croissante et majorée par 1 (d'après la question 3, pour tout entier naturel n on a $u_n \in [0;1]$), elle est donc convergente vers une limite que l'on note ℓ_1.

6. (v_n) étant décroissante et minorée par 1 (d'après la question 3, pour tout entier naturel n on a $v_n \in [1;+\infty[$), elle est donc convergente vers ℓ_2.

7. En passant à la limite, ℓ_1 et ℓ_2 sont solutions de l'équation $f(x) = 0$. Grâce au tableau de variations de f, on constate que la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ est $x = 1$. On obtient $\ell_1 = \ell_2 = 1$ et donc les deux suites convergent vers 1.

Corrigé exercice 94 :

Partie A

1. Si f est une fonction linéaire, on peut donc l'écrire sous la forme $f(x) = ax$, avec $a \in \mathbb{R}$.On a alors $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$. Donc f est une fonction solution du problème.

2. Si f est une fonction affine non linéaire, elle peut donc s'écrire sous la forme : $f(x) = ax+b$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.On a alors $f(x+y) = a(x+y)+b = ax+b+ay$ qui est différent de $ax+b+ay+b$. Donc f n'est pas solution du problème.

3. Si f est la fonction carrée, elle s'écrit donc sous la forme $f(x) = x^2$.On a alors : $f(x+y) = x^2 + 2xy + y^2$ qui est différent de $x^2 + y^2$. Donc f n'est pas solution du problème.

Partie B

1. On a, en utilisant les propriétés de la fonction f, $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$. On en déduit que $f(0) = 0$. On peut ensuite remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$. On obtient donc que $f(x) = -f(-x)$ ce qui prouve que f est impaire.

2. On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(nx) = nf(x)$. Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $f(0x) = f(0) = 0 = 0f(x)$. La propriété est donc vraie lorsque $n = 0$.Hérédité : Supposons qu'à un rang n on ait $f(nx) = nf(x)$. On a alors $f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$. Donc, si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n+1$.Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et il y a hérédité. Donc, pour tout entier naturel n, on a $f(nx) = nf(x)$.

3. f étant impaire, $f(-nx) = f(n(-x)) = nf(-x) = -nf(x)$ ce qui prouve que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

4.
   a. En utilisant les propriétés de la fonction f on a, pour tout $q \in \mathbb{Z}^*$, $f(1) = f\left(\frac{q}{q}\right) = qf\left(\frac{1}{q}\right)$. On peut écrire cela puisque $q \in \mathbb{Z}^*$. En divisant chacun des membres de cette égalité par q on obtient $f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}f(1)$.

   b. En posant $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ on obtient $f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1) = rf(1)$. On en déduit donc que, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1)$.

5. On admet le lemme : « Tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels. » L'objectif de cette question est de montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ s'écrit sous la forme $f(x) = ax$ où a un est réel à déterminer. Soit x un réel quelconque. D'après le lemme, il existe une suite (r_n) de rationnels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$. La fonction f étant continue, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) = f(x)$. D'après la question précédente, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1)$. On a donc $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n f(1) = xf(1)$. La fonction f est donc une fonction linéaire puisqu'elle s'écrit sous la forme $f(x) = ax$.

Corrigé exercice 95 :

1. $x \mapsto \frac{x^2-1}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, tend vers 0 lorsque x tend vers -1. En effet $\frac{x^2-1}{x+1} = x-1$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Cette fonction est donc prolongeable par continuité en posant $f(-1) = 0$.

2. $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0. En effet $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = (\sin)'(0) = \cos(0) = 1$. En posant $f(0) = 1$, la fonction devient continue sur $\mathbb{R}$.

3. $x \mapsto \frac{e^x-1}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0. En effet $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-e^0}{x-0} = \exp'(0) = 1$. En posant $f(0) = 1$, la fonction devient continue sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 96 :

1. Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$, c'est-à-dire que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante.Initialisation : On a $a_0 = a$, $b_0 = b$ et donc $a_0 \leqslant b_0$.Si $k \leqslant f(\frac{a+b}{2})$ alors $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$. On a donc $a_1 \geqslant a_0$. Comme $a_0 \leqslant b_0$ alors $b_1 \leqslant \frac{b_0+b_0}{2} = b_0$ et $b_1 \geqslant \frac{a_0+a_0}{2} = a_0 = a_1$. On a donc bien $a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$. Sinon, alors $b_1 = b_0$ et $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$. On a donc $b_1 \leqslant b_0$. Comme $a_0 \leqslant b_0$ alors $a_1 \geqslant \frac{a_0+a_0}{2} = a_0$ et $a_1 \leqslant \frac{b_0+b_0}{2} = b_0 = b_1$. On a donc bien $a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$. Donc la propriété est vraie au rang 0. Hérédité : Supposons qu'à un rang n on ait $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$Si $k \leqslant f(\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2})$ alors $a_{n+2} = a_{n+1}$ et $b_{n+2} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \leqslant b_{n+1}$Sinon $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \geqslant a_{n+1}$ et $b_{n+2} = b_{n+1}$. Dans les deux cas, on obtient que $a_{n+1} \leqslant a_{n+2} \leqslant b_{n+2} \leqslant b_{n+1}$.Il y a donc hérédité.Conclusion : La suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) est décroissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$ pour toute valeur de k. La suite $(b_n - a_n)$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $b - a$. On a donc, pour tout entier naturel n, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$.

3. (a_n) est une suite croissante et (b_n) est une suite décroissante. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$, les deux suites convergent vers la même limite (propriétés de deux suites convergentes).

4. On sait que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a, par construction des suites (a_n) et (b_n), $f(a_n) \leqslant k \leqslant f(b_n)$. f étant continue sur I, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = f(\alpha)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(b_n) = f(\alpha)$. On obtient donc $k = f(\alpha)$. On vient de montrer que, pour un réel k quelconque appartenant à $[f(a); f(b)]$, il existe une valeur α telle que $f(\alpha) = k$ donc l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a; b]$.

Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 7 : Compléments sur la dérivation

Table des matières

1 Informations sur ce chapitre

L'étude de la dérivation, commencée en classe de première, est étendue par l'étude de la dérivée d'une fonction composée - seule la composition avec une fonction affine avait été travaillée en classe de première - et l'introduction de la dérivée seconde. L'étude des fonctions convexes permet de réinvestir et d'enrichir le travail entamé en classe de première sur les dérivées. Elle donne l'occasion de raisonner en diversifiant les registres : représentations graphiques, tableaux de variations, expressions symboliques.
Le chapitre peut être abordé sans avoir étudié le chapitre logarithme népérien ni celui des fonctions trigonométriques.
Les exercices proposés en début de chapitre sont assez techniques. Ils permettent de revoir et maîtriser les différentes dérivées en réinvestissant les dérivées des fonctions usuelles de première.
En fin de chapitre, des problèmes de modélisation en physique utilisent les notions de convexité. Les approfondissements proposés étudient la courbe de Lorenz, les dérivées n-ième d'une fonction ainsi que l'inégalité arithmético-géométrique.

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

$f(0) = 0,5$	$f'(0) = \frac{2}{5} = 0,4$
$f(1) \approx -1,2$	$f'(1) = -\frac{5,5}{2} = -2,75$
$f(2) = -3$	$f'(2) = 0$
$f(3) = 1$	$f(3) = \frac{4,5}{0,5} = 9$

Corrigé exercice 2 :

1. Le nombre dérivé $f'(a)$ de la fonction f au point d'abscisse a est la limite, si elle existe, lorsque h tend vers 0, du taux d'accroissement $\tau(a) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
   Si cette limite existe, on a donc : $f'(a) = \lim_{h\to 0} \tau(a)$.
2. D'une part $f(a+h) = 3(a+h)^2 + 7(a+h) + 6 = 3(a^2 + 2ah + h^2) + 7a + 7h + 6$ d'où $f(a+h) = 3a^2 + 6ah + 3h^2 + 7a + 7h + 6$.
   Donc $f(a+h) - f(a) = 6ah + 3h^2 + 7h = h(6a + 3h + 7)$.
   Donc $\tau(a) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = 6a + 3h + 7$. Quand h tend vers 0, $\tau(a)$ tend vers $6a + 7$. Donc f est dérivable en a et $f'(a) = 6a + 7$.

Corrigé exercice 3 :

La dérivée de la fonction carré $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}$.
La dérivée de la fonction cube $g(x) = x^3$ est $g'(x) = 3x^2$ sur $\mathbb{R}$.
La dérivée de la fonction inverse $h(x) = \dfrac{1}{x}$ est $h'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$.
La dérivée de la fonction racine carrée $k(x) = \sqrt{x}$ est $k'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$.
La dérivée de la fonction $f(ax+b)$ est $a \times f'(ax+b)$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 4 :

1. f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^2 + 10x + 3$.
2. g est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \mathrm{e}^x(x^2 - 4x + 3) + \mathrm{e}^x(2x - 4) = \mathrm{e}^x(x^2 - 2x - 1)$.
3. h est l'inverse de la fonction racine carrée qui est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc h est dérivable sur $]0; +\infty[$. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $h'(x) = -\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$.

4. k est le quotient de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ donc est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$, $k'(x) = \dfrac{(2x+5)(3x+1)-3(x^2+5x+2)}{(3x+1)^2} = \dfrac{6x^2+2x+15x+5-(3x^2+15x+6)}{(3x+1)^2} = \dfrac{3x^2+2x-1}{(3x+1)^2}$.

5. ℓ est de la forme $f(ax+b)$ avec $f(x)=\sqrt{x}$.

   f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc ℓ est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$ et, pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$, $\ell'(x) = 3\times\dfrac{1}{2\sqrt{3x+1}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$.

Corrigé exercice 5 :

1. $f(x)=3x^2-7x+8$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=6x-7$. Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est donnée par $y=f'(1)\times(x-1)+f(1)$. On a d'une part, $f(1)=3\times1^2-7\times1+8=4$ et d'autre part, $f'(1)=6\times1-7=-1$.

   Cette tangente a donc pour équation $y=-(x-1)+4$ soit $y=-x+5$.

2. $g(x)=\sqrt{5x+6}$ est définie et dérivable sur $\left[-\dfrac{6}{5};+\infty\right[$. Pour tout $x\in\left[-\dfrac{6}{5};+\infty\right[$, $g'(x)=\dfrac{5}{2\sqrt{5x+6}}$. Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est de la forme $y=g'(1)\times(x-1)+g(1)$. On a d'une part $g(1)=\sqrt{5\times1+6}=\sqrt{11}$ et d'autre part $g'(1)=\dfrac{5}{2\sqrt{5\times1+6}}=\dfrac{5}{2\sqrt{11}}$. La tangente a donc pour équation $y=\dfrac{5}{2\sqrt{11}}(x-1)+\sqrt{11}$.

3. $h(x)=\mathrm{e}^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h'(x)=\mathrm{e}^x$. Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y=h'(1)\times(x-1)+h(1)$. On a d'une part $h(1)=\mathrm{e}$ et d'autre part $h'(1)=\mathrm{e}$. La tangente a donc pour équation $y=\mathrm{e}(x-1)+\mathrm{e}$ soit $y=\mathrm{e}x$.

Corrigé exercice 7 :

1. f est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{1}{9}(3x^2+6x-24)=\dfrac{1}{3}(x^2+2x-8)$. Pour étudier le signe de $f'(x)$, on commence par calculer le discriminant de x^2+2x-8 : $\Delta=2^2-4\times1\times(-8)=36$. Comme $\Delta>0$, ce polynôme admet deux racines réelles : $x_1=\dfrac{-2-\sqrt{36}}{2}=-4$ et $x_2=\dfrac{-2+\sqrt{36}}{2}=2$. On obtient alors donc le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	$\frac{29}{3}$	↘	$-\frac{7}{3}$	↗	

2. $\mathcal{T}$ admet pour équation $y = f'(-1) \times (x - (-1)) + f(-1)$. On a d'une part $f(-1) = \frac{1}{9}\left((-1)^3 + 3 \times (-1)^2 - 24 \times (-1) + 7\right) = \frac{11}{3}$ et d'autre part $f'(-1) = \frac{1}{3}((-1)^2 + 2 \times (-1) - 8) = -3$. Donc une équation de $\mathcal{T}$ est $y = -3(x+1) + \frac{11}{3} \Leftrightarrow y = -3x + \frac{2}{3}$.

3. La tangente est horizontale lorsque $f'(x) = 0$ soit aux points d'abscisses -4 et 2.

4. a. g est un polynôme donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2 + 6x + 3$. On calcule le discriminant de ce trinôme : $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times 3 = 0$. Ce trinôme admet donc une racine double $x_0 = \frac{-6}{6} = -1$ et $g'(x)$ est positif sur $\mathbb{R}$.
   On obtient donc le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	↗	0	↗

   On en déduit que $g(x)$ est négative sur $]-\infty; -1[$ et positive sur $]-1; +\infty[$.

   b. On étudie le signe de :
   $\frac{1}{9}\left(x^3 + 3x^2 - 24x + 7\right) - \left(-3x + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}\left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right) = \frac{1}{9}g(x)$.
   Donc $\frac{1}{9}\left(x^3 + 3x^2 - 24x + 7\right) - \left(-3x + \frac{2}{3}\right)$ est négatif sur $]-\infty; -1[$ et positif sur $]-1; +\infty[$, d'après la question précédente. La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc en-dessous de $\mathcal{T}$ sur $]-\infty; -1[$ et au-dessus sur $]-1; +\infty[$.

3 Activités

3.1 Corrigé activité A : De nouvelles formules de dérivation

Questions :

1. f est un polynôme du second degré donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x + 1$.

2. a. g est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2x$.
   b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = g(f(x)) = (x^2 + x + 1)^2$ et $h(x) = g'(f(x)) = 2(x^2 + x + 1)$.
   c. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\varphi(a) = (a^2 + x + 1) \times (a^2 + x + 1)$. D'où, pour $a \in \mathbb{R}$, $\varphi'(a) = (2a + 1)(a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1)(2a + 1) = 2(2a + 1)(a^2 + a + 1)$.
   d. $\varphi'(a) = 2(2a + 1)(a^2 + a + 1) = f'(a) \times 2(a^2 + a + 1) = f'(a) \times g'(f(a))$ donc $\varphi'(a) = f'(a) \times h(a)$.

3. a. k est la fonction inverse donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   b. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $k'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
   c. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\psi(x) = k(f(x)) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ et
   $p(x) = k'(f(x)) = -\dfrac{1}{(x^2 + x + 1)^2}$.
   d. Pour tout a réel, $\psi'(a) = \dfrac{0 \times (a^2 + a + 1) - 1 \times (2a + 1)}{(a^2 + a + 1)^2} = -\dfrac{(2a + 1)}{(a^2 + a + 1)^2}$.
   e. On a, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\psi'(a) = f'(a) \times p(a)$.

Bilan :

La dérivée de $[u(x)]^2$ semble être $2u'(x) \times u(x)$ et celle de $\dfrac{1}{u(x)}$ semble être $-\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$.

3.2 Corrigé activité B : Position relative d'une courbe par rapport à ses tangentes

Questions :

1. f est un quotient de polynômes définis et ne s'annulant pas sur $]-\infty; 0[$ donc f est dérivable sur $]-\infty; 0[$.

   Et, pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $f'(x) = \dfrac{3x^2 \times x - 1 \times (x^3 + 1)}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2}$.

2. a. g est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty; 0[$. Et, pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $g'(x) = 6x^2$. Pour tout x appartenant à l'intervalle $]-\infty; 0[$, $g'(x) > 0$ donc g est croissante sur $]-\infty; 0[$. Son tableau de variations est donc le suivant.

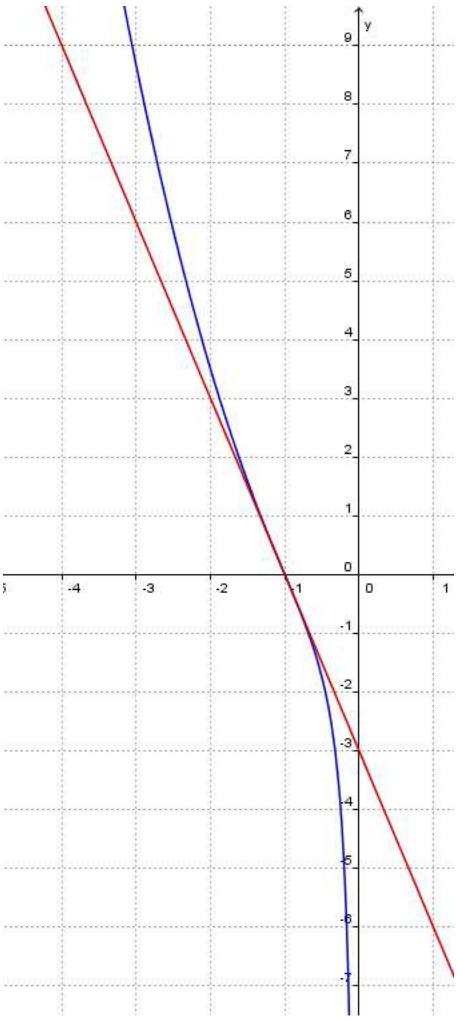
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ 0
$g'(x)$	$+$
g	$\nearrow$ -1

b. D'après le tableau de variations, pour tout x appartenant à $]-\infty;0[$, $g(x)$ est négative.

3. On a, pour tout $x \in]-\infty;0[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. Comme pour tout $x \in]-\infty;0[$, $x^2 > 0$ et $g(x) < 0$, alors $f'(x) < 0$ et donc f est décroissante sur $]-\infty;0[$.

4. a. Une équation de cette tangente est $T_A : y = f'(-1) \times (x-(-1)) + f(1)$. Or $f(-1) = \dfrac{(-1)^3+1}{-1} = 0$ et $f'(-1) = \dfrac{2\times(-1)^3-1}{(-1)^2} = -3$. Donc $T_A : y = -3(x+1)$ soit $T_A : y = -3x-3$.

b. On obtient la figure ci-dessous.



c. Le point M a pour coordonnées $\left(x; \dfrac{x^3+1}{x}\right)$ et le point P a pour coordonnées $(x; -3x-3)$. Donc $d(x) = \dfrac{x^3+1}{x} - (-3x-3) = \dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x}$.

d. Pour étudier le signe de $h\colon x \mapsto 2x^3+3x^2-1$, on dresse son tableau de variations. h est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 6x^2+6x = 6x(x+1)$.
Sur $]-\infty; 0[$, on a $6x < 0$. Sur $]-\infty; -1[$, on a $x+1 < 0$ et sur $[-1; 0[$, on a $x+1 \geqslant 0$. Donc sur $]-\infty; -1[$, on a $h'(x) > 0$ et sur $[-1; 0[$, on a $h'(x) \leqslant 0$.

x	$-\infty$		-1		0
$h'(x)$		$+$	0	$-$	‖
h		↗	0	↘	‖

d est un quotient de polynômes définis et ne s'annulant pas sur $]-\infty; 0[$ donc dérivable sur $]-\infty; 0[$. Et, pour tout $x \in]-\infty; 0[$,
$d'(x) = \dfrac{(3x^2+6x+3) \times x - 1 \times (x^3+3x^2+3x+1)}{x^2}$
$d'(x) = \dfrac{2x^3+3x^2-1}{x^2}$. D'après le tableau de variations, $h(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty; 0[$ donc $d'(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty; 0[$. On en déduit le tableau de variations de d.

x	$-\infty$	-1	0
$d'(x)$		$-$	‖
d	↘	0	↘ ‖

e. Comme $d(x) > 0$ sur $]-\infty; -1[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente T_A sur cet intervalle. Et sur $[-1; 0[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de la tangente T_A.

Bilan :

D'après l'étude précédente, on en déduit que la fonction f est convexe sur $]-\infty; -1[$. La tangente traverse la courbe au point A. On dit que le point A est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

3.3 Corrigé activité C : Modélisation d'un toboggan

Questions :

1. f est continue sur $[0;1]$ et sur $]1;2]$. Prouvons qu'elle est continue en 1. D'une part $f(1) = -\frac{1^2}{2} + 1 = \frac{1}{2}$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2}{2} - 2x + 2 = \frac{1}{2}$. f est donc bien continue en 1 et donc continue sur $[0;2]$.

2. Si $x \leq 1$, $f'(x) = -x$ et si $x > 1$, $f'(x) = x - 2$. f' est continue sur $[0;1]$ et sur $]1;2]$. Prouvons qu'elle est continue en 1. D'une part, $f'(1) = -1$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f'(x) = -1$

   Les valeurs sont égales donc f' est continue en 1 et donc continue sur $[0;2]$.

3. a. Une équation de la tangente en a est $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$.
   En $x = 0$: on a $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, donc l'équation réduite de la tangente est $y = 1$.
   En $x = 0,5$: on a $f(0,5) = -\frac{0,5^2}{2} + 1 = 0,875$ et $f'(0,5) = -0,5$, donc l'équation réduite de la tangente est $y = -0,5(x - 0,5) + 0,875$ soit $y = -0,5x + 1,125$.
   En $x = 1,5$: on a $f(1,5) = \frac{1,5^2}{2} - 2 \times 1,5 + 2 = 0,125$ et $f'(0) = 1,5 - 2 = -0,5$, donc l'équation réduite de la tangente est $y = -0,5(x - 1,5) + 0,125$ soit $y = -0,5x + 0,875$.
   En $x = 2$: on a $f(2) = \frac{2^2}{2} - 2 \times 2 + 2 = 0$ et $f'(2) = 2 - 2 = 0$, donc l'équation réduite de la tangente est $y = 0$.

   b. Entre 0 et 1 la pente de la tangente semble diminuer. Entre 1 et 2, elle semble augmenter. La valeur absolue de la pente semble être maximale en 1.

4. a. Si $x \leq 1$, $f''(x) = -1$. Si $x > 1$, $f''(x) = 1$. On en déduit le tableau de variations de f' ci-dessous.

x	0		1		2
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'	0	↘	-1	↗	0

   b. f' est croissante sur $[1;2]$ et décroissante sur $[0;1]$. Elle admet un minimum en $x = 1$ valant -1.

   c. La fonction semble convexe sur $[1;2]$ et concave sur $[0;1]$. f admet un point d'inflexion en $x = 1$.

5. Le toboggan respecte les normes puisque, en valeur absolue, la pente ne dépasse pas 1, et donc pas 1,5.

Bilan :

Lorsque la fonction est convexe, on peut conjecturer que la fonction dérivée est croissante. Lorsque la fonction est concave, la fonction dérivée semble être décroissante.

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 7 :

$g'(3)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative au point d'abscisse 3. Donc $g'(3) = \dfrac{\frac{5}{3} - \frac{-1}{3}}{4-2} = -1$.

Réponse : c

Corrigé exercice 8 :

Le point d'abscisse 3 est un point d'inflexion.
$\mathcal{C}_g$ est au-dessus de ses tangentes à partir de 3, donc g est convexe sur $[3;5]$.

Réponse : d

Corrigé exercice 9 :

Le point d'abscisse 3 est un point d'inflexion, donc la dérivée seconde s'annule en 3.

Réponse : c

Corrigé exercice 10 :

f est la composée des fonctions u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 3x^2 + 6x + 4$ et v définie sur $[0;+\infty[$ par $v(x) = \sqrt{x}$. Or, une fonction f de la forme $f = v \circ u$ admet pour fonction dérivée $f' = u' \times v' \circ u$. Dans notre cas, on a $u'(x) = 6x + 6$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $f'(x) = (6x+6) \times \dfrac{1}{2\sqrt{3x^2+6x+4}} = \dfrac{3x+3}{\sqrt{3x^2+6x+4}}$.

Réponse : c

Corrigé exercice 11 :

h est le produit des deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \mathrm{e}^{5x+7}$ et $v(x) = 2x^2+4x+6$. u est la composée des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \mathrm{e}^x$ et $p(x) = 5x+7$. Or, une fonction u de la forme $u = k \circ p$ admet pour fonction dérivée $u' = p' \times k' \circ p$. Dans notre cas, on a $u'(x) = 5\mathrm{e}^{5x+7}$ et $v'(x) = 4x + 4$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 5\mathrm{e}^{5x+7}\left(2x^2+4x+6\right) + \mathrm{e}^{5x+7}(4x+4)$ (Réponse c)
$h'(x) = \mathrm{e}^{5x+7}\left(10x^2+20x+30+4x+4\right)$
$h'(x) = \mathrm{e}^{5x+7}\left(10x^2+24x+34\right)$
$h'(x) = 2\mathrm{e}^{5x+7}\left(5x^2+12x+17\right)$ (Réponse b).

Réponses : b et c

Corrigé exercice 12 :

k est la composée des deux fonctions : u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 1$ et v définie sur $[0;+\infty[$ par $v(x) = \sqrt{x}$. Or, une fonction k de la forme $k = v \circ u$ admet pour fonction

dérivée $k' = u' \times v' \circ u$. Dans notre cas, on a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
Comme pour tout réel x, $\sqrt{x^2+1} > 0$, $k'(x)$ est du signe de x. Donc si $x \geqslant 0$, $k'(x) \geqslant 0$ donc k est croissante sur $[0;+\infty[$. (Réponse b).
De plus, $k'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ est le quotient des deux fonctions définies, dérivables et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc k' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$k''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

c'est-à-dire $k''(x) = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)}$.
Pour tout réel x, $k''(x) > 0$ donc k est convexe sur $\mathbb{R}$, et donc, en particulier, sur $[0;+\infty[$.

Réponse : b, c et d

Corrigé exercice 13 :

ℓ est la composée de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, ℓ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ell'(x) = 2(2x-5)(x^2-5x+4)$.
On résout $\ell'(x) = 0$. On doit donc avoir $2x - 5 = 0$, c'est-à-dire $x = \dfrac{5}{2}$, soit $x^2 - 5x + 4 = 0$.
Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 4 = 9 > 0$, il admet donc deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{5-3}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{5+3}{2} = 4$.
Donc la courbe de ℓ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses respectives 1, $\dfrac{5}{2}$ et 4 (Réponse c).
ℓ' est un polynôme, à ce titre il est défini et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ell''(x) = 4(x^2-5x+4) + 2(2x-5)^2 = 6(2x^2-10x+11)$.
Ce trinôme admet pour discriminant $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 2 \times 11 = 100 - 88 = 12 > 0$. Il admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{10-\sqrt{12}}{4} = \dfrac{5-\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{10+\sqrt{12}}{4} = \dfrac{5+\sqrt{3}}{2}$.
La dérivée seconde de ℓ s'annule donc deux fois en changeant de signe, elle admet donc deux points d'inflexion (Réponse b).

Réponses : b et c

Corrigé exercice 14 :

m est la composée des fonctions $p(x) = x^2 - 2x + 3$ et $q(x) = \mathrm{e}^x$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. La fonction m est donc de la forme $m = q \circ p$, d'où $m' = p' \times q' \circ p$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m'(x) = (2x-2)\mathrm{e}^{x^2-2x+3} = 2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+3}$ (Réponse a).
De plus, m' est un produit de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. La fonction m' est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m''(x) = 2\mathrm{e}^{x^2-2x+3} + (2x-2)^2\mathrm{e}^{x^2-2x+3} = 2\left(2x^2-4x+3\right)\mathrm{e}^{x^2-2x+3}$.
On a $m''(x) = 0$ si, et seulement si, $2x^2 - 4x + 3 = 0$ car $2\mathrm{e}^{x^2-2x+3} > 0$.

Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 16 - 24 = -8 < 0$. Ce trinôme n'admet donc aucune racine réelle. On en déduit que $2x^2 - 4x + 3$ est toujours positif sur $\mathbb{R}$.
Comme l'exponentielle est également toujours positive, on a donc $m''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.
La fonction m est donc convexe sur $\mathbb{R}$ (Réponse d).

Réponses : a et d

Corrigé exercice 15 :

1. p est un polynôme donc est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p'(x) = 3x^2 - 10x + 8$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 3 \times 8 = 4 > 0$, il admet donc deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{10-2}{6} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$ et $x_2 = \dfrac{10+2}{6} = \dfrac{12}{6} = 2$. On obtient ainsi le tableau de variations de p suivant.

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
p		$\nearrow$	$\frac{31}{27}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

2. p' est un polynôme donc est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p''(x) = 6x - 10$. On a $p''(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 6x - 10 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{10}{6} \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{5}{3}$. Donc p est concave sur $\left]-\infty; \dfrac{5}{3}\right]$ et convexe sur $\left[\dfrac{5}{3}; +\infty\right[$.

3. La courbe représentative de p admet un point d'inflexion en l'abscisse $x = \frac{5}{3}$.
$p\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{29}{27}$ donc les coordonnées recherchées sont $\left(\frac{5}{3}; \frac{29}{27}\right)$.

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1

Questions préliminaires

1. a. Si $x \in I_2$, alors l'impôt se calcule à l'aide de l'expression suivante : $0,11 \times (x - 10064)$ c'est-à-dire $0,11x - 1107,04$.

   b. Si $x \in \mathrm{I}_3$, alors l'impôt se calcule grâce à l'expression suivante : $0,30 \times (x - 25659) + 0,11 \times 15595 = 0,30x - 5982,25$.
   Si $x \in \mathrm{I}_4$, alors l'impôt se calcule grâce à l'expression suivante : $0,41 \times (x - 73369) + 0,3 \times 47710 + 0,11 \times 15595 = 0,41x - 14052,84$.
   Si $x \in \mathrm{I}_5$, alors l'impôt se calcule grâce à l'expression suivante : $0,45 \times (x - 157806) + 0,41 \times 84437 + 0,3 \times 47710 + 0,11 \times 15595 = 0,45x - 20365,08$.

2. La fonction F est continue sur chacun des intervalles I_1, I_2, I_3, I_4 et I_5 en tant que fonction affine. On se contente donc de vérifier la continuité aux bornes de ces intervalles.
   On a $\lim\limits_{x \to 10064} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 10064} 0,11x - 1107,04 = 0$, donc la fonction F est continue en 10 064.
   De même, on a $\lim\limits_{x \to 25659} 0,11x - 1107,04 = 1715,45$ et
   $\lim\limits_{x \to 25659} 0,30x - 5982,25 = 1715,45$, donc la fonction F est continue en 25 659.
   De la même manière, on a $\lim\limits_{x \to 73369} 0,30x - 5982,25 = 16028,45$ et
   $\lim\limits_{x \to 73369} 0,41x - 14052,84 = 16028,45$, donc la fonction F est continue en 73 369.
   Et enfin, on a $\lim\limits_{x \to 157806} 0,41x - 14052,84 = 50647,62$ et
   $\lim\limits_{x \to 157806} 0,45x - 20365,08 = 50647,62$, donc la fonction F est continue en 157 806.
   Et ainsi, en conclusion, la fonction F est bien continue sur $[0; +\infty[$.

Méthode 1 : Geogebra

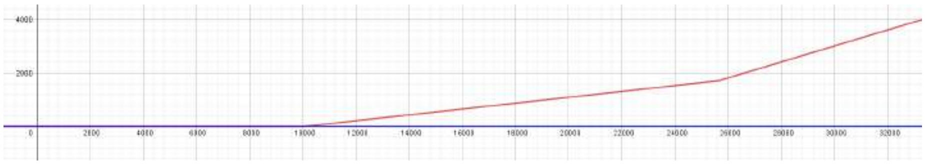
1. On entre dans Geogebra la formule suivante (voir fichier dans le dossier TICE) :
   F(x) = Si(x < 10064,0, Si(10064 < x < 25659, 0.11x-1107.04, Si(25659 < x < 73369, 0.3x - 5982.25, Si(73369 < x < 157806, 0.41x-14052.84, 0.45x-20365.08))))

2. a. La fonction F semble strictement croissante sur $[0; +\infty[$. On peut en déduire que plus le revenu est élevé, plus le montant de l'impôt l'est aussi.

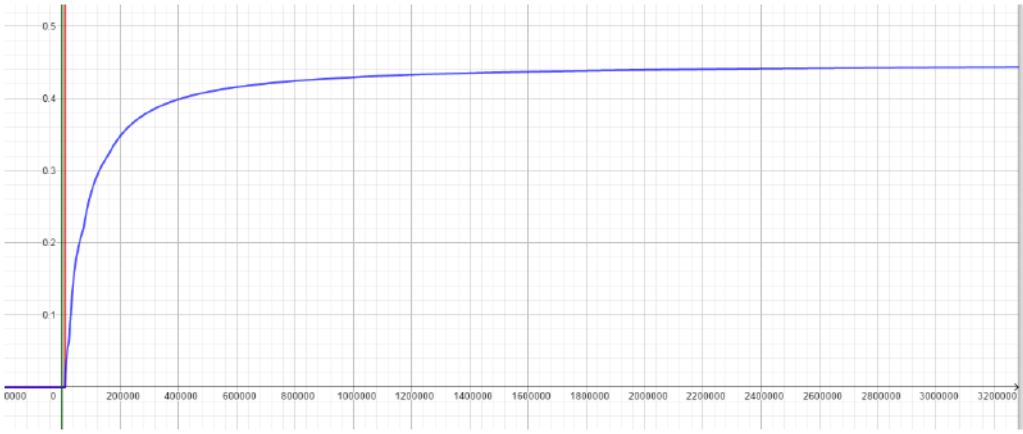
   b. La fonction F est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $\mathrm{F}'(x) = 0$ si $x \in \mathrm{I}_1$, $\mathrm{F}'(x) = 0,11$ si $x \in \mathrm{I}_2$, $\mathrm{F}'(x) = 0,3$ si $x \in \mathrm{I}_3$, $\mathrm{F}'(x) = 0,41$ si $x \in \mathrm{I}_4$ et $\mathrm{F}'(x) = 0,45$ si $x \in \mathrm{I}_5$. La fonction F$'$ est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$, et ainsi la fonction F est convexe sur $[0; +\infty[$.

3. a. Le taux global d'imposition par rapport au revenu est le rapport du revenu prélevé $\mathrm{F}(x)$ par le revenu brut x. Soit, pour tout $x > 0$, $\mathrm{G}(x) = \dfrac{\mathrm{F}(x)}{x}$.

b. On obtient la courbe ci-dessous.

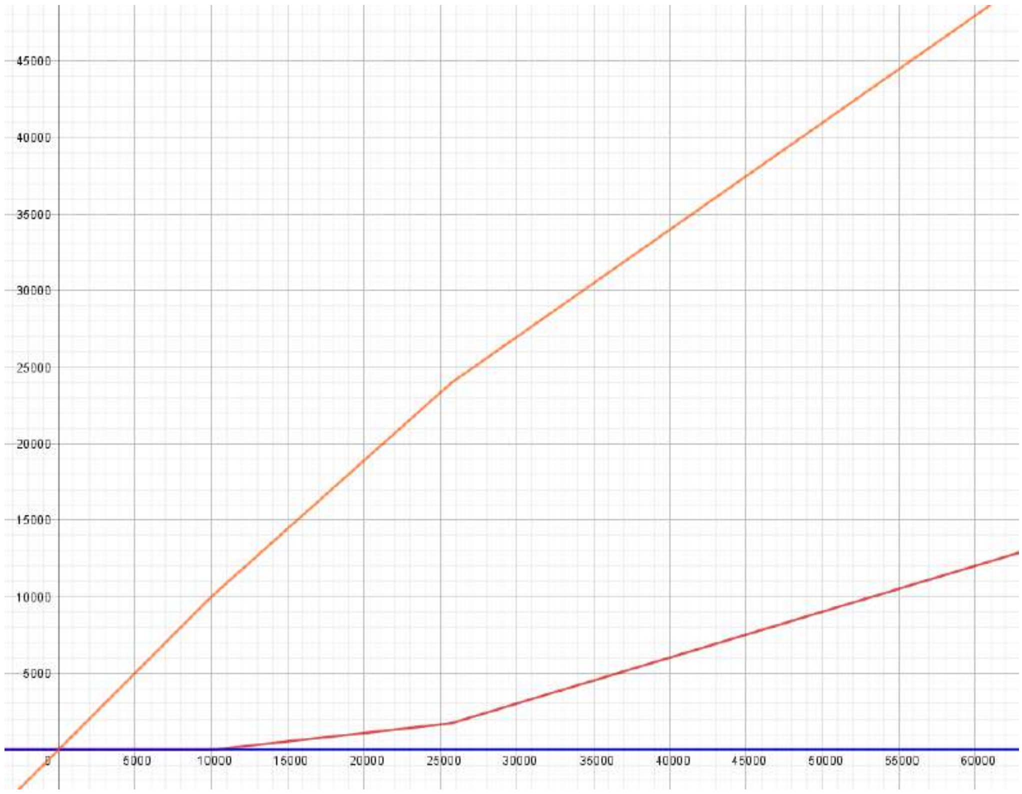


La fonction G semble nulle sur $[0;+\infty[$. Ce n'est pas le cas puisque l'image de x par la fonction G est une pourcentage ; il faut donc choisir une meilleure échelle.



4. a. Pour tout $x > 0$, $\mathrm{R}(x) = x - \mathrm{F}(x)$.

b. On obtient la courbe orange ci-dessous.



La fonction R semble strictement croissante sur $x > 0$ ce qui se se traduit dans la réalité par le fait que plus une personne a un gros revenu, plus il lui reste d'argent - même après avoir payé cet impôt. Plus intéressant : la fonction R semble croître de moins en moins vite (sa fonction dérivée est décroissante, la fonction R est concave). Ainsi, une personne ayant un plus gros revenu paye - proportionnellement par rapport à son revenu - un impôt plus important qu'une personne en ayant un plus faible.

c. On peut conseiller à Didier d'accepter cette augmentation. En effet, même si le taux d'imposition augmentera, son revenu augmentera aussi. La courbe de la fonction R, qui est croissante, montre bien que, malgré l'augmentation de son impôt, l'argent qui lui restera après l'avoir payé sera supérieur à l'argent qui lui reste actuellement. Il a donc tout intérêt à accepter cette augmentation.

5.2 Corrigé du TP 2

Questions préliminaires

1. Le développement de f à l'ordre 1 en a donne $f(x) = f'(a)(x-a) + f(a) + (x-a)^2\mathrm{R}(x)$. On retrouve une approximation affine. Graphiquement, cela correspond à l'approximation d'une courbe par sa tangente en un point.

2. En $a = 0$ on obtient $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\mathrm{R}(x)$.

3. Pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ et donc $f''(x) = \dfrac{-1}{4(x+1)\sqrt{x+1}}$.

   D'où $f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{x^2}{2}f''(0) \approx 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2$.

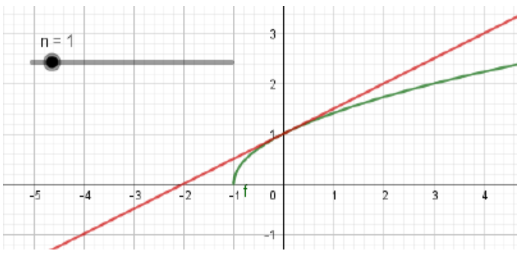
Méthode 1 : GeoGebra

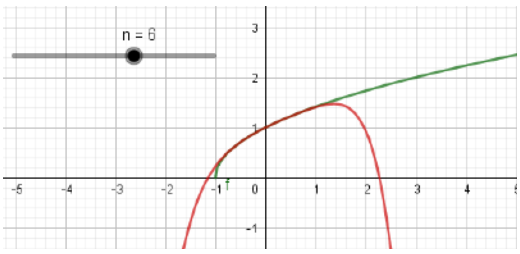
1. On entre la formule f(x) = sqrt(x+1).

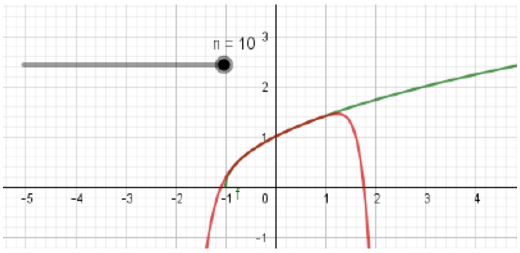
2. Le fichier est présent dans le dossier TICE.

3. Voir le fichier de correction.

4. On obtient (entre autres) les courbes suivantes.







La courbe de la fonction g semble de plus en plus « épouser » celle de la fonction f sur cet intervalle à mesure que la valeur de n augmente. L'approximation semble donc de plus en plus précise autour du point d'abscisse $x = 0$.

5. La courbe de la fonction h se rapproche de plus en plus de celle de la fonction nulle sur l'intervalle $[-0,5; 0,5]$ à mesure que n croît. Pour $x = 0$, on a exactement $h(x) = 0$ puisque $f(0) = g(0)$.

Méthode 2 : Tableur

1. Le fichier est présent dans le dossier TICE.
2. a. On entre en B2 la formule = RACINE(1+A2) avant de la copier/glisser vers le bas.
   b. On entre en C2 la formule = 1+0,5*A2 et en D2 la formule = B2 - C2.
3. a. On entre en E2 la formule = 1+0,5*A2-(A2ˆ2/8) et en F2 la formule = B2 - E2.
   b. Les valeurs contenues dans la colonne F sont plus petites que celles contenues dans la colonne D, la différence entre f et g est donc plus petite et l'approximation à l'ordre 2 est donc meilleure que celle à l'ordre 1.
4. On entre en G2 la formule =1+0,5*A2-(1/8)*A2ˆ2+(A2ˆ3/16) et en H2 la formule = B2 - G2.
5. On entre en I2 la formule =1+0,5*A2-(1/8)*A2ˆ2+(A2ˆ3/16)-(5*A2ˆ4/64) et en J2 la formule =B2 - I2.

   À mesure que l'on augmente l'ordre de l'approximation, la différence $f - g$ devient de plus en plus proche de 0 donc l'approximation est de plus en plus précise au voisinage de 0.

6 Travailler les automatismes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 16 :

h est la composée des fonctions u et v définies et dérivables pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 8x - 6$ et $v(x) = x^4$. On a ainsi $h = v \circ u$, d'où $h' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = 2x + 8$ et $v'(x) = 4x^3$. D'où $h'(x) = 4(2x+8)(x^2+8x-6)^3$.

Corrigé exercice 17 :

g est la composée des fonctions u et v définies et dérivables pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $u(x) = x^3 + 5x - 7$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. On a ainsi $g = v \circ u$, d'où $g' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = 3x^2 + 5$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. D'où $g'(x) = (3x^2+5)\mathrm{e}^{x^3+5x-7}$.

Corrigé exercice 18 :

f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ et $v(x) = \sqrt{x}$. v est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) > 0$ (on peut, par exemple, utiliser la calculatrice pour s'en convaincre lors d'un exercice oral). On a ainsi $f = v \circ u$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = 4x^3 - 6x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

D'où $f'(x) = \dfrac{4x^3-6x}{2\sqrt{x^4-3x^2+4}} = \dfrac{2x^3-3x}{\sqrt{x^4-3x^2+4}}$.

Corrigé exercice 19 :

On constate que $k'(x) \geqslant 0$ sur $[-8;2]$ et $k'(x) \leqslant 0$ sur $[2;4]$ donc k est croissante sur $[-8;2]$ et décroissante sur $[2;4]$.

Corrigé exercice 20 :

On constate que $k''(x) \leqslant 0$ sur $[-8;2]$ et $k''(x) \geqslant 0$ sur $[2;4]$ donc k est concave sur $[-8;2]$ et convexe sur $[2;4]$.

6.2 Exercices

Corrigé exercice 21 :

1. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = x + \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$. La fonction u est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et la fonction v est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. Or, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $u(x) > 0$ donc $\mathcal{D}_{f'} =]0;+\infty[$.

   f est de la forme $f = v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{\dfrac{x^2-1}{x^2}}{2\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}} = \dfrac{x^2-1}{2x^2\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}}$.

2. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = x^2 - 3x + 5$ et $v(x) = \sqrt{x}$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction v est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$. Donc la fonction f est définie et dérivable lorsque $u(x) > 0$. On étudie donc le signe de ce trinôme. Le discriminant de $x^2 - 3x + 5$ vaut $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 5 = -11 < 0$ donc la fonction u ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) > 0$. Et donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

   f est de la forme $f = v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = 2x - 3$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

   D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+5}}$.

Corrigé exercice 22 :

1. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = x + \sqrt{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$. La fonction u est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et la fonction v est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$, $u(x) > 0$ donc $\mathcal{D}_{f'} =]0; +\infty[$.

   f est de la forme $f = v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

   D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{\dfrac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$.

2. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = x^2 + \mathrm{e}^x$ et $v(x) = \sqrt{x}$. La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction v est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$, $u(x) > 0$ donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

   f est de la forme $f = v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = 2x + \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

   D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{2x+\mathrm{e}^x}{2\sqrt{x^2+\mathrm{e}^x}}$.

Corrigé exercice 23 :

1. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = x^2 - 5x + 4$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc$\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

   f est de la forme $f = v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = 2x - 5$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = (2x-5)\mathrm{e}^{x^2-5x+4}$.

2. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = x + \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. La fonction $u(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. La fonction v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}^*$.

   f est de la forme $f = v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}$.

Corrigé exercice 24 :

1. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \dfrac{x+2}{x-7}$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

   La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{7\}$.

   La fonction v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. D'où $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{7\}$.

   f est de la forme $f = v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec :

   $u'(x) = \dfrac{1 \times (x-7) - 1 \times (x+2)}{(x-7)^2} = \dfrac{-9}{(x-7)^2}$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.

   D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{-9}{(x-7)^2}\mathrm{e}^{\frac{x+2}{x-7}}$.

2. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. La fonction u est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. La fonction v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. D'où $\mathcal{D}_{f'} =]0;+\infty[$.

   f est de la forme $f = v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.

   D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

Corrigé exercice 25 :

1. f est la composée des fonctions u et v par $u(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ et $v(x) = x^5$. Les fonctions u et v sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f aussi. f est de la forme $f = v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = 3x^2 + 4x + 3$ et $v'(x) = 5x^4$. D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = 5(3x^2 + 4x + 3)(x^3 + 2x^2 + 3x + 4)^4$.

2. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = x^3 + \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$ et $v(x) = x^6$. La fonction u est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. La fonction v est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. Donc $\mathcal{D}_{f'} =]0;+\infty[$. f est de la forme $f = v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 6x^5$.

   D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = 6\left(3x^2 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(x^3 + \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^5$.

Corrigé exercice 26 :

1. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \dfrac{x-4}{x+3}$ et $v(x) = x^4$.

   La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

   La fonction v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

   f est de la forme $f = v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec :

   $u'(x) = \dfrac{1 \times (x+3) - 1 \times (x-4)}{(x+3)^2} = \dfrac{7}{(x+3)^2}$ et $v'(x) = 4x^3$.

   D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{28}{(x+3)^2}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^3$.

f est la composée des fonctions u et v par $u(x) = \sqrt{3x+5}$ et $v(x) = x^3$. La fonction u est définie et dérivable sur $\left[-\frac{5}{3};+\infty\right[$. La fonction v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc $\mathcal{D}_{f'} = \left[-\frac{5}{3};+\infty\right[$. $f = v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+5}}$ et $v'(x) = 3x^2$. D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{9}{2\sqrt{3x+5}}\left(\sqrt{3x+5}\right)^2 = \dfrac{9\sqrt{3x+5}}{2}$.

Corrigé exercice 27 :

1. f est le produit des fonctions u et v définies par $u(x) = \left(x^2+3x+2\right)^2$ et $v(x) = \left(2x^2-5x+7\right)^3$. Ces fonctions sont des polynômes donc sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, ainsi $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

   De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = x^2+3x+2$ et $h(x) = x^2$ donc $u' = g' \times h' \circ g$ avec $g'(x) = 2x+3$ et $h'(x) = 2x$. D'où $u'(x) = 2(2x+3)(x^2+3x+2)$.

   De même, $v = q \circ p$ avec $p(x) = 2x^2-5x+7$ et $q(x) = x^3$ donc $v' = p' \times q' \circ p$ avec $p'(x) = 4x-5$ et $q'(x) = 3x^2$. D'où $v'(x) = 3(4x-5)(2x^2-5x+7)^2$.

   Ainsi, après réduction et factorisation de l'expression, on obtient $f'(x) = (x^2+3x+2)\left(2x^2-5x+7\right)^2(20x^3+13x^2-23x+12)$.

2. f est le produit des fonctions u et v définies par $u(x) = (x^3+5x^2+4)^2$, dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme, et $v(x) = \mathrm{e}^{x^4-8x^2}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

   De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = x^3+5x^2+4$ et $h(x) = x^2$ donc $u' = g' \times h' \circ g$ avec $g'(x) = 3x^2+10x$ et $h'(x) = 2x$. D'où, $u'(x) = 2(3x^2+10x)(x^3+5x^2+4) = 2x(3x+10)(x^3+5x^2+4)$.

   De même, $v = q \circ p$ avec $p(x) = x^4-8x^2$ et $q(x) = \mathrm{e}^x$ donc $v' = p' \times q' \circ p$ avec $p'(x) = 4x^3-16x$ et $q'(x) = \mathrm{e}^x$. D'où $v'(x) = (4x^3-16x)\mathrm{e}^{x^4-8x^2} = 4x(x^2-4)\mathrm{e}^{x^4-8x^2}$.

   Ainsi, après réduction et factorisation de l'expression, on obtient $f'(x) = 2x(x^3+5x^2+4)\mathrm{e}^{x^4-8x^2}(2x^5+10x^4-8x^3-32x^2+3x-22)$.

Corrigé exercice 28 :

1. f est le produit des fonctions u et v définies par $u(x) = \sqrt{-x^2+3x-2}$ et $v(x) = (x^3+5x-8)^3$. La fonction u est définie et dérivable lorsque $-x^2+3x-2 > 0$ c'est-à-dire sur $]1;2[$. La fonction v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. D'où $\mathcal{D}_{f'} =]1;2[$.

   De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = -x^2+3x-2$ et $h(x) = \sqrt{x}$ donc $u' = g' \times h' \circ g$avec $g'(x) = -2x+3$ et $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

   D'où $u'(x) = (-2x+3) \times \dfrac{1}{2\sqrt{-x^2+3x-2}} = \dfrac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}$.

   De même, $v = q \circ p$ avec $p(x) = x^3+5x-8$ et $q(x) = x^3$ donc $v' = p' \times q' \circ p$ avec $p'(x) = 3x^2+5$ et $q'(x) = 3x^2$. D'où $v'(x) = 3(3x^2+5)(x^3+5x-8)^2$.

   Ainsi, après réduction et factorisation de l'expression, on obtient :

   $f'(x) = \dfrac{(x^3+5x-8)^2}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}[-20x^4+57x^3-76x^2+121x-84]$.

2. f est le produit des fonctions u et v définies par $u(x) = \mathrm{e}^{-x^2+7}$ et $v(x) = \sqrt{x^2+4}$. La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions définies et dérivables sur cet ensemble. La fonction v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+4>0$. D'où $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

   De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = -x^2+7$ et $h(x) = \mathrm{e}^x$ donc $u' = g' \times h' \circ g$ avec $g'(x) = -2x$ et $h'(x) = \mathrm{e}^x$. D'où $u'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2+7}$.

   De même, $v = q \circ p$ avec $p(x) = x^2+4$ et $q(x) = \sqrt{x}$ donc $v' = p' \times q' \circ p$ avec $p'(x) = 2x$ et $q'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. D'où $v'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.

   Ainsi, $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2+7} \times \sqrt{x^2+4} + \mathrm{e}^{-x^2+7} \times \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ c'est-à-dire :

   $f'(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^{-x^2+7}(-2x^2-7)}{\sqrt{x^2+4}}$.

Corrigé exercice 29 :

1. f est le quotient des fonctions u et v définies par $u(x) = \sqrt{2x+3}$ et $v(x) = x^2-x+4$. v est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule pas sur I. u est dérivable lorsque $g(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{3}{2}$. D'où $\mathcal{D}_{f'} = \left]-\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$.

   De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = 2x+3$ et $h(x) = \sqrt{x}$ donc $u' = g' \times h' \circ g$ avec $g'(x) = 2$ et $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. D'où $u'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$ et $v'(x) = 2x-1$.

   D'où, $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}(x^2-x+4) - \sqrt{2x+3}(2x-1)}{(x^2-x+4)^2}$ c'est-à-dire :

   $f'(x) = \dfrac{-3x^2-5x+7}{\sqrt{2x+3}(x^2-x+4)^2}$.

2. f est le quotient des fonctions u et v définies par $u(x) = \mathrm{e}^{-x^2+5x+4}$ et $v(x) = x+7$. La fonction v est dérivable et ne s'annule pas sur I. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur cet ensemble. D'où $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$.

   De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = -x^2+5x+4$ et $h(x) = \mathrm{e}^x$ donc $u' = g' \times h' \circ g$ avec $g'(x) = -2x+5$ et $h'(x) = \mathrm{e}^x$. D'où $u'(x) = (-2x+5)\mathrm{e}^{-x^2+5x+4}$ et $v'(x) = 1$.

   D'où, $f'(x) = \dfrac{(-2x+5)\mathrm{e}^{-x^2+5x+4}(x+7) - \mathrm{e}^{-x^2+5x+4} \times 1}{(x+7)^2}$, c'est-à-dire :

   $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2+5x+4}\left[-2x^2-9x+34\right]}{(x+7)^2}$.

Corrigé exercice 30 :

1. f est le quotient des fonctions u et v définies par $u(x) = (x^3+4)^5$ et $v(x) = (x^2+3x-4)^3$. u et v sont dérivables sur I comme polynômes, et v ne s'annule pas sur cet ensemble. Donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$.

De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = x^3 + 4$ et $h(x) = x^5$ donc $u' = g' \times h' \circ g$ avec $g'(x) = 3x^2$ et $h'(x) = 5x^4$. D'où $u'(x) = 15x^2(x^3+4)^4$.

Et $v = q \circ p$ avec $p(x) = x^2 + 3x - 4$ et $q(x) = x^3$ donc $v' = p' \times q' \circ p$ avec $p'(x) = 2x + 3$ et $q'(x) = 3x^2$. D'où $v'(x) = 3(2x+3)(x^2+3x-4)^2$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$,

$$f'(x) = \frac{15x^2(x^3+4)^4(x^2+3x-4)^3 - (x^3+4)^5 \times 3(2x+3)(x^2+3x-4)^2}{(x^2+3x-4)^6}$$

$$f'(x) = \frac{3(x^3+4)^4\left[3x^4+12x^3-20x^2-8x-12\right]}{(x^2+3x-4)^4}.$$

2. f est le quotient des fonctions u et v définies sur I par $u(x) = \mathrm{e}^{2x^3+x^2-7x+2}$ et $v(x) = \sqrt{x^2+x+1}$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. v est dérivable lorsque $x^2+x+1>0$, ce qui est le cas pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

   De plus, $u = h \circ g$ avec $g(x) = 2x^3+x^2-7x+2$ et $h(x) = \mathrm{e}^x$ donc $u' = g' \times h' \circ g$ avec $g'(x) = 6x^2+2x-7$ et $h'(x) = \mathrm{e}^x$. D'où $u'(x) = (6x^2+2x-7)\mathrm{e}^{2x^3+x^2-7x+2}$.

   Et $v = q \circ p$ avec $p(x) = x^2+x+1$ et $q(x) = \sqrt{x}$ donc $v' = p' \times q' \circ p$ avec $p'(x) = 2x+1$ et $q'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. D'où $v'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$.

   Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$,

$$f'(x) = \frac{(6x^2+2x-7)\mathrm{e}^{2x^3+x^2-7x+2}\sqrt{x^2+x+1} - \mathrm{e}^{2x^3+x^2-7x+2} \times \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x^3+x^2-7x+2}\left[12x^4+16x^3+2x^2-12x-15\right]}{2\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^3}.$$

Corrigé exercice 31 :

$\mathcal{C}_1$: La fonction semble concave sur $[-0,5;2]$ puis convexe sur $[2;4,8]$. Elle semble admettre un point d'inflexion au point d'abscisse 2.
$\mathcal{C}_2$: La fonction semble concave sur $[1;4,5]$ puis convexe sur $[4,5;6]$. Elle semble admettre un point d'inflexion au point d'abscisse $4,5$.
$\mathcal{C}_3$: La fonction semble concave sur $[0;3,3]$ puis concave sur $[3,3;5]$. Elle semble admettre un point d'inflexion au point d'abscisse $3,3$.
$\mathcal{C}_4$: La fonction semble convexe sur $[-4;-2]$ puis concave sur $[-2;2]$ et convexe sur $[2;4]$. Elle admet deux points d'inflexion d'abscisses -2 et 2.

Corrigé exercice 32 :

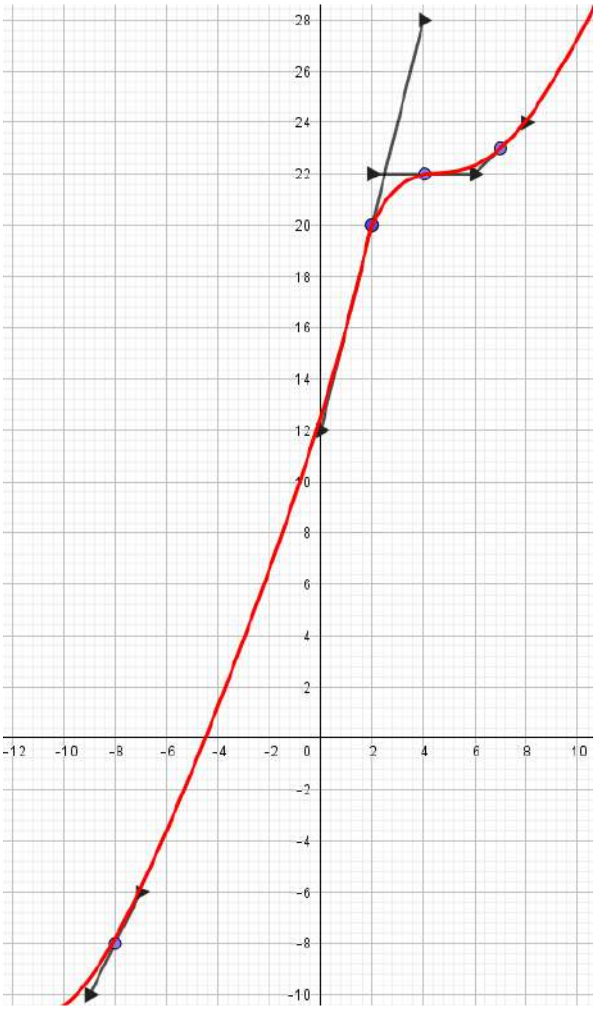
La fonction est concave sur $[0;5]$ puis convexe sur $[5;10]$. Sa dérivée est donc décroissante sur $[0;5]$ puis croissante sur $[5;10]$: elle correspond donc à la courbe $\mathcal{C}_2$ ou $\mathcal{C}_3$.
De plus, le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en 5 vaut $-\dfrac{1}{2}$ donc la courbe représentative de la fonction f' est $\mathcal{C}_2$.

Corrigé exercice 33 :

1. Le minimum de la fonction f' sur $[-8; 7]$ est 0. Donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $[-8; 7]$.
   La fonction f est donc croissante sur $[-8; 7]$.

2. f' est croissante sur $[-8; 2]$ donc f est convexe sur $[-8; 2]$.
   f' est décroissante sur $[2; 4]$ donc f est concave sur $[2; 4]$.
   f' est croissante sur $[4; 7]$ donc f est convexe sur $[4; 7]$.

3. La courbe ci-dessous fonctionne, par exemple.



Corrigé exercice 34 :

D'après le tableau de variations de f'' :
$f''(x) \leqslant 0$ sur $[-5; 1]$ donc f est concave sur $[-5; 1]$.
$f''(x) \geqslant 0$ sur $[1; 3]$ donc f est convexe sur $[1; 3]$.
$f''(x) \leqslant 0$ sur $[3; 5]$ donc f est concave sur $[3; 5]$.
Les abscisses respectives des points d'inflexion sont 1 et 3.

Corrigé exercice 35 :

1. f est un polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 12x^2 - 30x - 18$. Le discriminant de ce trinôme du second degré vaut $\Delta = (-30)^2 - 4 \times 12 \times (-18) = 1764$ donc il admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{30-42}{2\times 12} = \dfrac{-12}{24} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{30+42}{2\times 12} = \dfrac{72}{24} = 3$. La dérivée est donc positive sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right]$ et sur $[3; +\infty[$ et négative sur $\left[-\dfrac{1}{2}; 3\right]$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\frac{67}{4}$	$\searrow$	-69	$\nearrow$	

2. f' est un polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 24x - 30$. f'' est négative sur $\left]-\infty; \dfrac{5}{4}\right]$ donc f est concave sur $\left]-\infty; \dfrac{5}{4}\right]$. f'' est positive sur $\left]\dfrac{5}{4}; +\infty\right[$ donc f est convexe sur $\left]\dfrac{5}{4}; +\infty\right[$.

3. $\mathcal{C}_f$ admet donc un point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{5}{4}$.

Corrigé exercice 36 :

f est concave sur $]-\infty; 2]$ donc la dérivée seconde f'' est négative sur cet intervalle.
f est convexe sur $]2; +\infty]$ donc la dérivée seconde f'' est positive sur cet intervalle.
La courbe de f'' est donc $\mathcal{C}_3$.

Corrigé exercice 37 :

Ces réponses sont proposées à titre d'exemple.

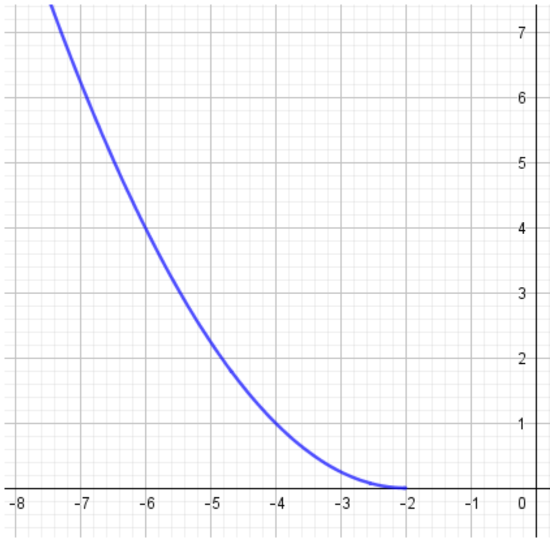
1. a. On peut prendre f et g définies sur $\mathrm{I} = [0; 1]$ par $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = -2x + 1$.
   b. Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $h(x) = f \circ g(x) = 3(-2x+1) + 1 = -6x + 4$.
   c. Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\ell(x) = g \circ f(x) = -2(3x+1) + 1 = -6x - 1$.

2. h et ℓ sont dérivables sur I et, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $h'(x) = -6$ et $\ell(x) = -6$.

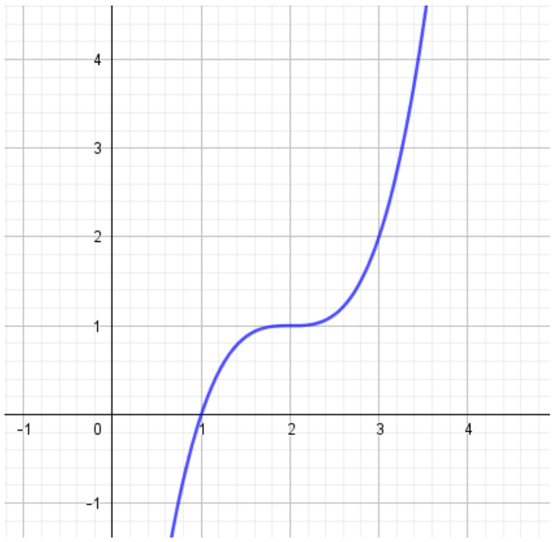
Corrigé exercice 38 :

Ces réponses sont proposées à titre d'exemple.

1. La courbe ci-dessous respecte la consigne.



2. La courbe ci-dessous respecte la consigne.



Corrigé exercice 39 :

On choisit par exemple les points d'abscisses respectives -5 et 5. Puisque ce sont des points d'inflexion, alors on doit avoir $f''(-5) = f''(5) = 0$. Le tableau ci-dessous convient.

x	$-\infty$	-5	2	5	$+\infty$
f''	-2 ↗	0 ↗	3 ↘	0 ↘	-5

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 40 :

1. $f = v \circ u$ avec $u(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 8$ et $v(x) = x^3$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = 3x^2 - 6x + 7$ et $v'(x) = 3x^2$. Ainsi f est dérivable sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $f'(x) = 3(3x^2 - 6x + 7)(x^3 - 3x^2 + 7x - 8)^2$.

2. Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 est de la forme : $y = f'(2) \times (x - 2) + f(2)$. Or, $f(2) = (2^3 - 3 \times 2^2 + 7 \times 2 - 8)^3 = 8$ et $f'(2) = 3(3 \times 2^2 - 6 \times 2 + 7)(2^3 - 3 \times 2^2 + 7 \times 2 - 8)^2 = 84$.

   Donc une équation de cette tangente est $y = 84(x - 2) + 8 \Leftrightarrow y = 84x - 160$.

Corrigé exercice 41 :

1. $g = v \circ u$ avec $u(x) = x^3 - x + 6$ et $v(x) = \sqrt{x}$ donc $g' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = 3x^2 - 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Ainsi g est dérivable sur $\mathcal{D}_g =]-2; +\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x + 6}}$.

2. Une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0 est de la forme : $y = g'(0) \times (x - 0) + g(0)$. Or, $g(0) = \sqrt{0^3 - 0 + 6} = \sqrt{6}$ et $g'(0) = \dfrac{3 \times 0^2 - 1}{2\sqrt{0^3 - 0 + 6}} = \dfrac{-1}{\sqrt{6}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{12}$. Donc une équation de cette tangente est $y = -\dfrac{\sqrt{6}}{12}x + \sqrt{6}$.

Corrigé exercice 42 :

1. $h = v \circ u$ avec $u(x) = x^3 - 5x^2 + 7$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$ donc $h' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = 3x^2 - 10x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Ainsi h est dérivable sur $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$ et $h'(x) = (3x^2 - 10x)\mathrm{e}^{x^3 - 5x^2 + 7}$.

2. Une équation de la tangente à la courbe de h au point d'abscisse 1 est de la forme :$y = h'(1) \times (x - 1) + h(1)$. Or, $h(1) = \mathrm{e}^{1^3 - 5 \times 1^2 + 7} = \mathrm{e}^3$ et $h'(1) = (3 \times 1^2 - 10 \times 1)\mathrm{e}^{1^3 - 5 \times 1^2 + 7} = -7\mathrm{e}^3$. Donc une équation de cette tangente est $y = -7\mathrm{e}^3(x - 1) + \mathrm{e}^3 \Leftrightarrow y = -7\mathrm{e}^3 x + 8\mathrm{e}^3$.

Corrigé exercice 43 :

1. $f(x) = \left(\dfrac{7x - 8}{9 - 2x}\right)^3$ définie sur $I = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{9}{2}\right\}$. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \dfrac{7x - 8}{9 - 2x}$ et $v(x) = x^3$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{9}{2}\right\}$ et v est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{9}{2}\right\}$.

   f est de la forme $f = v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = \dfrac{7(9 - 2x) + 2(7x - 8)}{(9 - 2x)^2} = \dfrac{47}{(9 - 2x)^2}$ et $v'(x) = 3x^2$.

   D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = 3 \times \dfrac{47}{(9 - 2x)^2} \times \left(\dfrac{7x - 8}{9 - 2x}\right)^2 = \dfrac{141(7x - 8)^2}{(9 - 2x)^4}$.

2. $f(x) = \left(\dfrac{-x^2+4x+6}{x^2-1}\right)^4$ définie sur $I = \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \dfrac{-x^2+4x+6}{x^2-1}$ et $v(x) = x^4$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ et la fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$.
f est de la forme $v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{(-2x+4)(x^2-1) - 2x(-x^2+4x+6)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-2x^3+2x+4x^2-4-2x^3-8x^2-12}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-4x^2-10x-4}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-2(2x^2+5x+2)}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

et $v'(x) = 4x^3$.
D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times \frac{-2(2x^2+5x+2)}{(x^2-1)^2} \times \left(\frac{-x^2+4x+6}{x^2-1}\right)^3 \\ &= \frac{-8(2x^2+5x+2)(-x^2+4x+6)^3}{(x^2-1)^5} \end{aligned}$$

Corrigé exercice 44 :

1. $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt{4x+1}}{3x+6}\right)^3$ définie sur $I = \left[-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$.

f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \dfrac{\sqrt{4x+1}}{3x+6}$ et $v(x) = x^3$.
La fonction u est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$ et la fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_{f'} = \left]-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$.
f est de la forme $v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec
$u'(x) = \dfrac{\dfrac{4}{2\sqrt{4x+1}}(3x+6) - 3\sqrt{4x+1}}{(3x+6)^2} = \dfrac{2(3x+6)-3(4x+6)}{\sqrt{4x+1}(3x+6)^2}$ soit
$u'(x) = \dfrac{-6x+9}{\sqrt{4x+1}(3x+6)^2} = \dfrac{3(-2x+3)}{\sqrt{4x+1}(3x+6)^2}$ et $v'(x) = 3x^2$. D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = 3 \times \dfrac{3(-2x+3)}{\sqrt{4x+1}(3x+6)^2} \times \left(\dfrac{\sqrt{4x+1}}{3x+6}\right)^2 = \dfrac{9(-2x+3)(4x+1)}{\sqrt{4x+1}(3x+6)^4}$.

2. $f(x) = \left(\dfrac{e^{5x-8}}{x^2-7x+12}\right)^4$ définie sur $I = \mathbb{R}\backslash\{3;4\}$. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \dfrac{e^{5x-8}}{x^2-7x+12}$ et $v(x) = x^4$. La fonction u est dérivable

sur $\mathbb{R}\backslash\{3;4\}$ et la fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{3;4\}$. f est de la forme $v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = \dfrac{5\mathrm{e}^{5x-8}(x^2-7x+12) - \mathrm{e}^{5x-8}(2x-7)}{(x^2-7x+12)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{5x-8}(5x^2-35x+60-2x+7)}{(x^2-7x+12)^2}$ soit $u'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{5x-8}(5x^2-37x+67)}{(x^2-7x+12)^2}$ et $v'(x) = 4x^3$.
D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = 4 \times \dfrac{\mathrm{e}^{5x-8}(5x^2-37x+67)}{(x^2-7x+12)^2} \times \left(\dfrac{\mathrm{e}^{5x-8}}{x^2-7x+12}\right)^3$ soit $f'(x) = \dfrac{4(5x^2-37x+67)\left(\mathrm{e}^{5x-8}\right)^4}{(x^2-7x+12)^5} = \dfrac{4(5x^2-37x+67)\mathrm{e}^{20x-32}}{(x^2-7x+12)^5}$.

Corrigé exercice 45 :

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+4}{5-x}}$ définie sur $I = [-2;5[$. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \dfrac{2x+4}{5-x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ et positive sur I. La fonction v est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc $\mathcal{D}_{f'} = [-2;5[$. f est de la forme $v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = \dfrac{2(5-x)-(-1)(2x+4)}{(5-x)^2} = \dfrac{14}{(5-x)^2}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

   D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{14}{(5-x)^2} \times \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x+4}{5-x}}} = \dfrac{7\sqrt{5-x}}{(5-x)^2\sqrt{2x+4}}$.

2. $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^x(x^2-4x+15)}$ définie sur $I = \mathbb{R}$. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \mathrm{e}^x(x^2-4x+15)$ et $v(x) = \sqrt{x}$. La fonction u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et la fonction v est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$. f est de la forme $v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = \mathrm{e}^x(x^2-4x+15) + \mathrm{e}^x(2x-4) = \mathrm{e}^x(x^2-2x+11)$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

   D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x^2-2x+11)}{2\sqrt{\mathrm{e}^x(x^2-4x+15)}}$.

Corrigé exercice 46 :

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{(5x-8)^4}{4-x^2}}$ définie sur $I =]-2;2[$.

   f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \dfrac{(5x-8)^4}{4-x^2}$ et $v(x) = \sqrt{x}$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$ et la fonction v est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc $\mathcal{D}_{f'} =]-2;2[$.

f est de la forme $v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec :

$$\begin{aligned}u'(x) &= \frac{4 \times 5(5x-8)^3(4-x^2) - (-2x)(5x-8)^4}{(4-x^2)^2}\\ &= \frac{(5x-8)^3\left[20(4-x^2) + 2x(5x-8)\right]}{(4-x^2)^2}\\ &= \frac{(5x-8)^3(-10x^2-16x+80)}{(4-x^2)^2}\\ &= \frac{2(5x-8)^3(-5x^2-8x+40)}{(4-x^2)^2}\end{aligned}$$

et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2(5x-8)^3(-5x^2-8x+40)}{(4-x^2)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{(5x-8)^4}{4-x^2}}}\\ &= \frac{(5x-8)^3(-5x^2-8x+40)\sqrt{4-x^2}}{(4-x^2)^2(5x-8)^2}\\ &= \frac{(5x-8)(-5x^2-8x+40)\sqrt{4-x^2}}{(4-x^2)^2}.\end{aligned}$$

2. $f(x) = \sqrt{(-x^2+3x+40)\mathrm{e}^{-x^2-5x}}$ définie sur $I = [-5;8]$. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = (-x^2+3x+40)\mathrm{e}^{-x^2-5x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction v est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc $\mathcal{D}_{f'} =]-5;8[$. f est de la forme $v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec
   $u'(x) = (-2x+3)\mathrm{e}^{-x^2-5x} + (-x^2+3x+40)(-2x-5)\mathrm{e}^{-x^2-5x}$
   $= \mathrm{e}^{-x^2-5x}(-2x+3+2x^3+5x^2-6x^2-15x-80x-200)$
   $= \mathrm{e}^{-x^2-5x}(2x^3-x^2-97x-197)$
   et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
   D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2-5x}(2x^3-x^2-97x-197)}{2\sqrt{(-x^2+3x+40)\mathrm{e}^{-x^2-5x}}}$.

Corrigé exercice 47 :

1. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ définie sur $I = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et la fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. f est de la forme $v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

2. $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{-9x+3}}$ définie sur $I = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right]$. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \sqrt{-9x+3}$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. La fonction u est dérivable sur $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$ et la fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_{f'} = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$. f est de la forme $v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = \dfrac{-9}{2\sqrt{-9x+3}}$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{-9\mathrm{e}^{\sqrt{-9x+3}}}{2\sqrt{-9x+3}}$.

Corrigé exercice 48 :

1. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{4x+7}}{x+5}}$ définie sur $I = \left[-\frac{7}{4}; +\infty\right[$. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \dfrac{\sqrt{4x+7}}{x+5}$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. La fonction u est dérivable sur $\left]-\frac{7}{4}; +\infty\right[$ et la fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_{f'} = \left]-\frac{7}{4}; +\infty\right[$. f est de la forme $v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = \dfrac{\frac{4}{2\sqrt{4x+7}} \times (x+5) - \sqrt{4x+7} \times 1}{(x+5)^2}$ soit $u'(x) = \dfrac{\frac{2(x+5)-(4x+7)}{\sqrt{4x+7}}}{(x+5)^2} = \dfrac{-2x+3}{\sqrt{4x+7}(x+5)^2}$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{-2x+3}{\sqrt{4x+7}(x+5)^2} \times \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{4x+7}}{x+5}}$.

2. $f(x) = \mathrm{e}^{(x-4)^3\sqrt{-4x+2}}$ définie sur $I = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = (x-4)^3\sqrt{-4x+2}$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. La fonction u est dérivable sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ et la fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_{f'} = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$. f est de la forme $v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec

$u'(x) = 3(x-4)^2\sqrt{-4x+2} + (x-4)^3 \times \dfrac{-4}{2\sqrt{-4x+2}}$

$u'(x) = \dfrac{6(x-4)^2(-4x+2) - 4(x-4)^3}{2\sqrt{-4x+2}}$

$u'(x) = \dfrac{(x-4)^2(-24x+12-4x+16)}{2\sqrt{-4x+2}} = \dfrac{(x-4)^2(-28x+28)}{2\sqrt{-4x+2}}$

donc $u'(x) = \dfrac{(x-4)^2(-14x+14)}{\sqrt{-4x+2}}$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.

D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{(x-4)^2(-14x+14)}{\sqrt{-4x+2}} \times \mathrm{e}^{(x-4)^3\sqrt{-4x+2}}$.

Corrigé exercice 49 :

1. p est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et toutes ses dérivées sont également dérivables. Pour tout réel x, on a alors :

   $p'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 4$

   $p''(x) = 20x^3 - 24x^2 + 18x$

   $p^{(3)}(x) = 60x^2 - 48x + 18$

   $p^{(4)}(x) = 120x - 48$

   $p^{(5)}(x) = 120$.

2. a. On effectue quelques essais : $p_n(x) = x^n$, $p_n'(x) = n \times x^{n-1}$, $p_n''(x) = n(n-1) \times x^{n-2}$, $p_n^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2) \times x^{n-3}$ etc.
   On peut conjecturer que $p_n^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \times x^{n-k}$.

   b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note P_k la proposition :
   « $p_n^{(k)} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \times x^{n-k}$ ».
   On souhaite démontrer que P_k est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   Initialisation : Pour $k = 1$. $p_n'(x) = nx^{n-1}$ ce qui est bien égal à $(n-1+1) \times x^{n-1}$ donc P_1 est vraie.
   Hérédité : On considère un entier naturel ℓ quelconque tel que P_ℓ est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que :
   $p_n^{(\ell)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots(n-\ell+1) \times x^{n-\ell}$.
   On souhaite démontrer que $P_{\ell+1}$ est vraie donc que :
   $p_n^{(\ell+1)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots(n-(\ell+1)+1) \times x^{n-(\ell+1)}$.
   Par hypothèse de récurrence, $p_n^{(\ell)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots(n-\ell+1) \times x^{n-\ell}$.
   D'où $p_n^{(\ell+1)}(x) = \left(p_n^{(\ell)}(x)\right)' = n(n-1)(n-2)\dots(n-\ell+1) \times (x^{n-\ell})'$ d'où $p_n^{(\ell+1)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots(n-\ell+1)(n+\ell) \times (x^{n-\ell-1})$.
   Ainsi, P_1 est vraie et, pour tout entier ℓ, lorsque P_ℓ est vraie, alors $P_{\ell+1}$ est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, P_k est vraie donc $p_n^{(k)} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \times x^{n-k}$.

3. La dérivée d'ordre 5 de x^8 est $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times x^3 = 6720x^2$.

   La dérivée d'ordre 5 de x^6 est $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times x = 720x$

   La dérivée d'ordre 5 de x^3 est égale à 0.

   Donc $f^{(5)}(x) = 13\,440x^3 - 720x$.

Corrigé exercice 50 :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

f' est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et comme $f'(x) = -\left(\frac{1}{x-1}\right)^2$, f' est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \frac{1}{x-1}$ et $v(x) = -x^2$. f' est de la forme $v \circ u$ donc $f'' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ et $v'(x) = -2x$.

Donc $f''(x) = -2 \times \left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) \times \frac{1}{x-1} = \frac{2}{(x-1)^3}$.

f'' est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et comme $f''(x) = 2\left(\frac{1}{x-1}\right)^3$, f'' est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \frac{1}{x-1}$ et $v(x) = 2x^3$. f'' est de la forme $v \circ u$ donc $f^{(3)} = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ et $v'(x) = 6x^2$.

Donc $f^{(3)}(x) = 6 \times \left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) \times \frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{6}{(x-1)^4}$.

$f^{(3)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et comme $f^{(3)}(x) = -6\left(\frac{1}{x-1}\right)^4$, $f^{(3)}$ est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \frac{1}{x-1}$ et $v(x) = -6x^4$. $f^{(3)}$ est de la forme $v \circ u$ donc $f^{(4)} = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ et $v'(x) = -24x^3$.

Donc $f^{(4)}(x) = -24 \times \left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) \times \frac{1}{(x-1)^3} = \frac{24}{(x-1)^5}$.

$f^{(4)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et comme $f^{(4)}(x) = 24\left(\frac{1}{x-1}\right)^5$, $f^{(4)}$ est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \frac{1}{x-1}$ et $v(x) = 24x^5$. $f^{(4)}$ est de la forme $v \circ u$ donc $f^{(5)} = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ et $v'(x) = 120x^4$.

Donc, pour tout réel x, $f^{(5)}(x) = 120 \times \left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) \times \frac{1}{(x-1)^4} = -\frac{120}{(x-1)^6}$.

2. $g(x) = \frac{1}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et $g'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$.

g' est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et comme $g'(x) = -\left(\frac{1}{x+1}\right)^2$, g' est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \frac{1}{x+1}$ et $v(x) = -x^2$. g' est de la forme $v \circ u$ donc $g'' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$ et $v'(x) = -2x$.

Donc $g''(x) = -2 \times \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) \times \frac{1}{x+1} = \frac{2}{(x+1)^3}$.

g'' est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et comme $g''(x) = 2\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^3$, g'' est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et $v(x) = 2x^3$.

g'' est de la forme $v \circ u$ donc $g^{(3)} = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ et $v'(x) = 6x^2$.
Donc $g^{(3)}(x) = 6 \times \left(-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right) \times \dfrac{1}{(x+1)^2} = -\dfrac{6}{(x+1)^4}$.

$g^{(3)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et comme $g^{(3)}(x) = -6\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^4$, $g^{(3)}$ est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et $v(x) = -6x^4$.

$g^{(3)}$ est de la forme $v \circ u$ donc $g^{(4)} = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ et $v'(x) = -24x^3$. Donc $g^{(4)}(x) = -24 \times \left(-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right) \times \dfrac{1}{(x+1)^3} = \dfrac{24}{(x+1)^5}$.

$g^{(4)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et comme $g^{(4)}(x) = 24\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^5$, $g^{(4)}$ est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et $v(x) = 24x^5$.

$g^{(4)}$ est de la forme $v \circ u$ donc $g^{(5)} = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ et $v'(x) = 120x^4$.
Donc $g^{(5)}(x) = 120 \times \left(-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right) \times \dfrac{1}{(x+1)^4} = -\dfrac{120}{(x+1)^6}$.

3. $h(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$.

   a. On pose $h(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1} = \dfrac{a(x-1)+b(x+1)}{(x+1)(x-1)}$ donc, pour tout réel x, $h(x) = \dfrac{(a+b)x+(a-b)}{x^2-1}$.
   Par identification des coefficients, on obtient $a+b=2$ et $a-b=0$ soit $a=b=1$. Donc, pour tout réel x, $h(x) = f(x) + g(x)$.

   b. On en déduit que, pour tout réel x :
   $h^{(5)}(x) = f^{(5)}(x) + g^{(5)}(x)$ soit $h^{(5)}(x) = -\dfrac{120}{(x-1)^6} - \dfrac{120}{(x+1)^6}$.

Corrigé exercice 51 :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$ est définie sur $]a;+\infty[$.

   f est dérivable sur $]a;+\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-a)^2}$.

   f' est dérivable sur $]a;+\infty[$ et comme $f'(x) = -\left(\dfrac{1}{x-a}\right)^2$, f' est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \dfrac{1}{x-a}$ et $v(x) = -x^2$.

f' est de la forme $v \circ u$ donc $f'' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = -\dfrac{1}{(x-a)^2}$ et $v'(x) = -2x$.
Donc $f''(x) = -2 \times \left(-\dfrac{1}{(x-a)^2}\right) \times \dfrac{1}{x-a} = \dfrac{2}{(x-a)^3}$.

f'' est dérivable sur $]a;+\infty[$ et comme $f''(x) = 2\left(\dfrac{1}{x-a}\right)^3$, f'' est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \dfrac{1}{x-a}$ et $v(x) = 2x^3$.

f'' est de la forme $v \circ u$ donc $f^{(3)} = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = -\dfrac{1}{(x-a)^2}$ et $v'(x) = 6x^2$.
Donc $f^{(3)}(x) = 6 \times \left(-\dfrac{1}{(x-a)^2}\right) \times \dfrac{1}{(x-a)^2} = -\dfrac{6}{(x-a)^4}$.

$f^{(3)}$ est dérivable sur $]a;+\infty[$ et comme $f^{(3)}(x) = -6\left(\dfrac{1}{x-a}\right)^4$, $f^{(3)}$ est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \dfrac{1}{x-a}$ et $v(x) = -6x^4$.

$f^{(3)}$ est de la forme $v \circ u$ donc $f^{(4)} = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = -\dfrac{1}{(x-a)^2}$ et $v'(x) = -24x^3$. Donc $f^{(4)}(x) = -24 \times \left(-\dfrac{1}{(x-a)^2}\right) \times \dfrac{1}{(x-a)^3} = \dfrac{24}{(x-a)^5}$.

2. a. On conjecture que, pour tout réel $x \neq a$,
$f^{(n)}(x) = (-1)^n \times \dfrac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \times 1}{(x-a)^{n+1}} = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P_n la proposition
« $f^{(n)}(x) = (-1)^n \times \dfrac{n(n-1)(n-2)\dots 3 \times 2 \times 1}{(x-a)^{n+1}}$ ».
On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation : Pour $n = 1$. $f'(x) = -\left(\dfrac{1}{x-a}\right)^2$ qui est bien égal à
$\dfrac{(-1)^1 \times 1}{(x-a)^{1+1}} = -\left(\dfrac{1}{x-a}\right)^2$.
Hérédité : On considère un entier naturel non nul k quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que, pour tout réel $x \neq a$:
$f^{(k)}(x) = (-1)^k \times \dfrac{k(k-1)(k-2)\dots 3 \times 2 \times 1}{(x-a)^{k+1}}$.
On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie donc que $f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \times \dfrac{(k+1)k(k-1)\dots 3 \times 2 \times 1}{(x-a)^{k+2}}$. Par hypothèse de récurrence, $f^{(k)}(x) = (-1)^k \times \dfrac{k(k-1)(k-2)\dots 3 \times 2 \times 1}{(x-a)^{k+1}}$ que l'on peut écrire $f^{(k)}(x) = (-1)^k \times k(k-1)(k-2)\dots 3 \times 2 \times 1 \times \left(\dfrac{1}{x-a}\right)^{k+1}$. On pose $h(x) = \left(\dfrac{1}{x-a}\right)^{k+1}$. h est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = \dfrac{1}{x-a}$ et $v(x) = x^{k+1}$. h est de la

forme $v \circ u$ donc $h' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = -\dfrac{1}{(x-a)^2}$ et $v'(x) = (k+1)x^k$.
Donc $h'(x) = (k+1) \times \left(-\dfrac{1}{(x-a)^2}\right) \times \dfrac{1}{(x-a)^k} = -(k+1)\dfrac{1}{(x-a)^{k+2}}$ donc $f^{(k+1)}(x) = (-1)^k \times k(k-1)(k-2)\dots 3 \times 2 \times 1 \times (-(k+1)) \times \left(\dfrac{1}{x-a}\right)^{k+2}$ soit $f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \times \dfrac{(k+1)k(k-1)\dots 3 \times 2 \times 1}{(x-a)^{k+2}}$. Ainsi, P_1 est vraie et, pour tout entier naturel k non nul, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie donc, pour tout réel $x \neq a$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n \times \dfrac{n(n-1)(n-2)\dots 3 \times 2 \times 1}{(x-a)^{n+1}}$.

3. $g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ est définie sur $]1;+\infty[$.

   a. On pose $g(x) = \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$ donc
   $g(x) = \dfrac{b(x+1)+c(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{(b+c)x+(b-c)}{x^2-1}$.
   Par identification des coefficients, on obtient $b+c=0$ et $b-c=1$ donc $b = \dfrac{1}{2}$ et $c = -\dfrac{1}{2}$. Donc $g(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x+1}$.

   b. Si on pose $p(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et $q(x) = \dfrac{1}{x+1}$, on a alors $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(p(x) - q(x)\right)$.
   Donc $g^{(4)}(x) = \dfrac{1}{2}\left(p^{(4)}(x) - q^{(4)}(x)\right)$. D'après la question précédente $p^{(4)}(x) = \dfrac{24}{(x-1)^5}$ et $q^{(4)}(x) = \dfrac{24}{(x+1)^5}$. Donc $g^{(4)}(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{24}{(x-1)^5} - \dfrac{24}{(x+1)^5}\right) = \dfrac{12}{(x-1)^5} - \dfrac{12}{(x+1)^5}$.

Corrigé exercice 52 :

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 + \dfrac{3}{2}x - 10\right)^2$.

1. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = x^2 + \dfrac{3}{2}x - 10$ et $v(x) = x^2$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. f est de la forme $v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = 2x + \dfrac{3}{2}$ et $v'(x) = 2x$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\left(2x + \dfrac{3}{2}\right)\left(x^2 + \dfrac{3}{2}x - 10\right)$.

   On étudie le signe de $f'(x)$: $x \mapsto 2x + \dfrac{3}{2}$ est une fonction affine croissante qui s'annule en $-\dfrac{3}{4}$. Elle est négative jusqu'à $-\dfrac{3}{4}$ puis positive. On calcule le discriminant de $x^2 + \dfrac{3}{2}x - 10$ et on obtient $\Delta = \dfrac{9}{4} - 4 \times (-10) = \dfrac{169}{4} > 0$. Le polynôme a donc deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-\frac{3}{2} - \frac{13}{2}}{2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-\frac{3}{2} + \frac{13}{2}}{2} = \dfrac{5}{2}$. Le polynôme est du signe de $a = 1$ donc positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur. On en déduit le tableau de signes suivant.

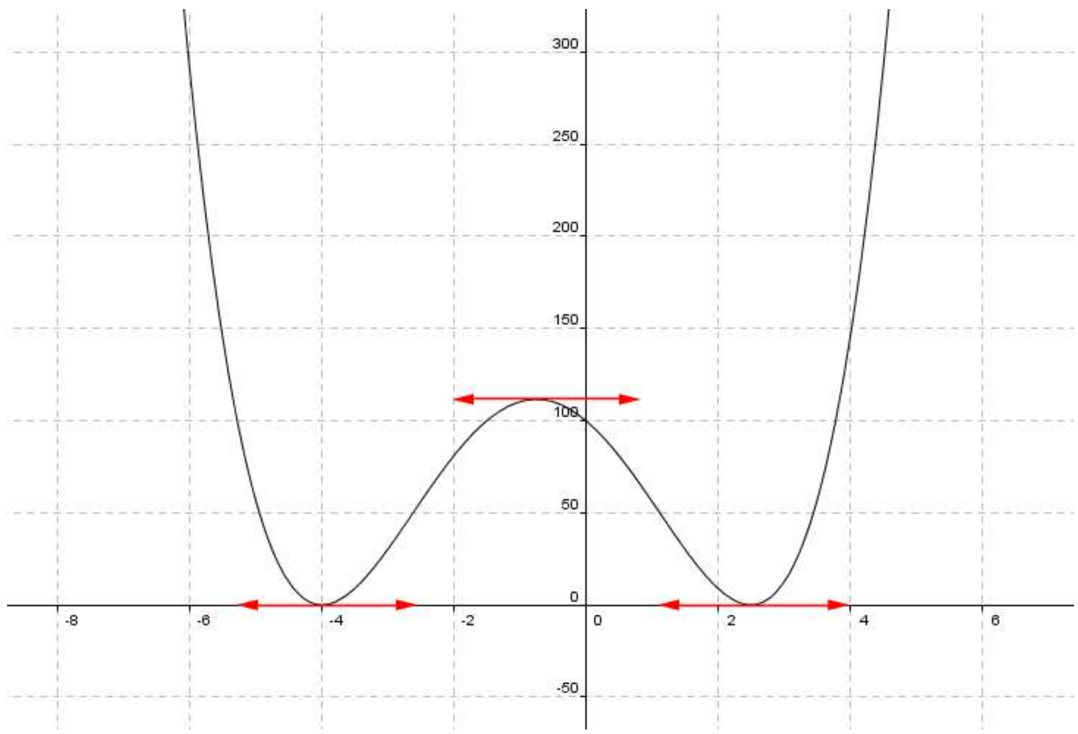
x	$-\infty$		-4		$-\frac{3}{4}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2\left(2x+\frac{3}{2}\right)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\left(x^2+\frac{3}{2}x-10\right)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Le tableau de variations de f est donc :

x	$-\infty$		-4		$-\frac{3}{4}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↘	0	↗	$\frac{28561}{256}$	↘	0	↗	

3. Les tangentes sont horizontales lorsque la fonction admet un maximum ou un minimum donc en -4 ; $-\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{2}$.

4. On obtient la courbe suivante.



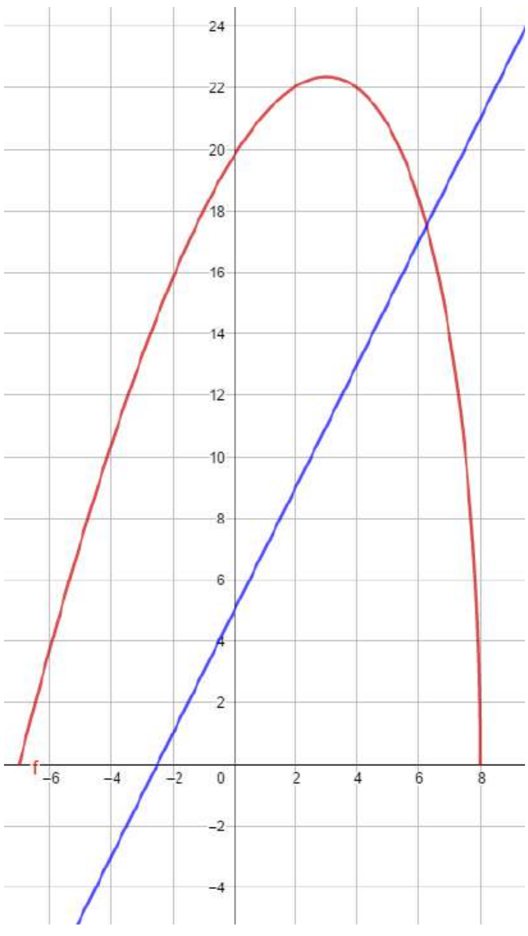
Corrigé exercice 53 :

1. $g = v \circ u$ avec $u(x) = -x^3 - 6x^2 + 63x + 392$ et $v(x) = \sqrt{x}$ donc $g' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = -3x^2 - 12x + 63$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc, pour tout $x \in]-7;8]$, $g'(x) = \dfrac{-3x^2 - 12x + 63}{2\sqrt{-x^3 - 6x^2 + 63x + 392}} = \dfrac{-3(x^2 + 4x - 21)}{2\sqrt{-x^3 - 6x^2 + 63x + 392}}$.

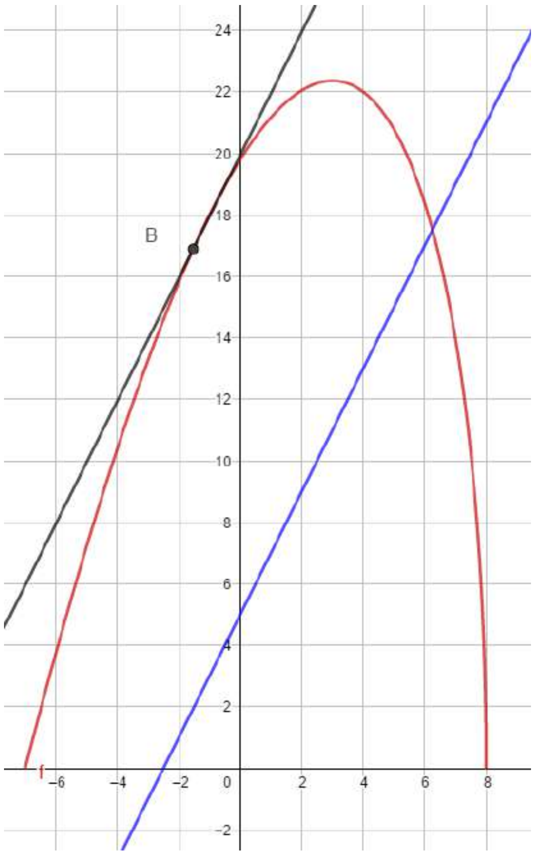
2. $2\sqrt{-x^3 - 6x^2 + 63x + 392} > 0$ pour tout $x \in]-7;8]$ donc $g'(x)$ est du signe de $-3(x^2+4x-21)$. On calcule le discriminant de ce trinôme : $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-21) = 100$. Ce trinôme admet un discriminant positif donc admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{100}}{2} = -7$ et $x_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{100}}{2} = 3$.
   Donc $g'(x)$ est négative sur $[3;8]$ et positive sur $]-7;3]$.

x	-7		3		8
$g'(t)$	0	$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$10\sqrt{5}$	$\searrow$	0

3. a. On obtient la courbe ci-dessous.



b. Graphiquement, on peut conjecturer que l'abscisse du point où la tangente est parallèle à d est environ -1.



4. a. Une équation de la tangente en a est $y = g'(a) \times (x - a) + g(a)$, c'est-à-dire $y = \dfrac{-3(a^2 + 4a - 21)}{2\sqrt{-a^3 - 6a^2 + 63a + 392}}(x - a) + \sqrt{-a^3 - 6a^2 + 63a + 392}$.

b. On a, pour tout $a \in]-7;8[$:
$\sqrt{(-a + 8)(a + 7)^2} = \sqrt{(-a + 8)(a^2 + 14a + 49)}$
$= \sqrt{-a^3 - 14a^2 - 49a + 8a^2 + 111a + 392}$
$= \sqrt{-a^3 - 6a^2 + 63a + 392} = g(a)$.
Et, pour tout $a \in]-7;8[$:
$-3(a + 7)(a - 3) = -3(a^2 - 3a + 7a - 21) = -3a^2 - 12a + 63$.

c. La tangente est parallèle à d si les coefficients directeurs de ces deux droites sont égaux donc si $\dfrac{-3(a^2 + 4a - 21)}{2\sqrt{-a^3 - 6a^2 + 63a + 392}} = 2$ avec $a \neq -7$ et $a \neq 8$ qui annulent le dénominateur.
Or $\dfrac{-3(a^2 + 4a - 21)}{2\sqrt{-a^3 - 6a^2 + 63a + 392}} = \dfrac{-3(a + 7)(a - 3)}{2\sqrt{(-a + 8)(a + 7)^2}}$, d'après la question précédente, d'où $\dfrac{-3(a^2 + 4a - 21)}{2\sqrt{-a^3 - 6a^2 + 63a + 392}} = \dfrac{-3(a - 3)}{2\sqrt{(-a + 8)}}$.
On cherche donc à résoudre l'équation $\dfrac{-3(a - 3)}{2\sqrt{-a + 8}} = 2$ c'est-à-dire $-3a + 9 = 4\sqrt{-a + 8}$ et donc $(-3a + 9)^2 = 16(-a + 8)$ ce qu'on peut réécrire $9a^2 - 38a - 47 = 0$.

Ce trinôme du second degré a pour discriminant$\Delta = (-38)^2 - 4 \times 9 \times (-47) = 3136 > 0$ donc il admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{38 + \sqrt{3136}}{18} = \dfrac{47}{9}$ et $x_2 = \dfrac{38 - \sqrt{3136}}{18} = -1$.

On teste les solutions obtenues : $f'\left(\dfrac{47}{9}\right) = -2$ donc $\dfrac{47}{9}$ n'est pas solution de l'équation que l'on cherchait à résoudre, mais on a bien $f'(-1) = 2$, on en déduit que la tangente à la courbe représentative de f est parallèle à d en $x = -1$.

Corrigé exercice 54 :

La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{-x^2+x+1}$.

1. h est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = -x^2 + x + 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$

   Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   h est de la forme $v \circ u$ donc $h' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = -2x + 1$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.

   D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = (-2x + 1)\mathrm{e}^{-x^2+x+1}$.

   Comme $\mathrm{e}^{-x^2+x+1} > 0$, le signe de $h'(x)$ est celui de $-2x + 1$ qui est négative jusqu'à $\dfrac{1}{2}$ puis positive.

2. On obtient alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h		$\nearrow$	$e^{\frac{5}{4}}$	$\searrow$	

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On détermine une équation de la tangente en a, $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ soit :

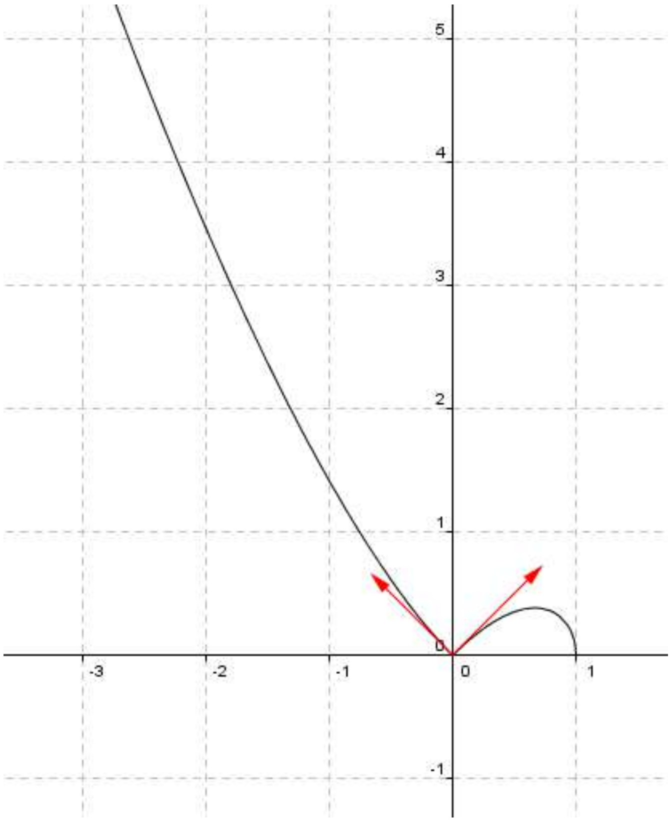
   $y = (-2a+1)\mathrm{e}^{-a^2+a+1}(x-a)+\mathrm{e}^{-a^2+a+1} = (-2a+1)\mathrm{e}^{-a^2+a+1}x+\mathrm{e}^{-a^2+a+1}(2a^2-a+1)$.

   Cette tangente est parallèle à la droite d'équation $y = \mathrm{e} \times x$ si les coefficients directeurs sont égaux.

   On résout donc $(-2a + 1)\mathrm{e}^{-a^2+a+1} = \mathrm{e}$ ce qui donne les équations $-a^2 + a + 1 = 1$ ($a = 0$ ou $a = 1$) et $-2a + 1 = 1$ ($a = 0$). On a ainsi $a = 0$.

   La tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = 0$ est parallèle à la droite d'équation $y = \mathrm{e} \times x$.

4. On obtient alors la courbe suivante.



Corrigé exercice 55 :

$f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$ définie sur $]-\infty; 1]$.

1. Taux d'accroissement : Pour tout $h \neq 0$, $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h^2 - h^3}}{h} = \dfrac{\sqrt{h^2(1-h)}}{h}$ donc $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{|h|\sqrt{1-h}}{h}$.

   Si $h > 0$, le taux d'accroissement est $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{h\sqrt{1-h}}{h} = \sqrt{1-h}$. Sa limite quand h tend vers 0 en restant positif est donc 1. Le nombre dérivé à droite de 0 est donc 1.

   Si $h < 0$, le taux d'accroissement est $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{-h\sqrt{1-h}}{h} = -\sqrt{1-h}$. Sa limite quand h tend vers 0 en restant négatif est donc -1. Le nombre dérivé à droite de 0 est donc -1.

2. f est la composée des fonctions u et v définies par $u(x) = x^2 - x^3$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

   La fonction u est dérivable et strictement positive sur $]-\infty; 0[\cup]0; 1[$ et la fonction v est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc $\mathcal{D}_{f'} =]-\infty; 0[\cup]0; 1[$.

   f est de la forme $v \circ u$ donc $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = 2x - 3x^2$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

   D'où, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{2x - 3x^2}{2\sqrt{x^2 - x^3}}$.

3. Comme $2\sqrt{x^2 - x^3} > 0$, le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $2x - 3x^2 = x(2-3x)$ qui s'annule en 0 et $\frac{2}{3}$.
   On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		1
x		$-$	0	$+$		$+$	
$2-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

Corrigé exercice 56 :

$f(x) = (\sqrt{x+1})\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ définie sur $]0; +\infty[$.

1. f est un produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ donc elle est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + (\sqrt{x+1}) \times \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - (\sqrt{x+1}) \times \frac{1}{2x\sqrt{x}} \\
&= \frac{x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}\sqrt{x+1}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - \frac{\sqrt{x+1}\sqrt{x+1}}{2x\sqrt{x}\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{x\sqrt{x} + x - x - 1}{2x\sqrt{x^2+x}} \\
&= \frac{x\sqrt{x} - 1}{2x\sqrt{x^2+x}}
\end{aligned}$$

2. Comme $x > 0$, on sait que $2x\sqrt{x^2+x} > 0$, le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $x\sqrt{x} - 1$. Si $x \in]0;1[$, on sait que $\sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow x\sqrt{x} < x < 1 \Leftrightarrow x\sqrt{x} - 1 < 0$. Si $x \in [1; +\infty[$, on sait que $\sqrt{x} \geqslant 1 \Leftrightarrow x\sqrt{x} \geqslant x \geqslant 1 \Leftrightarrow x\sqrt{x} - 1 \geqslant 0$. On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	

3. Le minimum de f sur $]0;+\infty[$ est $2\sqrt{2}$.

4. Pour tous réels $a>0$ et $b>0$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right) &= \sqrt{b\left(\frac{a}{b}+1\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\\ &= \sqrt{\frac{a}{b}+1}\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}+1}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+1\right)\\ &= f\left(\frac{a}{b}\right)\end{aligned}$$

D'après la question précédente, le minimum étant $2\sqrt{2}$, on a $f\left(\frac{a}{b}\right) \geqslant 2\sqrt{2}$.

On a donc $\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right) \geqslant 2\sqrt{2}$.

Corrigé exercice 57 :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}\times \mathrm{e}^{x+3}$. f est le produit des fonctions $u(x)=\sqrt{x^2+2x+5}$ et $v(x)=\mathrm{e}^{x+3}$. u est la composée $u=q\circ p$ avec $p(x)=x^2+2x+5$ (toujours strictement positive sur $\mathbb{R}$) et $q(x)=\sqrt{x}$. Donc $u'=p'\times q'\circ p$ avec $p'(x)=2x+2$ et $q'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

   Ainsi, $u'(x)=\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

   Et on a $v'(x)=\mathrm{e}^{x+3}$ d'où $f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\times \mathrm{e}^{x+3}+\sqrt{x^2+2x+5}\times \mathrm{e}^{x+3}$ soit :

   $f'(x)=\mathrm{e}^{x+3}\times\dfrac{x+1+x^2+2x+5}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\dfrac{(x^2+3x+6)\mathrm{e}^{x+3}}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

   Cette affirmation est donc fausse.

2. g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x^3-5x^2+8x-4)^2$.

   g est la composée $v\circ u$ avec $u(x)=x^3-5x^2+8x-4$ et $v(x)=x^2$ donc $g'=u'\times v'\circ u$ avec $u'(x)=3x^2-10x+8$ et $v'(x)=2x$ et ainsi, pour tout réel x, $g'(x)=2(3x^2-10x+8)(x^3-5x^2+8x-4)$. g' est un produit de fonctions donc $g''(x)=2(6x-10)(x^3-5x^2+8x-4)+2(3x^2-10x+8)(3x^2-10x+8)$ et ainsi $g''(2)=2\times 2\times(8-20+16-4)+2\times(12-20+8)=0$.

   Cette affirmation est donc vraie.

3. h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{-2x^+4x-6}$.

   La pente de la tangente en 1 est le nombre dérivé en 1.

   h est la composée $v \circ u$ avec $u(x) = -2x^2 + 4x - 6$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. Donc$h' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = -4x + 4$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$et, pour tout réel x, $h'(x) = (-4x+4)\mathrm{e}^{-2x+4x-6}$.

   D'où $h'(1) = 0$ et la tangente en 1 est donc bien horizontale.

   Cette affirmation est donc vraie.

Corrigé exercice 58 :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$.

   $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est la composée $v \circ u$ avec $u(x) = 1 + x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$. La dérivée est de la forme $u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

   La dérivée de $\sqrt{1+x^2}$ est donc $\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ d'où $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. Pour tout réel x, $\sqrt{1+x^2} \times f'(x) = \sqrt{1+x^2}\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \sqrt{1+x^2} + x = f(x)$.

3. Pour tout réel x, $f''(x) = \dfrac{1 \times \sqrt{1+x^2} - x \times \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \dfrac{(1+x^2) - x^2}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)}$ soit $f''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)}$.

4. Ainsi, pour tout réel x, $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x)$

   $$= (1+x^2) \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)} + x\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

   $$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + x + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - x - \sqrt{1+x^2}$$

   $$= \frac{1 + x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

Corrigé exercice 59 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + x\mathrm{e}^{-x}$.

1. a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée, produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, $f'(x) = 1 + 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times (-\mathrm{e}^{-x}) = 1 + (1-x)\mathrm{e}^{-x}$. De même, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,
   $f''(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (1-x)(-\mathrm{e}^{-x}) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $f''(x)$ est du signe de $x - 2$ qui est négatif que $]-\infty; 2]$ puis positif sur $[2; +\infty[$.

   c. On en déduit le tableau de variations de f' :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$	$1-\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	

d. Le minimum de f' est donc $1-\mathrm{e}^{-2} \approx 0,86 > 0$ donc, pour tout réel x, $f'(x) > 0$.

e. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f'		$\nearrow$	

2. a. Pour tout réel x, $f(x)-(x+1) = x\mathrm{e}^{-x}$. Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$, $f(x)-(x+1)$ est du signe de x donc négatif sur $]-\infty;0]$ et positif sur $[0;+\infty[$. On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{D}$ sur $]-\infty;0]$ et au-dessous sur $[0;+\infty[$. $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ se coupent au point d'abscisse $x=0$.

   b. On cherche l'abscisse a du point A où la tangente est parallèle à $\mathcal{D}$. On a alors $f'(a) = 1 \Leftrightarrow 1+(1-a)\mathrm{e}^{-a} = 1 \Leftrightarrow a = 1$. Le point A a donc pour coordonnées $(1;2+\mathrm{e}^{-1})$.

Corrigé exercice 60 :

1. On note $x = HM$. Comme $BH = 15$ et que B, H et M alignés, on a $BM = 15-x$. Dans le triangle AHM rectangle en H (car H est le projeté orthogonal de A sur la côte rectiligne), on a d'après le théorème de Pythagore :$AH^2 + HM^2 = AM^2$ soit $AM = \sqrt{81+x^2}$.

2. On sait que $t = \dfrac{d}{v}$ où t est le temps exprimé en heure, d la distance en kilomètre et v la vitesse en km.h^{-1}.

   Pour le trajet AM en barque, le temps de parcours est : $t_1 = \dfrac{AM}{v_1} = \dfrac{\sqrt{81+x^2}}{4}$.

   Pour le trajet MB à pieds, le temps de parcours est : $t_2 = \dfrac{MB}{v_2} = \dfrac{15-x}{6}$.

3. a. On a donc, pour tout $x \in [0;15]$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{81+x^2}}{4} + \dfrac{15-x}{6}$.

b. La fonction f est dérivable sur $[0;15]$ et, pour tout réel x de cet intervalle, $f'(x) = \frac{1}{4} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+81}} - \frac{1}{6} = \frac{x}{4\sqrt{x^2+81}} - \frac{1}{6}$.
Pour étudier le signe de $f'(x)$, on résout l'inéquation $\frac{x}{4\sqrt{x^2+81}} \geqslant \frac{1}{6}$ qui équivaut à $6x \geqslant 4\sqrt{x^2+81}$. Comme x est positif, on a $36x^2 \geqslant 16(x^2+81) \Leftrightarrow 20x^2 \geqslant 1\,296 \Leftrightarrow x^2 \geqslant \frac{324}{5} \Leftrightarrow x \geqslant \frac{18\sqrt{5}}{5}$ (car $x \in [0;15]$). Ainsi, f est décroissante sur $\left[0;\frac{18\sqrt{5}}{5}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{18\sqrt{5}}{5};15\right]$.

c. Le temps minimal est donc atteint pour $x = \frac{18\sqrt{5}}{5} \approx 8,05$ km soit 8 050 m et ce temps est d'environ 4 heures et 11 minutes.

Corrigé exercice 61 :

1. f est le produit de fonctions dérivables sur $]-1;1[$, elle est donc dérivable sur $]-1;1[$. D'une part, la dérivée de la fonction $x \mapsto x$ est la fonction $x \mapsto 1$. D'autre part, la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ est la composée de la fonction $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ par la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, ainsi sa fonction dérivée est définie sur $]-1:1[$ par l'expression
$\frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}$.
D'où, pour tout $x \in]-1;1[$, $f'(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{x}{(1-x)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}$, c'est-à-dire $f'(x) = \frac{-x^2+x+1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

2. Comme $\sqrt{1-x^2} > 0$, le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $\frac{-x^2+x+1}{1-x}$. Le discriminant de $-x^2+x+1$ vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5$. Comme $\Delta > 0$, le polynôme $-x^2+x+1$ admet deux racines réelles : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62 > 1$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,62$. Le trinôme est donc négatif sur $\left[-1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$ et positif sur $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};1\right]$.

3. On en déduit le tableau de variations suivant.

x	-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		1
$1-x$		$+$		$+$	0
$-x^2+x+1$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	||
Variations de f	0	$\searrow$	≈ -0.30	$\nearrow$	||

4. Une équation de la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est de la forme : $y = f'(0) \times x + f(0)$. Or, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ donc une équation de cette tangente est $y = x$.

Corrigé exercice 62 :

1. g est le produit uv de deux fonctions dérivables sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, elle est donc dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$. On a d'une part $u(x) = 5x+7$ donc $u'(x) = 5$. Et d'autre part $v(x) = \sqrt{x^2-1}$ est la composée de la fonction p définie par $p(x) = x^2-1$ par la fonction q définie par $q(x) = \sqrt{x}$, d'où $v'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. Ainsi, pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $g'(x) = 5\sqrt{x^2-1} + \dfrac{x(5x+7)}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{10x^2+7x-5}{\sqrt{x^2-1}}$.

2. Comme $\sqrt{x^2-1} > 0$, $g'(x)$ est du signe de $10x^2+7x-5$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 7^2 - 4 \times 10 \times (-5) = 249$. Comme $\Delta > 0$, ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-7-\sqrt{249}}{20} \approx -1,14$ et $x_2 = \dfrac{-7+\sqrt{249}}{20} \approx 0,44$. Donc $g'(x)$ est positive sur $\left]-\infty; \dfrac{-7-\sqrt{249}}{20}\right]$, négative sur $\left[\dfrac{-7-\sqrt{249}}{20}; -1\right]$ et positive sur $]1; +\infty[$.

3. On en déduit le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		$\frac{-7-\sqrt{249}}{20}$		-1		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$				$+$	
Variations de g		$\nearrow$	≈ 0.71	$\searrow$				$\nearrow$	

4. La tangente est horizontale lorsque la fonction dérivée s'annule. D'après les questions précédentes on a que cette abscisse vaut $\dfrac{-7-\sqrt{249}}{20}$.

Corrigé exercice 63 :

1. h est la composée de la fonction u définie par $u(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ par la fonction v définie par $v(x)=\mathrm{e}^x$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $]-\infty;2[\cup]3;+\infty[$ donc h est dérivable sur $]-\infty;2[\cup]3;+\infty[$.

   La fonction u est elle-même la composée des fonctions $p(x)=x^2-5x+6$ et $q(x)=\sqrt{x}$, d'où $u'(x)=\dfrac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}$. D'autre part, $v'(x)=\mathrm{e}^x$. On en déduit que, pour tout $x\in\mathcal{D}_{f'}$, $h'(x)=\dfrac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2-5x+6}}$.

2. Comme $\mathrm{e}^{\sqrt{x^2-5x+6}}>0$ et $\sqrt{x^2-5x+6}>0$, $h'(x)$ est du signe de $2x-5$. Donc $h'(x)$ est négative sur $]-\infty;2[$ et positive sur $]3;+\infty[$.

3. On en déduit le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		$-$				$+$	
Variations de h		↘				↗	

4. Une équation de T_1 est de la forme : $y=h'(1)\times(x-1)+h(1)$. Or, $h(1)=\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ et $h'(1)=\dfrac{-3}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}=\dfrac{-3\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$, donc T_1 admet pour équation $y=\dfrac{-3\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}(x-1)+\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ soit $y=\dfrac{-3\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}x+\dfrac{-3\sqrt{2}+4}{4}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$.

   Une équation de T_4 est de la forme : $y=h'(4)\times(x-4)+h(4)$. Or, $h(4)=\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ et $h'(4)=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$. Donc T_4 : $y=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}(x-4)+\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ soit t $y=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}x+\dfrac{-12\sqrt{2}+4}{4}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$.

5. On cherche à résoudre $\dfrac{-3\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}x+\dfrac{-3\sqrt{2}+4}{4}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}x+\dfrac{-12\sqrt{2}+4}{4}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$

   $\Leftrightarrow \dfrac{-6\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}x=\dfrac{-15\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$

   $\Leftrightarrow x=\dfrac{15}{6}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$.

   On a alors $y=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\times\dfrac{5}{2}+\dfrac{-12\sqrt{2}+4}{4}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}=\dfrac{\left(8-9\sqrt{2}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}{8}$.

   Les coordonnées de l'intersection de T_1 et T_4 sont donc $\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{\left(8-9\sqrt{2}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}{8}\right)$.

Corrigé exercice 64 :

1. p est le produit de fonctions u et v définies et dérivables sur $[0;+\infty[$ par $u(t) = t^2 + 20t$ et $v(t) = 100\mathrm{e}^{-t-1}$ donc elle est dérivable sur $[0;+\infty[$.

   Et, pour tout $t \in [0;+\infty[$, $u'(t) = 2t + 20$ et $v'(t) = -100\mathrm{e}^{-t-1}$. Donc $p'(t) = 100(2t+20)\mathrm{e}^{-t-1} - 100(t^2+20t)\mathrm{e}^{-t-1} = 100(-t^2-18t+20)\mathrm{e}^{-t-1}$.

2. Comme $100\mathrm{e}^{t-1} > 0$, $p'(t)$ est du signe de $-t^2 - 18t + 20$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = (-18)^2 - 4 \times (-1) \times 20 = 404$. Comme $\Delta > 0$, ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{18-\sqrt{404}}{2\times(-1)} = \dfrac{-18-2\sqrt{101}}{2} = -9+\sqrt{101} \approx 1,05$ et $x_2 = \dfrac{18+\sqrt{404}}{2\times(-1)} = -9-\sqrt{101} \approx -19,05$.

   Ainsi $p'(t)$ est positif sur $\left[0;-9+\sqrt{101}\right]$ et négatif sur $\left[-9+\sqrt{101};+\infty\right[$. Et on en déduit le tableau de variations ci-dessous.

t	-0		$-9+\sqrt{101}$		$+\infty$
Signe de $p'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de p	0	$\nearrow$	≈ 285	$\searrow$	0

3. Le nombre maximal de malades est d'environ 285 au bout d'un peu plus d'une semaine.

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 65 :

1. f est un polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 12x - 1$. f' est un polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 12x^2 + 18x - 12 = 6(2x^2 + 3x - 2)$.

   Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$. Le discriminant étant positif, le trinôme admet donc deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-3-5}{4} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{1}{2}$. $f''(x)$ est positive à l'extérieur de ses racines et négative à l'intérieur.

2. f' est donc croissante sur $]-\infty; -2]$, décroissante sur $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ puis croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

3. f est convexe sur $]-\infty; -2]$ puis concave sur $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Corrigé exercice 66 :

1. On sait que $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

   Donc si $x > 1$, alors $(x-1)^3 > 0$ et si $x < 1$, alors $(x-1)^3 < 0$.

   Donc si $x > 1$, alors $g''(x) > 0$ et si $x < 1$, alors $g''(x) < 0$.

2. Si $x > 1$, alors g est convexe et si $x < 1$, alors g est concave.

Corrigé exercice 67 :

1. h est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = (2x-3)\mathrm{e}^x + (x^2 - 3x + 2)\mathrm{e}^x = (x^2 - x - 1)\mathrm{e}^x$.

   De même, h' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h''(x) = (2x-1)\mathrm{e}^x + (x^2 - x - 1)\mathrm{e}^x = (x^2 + x - 2)\mathrm{e}^x$.

   Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$. Donc $h''(x)$ est du signe de $x^2 + x - 2$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) = 9$. Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$. Donc $h''(x)$ est positif sur $]-\infty; -2]$ et sur $[1; +\infty[$ et négatif sur $[-2; 1]$.

2. h est donc convexe sur $]-\infty; -2]$ puis concave sur $[-2; 1]$ et convexe sur $[1; +\infty[$.

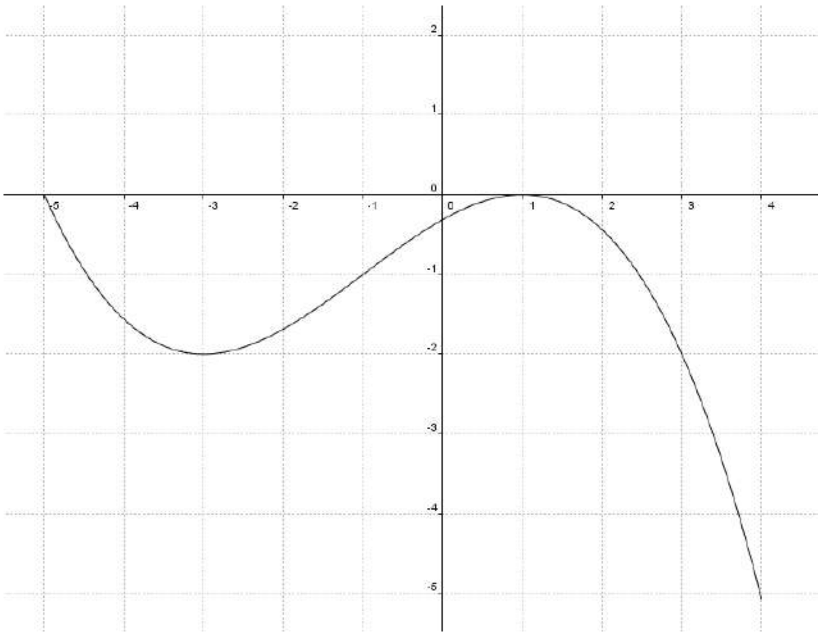
Corrigé exercice 68 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2 + 2x + 5}$ est positif. Donc $k''(x)$ est du signe de $x^2 + 2x + 5$. Or, le discriminant de $x^2 + 2x + 5$ vaut $\Delta = 2^2 - 4 \times 5 = -16$, donc le trinôme est toujours positif. Donc pour tout réel x, $k''(x) > 0$ et donc k' est strictement croissante.

2. La fonction k est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 69 :

La courbe ci-dessous respecte les consignes.

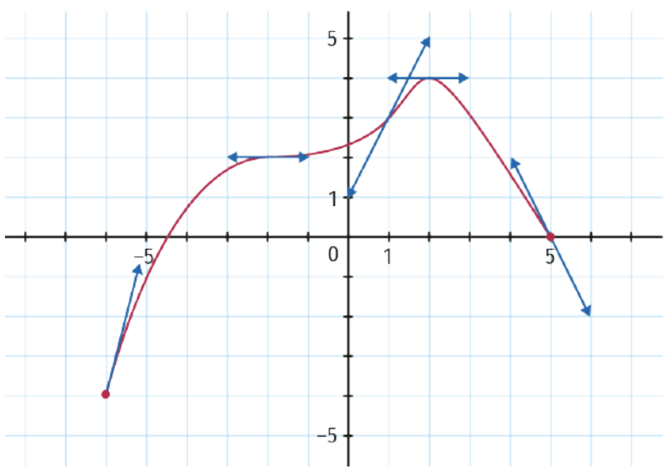


Corrigé exercice 70 :

1. On obtient le tableau de variations ci-dessous.

x	-6		2		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗		↘	

2. Comme f' est décroissante sur $[-6;-2]$, f est concave sur $[-6;-2]$.
   Comme f' est croissante sur $[-2;1]$, f est convexe sur $[-2;1]$.
   Comme f' est décroissante sur $[1;5]$, f est concave sur $[1;5]$.
3. On peut par exemple tracer la courbe ci-dessous.



Corrigé exercice 71 :

1. D'après le tableau de variations de f'', f'' est négative sur $[-8;4]$ et positive sur $[4;8]$.

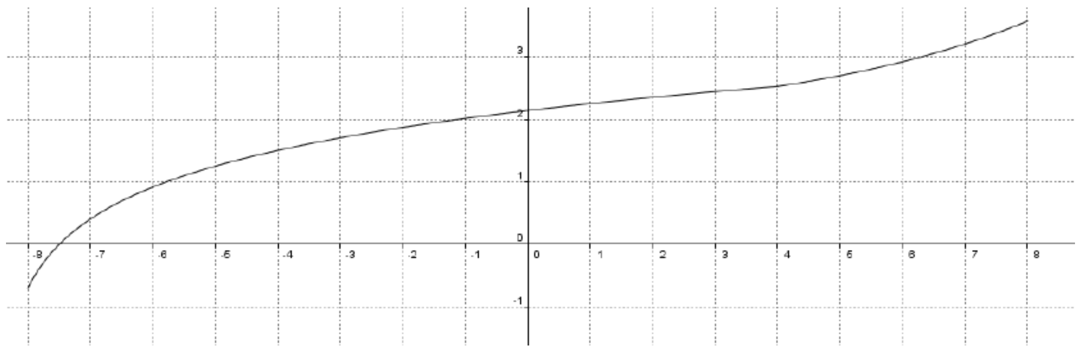
   Le tableau de variations de la fonction f' est donc le suivant.

x	-8		4		8
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		↘		↗	

2. f est donc concave sur $[-8;4]$ et convexe sur $[4;8]$.

   Elle admet un point d'inflexion d'abscisse 4.

3. On peut par exemple tracer la courbe ci-dessous.



Corrigé exercice 72 :

1. Graphiquement, f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 5 est de la forme : $y = f'(5) \times (x-5) + f(5)$. Or, $f(5) = \frac{1}{2} \times 5^2 - 3 \times 5 - 2 = -\frac{9}{2}$ et$f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x - 3 = x - 3$ donc $f'(5) = 5 - 3 = 2$. Une équation de cette tangente est donc $y = 2(x-5) - \frac{9}{2}$ soit $y = 2x - \frac{29}{2}$.

3. Comme f est convexe, sa courbe représentative est au-dessus des tangentes donc, pour tout réel x, on a $\frac{1}{2}x^2 - 3x - 2 \geqslant 2x - \frac{29}{2}$. D'où $x^2 - 6x - 4 \geqslant 4x - 29 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 10x - 25$.

Corrigé exercice 73 :

1. Graphiquement, on conjecture que la fonction est concave.
2. Une équation de la tangente au point d'abscisse 5 est de la forme : $y = f'(1) \times (x - 1) + f(1)$. Or, $f(1) = \sqrt{1} = 1$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(1) = \dfrac{1}{2}$. Une équation de cette tangente est donc $y = \dfrac{1}{2}(x-1) + 1$ soit $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.
3. Comme f est concave, sa courbe représentative est sous toutes ses tangentes, on en déduit que, pour tout x de $[0; +\infty[$, on a $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.
4. En appliquant le résultat précédent à $x = 2$, on obtient $\sqrt{2} \leqslant \dfrac{1}{2} \times 2 + \dfrac{1}{2}$ soit $\sqrt{2} \leqslant 1,5$.

Corrigé exercice 74 :

1. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est de la forme : $y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$. Or, $f(1) = \mathrm{e}^1 = e$ et $f'(x) = \mathrm{e}^x$ donc $f'(1) = e$. Une équation de la tangente est donc $y = e(x-1) + e$ soit $y = ex$.
3. Comme f est convexe, sa courbe représentative est au-dessus de ses tangentes donc pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x > ex > x$ car $e > 1$.

Corrigé exercice 75 :

1. f est un polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 10x$. De même, f' est un polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 3x^2 - 6x + 10$.
2. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 10 = -84$.

   $\Delta < 0$, donc le trinôme est toujours positif sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction f est donc convexe sur $\mathbb{R}$ et elle n'admet pas de points d'inflexion.

Corrigé exercice 76 :

1. g est le produit des fonctions u et v définies par $u(x) = 5 - x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$ et dérivables sur $]0; +\infty[$ donc g est dérivable sur $]0; +\infty[$. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{-5(x^2-1)}{2\sqrt{x}}$.

   g' est le quotient des fonctions p et q définies par $p(x) = -5(x^2 - 1)$ et $q(x) = 2\sqrt{x}$ et dérivables sur $]0; +\infty[$ donc g'' est dérivable sur $]0; +\infty[$. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g''(x) = \dfrac{-15x^2 - 5}{2x\sqrt{x}}$.

2. Comme $g''(x)$ est définie sur $]0;+\infty[$, $2x\sqrt{x} > 0$. Donc $g''(x)$ est du signe de $-15x^2 - 5 = -5(3x^2+1)$ qui est négatif sur $]0;+\infty[$. En conclusion, g'' est négative sur cet intervalle.

3. Donc g est concave sur $]0;+\infty[$.

Corrigé exercice 77 :

1. h est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -2x\mathrm{e}^x + (2-x^2)\mathrm{e}^x = (2-2x-x^2)\mathrm{e}^x$.

   h' est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h''(x) = (-x^2-4x)\mathrm{e}^x = -x(x+4)\mathrm{e}^x$.

2. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $h''(x)$ est du signe de $-x(x+4)$. Donc h est concave sur $]-\infty;-4]$, puis convexe sur $[-4;0]$ et concave sur $[0;+\infty[$. Les abscisses de ses points d'inflexion sont -4 et 0.

Corrigé exercice 78 :

1. q est un quotient de fonctions dérivables et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $q'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x)+\mathrm{e}^x}{(1-x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(2-x)}{(1-x)^2}$.

   q' est un quotient de fonctions dérivables et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $q''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x)^2+2(2-x)}{(1-x)^3} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x^2-4x+5)}{(1-x)^3}$.

2. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $q''(x)$ est du signe de $\dfrac{x^2-4x+5}{(1-x)^3}$. Le trinôme au numérateur admet un discriminant valant $\Delta = (-4)^2 - 4\times 5 = -4$. Ce trinôme est donc toujours positif. $q''(x)$ est donc du signe de $(1-x)^3$. Donc $q''(x)$ est positive sur $]-\infty;1[$ et négative sur $]1;+\infty[$.

3.
   a. La fonction q est donc convexe sur $]-\infty;1[$ et concave sur $]1;+\infty[$. Elle n'admet pas de point d'inflexion.
   b. Une équation de la tangente à la courbe en 0 est de la forme : $y = q'(0)(x-0)+q(0)$. Or, $q(0) = 1$ et $q'(0) = 2$. Donc une équation de cette tangente est $y = 2x+1$
   c. La fonction q est convexe sur $]-\infty;1[$, sa courbe représentative est donc au-dessus de toutes ses tangentes sur cet intervalle. On a donc $q(x) \geqslant 2x+1$ sur $]-\infty;1[$. Et puisque que q est concave sur $]1;+\infty[$, on a $q(x) \leqslant 2x+1$ sur $]1;+\infty[$.

Corrigé exercice 79 :

1. p est le produit des fonctions u et v définies par $u(x) = x^2-4x+5$ et $v(x) = \mathrm{e}^{x-4}$ dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc p est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p'(x) = (2x-4)\mathrm{e}^{x-4} + (x^2-4x+5)\mathrm{e}^{x-4} = (x^2-2x+1)\mathrm{e}^{x-4}$.

p' est le produit des fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = \mathrm{e}^{x-4}$ dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc p' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p''(x) = (2x - 2)\mathrm{e}^{x-4} + (x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{x-4} = (x^2 - 1)\mathrm{e}^{x-4}$.

2. Comme $\mathrm{e}^{x-4} > 0$, $p''(x)$ est du signe de $x^2 - 1$. Ainsi $p''(x)$ est positif sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ et négatif sur $[-1; 1]$.

3. p est convexe sur $]-\infty; -1]$ puis concave sur $[-1; 1]$ et convexe sur $[1; +\infty[$.

Corrigé exercice 80 :

1. ϕ est le produit des fonctions u et v définies par $u(x) = x^4 - 10x^3 + 44x^2 - 109x + 128$ et $v(x) = \mathrm{e}^{x-4}$, et dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$\phi'(x) = (4x^3 - 30x^2 + 88x - 109)\mathrm{e}^{x-4} + (x^4 - 10x^3 + 44x^2 - 109x + 128)\mathrm{e}^{x-4}$
$\phi'(x) = (x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 21x + 19)\mathrm{e}^{x-4}$.
ϕ' est le produit de la fonction p définie par $p(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 21x + 19$ et v, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$\phi''(x) = (4x^3 - 18x^2 + 28x - 21)\mathrm{e}^{x-4} + (x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 21x + 19)\mathrm{e}^{x-4}$
$\phi''(x) = (x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 7x - 2)\,\mathrm{e}^{x-4}$.

2. a. On a $h(1) = 1^4 - 2 \times 1^3 - 4 \times 1^2 + 7 \times 1 - 2 = 0$ et $h(-2) = (-2)^4 - 2 \times (-2)^3 - 4 \times (-2)^2 + 7 \times (-2) - 2 = 0$.
   b. $(x-1)(x+2)(ax^2 + bx + c) = ax^4 + (a+b)x^3 + (b+c-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$.
   On cherche donc a, b et c tels que$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 7x - 2 = ax^4 + (a+b)x^3 + (b+c-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$ Par unicité des coefficients, cela revient donc à résoudre le système suivant : $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -2 \\ b + c - 2a = -4 \\ c - 2b = 7 \\ -2c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{cases}$
   donc $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 7x - 2 = (x-1)(x+2)(x^2 - 3x + 1)$.
   c. Le discriminant de $x^2 - 3x + 1$ vaut $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 = 5$. Le trinôme admet donc 2 racines réelles : $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$. On obtient alors le tableau de signes suivant pour $\phi''(x)$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x^2 - 3x + 1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\phi''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

3. ϕ est convexe sur $]-\infty;-2]$, puis concave sur $\left[-2;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$, puis convexe sur $\left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};1\right]$, puis concave sur $\left[1;\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right[$.

   Les abscisses des points d'inflexion sont : -2, $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, 1 et $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Corrigé exercice 81 :

La fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=(1+x)\mathrm{e}^{1-x^2}$.

1. φ est le produit de fonctions dérivables u et v sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.$u(x)=1+x$ et $v(x)=\mathrm{e}^{1-x^2}$ donc $u'(x)=1$ et $v'(x)=-2x\mathrm{e}^{1-x^2}$. Pour tout réel x, on a alors $\varphi'(x)=\mathrm{e}^{1-x^2}+(1+x)\times(-2x)\mathrm{e}^{1-x^2}$ soit $\varphi'(x)=\mathrm{e}^{1-x^2}(1-2x(1+x))$ d'où $\varphi'(x)=(-2x^2-2x+1)\,\mathrm{e}^{1-x^2}$.

   φ' est le produit de fonctions dérivables p et q sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.$p(x)=-2x^2-2x+1$ et $q(x)=\mathrm{e}^{1-x^2}$ donc $p'(x)=-4x-2$ et $q'(x)=-2x\mathrm{e}^{1-x^2}$. Ainsi, pour tout réel x,

   $\varphi''(x)=(-4x-2)\mathrm{e}^{1-x^2}-2x(2x^2-4x-1)\mathrm{e}^{1-x^2}$ donc $\varphi''(x)=(-4x-2-2x(-2x^2-2x+1))\mathrm{e}^{1-x^2}$ et ainsi $\varphi''(x)=(4x^3+4x^2-6x-2)\mathrm{e}^{1-x^2}$.

2. Pour tout réel x, $2(x-1)(2x^2+4x+1)\mathrm{e}^{1-x^2}=(2x-2)(2x^2+4x+1)\mathrm{e}^{1-x^2}=(4x^3+8x^2+2x-4x^2-8x-2)\mathrm{e}^{1-x^2}=(4x^3+4x^2-6x-2)\mathrm{e}^{1-x^2}=\varphi''(x)$. Comme $\mathrm{e}^{1-x^2}>0$, le signe de $\varphi''(x)$ dépend de celui de $2(x-1)(2x^2+4x+1)$.

   On a $x-1\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant 1$.

   On calcule le discriminant de $2x^2+4x+1$: $\Delta=16-8=8>0$. Les deux racines sont alors $x_1=\dfrac{-4-\sqrt{8}}{2\times 2}=\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-4+\sqrt{8}}{2\times 2}=\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}$.
   Le polynôme est donc positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur. Le tableau de signes de $\varphi''(x)$ est donc :

x	$-\infty$		$\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$2(x-1)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x^2+4x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\varphi''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

   On en déduit que φ est convexe sur $\left[\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2};\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}\right]$ et sur $[1;+\infty[$.

   Elle est concave sur $\left]-\infty;\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}\right]$ et sur $\left[\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2};1\right]$.

Les abscisses des points d'inflexion sont donc $\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}$ et 1.

Corrigé exercice 82 :

1. φ est le produit de fonctions dérivables u et v sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}.u(x) = (x+1)^3$ et $v(x) = x+2$ donc $u'(x) = 3(x+1)^2$ et $v'(x) = 1$. Pour tout réel x, $\varphi'(x) = 3(x+1)^2(x+2) + (x+1)^3$ soit $\varphi'(x) = (x+1)^2\left[3(x+2)+(x+1)\right]$ d'où $\varphi'(x) = (x+1)^2(4x+7)$.

   φ' est le produit de fonctions dérivables p et q sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}.p(x) = (x+1)^2$ et $q(x) = 4x+7$ donc $p'(x) = 2(x+1)$ et $q'(x) = 4$. Pour tout réel x, $\varphi''(x) = 2(x+1)(4x+7) + 4(x+1)^2$ soit $\varphi''(x) = (x+1)\left[2(4x+7)+4(x+1)\right]$ donc $\varphi''(x) = (x+1)(12x+18) = 6(x+1)(2x+3)$.

2. Les racines de $\varphi''(x)$ sont -1 et $-\dfrac{3}{2}$. On en déduit que $\varphi''(x)$ est positive sur $\left]-\infty; -\dfrac{3}{2}\right] \cup [-1; +\infty[$ et négative sur $\left[-\dfrac{3}{2}; -1\right]$.

3. On en déduit que φ est convexe sur $\left]-\infty; -\dfrac{3}{2}\right]$ et sur $[-1; +\infty[$. Elle est concave sur $\left[-\dfrac{3}{2}; -1\right]$. Les abscisses des points d'inflexion sont donc $-\dfrac{3}{2}$ et -1.

Corrigé exercice 83 :

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = 1 + \dfrac{2}{x^3}$. De même, la fonction f' est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f''(x) = -\dfrac{6}{x^4}$ qui est négatif sur $]0; +\infty[$.
Donc g est concave sur $x \in]0; +\infty[$. Ainsi sa courbe représentative se trouve en dessous de toutes ses tangentes. En particulier, $\mathcal{C}_f$ est sous la tangente $\mathcal{T}$ sur $]0; +\infty[$.
Remarque : Il est aussi possible de résoudre cet exercice en effectuant une étude de signe de la différence $f(x) - \left(\dfrac{5}{4}x - \dfrac{3}{4}\right)$ si on ne souhaite pas utiliser la notion de concavité.

Corrigé exercice 84 :

1. $f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente en 0. La tangente en 0 passe par les points $(0; 1)$ et $(1; -1)$. Son coefficient directeur est donc $\dfrac{-1-1}{1-0} = -2$.

   L'affirmation est donc fausse.

2. La tangente à la courbe en 1 n'est pas horizontale, donc $f'(1) \neq 0$.

   L'affirmation est donc fausse.

3. Au point d'abscisse 1, la fonction est convexe d'où $f''(1) > 0$. L'affirmation est donc fausse.

4. Sur $[2; 3]$, f est croissante donc $f'(x) > 0$. L'affirmation est donc vraie.

5. La courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes sur $[0;3]$.
   L'affirmation est donc vraie.
6. $f = g'$ est négative sur $[1;3]$ donc g est décroissante sur $[1;3]$.
   L'affirmation est donc fausse.
7. Sur $[0;0,5]$, $f = g'$ est décroissante donc g est concave sur $[0;0,5]$.
   L'affirmation est donc vraie.

Corrigé exercice 85 :

Partie A : Étude graphique

1. La concentration initiale est 2 g.L^{-1}.
2. La concentration devient inférieure à 0,5 g.L^{-1} à partir d'environ 7,8 h soit environ 7 h 50 min.
3. Le point d'inflexion a pour coordonnées $(4;1,30)$ environ.

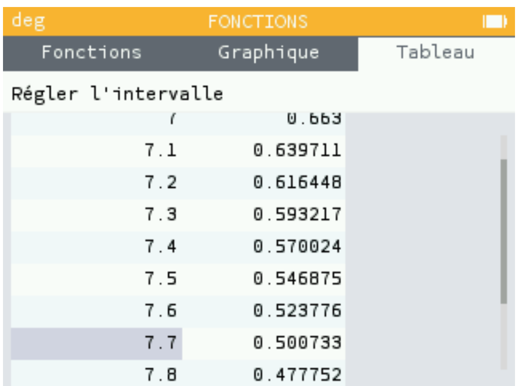
Partie B : Étude algébrique

Pour tout $x \in [0;10]$, on a : $C(x) = 0,001x^3 - 0,02x^2 - 0,1x + 2$.

1. C est un polynôme donc est dérivable sur $[0;10]$. Pour tout $x \in [0;10]$, $C'(x) = 0,003x^2 - 0,04x - 0,1$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = (-0,04)^2 - 4 \times 0,003 \times (-0,1) = 0,0028$ donc il admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-(-0,04) - \sqrt{0,0028}}{2 \times 0,003} \approx -2,15$ et $x_2 = \dfrac{-(-0,04) + \sqrt{0,0028}}{2 \times 0,003} \approx -15,49$. Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines et négatif à l'intérieur. On obtient ainsi le tableau de variations suivant.

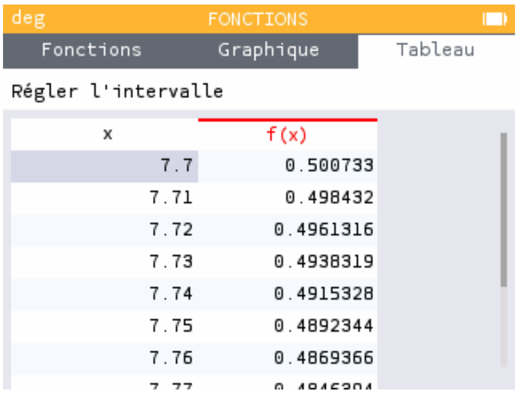
x	0	10
Signe de $C'(x)$	$-$	
Variations de C	2 ↘	0

2. À la calculatrice on obtient $7,7 \leqslant \alpha \leqslant 7,8$, où α est la solution de cette équation.



7	0.663
7.1	0.639711
7.2	0.616448
7.3	0.593217
7.4	0.570024
7.5	0.546875
7.6	0.523776
7.7	0.500733
7.8	0.477752

En continuant l'algorithme de balayage pour obtenir l'encadrement demandé, on obtient$7,70 \leqslant \alpha \leqslant 7,71$.



x	f(x)
7.7	0.500733
7.71	0.498432
7.72	0.4961316
7.73	0.4938319
7.74	0.4915328
7.75	0.4892344
7.76	0.4869366

3. C' est un polynôme donc est dérivable sur $[0;10]$.

   Pour tout $x \in [0;10]$, $C''(x) = 0,006x - 0,04$. $C''(x)$ est négative sur $\left[0;\dfrac{20}{3}\right]$ et positive sur $\left[\dfrac{20}{3};10\right]$. Donc C est concave sur $\left[0;\dfrac{20}{3}\right]$ et convexe sur $\left[\dfrac{20}{3};10\right]$.

Partie C : Interprétation des résultats

1. Il faut faire une injection au bout d'environ 7,71 h soit 7 h 42 minutes environ.
2. La baisse de la concentration ralentit lorsque fonction devient convexe, soit environ au bout de 6,6 h (6 h 36 minutes).

Corrigé exercice 86 :

Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;5]$, $C(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{7}{4}x^2 + \dfrac{15}{2}x + 9$.

1. C est un polynôme donc est dérivable sur $[0;5]$. Pour tout $x \in [0;5]$, $C'(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{7}{2}x + \dfrac{15}{2}$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = \left(-\dfrac{7}{2}\right)^2 - 4 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{15}{2} = -\dfrac{11}{4}$. Comme $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racine réelle et est donc toujours positif sur $[0;5]$. Ainsi C est croissante sur $[0;5]$.
2. C' est un polynôme donc est dérivable sur $[0;5]$. Pour tout $x \in [0;5]$, $C''(x) = x - \dfrac{7}{2}$.
3. $C''(x) > 0$ pour $x > \dfrac{7}{2}$ donc C est convexe sur $[3,5;5]$. Les rendements marginaux diminuent à partir de 350 calculatrices fabriquées.

Corrigé exercice 87 :

1. a. f est un polynôme donc dérivable sur $[0;60]$ et, pour tout $x \in [0;60]$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

b. Les tangentes au départ et à l'arrivée sont horizontales donc $f'(0) = 0$ et $f'(60) = 0$.

c. D'après la question précédente, 0 et 60 sont des racines de f'. La fonction f' se factorise donc sous la forme $f'(x) = kx(x-60)$ avec $k \in \mathbb{R}$. D'une part, on a $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et, d'autre part, on a $f'(x) = kx(x-60) = kx^2 - 60kx$. On en déduit, par unicité des coefficients du polynôme, que $c = 0$, $3a = k$ et $2b = -60k = -60 \times 3a = -180a$ d'où $b = -90a$.

2. a. Graphiquement, on lit $f(0) = 120$ et $f(60) = 60$.

b. On a $f(0) = a \times 0^3 + b \times 0^2 + c \times 0 + d = d$ et $f(0) = 120$ donc $d = 120$. Et, d'autre part, $f(60) = a \times 60^3 - 90a \times 60^2 + 120 = -108\,000a + 120$ ainsi que $f(60) = 60$ donc $-108\,000a + 120 = 60 \Leftrightarrow a = \dfrac{-60}{-108\,000} = \dfrac{1}{1\,800}$. D'où, $f(x) = \dfrac{1}{1\,800}x^3 - \dfrac{1}{20}x^2 + 120 = \dfrac{1}{1800}x^2(x-90) + 120$.

3. a. La fonction f' est un polynôme, elle est donc dérivable sur $[0;60]$. Pour tout $x \in [0;60]$, $f''(x) = \dfrac{1}{600} \times 2x - \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{300}x - \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{300}(x-30)$. $f''(x)$ est du signe de $x - 30$ donc $f''(x) > 0$ pour $x > 30$ et $f''(x) < 0$ pour $x < 30$. Donc f est concave sur $[0;30]$ et convexe sur $[30;60]$. Elle admet un point d'inflexion qui a pour abscisse 30.

b. La longueur de la barre de renfort sera de 30 mètres.

Puisque $f(30) = \dfrac{1}{1\,800} \times 30^3 - \dfrac{1}{20} \times 30^2 + 120 = 90$, la barre devra être placée à 90 mètres de hauteur.

Corrigé exercice 88 :

Partie A : Conjectures

1. La fonction f semble décroissante sur son ensemble de définition.
2. La fonction f semble convexe sur $[0;24]$ et ne semble admettre aucun point d'inflexion.
3. La température minimale atteinte est environ 16 °C.

Partie B : Étude de la fonction

1. f est dérivable sur $[0;24]$ puisque la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-0,2t}$ est la composée des fonctions u et v définies par $u(t) = -0,2t$ et $v(t) = \mathrm{e}^t$. On a donc $u'(t) = -0,2$ et $v'(t) = \mathrm{e}^t$ et donc la dérivée de $t \mapsto \mathrm{e}^{-0,2t}$ est $t \mapsto -0,2\mathrm{e}^{-0,2t}$. D'où $f'(t) = 100 \times (-0,2)\mathrm{e}^{-0,2t} = -20\mathrm{e}^{-0,2t}$.

   Comme $\mathrm{e}^{-0,2t} > 0$, $f'(t) < 0$ sur $[0;24]$ et f est donc décroissante sur $[0;24]$.

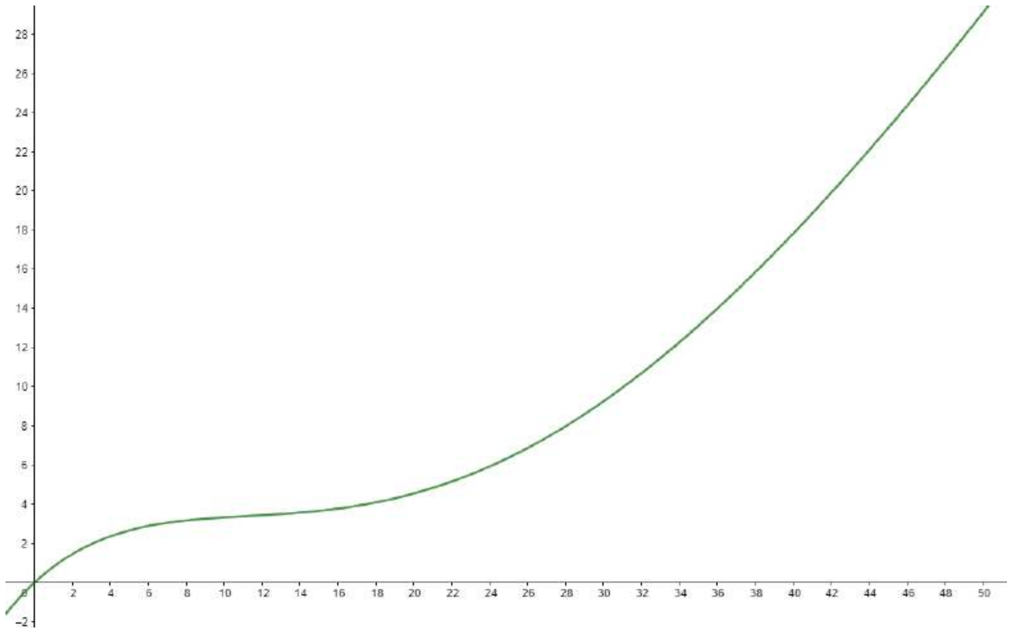
x	0	24
Signe de $f'(x)$	−	
Variations de f	115 ↘	≈ 15.82

2. a. f' est dérivable sur $[0;24]$ et on a $f''(t) = -0,2 \times (-20)\mathrm{e}^{-0,2t} = 4\mathrm{e}^{-0,2t}$.
   b. $f''(t) > 0$ sur $[0;24]$ donc f est convexe sur $[0;24]$.
   c. Les coefficients directeurs des tangentes à la courbe de f sont négatifs et augmentent au cours du temps (f est convexe). Cependant, comme f est décroissante, cela signifie que la température diminue de moins en moins vite au fur et à mesure du temps qui passe (on s'en rend compte visuellement par l'"aplatissement" progressif de la courbe).

9 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 89 :

1. a. La fonction C semble strictement croissante sur $[0; 50]$.



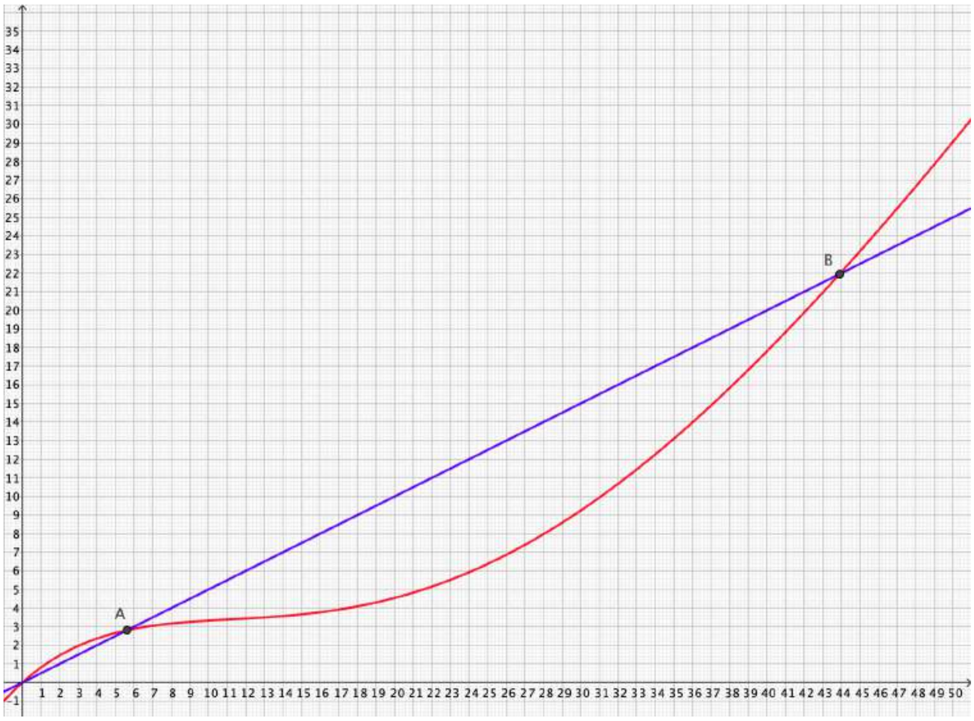
b. La fonction C est dérivable sur $[0; 50]$ comme somme, composée et produit de polynômes et de la fonction exponentielle toutes dérivables sur $[0; 50]$. Pour tout$x \in [0; 50]$, $C'(x) = -\dfrac{1}{10}\mathrm{e}^{-0,05x}\left(-0,05x^2 + 1,95x + 1\right) + 1$.
De même, la fonction C' est dérivable sur $[0; 50]$. Et, pour tout $x \in [0; 50]$, $C''(x) = -\dfrac{1}{10}\mathrm{e}^{-0,05x}\left(0,0025x^2 - 0,1975x + 1,9\right)$.

c. Or, pour tout réel $x \in [0; 50]$, $-\dfrac{1}{10} < 0$ et $\mathrm{e}^{-0,05x} > 0$ donc $C''(x)$ est du signe contraire de $0,0025x^2 - 0,1975x + 1,9$. Le discriminant de ce trinôme vaut$\Delta = (-0,1975)^2 - 4 \times 0,0025 \times 1,9 = 0,02000625$.
Comme $\Delta > 0$, le polynôme $0,0025x^2 - 0,1975x + 1,9$ admet deux racines :
$x_1 = \dfrac{-(-0,1975) - \sqrt{0,02000625}}{2 \times 0,0025} \approx 11,21$ et
$x_2 = \dfrac{-(-0,1975) + \sqrt{0,02000625}}{2 \times 0,0025} \approx 67,79$.
Ainsi C'' est négative sur $[0; 11,21]$ et positive sur $[11,21; 50]$. On en déduit que C' est décroissante sur $[0; 11,21]$ et croissante sur $[11,21; 50]$.

d. On déduit des variations de C' que C est concave sur $[0; 11,21]$ et convexe sur $[11,21; 50]$. Ainsi, le coût marginal est croissant sur $[0; 11,21]$ et décroissant sur $[11,21; 50]$.

2. a. Pour tout réel $x \in [0; 50]$, la recette générée par la vente de x dizaines d'objets est $50x$ euros, soit $0,5x$ centaines d'euros. Ainsi, on a $R(x) = 0,5x$.

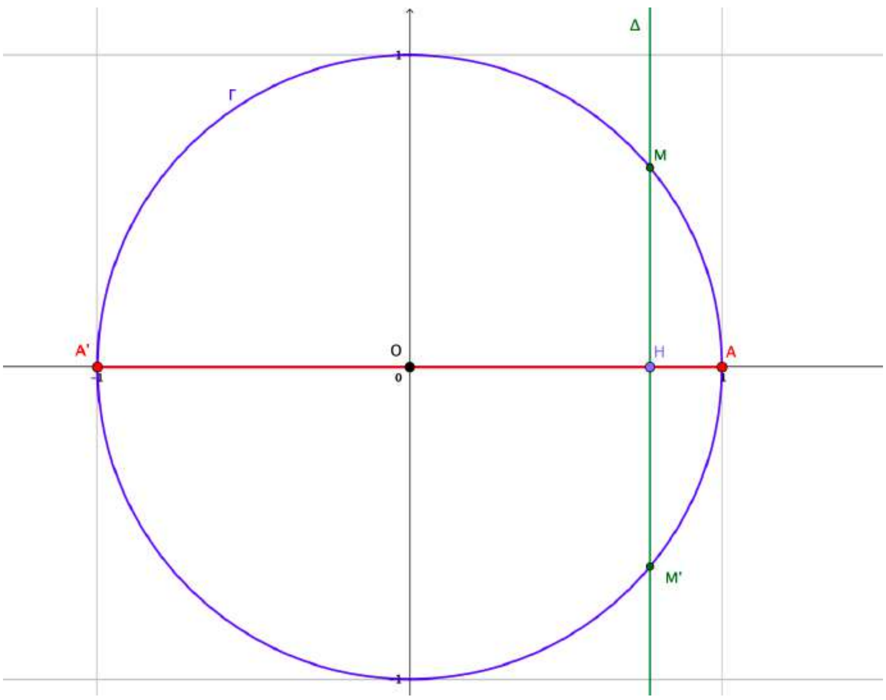
b. On obtient les courbes ci-dessous.



c. L'entreprise réalise un bénéfice lorsque ses recettes sont supérieures à ses dépenses, soit entre 56 et 439 objets produits.

Corrigé exercice 90 :

1. On obtient la figure suivante.



2. L'aire du triangle AMM' est égale à $\dfrac{1}{2} \times AH \times MM'$.

Or, $AH = OA - OH = 1 - x$. Comme une équation du cercle Γ est $x^2 + y^2 = 1$, les coordonnées du point M sont $\left(x; \sqrt{1-x^2}\right)$ et les coordonnées du point M' sont $\left(x; -\sqrt{1-x^2}\right)$. D'où $MM' = 2\sqrt{1-x^2}$.

Donc l'aire du triangle AMM' est égale à $(1-x)\sqrt{1-x^2}$.

3. a. f est dérivable sur $]-1;1[$ comme produit de fonctions dérivables sur $x \in]-1;1[$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = -1 \times \sqrt{1-x^2} + \dfrac{-x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Or, pour tout réel $x \in]-1;1[$, $\sqrt{1-x^2} > 0$. Donc $f'(x)$ est du même signe que $2x^2 - x - 1$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$. Comme $\Delta > 0$, le polynôme $2x^2 - x - 1$ admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 2} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 2} = \dfrac{4}{4} = 1$.
Or, le polynôme $2x^2 - x - 1$ est négatif entre ses racines et positif à l'extérieur.
Ainsi, $2x^2 - x - 1$ est positif sur $\left]-1; -\dfrac{1}{2}\right[$ et négatif sur $\left]-\dfrac{1}{2}; 1\right[$.
D'où f' est positive sur $\left]-1; -\dfrac{1}{2}\right[$ et négative sur $\left]-\dfrac{1}{2}; 1\right[$.
Donc f est croissante sur $\left]-1; -\dfrac{1}{2}\right[$ et décroissante sur $\left]-\dfrac{1}{2}; 1\right[$.

b. La fonction f admet un maximum en $x = -\dfrac{1}{2}$. Ainsi, l'aire du triangle AMM' est maximale lorsque l'abscisse du point H est $-\dfrac{1}{2}$.

c. Si $x = -\dfrac{1}{2}$, les coordonnées du point M sont $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et les coordonnées du point M' sont $\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

On a $MM' = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$,

$AM = \sqrt{\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(0 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$ et

$AM' = \sqrt{\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(0 - \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{3}$.

Ainsi, comme $AM = AM' = MM'$, on en déduit que le triangle AMM' est équilatéral.

Corrigé exercice 91 :

1. a. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions définies et dérivables sur cet ensemble. Et, pour tout réel x, $f'(x) = 1 + (x\mathrm{e}^{-x})' = 1 + \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\mathrm{e}^{-x} + 1$.

b. De la même manière, la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$.

b. Pour tout réel x, on a $e^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 2$.
Ainsi, f'' est négative sur $]-\infty; 2]$ et positive sur $[2; +\infty[$.
Donc f' est décroissante sur $]-\infty; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$.

c. La fonction f' admet un minimum en $x = 2$ qui vaut $f'(2) = 1 + (1-2)e^{-2} = 1 - e^{-2} \approx 0,86$.
Ainsi, pour tout réel x, on a $f'(x) \geqslant f'(2) > 0$.

d. Comme $f'(x) > 0$ pour tout réel x, on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

e. On a $f(0) = 0 + 1 + 0 \times e^{-0} = 1$ et $f'(0) = 1 + (1-0)e^{-0} = 1 + e^0 = 2$.
Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donc$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow y = 2x + 1$.

f. Comme f'' est négative sur $]-\infty; 2]$, on en déduit que f est concave sur $]-\infty; 2]$ donc, sur cet intervalle, $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de toutes ses tangentes. En particulier, $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de sa tangente au points d'abscisse 0.
Ainsi, pour tout réel $x \leqslant 2$, on a $f(x) \leqslant 2x + 1$.

2. a. $f(x) = 2 \Leftrightarrow x + 1 + xe^{-x} = 2 \Leftrightarrow x\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

b. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet ensemble. Pour tout réel $x \in [0; 1]$, $h'(x) = \dfrac{e^x \times (e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.
Or, pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a $e^x > 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$. D'où $h'(x) > 0$.

x	0	1
Signe de $h'(x)$	+	
Variations de h	$\frac{1}{2}$ ↗	$\frac{e^1}{e^1 + 1}$

c. On a $\dfrac{1}{2} \geqslant 0$ et $\dfrac{e^1}{e^1 + 1} \approx 0,73 \leqslant 1$. Ainsi, si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$.

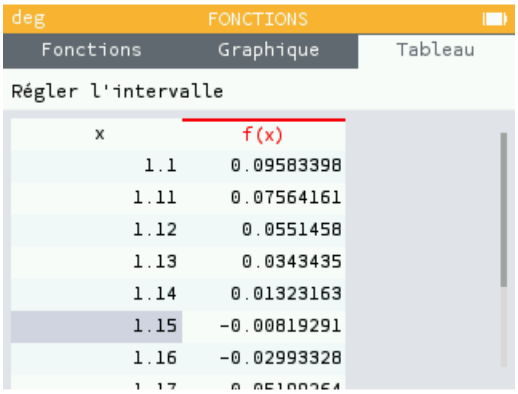
Corrigé exercice 92 :

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

1. Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $g'(x) = 1 - \mathrm{e}^x$. On a $g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^x \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant \mathrm{e}^x \Leftrightarrow 0 \geqslant x$.

   Ainsi, g' est négative sur $[0; +\infty[$. Donc g est décroissante sur $[0; +\infty[$.

2. On obtient à la calculatrice que $g(1,14) > 0$ et $g(1,15) < 0$ donc $1,14 < \alpha < 1,15$.



3. Ainsi, $g(x) \geqslant 0$ lorsque $0 \leqslant x \leqslant \alpha$ et $g(x) \leqslant 0$ lorsque $x \geqslant \alpha$.

Partie B : Étude de la fonction f

1. a. Pour tout réel $x \geqslant 0$:
   $$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times (x\mathrm{e}^x + 1) - (\mathrm{e}^x - 1) \times (1 + x)\mathrm{e}^x}{(x\mathrm{e}^x + 1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x \times g(x)}{(x\mathrm{e}^x + 1)^2}.$$

   b. Or, pour tout réel $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^x > 0$ et $(x\mathrm{e}^x + 1)^2 > 0$.
   Ainsi, $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$. D'où f' est positive sur $[0; \alpha]$ et négative sur $[\alpha; +\infty[$. Donc f est croissante sur $[0; \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

2. a. On a $g(\alpha) = 0$ c'est-à-dire $\alpha + 2 - \mathrm{e}^\alpha = 0$ d'où $\mathrm{e}^\alpha = \alpha + 2$.
   $$\text{Ainsi, } f(\alpha) = \frac{\mathrm{e}^\alpha - 1}{\alpha\mathrm{e}^\alpha + 1} = \frac{\alpha + 2 - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

   b. $1,14 < \alpha < 1,15 \Leftrightarrow 2,14 < 1 + \alpha < 2,15 \Leftrightarrow 0,467 > f(\alpha) > 0,465$.

3. On a $f(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0 - 1}{0 \times \mathrm{e}^0 + 1} = 0$ et $f'(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0 \times g(0)}{(0 \times \mathrm{e}^0 + 1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^0(0 + 2 - \mathrm{e}^0)}{(0 \times \mathrm{e}^0 + 1)^2} = 1$.

   Une équation de $\mathcal{T}$ est donc $y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow y = x$.

4. a. Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a :
   $$f(x) - x = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x\mathrm{e}^x + 1} - x$$
   $$= \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x^2\mathrm{e}^x - x}{x\mathrm{e}^x + 1}$$
   $$= \frac{\mathrm{e}^x(1 - x^2) - (1 + x)}{x\mathrm{e}^x + 1}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^x(1+x)(1-x)-(1+x)}{x\mathrm{e}^x+1}$$
$$= \frac{(1+x)(\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x-1)}{x\mathrm{e}^x+1}$$
$$= \frac{(1+x)\times u(x)}{x\mathrm{e}^x+1}.$$

b. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur cet ensemble. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = \mathrm{e}^x - (1+x)\mathrm{e}^x = (1-1-x)\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x$.

Or, pour tout réel $x \geqslant 0$, $-x \leqslant 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$ donc $u'(x) \leqslant 0$.

Donc la fonction u est décroissante sur $[0; +\infty[$.

c. Comme la fonction u est décroissante sur $[0; +\infty[$, elle est majorée par $u(0) = \mathrm{e}^0 - 0 \times \mathrm{e}^0 - 1 = 0$. Ainsi, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $u(x) \leqslant 0$.

d. Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $\mathrm{e}^x > 0$ d'où $x\mathrm{e}^x \geqslant 0$ et alors $x\mathrm{e}^x + 1 > 0$.

De plus, $x + 1 \geqslant 0$ pour tout réel $x \geqslant 0$ et $u(x) \leqslant 0$ d'après la question précédente. Ainsi, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) - x \leqslant 0$ et donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est toujours en-dessous de $\mathcal{T}$ sur $[0; +\infty[$.

Corrigé exercice 93 :

1. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ admet pour dérivée, d'après la formule de dérivation d'une fonction composée, $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$,$f_1'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+1) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = -x\mathrm{e}^{-x} = f_2(x)$.

2. Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc f_1' est du même signe que $-x$.

   Ainsi, f_1' est positive sur $]-\infty; 0]$ et négative sur $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f_1	$+\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1''(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (-x) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (x-1)\mathrm{e}^{-x} = f_3(x)$.

   Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc f_1'' est du même signe que $x - 1$.

   Ainsi, f_1'' est négative sur $]-\infty; 1]$ et positive sur $[1; +\infty[$.

   Donc f_1 est concave sur $]-\infty; 1]$ et convexe sur $[1; +\infty[$.

4. Pour tout réel x, on a $g(x) = f_1(x) - f_3(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x} - (x-1)\mathrm{e}^{-x} = (x+1-(x-1))\mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^{-x}$.

   Or, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $2 > 0$ donc g est toujours positive.

   On en déduit que $\mathcal{C}_1$ est toujours au-dessus de $\mathcal{C}_3$.

5. Pour tout réel x, on a $f_1(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$, $f_1'(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$ et $f_1''(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
   D'où $f_1''(x) + 2f_1'(x) + f_1(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} + (x+1)\mathrm{e}^{-x} = 0$.
   Pour tout réel x, on a $f_2(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, $f_2'(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x}$ et $f_2''(x) = (-x+2)\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi $f_2''(x) + 2f_2'(x) + f_2(x) = -x\mathrm{e}^{-x} + 2(x-1)\mathrm{e}^{-x} + (x+2)\mathrm{e}^{-x} = 0$.
   Pour tout réel x, on a $f_3(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x}$, $f_3'(x) = (-x+2)\mathrm{e}^{-x}$ et $f_3'''(x) = (x-3)\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi $f_3''(x) + 2f_3'(x) + f_3(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x} + 2(-x+2)\mathrm{e}^{-x} + (x-3)\mathrm{e}^{-x} = 0$.

Corrigé exercice 94 :

Partie A : Inégalité de Jensen

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On suppose qu'il existe $k \in \{1;\ldots;n\}$ tel que $\lambda_k = 1$. On a donc $\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i = 0$.
   Pour tout i, $\lambda_i \geqslant 0$, alors, pour tout $i \neq k$, $\lambda_i = 0$. Ainsi, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_k x_x = x_k$.
   D'une part, on a $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = f(x_k)$.
   D'autre part, on a $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = \lambda_k f(x_k) = f(x_k)$.
   L'inégalité $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$ est donc vérifiée. La proposition P_n est donc vraie s'il existe $k \in \{1;\ldots;n\}$ tel que $\lambda_k = 1$.
2. On suppose donc que pour tout $k \in \{1;\ldots;n\}$, $\lambda_k \neq 1$.
   Pour $n = 2$: on a donc $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ soit $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$. Ainsi, on obtient $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)x_2)$. Comme f est convexe, d'après la définition donnée en préambule, on a alors $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1)f(x_2)$. La proposition P_2 est donc vraie.
3. a. On suppose qu'il existe n entier naturel non nul tel P_n est vraie. On pose $\lambda = 1 - \lambda_{n+1}$ et $x = \dfrac{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n}{\lambda}$. On a ainsi $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = \lambda x$ d'où $f\left(\sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1}x_{n+1}) = f(\lambda x + \lambda_{n+1}x_{n+1})$.
   b. On a $\lambda = 1 - \lambda_{n+1}$. Puisque $f\left(\sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f(\lambda x + \lambda_{n+1}x_{n+1})$, on peut donc utiliser la proposition avec $n = 2$: $f\left(\sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \leqslant \lambda f(x) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$.
   c. Or, $x = \dfrac{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n}{\lambda} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda}x_1 + \ldots + \dfrac{\lambda_n}{\lambda}x_n$. Comme $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1$, on a $\lambda = 1 - \lambda_{n+1} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ donc $\dfrac{\lambda_1}{\lambda} + \ldots + \dfrac{\lambda_n}{\lambda} = \dfrac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}{\lambda} = 1$.

Comme $f(x) = f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda}x_n\right) = f\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{\lambda}x_k\right)$, on obtient grâce à l'hypothèse de récurrence : $f(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{\lambda}f(x_k)$ ce qui équivaut à $f(x) \leqslant \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k)$. D'après l'inégalité de la question b., $f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right) \leqslant \lambda f(x) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1})$ et, d'après l'inégalité précédente, on a : $f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right) \leqslant \lambda \times \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1})$. Ainsi, $f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1})$. La proposition P_{n+1} : $f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k f(x_k)$ est donc vraie. D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n non nul, on a $f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k)$.

Partie B : Inégalité arithmético-géométrique

1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = -\ln(x)$. f est dérivable et, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = -\frac{1}{x}$ et $f''(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$. Donc, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f''(x) > 0$. La fonction f est convexe sur $]0;+\infty[$.

2. $\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}x_k$ et $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} = 1$ (somme de n termes égaux à $\frac{1}{n}$).
   On peut donc appliquer l'inégalité de Jensen :
   $-\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} \times (-\ln(x_k))$ ce qui équivaut à :
   $-\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{n}\ln(x_k)\right)$.

3. $-\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{n}\ln(x_k)\right)$équivaut à $-\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}\right) \leqslant -\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k^{\frac{1}{n}})$ ce qui donne $\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n}\ln(x_k^{\frac{1}{n}})$. La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient
   $\exp\left(\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}\right)\right) \geqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k^{\frac{1}{n}})\right)$
   $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n} \geqslant \prod_{k=1}^{n}\exp\left(\ln(x_k^{\frac{1}{n}})\right)$
   $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n} \geqslant \prod_{k=1}^{n}x_k^{\frac{1}{n}}$
   $\Leftrightarrow \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$.

Corrigé exercice 95 :

1. Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $v(x) = x+1$.

   On a alors $v'(x) = 1$.

   La fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x+1}$ est de la forme $\dfrac{1}{v}$ d'où $g'(x) = \dfrac{-v'(x)}{(v(x))^2} = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$.

   Ainsi, pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $f'(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{3(x+1)^2-2}{2(x+1)^2} = \dfrac{3x^2+6x+1}{2(x+1)^2}$.

   Or, pour tout réel $x \in [0;1]$, $2(x+1)^2 > 0$ donc f' est du même signe que $3x^2+6x+1$.

   On a $\Delta = 6^2-4\times3\times1 = 36-12 = 24$. Comme $\Delta > 0$, le polynôme $3x^2+6x+1$ admet deux racines qui sont $x = \dfrac{-6-\sqrt{24}}{2\times3} = \dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}$ et $x = \dfrac{-6+\sqrt{24}}{2\times3} = \dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$.

   Or, comme $3 > 0$ le polynôme $3x^2+6x+1$ est positif à l'extérieur de ses racines et négatif entre ses racines.

   Aussi, comme $\dfrac{-3-\sqrt{6}}{3} < 0$ et $\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3} < 0$ alors le polynôme $3x^2+6x+1$ est positif sur l'intervalle $[0;1]$.

   On a $f(0) = \dfrac{3}{2}\times0+\dfrac{1}{0+1}-1 = 0+1-1 = 0$ et $f(1) = \dfrac{3}{2}\times1+\dfrac{1}{1+1} = \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}-1 = \dfrac{4}{2}-1 = 1$.

x	0		1
Signe de $f'(x)$		+	
Variations de f	0	$\nearrow$	1

2. Pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $x - f(x) = x - \left(\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{x+1} - 1\right) = x - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{x+1} + 1 = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{x+1} + 1 = \dfrac{-x(x+1)-2+2(x+1)}{2(x+1)} = \dfrac{-x^2+x}{2(x+1)} = \dfrac{-x(x-1)}{2(x+1)}$.

   Or, pour tout réel $x \in [0;1]$, $2(x+1) > 0$, $-x \leqslant 0$ et $x-1 \leqslant 0$ donc $x - f(x) \geqslant 0$.

3. La fonction f est définie sur $[0;1]$ et elle est croissante sur $[0;1]$.

   On a $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

   Aussi, pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $x - f(x) \geqslant 0$ d'où $x \geqslant f(x)$.

   Ainsi, la courbe représentative de la fonction f est une courbe de Lorenz.

Corrigé exercice 96 :

Partie A

1. a. Pour tout réel x, on a $f'(x) = mx^{m-1}$.
   b. Si $n > m$ alors pour tout réel x, on a $f^{(n)}(x) = 0$.
   Si $n \leqslant m$ alors pour tout réel x, on a $f^{(n)}(x) = \dfrac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$.

2. Pour tout réel x, on a $g^{(5)}(x) = \dfrac{8!}{(8-5)!}x^{8-5} - 3 \times \dfrac{5!}{(5-5)!}x^{5-5} + 0 = 6720x^3 - 360$.

Partie B

1. On a $\binom{1}{0}f^{(0)}g^{(1-0)} + \binom{1}{1}f^{(1)}g^{(1-1)} = fg' + f'g = (fg)' = (fg)^{(1)}$.

2. a. On a $(fg)^{(k+1)} = \left((fg)^{(k)}\right)'$
$$= \left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(i)}g^{(k-i)}\right)'$$
$$= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(f^{(i)}g^{(k-i)}\right)'$$
$$= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(f^{(i+1)}g^{(k-i)} + f^{(i)}g^{(k+1-i)}\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(i+1)}g^{(k-i)} + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(i)}g^{(k+1-i)}.$$
   b. On a $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(i+1)}g^{(k-i)} = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}f^{(i+1)}g^{(k-i)} + \binom{k}{k}f^{(k+1)}g^{(k-k)}$
$$= \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}f^{(i+1)}g^{(k-i)} + f^{(k+1)}g^{(0)}$$
$$= gf^{(k+1)} + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}f^{(i+1)}g^{(k-i)} \text{ et}$$
$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(i)}g^{(k+1-i)} = \binom{k}{0}f^{(0)}g^{(k+1-0)} + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}f^{(i)}g^{(k+1-i)}$$
$$= fg^{(k+1)} + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i+1}f^{(i+1)}g^{(k-i)}.$$
   c. On a $\displaystyle(fg)^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(i+1)}g^{(k-i)} + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(i)}g^{(k+1-i)}$
$$= gf^{(k+1)} + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}f^{(i+1)}g^{(k-i)} + fg^{(k+1)} + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i+1}f^{(i+1)}g^{(k-i)}$$
$$= gf^{(k+1)} + fg^{(k+1)} + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}f^{(i+1)}g^{(k-i)} + \binom{k}{i+1}f^{(i+1)}g^{(k-i)}$$
$$= gf^{(k+1)} + fg^{(k+1)} + \sum_{i=0}^{k-1}\left(\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1}\right)f^{(i+1)}g^{(k-i)}$$
$$= gf^{(k+1)} + fg^{(k+1)} + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k+1}{i+1}f^{(i+1)}g^{(k-i)}$$

$$= gf^{(k+1)} + fg^{(k+1)} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} f^{(i)} g^{(k+1-i)}$$
$$= \binom{k+1}{k+1} f^{(k+1)} g^{(0)} + \binom{k+1}{0} f^{(0)} g^{(k+1)} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} f^{(i)} g^{(k+1-i)}$$
$$= \binom{k+1}{0} f^{(0)} g^{(k+1)} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} f^{(i)} g^{(k+1-i)} + \binom{k+1}{k+1} f^{(k+1)} g^{(0)}$$
$$= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} f^{(i)} g^{(k+1-i)}.$$

3. Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^2$ et $g(x) = \mathrm{e}^{3x}$.

   Pour tout entier naturel n et pour tout réel x, on a $h^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x) g^{(n-i)}(x)$.

   Or, pour tout entier $n \geqslant 3$, on a $f^{(n)}(x) = 0$.

   D'où $h^{(n)}(x) = \binom{n}{0} f^{(0)}(x) g^{(n-0)}(x) + \binom{n}{1} f^{(1)}(x) g^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} f^{(2)}(x) g^{(n-2)}(x) = f(x)g^{(n)}(x) + nf^{(1)}(x)g^{(n-1)}(x) + \dfrac{n(n-1)}{2} f^{(2)}(x)g^{(n-2)}(x)$.

   Pour tout entier naturel n et pour tout réel x, on a $g^{(n)}(x) = 3^n \mathrm{e}^{3x}$, $f(x) = x^2$, $f^{(1)}(x) = 2x$ et $f^{(2)}(x) = 2$.

   Ainsi,

$$\begin{aligned} h^{(n)}(x) &= f(x)g^{(n)}(x) + nf^{(1)}(x)g^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} f^{(2)}(x)g^{(n-2)}(x) \\ &= 3^n x^2 \mathrm{e}^{3x} + 2nx3^{n-1}\mathrm{e}^{3x} + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 \times 3^{n-2}\mathrm{e}^{3x} \\ &= \mathrm{e}^{3x}\left(3^n x^2 + 3^{n-1}2nx + 3^{n-2}n(n-1)\right). \end{aligned}$$

10 Exercices Préparer le bac

Corrigé exercice 97 :

Partie A : Conjectures

1. La fonction f semble être croissante sur $[-4;2]$.
2. La fonction f semble être négative sur $[-4;0]$ et positive sur $[0;+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire

1. Pour tout réel x, on pose $h(x)=(x+2)\mathrm{e}^{x-1}$, $u(x)=x+2$ et $v(x)=\mathrm{e}^{x-1}$.

   Les fonctions t et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a $u'(x)=1$ et $v'(x)=\mathrm{e}^{x-1}$. h est de la forme $u\times v$ donc h est également dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $h'(x)=1\times \mathrm{e}^{x-1}+(x+2)\times \mathrm{e}^{x-1}=(x+3)\mathrm{e}^{x-1}$.

   Ainsi, comme $g(x)=h(x)-1$ alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $g'(x)=h'(x)=(x+3)\mathrm{e}^{x-1}$.

2. Pour tout réel $x\in[-4;2]$, on a $\mathrm{e}^{x-1}>0$ donc $g'(x)$ est du même signe que $x+3$.

   Ainsi, g' est négative sur $[-4;-3]$ et positive sur $[-3;2]$.

3. On obtient ainsi le tableau de variations ci-dessous.

x	-4		-3		2
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$-2\mathrm{e}^{-5}-1$	↘	$-\mathrm{e}^{-4}-1$	↗	$4\mathrm{e}-1$

4. On a $-3<\alpha<2$. On sait que la fonction g est croissante sur $[-3;2]$ et que $g(\alpha)=0$.

   Ainsi, g est négative sur $[-4;\alpha]$ et positive sur $[\alpha;2]$.

Partie C : Étude de la fonction f

1. Pour tout réel x, on pose $k(x)=x^2\mathrm{e}^{x-1}$, $w(x)=x^2$ et $v(x)=\mathrm{e}^{x-1}$.

   On a alors $w'(x)=2x$ et $v'(x)=\mathrm{e}^{x-1}$. k est de la forme $w\times v$, d'où $k'(x)=2x\times \mathrm{e}^{x-1}+x^2\times \mathrm{e}^{x-1}=x(x+2)\mathrm{e}^{x-1}$.

   Or, on a $f(x)=k(x)-\dfrac{x^2}{2}$ d'où $f'(x)=k'(x)-\dfrac{2x}{2}=x(x+2)\mathrm{e}^{x-1}-x=x\left((x+2)\mathrm{e}^{x-1}-1\right)$.

2. Ainsi, pour tout réel x, on a $f'(x)=x\times g(x)$.
3. On en déduit le tableau de signes ci-dessous.

x	-4		0		α		2
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. Et on en déduit ainsi le tableau de variations ci-dessous.

x	-4		0		α		2
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$16e^{-5}-8$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$4e-2$

5. Le tableau de variations précédent contredit les conjectures de la partie A : f n'est pas croissante sur $[-4;2]$ puisqu'elle est décroissante sur $[0;\alpha]$ et elle n'est pas positive sur $[0;2]$ puisqu'elle est négative au moins sur $[0;\alpha]$.

Corrigé exercice 98 :

Partie A

1. $\mathcal{D}$ passe par le point de coordonnée $(0;0)$ donc son ordonnée à l'origine vaut 0.

   De plus, son coefficient directeur vaut $\dfrac{1-0}{0,5-0}=\dfrac{1}{0,5}=2$.

   Ainsi, une équation de $\mathcal{D}$ est $y=2x$.

2. Comme la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses, il s'agit d'une tangente horizontale et donc $f'(1)=0$.

3. f semble concave sur sur $[0;1,75]$.

Partie B

1. Pour tout réel $x\in[0;3]$, on pose $u(x)=2x$ et $v(x)=\mathrm{e}^{-0,5x^2}$.

   On a alors $u'(x)=2$ et, d'après la formule de la dérivée d'une composition de fonctions, $v'(x)=-x\mathrm{e}^{-0,5x^2}$. f est de la forme $u\times v$ d'où, pour tout $x\in[0;3]$, $f'(x)=2\times\mathrm{e}^{-0,5x^2}+2x\times(-x\mathrm{e}^{-0,5x^2})=(2-2x^2)\mathrm{e}^{-0,5x^2}$.

2. Pour tout réel $x\in[0;3]$, on a $\mathrm{e}^{-0,5x^2}>0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $2-2x^2$.

   Or, $2-2x^2\geqslant 0\Leftrightarrow 2x^2\leqslant 2\Leftrightarrow x^2\leqslant 1\Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$.

   Ainsi, f' est positive sur $[0;1]$ et négative sur $[1;3]$.

x	0		1		3
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$2e^{-0,5}$	$\searrow$	$6e^{-4,5}$

3. a. Pour tout réel $x \in [0;3]$, on pose $w(x) = 2 - 2x^2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-0,5x^2}$.
On a alors $w'(x) = -4x$ et, d'après la formule de la dérivée d'une composition de fonctions, $v'(x) = -x\mathrm{e}^{-0,5x^2}$. f' est de la forme $w \times v$ d'où, pour tout $x \in [0;3]$, $f''(x) = -4x \times \mathrm{e}^{-0,5x^2} + (2-2x^2) \times (-x\mathrm{e}^{-0,5x^2}) = 2x(x^2-3)\mathrm{e}^{-0,5x^2}$.
Or, pour tout réel $x \in [0;3]$, on a $\mathrm{e}^{-0,5x^2} > 0$ et $2x > 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x^2 - 3$. Or, $x^2 - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 3 \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{3}$ ou $x \leqslant -\sqrt{3}$.
Ainsi, f'' est négative sur $\left[0;\sqrt{3}\right]$ et positive sur $\left[\sqrt{3};3\right]$.
b. Comme f'' est négative sur $\left[0;\sqrt{3}\right]$ et positive sur $\left[\sqrt{3};3\right]$, on en déduit que f est concave sur $\left[0;\sqrt{3}\right]$ et convexe sur $\left[\sqrt{3};3\right]$.

Partie C
La fonction f admet un maximum en $x = 1$ qui vaut $2\mathrm{e}^{-0,5} \approx 1,21$.
Ainsi, lors du pic de la maladie, le nombre de lits occupés est d'environ 1,21 millions.
Cette affirmation est donc correcte.

Corrigé exercice 99 :

Partie A

1. a. On a $A(-3;0)$ et $B(0;3)$. Ainsi, $f(-3) = 0$ et $f(0) = 3$.
b. Comme la droite $\mathcal{D}$ passe par le point $B(0;3)$, on en déduit que son ordonnée à l'origine est 3. Son coefficient directeur vaut $\dfrac{3-0}{0-(-3)} = \dfrac{3}{3} = 1$. Ainsi, une équation de $\mathcal{D}$ est $y = x + 3$.
Comme $\mathcal{D}$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 et que son coefficient directeur vaut 1, on en déduit que $f'(0) = 1$.

2. a. Pour tout réel x, on pose $u(x) = ax^2 + bx + c$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$. On a alors $u'(x) = 2ax + b$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
f est de la forme $u \times v$, d'où :
$f'(x) = (2ax+b)\times\mathrm{e}^{-x} + (ax^2+bx+c)\times(-\mathrm{e}^{-x}) = \left[-ax^2 + (2a-b)x + b - c\right]\mathrm{e}^{-x}$.
b. Ainsi, $f'(0) = \left[-a \times 0^2 + (2a-b) \times 0 + b - c\right]\mathrm{e}^{-0} = (b-c)\mathrm{e}^0 = b - c$.

3. a. On a $f(-3) = \left[a \times (-3)^2 + b \times (-3) + c\right]\mathrm{e}^{-(-3)} = (9a - 3b + c)\mathrm{e}^3$.
Or, $f(-3) = 0$ d'où $9a - 3b + c = 0$ car $\mathrm{e}^3 \neq 0$.
De même, on a $f(0) = (a \times 0^2 + b \times 0 + c)\mathrm{e}^{-0} = c\mathrm{e}^0 = c$.
Or, $f(0) = 3$ d'où $c = 3$.
Enfin, on a $f'(0) = 1$ et $f'(0) = b - c$ d'où $b - c = 1$.
Ainsi, a, b et c sont solutions du système $\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ b - c = 1 \\ c = 3 \end{cases}$.
b. $\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ b - c = 1 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a - 3b + 3 = 0 \\ b - 3 = 1 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases}$
Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = (x^2 + 4x + 3)\mathrm{e}^{-x}$.

Partie B

1. D'après la question 2.a. de la Partie A, on a $f'(x) = (-x^2 + (2-4)x + 4 - 3)\mathrm{e}^{-x} = (-x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{-x}$.

2. Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $-x^2 - 2x + 1$.

   Or, le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 4 + 4 = 8$.

   Comme $\Delta > 0$, le polynôme $-x^2 - 2x + 1$ admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-(-2) - \sqrt{8}}{2 \times (-1)} = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{-2} = -1 + \sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{-(-2) + \sqrt{8}}{2 \times (-1)} = \dfrac{2 + 2\sqrt{2}}{-2} = -1 - \sqrt{2}$.

   De plus, $-x^2 - 2x + 1$ est négatif à l'extérieur de ses racines et positif entre ses racines.

   Donc f' est négative sur $\left]-\infty; -1 - \sqrt{2}\right]$, positive sur $\left[-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}\right]$ et négative sur $\left[-1 + \sqrt{2}; +\infty\right[$.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$(2-2\sqrt{2})e^{1+\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$(2+2\sqrt{2})e^{1-\sqrt{2}}$	$\searrow$	$-\infty$

3. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en un point est parallèle à l'axe des abscisses lorsque $f'(x) = 0$, c'est-à-dire en $-1 - \sqrt{2}$ et en $-1 + \sqrt{2}$. On a $f(-1 - \sqrt{2}) = (2 - 2\sqrt{2})\mathrm{e}^{1+\sqrt{2}} \approx 3,2$ et $f(-1 + \sqrt{2}) = (2 + 2\sqrt{2})\mathrm{e}^{1-\sqrt{2}} \approx -9,3$.

Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 8 : Logarithme népérien

Table des matières

1 Informations sur ce chapitre

Le B.O. précise que la fonction logarithme népérien est introduite comme fonction réciproque de la fonction exponentielle étudiée en classe de première. Les élèves s'appuient sur les images mentales des courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme. Ainsi ce chapitre commence naturellement par la présentation de la fonction logarithme népérien comme réciproque de la fonction exponentielle. Les aspects analytiques et graphiques sont abordés. Puis les propriétés algébriques de la fonction logarithme sont étudiées comme conséquences de celles de la fonction exponentielle. Pour cela, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires vu dans le chapitre 6 est utilisé. Il est donc préférable d'avoir étudié ce corollaire en amont. Enfin une étude des fonctions de la forme $\ln(u)$ est faite (là encore, le théorème des valeurs intermédiaires est parfois utilisé).
Les exercices abordent chacune des compétences visées par le programme à différents niveaux de difficultés. Des exercices classiques et calculatoires sont proposés avant d'autres exercices plaçant le logarithme dans des contextes variés (probabilités, géométrie etc..). La fonction logarithme décimal fait l'objet d'un exercice de présentation et de trois exercices d'applications concrètes.

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

1. $A(x) = x^2 - 10x + 24 = (x-6)(x-4)$. Donc $A(x) \leqslant 0$ si, et seulement si, $x \in [4;6]$.

2. $B(x) = \dfrac{x^2-4}{x+3} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x+3}$. Le tableau de signe de cette expression est :

x	$-\infty$		-3		-2		2		$-\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$B(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi $B(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow]-3;-2] \cup [2;+\infty[$.

$C(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$. Le tableau de signe de cette expression est :

x	$-\infty$		-1		0		1		$-\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$C(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi $C(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow [-1;0] \cup [1;+\infty[$.

Corrigé exercice 2 :

1. $A(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. $(x-1)\mathrm{e}^x \geqslant 0$ si et seulement si $x-1 \geqslant 0$ car $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi $A(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 1$.

2. $B(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. $x - 2 \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 2$. De plus, $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 0$. Ainsi $B(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \in [0;2]$.

3. $C(x)$ est défini pour tout réel $x \neq 0$. $x+3 \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant -3$. De plus, $\mathrm{e}^x - 1 > 0$ si et seulement si $x > 0$. Ainsi $C(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \in [-3;0[$.

4. $D(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, d'après le cours de 1ere, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geqslant x$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $D(x) \geqslant 0$.

   Remarques : (1) comme indiqué dans le manuel, on peut étudier la fonction $x \mapsto D(x)$ si on ne se souvient plus de cette propriété de la classe de 1re ou (2) on peut aussi invoquer le fait que la fonction exponentielle est convexe et que donc sa représentation graphique est au dessus de sa tangente en 0 qui admet pour équation$y = x+1$.

Corrigé exercice 3 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(e^x)^4 \times e^5 = e^{4x} \times e^5 = e^{4x+5}$.

Corrigé exercice 4 :

La courbe coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -1. Donc $f(0) = -1$ c'est-à-dire $(0a + b)e^0 = -1$ soit, $b = -1$. La courbe coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2. Donc $f(2) = 0$ c'est à dire $(2a + b)e^2 = 0$ soit $(2a - 1)e^2 = 0$. On obtient alors $a = \dfrac{1}{2}$.
Ainsi $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}x - 1\right) e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Corrigé exercice 5 :

- L'exponentielle d'un nombre réel est toujours positive, donc la proposition 1 est vraie.
- La proposition 2 est fausse car si l'on prend $x = 0$ on obtient $e^{-x^2} = 1 > 0$.
- La proposition 3 est fausse. En effet, $f(0) = 1$ et $f(1) = \dfrac{1}{e}$. Donc $f(0) \geqslant f(1)$ alors que $0 \leqslant 1$. Ainsi f n'est pas croissante.

  Remarque : on aurait aussi pu utiliser le calcul de la dérivée et montrer que f est décroissante sur $[0; +\infty[$ mais il s'agit ici simplement de démontrer qu'elle n'est pas croissante.

Corrigé exercice 6 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$. Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 7 :

La représentation graphique de f_λ passe par l'origine du repère donc $f_\lambda(0) = 0$. Ainsi $\lambda \times e^0 - 2 = 0$ et donc $\lambda = 2$.

Corrigé exercice 8 :

1. Posons $X = e^x$. L'équation s'écrit alors $X^2 - X = 0$ c'est-à-dire $X(X - 1) = 0$. Ainsi $X = 0$ ou $X = 1$, c'est-à-dire $e^x = 0$ ou $e^x = 1$. Or $e^x = 0$ n'a pas de solution réelle et $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. L'unique solution est donc $x = 0$.
2. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $e^{4x+1} = e^{x^2+x+3} \Leftrightarrow 4x + 1 = x^2 + x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 2$.

Corrigé exercice 9 :

1. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :
   $e^{x^2} \geqslant e^{2-x} \Leftrightarrow x^2 \geqslant 2 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} -]-2; 1[$
2. $e^{-2x+1} \geqslant e^{4x+7} \Leftrightarrow -2x + 1 \geqslant 4x + 7 \Leftrightarrow x \leqslant -1$

Corrigé exercice 10 :

1. $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x - \mathrm{e} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$. Ainsi $A(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [0; 1]$.
2. La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ ainsi, $I = \mathbb{R}$.
3. f est dérivable sur I en tant que somme de fonctions dérivables sur I. Pour tout tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e}^x + \mathrm{e} = (\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}) = A(x)$.
4. À la question 1 on a vu que $A(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [0; 1]$. Donc $f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [0; 1]$. f est donc décroissante sur $[0; 1]$ et croissante sur $]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$.

3 Activités

3.1 Corrigé activité A :

Questions :

Partie A

1. $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

   $e^x = 0$ n'a pas de solution car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   $e^x = -1$ n'a pas de solution car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   $e^x = e \Leftrightarrow x = 1$.

2. La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a $e^0 < 2$ et $e^2 > 2$. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires étudié dans le chapitre 6 nous permet d'affirmer que cette équation a une et une seule solution.

3. L'encadrement obtenu pour la solution s est : $0,69 \leq s \leq 0,70$. La ligne 5 complète est while exp(reponse) $<$ 2 : (le code complet se trouve dans le dossier TICE).

Partie B

1. La fonction exponentielle est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. Ainsi, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $\alpha \in]0; +\infty[$, l'équation $e^x = \alpha$ admet une unique solution.

2. Voilà le code que l'on obtient :

```
1 from math import exp
2
3 def solution(alpha):
4     reponse = 0
5     while exp(reponse) < alpha:
6         reponse = reponse + 0.001
7     return reponse
```

Bilan :

D'après la question 1 de la partie B, l'équation $e^x = \alpha$ n'admet une unique solution que lorsque $\alpha > 0$. La fonction étant toujours strictement positive, cette équation n'admet pas de solution lorsque $\alpha \leqslant 0$. Par conséquent, le logarithme népérien d'un nombre négatif ou nul n'existe pas.

α	1	2	4	8	10	100
Logarithme népérien de α	0	0,693	1,386	2,079	2,303	4,605

3.2 Corrigé activité B :

Questions :

1. Par construction du point M, on a $M(a; \mathrm{e}^a)$.
2. a. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sont $\begin{pmatrix}\mathrm{e}^a - a a - \mathrm{e}^a\end{pmatrix}$. De plus, un vecteur directeur de d est $\begin{pmatrix}11\end{pmatrix}$. Le produit scalaire de ces deux vecteurs vaut 0 donc d est perpendiculaire à (MM').

   b. Le milieu de $[MM']$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{\mathrm{e}^a + a}{2}; \dfrac{\mathrm{e}^a + a}{2}\right)$. L'abscisse de ce point étant égale à son ordonnée, ce point appartient à la droite d'équation réduite $y = x$, c'est-à-dire à d.

   c. On peut en déduire que les point M et M' sont symétriques par rapport à d.
3. En notant $x = \mathrm{e}^a$, on en déduit que $a = \ln(x)$ donc l'ordonnée du point M' est $\ln(x)$.

Bilan :

Il suffit de prendre les symétriques respectifs par rapport à la droite d'équation réduite $y = x$ de plusieurs points de la représentation graphique de la fonction exponentielle et ensuite de les relier entre eux par une courbe. Cette propriété de courbes symétriques est caractéristique des fonctions réciproques.

3.3 Corrigé activité C :

Questions :

Partie A

1. On remarque que $\ln(6) = \ln(3) + \ln(2)$.
2. Oui, il semble que $\ln(35) = \ln(5) + \ln(7)$.
3. a. On conjecture que $\ln(48) = \ln(8)+\ln(6)$. La calculatrice semble confirmer cette conjecture.

   b. On conjecture que, pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Partie B

Pour tous nombres réels x et y strictement positif, on a $\mathrm{e}^{\ln(xy)} = xy$ par définition du logarithme. De plus $\mathrm{e}^{\ln(x)+\ln(y)} = \mathrm{e}^{\ln(x)}\mathrm{e}^{\ln(y)} = xy$. Ainsi $\ln(xy)$ et $\ln(x) + \ln(y)$ ont la même image par la fonction exponentielle. La fonction exponentielle étant strictement croissante, on en déduit que si deux nombres ont la même image, alors ils sont égaux. D'où, pour tous réels strictement positifs x et y, $\ln(x + y) = \ln(x) + \ln(y)$.

Bilan :

On en déduit que, pour tous réels strictement positifs x et y, $\ln(x + y) = \ln(x) + \ln(y)$.

3.4 Corrigé activité D :

1. Pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$. Ainsi la fonction $\ln(u)$ est bien définie sur I.

2. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln\left(\dfrac{u\,(x+h)}{u\,(x)}\right)}{\dfrac{u\,(x+h)}{u\,(x)} - 1} \times \dfrac{u\,(x+h) - u\,(x)}{h} \times \dfrac{1}{u\,(x)} = \lim\limits_{h \to 0} \Big(\ln(u(x+h)) - \ln(u(x)) \Big) \times \dfrac{u(x)}{u(x+h) - u(x)} \times \dfrac{u(x+h) - u(x)}{h} \times \dfrac{1}{u(x)}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(u(x+h) - \ln(u(x))}{h}$

3. a. La fonction logarithme est dérivable en 1 et son nombre dérivé en 1 vaut $\lim\limits_{X \to 1} \dfrac{\ln(X) - \ln(1)}{X - 1} = \lim\limits_{X \to 1} \dfrac{\ln(X)}{X - 1}$. De plus, la fonction dérivée de la fonction logarithme est la fonction inverse. Donc $\lim\limits_{X \to 1} \dfrac{\ln(X)}{X - 1} = \dfrac{1}{1} = 1$.

   b. Si on pose $X = \dfrac{u(x+h)}{u(x)}$ pour tout $x \in I$, puisque $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(X)}{X-1} = 1$ d'après la question précédente, alors $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln\left(\dfrac{u(x+h)}{u(x)}\right)}{\dfrac{u(x+h)}{u(x)} - 1} = 1$.

4. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}$ est la définition du nombre dérivé de u en x.

   Ainsi $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x)$.

Bilan :

En écrivant $(\ln(u))'(x)$ sous la forme d'un produit de trois facteurs et en étudiant chacun des facteurs, on a pu établir que, pour tout nombre réel strictement positif, $(\ln(u))'(x) = 1 \times u'(x) \times \dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 11 :

$\ln(125) = \ln(5^3) = 3\ln(5)$

Réponse b

Corrigé exercice 12 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$ donc l'intervalle de définition de f est $\mathbb{R}$.

Réponse d

Corrigé exercice 13 :

L'égalité n'est valable que pour $x > 0$.

Réponse b

Corrigé exercice 14 :

f est de la forme $\ln(u)$, sa dérivée est donc $\dfrac{u'}{u}$ c'est à dire $f'(x) = \dfrac{4x}{2x^2+3}$.

Réponse c

Corrigé exercice 15 :

Tout d'abord, remarquons que $\frac{2}{3} < 1$ donc $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right) < 0$.

Ainsi, l'inéquation est équivalente à $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)x > 4$ soit $x < \dfrac{4}{\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)}$ soit $x < \frac{4}{\ln(2)-\ln(3)}$.

Réponse c

Corrigé exercice 16 :

Pour $x > 0$, $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ donc f est croissante.

Réponse a

Corrigé exercice 17 :

Les valeurs remarquables du logarithme sont à connaître par coeur (voir cours).

Réponses : b et c

Corrigé exercice 18 :

On peut utiliser $\ln(e) = 1$ et les propriétés algébriques du logarithme.
La réponse a n'est pas correct car $\ln(5^5) = 5\ln(5)$ (ce qui explique pourquoi la réponse b est vraie).

Pour la réponse d, il faut remarquer que $\ln(5e^5) - \ln(5) = \ln(5) + \ln(e^5) - \ln(5) = \ln(5) + 5 - \ln(5) = 5$.

$\boxed{\text{Réponses : b, c et d}}$

Corrigé exercice 19 :

$$\ln(\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\ln(7) = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(7) = \frac{1}{2}(\ln(7) + \ln(2)) = \frac{1}{2}\ln(14)$$

$\boxed{\text{Réponses : a et b}}$

Corrigé exercice 20 :

f est de la forme $\ln(u)$, sa dérivée est de la forme $\frac{u'}{u}$ c'est-à-dire, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{2 - e^{-x}}{2x + e^{-x}} = \frac{2e^x - 1}{2xe^x + 1}$.

$\boxed{\text{Réponses : a et d}}$

Corrigé exercice 21 :

1. f est définie lorsque $x + 1 > 0$ et $x + 1 \neq 0$. Ces deux conditions se ramènent à $x > -1$. Ainsi l'ensemble de définition de f est $]-1; +\infty[$.
2. $f(e - 1) = \frac{\ln(e - 1 + 1)}{e - 1 + 1} = \frac{1}{e}$.
3. $f(3) = \frac{\ln(4)}{4} = \frac{2\ln(2)}{4} = \frac{1}{2}\ln(2) = \ln\left(\sqrt{2}\right)$.
4. Si on pose $X = x + 1$ on a $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{X \to 0} \frac{\ln(X)}{X} = -\infty$. De plus d'après le cours $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to \infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$.
5. Pour tout $x \in]-1; +\infty[$, on a $f'(x) = \frac{1 - \ln(x + 1)}{(x + 1)^2}$. Puisque $(x + 1)^2 > 0$, alors $f'(x)$ est du signe du numérateur.

   $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x + 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x + 1) \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant e - 1$. On obtient le tableau suivant :

x	-1		$e-1$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1

Questions préliminaires

1. $\ln(1) = 0$, $\ln(10) \approx 2,303$.

2.

Étape	R	M	A	B	$\ln(A)$	$\ln(B)$
Initialisation			1	10	0	$2,3026$
1	$\sqrt{10}$	$1,1513$	1	$\sqrt{10}$	0	$1,1513$
2	$\sqrt{\sqrt{10}} \approx 1,78$	$0,576$	$\sqrt{\sqrt{10}}$	$\sqrt{10}$	$0,576$	$1,1513$

Méthode 1

1. Voilà l'algorithme complété (on retrouvera le code dans le dossier TICE)

```
from math import*

def Briggs(x): #On suppose 1 < x < 10
    A = 1
    B = 10
    lnA = 0
    lnB = 2.3026
    while abs(B-x) > 10**-3 :
        R = sqrt(A*B)
        M = (lnA + lnB)/2
        if x >= R:
            A = R
            lnA = M
        else:
            B = R
            lnB = M
    return lnB

print(Briggs(2))
```

2. a. Voir programme
   b. Les valeurs de lnA et lnB tendent à se rapprocher vers une valeur environ égale à $0,69$.
   c. Les valeurs de A et B tendent à se rapprocher vers une valeur environ égale à 2.
   d. La boucle a été parcourue 13 fois pour obtenir une valeur approchée de 2.

Méthode 2

1. F3 : =racine(B3*C3) et G3 : =(D3+E3)/2

2. On retrouvera le fichier de l'énoncé et du corrigé dans le dossier TICE.

3. a. B4 : =si(F3<=B1 ;F3 ;B3)
   C4 : =si(F3<=B1 ;C3 ;F3)
   D4 : =si(F3<=B1 ;G3 ;D3)
   E4 : =si(F3<=B1 ;E3 ;G3)
   F4 : =racine(B4*C4)
   G4 : =(D4+E4)/2
   b. Voir le fichier TICE.
   c. Les valeurs de A et B se rapprochent de plus en plus d'une valeur environ égale à 2.
   d. Les valeurs lnA et lnB se rapprochent de plus en plus d'une valeur environ égale à $0,69$.

4. Sur le tableur on remarque que c'est à partir de l'étape 14 que la précision est inférieure à 10^{-3} car l'étape d'initialisation a été notée "étape 1". On a donc réalisé 14 boucles de l'algorithme.

   Pour aller plus loin : L'algorithme de Cordic permet de calculer le logarithme d'un nombre réel strictement positif d'une manière qui demande moins de calculs à l'ordinateur, cela permet de l'implémenter sur des machines avec une puissance limité. Afin d'obtenir ce gain, l'algorithme utilise des valeurs particulières pré enregistrées du logarithme. On pourra trouver le détail de cet algorithme dans l'exercice 10 du cahier de programmation python en ligne (lls.fr/pythontle).

5.2 Corrigé du TP 2

Questions préliminaires

1. Pour tout entier k strictement positif, la fonction f_k est dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x > 0$, on a $f'(k) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^k - k \times \ln(x) \times x^{k-1}}{(x^k)^2} = \dfrac{x^{k-1}(1 - k\ln(x))}{(x^k)^2}$.

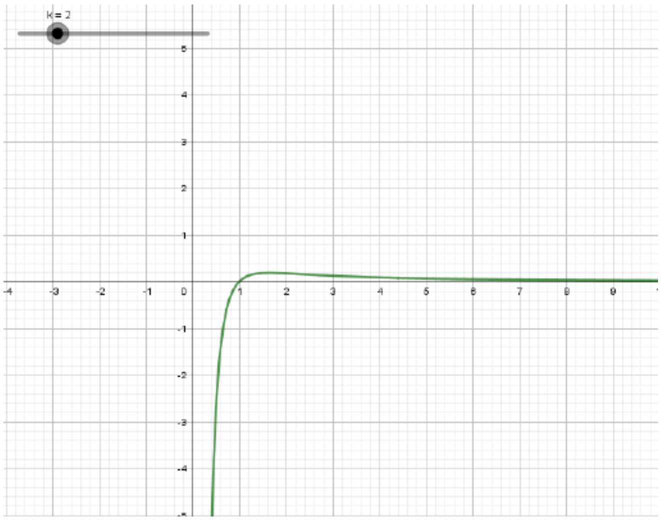
   Puisque $x > 0$, on en déduit que f'_k est du signe de $1 - k\ln(x)$. Par conséquent, f_k est croissante sur $\left[0; \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\right[$ puis décroissante sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}; +\infty\right[$.

2. Puisque $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x^k} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\ln(x)}{x^k} = -\infty$.

   En revanche, en $+\infty$, puisque $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \ln(x) = +\infty$, les opérations sur les limites ne nous permettent pas de conclure.

Méthode 1

1. On obtient :

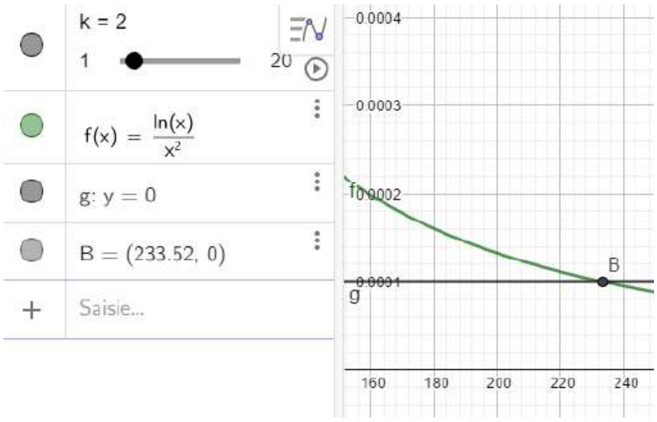


   On peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to 0} f_k(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_k(x) = 0$

2. On obtient le tableau de variations suivant.

x	0		$e^{\frac{1}{k}}$		$+\infty$
signe de f'(x)		+	0	-	
variations de f	$-\infty$	↗	$\frac{1}{ke}$	↘	0

3. En adaptant la fenêtre graphique suffisamment et en utilisant les outils d'intersection de GeoGebra, on obtient $M = 234$.



Méthode 2

1. On conjecture que la limite cherchée est 0 (voir le fichier TICE pour le programme complété).

   On obtient par exemple l'affichage suivant.

```python
from numpy import log as ln

def f(x,k):
    return ln(x)/(x**k)

for i in range(1,11):
    print(f(10*i,2))
```

```
0.02302585092994046
0.007489330683884977
0.0037791082018468394
0.0023055496588212103
0.0015648092021712584
0.0011373179339505834
0.0008670398453161957
0.000684691661667794
0.0005555320580654648
0.0004605170185988092
```

2. Voilà le tableau de variations conjecturé.

x	0		$e^{\frac{1}{k}}$		$+\infty$
signe de f'(x)		+	0	-	
variations de f	$-\infty$	↗	$\frac{1}{ke}$	↘	0

3. On obtient $M = 234$ avec, par exemple, le code suivant.

```python
from numpy import log as ln

def f(x,k):
    return ln(x)/(x**k)

def m():
    x = 2
    while f(x,2) > 10**-4:
        x = x + 10**-4
    return(x)

print(m())
```

```
233.5226000066288
```

Méthode 3

1. Voir le fichier TICE
2. Voir le fichier TICE
3. Dans la cellule B1 on écrit : =LN(A1)/A1^C$1
4. La fonction f_k semble tendre vers 0 lorsque l'on réalise plusieurs tests avec différentes valeurs de k (en modifiant la valeur de la cellule C1).
5. On dresse alors le tableau de variations conjecturé.

x	0		$e^{\frac{1}{k}}$		$+\infty$
signe de f'(x)		+	0	-	
variations de f	$-\infty$	↗	$\frac{1}{ke}$	↘	0

6. On trouve $M = 234$.

231	231	0,0001019924235
232	232	0,0001011953287
233	233	0,0001004077889
234	234	0,00009962965
235	235	0,00009886076078
236	236	0,00009810097323
237	237	0,00009735014227

Pour aller plus loin :

1. Si l'on choisit $k = -2$ la propriété devient $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \ln(x) = 0$. Cette propriété est fausse car $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$. On a donc obtenu un contre-exemple. La propriété ne peut donc pas se généraliser à $k \in \mathbb{Z}$.

2. En toute logique, si il est impossible de généraliser à $k \in \mathbb{Z}$, il est également impossible de généraliser à $k \in \mathbb{Q}$. En effet, le contre-exemple $k = -2$ peut à nouveau servir dans ce cas. Cependant on peut tout de même remarquer que si on se limite à $k \in \mathbb{Q}$ avec $k > 0$ et que l'on note N sa partie entière, alors, pour tout $x > 1$, $x^k \geqslant x^N$ donc $\dfrac{\ln(x)}{x^k} \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x^N}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^k} \leqslant \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^N}$. Or, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^N} = 0$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^k} = 0$ (car, pour $x > 1$, $\frac{\ln(x)}{x^k} > 0$).
   Ainsi, bien que l'on ne puisse pas généraliser la propriété à $k \in \mathbb{Q}$, on peut tout de même la généraliser à $k \in \mathbb{Q}$ si $k > 0$.

   On trouvera une définition rigoureuse des fonction du type $g(x) = x^a$ où $a \in \mathbb{R}$ à l'exercice 135.

3. Pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}x^k - kx^{k-1}\ln(x)}{x^{2k}} = \dfrac{x^{k-1}(1 - k\ln(x))}{x^{2k}}$ on remarque que $f'(x)$ s'annule et change de signe pour $x_k = \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}$. Or $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = 1$ et $f(1) = 0$. Ainsi, on peut conjecturer que la position asymptotique du maximum est au point de coordonnées $(1; 0)$.

6 Travailler les automatismes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 22 :

1. $\ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow x+1 = \mathrm{e} \Leftrightarrow x = \mathrm{e} - 1$.
2. $\ln(x^2+6x+10) = 0 \Leftrightarrow x^2+6x+10 = 1 \Leftrightarrow x^2+6x+9 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.
3. $\ln(x^2+1) = \ln(2) \Leftrightarrow x^2+1 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$
4. $\ln\left(\dfrac{1}{x-2}\right) = \ln(5) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow x - 2 = 0,2 \Leftrightarrow x = \frac{11}{5}$

Corrigé exercice 23 :

$\mathrm{e}^{2x} = 3 \Leftrightarrow 2x = \ln(3) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\ln(3) = \ln\left(\sqrt{3}\right)$

Corrigé exercice 24 :

1. Pour tout $x > 0$, $\ln(x) \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $\ln(x^2+1) \geqslant 1 \Leftrightarrow x^2+1 \geqslant \mathrm{e} \Leftrightarrow x^2 \geqslant \mathrm{e} - 1 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; -\sqrt{\mathrm{e}-1}\right] \cup \left[\sqrt{\mathrm{e}-1}; +\infty\right[$.
3. Pour tout $x > 0$ on a : $\ln(x) \leqslant \ln(x^2+x+1) \Leftrightarrow x \leqslant x^2+x+1 \Leftrightarrow x^2+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Corrigé exercice 25 :

$\ln(54) - \ln(2) = \ln\left(\dfrac{54}{2}\right) = \ln(27) = \ln(3^3) = 3\ln(3)$.
Autre méthode :
$\ln(54) - \ln(2) = \ln(2 \times 3 \times 3 \times 3) - \ln(2) = \ln(2) + \ln(3) + \ln(3) + \ln(3) - \ln(2) = 3\ln(3)$.

Corrigé exercice 26 :

Pour tout réels $x > 0$:

1. $f_1'(x) = \mathrm{e}^x \times \ln(x) + \mathrm{e}^x \times \dfrac{1}{x} = \mathrm{e}^x\left(\ln(x) + \dfrac{1}{x}\right)$
2. $f_2'(x) = \dfrac{1}{x} - \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1+x}{x^2}$
3. $f_3'(x) = 1 \times \ln(x) + (x+3) \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + \dfrac{x+3}{x}$
4. $f_4'(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\ln(x)} = \dfrac{x+1}{x}\mathrm{e}^{x+\ln(x)}$

6.2 Exercices

Corrigé exercice 27 :

1. $\mathrm{e}^{2x+1} = 3 \Leftrightarrow 2x+1 = \ln(3) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}(\ln(3)-1) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{3}{e}}\right)$
2. $\mathrm{e}^{-4x+2} - 5 = 0 \Leftrightarrow -4x+2 = \ln(5) \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{4}(\ln(5)-2)$
3. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x-7}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{7-x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 7-x = \ln(\sqrt{2}) \Leftrightarrow x = 7 - \dfrac{1}{2}\ln(2)$

Corrigé exercice 28 :

1. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x+4}}{\mathrm{e}^{x-7}} = 4 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x+4-x+7} = 4 \Leftrightarrow 2x+11 = \ln(4) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(4)-11}{2}$
2. $\mathrm{e}^{x^2-4} = 10 \Leftrightarrow x^2 - 4 = \ln(10) \Leftrightarrow x = \sqrt{4+\ln(10)}$ ou $x = -\sqrt{4+\ln(10)}$.
3. $\exp\left(\dfrac{3x+2}{-x+5}\right) = 10 \Leftrightarrow \dfrac{3x+2}{-x+5} = \ln(10) \Leftrightarrow 3x+2 = -\ln(10)x + 5\ln(10) \Leftrightarrow x = \dfrac{2-5\ln(10)}{-3-\ln(10)}$

Corrigé exercice 29 :

La fonction f est dérivable sur son intervalle de définition. On a $f'(x) = 1 \times \ln(x) + (x+1) \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{x\ln(x)+x+1}{x}$. Sur l'intervalle $[1;+\infty[$, $\ln(x) \geqslant 0$ donc $x\ln(x) \geqslant 0$ donc $x\ln(x)+x+1 \geqslant 1$ donc $f'(x) \geqslant 0$. Ainsi f est croissante sur $[1;+\infty[$. On peut même remarquer qu'elle est strictement croissante.

Corrigé exercice 30 :

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, on a $g'(x) = \dfrac{2}{x} - 5 = \dfrac{2-5x}{x}$.
Cette expression est du signe de $2-5x$ car $x > 0$ et donc $g'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in \left]0;\frac{2}{5}\right[$. Ainsi g est croissante sur $\left]0;\frac{2}{5}\right[$ et décroissante ailleurs.

Corrigé exercice 31 :

$\ln(a)x + \mathrm{e} > 0 \Leftrightarrow \ln(a)x > -\mathrm{e}$

- Si $a = 1$, $\ln(a) = 0$, il n'y a pas de solution.
- Si $a < 1$, $\ln(a) < 0$ et $x < \dfrac{-\mathrm{e}}{\ln(a)}$.
- Si $a > 1$, $\ln(a) > 0$ et $x > \dfrac{-\mathrm{e}}{\ln(a)}$.

Corrigé exercice 32 :

Remarquons pour commencer que a doit être strictement positif.
L'équation $x^2 - \ln(a) = 0$ est une équation du second degré. Elle admet deux solutions distinctes si et seulement si son discriminant est strictement positif. Or, ce discriminant est égal à $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times (-\ln(a)) = 4\ln(a)$. Il y a donc deux solutions distinctes si et seulement si $4\ln(a) > 0$ c'est à dire $\ln(a) > 0$ soit $a > 1$.

Corrigé exercice 33 :

$\ln(x^2-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x^2-1) \geqslant \ln(1) \Leftrightarrow x^2-1 \geqslant 1 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 2 \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{2}$ car $x \in]1;+\infty[$.

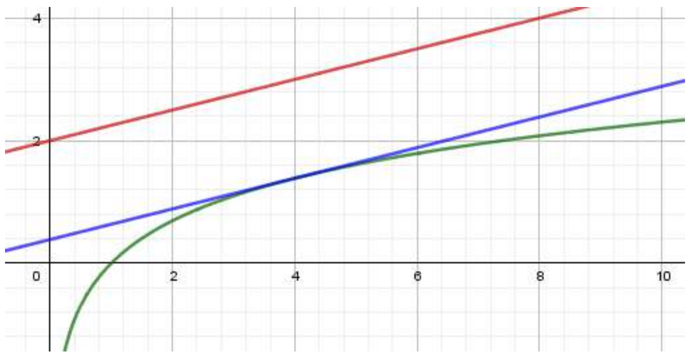
Corrigé exercice 34 :

La proposition 2 est fausse. Pour le prouver, il suffit de proposer un contre-exemple. Prenons $x = \mathrm{e}$. Cette valeur de x vérifie bien $x > 0$, cependant, $\ln(\mathrm{e}^2) = 2\ln(e) = 2$ et $(\ln(\mathrm{e}))^2 = 1^2 = 1$. Ainsi, e vérifie bien les hypothèses de l'affirmation, mais pas la conclusion. L'affirmation 2 est donc bien fausse.
Dans la mesure où l'énoncé demande de trouver la réponse fausse, on est sûr qu'il n'y en a qu'une et l'exercice peut s'arrêter ici. Cependant, on peut remarquer que :

- En dérivant la fonction proposée, l'affirmation 1 est vraie.
- La dérivée de la fonction logarithme est la fonction inverse qui est décroissante sur $]0;+\infty[$, donc l'affirmation 3 est vraie.
- Le cours nous donne que l'affirmation 4 est vraie.

Corrigé exercice 35 :

1. Le graphique complet est le suivant ($\mathcal{C}_f$ est en vert et $\mathcal{C}_g$ est en rouge) :



2. La tangente au point d'abscisse $x_0 > 0$ à la représentation graphique de la fonction logarithme a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{x_0}$. Pour que cette tangente soit parallèle à $\mathcal{C}_g$, il faut et il suffit que $\dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{4}$, c'est à dire $x_0 = 4$. T a pour équation $y = 0,25(x-4) + \ln(4) = 0,25x + (\ln(4) - 1)$.
3. La tangente est tracée en bleue sur le graphique ci-dessus.

Corrigé exercice 36 :

On rappelle que la fonction ln est strictement croissante sur son ensemble de définition.

1. $\ln(x-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow x-1 \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 2.$
2. $\ln\left(\dfrac{x^2}{5x-6}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{5x-6} \geqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{5x-6} - 1 \geqslant 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-5x+6}{5x-6} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(x-3)}{5x-6} \geqslant 0$
$\Leftrightarrow x \in \left]\dfrac{6}{5};2\right] \cup [3;+\infty[.$
3. $\ln((x-1)(x+1)) \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \geqslant 1 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 2 \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{2}$(car l'énoncé précise que $x > 1$)

Corrigé exercice 37 :

1. D'après le cours on sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) = \lim\limits_{x\to 0} x \times \lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0.$
2. Si on pose $X = x-1$. Alors $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\ln(x-1) = \lim\limits_{X\to 0} X\ln(X) = 0.$
3. Pour $k=2$, on a traité le problème à la première question. Supposons maintenant $k \geqslant 3$. D'après le cours, on sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} x^k\ln(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^{k-1} \times \lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0.$

Corrigé exercice 38 :

$\ln(2)+\ln(4)+\ln(8) = \ln(2)+\ln(2^2)+\ln(2^3) = \ln(2)+2\ln(2)+3\ln(2) = 6\ln(2)$

Corrigé exercice 39 :

$\ln(3)+\ln(27)+\ln(81) = \ln(3)+\ln(3^2)+\ln(3^3) = \ln(3)+2\ln(3)+3\ln(3) = 6\ln(3)$

Corrigé exercice 40 :

- $\ln(54)-2\ln(3) = \ln(2\times 3^3)-2\ln(3) = \ln(2)+3\ln(3)-2\ln(3) = \ln(2)+\ln(3) = \ln(6)$
- $\ln(\sqrt{72}) = \dfrac{1}{2}\ln(72) = \dfrac{1}{2}\ln(6^2\times 2) = \dfrac{1}{2}2\ln(6)+\dfrac{1}{2}\ln(2) = \ln(6)+\dfrac{1}{2}\ln(2)$

Corrigé exercice 41 :

$\dfrac{\ln(27)}{\ln(343)} = \dfrac{\ln(3^3)}{\ln(7^3)} = \dfrac{3\ln(3)}{3\ln(7)} = \dfrac{\ln(3)}{\ln(7)}$

Corrigé exercice 42 :

1. $\ln\left(\left(2^5\right)^3\right) = \ln\left(2^{15}\right) = 15\ln(2)$
2. $\ln(5^2\times 2^5) = \ln(5^2)+\ln(2^5) = 2\ln(5)+5\ln(2)$

Corrigé exercice 43 :

$\frac{1}{2}\ln(20^2+21^2) = \frac{1}{2}\ln(400+441) = \frac{1}{2}\ln(841) = \frac{1}{2}\ln(29^2) = \frac{2}{2}\ln(29) = \ln(29)$

Corrigé exercice 44 :

1. On a $1,609 \leqslant \ln(5) \leqslant 1,610$.
2. $\ln(25) = 2\ln(5)$ donc $3,218 \leqslant \ln(25) \leqslant 3,22$.
   $\ln(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\ln(5)$ donc $0,804 \leqslant \ln(\sqrt{5}) \leqslant 0,805$.
   $\ln(625) = 4\ln(5)$ donc $6,436 \leqslant \ln(625) \leqslant 6,44$.
   $\ln\left(\frac{e}{125}\right) = 1 - 3\ln(5)$ donc $-3,83 \leqslant \ln\left(\frac{e}{125}\right) \leqslant -3,827$.

Corrigé exercice 45 :

Pour tous nombres réels strictement positifs x et y on a :
$\ln(x^2y) - 2\ln(\sqrt{x}y^5) + \ln(y^9) = \ln(x^2) + \ln(y) - 2\ln(\sqrt{x}) - 2\ln(y^5) + \ln(y^9) = 2\ln(x) + \ln(y) - \frac{2}{2}\ln(x) - 10\ln(y) + 9\ln(y) = \ln(x)$

Corrigé exercice 46 :

Soit x un réel strictement supérieur à 1.

1. $A(x) = \ln(3x^2) = \ln(3) + \ln(x^2) = \ln(3) + 2\ln(x)$.
2. $B(x) = \ln(x+4) - \ln(4x+x^2) = \ln(x+4) - \ln((4+x)x) = \ln(x+4) - \ln(4+x) - \ln(x) = -\ln(x)$
3. $C(x) = \ln(x^3 - x^2) - \ln(x-1) = \ln(x^2(x-1)) - \ln(x-1) = \ln(x^2) + \ln(x-1) - \ln(x-1) = \ln(x^2) = 2\ln(x)$.
4. $D(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(x^2\right) = -\ln(x) + 2\ln(x) = \ln(x)$.
5. $E(x) = \ln(\sqrt{x}) + \ln(x^2) = \frac{1}{2}\ln(x) + 2\ln(x) = \frac{5}{2}\ln(x)$.

Corrigé exercice 47 :

1. $3^n > 125 \Leftrightarrow \ln(3^n) > \ln(125) \Leftrightarrow n\ln(3) > 3\ln(5) \Leftrightarrow n > \frac{3\ln(5)}{\ln(3)}$ car $\ln(3) > 0$. La résolution dans $\mathbb{N}$ est donc $n > 4$.
2. $5^n \leqslant 10000 \Leftrightarrow \ln(5^n) \leqslant \ln(10000) \Leftrightarrow n\ln(5) \leqslant 4\ln(10) \Leftrightarrow n \leqslant \frac{4\ln(10)}{\ln(5)}$ car $\ln(5) > 0$. La résolution dans $\mathbb{N}$ est donc $n \leqslant 5$.
3. $0,5^n < 0,001 \Leftrightarrow \ln(0,5^n) < \ln(0,001) \Leftrightarrow n\ln(0,5) < -3\ln(10)$
   $\Leftrightarrow n > \frac{-3\ln(10)}{\ln(0,5)}$ car $\ln(0,5) < 0$. La résolution dans $\mathbb{N}$ est donc $n > 9$.

4. $\left(\frac{2}{3}\right)^n < 10^{-4} \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{2}{3}\right) < -4\ln(10) \Leftrightarrow n > \dfrac{-4\ln(10)}{\ln(\frac{2}{3})}$ car $\ln(\frac{2}{3}) < 0$. La résolution dans $\mathbb{N}$ est donc $n > 22$.

Corrigé exercice 48 :

1. $2^{n-6} > 1000 \iff (n-6)\ln(2) > \ln(1000) \iff n > \dfrac{\ln(1000)}{\ln(2)} + 6 \iff n > 15.$
2. $0,8^n < 0,05 \Leftrightarrow n\ln(0,8) < \ln(0,05) \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,8)} \Leftrightarrow n > 13.$
3. $1 - 0,3^n > 0,95 \Leftrightarrow 0,05 > 0,3^n \Leftrightarrow \ln(0,05) > n\ln(0,3) \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,3)} \Leftrightarrow n > 2$
4. $\dfrac{4^n}{5^{n-1}} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^n > \frac{1}{5} \Leftrightarrow n\ln(0,8) > -\ln(5) \Leftrightarrow n < \dfrac{-\ln(5)}{\ln(0,8)} \Leftrightarrow n < 8$

Corrigé exercice 49 :

Le problème peut se formuler $1000 \times 0,95^n < 500$ où n est un nombre entier qui représente le nombre de mois passés. Cette inéquation peut se réécrire $0,95^n < 0,5$ c'est à dire $\ln(0,95^n) < \ln(0,5)$ soit $n\ln(0,95) < \ln(0,5)$ donc $n > \dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}$ donc $n > 13$.
Au bout du quatorzième mois, il reste moins de 500€ sur le compte d'Yzia. L'utilisation d'un tableur permet de visualiser la situation.

Année	Argent
0	1000
1	950
2	902,5
3	857,375
4	814,50625
5	773,7809375
6	735,0918906
7	698,3372961
8	663,4204313
9	630,2494097
10	598,7369392
11	568,8000923
12	540,3600877
13	513,3420833
14	487,6749791
15	463,2912302
16	440,1266687
17	418,1203352
18	397,2143185
19	377,3536025
20	358,4859224
21	340,5616263
22	323,533545
23	307,3568677
24	291,9890243
25	277,3895731
26	263,5200945
27	250,3440897
28	237,8268853

Corrigé exercice 50 :

f est de la forme $\ln(u)$, donc d'après le cours, f a les mêmes variations que la fonction g définie pour tout $x > \frac{-1}{7}$ par $g(x) = 7x + 1$. g est croissante sur son ensemble de définition. Donc f est croissante sur son ensemble de définition.

Corrigé exercice 51 :

1. La dérivée de f est définie par $f'(x) = \frac{2}{x}$ pour tout $x > 0$. En effet, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = 2\ln(x)$.
   Méthode alternative : On peut utiliser la formule de dérivation des fonctions du type $\ln(u)$. On a alors $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$.
2. $g'(x) = \frac{3}{3x+1}$ car g est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = 3x + 1$ et $u'(x) = 3$.
3. $h'(x) = \frac{3x^2}{x^3+2}$ car h est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = x^3 + 2$ et $u'(x) = 3x^2$.
4. $k(x) = -\ln(x)$ donc $k'(x) = -\frac{1}{x}$.
5. $\ell(x) = \frac{1}{2}\ln(x)$ donc $\ell'(x) = \frac{1}{2x}$.

Corrigé exercice 52 :

On peut utiliser la formule de dérivation des fonctions du type $\ln(u)$ avec u définie et strictement positive pour $x > \frac{2}{5}$ par $u(x) = 5x - 2$. On a alors $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{5}{5x-2}$.
La fonction h est donc la fonction dérivée de f.

Corrigé exercice 53 :

On remarque que $f(1) = \ln(\frac{1}{1}) = 0$ et $f(e) = \ln(\frac{1}{e}) = -\ln(e) = -1 < 0$. La seule courbe possible parmi les trois est la courbe $\mathcal{C}_1$ (courbe rose).

Corrigé exercice 54 :

On peut par exemple raisonner de la façon suivante pour déterminer une inéquation possible.
$x \in \left]\frac{\ln(0,6)}{\ln(0,08)};+\infty\right[\Leftrightarrow x > \frac{\ln(0,6)}{\ln(0,08)} \Leftrightarrow x\ln(0,08) < \ln(0,6) \Leftrightarrow \ln(0,08^x) < \ln(0,6) \Leftrightarrow 0,08^x < 0,6$.

Corrigé exercice 55 :

On remarque que la fonction f définie pour tout $x > 3$ par $f(x) = 3\ln(x-3)$ est dérivable et que sa dérivée est définie par $f'(x) = \dfrac{3}{x-3}$ pour tout $x > 3$, ce qui satisfait bien la conditionné donnée dans l'énoncé.

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 56 :

1. $\mathrm{e}^{\ln(\ln(5))} = \ln(5)$.
2. $\mathrm{e}^{\ln(\mathrm{e}^3)} = \mathrm{e}^3$.
3. $\ln(\mathrm{e}^{\ln(4)}) = \ln(4)$.
4. $\ln(\mathrm{e}^x) + \ln(e) = x + 1$ où $x \in \mathbb{R}$.

Corrigé exercice 57 :

1. Vrai d'après une propriété du logarithme du cours.
2. Faux, si $x = \mathrm{e}^5$ alors $\ln(x) = 5$.
3. Faux, si $x = \ln(5)$ alors $\ln(x) = \ln(\ln(5))$ et comme la fonction ln est strictement croissante et que $5 > \ln(5)$ alors $\ln(5) > \ln(\ln(5))$.

Corrigé exercice 58 :

La fonction f définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \ln(x) + 2x + 3$ est dérivable et sa dérivée est définie pour tout $x > 0$ par $f'(x) = \dfrac{1}{x} + 2 = \dfrac{2x+1}{x}$. Pour tout $x > 0$, $2x + 1 > 0$ et donc $f'(x) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Corrigé exercice 59 :

$\mathrm{e}^{5x+1} = 2 \Leftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^{5x+1}\right) = \ln(2) \Leftrightarrow 5x + 1 = \ln(2) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(2) - 1}{5}$.

Corrigé exercice 60 :

1. $\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^x + 6 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 5X + 6 = 0$ en posant $X = \mathrm{e}^x$. On remarque que, nécessairement, $X > 0$. L'équation $X^2 - 5X + 6 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 1$ et donc cette équation a deux solutions réelles $X_1 = 2$ et $X_2 = 3$. Ces deux nombres sont strictement positif donc les solutions de $\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^x + 6 = 0$ sont $x_1 = \ln(X_1) = \ln(2)$ et $x_2 = \ln(X_2) = \ln(3)$.
2. $\mathrm{e}^{2x} - 6\mathrm{e}^x + 4 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 6X + 4 = 0$ en posant $X = \mathrm{e}^x$. On remarque que, nécessairement, $X > 0$. L'équation $X^2 - 6X + 4 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 20$ et donc cette équation a deux solutions réelles $X_1 = 3 + \sqrt{5}$ et $X_2 = 3 - \sqrt{5}$. Ces deux nombres sont strictement positif donc les solutions de $\mathrm{e}^{2x} - 6\mathrm{e}^x + 4 = 0$ sont $x_1 = \ln(3 + \sqrt{5})$ et $x_2 = \ln(3 - \sqrt{5})$.

Corrigé exercice 61 :

$\mathrm{e}^{3x} - 2\mathrm{e}^x = 0 \Leftrightarrow X^3 - 2X = 0$ en posant $X = \mathrm{e}^x$. On remarque que, nécessairement, $X > 0$. Or, $X^3 - 2X = X(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ donc l'équation $X^3 - 2X = 0$ a trois solutions $X_1 = 0$, $X_2 = -\sqrt{2}$ et $X_3 = \sqrt{2}$. Les équations $\mathrm{e}^x = X_1$ et $\mathrm{e}^x = X_2$ n'ont pas de solution car $X_1 \leqslant 0$ et $X_2 \leqslant 0$. Donc la seule solution de l'équation est initiale est $x_3 = \ln(X_3) = \frac{1}{2}\ln(2)$.

Corrigé exercice 62 :

1. L'inéquation $e^{2x} - 7e^x + 12 > 0$ peut s'écrire $X^2 - 7X + 12 > 0$ avec $X = e^x$.On remarque que, nécessairement, $X > 0$. Les racines du trinôme $X^2 - 7X + 12$ sont $X_1 = 4$ et $X_2 = 3$. Donc $X^2 - 7X + 12 > 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty; 3[\cup]4; +\infty[\Leftrightarrow x \in]-\infty; \ln(3)[\cup]\ln(4); +\infty[$.

2. L'inéquation $e^{2x} + e^x - 6 > 0$ peut s'écrire $X^2 + X - 6 > 0$ avec $X = e^x$. On remarque que, nécessairement, $X > 0$. Les racines du trinôme $X^2 + X - 6$ sont $X_1 = -3$ et $X_2 = 2$. Donc $X^2 + X - 6 > 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[\Leftrightarrow x \in]\ln(2); +\infty[$.

Corrigé exercice 63 :

1. $(\ln(x))^2 + 4\ln(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow X^2 + 4X + 4 = 0$ en posant $X = \ln(x)$. On remarque que $X \in \mathbb{R}$ alors que $x > 0$. L'équation $X^2 + 4X + 4 = 0$ a une seule solution $X = -2$. Ainsi $\ln(x) = -2$ et donc $x = e^{-2}$. L'équation a donc une seule solution : $x = e^{-2}$.

2. $2(\ln(x))^2 + 20\ln(x) + 43 = 1 \Leftrightarrow (\ln(x))^2 + 10\ln(x) + 21 = 0 \Leftrightarrow X^2 + 10X + 21 = 0$ en posant $X = \ln(x)$. On remarque que $X \in \mathbb{R}$ alors que $x > 0$. L'équation $X^2 + 10X + 21 = 0$ a deux solutions $X_1 = -3$ et $X_2 = -7$. Ainsi $\ln(x) = -3$ ou $\ln(x) = -7$ et donc $x = e^{-3}$ ou $x = e^{-7}$. L'équation a donc deux solutions : $x_1 = e^{-3}$ et $x_2 = e^{-7}$.

Corrigé exercice 64 :

En posant $X = \ln(x)$ et $Y = \ln(y)$, le système devient $\begin{cases} X + Y = 25 \\ 2X + Y = 1 \end{cases}$.
On soustrait la première ligne à la deuxième, alors on obtient $X = -24$ et, en reportant dans la première équation, $-24 + Y = 25$ c'est à dire $Y = 49$. Or $X = \ln(x)$ donc $x = e^{-24}$ et puisque $Y = \ln(y)$ alors $x = e^{49}$. La solution du système est donc $(e^{-24}; e^{49})$.

Corrigé exercice 65 :

Une fonction de la forme $\ln(u(x))$ est définie si et seulement si $u(x) > 0$. Or on a :

- $x^3 - 1 < 0$ pour $x = 0$ donc f_1 n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.
- $x^3 + x^2 < 0$ pour $x = -2$ donc f_2 n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.
- $x^2 + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f_3 est définie sur $\mathbb{R}$.
- $x^4 + x^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f_4 est définie sur $\mathbb{R}$ sauf pour $x = 0$ qui est la seule solution de $f_4(x) = 0$. f_4 est donc définie sur $\mathbb{R}^*$.
- $x^{-4} + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f_5 est définie sur $\mathbb{R}$.
- $x^7 - x^{-1} < 0$ pour $x = 0,1$ donc f_6 n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 66 :

D'après le cours, une expression de la forme $\ln(u(x))$ est définie si, et seulement si, $u(x) > 0$.

1. $(x+1)^2+1>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc l'expression est définie sur $\mathbb{R}$.
2. $x^2-1>0$ pour $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$. Donc l'expression est définie sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.
3. $x^2-4x+4=(x-2)^2>0$ pour $x \neq 2$. Donc l'expression est définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.
4. $x^2+6x+10$ est un trinôme du second degré dont le discriminant est -4. Donc $x^2+6x+10>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc l'expression est définie sur $\mathbb{R}$.
5. En étudiant le signe de $\frac{x+2}{2x-1}$ à l'aide d'un tableau de signes, on démontre que $\dfrac{x+2}{2x-1} > 0$ pour $x \in]-\infty;-2[\cup \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$. Ainsi l'expression est définie pour $x \in]-\infty;-2[\cup \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

Corrigé exercice 67 :

1. Pour tout $x>0$, on a $-1 \leqslant \sin(\ln(x)) \leqslant 1$ donc $\dfrac{-1}{x^2+1} \leqslant \dfrac{\sin(\ln(x))}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{x^2+1}$. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(\ln(x))}{x^2+1}=0$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x)=0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2x^2\ln(x)=0$.
3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-1x+2}{x^3+7x^2+3x+4}=1$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to 1} \ln\left(\dfrac{x^3+2x^2-x+2}{x^3+7x^2+3x+4}\right)=0$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x+7}{x^3+3x+4}=0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2+2x+7}{x^3+3x+4}\right)=-\infty$.

Corrigé exercice 68 :

1. D'une part, pour que $\ln(x)$ soit définie, on doit avoir $x>0$. D'autre part, pour que la fraction soit définie, on doit avoir $\ln(x)\neq 0$ soit $x \neq 1$. La fonction f est donc définie sur $I=]0;1[\cup]1;+\infty[$.
2. La fonction f est dérivable sur I en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur I et qui ne s'annule pas. Pour tout $x \in I$, $f'(x)=\dfrac{0\times\ln(x)-1\times\dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2}=\dfrac{-1}{x(\ln(x))^2}$.
3. $f'(x)$ est du signe de $\dfrac{-1}{x}$ qui est strictement négatif pour $x \in I$. Donc f est décroissante sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	||	$-$	
Variations de de f	$0 \searrow -\infty$		||	$+\infty \searrow 0$	

4. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = 0$. On remarque que pour $x < 1$, $\ln(x) < 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$. Pour $x > 1$, $\ln(x) > 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$. La représentation graphique de f a donc deux asymptotes, l'une horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$ et l'autre verticale d'équation $x = 1$.

Corrigé exercice 69 :

Les fonctions de l'énoncé sont toutes dérivables sur $]1;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 1$:

1. $f_1'(x) = \dfrac{1}{x} + 2$.
2. $f_2'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{1-2\ln(x)}{x^3}$.
3. $f_3'(x) = \dfrac{\left(\frac{1}{x}+2x\right)(x+1) - (\ln(x)+x^2)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-\ln(x)+1+\frac{1}{x}}{(x+1)^2}$.
4. $f_4'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{3x^2\ln(x) - x^3\frac{1}{x}}{\ln(x)^2} = \frac{(\ln(x))^2 - x^3(3\ln(x)-1)}{x(\ln(x))^2}$.

Corrigé exercice 70 :

1. L'équation réduite de la tangente T_n au point d'abscisse n à la représentation graphique de la fonction logarithme f définie pour $x > 0$ par $f(x) = \ln(x)$ s'écrit : $y = f'(n)(x-n) + f(n)$ c'est à dire $y = \dfrac{1}{n}(x-n) + \ln(n)$ soit $y = \dfrac{1}{n}x + \ln(n) - 1$. L'intersection de T_n avec l'axe des abscisses a pour ordonnée $y = 0$ et pour abscisse la solution de l'équation $\dfrac{1}{n}x + \ln(n) - 1 = 0$ c'est à dire $A_n = n(1-\ln(n))$.
2. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\ln(n) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-\ln(n)) = -\infty$.

Corrigé exercice 71 :

Notons $k(x)$ la distance M_xN_x.
Puisque la courbe de la fonction carré est au-dessus de la courbe de la fonction logarithme sur $]0;+\infty[$, on a, pour tout réel $x > 0$, $k(x) = x^2 - \ln(x)$.

On a alors $k'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2-1}{x}$. Or, $x > 0$, donc $k'(x)$ est du signe de $2x^2 - 1$, c'est-à-dire $k'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. k admet donc un minimum pour $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Corrigé exercice 72 :

Soit $\alpha > 0$.

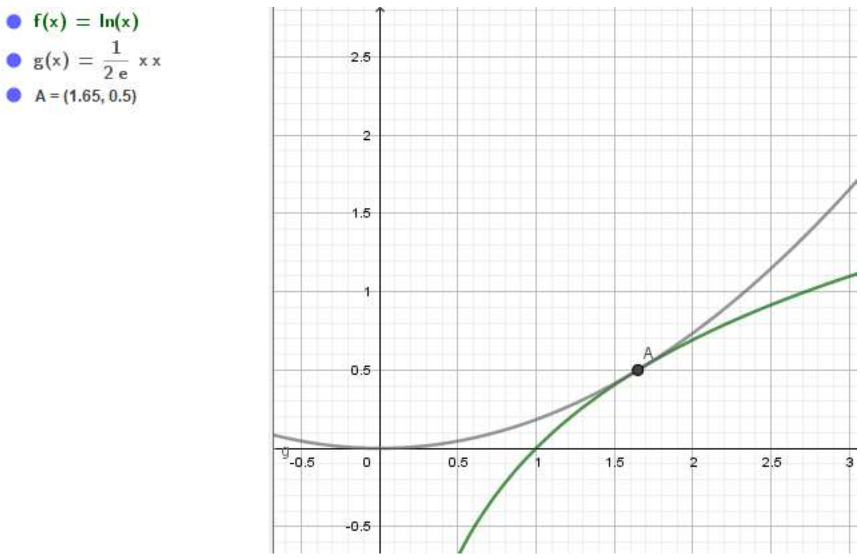
1. Le problème revient à trouver un critère sur α pour que l'équation $g(x) - f(x) = 0$ (soit $\alpha x^2 - \ln(x) = 0$) ait une solution. Notons k la fonction définie pour tout $x > 0$ par $k(x) = \alpha x^2 - \ln(x)$. On a $k'(x) = \dfrac{2\alpha x^2 - 1}{x}$ dont le signe est le même que le signe de $2\alpha x^2 - 1$, c'est à dire $k'(x) > 0$ pour $x > x_0$ avec $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2\alpha}}$. k admet donc un minimum en x_0. Or $k(x_0) = \dfrac{1}{2}(1 + \ln(\alpha) + \ln(2))$. Cette expression est négative pour $\alpha < \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$.

   - 1er cas : $\alpha < \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$: étant donné que $k(1) = \alpha$, $\alpha > 0$ et que k est continue, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure l'existence d'un réel β tel que $k(\beta) = g(\beta) - f(\beta) = 0$.
   - 2ème cas : $\alpha = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$. Dans ce cas, cette valeur convient.
   - 3ème cas : $\alpha > \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$: dans ce cas $k(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et k ne s'annule jamais.

   La plus grande valeur de α cherchée est donc $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$.

2. a. Il y en a exactement un, comme le montre le deuxième cas de la question précédente.

   b. On peut remarquer graphiquement que l'intersection des deux courbes semble avoir lieu au point A d'ordonnée $y = 0,5$.



Etant donné que le point A appartient à $\mathcal{C}_f$, son abscisse est alors $x = \mathrm{e}^{0,5}$. Montrons alors que $A \in \mathcal{C}_g$. $g(\mathrm{e}^{0,5}) = \dfrac{1}{2\mathrm{e}} \times \mathrm{e}^{2\times 0,5} = \dfrac{1}{2}$. Ainsi le point A appartient au deux courbes. On a également démontré que ce point est le seul point d'intersection.

Autre méthode :

$\dfrac{1}{2e}x^2 = \ln(x) \Leftrightarrow \dfrac{1}{e}x^2 = 2\ln(x) \Leftrightarrow \dfrac{1}{e} = \dfrac{\ln(x^2)}{x^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{e} = \dfrac{\ln(X)}{X}$

en posant $X = x^2$. Remarquons que $X > 0$.

Donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $X = ke$ et $\ln(X) = k$.

On a alors $\ln(ke) = k$ soit $\ln(k) + 1 = k$ soit encore. $\ln(k) = k - 1$. En utilisant la tangente à la courbe de la fonction ln au point d'abscisse 1, on trouve donc $k = 1$. Par conséquent $X = \mathrm{e}$ et donc $x = \mathrm{e}^{0,5}$.

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 73 :

1. $\ln(e\sqrt{3}) = \ln(e) + \ln(\sqrt{3}) = 1 + \frac{1}{2}\ln(3)$
2. $\ln\left(\frac{e}{3^3}\right) = \ln(e) - \ln(3^3) = 1 - 3\ln(3)$
3. $\ln(3^3 e) = \ln(3^3) + \ln(e) = 3\ln(3) + 1$
4. $\ln(3\mathrm{e}^3) = \ln(3) + \ln(\mathrm{e}^3) = \ln(3) + 3\ln(e) = \ln(3) + 3$

Corrigé exercice 74 :

$A = \ln(49) + \ln(21) - \ln(3\sqrt{7}) = \ln(7^2) + \ln(7 \times 3) - \ln(3\sqrt{7}) = 2\ln(7) + \ln(7) + \ln(3) - \ln(3) - \frac{1}{2}\ln(7) = \frac{5}{2}\ln(7)$

Corrigé exercice 75 :

$B = \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}\right) + \ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}+2}\right) - \ln\left(\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}+2}\right) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}\right) + \ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}+2}\right) + \ln\left(\frac{\mathrm{e}+2}{\mathrm{e}^2}\right)$
$= \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1} \times \frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}+2} \times \frac{\mathrm{e}+2}{\mathrm{e}^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -1$

Corrigé exercice 76 :

$\ln(56) - \ln(7) - \ln(4) = \ln\left(\frac{56}{7}\right) - \ln(4) = \ln\left(\frac{8}{4}\right) = \ln(2)$

Corrigé exercice 77 :

1. On a $0,6 \leqslant \ln(2) \leqslant 0,7$ et $1,9 \leqslant \ln(7) \leqslant 2$.
2. On a alors :
   - $\ln(2^a) = a\ln(2)$ donc $0,6a \leqslant \ln(2^a) \leqslant 0,7a$.
   - $\ln(14a) = \ln(2) + \ln(7) + \ln(a)$ donc $2,6 + \ln(a) \leqslant \ln(14a) \leqslant 2,7 + \ln(a)$.
   - $\ln\left(\frac{7}{2a}\right) = \ln(7) - \ln(2) - \ln(a)$ donc $1,2 - \ln(a) \leqslant \ln\left(\frac{7}{2a}\right) \leqslant 1,4 - \ln(a)$.
   - $\ln\left(\frac{1}{49}\right) = -2\ln(7)$ donc $-4 \leqslant \ln\left(\frac{1}{49}\right) \leqslant -3,8$.

Corrigé exercice 78 :

$\ln(\sqrt{216}) = \frac{1}{2}\ln(216) = \frac{1}{2}\ln(6^3) = \frac{3}{2}\ln(6)$

Corrigé exercice 79 :

Pour tout réel $x > 1$,
$\ln(x^2-1) - \ln(x^2+2x+1) = \ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}\right) = \ln\left(\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}\right) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

Corrigé exercice 80 :

- Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x^2+x) = \ln(x(x+1)) = \ln(x) + \ln(x+1)$. La propriété est vraie.
- Pour $x = 1$, on a $\ln(x^2+x) = \ln(2)$ et $2\ln(x) + \ln(\sqrt{x}) = 3\ln(1) = 0$. La propriété est fausse.
- Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x^3+x^2) = \ln(x^2(x+1)) = \ln(x^2) + \ln(x+1) = 2\ln(x) + \ln(x+1)$. La propriété est vraie.
- Pour $k = 1$ et $x = 1$, on a $\ln(x^2+x) = \ln(2)$ et $\ln(x) + 2\ln(x+1) = 2\ln(2)$. La propriété est fausse.

Corrigé exercice 81 :

- $\ln(18) = \ln(9 \times 2) = \ln(9) + \ln(2) = \ln(3^2) + \ln(2) = 2\ln(3) + \ln(2)$
- $\ln(108) = \ln(4 \times 27) = \ln(4) + \ln(27) = \ln(2^2) + \ln(3^3) = 2\ln(2) + 3\ln(3)$
- $\ln(441) = \ln(21^2) = 2\ln(21) = 2\ln(3 \times 7) = 2\ln(3) + 2\ln(7)$

Corrigé exercice 82 :

On note P_n la proposition $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(2^k) = \ln(2)\sum\limits_{k=1}^{n} k$. On cherche à prouver que cette propriété est vraie pour tout $n > 0$, en raisonnant par récurrence.
Pour $k = 1$ l'expression se ramène à $\ln(2) = \ln(2)$ qui est vraie. Donc P_1 est vraie.
On considère un entier naturel $k > 0$ tel que P_k est vraie, autrement dit tel que :

$$\sum_{i=1}^{k} \ln(2^i) = \ln(2)\sum_{i=1}^{k} i$$

et on souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que :

$$\sum_{i=1}^{k+1} \ln(2^i) = \ln(2)\sum_{i=1}^{k+1} i.$$

On a $\sum\limits_{i=1}^{k+1} \ln(2^i) = \sum\limits_{i=1}^{k} \ln(2^i) + \ln(2^{k+1}) = \ln(2)\sum\limits_{i=1}^{k} i + (k+1)\ln(2) = \ln(2)\sum\limits_{i=1}^{k+1} i$.
On a ainsi démontré que P_1 est vraie et que, pour tout entier naturel non nul k, si P_k est vraie alors P_{k+1} est vraie aussi. Ainsi par le principe de récurrence, on a démontré que P_n est vraie pour tout entier $n > 0$.

Corrigé exercice 83 :

1. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$. $f'(x) > 0$ pour $x < 1$ et $f'(x) < 0$ pour $x > 1$. Ainsi, f est croissante sur $]0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$. Elle admet un maximum en 1 et $f(1) = 0$. Ainsi $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x > 0$.

2. a. Pour tout $x > 0$, on a alors $\ln(x) - x + 1 \leqslant 0$ soit $\ln(x) \leqslant x - 1$.
   b. La propriété précédente est vraie pour tout $x > 0$ donc elle est valable en remplaçant x par $\sqrt{x}$ car, pour tout $x > 0$, $\sqrt{x} > 0$. On a ainsi $\ln\left(\sqrt{x}\right) \leqslant \sqrt{x}+1$ soit $\dfrac{1}{2}\ln(x) \leqslant \sqrt{x} - 1$ pour tout $x > 0$.
   c. Par conséquent, en divisant les deux membres de cette expression par x qui est strictement positif et en multipliant par 2, on obtient $\dfrac{\ln(x)}{x} \leqslant 2\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$.
   D'autre part, pour tout $x > 1$, $\ln(x) > 0$ donc $\frac{\ln(x)}{x} > 0$.
   En conclusion, pour tout $x \geqslant 1$, $0 < \dfrac{\ln(x)}{x} \leqslant 2\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$.

3. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\dfrac{\sqrt{x}-1}{x} = 0$. On applique alors le théorème des gendarmes pour conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Corrigé exercice 84 :

1. Notons A l'aire du rectangle. On a alors $A = \ln(a)\ln(b)$.

2. Le périmètre du rectangle est $P = \ln(a) + \ln(a) + \ln(b) + \ln(b) = \ln(a^2) + \ln(b^2) = \ln((ab)^2)$.

Corrigé exercice 85 :

Le périmètre d'une des faces carrées est $P = 4x$. Le volume du cube est $V = x^3$. Ainsi $\ln(P) = \ln(4) + \ln(x) = 2\ln(2) + \ln(x)$ et $\ln(V) = \ln(x^3) = 3\ln(x)$. Par conséquent, on a $\ln(P) = 2\ln(2) + \dfrac{1}{3}\ln(V)$.

Corrigé exercice 86 :

Pour montrer que le tableau représente une loi de probabilité, il suffit de montrer que la somme des probabilités de tous les éléments de l'univers est 1. Or

$$\begin{aligned} P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) &= \ln(a_1) + \ln(a_2) + \ln(a_3) + \ln(a_4) \\ &= \ln(a_1 a_2 a_3 a_4) = \ln(\mathrm{e}) = 1 \end{aligned}$$

.

Ainsi le tableau représente bien une loi de probabilité sur l'ensemble $\{1;2;3;4\}$. On remarque que les probabilités sont bien définies. En effet, $x_i \in [1;e]$ donc $\ln(x_i) \in [0;1]$ pour tout $i \in \{1;2;3;4\}$.

Corrigé exercice 87 :

$\begin{cases} \ln(x\sqrt{y}) = 9 \\ 2\ln(x) + \ln(y^3) = 0 \end{cases}$ peut s'écrire : $\begin{cases} \ln(x) + \dfrac{1}{2}\ln(y) = 9 \\ 2\ln(x) + 3\ln(y) = 0 \end{cases}$.

En posant $\ln(x) = X$ et $\ln(y) = Y$ on obtient $\begin{cases} X + \dfrac{1}{2}Y = 9 \\ 2X + 3Y = 0 \end{cases}$.

Si l'on soustrait le double de la première équation à la deuxième on obtient $2Y = -18$ et donc $Y = -9$ puis, en reportant dans la première équation on obtient $X + \dfrac{1}{2} \times (-9) = 9$ et ainsi $X = 13,5$. On a alors $\ln(y) = Y = -9$ et $\ln(x) = X = 13,5$. Ainsi $y = \mathrm{e}^{-9}$ et $x = \mathrm{e}^{13,5}$.

Corrigé exercice 88 :

Pour tout réel x,
$\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x) = \ln((\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)) = \ln((\sqrt{x^2+1})^2-x^2) = \ln(x^2+1-x^2) = \ln(1) = 0$.
Ainsi, pour tout réel x, $\ln(\sqrt{x^2+1}+x) = -\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$.

Corrigé exercice 89 :

1. Pour tous nombres réels positifs a et b on a $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$ donc $\sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 \geqslant 0$ et donc $a + b - 2\sqrt{ab} \geqslant 0$. On en déduit que $\dfrac{1}{2}(a+b) \geqslant \sqrt{ab}$.

2. Le logarithme étant une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$, l'inégalité de la question précédente nous donne, pour tous réels a et b sont strictement positifs, $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \ln(\sqrt{ab})$ c'est-à-dire $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}\ln(ab)$ et donc $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}(\ln(a)+\ln(b))$.

3. En utilisant les notations du graphique, $\dfrac{a+b}{2}$ est l'abscisse du milieu I de $[AB]$ et $\dfrac{\ln(a)+\ln(b)}{2}$ est son ordonnée. On en déduit que pour tous réels a et b, le point I est situé en-dessous de la courbe représentative de f.

Corrigé exercice 90 :

1. $2^n = 2048 \Leftrightarrow \ln(2^n) = \ln(2048) \Leftrightarrow n\ln(2) = \ln(2048) \Leftrightarrow n = \dfrac{\ln(2048)}{\ln(2)} = 11$

2. $5^n > 1000 \Leftrightarrow \ln(5^n) > \ln(1000) \Leftrightarrow n\ln(5) > \ln(1000) \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(1000)}{\ln(5)}$ car $5 > 1$ donc $\ln(5) > 0$. Donc $n > 4$.

3. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^n < 10^{-3} \Leftrightarrow \ln\left(\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right) < \ln\left(10^{-3}\right) \Leftrightarrow n > \dfrac{-3\ln(10)}{\ln\left(\dfrac{2}{5}\right)}$ car $\dfrac{2}{5} < 1$ donc $\ln\left(\frac{2}{5}\right) < 0$. Par conséquent, $n > 7$.

4. $\left(\dfrac{4}{3}\right)^n > 10^3 \Leftrightarrow \ln\left(\left(\dfrac{4}{3}\right)^n\right) > \ln\left(10^3\right) \Leftrightarrow n > \dfrac{3\ln(10)}{\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)}$ car $\dfrac{4}{3} > 1$ donc $\ln\left(\frac{4}{3}\right) > 0$.

   Par conséquent, $n > 24$.

   Remarque : on peut aussi considérer le problème comme un problème consistant à rechercher la valeur de n à partir de laquelle une suite géométrique atteint un certain seuil. Dans ce cas on peut par exemple utiliser le tableur pour conjecturer les valeurs calculées.

n	2^n	5^n	0,4^n	2,5^n
0	1	1	1	1
1	2	5	0,4	2,5
2	4	25	0,16	6,25
3	8	125	0,064	15,625
4	16	625	0,0256	39,0625
5	32	**3125**	0,01024	97,65625
6	64	15625	0,004096	244,140625
7	128	78125	0,0016384	610,3515625
8	256	390625	**0,00065536**	**1525,878906**
9	512	1953125	0,000262144	3814,697266
10	1024	9765625	0,000104858	9536,743164
11	**2048**	48828125	4,1943E-05	23841,85791
12	4096	244140625	1,67772E-05	59604,64478
13	8192	1220703125	6,71089E-06	149011,6119
14	16384	6103515625	2,68435E-06	372529,0298
15	32768	30517578125	1,07374E-06	931322,5746
16	65536	1,52588E+11	4,29497E-07	2328306,437
17	131072	7,62939E+11	1,71799E-07	5820766,091
18	262144	3,8147E+12	6,87195E-08	14551915,23
19	524288	1,90735E+13	2,74878E-08	36379788,07
20	1048576	9,53674E+13	1,09951E-08	90949470,18
21	2097152	4,76837E+14	4,39805E-09	227373675,4
22	4194304	2,38419E+15	1,75922E-09	568434188,6
23	8388608	1,19209E+16	7,03687E-10	1421085472
24	16777216	5,96046E+16	2,81475E-10	3552713679
25	33554432	2,98023E+17	1,1259E-10	8881784197
26	67108864	1,49012E+18	4,5036E-11	22204460493
27	134217728	7,45058E+18	1,80144E-11	55511151231
28	268435456	3,72529E+19	7,20576E-12	1,38778E+11
29	536870912	1,86265E+20	2,8823E-12	3,46945E+11
30	1073741824	9,31323E+20	1,15292E-12	8,67362E+11
31	2147483648	4,65661E+21	4,61169E-13	2,1684E+12

Corrigé exercice 91 :

1. (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$ car sa raison est positive. De plus, comme son premier terme est strictement positif, tous ses termes sont strictement positifs. Ainsi (v_n) est bien définie. D'après l'énoncé, (u_n) est une suite géométrique de raison q donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \ln(qu_n) - \ln(u_n) = \ln(q) + \ln(u_n) - \ln(u_n) = \ln(q)$. Ainsi, la suite (v_n) est arithmétique de raison $\ln(q)$.

2. Cette suite est croissante si et seulement si $\ln(q) \geqslant 0$ c'est-à-dire si et seulement si $q \geqslant 1$.

Corrigé exercice 92 :

Une augmentation de $1,09\%$ correspond à une multiplication par $1,0109$. Ainsi, la population après n années est donnée, en milliards d'individus, par $u_n = 7 \times (1,0109)^n$. On est alors amené à résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $7 \times (1,0109)^n > 9$. On obtient $1,0109^n > \dfrac{9}{7}$ c'est-à-dire $n \ln(1,0109) > \ln\left(\dfrac{9}{7}\right)$ et donc $n > \frac{\ln\left(\dfrac{9}{7}\right)}{\ln(1,0109)}$. Ainsi $n > 23$. Ainsi la population atteindra 9 milliards d'individus en 2035.
On peut aussi se servir d'un programme python pour trouver le nombre d'années nécessaires.

```

annee=2011
augmentation=1.0109
population=7
while population<9:
    population=population*augmentation
    annee=annee+1

print(annee)

```

Corrigé exercice 93 :

Une augmentation de 5% correspond à une multiplication par $1,05$. Ainsi on est amenés à résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $150 \times 1,05^n > 200$. Cette inéquation est équivalente à $1,05^n > \dfrac{200}{150}$ c'est-à-dire $1,05^n > \dfrac{4}{3}$. On obtient alors $n \ln(1,05) > \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$ c'est-à-dire $n > \frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{\ln(1,05)}$. Par conséquent, $n > 5$.
On peut aussi se servir d'un programme python pour trouver le nombre d'années nécessaires.

```
annee=0
augmentation=1.05
argent=150
while argent<200:
    argent=argent*augmentation
    annee=annee+1

print(annee)

```

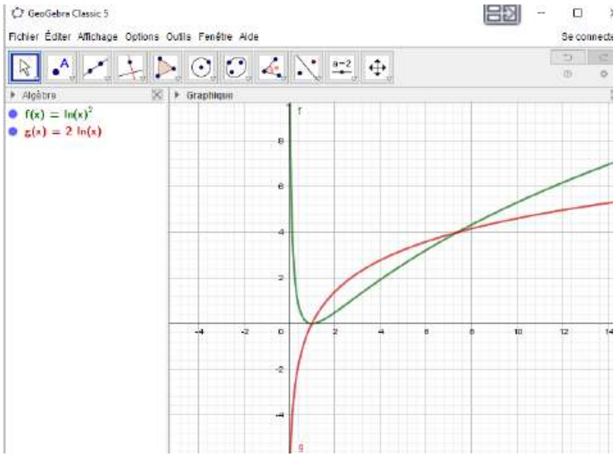
Il faut 6 ans.

Corrigé exercice 94 :

1. L'expression $x^2 - 2x$ peut s'écrire $x(x-2)$. Elle est négative si, et seulement si, $x \in [0; 2]$.

2. L'inéquation $(\ln(x))^2 \geqslant \ln(x^2)$ peut s'écrire $(\ln(x))^2 - 2\ln(x) \geqslant 0$. Posons $X = \ln(x)$. L'inéquation peut alors s'écrire $X^2 - 2X \geqslant 0$, c'est-à-dire $X \in]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$. On a alors $\ln(x) \in]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$ et donc $x \in]0; 1] \cup [\mathrm{e}^2; +\infty[$.

   Illustration avec GeoGebra :


GeoGebra Classic 5
Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide
Se connecte
Algèbre
Graphique
f(x) = ln(x)²
g(x) = 2 ln(x)

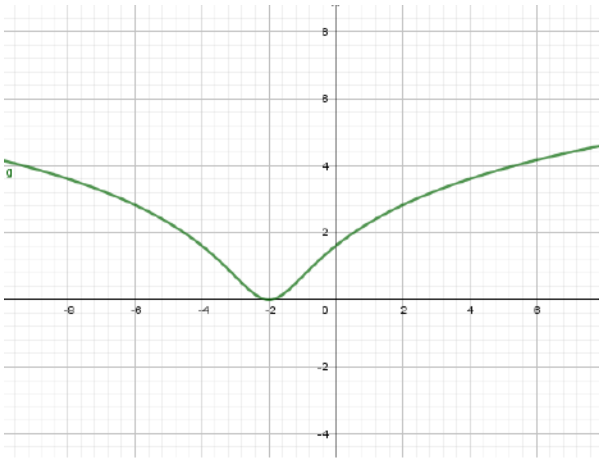
9 Exercices d'entraînement partie 3

Corrigé exercice 95 :

L'expression de la dérivée est $\frac{2}{2x+1}$. En effet, d'après le théorème sur la dérivée des fonctions de la forme $\ln(u)$, on sait que $\ln(u)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$. Il suffit ici de poser $u(x) = 2x+1$.

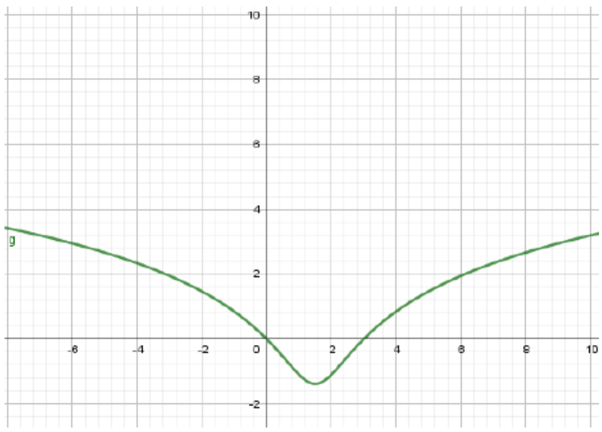
Corrigé exercice 96 :

La fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = x^2 + 4x + 5$. La fonction g a donc le même sens de variation que u. Or, le minimum de la fonction trinôme du second degré $x \mapsto x^2 + 4x + 5$ est obtenu pour $x = -2$. Ainsi g est croissante pour $x \in [-2; +\infty[$ et décroissante pour $x \in]-\infty; -2[$.
Illustration avec GeoGebra :



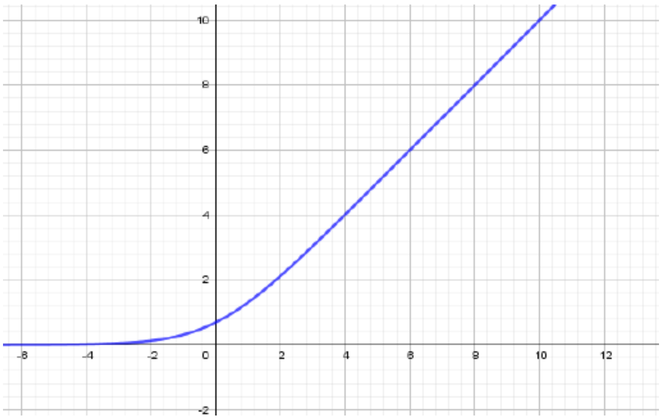
Corrigé exercice 97 :

La fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = \frac{1}{3}x^2 - x + 1$. La fonction f a donc le même sens de variation que u. Or le minimum de la fonction trinôme du second degré $x \mapsto \frac{1}{3}x^2 - x + 1$ est obtenu pour $x = 1,5$.
Ainsi f est croissante pour $x \in [1,5; +\infty[$ et décroissante pour $x \in]-\infty; 1,5[$.
Illustration avec GeoGebra :



Corrigé exercice 98 :

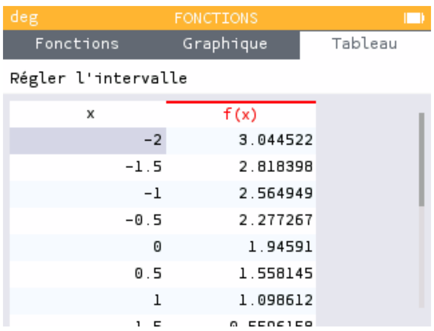
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$, ce qui justifie le fait que f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1+\mathrm{e}^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction logarithme népérien étant croissante, on peut conclure que la fonction $f = \ln(g)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
Illustration avec GeoGebra :



Corrigé exercice 99 :

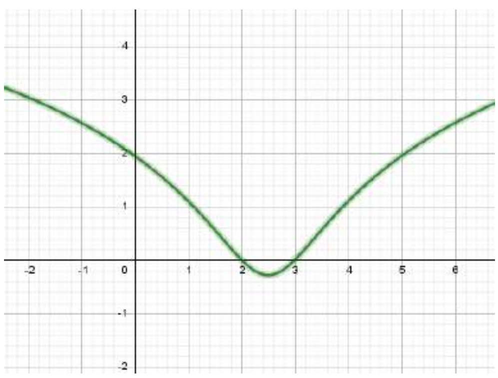
1. La fonction trinôme du second degré $T\colon x \mapsto x^2 - 5x + 7$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 2,5]$ et croissante sur l'intervalle $[2,5; +\infty[$. D'après le cours il en est de même pour $\ln(T)$ puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(x) > 0$.

2. Voilà le début du tableau obtenu à la calculatrice.



x	f(x)
-2	3.044522
-1.5	2.818398
-1	2.564949
-0.5	2.277267
0	1.94591
0.5	1.558145
1	1.098612

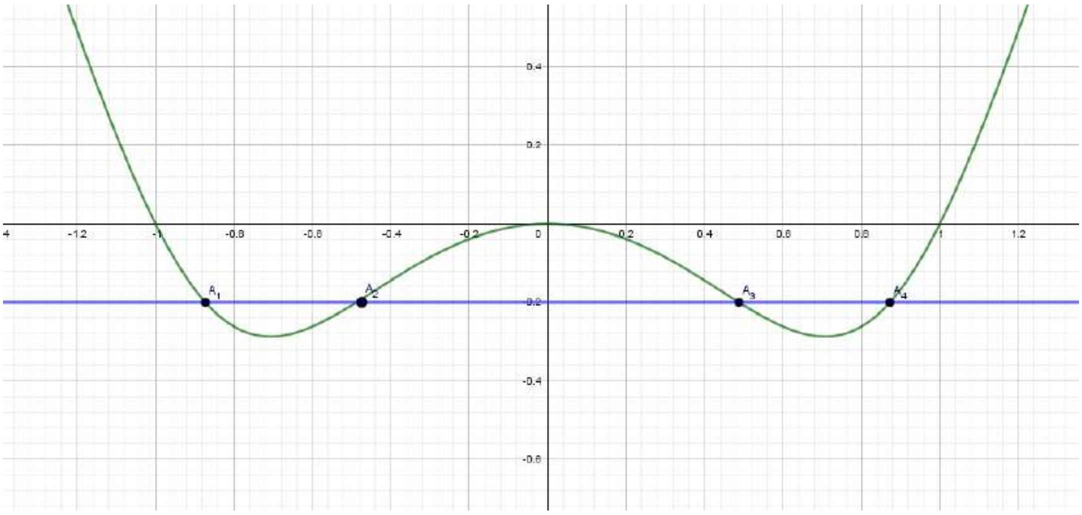
3. Voici l'allure de la courbe qu'il faut représenter à la main.



Corrigé exercice 100 :

1. g est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) > 0$ pour tout réel x donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{4x^3 - 2x}{x^4 - x^2 + 1} = \dfrac{4x(x^2 - 0,5)}{x^4 - x^2 + 1}$. Le signe de $g'(x)$ est le même que celui de $4x(x^2 - 0,5) = 4x\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ car $x^4 - x^2 + 1$ est toujours positif. C'est-à-dire : $g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 0\right] \cup \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[$. g est donc croissante sur $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 0\right]$ et sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[$ et décroissante ailleurs. g a donc un maximum local en $x = 0$ et un minimum en $x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ et en $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur chacun des intervalles $\left]-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $\left[0; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 0\right]$, et $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[$, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = -0,2$ est donc 4.



3. Ces solutions sont environ égales à : $x_1 = -0,87$, $x_2 = -0,49$, $x_3 = 0,49$, $x_4 = 0,87$.

Corrigé exercice 101 :

Pour tout $x > -1$, $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} + 2x + 1 = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{(2x+1)(x+1)}{x+1} = \dfrac{2x^2 + 3x + 2}{x+1}$.
Or :

- Pour tout $x > -1$, $x + 1 > 0$.
- Le discriminant du trinôme $2x^2 + 3x + 2$ est négatif ($\Delta = -7$) donc ce trinôme est toujours du signe de $f(0) = 2$ c'est-à-dire strictement positif.

Ainsi $f'(x) > 0$ pour tout $x > -1$. Ainsi f est strictement croissante pour $x > -1$.

Corrigé exercice 102 :

f a le même sens de variations que $x \mapsto x + \sqrt{x^2-1}$. Or, pour $x > 1$, la dérivée de cette fonction est $x \mapsto 1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$. Or, pour tout $x > 1$, $1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} > 0$ donc $x \mapsto x + \sqrt{x^2-1}$ est croissante donc f est croissante pour $x > 1$.

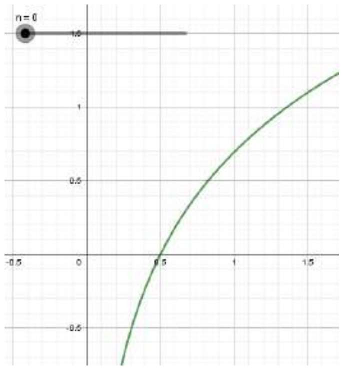
Corrigé exercice 103 :

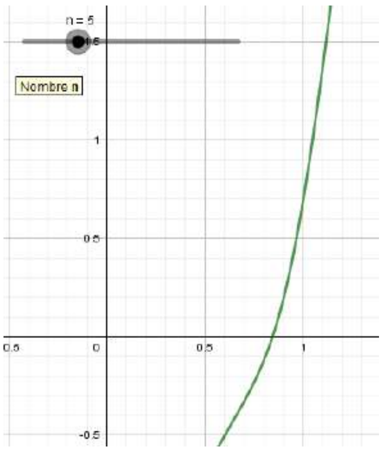
1. La fonction f_1 est la dérivée de la fonction F_1 définie pour tout $x > 0$ par $F_1(x) = \dfrac{2}{3}\ln(x)$.
2. La fonction f_2 est la dérivée de la fonction F_2 définie pour tout $x > 0$ par $F_2(x) = \dfrac{1}{6}\ln(4x+1)$.
3. On peut commencer par démontrer que $f_3(x) = 7\left(\dfrac{3}{x+2} - \dfrac{2}{x+1}\right)$. En effet, pour tout réel $x \neq -2$ et$x \neq -1$,
$\dfrac{3}{x+2} - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{3(x+1)}{(x+2)(x+1)} - \dfrac{2(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{x-1}{x^2+3x+2}$. Ainsi la fonction f_3 est la dérivée de la fonction F_3 définie pour tout $x > -1$ par $F_3(x) = 21\ln(x+2) - 14\ln(x+1)$.

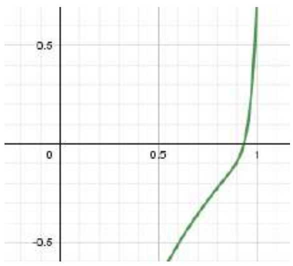
Corrigé exercice 104 :

1. Pour tout réel x, $x^{2n}+1 > 0$ donc $x^{2n+1} + x = x(x^{2n}+1)$ est du signe de x. Ainsi, $I_n =]0; +\infty[$.
2. g_n a le même sens de variation que $k_n \colon x \mapsto x^{2n+1} + x$ sur I_n. Or, $k_n'(x) = (2n+1)x^{2n} + 1 > 0$ pour tout $x > 0$. Ainsi, k_n est croissante et donc g_n est croissante sur I_n.
3. a. g_n est continue sur I_n, strictement croissante sur I_n et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n(0,1) < 0$ et $g_n(1) = \ln(2) > 0$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires vu dans le chapitre 6, il existe un unique $\alpha_n \in I_n$ tel que $g_n(\alpha_n) = 0$.
   b. Voici un exemple d'utilisation de l'algorithme de dichotomie. Une valeur approchée de α_2 est $0,75$.
4.

a	b	(a+b)/2	gn(a)	gn(b)	gn((a+b)/2)
0,1	1	0,55	-2,3024851	0,69314718	-0,51027838
0,55	1	0,775	-0,51027838	0,69314718	0,05314406
0,55	0,775	0,6625	-0,51027838	0,05314406	-0,23556648
0,6625	0,775	0,71875	-0,23556648	0,05314406	-0,09368673
0,71875	0,775	0,746875	-0,09368673	0,05314406	-0,02094087
0,746875	0,775	0,7609375	-0,02094087	0,05314406	0,01593019
0,746875	0,7609375	0,75390625	-0,02094087	0,01593019	-0,00254779
0,75390625	0,7609375	0,75742188	-0,00254779	0,01593019	0,00668053
0,75390625	0,75742188	0,75566406	-0,00254779	0,00668053	0,00206371
0,75390625	0,75566406	0,75478516	-0,00254779	0,00206371	-0,0002427
0,75478516	0,75566406	0,75522461	-0,0002427	0,00206371	0,00091034
0,75478516	0,75522461	0,75500488	-0,0002427	0,00091034	0,00033378
0,75478516	0,75500488	0,75489502	-0,0002427	0,00033378	4,5528E-05
0,75478516	0,75489502	0,75484009	-0,0002427	4,5528E-05	-9,8589E-05
0,75484009	0,75489502	0,75486755	-9,8589E-05	4,5528E-05	-2,6531E-05
0,75486755	0,75489502	0,75488129	-2,6531E-05	4,5528E-05	9,4984E-06
0,75486755	0,75488129	0,75487442	-2,6531E-05	9,4984E-06	-8,5164E-06
0,75487442	0,75488129	0,75487785	-8,5164E-06	9,4984E-06	4,91E-07
0,75487442	0,75487785	0,75487614	-8,5164E-06	4,91E-07	-4,0127E-06







α_n semble tendre vers 1 quand $n \to +\infty$.

Corrigé exercice 105 :

1. La fonction argth est définie si et seulement si $x+1$ et $1-x$ sont tous les deux strictement positifs ou tous les deux strictement négatifs. On obtient alors $I =]-1;1[$.

2. Pour tout $x \in I$, on a $\text{argth}(x) = \frac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln(1-x))$ ainsi sa dérivée est définie par $\text{argth}'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}$.

3. Pour tout $x \in I$, $\text{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2} > 0$ donc la fonction argth est strictement croissante sur I. De plus,
$\lim\limits_{x\to-1} \text{argth}(x) = \lim\limits_{x\to-1} \frac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln(1-x)) = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to-1} \ln(x+1) - \ln(2)\right) = -\infty$.
Et
$\lim\limits_{x\to1} \text{argth}(x) = \lim\limits_{x\to1} \frac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln(1-x)) = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to1} \ln(2) - \ln(1-x)\right) = +\infty$.

4. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0 est donnée par :
$y = \text{argth}'(0)(x-0) + \text{argth}(0)$ soit $y = x$.

5. La courbe est en dessous de sa tangente pour $x < 0$ et au-dessus pour $x > 0$. En effet on peut remarquer que $\text{argth}''(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$.
   - Donc, pour $x < 0$, $\text{argth}''(x) < 0$ donc argth est concave donc la représentation graphique de argth est en dessous de ses tangentes, en particulier elle est en dessous de sa tangente en 0.
   - De même pour $x > 0$ $\text{argth}''(x) > 0$ donc argth est convexe donc la représentation graphique de argth est au-dessus de ses tangentes, en particulier elle est en dessus de sa tangente en 0.

Corrigé exercice 106 :

Pour tout $x > 1$,

$$\begin{aligned}
\text{ch}(\ln(x+\sqrt{x^2-1})) &= \frac{1}{2}\left(e^{\ln(x+\sqrt{x^2-1})} + e^{-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2+1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) \\
&= x
\end{aligned}$$

Corrigé exercice 107 :

La fonction étant définie sur $\mathbb{R}^*$, la seule qui convienne est la courbe verte.

Corrigé exercice 108 :

Soit n un entier naturel non nul.

1. Pour tout $x \leqslant 0$, on a $\mathrm{e}^{nx} > 0$ et $x < 0$ donc $\mathrm{e}^{nx} - x > 0$.

   Par conséquent, la fonction f est définie sur $]-\infty; 0]$.

   Pour $x > 0$, posons g la fonction définie par $g(x) = \mathrm{e}^{nx} - x$. g est dérivable sur son ensemble de définition On a $g'(x) = n\mathrm{e}^{nx} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{-1}{n}\ln(n)$ (car $n \geqslant 1$ dont $\ln(n) \geqslant 0$). Or, $\dfrac{-1}{n}\ln(n) \leqslant 0$ pour tout n entier naturel non nul, donc $g'(x) \geqslant 0$ pour $x > 0$ et, par conséquent, g est croissante pour $x > 0$. Or, $g(0) = 1$ donc $g(0) > 0$. Ainsi, pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$. Ainsi $f_n(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n'(x) = \dfrac{n\mathrm{e}^{nx} - 1}{\mathrm{e}^{nx} - x}$. $f_n'(x)$ est du signe de $n\mathrm{e}^{nx} - 1$ car on a toujours $\mathrm{e}^{nx} \geq x$. Dans la question précédente, en posant $x_n = \dfrac{-1}{n}\ln(n)$, on a vu que cette expression était positive pour $x > x_n$ et négative pour $x < x_n$. Ainsi $f_n(x)$ est décroissante pour $x < x_n$ et croissante pour $x > x_n$. Ainsi f_n admet un minimum au point d'abscisse $x_n = \dfrac{-1}{n}\ln(n)$. L'ordonnée de A_n est

   $f_n(x_n) = \ln\left(n + \frac{1}{n}\ln(n)\right)$.

3. Le programme python permet de conjecturer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$.

   Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ par croissance comparée d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x_n) = \ln(n) = +\infty$. On en déduit que le point A_n est sur l'axe des ordonnées et, lorsque $n \to +\infty$, son ordonnée tend vers $+\infty$.

Corrigé exercice 109 :

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - e$. $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant e \Leftrightarrow x \geqslant 1$. Ainsi f est croissante sur $[1; +\infty[$.

2. f admet un minimum en $x = 1$ et ce minimum vaut $f(1) = 0$. Ainsi $f(x) = 0$ admet une et une seule solution : $x = 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \ln(u_n) - u_n + 1 \leqslant 0$ (on pourra reprendre la 1re question de l'exercice 83 pour le démontrer). On en déduit alors que la suite (u_n) est décroissante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la proposition $u_n \geq 1$ et on veut démontrer que P_n est vraie pour tout entier naturel n. $u_0 = 10$ et $10 > 1$ dont P_0 est vraie.

   Supposons qu'il existe un entier k tel que P_k est vraie, c'est-à-dire tel que $u_k \geqslant 1$. On veut démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $u_{k+1} \geqslant 1$.

   Partant de l'hypothèse de récurrence, on obtient :

   $u_k \geqslant 1 \Rightarrow \ln(u_k) \geqslant 0 \Rightarrow \ln(u_k) + 1 \geqslant 1 \Rightarrow u_{k+1} \geqslant 1$.

   Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

5. Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge.

$$\begin{aligned}\ln(x) - x + 1 = 0 &\Leftrightarrow \ln(x) + 1 = x\\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln(x)+1} = \mathrm{e}^x\\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln(x)} \times \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow xe = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - \mathrm{e}x = 0\end{aligned}$$

D'après la deuxième question, cette équation admet 1 pour unique solution. La suite (u_n) converge donc vers 1.

Corrigé exercice 110 :

On remarque graphiquement que $f(0) = \ln(c) = 0$. On peut en conclure que $c = 1$. De plus la tangente au point d'abscisse 0 est horizontale. Ainsi $f'(0) = 0$ c'est à dire $\dfrac{2a \times 0 + b}{a \times 0^2 + b \times 0 + 1} = 0$ soit $b = 0$. Enfin on remarque que la courbe passe par le point de coordonnées $(2; 3)$ donc $f(2) = \ln(4a+1) = 3$. Par conséquent, $a = \dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^3 - 1)$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^3 - 1)x^2 + 1\right)$.

Corrigé exercice 111 :

On remarque graphiquement que $g(0) = \ln(c) = 1$. On peut en conclure que $c = e$. De plus, la tangente au point d'abscisse 0 est horizontale. Ainsi, $g'(0) = 0$ soit $\dfrac{2a \times 0 + b}{a \times 0^2 + b \times 0 + e} = 0$ et, par conséquent, $b = 0$. Enfin, on remarque que la courbe passe par le point de coordonnées $(1; 0)$. Ainsi, $g(1) = \ln(a + e) = 0$ et $a = 1 - \mathrm{e}$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \ln((1 - \mathrm{e})x^2 + \mathrm{e})$.

Corrigé exercice 112 :

1. D'après le cours, les variations de k sont les mêmes que celles de la fonction trinôme du second degré $T\colon x \mapsto ax^2 + bx + c$. Ainsi, T est décroissante sur $]-\infty; 1]$ puis croissante sur $[1; +\infty[$. On en déduit que $a > 0$.

2. k est définie sur $\mathbb{R}$. Or, on sait que k est définie pour tout réel x tel que $T(x) > 0$. La fonction T ne doit donc pas s'annuler donc le discriminant de $T(x)$ est strictement négatif.

3. La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $k'(x) = \dfrac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}$.

4.
   - $k(0) = 4$ donc $\ln(c) = 4$ soit $c = \mathrm{e}^4$.
   - De plus, $k'(1) = 0$ car la fonction k admet un minimum local et est dérivable en 1 donc $\dfrac{2a + b}{a + b + \mathrm{e}^4} = 0$ soit $2a + b = 0$.
   - Enfin, $k(1) = 3$ soit $\ln(a+b+\mathrm{e}^4) = 3$ donc $a+b = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^4$. On a alors $a = \mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^3$ et $b = 2\,(\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^4)$.

   On en conclut que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k(x) = \ln((\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^3)x^2 + 2(\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^4)x + \mathrm{e}^4)$.

Corrigé exercice 113 :

1. Les variations de ℓ sont les mêmes que celles de $ax^2 + bx + c$. On en déduit que $a < 0$.

2. fn'est pas définie en -3 ni en -2, donc le trinôme $ax^2 + bx + c$ s'annule en -3 et -2. Ainsi le trinôme a deux racines et son discriminant est strictement positif. Ce trinôme est donc strictement positif sur l'intervalle $]-3;-2[$ ce qui explique l'ensemble de définition de ℓ.

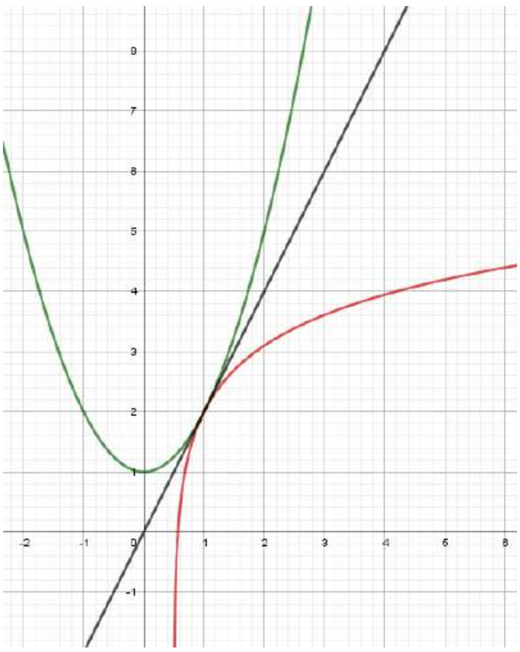
3. D'après ce qui précède, le trinôme s'annule pour $x = -3$ et $x = -2$.

4. l est dérivable sur $]-2;-2[$ et, pour tout $x \in]-3;-2[$, $\ell'(x) = \dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$.

5. D'après ce qui précède, $ax^2 + bx + c$ est de la forme $a(x+2)(x+3)$. Or, d'après le tableau de variations, $\ell(-2,5) = -2\ln(2) = -\ln(4) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$ et, d'après l'expression factorisée de f, $\ell(-2,5) = \ln(-0,25a)$. On en déduit que $a = -1$. Pour tout $x \in]-3;-2[$, $ax^2 + bx + c = -(x+2)(x+3) = -x^2 - 5x - 6$.

Corrigé exercice 114 :

La tangente à la représentation graphique de f au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, c'est-à-dire $y = 2(x-1) + 2$ soit $y = 2x$.
La tangente à la représentation graphique de g au point d'abscisse 1 a pour équation $y = g'(1)(x-1)+g(1)$ soit $y = \dfrac{a}{a+b}(x-1)+\ln(a+b)$ et ainsi $y = \dfrac{a}{a+b}x+\ln(a+b)-\dfrac{a}{a+b}$.
En comparant les deux équations de cette tangente, on obtient $\dfrac{a}{a+b} = 2$ et $\ln(a+b) - \dfrac{a}{a+b} = 0$. On obtient de la première équation $b = -\dfrac{1}{2}a$ et de la deuxième $\ln(a+b) = \dfrac{a}{a+b}$ c'est à dire $\ln(a+b) = 2$ soit $a + b = \mathrm{e}^2$. On obtient finalement $a = 2\mathrm{e}^2$ et $b = -\mathrm{e}^2$.



Corrigé exercice 115 :

1. Pour tout $x \in [1;3]$, $B'(x) = -10 \times 2x + 10 + 20(1 \times \ln(x) + x\dfrac{1}{x}) = -20x + 10 + 20\ln(x) + 20 = -20x + 20\ln(x) + 30$.

2. a. $B'(1) = 10 > 0$ et $B'(3) = 20\ln(3) - 30 < 0$. Ainsi B' change de signe sur l'intervalle $[1;3]$. Or, B' est continue et strictement décroissante. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires vu dans le chapitre 6, il existe une unique valeur de $\alpha \in [1;3]$ telle que $B'(\alpha) = 0$.

   À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 2,36$.

   b. $B'(x)$ est donc positive sur l'intervalle $[1;\alpha]$ et négative sur l'intervalle $[\alpha;3]$. Ainsi B est croissante sur l'intervalle $[1;\alpha]$ et décroissante sur l'intervalle $[\alpha;3]$. B atteint donc son maximum en $x = \alpha$.

3. Le bénéfice maximal atteint par le glacier est donné par $B(\alpha)$ qui est approximativement égal à $8,43$ centaines d'euros. L'objectif de l'artisan est donc impossible à atteindre.

Corrigé exercice 116 :

$f(0,5) = 0,5\ln(0,5) + (1-0,5)\ln(1-0,5) = \ln(0,5) = -\ln(2)$ et $-\ln(2) < -0,5$.
La seule courbe qui correspond est $\mathcal{C}_1$.

10 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 117 :

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

   La fonction f définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \alpha \ln(x)$ vérifie pour tous réels strictement positifs x et y, $f(xy) = \alpha \ln(xy) = \alpha(\ln(x)+\ln(y)) = \alpha \ln(x)+\alpha \ln(y) = f(x) + f(y)$.

2. a. $f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$ donc $f(1) = 0$.
   b. Pour tout $y > 0$, $g(y) = f(xy) - f(y) = f(x) + f(y) - f(y) = f(x)$. Or, x est un nombre réel fixé donc g est une fonction constante.
   c. De plus, pour tout $y > 0$, $g'(y) = xf'(xy) - f'(y) = 0$ donc $f'(y) = xf'(xy)$. Avec $y = 1$, on obtient $f'(1) = xf'(x)$ donc, puisque $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\alpha}{x}$ en posant $\alpha = f'(1)$.
   d. D'après la question précédente, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\alpha}{x}$ soit $f(x) = \alpha \ln(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Or, $f(1) = 0 = k$ donc $f(x) = \alpha \ln(x)$.

Corrigé exercice 118 :

1. Pour tout $x > 0$, la fonction f définie par $f(x) = \ln(x + 1) - x$ est dérivable et $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{-x}{x+1}$. Pour tout $x > 0$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $]0; +\infty[$. Or, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ donc, pour tout $x > 0$, $f(x) \leqslant 0$.

2. Pour tout $x > 0$, la fonction g définie par $g(x) = \ln(x + 1) - x + \dfrac{x^2}{2}$ est dérivable et $g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 + x = \dfrac{x^2}{x+1}$. Pour $x > 0$, $g'(x) > 0$ donc g est croissante sur $]0; +\infty[$. Or, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ donc, pour tout $x > 0$, $g(x) \geqslant 0$.

3. D'après les questions précédentes :

   - $\ln(x + 1) - x \leqslant 0$ donc $\ln(x + 1) \leqslant x$;
   - $\ln(x + 1) - x + \dfrac{x^2}{2} \geqslant 0$ donc $\ln(x + 1) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$.

   On en déduit que, pour tout réel $x > 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(x + 1) \leqslant x$.

4. Par conséquent, pour tout $x > 0$, $1 - \dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{\ln(x+1)}{x} \leqslant 1$. Or, $\lim\limits_{x\to 0} 1 - \dfrac{x}{2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0 // x>0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

Corrigé exercice 119 :

1. f est dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} \times \ln(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$.
   $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant e$. Ainsi f est croissante sur $]0; e]$ et décroissante sur $[e; +\infty[$.
2. Par croissance comparée, on sait que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
3. f est décroissante sur $[e; +\infty[$ donc pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $f(n) \geqslant f(n+1)$ soit $\dfrac{\ln(n)}{n} \geqslant \dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$. On a alors, pour tout $n \geqslant 3$, $(n+1)\ln(n) \geqslant n \ln(n+1)$ soit $\ln(n^{n+1}) \geqslant \ln((n+1)^n)$ d'où $n^{n+1} \geqslant (n+1)^n$ par croissance de la fonction exponentielle.

Corrigé exercice 120 :

Les solutions de l'équation de l'énoncé sont tous les entiers qui ne sont pas solution de l'équation $2^n < n^2$. À partir d'une représentation graphique, on peut se convaincre que l'équation $2^n < n^2$ admet peu de solutions de $\mathbb{N}$. On peut proposer le code suivant qui renvoie 3 comme seule réponse :

```
for i in range(1000):
    if 2**i < i**2:
        print(i)
```

```
3
```

On en déduit que tous les entiers naturels sont solutions de l'inéquation $2^n \geqslant n^2$ sauf 3.
Remarque : le code Python ne donne pas les solutions au-delà de 1 000. Cependant, par croissance comparée de la fonction exponentielle avec la fonction carrée, on sait que c'est inutile d'augmenter cette borne.

Corrigé exercice 121 :

Partie A :

1. Pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{-3}{x^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-3 - x}{x^2}$.
2. $g'(x)$ est du signe de $-3 - x$ car $x^2 > 0$ donc $g'(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$. g est donc strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
3. $g(1) = 2$ et $g(2) = 0,5 - \ln(2) < 0$. De plus, g est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires vu dans le chapitre 6, il existe un unique réel $\alpha \in]1; 2[$ tel que $g(\alpha) = 0$. À l'aide de la calculatrice on obtient $\alpha \approx 1,86$.

Partie B :

1. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\ln(x) + \dfrac{-x + 3}{x} = g(x)$.

2. Par stricte décroissance de g on déduit que $f'(x) > 0$ pour $x \in]0;\alpha[$ et $f'(x) < 0$ pour $x \in]\alpha;+\infty[$. Ainsi, f est croissante pour $x \in]0;\alpha[$ et décroissante pour $x \in]\alpha;+\infty[$.

3. La fonction h est définie sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonction dérivables sur $]0;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $h'(x) = \dfrac{-3}{x} + 2 + 2\ln(x)$. On est donc amené à étudier la fonction auxiliaire k définie sur $]0;+\infty[$ par $k(x) = \dfrac{-3}{x} + 2 + 2\ln(x)$. Cette fonction est dérivable et, pour tout réel $x > 0$, $k'(x) = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{3+2x}{x^2}$. Pour tout $x > 0$, $k'(x) > 0$ donc k est strictement croissante. De plus, $k(1) = -1$, $k(2) = 0,5 + 2\ln(2) > 0$ et k est continue sur $]0;+\infty[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires étudié dans le chapitre 6, il existe un unique réel $\alpha \in]1;2[$ tel que $k(\alpha) = 0$. On en déduit que $h'(x) < 0$ pour $x \in]0;\alpha[$ et $h'(x) > 0$ pour $x \in]\alpha;+\infty[$. Ainsi h est décroissante sur $]0;\alpha[$ et croissante sur $]\alpha;+\infty[$.

Corrigé exercice 122 :

1. $\log(1) = \dfrac{\ln(1)}{\ln(10)} = 0$, $\log(10) = \dfrac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$, $\log(10^n) = \dfrac{\ln(10^n)}{\ln(10)} = \dfrac{n\ln(10)}{\ln(10)} = n$.

2. Pour tout $x > 0$, on a $\log'(x) = \dfrac{1}{\ln(10)} \times \dfrac{1}{x} > 0$ donc la fonction logarithme décimal est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Corrigé exercice 123 :

1. $10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) = 120$ donc $\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) = 12$.

   Ainsi $\log(I) - \log(I_0) = 12$ donc $\dfrac{\ln(I)}{\ln(10)} - \dfrac{\ln(I_0)}{\ln(10)} = 12$ soit $\ln(I) - \ln(I_0) = 12\ln(10)$ et ainsi $I = \mathrm{e}^{12\ln(10)+\ln(I_0)} = \mathrm{e}^{12\ln(10)-12\ln(10)} = 1$ W.m^{-2}.

2. Posons $I_2 = 2I_1$.

   $N_2 = 10\log\left(\dfrac{I_2}{I_0}\right) = 10\log\left(\dfrac{2I_1}{I_0}\right) = 10\log\left(\dfrac{I_1}{I_0}\right) + 10\log\left(\dfrac{2}{I_0}\right) = N_1 + 10\log\left(\dfrac{2}{I_0}\right)$.

   Le nombre de décibel augmente donc de $10\log\left(\frac{2}{I_0}\right)$ lorsque l'intensité double.

3. Posons $N_2 = N_1 + 10$.

   On cherche I_2 tel que $10\log\left(\dfrac{I_2}{I_0}\right) = 10\log\left(\dfrac{I_1}{I_0}\right) + 10$. Or, $10\log(10\frac{I_0}{I_0}) = 10$ donc $10\log\left(\dfrac{I_2}{I_0}\right) = 10\log\left(\dfrac{I_1}{I_0}\right) + 10\log\left(\dfrac{10I_0}{I_0}\right)$ d'où $10\log\left(\dfrac{I_2}{I_0}\right) = 10\log\left(\dfrac{10I_1}{I_0}\right)$ et ainsi $I_2 = 10I_1$. L'intensité a été multipliée par 10.

Corrigé exercice 124 :

1. $\mathrm{pH} = -\log(10^{-5}) = 5$.
2. Le pH est neutre lorsque $6,5 \leqslant -\log(C) \leqslant 7,5$ soit $-7,5 \leqslant \log(C) \leqslant -6,5$ d'où $10^{-7,5} \geqslant C \geqslant 10^{-6,5}$ c'est-à-dire $3,2 \times 10^{-8} \leqslant C \leqslant 3,3 \times 10^{-7}$.
3. $C' = 10^{-\mathrm{pH}'} = 10^{-(\mathrm{pH}-1,079)} = 10^{-\mathrm{pH}} \times 10^{1,079} \approx C \times 11,99$. La concentration est multipliée par environ 12.

Corrigé exercice 125 :

1. On remplace C par 2×10^{-13} dans l'expression de l'énoncé et on trouve $t = 13\,301$ ans.
2. $t = \dfrac{1}{1,21 \times 10^{-4}} \times \ln\left(\dfrac{10^{-12}}{C}\right) \Leftrightarrow 1,21 \times 10^{-4} \times t = \ln\left(\dfrac{10^{-12}}{C}\right) = \ln\left(10^{-12}\right) + \ln(C)$ d'où $C = 10^{-12} \times \mathrm{e}^{-1,21 \times 10^{-4} t}$.
3. On utilise la formule précédente : $C = 110^{-12} \times \mathrm{e}^{-1,21 \times 10^{-4} \times 10\,000} \approx 2,98 \times 10^{-13}$.
4. $$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= \frac{1}{1,21 \times 10^{-4}} \ln\left(\frac{10^{-12}}{C_2}\right) - \frac{1}{1,21 \times 10^{-4}} \ln\left(\frac{10^{-12}}{C_1}\right) \\ &= \frac{1}{1,21 \times 10^{-4}} \ln\left(\frac{10^{-12}}{2C_1}\right) - \frac{1}{1,21 \times 10^{-4}} \ln\left(\frac{10^{-12}}{C_1}\right) \\ &= \frac{1}{1,21 \times 10^{-4}} \ln\left(\frac{10^{-12}}{C_1}\right) - \frac{1}{1,21 \times 10^{-4}} \ln(2) - \frac{1}{1,21 \times 10^{-4}} \ln\left(\frac{10^{-12}}{C_1}\right) \\ &= \frac{-\ln(2)}{1,21 \times 10^{-4}} \\ &\approx -5\,728,5 \end{aligned}$$
   La différence entre les deux échantillons est donc environ 5 700 ans. Le résultat est ici négatif car on a supposé que $C_2 = C_1$ donc le 2e échantillon correspond à un animal mort plus récemment que celui du 1er échantillon donc le temps t_2 est plus petit que le temps t_1.

Corrigé exercice 126 :

1. Pour $D = 2$ on obtient $B = 2$. Pour $D = 4$, on obtient $B = 3$. Pour $D = 16$, on obtient $B = 5$ et enfin, pour $D = 18$, on obtient $B = 5,17$.
2. On applique la formule avec $D = 12$ et on obtient $B = \frac{\ln(12)}{\ln(2)} + 1 \approx 4,6$. On a alors $E(B) = 4$. Il faut quatre chiffres binaires pour écrire 12. En effet, en binaire, le nombre 12 s'écrit 1100.
3. On applique la formule à $D = 2^{12}$ et on obtient $E(B) = 13$.
4. 4 ; 5 ; 6 et 7 s'écrivent respectivement 100 ; 101 ; 110 et 111 en binaire. En effet, on regarde pour quelles valeurs de D la partie entière de B vaut 3 et on obtient 4, 5, 6 et 7. Comme B est une fonction de D strictement croissante, on sait que ce sont les seuls.

Corrigé exercice 127 :

Partie A

1. Pour tout $x > 0$ considérons la fonction f définie par $f(x) = \ln(x) - x$. f est dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$.
$f'(x)$ est positif pour $x \leqslant 1$ et négatif pour $x \geqslant 1$. Ainsi f admet un maximum pour $x = 1$ et $f(1) = \ln(1) - 1 = -1$. Ainsi, pour tout $x > 0$, $f(x) < 0$ et ainsi $\ln(x) < x$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k(1) = \dfrac{\ln(1)}{1^k} = 0$.

3. a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f_k'(x) = \frac{\frac{1}{x}x^k - kx^{k-1}\ln(x)}{x^{2k}} = \frac{x^{k-1}(1 - k\ln(x))}{x^{2k}} = \frac{1 - k\ln(x)}{x^{k+1}},$$
$f_k'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - k\ln(x) > 0$ c'est-à-dire $f_k'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}$.
Ainsi f_k est croissante sur $\left]0; \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\right]$ et décroissante sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}; +\infty\right[$ avec un maximum en $\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}$ de coordonnées $(\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}, \dfrac{1}{k\mathrm{e}})$.

   b. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = 0$ donc la courbe représentative de f_k admet une asymptote d'équation $y = 0$ en $+\infty$.
De plus $\lim\limits_{x \to 0} f_k(x) = -\infty$ donc f_k admet une asymptote d'équation $x = 0$.

Partie B

1. $g_k(1) = 1^k \ln(1) = 0$.

2. a. g_k est dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout $x > 0$; $g_k'(x) = kx^{k-1}\ln(x) + x^k\dfrac{1}{x} = x^{k-1}(1 + k\ln(x))$. Comme dans la partie précédente, on a $g_k'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]0; \mathrm{e}^{-\frac{1}{k}}\right]$. Ainsi, g_k est croissante sur $\left]0; \mathrm{e}^{-\frac{1}{k}}\right]$ et décroissante sur $\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{k}}; +\infty\right]$.

   b. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ donc pour tout $k > 1$,
$\lim\limits_{x \to 0} x^k \ln(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^{k-1} x\ln(x) = 0$.
De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k \ln(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Corrigé exercice 128 :

Soit d la fonction définie pour tout $x > 0$ par $d(x) = \sqrt{x^2 + \left(\ln(x)\right)^2}$.
d est dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout $x > 0$,
$$d'(x) = \frac{2x + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)}{2\sqrt{x^2 + \left(\ln(x)\right)^2}} = \frac{x + \frac{\ln(x)}{x}}{2\sqrt{x^2 + \left(\ln(x)\right)^2}}.$$
Le dénominateur étant strictement positif, $d'(x)$ a le même signe que $x + \frac{\ln(x)}{x}$.

Pour tout $x>0$, $x+\frac{\ln(x)}{x}=\frac{x^2+\ln(x)}{x}$ donc, finalement, $d'(x)$ a le même signe que $x^2+\ln(x)$. Puisqu'il est difficile de trouver le signe de cette expression, nous allons étudier la fonction $f\colon x\mapsto x^2+\ln(x)$ qui est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Pour tout $x>0$, $f'(x)=2x+\frac{1}{x}$ donc f' est strictement positive sur $]0;+\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Par ailleurs, f est également continue sur cet intervalle, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires étudié dans le chapitre 6, on en déduit qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha)=0$.
Puisque f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, on en déduit que f est strictement négative sur $]0;\alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha;+\infty[$.
Puisque d' et f ont le même signe, on conclut finalement que d est strictement décroissante sur $]0;\alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha;+\infty[$. d atteint donc son minimum en α.
On propose ici un programme python qui trouve par balayage une valeur approchée de la solution à 10^{-4} près :

```python
from math import sqrt
from numpy import log

def f(x):
    return sqrt(x**2+log(x)**2)


x_0=0.0001
minimum=f(x_0)
for i in range(1,10000):
    if f(i/10000)<minimum:
        x_0=i/10000
        minimum=f(x_0)
print(x_0)
```

La solution obtenue est alors $0,6529$.
Le point cherché a donc pour coordonnées $(0,6529;\ln(0,6529))$ soit $(0,6529;-0,42)$.

Corrigé exercice 129 :

Notons S_n la proportion de l'étang recouverte par le nénuphar le jour n. On sait que $S_{n+1}=2S_n$ et que $S_{20}=1$. (S_n) est une suite géométrique de raison 2, donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n=S_0\times 2^n$. Or, $S_{20}=1$ donc $S_0=\dfrac{1}{2^{20}}$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\dfrac{1}{2^{20}}\times 2^n$. On cherche n tel que $S_n=0,75$, c'est à dire $\dfrac{1}{2^{20}}\times 2^n=0,75$ soit $2^n=0,75\times 2^{20}$ ou encore $n\ln(2)=\ln(0,75\times 2^{20})$. On trouve $n=\dfrac{\ln(3\times 2^{18})}{\ln(2)}$. Le nénuphar occupera 75% de la surface de l'étang au bout de $19,6$ jours environ.

Corrigé exercice 130 :

L'intervalle de définition de $\ln_1$ est $]0;+\infty[$ et celui de $\ln_2$ est $]1;+\infty[$. Notons (u_n) la suite définie par $u_3=e$ et, pour tout $n\geqslant 3$, $u_{n+1}=\mathrm{e}^{u_n}$. Notons I_n l'intervalle de définition de $\ln_n$. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On note P_n la proposition $I_n=]u_n;+\infty[$. On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n\geqslant 3$.
Pour $n=3$ (initialisation) :

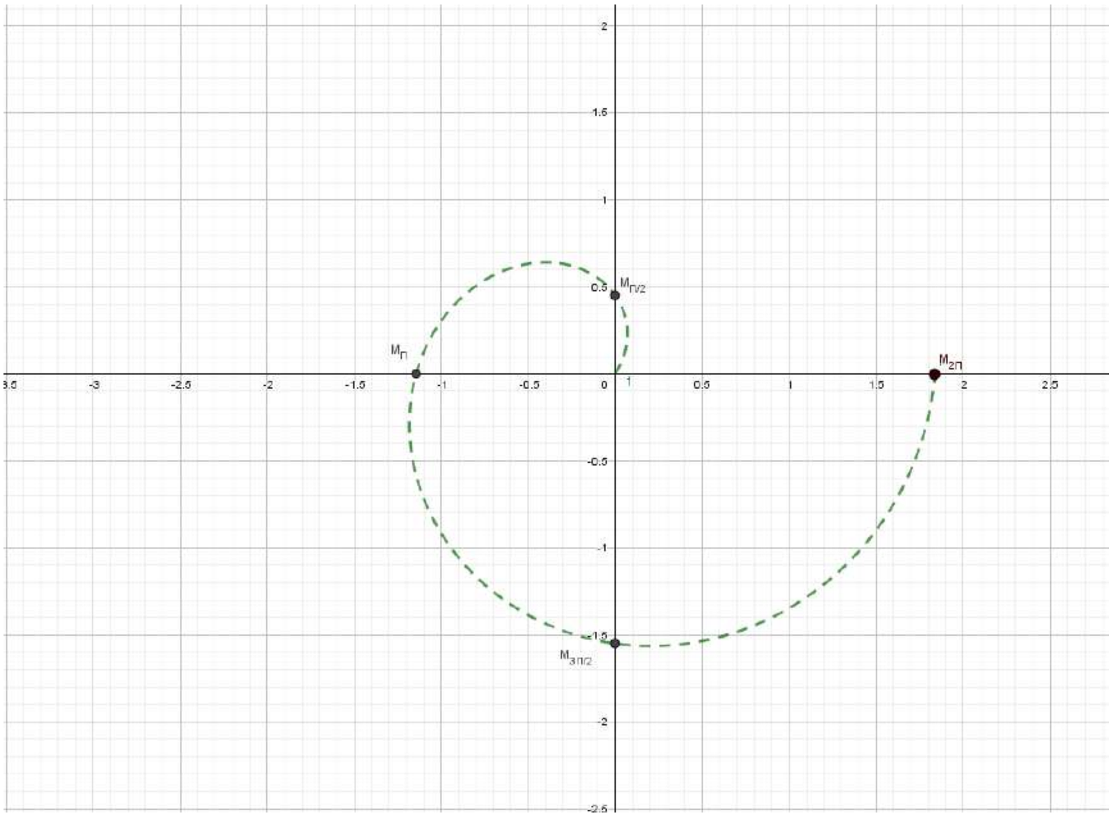
$\ln_3$ est définie par $\ln_3 = \ln_2(\ln)$ c'est-à-dire que $x \in I_3 \Leftrightarrow \ln(x) \in I_2$ c'est-à-dire $\ln(x) > 1$ c'est-à-dire $x > e$ c'est à-dire $x > u_3$.
On en déduit que P_3 est vraie.
On considère un entier naturel $k \geqslant 3$ quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $I_k =]u_k; +\infty[$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $I_{k+1} =]u_{k+1}; +\infty[$(hérédité).
$x \in I_{k+1} \Leftrightarrow \ln(x) \in I_k \Leftrightarrow \ln(x) > u_k \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{u_k} \Leftrightarrow x > u_{k+1} \Leftrightarrow x \in I_{k+1}$.
Ainsi, P_3 est vraie et, pour tout entier $k \geqslant 3$, lorsque P_k est vraie, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout n entier naturel $n \geqslant 3$, P_n est vraie donc $I_n =]u_n; +\infty[$.

Corrigé exercice 131 :

Soient a et b des nombres entiers strictement positifs que l'on supposera différents tels que $a^b = b^a$. Ceci est équivalent à $b\ln(a) = a\ln(b)$ c'est à dire $\dfrac{\ln(a)}{a} = \dfrac{\ln(b)}{b}$.
Étudions la fonction f définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
Cette fonction est dérivable et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln(x)}{x^2} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.
On a $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant e$. Ainsi f est croissante sur l'intervalle $]0; e]$ et décroissante sur l'intervalle $[e; +\infty[$. On cherche deux nombres entiers a et b dont on supposera que $a < b$ qui ont la même image par f. f étant strictement monotone sur les intervalles $]0; e]$ et $[e; +\infty[$, on a nécessairement $a \in]0; e]$ et $b \in [e; +\infty[$. Or les seuls nombres entiers dans l'intervalle $]0; e]$ sont 1 et 2. Dans la mesure où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $1^n \neq n^1$, on a forcément $a = 2$. Or, on remarque que $2^4 = 4^2$. D'après l'étude précédente, on sait que b ne peut prendre qu'une seule valeur donc $b = 4$. Les deux seuls nombres entiers distincts a et b tels que $a^b = b^a$ sont $a = 2$ et $b = 4$.

Corrigé exercice 132 :

1. On obtient, dans l'ordre de l'énoncé, les points $M_{\frac{\pi}{2}}$, M_π, $M_{\frac{3\pi}{2}}$ et $M_{2\pi}$.



2. Pour les valeurs de k inférieures ou égales à 0 le point M_θ n'existe pas. Pour $k > 0$, les points $M_{\frac{k\pi}{2}}$ sont situés sur les intersections avec les axes de coordonnées.

Corrigé exercice 133 :

On donne par exemple le programme Python ci-dessous.

```
from math import *

def premier(N):
    if N==1:
        return False
    if N==2:
        return True
    else:
        for i in range(2,N):
            if N%i==0:
                return False
        return True

def nombredepremiers(N):
    total=0
    for i in range(1,N+1):
        if premier(i)==True:
            total=total+1
    return total

test=1000
print("Le nombre", test, "est-il premier ?",
premier(test))
print("Il y a", nombredepremiers(test),
"inférieurs ou égaux à", test)
print("La nombre calculé par la formule est :",
test/log(test))
```

L'affichage est le suivant :

```
Le nombre 1000 est-il premier ? False
Il y a 168 inférieurs ou égaux à 1000
La nombre calculé par la formule est : 144.76482730108395
```

Corrigé exercice 134 :

1. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n > 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \mathrm{e}^{\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)} \\ &= \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} \\ &= \exp\left(\frac{xn}{x}\times\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(x\times\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right)\end{aligned}$$

b. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0 et son nombre dérivé en 0 vaut $\dfrac{1}{1+0} = 0$. Or le nombre dérivé de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 est défini par $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}$. Ainsi, on a $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

c. En posant $h = \dfrac{x}{n}$ dans l'expression de la question précédente on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} = 1.$$

Ainsi, d'après la première question, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$.

2. Soit $x = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = 1 = \mathrm{e}^x$.

3. Pour $n = 1000$ l'expression devient $\left(1+\dfrac{4}{1000}\right)^{1000}$.

   Ce calcul donne une approximation de e^4.

$x \leftarrow 4$
$n \leftarrow 1000$
$e4 \leftarrow \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$

Corrigé exercice 135 :

1. $f(1) = \mathrm{e}^{a\ln(1)} = \mathrm{e}^0 = 1$ et $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{a\ln(\mathrm{e})} = \mathrm{e}^{a\times 1} = \mathrm{e}^a$.

2. f est dérivable pour tout $x > 0$ car elle s'écrit sous la forme e^u où u est une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$. Pour tout $x > 0$ $f'(x) = \dfrac{a}{x}\mathrm{e}^{a\ln(x)}$. Or, a, x et $\mathrm{e}^{a\ln(x)}$ sont strictement positifs donc, pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$.

   Ainsi, f est strictement croissante sur son ensemble de définition.

3. Pour tous $x > 0$ et $y > 0$ on a $f(xy) = \mathrm{e}^{a\ln(xy)} = \mathrm{e}^{a(\ln(x)+\ln(y))} = \mathrm{e}^{a\ln(x)+a\ln(y)} = \mathrm{e}^{a\ln(x)} \times \mathrm{e}^{a\ln(y)} = f(x)f(y)$.

4. Si $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \mathrm{e}^{n\ln(x)} = \mathrm{e}^{\ln(x^n)} = x^n$. f est une fonction puissance.

5. Avec cette définition, on a $x^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln(x)} = \mathrm{e}^{\ln(\sqrt{x})} = \sqrt{x}$.

Corrigé exercice 136 :

1. Dans l'exercice 135, on a noté x^α la fonction puissance avec $\alpha > 0$. De même, on peut donc noter x^x la fonction f définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$.

2. $f(1) = \mathrm{e}^{1\ln(1)} = \mathrm{e}^0 = 1$ et $f(e) = \mathrm{e}^{e\ln(e)} = \mathrm{e}^e$.

3. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)} > 0$ avec $u(x) = x\ln(x)$. Ainsi, pour tout $x > 0$ on a $f(x) > 0$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

   $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \mathrm{e}^X = 1$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

5. On sait que, pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$. De plus, $f'(x) = (\ln(x) + 1)\mathrm{e}^{x\ln(x)}$ donc, $f'(x) \geqslant 0$ si, et seulement si, $1 + \ln(x) \geqslant 0$ si, et seulement si, $x \geqslant \mathrm{e}^{-1}$.

   Ainsi f est décroissante pour $0 < x \leqslant \mathrm{e}^{-1}$ et croissante pour $x \geqslant \mathrm{e}^{-1}$.

11 Exercices Préparer le bac

Corrigé exercice 137 :

1. a. Pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{5}{x+3} - 1 = \dfrac{5-(x+3)}{x+3} = \dfrac{-x+2}{x+3}$.
Puisque $x \geqslant 0$ alors $x+3>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x+2$.
Par conséquent $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [0;2[$.

b. On déduit de la question précédente que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;2]$ et décroissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$. Le tableau de variations est donné au complet dans la question e avec les limites.

c. Pour tout réel $x>0$,

$$\begin{aligned} x\left(5\frac{\ln(x)}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) &= 5\ln(x) - x + 5\ln\left(\frac{x+3}{x}\right) \\ &= 5\ln(x) - x + 5\ln(x+3) - 5\ln(x) = f(x) \end{aligned}$$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

e. On calcule $f(0) = 5\ln(3)$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$5\ln(3)$ $\searrow$	$-\infty$

2. a. Sur l'intervalle $[0;+\infty[$:
   - f est continue ;
   - f est strictement croissante ;
   - $f(0) = 5\ln(3)$;
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Puisque $0 \in]-\infty; 5\ln(3)]$, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaire, on en déduit qu'il existe un unique réel $\alpha \ni [0;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

b. $f(14) \approx 0,16$ et $f(15) \approx -0,55$. Ainsi par continuité et stricte décroissance de f sur cet intervalle, $\alpha \in [14;15]$. À l'aide de la calculatrice on obtient $\alpha \approx 14,23$.

3. On en déduit que $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0;\alpha]$ et $f(x) \leqslant 0$ pour $x \in [\alpha;+\infty[$.

Corrigé exercice 138 :

1. a. Pour tout $0 < x \leqslant 1$, on a $f(x) = x(1-\ln(x))^2 = x - 2x\ln(x) + x\ln(x)^2$.
La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout $0 < x \leq 1$, $f'(x) = 1 - 2\ln(x) - 2x\dfrac{1}{x} + 2\dfrac{x}{x}\ln(x) + \ln(x)^2 = \ln(x)^2 - 1 = (\ln(x)+1)(\ln(x)-1)$.

b. $f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow (\ln(x)+1)(\ln(x)-1) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [\mathrm{e}^{-1}, e]$.
Ainsi f est décroissante sur $[\mathrm{e}^{-1}, e]$ et croissante ailleurs.

x	0		e^{-1}		1
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2e^{-1}$	$\searrow$	1

2. a. L'aire du triangle rectangle est approximativement : $\dfrac{1}{2} \times 0,5 \times 2,5 = 0,625$.

   b. La tangente $d_{0,2}$ a pour équation $y = g'(0,2)(x-0,2) + g(0,2)$ c'est-à-dire $y = 5x + \ln(0,2) - 1$.

   c. L'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ s'obtient avec $Aire = OP_{0,2} \times ON_{0,2} \div 2$. Or, $P_{0,2}$ a pour ordonnée l'ordonnée à l'origine de la tangente $d_{0,2}$ c'est à dire $\ln(0,2)-1$ et $N_{0,2}$ a pour abscisse x_N tel que $5x_n + \ln(0,2) - 1 = 0$ c'est à dire $x_N = \dfrac{1-\ln(0,2)}{5}$. Ainsi $A(0,2) = (\ln(0,2)-1)\left(\dfrac{1-\ln(0,2)}{5}\right) \div 2$.
   On obtient donc $A(0,2) = \dfrac{1}{2}0,2(1-\ln(0,2))^2 = 0,1(1+\ln(5))$.

3. D'après la question 1., l'aire du triangle rectangle est maximale pour $x = \mathrm{e}^{-1}$. Pour cette valeur on a $A(\mathrm{e}^{-1}) = \dfrac{1}{2e}(1-\ln(\mathrm{e}^{-1})^2) = \dfrac{2}{e}$.

Corrigé exercice 139 :

1. a. $\varphi(1) = 0$ et, en utilisant la limite de la fonction ln en 0, on a $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = -\infty$.

   b. φ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $\varphi'(x) = 2x + \dfrac{3}{x} = \dfrac{2x^2+3}{x}$.
   Cette fonction φ' est strictement positive sur $]0;+\infty[$ donc φ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Par ailleurs, puisque φ est continue et $\varphi(1) = 0$ donc φ est négative sur $]0;1]$ et positive sur $[1;+\infty[$.

2. a. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

   b. Pour tout $x > 0, f'(x) = \dfrac{(2x-2-\frac{3}{x})(x) - (x^2-2x-2+3\ln(x))(1)}{x^2} = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.
   On en déduit que le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $\varphi(x)$ car $x^2 > 0$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi $f'(x) > 0$ pour $x > 1$ et $f'(x) \leqslant 0$ pour $0 < x \leqslant 1$.

   c. Sur l'intervalle $]0;1]$, f est continue et strictement décroissante. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et $f(1) = -3$. Ainsi d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires étudié au chapitre 6, il existe un unique $\alpha \in]0;1]$ tel que $f(\alpha) = 0$. À l'aide de la calculatrice, on obtient $\alpha \approx 0,41$.

d. Pour tout $x > 0$ $F'(x) = \frac{1}{2}2x - 2 - \frac{2}{x} - \frac{3}{2}2\frac{1}{x}\ln(x) = x - \frac{2}{x} - 3\frac{\ln(x)}{x} = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3\ln(x)}{x} = f(x)$. Ainsi f est bien la dérivée de F sur $]0;+\infty[$

Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 9 : Fonctions trigonométriques

Table des matières

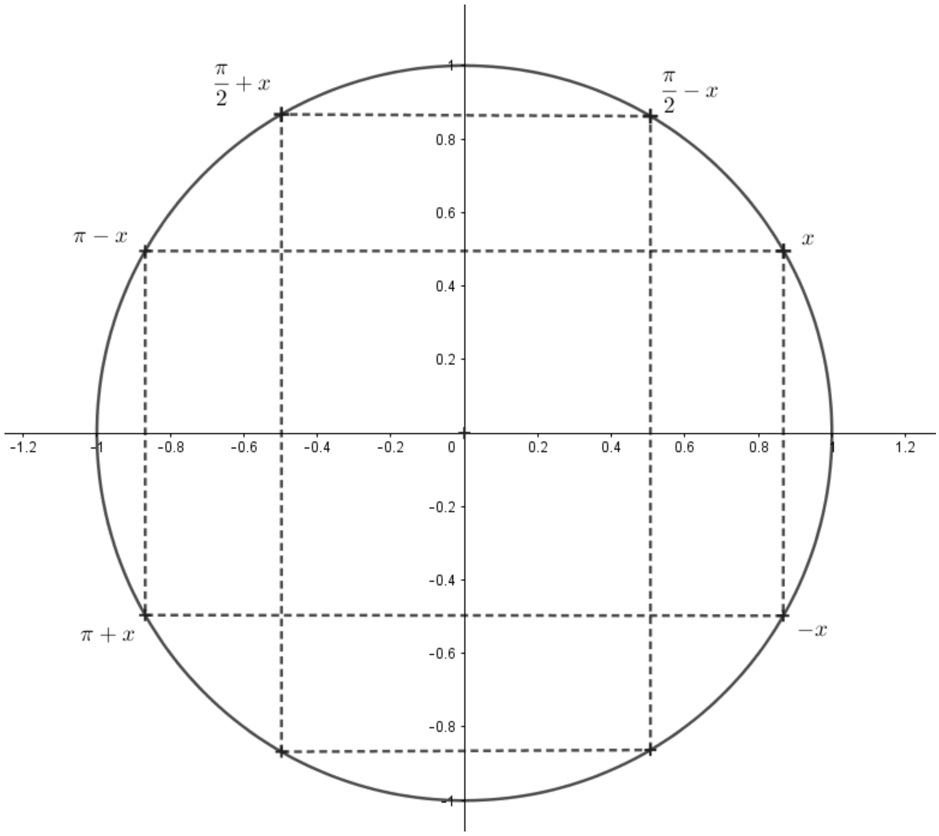
1 Informations sur ce chapitre

Introduit en classe de première, le cercle trigonométrique ainsi que les notions de cosinus et sinus ont été utilisés dans le cadre de la résolution graphique d'équations et d'inéquations de la forme $\cos(x) = a$ ou $\sin(x) > a$ sur $[-\pi; \pi]$. Une attention toute particulière a été portée sur certaines valeurs remarquables de cosinus et de sinus.
Cette étude de la trigonométrie se poursuit durant l'année de terminale en introduisant la notion de fonctions trigonométriques : fonction cosinus et fonction sinus, ainsi qu'en proposant une étude détaillée de ces deux objets mathématiques : parité, périodicité, définition, dérivabilité, étude de leurs variations et de leurs extrema locaux. Cette année sera aussi l'occasion d'effectuer l'étude complète de fonctions dépendant de ces deux fonctions tel que, par exemple, la fonction tangente.
Une place très importante sera accordée à l'idée de restriction de l'étude d'une fonction paire, impaire et/ou périodique à un intervalle.

2 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

1. On obtient la figure ci-dessous.



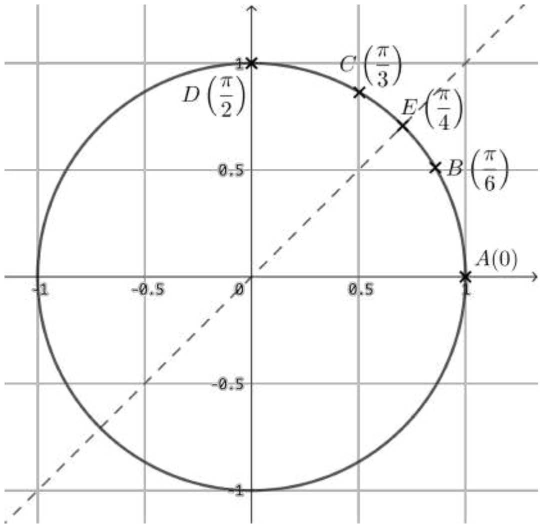
Pour placer les réels $-x$, $\pi - x$ et $\pi + x$ sur le cercle trigonométrique on utilise la règle non graduée et des symétries axiales par rapport à l'axe des abscisses ou des ordonnées. Pour placer les réels $\frac{\pi}{2} + x$ et $\frac{\pi}{2} - x$ on utilise le compas pour reporter la distance entre le point correspondant au réel 0 et le point correspondant au réel x, en posant la pointe du compas au niveau du réel correspondant au réel $\frac{\pi}{2}$.

2. On utilise le cercle trigonométrique précédent pour compléter le tableau.

$\cos(-x) = \cos(x)$ $\sin(-x) = -\sin(x)$	$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$	$\cos(2\pi + x) = \cos(x)$ $\sin(2\pi + x) = \sin(x)$

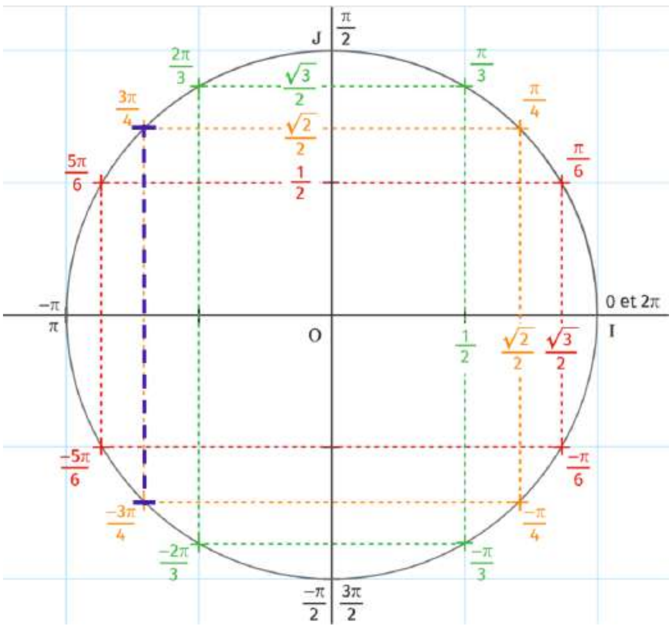
Corrigé exercice 2 :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



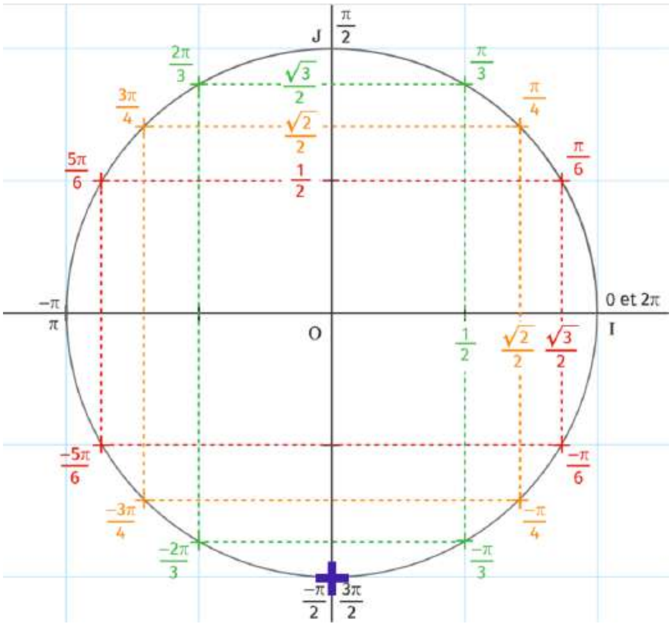
Corrigé exercice 3 :

1. On obtient :



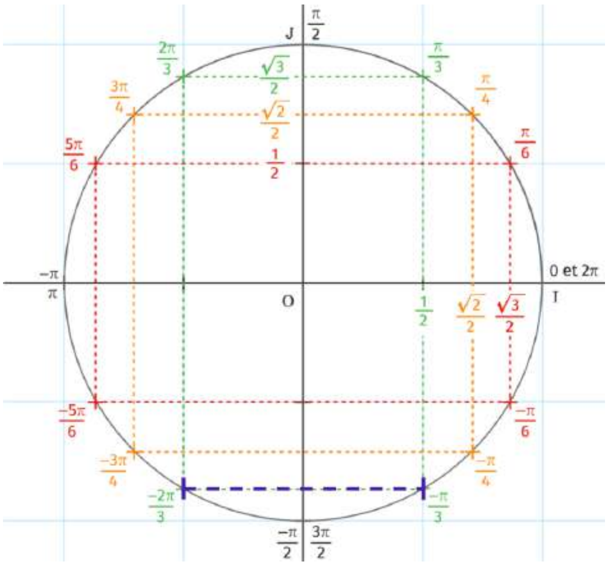
$\mathcal{S} = \left\{\frac{3\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right\}$.

2. On obtient :



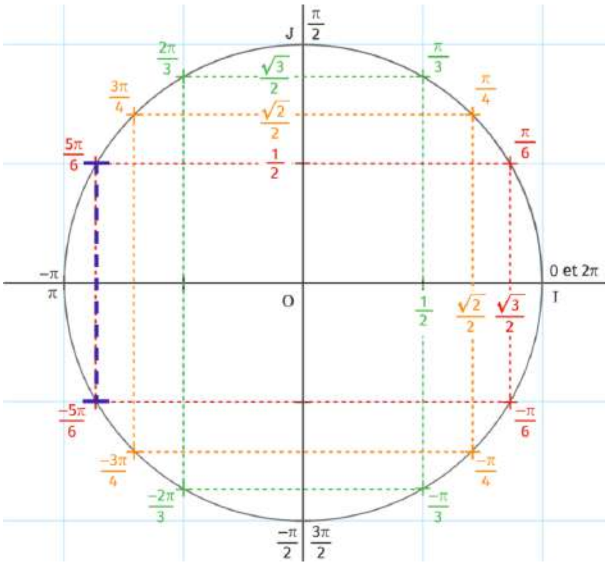
$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\pi}{2}\right\}$

3. On obtient :



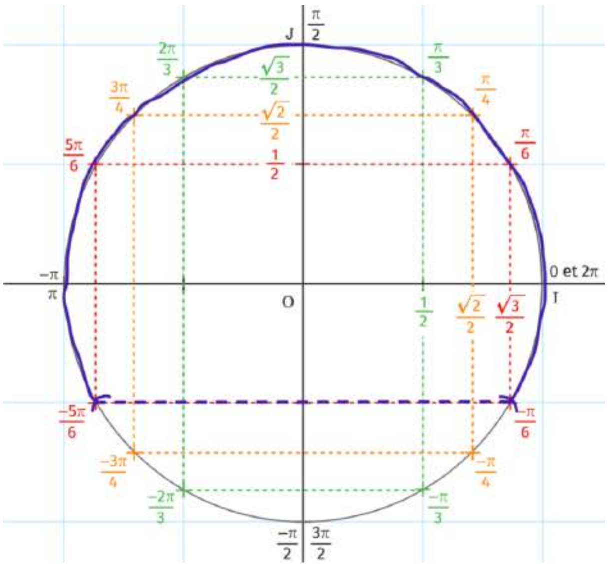
$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{2\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{3}\right\}$

4. On obtient :



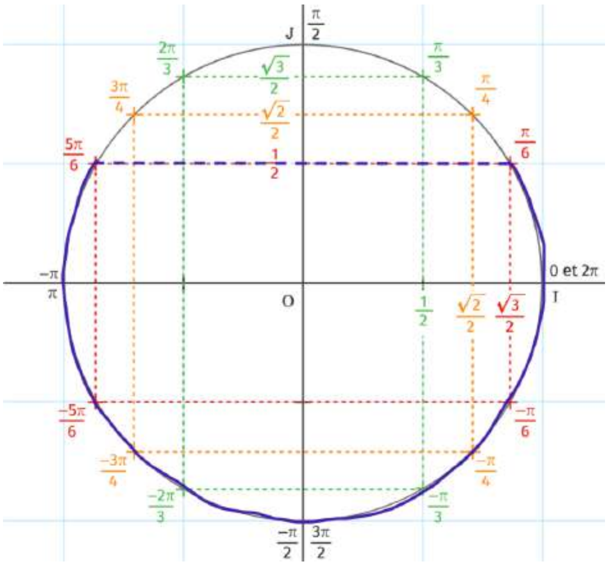
$\mathcal{S} = \left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

5. On obtient :



$\mathcal{S} = \left[-\pi; -\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6}; \pi\right]$

6. On obtient :



$$\mathcal{S} = \left[-\pi ; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6} ; \pi\right]$$

Corrigé exercice 4 :

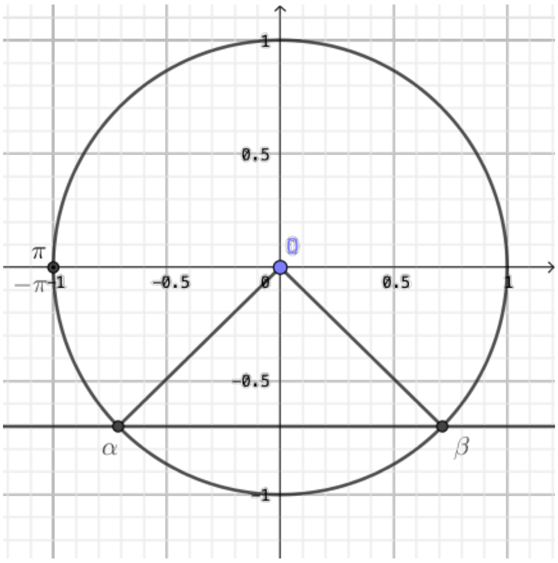
1. $x = -\frac{29\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - 4 \times 2\pi$.
2. $x = \frac{47\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 8 \times 2\pi$.
3. $x = \frac{35\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 9 \times 2\pi$.
4. $x = -\frac{55\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} - 5 \times 2\pi$.

Corrigé exercice 5 :

1. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h-1)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h - 2 = -2$ donc la fonction $f \ : \ x \mapsto x^2$ est bien dérivable en -1 et $f'(-1) = -2$.
2. $\lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \sqrt{h} = 0$ donc la fonction$f \ : \ x \mapsto x\sqrt{x}$ est bien dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
3. D'une part $\lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 1$ et d'autre part $\lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h<0}} \frac{f(h)-f(0)}{h} = -1$. Ainsi $\lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \frac{f(h)-f(0)}{h} \neq \lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h<0}} \frac{f(h)-f(0)}{h}$donc la fonction $f \ : \ x \mapsto \mid x \mid$ n'est pas dérivable en 0.

Corrigé exercice 6 :

1. On se trouve dans la situation schématisée ci-dessous.



On a donc $\beta = -\pi - \alpha$.

2. D'après la question précédente, l'ensemble des solutions de $\sin x = -0,7$ sur $[-\pi;\pi]$ est $\{\alpha; -\pi-\alpha\}$. On en déduit que l'ensemble de solutions de $\sin x = -0,7$ sur $\mathbb{R}$ est $\{\alpha + 2k\pi; -\pi - \alpha + 2k\pi\}$, où $k \in \mathbb{Z}$.

3. L'inéquation $\sin x > -0,7$ a pour ensemble de solutions sur $[-\pi;\pi]$ la réunion $[-\pi;\alpha[\cup]-\pi-\alpha;\pi]$.

4. On a $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ d'où $\cos^2\alpha = 1 - 0,7^2 = 0,51$. De plus $\cos(\alpha) < 0$ donc $\cos(\alpha) = -\sqrt{0,51}$.

3 Activités

3.1 Activité A : Restriction du domaine d'étude d'une fonction

Questions :

Partie A :

1. On suppose qu'on connaît complètement le comportement de f sur $\left[0; \frac{T}{2}\right]$. Soit $t \in \left[-\frac{T}{2}; 0\right]$. On a donc $-t \in \left[0; \frac{T}{2}\right]$. Or, par parité de f, $f(t) = f(-t)$. Ainsi, le comportement de f est connu sur $\left[-\frac{T}{2}; 0\right]$. Par conséquent, le comportement de f est connu sur $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ un intervalle d'amplitude T.

   Soit désormais t un réel. Soient l'entier relatif k et le réel $r \in \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ tels que $t = kT + r$. Par périodicité, $f(t) = f(r)$. Ainsi, si le comportement de f est connu sur $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ alors il l'est sur $\mathbb{R}$.

   Il suffit donc bien de connaître le comportement de f sur $\left[0; \frac{T}{2}\right]$.

2. Supposons que f est strictement croissante sur $[a; b]$. Donc, pour tout t et t' de $[a; b]$ tels que $t < t'$, on a $f(t) < f(t')$. Ainsi, $-t$ et $-t'$ sont éléments de $[-b; -a]$. Or, la fonction f est paire donc $f(-t) = f(t)$ et $f(-t') = f(t')$. Ainsi $-t' < -t$ et $f(t) < f(t')$. La fonction f est donc décroissante sur $[-b; -a]$.

Partie B :

1. Comme g est impaire et strictement décroissante sur $[0; 1]$ alors g est strictement décroissante sur $[-1; 0]$. Comme g est impaire et strictement croissante sur $[1; 3]$ alors g est strictement croissante sur $[-3; -1]$. Comme g est périodique de période 6 et strictement croissante sur $[-3; -1]$ alors g est strictement croissante sur $[3; 5]$. Comme g est périodique de période 6 et strictement croissante sur $[2; 3]$ alors g est strictement croissante sur $[-4; -3]$. On en déduit le tableau de variations ci-dessous.

x	-4	-3	-1	0	1	3	5
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

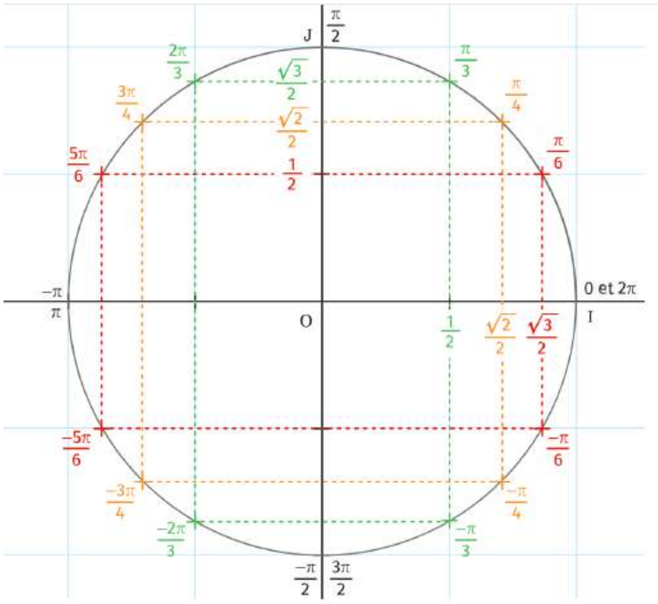
2. Comme g est impaire et définie en 0 alors $g(0) = -g(0)$ d'où $2g(0) = 0$ soit $g(0) = 0$.

   Comme g est impaire alors $g(-3) = -g(3)$. Comme g est périodique de période 6 alors $g(-3) = g(3)$. Donc $g(3) = -g(3)$ d'où $2g(3) = 0$ soit $g(3) = 0$.

D'après le tableau de variations et le fait que g est continue et $g(0) = g(3) = 0$ alors, sur $[-4; 5]$, $g(x) = 0$ admet pour solutions -3, 0 et 3. Et sur $\mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet pour solutions tous les nombres de la forme $x = 0 + 3k = 3k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Partie C :

1. On construit le cercle trigonométrique ci-dessous.



2. Par lecture du cercle trigonométrique, sur $[-\pi; \pi]$:

- $\sin(x) \leqslant \dfrac{-1}{2}$ a pour solution $\left[-\dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{6}\right]$.
- $\sin(x) > \dfrac{-1}{2}$ a pour solution $\left[-\pi; -\dfrac{\pi}{6}\right[\cup \left]-\dfrac{\pi}{6}; \pi\right]$.
- $\dfrac{-1}{2} \leqslant \sin(x) < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution $\left[-\pi; -\dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2\pi}{3}; \pi\right]$.

3. $\sin(2x) = \dfrac{-1}{2}$ équivaut à $2x = \dfrac{-5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = \dfrac{-\pi}{6} + 2k\pi$ soit à $x = \dfrac{-5\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \dfrac{-\pi}{12} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\dfrac{x}{2} = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ soit à $x = \dfrac{2\pi}{3} + 4k\pi$ ou $x = \dfrac{4\pi}{12} + 4k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Bilan :

Étudier la parité et la périodicité d'une fonction permet de réduire le domaine d'étude d'une fonction : on peut ainsi étudier une fonction sur un petit intervalle plutôt que sur $\mathbb{R}$ tout entier par exemple. Pour résoudre des équations ou des inéquations trigonométriques, on résout l'équation ou l'inéquation sur un intervalle, et on en déduit toutes les solutions par parité et périodicité des fonctions trigonométriques.

3.2 Activité B : Cosinus et sinus d'une somme et d'une différence de deux réels

Questions :

Partie A : Détermination de $\cos(a-b)$

1. On a $A(\cos(a);\sin(a))$ et $B(\cos(b);\sin(b))$ d'où :
   $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.
2. D'autre part, $\widehat{BOA} = a-b$ d'où $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\|\times\|\overrightarrow{OB}\|\times\cos(a-b) = \cos(a-b)$, car $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\| = 1$ puisque A et B sont sur le cercle trigonométrique.
3. On en déduit donc que, pour tous réels a et b de l'intervalle $[-\pi;\pi]$, $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.
4. Par parité et par la périodicité de la fonction cosinus, on peut se ramener à a et b dans $[-\pi;\pi]$ et donc, si l'égalité est valable dans $[-\pi;\pi]$, elle reste valable dans $\mathbb{R}$.

Partie B : Détermination de $\cos(a+b)$
Soient a et b deux réels. Alors $\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos(a)\cos(-b)+\sin(a)\sin(-b)$, d'après la question précédente.
Par conséquent, $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$.

Partie C : Détermination de $\sin(a+b)$ et de $\sin(a-b)$
Soient a et b deux réels. Alors $\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right)$ donc, d'après la formule de la partie A :
$\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos(b)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin(b) = \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$.
Et comme $\sin(a-b) = \sin(a+(-b))$ alors on peut utiliser la formule précédente pour montrer que $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(-b)+\cos(a)\sin(-b) = \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$.

Partie D : Détermination de $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$

1. a. Pour tout réel x,$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x)-\sin(x)\sin(x) = \cos^2(x)-\sin^2(x)$.
   b. D'après la formule précédente, et puisque $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$, alors $\cos(2x) = \cos^2(x)-(1-\cos^2(x)) = 2\cos^2(x)-1$ et $\cos(2x) = 2\cos^2(x)-1 = 1-2\sin^2(x)$.
2. $\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x)\cos(x)+\cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Bilan :

Formules d'addition :
Pour tous réels a et b :

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$

- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Formules de duplication :
Pour tout réel x :

- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

3.3 Activité C : Dérivabilité des fonctions sinus et cosinus en 0

Questions :

1. Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

   a. Puisque M appartient au cercle trigonométrique et est associé au réel x on a $M\left(\cos(x); \sin(x)\right)$.

   b. Dans le triangle OTI rectangle en I, on a $\tan\left(\widehat{IOT}\right) = \dfrac{IT}{OI}$ d'où $\tan(x) = \dfrac{IT}{1}$ donc $IT = \tan(x)$ d'où $T\left(1; \tan(x)\right)$.

2. a. L'aire de OMI vaut $\dfrac{\sin(x) \times 1}{2} = \dfrac{\sin(x)}{2}$ et l'aire de OTI vaut $\dfrac{1 \times \tan(x)}{2} = \dfrac{\tan(x)}{2}$. Puisque l'aire du disque délimité par le cercle trigonométrique vaut π, l'aire d'un secteur angulaire de ce cercle d'angle x vaut $\dfrac{x \times \pi}{2\pi} = \dfrac{x}{2}$.

   b. Ainsi, puisque l'aire du secteur angulaire est compris strictement entre l'aire de OMI et l'aire de OTI, on a $\dfrac{\sin(x)}{2} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\tan(x)}{2}$.

3. a. On rappelle que $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ donc $0 < \cos(x) < 1$ et $0 < \sin(x) < 1$.
   La relation précédente s'écrit aussi $\sin(x) < x < \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Par conséquent, comme $\sin(x) \neq 0$, on a $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$. Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$, on en déduit que $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$.

   b. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \cos x = 1$ d'où, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

   c. Soit $x < 0$. La fonction sinus étant impaire, $\dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin(X)}{X}$ avec $X = -x > 0$ d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X > 0}} \dfrac{\sin X}{X} = 1$. Ainsi la fonction sinus est dérivable en 0 et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 = \sin'(0)$.

4. Pour tout réel $x \neq 0$, $-\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^2 \times \dfrac{x}{\cos(x)+1} = -\dfrac{1-\cos^2(x)}{x^2} \times \dfrac{x}{\cos(x)+1}$
$= -\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \dfrac{\cos(x)-1}{x}$.

5. Par opérations sur les limites, à l'aide de la limite déterminée à la question 3., on obtient $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x} = -1^2 \times \dfrac{0}{2} = 0 = \cos'(0)$.

Bilan :

Les fonctions sin et cos sont dérivables en 0 et $\sin'(0) = 1$, $\cos'(0) = 0$.

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 7 :

Par lecture graphique sur le cercle trigonométrique, on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:
$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -0,5$.

Réponse : c

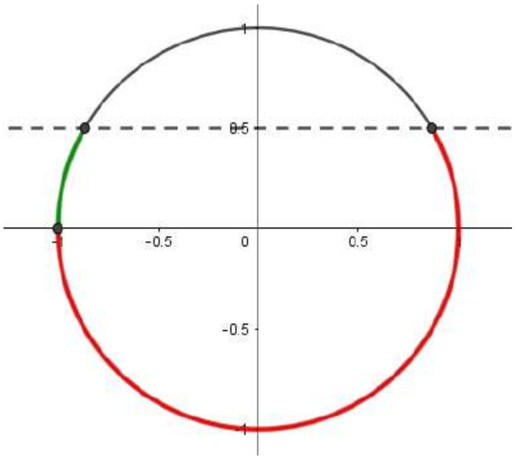
Corrigé exercice 8 :

Par lecture sur le cercle trigonométrique, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. De même, on détermine que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Réponse : d

Corrigé exercice 9 :

Par lecture sur le cercle trigonométrique, on obtient que les solutions de cette inéquation sur $[-\pi;\pi]$ sont $\left[-\pi;\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6};\pi\right]$.



Réponse : c

Corrigé exercice 10 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sin'(3x) - 4\cos'(3-2x) = 3\cos(3x) - 4 \times (-2) \times (-\sin(3-2x))$ donc $f'(x) = 3\cos(3x) - 8\sin(3-2x)$.

Réponse : c

Corrigé exercice 11 :

Si $f(2) = f(-2)$, f n'est pas forcément paire. On peut par exemple prendre comme contre-exemple la fonction $f : x \mapsto x^3 - 4x$ qui vérifie bien $f(2) = f(-2)$ mais n'est pas paire. Par contre, si f est paire alors forcément $f(2) = f(-2)$, donc si $f(2) \neq f(-2)$ alors, par contraposée, f n'est pas paire. L'affirmation a. est donc fausse, et l'affirmation b. est bien vraie.
De même, si $f(2) = f(-2)$, f n'est pas forcément périodique de période 4. On peut par exemple prendre comme contre-exemple la fonction $f : x \mapsto x^2$ qui vérifie bien $f(2) = f(-2)$ mais n'est pas périodique de période 4. Par contre, si f est périodique de période 4 alors forcément $f(2) = f(-2)$, donc si $f(2) \neq f(-2)$ alors, par contraposée, f n'est pas périodique de période 4. L'affirmation c. est donc fausse, et l'affirmation d. est bien vraie.

Réponses : b et d

Corrigé exercice 12 :

Pour tout réel x, $\sin(x) = \sin(\pi - x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Réponses : b et c

Corrigé exercice 13 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x \times \cos(x) + x^2 \times (-\sin(x)) = 2x\cos(x) - x^2\sin(x)$.

Réponse : c

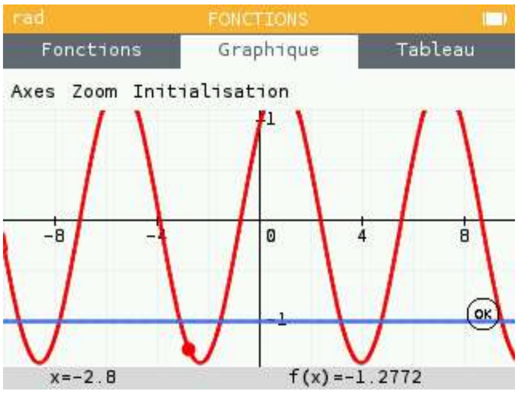
Corrigé exercice 14 :

Soit x un réel.
Alors $f(-x) = \cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin(x))$ car la fonction sinus est impaire, d'où $f(-x) = \cos(\sin(x)) = f(x)$ car la fonction cosinus est paire. Donc la fonction f est paire.
De plus, $f(x+\pi) = \cos(\sin(x+\pi)) = \cos(-\sin(x)) = \cos(\sin(x))$ car la fonction cosinus est paire. Donc $f(x+\pi) = f(x)$. La fonction f est donc périodique de période π. Elle est donc aussi, forcément, périodique de période 2π.

Réponses : a, c et d

Corrigé exercice 15 :

1. A l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que cette équation admet 7 solutions.

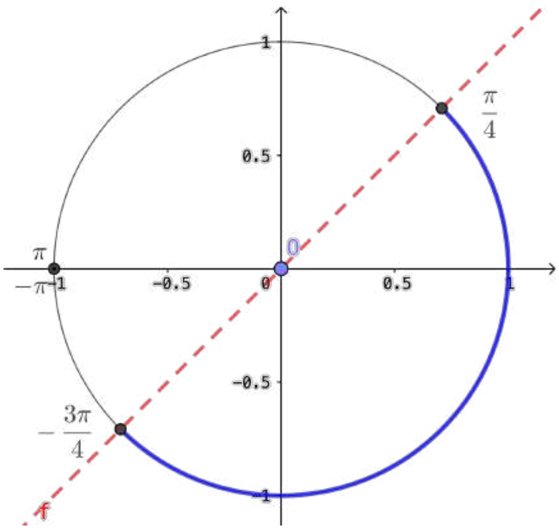


2. a. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi)+\sin(x+2\pi)+1 = \cos(x)+\sin(x)+1 = f(x)$, car la fonction cosinus et la fonction sinus sont périodiques de période 2π donc f est périodique de période 2π.

   De plus, comme $f\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ alors f ni paire, ni impaire.

   b. La périodicité de la fonction f permet donc de restreindre l'étude à $[-\pi;\pi]$.

   c. Par lecture du cercle trigonométrique, sur $[-\pi;\pi]$, on a $\cos(x) > \sin(x)$ si, et seulement si, $x \in \left]-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$.



   De plus, la fonction f est dérivable sur $[-\pi;\pi]$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Et, pour tout $x \in [-\pi;\pi]$, $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$. On en déduit alors le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↘	$1-\sqrt{2}$	↗	$1+\sqrt{2}$	↘	0

3. L'équation admet deux solutions évidentes sur $[-\pi;\pi]$: $-\pi$ et π. De plus, la fonction f est continue sur $[-\pi;\pi]$, et en particulier sur $\left[-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$. De plus, $f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) < 0$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur $\left[-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$. On en déduit que l'équation admet trois solutions sur $[-\pi;\pi]$.

   Enfin, par périodicité, sur $[-3\pi;\pi[$, $f(x) = 0$ admet 2 solutions et sur $]\pi;3\pi]$, $f(x) = 0$ admet 2 solutions. D'où un total de 7 solutions sur $[-3\pi;3\pi]$.

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1

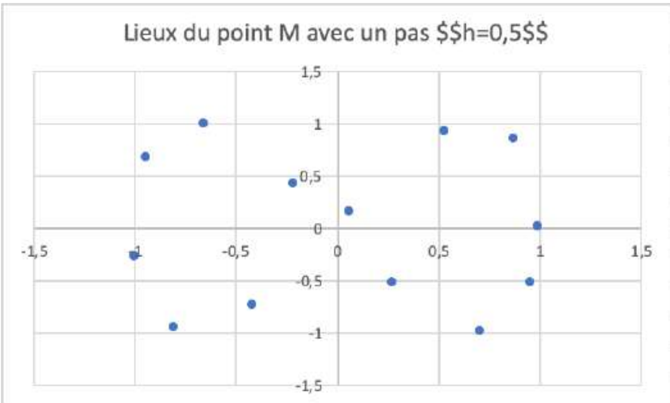
Question préliminaire

Soit $t \geqslant 0$. Alors les coordonnées du point M au temps $t + 2\pi$ sont $(x(t + 2\pi); y(t + 2\pi))$ c'est-à-dire $(cos(t + 2\pi); sin(2t + 2 \times 2\pi))$ et donc, puisque les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodique, les coordonnées sont $(cos(t); sin(2t))$. Ainsi le point M a bien les mêmes coordonnées au temps t qu'au temps $t + 2\pi$.

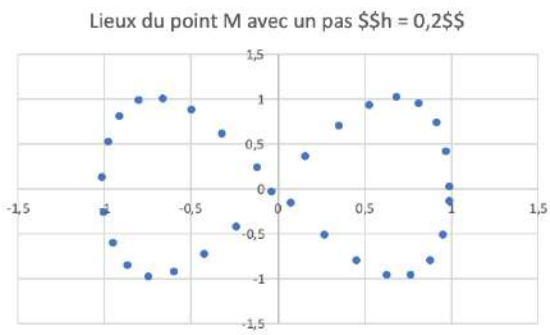
Méthode 1 : Tableur

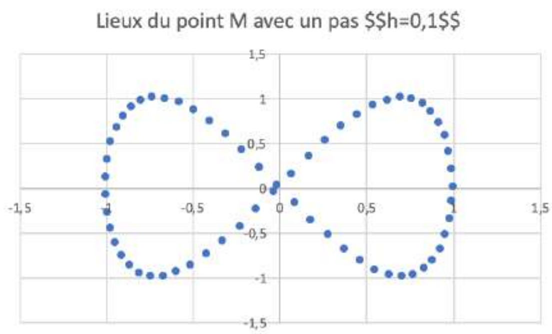
1. a. On entre dans la cellule C4 la formule = SIN(2*A4) avant de la copier vers le bas.

   b. On obtient les graphiques suivant avec l'outil nuage de points ou diagramme XY.



   c. Avec un pas de 0,2 et 0,1 on obtient les figures ci-dessous.





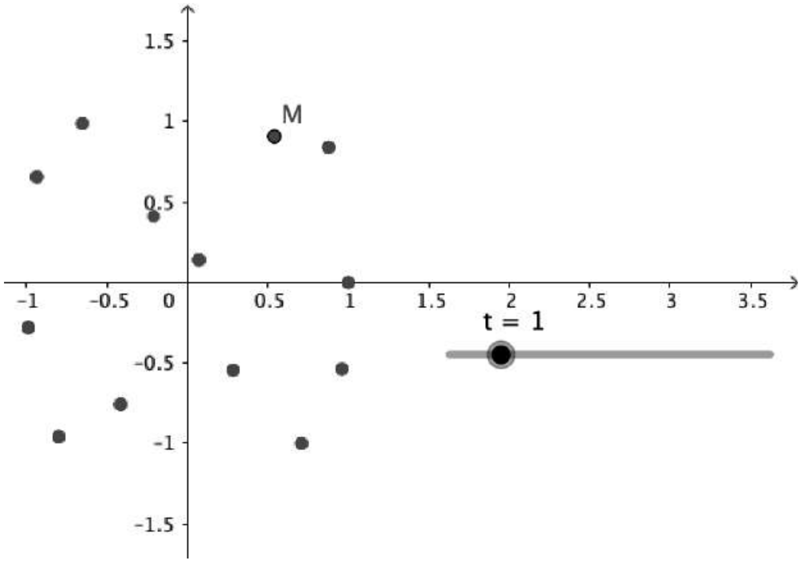
2. On retrouve la propriété démontrée en question préliminaire : les coordonnées du point M sont identiques à l'instant 0 et à l'instant 2π, en lien avec la périodicité des fonctions cosinus et sinus.

Méthode 2 : Geogebra

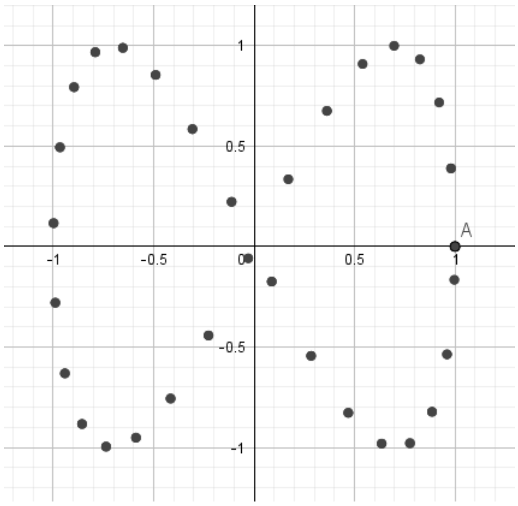
1. Voir le fichier dans le dossier TICE.

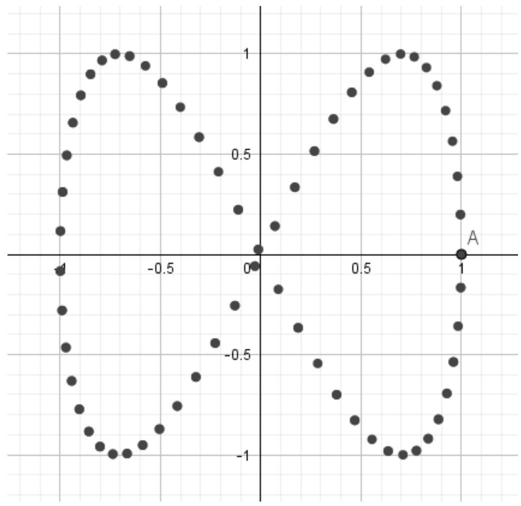
2. Voir le fichier.

3. a. On obtient la figure ci-dessous.



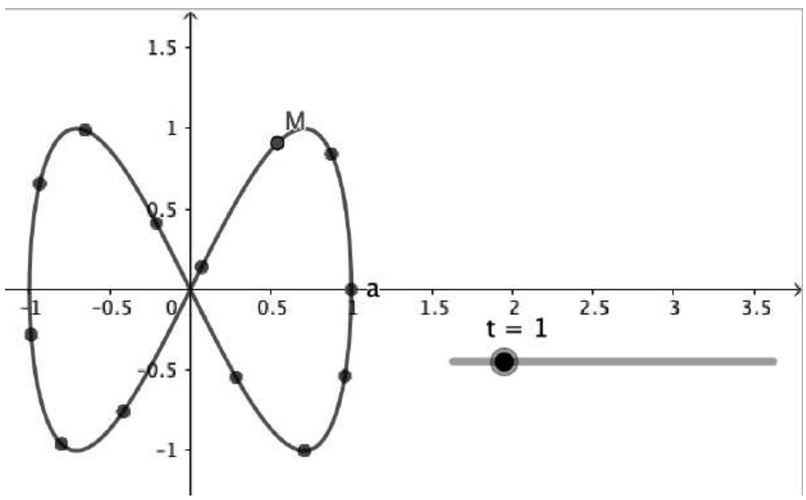
b. Avec un incrément de 0,2 puis de 0,1 on obtient les figures ci-dessous.





4. On retrouve la propriété démontrée en question préliminaire : les coordonnées du point M sont identiques à l'instant 0 et à l'instant 2π, en lien avec la périodicité des fonctions cosinus et sinus.

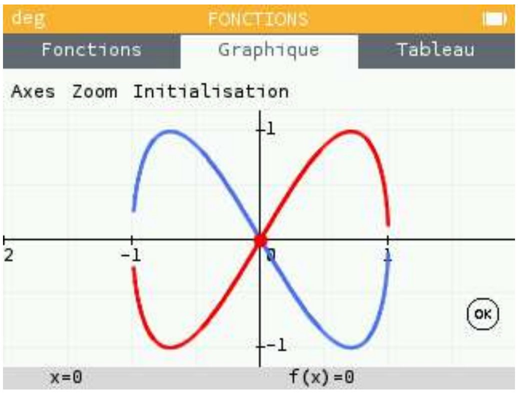
5. On obtient la figure ci-dessous.



Méthode 3 : Calculatrice

1. Pour tout réel $t \geqslant 0$, $y(t) = \sin(2t) = 2\cos(t)\sin(t) = 2x(t)\sin(t)$. Or, $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ d'où $\sin(t) = \sqrt{1-\cos^2(t)}$ ou $\sin(t) = -\sqrt{1-\cos^2(t)}$. Ainsi $y(t) = 2x(t)\sqrt{1-x^2(t)}$ ou $y(t) = -2x(t)\sqrt{1-x^2(t)}$.

2. On obtient les courbes ci-dessous.



3. On retrouve la propriété démontrée en question préliminaire : les coordonnées du point M sont identiques à l'instant 0 et à l'instant 2π, en lien avec la périodicité des fonctions cosinus et sinus. On peut aussi observer qu'on a tracé deux courbes symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Pour aller plus loin.

Soit $M(a;b)$ un point de la courbe. Il existe donc un réel t tel que $a = \cos(t)$ et $b = \sin(2t)$. Alors $(a;-b) = (\cos(t); -\sin(2t)) = (\cos(t); \sin(-2t)) = (\cos(-t); \sin(2(-t)))$. Donc le point de coordonnées $(a;-b)$ vérifie l'équation paramétrique et appartient ainsi à la courbe. On peut donc en déduire que la courbe admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.
De même, on a :
$(-a;b) = (-\cos(t); \sin(2t)) = (\cos(\pi+t); \sin(2t+2\pi)) = (\cos(\pi+t); \sin(2(\pi+t)))$.
Donc le point de coordonnées$(-a;b)$ vérifie l'équation paramétrique et appartient ainsi à la courbe. On peut donc en déduire que la courbe admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.
$(a;-b)$ étant un point de la courbe d'après le premier résultat démontré, on peut lui appliquer le deuxième résultat, d'où $(-a;-b)$ appartient aussi à la courbe. On peut donc en déduire que la courbe admet l'origine du repère comme centre de symétrie (on pouvait aussi directement le déduire des deux axes de symétries précédents).

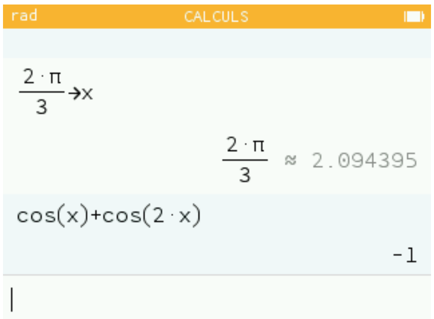
5.2 Corrigé du TP 2

Question préliminaire

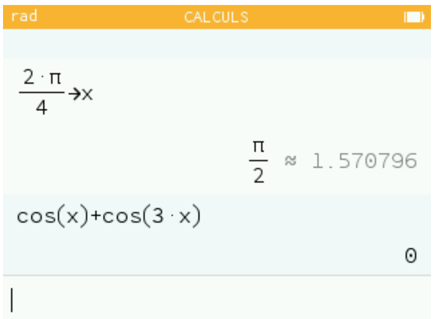
n	Décomposition en facteurs premiers	$E(n)$
3	3	$\{1; 2\}$
4	2^2	$\{1; 3\}$
9	3^2	$\{1; 2; 4; 5; 7; 8\}$
12	$2^2 \times 3$	$\{1; 5; 7; 11\}$
14	2×7	$\{1; 3; 5; 9; 11; 13\}$
15	3×5	$\{1; 2; 4; 7; 8; 11; 13; 14\}$
30	$2 \times 3 \times 5$	$\{1; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29\}$
54	2×3^3	$\{1; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 25; 29; 31; 35; 37; 41; 43; 47; 49; 53\}$

Méthode 1 : Calculatrice

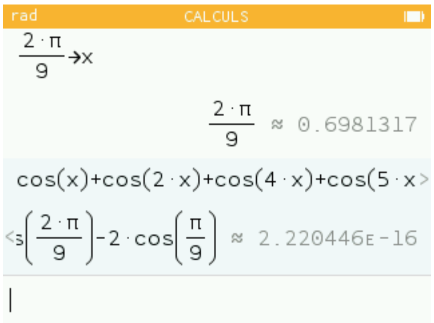
1. On obtient les résultats ci-dessous.



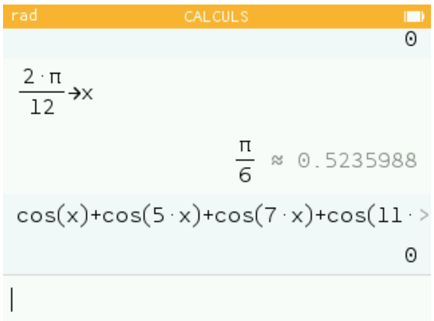
Pour $n = 3$



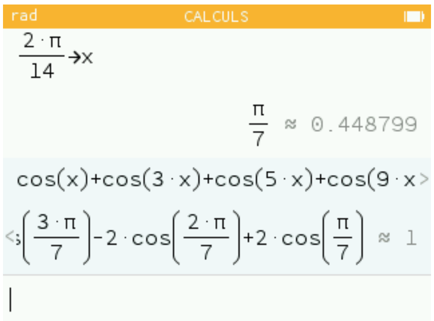
Pour $n = 4$



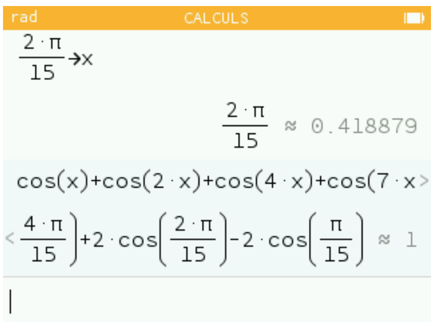
Pour $n = 9$



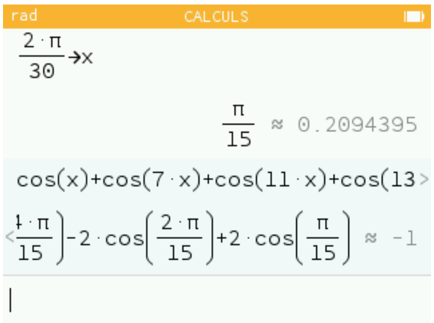
Pour $n = 12$



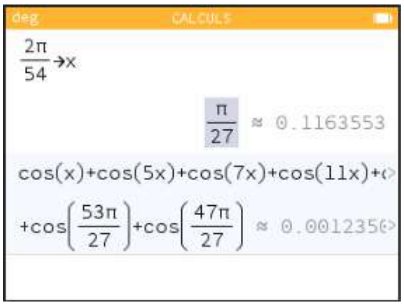
Pour $n = 14$



Pour $n = 15$



Pour $n = 30$



Pour $n = 54$

2. Il semblerait que, aux erreurs d'arrondis près, les valeurs possibles de $S(n)$ soient uniquement 0, 1 et -1.

3. Il semblerait que, aux erreurs d'arrondis près, les valeurs possibles de $S(n)$ soient uniquement 0, 1 et -1.

Méthode 2 : Python

1. La ligne 6 teste si le PGCD du nombre n et du nombre $i \leqslant n$ est égal à 1, c'est-à-dire qu'elle teste si le nombre i fait partie, ou non, de $E(n)$.

2. On complète le programme Python comme ci-dessous.

```
1 from math import *
2
3 def s(n):
4     S = 0
5     for i in range(1, n):
6         if gcd(i, n) == 1:
7             S = S + cos(i*(2*pi)/(n))
8     return S
```

3. On peut par exemple ajouter au programme précédent le code suivant.

```
def s2(l) :
    liste = []
    for k in range (0,len(l)+1):
        liste.append(s(k))
    return liste

print(s2([3,4,9,12,14,15,30,54]))
```

4. On obtient grâce au programme Python les résultats suivants.

TEXTE GRAPH

```
[0, 0, -1.0,
-1.0000000000000002,
-1.224646799147353e-16,
-1.0000000000000002,
1.0000000000000002,
-1.0000000000000002,
-2.220446049250313e-16]
```

Pour aller plus loin

Il semblerait que, si, dans la décomposition de n en produit de facteurs premiers, au moins l'un des facteurs premiers est élevé à une puissance supérieure ou égale à 2 alors $S(n) = 0$. Sinon, si le nombre de facteurs premiers est pair alors $S(n) = 1$. Et sinon on a $S(n) = -1$.

6 Travailler les automatismes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 16 :

Philippe a tort car cette courbe n'est pas la représentation graphique d'une fonction. Si cette courbe était la représentation graphique d'une fonction, le nombre 0, par exemple, admettrait deux images par cette dernière, ce qui est impossible.

Corrigé exercice 17 :

1. Faux car cette courbe n'est pas symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. Faux car cette courbe n'est pas symétrique par rapport à l'origine.
3. Vrai car cette courbe est invariante par translation de vecteur $5\vec{\imath}$.
4. Faux. Par exemple $f(-7) \neq f(1,5)$.
5. Vrai. En effet, f est périodique de période 5 donc également de période 10.

Corrigé exercice 18 :

D'une part, $\cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$.
D'autre part, $\cos\left(0 + \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos(\pi) = -1$.
D'où $\cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \neq \cos\left(0 + \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$.

Corrigé exercice 19 :

Par lecture graphique du cercle trigonométrique, $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$.

Corrigé exercice 20 :

Par lecture graphique du cercle trigonométrique, $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$.

6.2 Exercices

Corrigé exercice 21 :

Dans tous les cas, les ensembles de définition des fonctions suivantes sont centrés en 0. Autrement dit, pour tout réel x appartenant à l'ensemble de définition, son opposé $-x$ appartient également à cet ensemble de définition. Il est donc possible de se demander dans ce cas si les fonctions proposées sont éventuellement paires ou impaires.
La fonction a est paire et impaire car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a(x) = 0 = -a(x) = a(-x)$.
La fonction b n'est ni paire, ni impaire car, par exemple, $b(1) = 0$ et $b(-1) = 2$.
La fonction c est paire car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $c(-x) = x^2 = c(x)$.

La fonction d est impaire car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d(-x) = -x^3 = -d(x)$.
La fonction e est paire car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e(-x) = \mid -x \mid = \mid x \mid = e(x)$.
La fonction f est impaire car, pour tout $x \neq 0$, $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$.

Corrigé exercice 22 :

1. Si f est paire alors, en particulier, on a $f(-1) = f(1)$ c'est-à-dire $(-1)^n = 1^n$ donc n est un entier naturel pair.
2. Si f est impaire alors, en particulier, on a $f(-1) = -f(1)$ c'est-à-dire $(-1)^n = -1^n$ donc n est un entier naturel impair.

Corrigé exercice 23 :

f étant une fonction paire strictement croissante sur $[1; 3]$, f est strictement décroissante sur $[-3; -1]$. Par périodicité, f reste donc strictement décroissante sur $[-3+8; -1+8] = [5; 7]$.

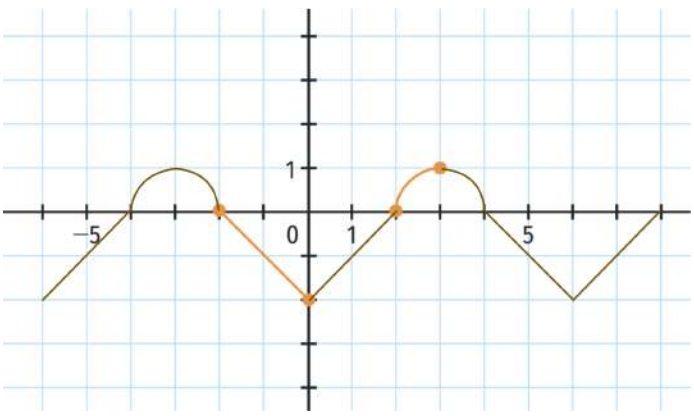
Corrigé exercice 24 :

Tout d'abord, g étant impaire et définie en 0, on a $g(0) = 0$.
De plus, comme g est strictement croissante sur $[0; 2]$, elle l'est aussi sur $[-2; 0]$, par imparité de la fonction. Pour la même raison, comme g est strictement décroissante sur $[2; 3]$, elle l'est aussi sur $[-3; -2]$. On a ainsi déterminer les variations de la fonction g sur $[-3; 3]$.
g étant 6-périodique, les variations sur $[-3; 0]$ sont conservées sur $[3; 6]$. De même, celles sur $[0; 3]$ sont identiques à celles observées sur $[-6; -3]$. On en déduit ainsi le tableau de variations ci-dessous.

x	-6		-4		-2		0		2		4		6
g	0	↗	□	↘	□	↗	0	↗	□	↘	□	↗	0

Corrigé exercice 25 :

Voici la courbe que l'on obtient en respectant les conditions de parité et de périodicité.



Corrigé exercice 26 :

La fonction cosinus étant paire et la fonction sinus impaire, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x) - (-\sin x) + \cos(x) - \cos(x) = 2\sin(x)$. Ainsi f a la même parité et la même périodicité que la fonction sinus : f est impaire et 2π-périodique.

Corrigé exercice 27 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \sin(\cos(-x)) = \sin(\cos x) = f(x)$ donc f est paire.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin(x)) = \cos(\sin x) = g(x)$ donc g est paire.

Corrigé exercice 28 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \sin((-x)^3) = \sin(-x^3) = -\sin(x^3) = -f(x)$ donc f est une fonction impaire.

Corrigé exercice 29 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = \cos(2(x+\pi)) = \cos(2x+2\pi) = \cos(2x) = f(x)$, car la fonction cosinus est 2π-périodique, donc f est π-périodique.

Corrigé exercice 30 :

Par lecture du cercle trigonométrique, $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

Corrigé exercice 31 :

Par lecture du cercle trigonométrique, $\left[-\pi; \dfrac{-\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{6}; \pi\right]$.

Corrigé exercice 32 :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$\sin x$			$-$		0		$+$		
$\cos(x) \times \sin(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où $\mathcal{S} = \left]-\dfrac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}; \pi\right[$.

Corrigé exercice 33 :

$-2\cos(x) + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

Corrigé exercice 34 :

1. $\cos(x) > 0$ et $\sin(x) > 0$ si, et seulement si, $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
2. $\cos(x) > 0$ et $\sin(x) < 0$ si, et seulement si, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$.
3. $\cos(x) < 0$ et $\sin(x) > 0$ si, et seulement si, $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$.
4. $\cos(x) < 0$ et $\sin(x) < 0$ si, et seulement si, $x \in \left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right[$.

Corrigé exercice 35 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) \geqslant -1$ et $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant -1$ d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant -2$. Ainsi l'équation $\cos(2x) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) = -3$ ne peut pas admettre de solution dans $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 36 :

π est une solution de cette équation car $\cos(2\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2$.

Corrigé exercice 37 :

1. On construit le tableau de signes suivant.

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos(2x)$		$+$	0	$-$	0		$+$		0	$-$	0	$+$	
$\sin x$				$-$			0			$+$			
$\cos(2x) \times \sin(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble des solutions de $\cos(2x)\sin(x) > 0$ sur $[-\pi; \pi]$ est $\left]-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}; \pi\right[$.

2. On construit le tableau de signes suivant.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(2x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$\cos x$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$\cos(x) \times \sin(2x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Donc l'ensemble des solutions de $\cos(x)\sin(2x) < 0$ sur $[-\pi;\pi]$ est $\left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$.

Corrigé exercice 38 :

1. $\cos(x)\sin(x) = 0$ si, et seulement si, $\cos(x) = 0$ ou $\sin(x) = 0$ c'est-à-dire si, et seulement si, $x = k\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \leqslant 1$ et $\sin(x) \leqslant 1$ donc $\cos(x)\sin(x) \leqslant 1$. Ainsi, l'équation $\cos(x)\sin(x) = 2$ n'admet pas de solution.
3. $\cos^2(x) = 1$ si, et seulement si, $\cos(x) = 1$ ou $\cos(x) = -1$ d'où $x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
4. $\sin^2(x) = 0,5$ si, et seulement si, $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Corrigé exercice 39 :

S'il existait un tel nombre réel x on aurait $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 0,7^2 + 0,3^2 = 0,58 \neq 1$. Donc un tel nombre n'existe pas.

Corrigé exercice 40 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \cos(-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.
Toutes les réponses sont donc correctes sauf la 2.

Corrigé exercice 41 :

1. Comme $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ alors $\cos^2(x) = 1 - 0,6^2 = 0,64$. Donc $\cos(x) = 0,8$ ou $\cos(x) = -0,8$. Or, puisque $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$, $\cos(x) < 0$ et donc $\cos(x) = -0,8$.
2. On a $\sin(\pi + x) = -\sin(x) = -0,6$.
3. On a $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) = -0,6$.
4. On a $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) = -0,8$.

Corrigé exercice 42 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin(x) + \cos(x)$.

Corrigé exercice 43 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Corrigé exercice 44 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(x) - \sin(x) = 0$.
2. On peut en déduire que la fonction f est constante.

Corrigé exercice 45 :

Une écriture possible de f est, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$.

Corrigé exercice 46 :

Une écriture possible de f est, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Corrigé exercice 47 :

Par stricte décroissance de la fonction cosinus sur $[0; \pi]$, on a :
$\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) < \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$.

Corrigé exercice 48 :

On remarque, tout d'abord, que $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) = \sin\left(\pi - \frac{4\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$.
On en déduit ainsi, par stricte croissance de la fonction sinus sur, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:
$\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) < \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) < \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)$.

Corrigé exercice 49 :

Par stricte décroissance de la fonction cosinus sur $[0; \pi]$, $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) > \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)$.

Corrigé exercice 50 :

On a $\sin\left(\frac{5\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{14}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$.

Corrigé exercice 51 :

L'équation $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ admet cet ensemble comme ensemble solution.

Corrigé exercice 52 :

Les trois fonctions suivantes sont impaires sur $\mathbb{R}$: $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)\sin(x)$ et $h(x) = x^2 \sin(x)$.

Corrigé exercice 53 :

Les quatre fonctions suivantes sont définies sur $\mathbb{R}$ et périodiques de période 1 : $f(x) = \cos(2\pi x)$, $g(x) = \sin(2\pi x)$, $h(x) = \cos(2\pi x) - \sin(2\pi x)$, $k(x) = 2\cos(2\pi x) + 3\sin(2\pi x)$.

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 54 :

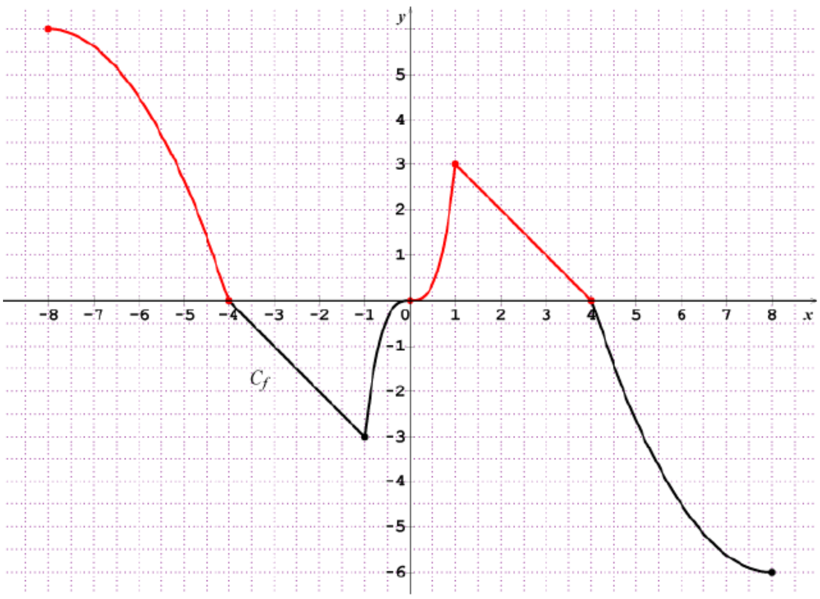
1. Comme f est impaire, on a $f(0) = 0$.
2. Comme f est impaire, on a $f(1) = -f(-1) = -3$.
3. On ne peut pas déterminer $f(2)$.
4. f est 4-périodique donc $f(3) = f(3-4) = f(-1) = 3$.

Corrigé exercice 55 :

On peut restreindre sur $[0;2]$ puisque, par parité (ici impaire), on peut en déduire l'étude sur $[-2;2]$, puis par périodicité on peut en déduire l'étude sur $\mathbb{R}$.

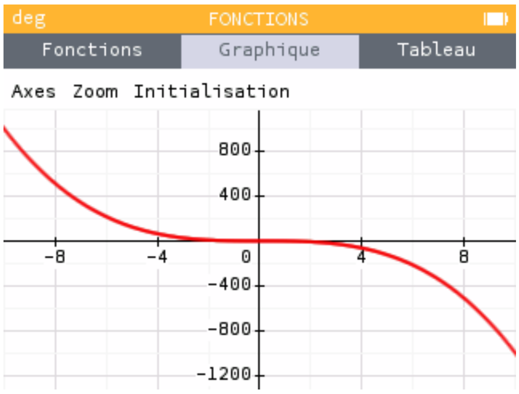
Corrigé exercice 56 :

La fonction f étant impaire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Corrigé exercice 57 :

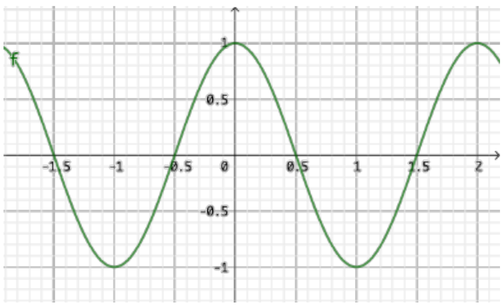
1. La seule fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant ces conditions est la fonction nulle.
2. C'est impossible car si f est strictement monotone sur $[0;+\infty[$ alors f, étant paire, est de monotonie contraire sur $]-\infty;0]$.
3. La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = -x^3$ convient.



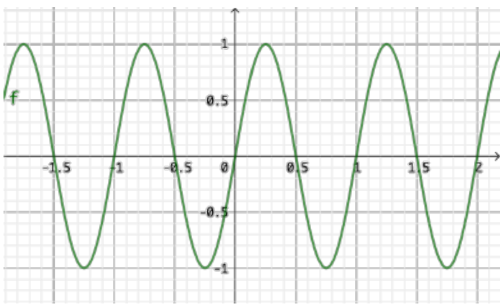
Corrigé exercice 58 :

1. Une telle fonction n'existe pas. En effet, si une fonction f est périodique de période 1, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)$ et donc, en particulier, $f(x+2) = f((x+1)+1) = f(x+1) = f(x)$ donc la fonction f est aussi périodique de période 2.

2. La fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$ convient par exemple.



3. La fonction $x \mapsto \sin(2\pi x)$ convient par exemple. Cette fonction est périodique de période 1, donc elle est également de période 2 et de période 3.



Corrigé exercice 59 :

1. Cette affirmation est fausse. On peut prendre comme contre-exemple la fonction $x \mapsto e^x$.

2. Cette affirmation est fausse. La fonction $x \mapsto 0$ est paire et impaire.

3. Cette affirmation est fausse. On peut prendre comme contre-exemple la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, aussi appelée fonction tangente, qui est périodique mais n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.

4. Cette affirmation est fausse. On peut prendre comme contre-exemple la fonction $x \mapsto x^2 - 9$. Cette fonction est paire mais pas impaire.

5. Si f est définie en 3 mais pas en -3, alors on ne peut pas avoir $f(3) = f(-3)$ ou $f(3) = -f(-3)$ et donc la fonction f ne peut ni être paire ni être impaire.

6. Cette affirmation est vraie. En effet, on a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $f(x) = f(x+3) = f(x+3+3) = f(x+6)$.

7. Cette affirmation est fausse.

   Prenons comme contre-exemple la fonction $x \mapsto \cos\left(\dfrac{x\pi}{3}\right)$. Cette fonction est 6-périodique mais pas 3-périodique.

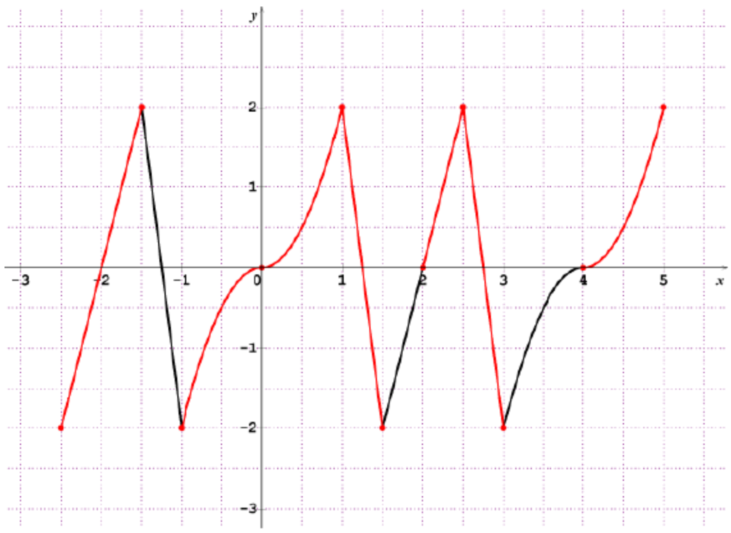
8. Cette affirmation est fausse. On peut prendre comme contre-exemple la fonction inverse. En revanche, si une fonction impaire est définie en 0 alors forcément $f(0) = 0$.

9. Cette affirmation est vraie. Si f est impaire alors l'étudier sur $[-1,5;0]$ permet aussi de connaître f sur $[0;1,5]$ et donc sur $[-1,5;1,5]$. Et comme f est 3-périodique, cela permet de connaître la fonction sur $\mathbb{R}$ tout entier.

10. Cette affirmation est vraie. En effet $f(4) = f(1) = -f(-1) = -2$.

Corrigé exercice 60 :

1. Puisque f est impaire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère. Puisque f est périodique de période 4, alors sa courbe représentative est invariante par la translation de vecteur $4\vec{i}$. On obtient la figure ci-dessous.



2. La fonction étant périodique de période 4, on peut limiter l'étude sur $[-2;2]$. De plus, f étant impaire, on peut limiter son étude sur $[0;2]$. Sur cet intervalle, les solutions de cette équation sont 0, 1,25 et 2. f étant impaire, les solutions sur $[-2;2]$ sont donc -2, $-1,25$, 0, 1,25 et 2. Enfin, par périodicité, on en déduit que les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$ sont les nombres de la forme $-2+4k$, $-1,25+4k$, $4k$, $1,25+4k$ et $2+4k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Corrigé exercice 61 :

1. $f(-4,5) = f(-4,5+4) = f(-0,5) = -0,5$, $f(-1,5) = -f(1,5) = -(1,5-2)^2 = -0,25$ et $f(7) = f(-1) = -1$.

2. Soit $x \in \,]1;2]$. On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-2)^2 = 1$.

   Soit maintenant $x \in [0;1[$. On a $f(x) = -f(-x)$ avec $-x \in \,]-1;0]$, car f est impaire, donc $f(x) = x$. D'où $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x = 1$. Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = f(1)$ et donc f est continue en 1.

3. Par parité et par périodicité de la fonction, on construit le tableau de variations ci-dessous.

x	-5		-3		-1		1		3
f	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

Corrigé exercice 62 :

1. Cette proposition n'est pas toujours vraie. On peut prendre comme contre-exemple la fonction $x \mapsto \cos(x\pi)+1$.

2. Cette proposition n'est pas toujours vraie. Elle n'est vraie que lorsque la fonction f est impaire. Puisqu'elle est supposée paire, cette proposition ne peut donc être vraie que si la fonction f est la fonction nulle.

3. Cette proposition est toujours vraie par parité de la fonction f.

4. Cette proposition n'est pas toujours vraie. On peut prendre comme contre-exemple la fonction $x \mapsto \cos(x\pi)-1$.

Corrigé exercice 63 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \neq f(-x)$ donc f ni paire ni impaire.

2. f est la fonction nulle donc est paire et impaire.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{e^{-x}+e^x}{2} = f(x)$ donc f est paire.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{e^{-x}-e^x}{2} = -f(x)$ donc f est impaire.

Corrigé exercice 64 :

1. Par périodicité les solutions de cette équation sont les nombres de la forme $1 + 4k$ et $2,5 + 4k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. Une fonction f impaire définie en 0 vérifie $f(0) = 0$. Puisque 0 n'est pas solution de l'équation $f(x) = 0$, la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ et donc en 0, ne peut pas être impaire.
3. Si f était paire, on aurait $f(-1) = 0$. Or -1 n'est pas solution de l'équation $f(x) = 0$ d'après la question 1, donc f ne peut pas être une fonction paire.

Corrigé exercice 65 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -f'(-x)$, $h'(x) = -f'(x)$ et $k'(x) = f'(x + T)$.
2. Si f est paire alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ et on en déduit alors que $-f'(-x) = f'(x)$ et donc que f' est impaire.
3. Si f est impaire alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$ et on en déduit alors que $-f'(-x) = -f'(x)$ et donc que f' est donc paire.
4. Si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x+T)$ alors $f'(x) = f'(x+T)$ et donc f' est périodique de période T.

Corrigé exercice 66 :

$\mathcal{C}_1$ correspond à h : c'est la seule fonction impaire vérifiant $f(x) \geqslant 0$ sur $[0; +\infty[$.
$\mathcal{C}_2$ correspond à f : c'est en effet la seule fonction paire.
$\mathcal{C}_3$ correspond à g : c'est la seule fonction impaire du signe de $\sin(x)$.

Corrigé exercice 67 :

La courbe $\mathcal{C}_1$ correspond à la fonction f car $f(\pi)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.
La courbe $\mathcal{C}_2$ correspond à la fonction g car $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.
Ainsi, par élimination, la courbe $\mathcal{C}_3$ correspondant à la fonction h.

Corrigé exercice 68 :

1. Le signe de f' implique les variations de f donc $\mathcal{C}_1$ représente f et $\mathcal{C}_2$ représente f'.
2. La plus petite période de f vaut 4π.
3. La plus petite période de f' vaut 4π.

Corrigé exercice 69 :

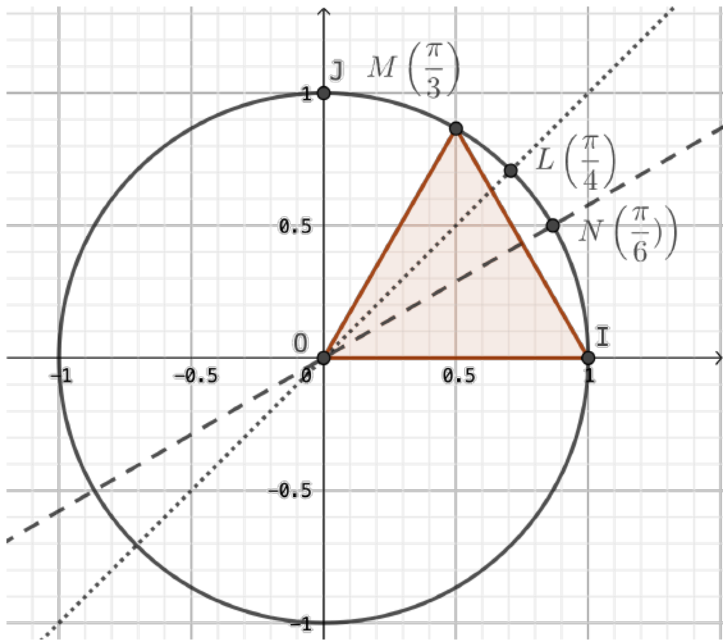
Pour tout réel t, $s(t+7) = 2\cos\left(\dfrac{2\pi t}{7} + 2\pi\right) - 2\sin\left(\dfrac{2\pi t}{7} + 2\pi\right) - \cos\left(\dfrac{4\pi t}{7} + 4\pi\right) + 4\sin\left(\dfrac{4\pi t}{7} + 4\pi\right) = s(t)$. Donc s est une fonction périodique de période 7.

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 70 :

Yann n'a pas réglé sa calculatrice en mode radian.

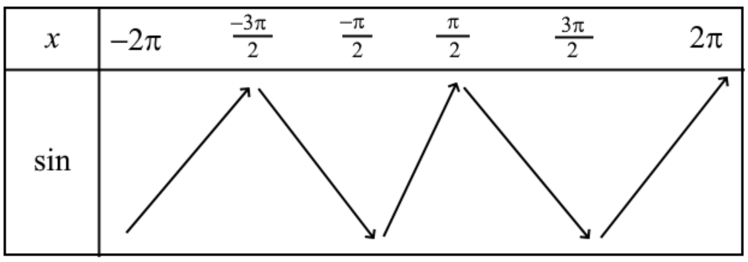
Corrigé exercice 71 :



OIM est un triangle équilatéral.
(OL) est la bissectrice du premier quadrant.
(ON) est la bissectrice de $\widehat{IOM}$.

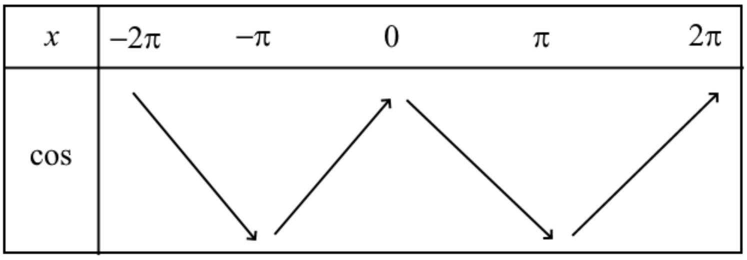
Corrigé exercice 72 :

1. Par lecture graphique, la fonction sinus est croissante sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.
2. La fonction sinus est impaire et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. On en déduit son tableau de variations.



Corrigé exercice 73 :

1. Par lecture graphique, la fonction cosinus est décroissante sur $[0; \pi]$.
2. La fonction cosinus est paire et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. On en déduit son tableau de variations.



Corrigé exercice 74 :

x	$\frac{-\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{-3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{-5\pi}{6}$
$\sin(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Corrigé exercice 75 :

Par lecture sur le cercle trigonométrique :

1. $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. $\mathcal{S} = \{\pi + 2k\pi\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
4. $\mathcal{S} = \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Corrigé exercice 76 :

Par lecture sur le cercle trigonométrique :

1. $\mathcal{S} = \left]-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right[$.
2. $\mathcal{S} = \left]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right[$.
3. $\mathcal{S} = [-\pi; \pi]$ car, pour tout réel x, $\sin(x) \geqslant -1 > -2$.
4. Aucune solution car, pour tout réel x, $\cos(x) \geqslant -1$.

Corrigé exercice 77 :

Mehdi a raison, l'ensemble des solutions est $\left[-\pi; \frac{-5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{-\pi}{6}; \pi\right]$.
Étienne et Rachida donne le même intervalle mais les bornes sont inversées. Dans les deux cas, il s'agit de l'ensemble des valeurs de $x \in [-\pi; \pi]$ pour lesquelles $\sin(x) \leqslant -0,5$.

Corrigé exercice 78 :

Par stricte décroissance de la fonction cosinus sur $[0; \pi]$, on obtient :
$\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) < \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) < \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$.

Corrigé exercice 79 :

On a d'une part, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ (ici on prend $x = \frac{\pi}{10}$). D'autre part, la fonction sinus est strictement croissante sur $[0; \pi]$, d'où $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) < \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) < \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) < \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$.

Corrigé exercice 80 :

Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $\sin(x) < \cos(x)$ d'où $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. De plus, la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0; \pi]$ et la fonction sinus est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, d'où $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) < \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$.

Corrigé exercice 81 :

1. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -9\sin(3x + 5)$.
2. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -10\cos(3 + 5x)$.
3. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -3\sin(5x - 3) - 3\cos\left(\frac{-3x}{4} + 1\right)$.
4. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2\cos(x) - x^3\sin(x)$.

Corrigé exercice 82 :

1. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in D_{f'}$, $f'(x) = \cos x - x\sin x$.
2. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in D_{f'}$, $f'(x) = \sin x + x\cos x$.
3. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et, pour tout $x \in D_{f'}$, $f'(x) = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$.
4. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et, pour tout $x \in D_{f'}$, $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.
5. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ où $k \in \mathbb{Z}$ et, pour tout $x \in D_{f'}$, $f'(x) = \frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$.

6. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ où $k \in \mathbb{Z}$ et, pour tout $x \in D_{f'}$, $f'(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$.

Corrigé exercice 83 :

1. $\mathcal{S} = \left[-\pi; -\dfrac{2\pi}{3}\right] \cup \left[-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6}; \pi\right]$.
2. $\mathcal{S} = \left]-\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{-\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{3\pi}{4}\right[$.

Corrigé exercice 84 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 2\cos(2x)$. Or, d'autre part, $f(x) = 2\sin(x)\cos(x)$ d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)$ c'est à dire $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

Corrigé exercice 85 :

1. Posons $X = \cos(x)$. On remarque que, pour tout réel x, $-1 \leqslant X \leqslant 1$.

   L'équation s'écrit alors $2X^2 - 5X - 3 = 0$. On reconnaît un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 49$. Cette équation admet donc deux solutions réelles : $X = -0,5$ et $X = 3$. Or $X = \cos(x)$ donc on doit avoir $\cos(x) = 3$, ce qui est impossible, ou $\cos(x) = -0,5$. Donc les solutions de cette équation sont les nombres réelles de la forme $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. Posons $X = \sin(x)$. On remarque que, pour tout réel x, $-1 \leqslant X \leqslant 1$.

   L'équation s'écrit alors $-6X^2 - 3X + 3 = 0$. On reconnaît un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 81$. Cette équation admet donc deux solutions réelles : $X = \dfrac{1}{2}$ et $X = -1$. Or $X = \sin(x)$, donc on a $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ou $\sin(x) = -1$, c'est-à-dire $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi l'ensemble des solutions de cette équation est $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi; \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Corrigé exercice 86 :

$\sin^2(x) > \dfrac{1}{2}$ si, et seulement si, $\sin x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi l'ensemble des solutions de (E) sur $[-\pi; \pi]$ est $\left]-\dfrac{3\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right[$.

De même, $\cos^2(x) < \dfrac{1}{2}$ si, et seulement si, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi l'ensemble des solutions de (F) sur $[-\pi; \pi]$ est $\left]-\dfrac{3\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right[$.

Corrigé exercice 87 :

En posant $X = \cos(x)$ et $Y = \sin(y)$, on obtient le système $\begin{cases} 2X + 3Y = \sqrt{2} - \dfrac{3}{2} \\ 4X + Y = 2\sqrt{2} - \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Ce système admet pour solution le couple $(X;Y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

On a donc $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin y = -\dfrac{1}{2}$. Ainsi les solutions du système d'équation sont les couples $\left(-\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{6}\right)$ et $\left(\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{6}\right)$, car $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ et $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$.

Corrigé exercice 88 :

En posant $X = \cos(x)$ et $Y = \sin(y)$, on obtient le système $\begin{cases} 2X + Y = \dfrac{\sqrt{3} - 2}{2} \\ 5X + \sqrt{3}Y = -1 \end{cases}$. Ce système admet pour solution le couple $(X;Y) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

On a donc $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi les solutions du système d'équation sont les couples $\left(-\dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3}\right)$ et $\left(\dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3}\right)$, car $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ et $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$.

Corrigé exercice 89 :

1. On a $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $x - \dfrac{\pi}{5} = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit que l'ensemble des solutions de cette équation est $\left\{\dfrac{11\pi}{30} + 2k\pi; \dfrac{\pi}{30} + 2k\pi\right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. On a $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{7}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $x - \dfrac{\pi}{7} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x - \dfrac{\pi}{7} = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit que l'ensemble des solutions est $\left\{\dfrac{11\pi}{28} + 2k\pi; \dfrac{25\pi}{28} + 2k\pi\right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Corrigé exercice 90 :

On a $\sin(3x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $3x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $3x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit que l'ensemble des solutions de cette équation est $\left\{-\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{3}\right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Corrigé exercice 91 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x)\cos(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x)$ et puisque $-1 \leqslant \sin(2x) \leqslant 1$ alors $-\dfrac{1}{2} \leqslant \sin(x)\cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$. On en déduit que l'équation $\sin(x)\cos(x) = -1$ n'admet aucune solution.

Il est aussi possible de répondre à cette question en étudiant les extrema de la fonction $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$ sur un intervalle bien choisi.

Corrigé exercice 92 :

1. f n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ donc, par produit puis par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ d'où $-3-2x \leqslant f(x) \leqslant 1-2x$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-2x = -\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Corrigé exercice 93 :

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$
2. f n'admet pas de limite en 0.
3. Pour tout $x \neq 0$, $-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$ d'où $-3x-2 \leqslant f(x) \leqslant 3x-2$. Or $\lim\limits_{x\to 0} -3x-2 = -2$ et $\lim\limits_{x\to 0} 3x-2 = -2$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$.

Corrigé exercice 94 :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-\sin(0)}{x} = \cos(0) = 1$ car la fonction sinus est dérivable en 0, de dérivée la fonction cosinus.
2. On a $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$ d'où, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.
3. De la même manière que dans la question 1., on obtient que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$ car la dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(3x)$ est la fonction $x \mapsto 3\cos(3x)$.
4. On a $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$ d'où, par quotient, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Corrigé exercice 95 :

On construit le tableau des issues de cette expérience aléatoire.

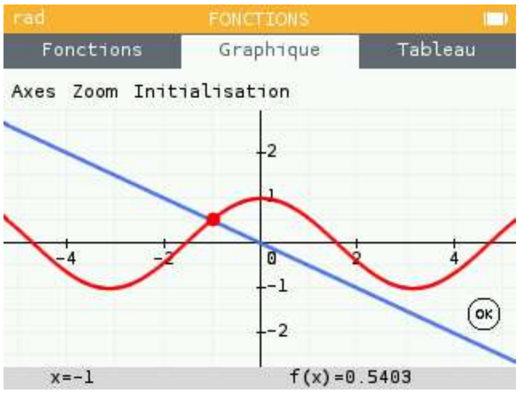
B\A	1	2	3	6
1	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	0	1	$\frac{3}{2}$	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$
3	$\frac{\sqrt{3}}{2}-1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$\sqrt{3}$
6	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Les seize issues obtenues sont équiprobables. On en déduit les réponses aux questions.

1. La probabilité que X soit un entier est $\dfrac{5}{16}$.
2. La probabilité que X soit un entier sachant que A est pair est $\dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$.
3. La probabilité que X soit un nombre rationnel est $\dfrac{9}{16}$, un nombre entier étant un nombre rationnel.

Corrigé exercice 96 :

1. À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que cette équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.



2. Tout d'abord, si $x > 2$ alors $\dfrac{x}{2} > 1$ et donc cette équation n'admet pas de solution. De même, si $x < -2$, l'équation n'admet pas de solution. On peut donc restreindre l'étude sur l'intervalle $[-2; 2]$ ou, en prenant un peu plus large, $[-\pi; \pi]$.

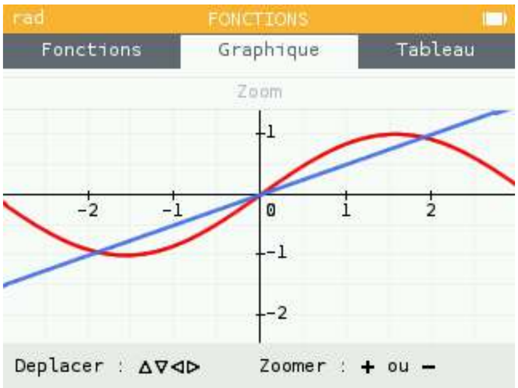
   Soit f la fonction définie sur $[-\pi; \pi]$ par $f(x) = \cos(x) + \dfrac{x}{2}$. Cette fonction est dérivable sur $[-\pi; \pi]$ et, pour tout $x \in [-\pi; \pi]$, $f'(x) = -\sin(x) + \dfrac{1}{2}$. On obtient ainsi le tableau de variations de la fonction f sur cet intervalle.

x	$-\pi$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-1-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5\pi}{12}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}-1$

On a $-1 - \dfrac{\pi}{2} < 0$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{12} > 0$, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5\pi}{12} > 0$ et $\dfrac{\pi}{2} - 1 > 0$. De plus, la fonction f est continue et strictement croissante sur $\left]-\pi; \dfrac{\pi}{6}\right[$. Donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution sur $\left]-\pi; \dfrac{\pi}{6}\right[$.

Corrigé exercice 97 :

1. À l'aide de la calculatrice on peut conjecturer que cette équation admet trois solutions sur $\mathbb{R}$.



2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) - \dfrac{x}{2}$. L'équation de l'énoncé est équivalente à l'équation $f(x) = 0$. On peut remarquer que $f(x) > 0$ sur $]-\infty; -\pi[$ et $f(x) < 0$ sur $]\pi; +\infty[$. $f(x) = 0$ ne peut donc pas admettre de solution sur ces intervalles. Et, pour tout $x \in [-\pi; \pi]$, $f'(x) = \cos(x) - \dfrac{1}{2}$. On peut ainsi construire le tableau de variations de la fonction.

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{3}$		$\dfrac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$\dfrac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{6}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6}$	$\searrow$	$-\dfrac{\pi}{2}$

On en déduit alors, grâce à un corollaire d'un théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation admet trois solutions sur $]-\pi; \pi[$, et donc sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 98 :

1. On va démontrer que, pour tout $n > 0$, la proposition H_n :
   $(\cos^n(x))' = -n\sin(x)\cos^{n-1}(x)$ est vraie.

   Initialisation : Si $n = 1$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_1'(x) = \cos'(x) = -\sin(x) = -1 \times \sin(x)\cos^{1-1}(x)$. Donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

   Hérédité : Admettons que H_n est vraie pour un entier $n \geqslant 1$, montrons qu'elle est aussi vraie pour $n + 1$.

   On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $(\cos^{n+1}(x))' = (\cos^n(x) \times \cos(x))' = (\cos^n(x))' \times \cos(x) - \cos^n(x) \times \sin(x)$ donc, par hypothèse de récurrence,$(\cos^{n+1}(x))' = -n\sin(x)\cos^{n-1}(x) \times \cos(x) - \sin(x) \times \cos^n(x)$ $= -(n+1)\sin(x)\cos^n(x)$.

Ainsi, si la propriété est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$.

En conclusion, d'après le principe de récurrence, pour tout $n > 0$:
$(\cos^n(x))' = -n\sin(x)\cos^{n-1}(x)$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = \cos(x)$,
   $f_2'(x) = \cos(x)\sin(x) + \sin(x)\cos(x) = 2\cos(x)\sin(x)$,
   $f_3'(x) = 2\cos(x)\sin(x) \times \sin(x) + \cos(x) \times \sin^2(x) = 3\cos(x)\sin^2(x)$ et
   $f_4'(x) = 3\cos(x)\sin^2(x) \times \sin(x) + \cos(x) \times \sin^3(x) = 4\cos(x)\sin^3(x)$.

3. On peut conjecturer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n > 0$:
   $f_n'(x) = n\cos(x)\sin^{n-1}(x)$.

4. On va démontrer, pour tout $n > 0$, que H_n : $(\sin^n(x))' = n\cos(x)\sin^{n-1}(x)$ est vraie.

   Initialisation : Si $n = 1$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = \sin'(x) = \cos(x) = 1 \times \cos(x)\sin^{1-1}(x)$. Donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

   Hérédité : Admettons que H_n est vraie pour un entier $n \geqslant 1$, montrons qu'elle est aussi vraie pour $n+1$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\sin^{n+1}(x))' = (\sin^n(x) \times \sin(x))' = (\sin^n(x))' \times \sin(x) + \sin^n(x) \times \cos(x)$ donc, par hypothèse de récurrence,$(\cos^{n+1}(x))' = n\cos(x)\sin^{n-1}(x) \times \cos(x) + \cos(x) \times \sin^n(x) = (n+1)\cos(x)\sin^n(x)$.

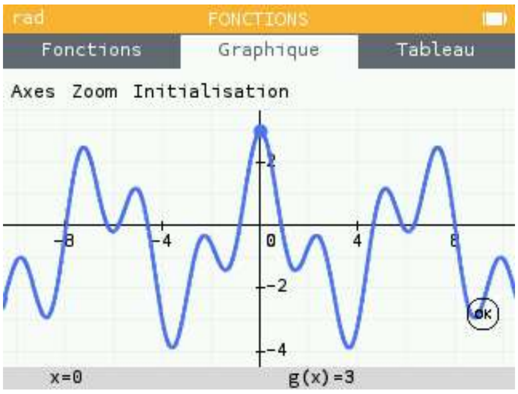
   Ainsi, si la propriété est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$.

   En conclusion, d'après le principe de récurrence, pour tout $n > 0$, $(\sin^n(x))' = n\cos(x)\sin^{n-1}(x)$.

9 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 99 :

On obtient les réponses suivantes à l'aide de la calculatrice.



1. $f(0) \neq -2$: l'affirmation de l'énoncé est fausse.
2. $f\left(\dfrac{\pi^2}{6}\right) = \dfrac{-5}{4}$: l'affirmation de l'énoncé est vraie.
3. La fonction f est paire.
4. La fonction f n'est pas périodique de période 2π : l'affirmation de l'énoncé est fausse.
5. L'équation $f(x) = 0$ admet 8 solutions sur $[-2\pi; 2\pi]$.
6. La fonction f n'admet pas de limite en $+\infty$.
7. $f'(0) = 0$.
8. $f'\left(\dfrac{\pi^2}{6}\right) \neq \dfrac{-12}{\pi}$: l'affirmation de l'énoncé est fausse.
9. Il s'agit bien de l'expression de la fonction f' : l'affirmation de l'énoncé est vraie.

Corrigé exercice 100 :

1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \dfrac{1}{2}$ soit $2x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Cette équation a pour solution les nombres de la forme $\dfrac{\pi}{6} + k\pi$ ou $\dfrac{-\pi}{6} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. La fonction cosinus est 2π-périodique donc la fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est π-périodique. Ainsi la fonction f admet pour plus petite période $T = \pi$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = 2\cos(-2x) - 1 = 2\cos(2x) - 1 = f(x)$ puisque la fonction cosinus est paire. On en déduit que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction f est, d'après la question précédente, π-périodique. Ainsi, on peut restreindre son étude sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Par parité, on connaît alors la fonction f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et, par périodicité, on obtient l'étude sur $\mathbb{R}$.

4. La fonction f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = -4\sin(2x)$. Or, si $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ alors $0 \leqslant 2x \leqslant \pi$ donc $\sin(2x) \geqslant 0$ et ainsi $f'(x) \leqslant 0$.

5. D'après la question précédente, f est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Par parité, on en déduit que f est strictement croissante sur $\left[-\frac{-\pi}{2}; 0\right]$. Enfin, la π-périodicité de la fonction f nous permet d'étendre ces résultats sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
f	1 ↘	-3 ↗	1 ↘	-3 ↗	1

Corrigé exercice 101 :

Partie A
La fonction f est définie et dérivable sur $[-\pi; \pi]$ et, pour tout $x \in [-\pi; \pi]$, $f'(x) = a - b\sin(x)$. On sait de plus, d'après l'énoncé, que $f(0) = 3$, $f'(0) = -2$ et $f'\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0$. On en déduit que $a = -2$, $b = 2$ et $c = 1$. D'où, pour tout $x \in [-\pi; \pi]$, $f(x) = -2x + 2\cos(x) + 1$.

Partie B

1. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -2-2\sin(x)$. Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) \geq -1$ alors $g'(x) \leq 0$. g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

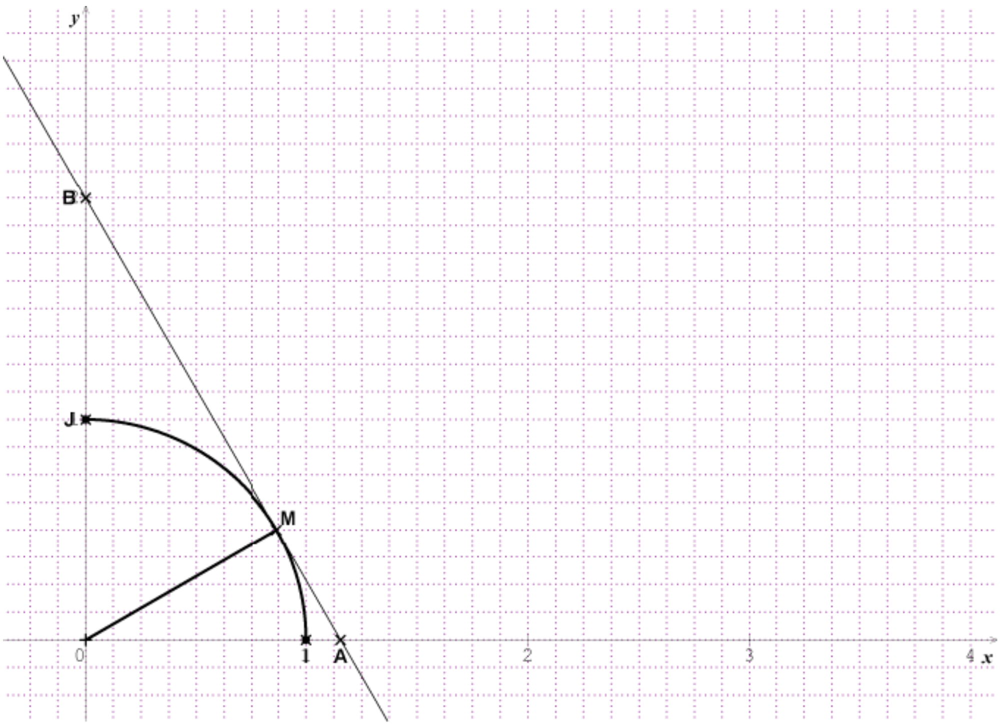
2. On a $g(0) = 3 > 0$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi + 1 < 0$. De plus, g est continue et strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

   À la calculatrice, on trouve $g(1) > 0$ et $g(1,1) < 0$ donc $1 \leq \alpha \leq 1,1$.

3. On en déduit que $g(x) > 0$ si, et seulement si, $x \in]-\infty; \alpha[$ et $g(x) < 0$ si, et seulement si, $x \in]\alpha; +\infty[$.

Corrigé exercice 102 :

1. On obtient la figure ci-dessous.



2. $A(x)$ a pour coordonnées $(a(x); 0)$ de sorte que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MA} = 0$ c'est-à-dire $\cos(x) \times (a(x) - \cos(x)) + \sin(x) \times (-\sin(x)) = 0$. Pour tout réel x, on a ainsi $a(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ et donc $A(x)$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{\cos(x)}; 0\right)$.

3. Pour tout $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \dfrac{OA(x) \times OB(x)}{2} = \dfrac{1}{2\sin(x)\cos(x)} = \dfrac{1}{\sin(2x)}$.

4. Pour tout $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $2x \in]0; \pi[$ donc $\sin(2x) > 0$. Ainsi $g(x)$ est minimale lorsque $\sin(2x)$ est maximale, c'est-à-dire lorsque $\sin(2x) = 1$. L'aire de ce triangle est donc maximale lorsque $x = \dfrac{\pi}{4}$ et cette aire vaut alors 1.

Corrigé exercice 103 :

1. D'une part, dans le triangle BCD rectangle en D, $\cos(\theta) = \dfrac{BD}{BC}$ d'où $BD = 2\cos(\theta)$. D'autre part, $\sin(\theta) = \dfrac{DC}{BC}$ d'où $FC = 2 + 4\sin(\theta)$. Ainsi, d'après la formule de l'aire d'un trapèze, $f(x) = \dfrac{2\cos(x) \times (2 + 2 + 4\sin(x))}{2} = 4\cos(x)(1 + \sin(x))$.

2. f est un produit de fonctions dérivables sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, elle est donc dérivable sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$. Et, pour tout $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = -4\sin(x)(1 + \sin(x)) + 4\cos^2(x) = -8\sin^2(x) - 4\sin(x) + 4$, car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

3. On utilise la factorisation donnée par le logiciel de calcul formel pour tracer le tableau de variations de la fonction f.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)+1$			$+$		
$2\sin(x)-1$		$-$	0	$+$	
-4			$-$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	4	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	0

4. La surface au sol est maximale pour un angle de $\frac{\pi}{6}$.

Corrigé exercice 104 :

1. f n'est pas définie lorsque $\cos(x) = 0$ donc, sur $[-2\pi; 2\pi]$, f n'est pas définie en $\frac{-3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{3\pi}{2}$.
Le tableau, une fois complété, est le suivant.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$ en lui étant inférieur, $\sin(x)$ tend vers 1 et $\cos(x)$ tend vers 0^+ donc, par quotient, $\tan(x)$ tend vers $+\infty$.

3. Le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f est centré en 0 et, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x) = -f(x)$ donc f est impaire.
Par ailleurs, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = f(x)$ donc f est périodique de période π.

4. Comme f est périodique de période π, on peut l'étudier sur $\left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Par ailleurs f étant impaire, on peut réduire son étude à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

5. f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle. Et, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$ car, pour tout réel x $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

6. Comme $f'(x) > 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ alors f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.
7. Par imparité et $\pi-$périodicité, on obtient sur $[-\pi; \pi] \cap \mathcal{D}_f$ le tableau de variations suivant.

x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
tan	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

Corrigé exercice 105 :

a et b sont deux entiers non nuls.
La plus petite période de la fonction f est $\dfrac{2\pi}{pgcd(a;b)}$.
Démonstration :
Soient a et b sont deux entiers non nuls.

- Montrons tout d'abord que $T' = \dfrac{2\pi}{c}$ où $c = pgcd(a;b)$ est une période de f.

  Il existe deux entiers a' et b' tels que $a = ca'$ et $b = cb'$ et pour tout réel x, $f(x+T') = \cos(a(x+T'))+\cos(b(x+T')) = \cos(ax+aT')+\cos(bx+bT') = \cos(ax+ a\frac{2\pi}{c}) + \cos(bx + b\frac{2\pi}{c}) = \cos(ax + 2\pi a') + \cos(bx + 2\pi b') = \cos(ax) + \sin(bx) = f(x)$.

- Montrons ensuite que $T' = \dfrac{2\pi}{c}$ où $c = pgcd(a;b)$ est la plus petite période de f.

  Soit T une période de la fonction f. Alors on a $\cos(ax + aT) = \cos(ax)$ et $\cos(bx + bT) = \cos(bx)$. Or, la plus petite période de la fonction sinus et de la fonction cosinus est 2π donc il existe k et k' deux entiers tels que $bT = 2\pi k$ et $aT = 2\pi k'$. C'est-à-dire qu'on a $T = \dfrac{2\pi k}{b} = \dfrac{2\pi}{\frac{b}{k}}$ et $T = \dfrac{2\pi k'}{a} = \dfrac{2\pi}{\frac{a}{k'}}$.

  Posons $c = pgcd(a;b)$. Il existe alors deux entiers a et a' tels que $a = ca'$ et $b = cb'$ où $pgcd(a';b') = 1$. On aurait alors $T = \dfrac{2\pi}{\frac{cb'}{k}}$ et $T = \dfrac{2\pi}{\frac{ca'}{k'}}$. Par conséquent, $\dfrac{b'}{k} = \dfrac{a'}{k'}$ ainsi $k'b' = ka'$. a' divise alors $k'b'$ soit, d'après le théorème de Gauss (puisque a' et b' sont premiers entre eux), a' divise k' soit $k' = a'k"$ (où $k"$ est un entier) et donc $T = \dfrac{2\pi}{\frac{c}{k"}}$.

  De même b' divise alors ka' soit, d'après le théorème de Gauss (puisque a' et b' sont premiers entre eux) b' divise k soit $k = b'k"'$ (où $k"'$ est un entier) et donc $T = \dfrac{2\pi}{\frac{c}{k"'}}$.

  Finalement $k" = k"'$ et toute période de f est donc de la forme $T' = \dfrac{2\pi k"}{c}$ où $k"$ est un entier naturel non nul. Or $T' = \dfrac{2\pi}{c}$ étant une période de f, c'est donc la plus petite.

Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 10 : Primitives - Équations différentielles

Table des matières

1 Informations sur ce chapitre

Le B.O. précise que l'analyse est une branche centrale des mathématiques et un outil puissant de modélisation qui permet l'étude de phénomènes issus d'autres disciplines.
Les équations différentielles sont introduites sur des cas simples en tant qu'équations dont l'inconnue est une fonction. L'équation $y' = f$ permet d'introduire la notion de primitive, la recherche d'une primitive étant associée au « problème inverse » de la dérivation. Les équations du type $y' = ay + b$ ont une importance considérable dans des problèmes de modélisation.
Ainsi, ce chapitre commence naturellement par la présentation de la notion d'équation différentielle, et propose ensuite un tableau de primitives obtenu par lecture inverse du tableau de dérivées.
Les exercices proposés sont très calculatoires au départ, pour permettre aux élèves de bien maîtriser les techniques de calcul. Une fois les automatismes acquis, les problèmes de modélisation, présents plutôt en fin de chapitre, pourront être abordés pour découvrir un nouvel aspect des équations différentielles.

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

On a $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2$.
On a $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_{g'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2x$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie mais non dérivable en 0 donc $\mathcal{D}_h = [0; +\infty[$, $\mathcal{D}_{h'} =]0; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
On a $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{k'} = \mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $k'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
On a $\mathcal{D}_\ell = \mathcal{D}_{\ell'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ell'(x) = \mathrm{e}^x$.

Corrigé exercice 2 :

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. On a $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3-1}{x^2}$.

Corrigé exercice 3 :

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie mais non dérivable en 0. La fonction $x \mapsto 3x + 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par produit, $\mathcal{D}_g = [0; +\infty[$ et $\mathcal{D}_{g'} =]0; +\infty[$. La fonction $f : x \mapsto u(x)v(x)$ admet comme dérivée la fonction $f' : x \mapsto u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ sur son ensemble de dérivation. Ainsi, en posant $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 3x + 2$ on obtient, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+2) + \sqrt{x} \times 3 = \frac{3x+2+3\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{9x+2}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(9x+2)}{2x}$.

Corrigé exercice 4 :

La fonction h n'est pas définie ni dérivable en 0 donc $\mathcal{D}_h = \mathcal{D}_{h'} = \mathbb{R}^*$. La fonction h est de la forme $x \mapsto \frac{1}{x^n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Or la dérivée d'une telle fonction sur son ensemble de dérivation est donnée par $x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $h'(x) = -\frac{3}{x^4}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1>0$ donc $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{k'} = \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ admet comme dérivée la fonction $f' : x \mapsto \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$ sur son ensemble de dérivation. Ainsi, en posant $u(x) = x^2+x+1$ et $v(x) = x^2+1$ on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k'(x) = \frac{(2x+1)\left(x^2+1\right)-\left(x^2+x+1\right)\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Corrigé exercice 5 :

On rappelle que la fonction $f : x \mapsto g(ax+b)$ admet comme dérivée la fonction $f' : x \mapsto a \times g'(ax+b)$ sur son ensemble de dérivation. En appliquant cette formule, on obtient $\mathcal{D}_u = \mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 4\times(-3)\,(2-3x)^{4-1} = -12\,(2-3x)^3$. $v(x)$ existe si, et seulement si, $1-2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{1}{2}$ donc $\mathcal{D}_v = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc $\mathcal{D}_{v'} = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$. En appliquant la formule donnée ci-dessus, on a, pour tout $x < \frac{1}{2}$, $v'(x) = \frac{(1-2x)'}{2\sqrt{1-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$.

Corrigé exercice 6 :

On rappelle que, pour tous a et b appartenant à $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b}$, $\frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$ et $(\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{ab}$. On en déduit les réponses suivantes.

1. $f(x) = \mathrm{e}^{3x+2} \times \mathrm{e}^{-4x} = \mathrm{e}^{3x+2-4x} = \mathrm{e}^{2-x}$
2. $g(x) = \frac{\mathrm{e}^{5x+2}}{\mathrm{e}^2} = \mathrm{e}^{5x+2-2} = \mathrm{e}^{5x}$
3. $h(x) = \left(\mathrm{e}^{x+1}\right)^2 \times \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{2(x+1)} \times \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{2x+2-2x} = \mathrm{e}^2$
4. $k(x) = \frac{\mathrm{e}^{3x+1}}{\mathrm{e}^{2x-1}\times \mathrm{e}^2} = \mathrm{e}^{3x+1-2x+1-2} = \mathrm{e}^x$

Corrigé exercice 7 :

La fonction f est le produit de $x \mapsto x$, fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$, par la composée de $x \mapsto -2x$ avec la fonction exponentielle, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x} + x \times (-2)\,\mathrm{e}^{-2x} = (1-2x)\,\mathrm{e}^{-2x}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + 2f(x) = (1-2x)\,\mathrm{e}^{-2x} + 2x\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}$.

Corrigé exercice 8 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1>0$ donc $\mathcal{D}_u = \mathbb{R}$. La dérivée des fonctions de la forme $x \mapsto g(h(x))$ est donnée par $x \mapsto h'(x)g'(h(x))$. On obtient ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}{2(x^2+x+1)}$.
v est une fonction polynôme donc $\mathcal{D}_v = \mathbb{R}$. En utilisant la même formule, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v'(x) = 4\,(2x+1)\left(x^2+x+1\right)^{4-1} = 4\,(2x+1)\left(x^2+x+1\right)^3$. La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_w = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la formule de dérivation d'une composition donne $w'(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{x^2+x+1}$.

Corrigé exercice 9 :

1. La fonction f est la composée de la fonction affine $x \mapsto 2x$ par la fonction exponentielle, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^{2x}$. La fonction g est le produit de $x \mapsto -1$, fonction constante dérivable sur $\mathbb{R}$, par la

composée de la fonction affine $x \mapsto 1-2x$ avec la fonction exponentielle, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{D}_{g'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -(-2)\,e^{1-2x} = 2e^{1-2x}$.

2. a. Pour tous a et b appartenant à $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$ si, et seulement si, $a = b$. Donc $e^{2x} = e^{1-2x} \Leftrightarrow 2x = 1-2x \Leftrightarrow 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

   b. Soit a un réel. Les coefficients directeurs des tangentes à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse a sont respectivement $f'(a)$ et $g'(a)$. D'après la question précédente, $f'(a) = g'(a) \Leftrightarrow 2e^{2a} = 2e^{1-2a} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$. On a donc $f'\left(\frac{1}{4}\right) = 2\sqrt{e} = g'\left(\frac{1}{4}\right)$. Cela signifie qu'au point d'abscisse $\frac{1}{4}$, les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont le même coefficient directeur : $2\sqrt{\mathrm{e}}$. On en conclut que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $\frac{1}{4}$ sont parallèles.

3 Activités

3.1 Activité A : Un nouveau type d'équation

1. La fonction f est le produit de $u : x \mapsto 3$, fonction constante dérivable sur $\mathbb{R}$, avec la composée de $v : x \mapsto 2x$, fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$, par la fonction exponentielle, dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{D}_{f\,'} = \mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\,'(x) = 3 \times 2\mathrm{e}^{2x} = 6\mathrm{e}^{2x}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,$f'(x) - 2f(x) = 6\mathrm{e}^{2x} - 2 \times 3\mathrm{e}^{2x} = 6\mathrm{e}^{2x} - 6\mathrm{e}^{2x} = 0$. La fonction f vérifie donc bien l'égalité $f' - 2f = 0$.

2. a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\,'(x) = 3 \times 4\mathrm{e}^{4x} = 12\mathrm{e}^{4x}$. Donc on a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $4f(x) - 6 = 4\left(3\mathrm{e}^{4x} + \frac{3}{2}\right) - 6 = 12\mathrm{e}^{4x} + 6 - 6 = 12\mathrm{e}^{4x} = f\,'(x)$. f est donc solution de l'équation différentielle $y' = 4y - 6$.
   b. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 4\mathrm{e}^{x}$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$,$4g(x) - 6 = 4(4\mathrm{e}^{x} - 6) - 6 = 16\mathrm{e}^{x} - 24 - 6 = 16\mathrm{e}^{x} - 30 \neq g'(x)$. Donc g n'est pas solution de l'équation $y' = 4y - 6$.
   c. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 5 \times 4\mathrm{e}^{4x} = 20\mathrm{e}^{4x}$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$,$4h(x) - 6 = 4\left(5\mathrm{e}^{4x} + \frac{3}{2}\right) - 6 = 20\mathrm{e}^{4x} + 6 - 6 = 20\mathrm{e}^{4x} = h'(x)$. Donc h est solution de l'équation $y' = 4y - 6$.

Bilan :

Une équation différentielle est une équation dont les solutions sont des fonctions dérivables. Il n'y a pas unicité de la solution. En effet, f et h, par exemple, sont solutions de la même équation différentielle $y' = 4y - 6$.

3.2 Activité B : Mouvement rectiligne

Questions :

Partie A

1. On commence par convertir les vitesses en km·h^{-1} en m·s^{-1} : 61,2 km·h^{-1} = $\frac{61200}{3600}$ m·s^{-1} = 17 m·s^{-1} ; 244,8 km·h^{-1} = $\frac{244800}{3600}$ m·s^{-1} = 68 m·s^{-1}. On utilise ensuite la formule donnée dans le bloc aide : $a(t) = \frac{68-17}{150} = 0,34$ m·s^{-2}.

2. On cherche v tel que, pour tout $0 \leqslant t \leqslant 150$, $v'(t) = 0,34$. C'est une équation différentielle dont les solutions sont de la forme $v(t) = 0,34t + k$, où k est un réel. On remarque en effet que, si on dérive cette expression, on obtient bien $v'(t) = 0,34$. On sait, de plus, qu'au temps $t = 0$, la vitesse du train est de 17 m·s^{-1}. Cela nous permet de déterminer la valeur de la constante k : $v(0) = 17 \Leftrightarrow k = 17$ donc $v(t) = 0,34t + 17$.

3. On pose : pour tout $t \in [0;150]$, $x(t) = 0,34 \times \frac{t^2}{2} + 17t + k = 0,17t^2 + 17t + k$, où k est un réel. On a bien $x'(t) = 0,34t + 17$. Au temps $t = 0$, on a $x(0) = 0$ d'où $k = 0$. On a donc au final, pour tout $t \in [0;150]$, $x(t) = 0,17t^2 + 17t$.

4. Au bout de 150 secondes, le TGV a parcouru $x(150) = 0,17 \times 150^2 + 17 \times 150 = 6375$ mètres.

   Partie B

1. Par hypothèse $a(t) = -0,75$ m·s⁻². On cherche donc v tel que, pour tout $t \geqslant 0$, $v'(t) = -0,75$. Pour tout $t \geqslant 0$, soit $v(t) = -0,75t + k$, où k est un réel. De plus, au temps $t = 0$, le train se déplace avec une vitesse de 84 m·s⁻¹. D'où $v(0) = 84 \Leftrightarrow k = 84$, et donc $v(t) = -0,75t + 84$. Le train sera à l'arrêt lorsque sa vitesse sera nulle. On cherche donc $t \geqslant 0$ tel que $v(t) = 0$: $-0,75t + 84 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{84}{0{,}75} = 112$ secondes. Le train sera à l'arrêt au bout de 112 secondes.
2. On cherche maintenant $x(t)$, pour $t \geqslant 0$, tel que $x'(t) = -0,75t + 84$. On a donc $x(t) = -0,75 \times \frac{t^2}{2} + 84t + k = -0,375t^2 + 84t + k$, avec k un réel. De plus $x(0) = 0 \Leftrightarrow k = 0$ donc $x(t) = -0,375t^2 + 84t$.
3. Pendant les 112 secondes de freinage, le TGV a parcouru $x(112) = -0,375 \times 112^2 + 84 \times 112 = 4704$ mètres soit environ 4,7 kilomètres.

Bilan :

1. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto at$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction constante $t \mapsto a$, avec a réel.
2. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto m\frac{t^2}{2} + pt$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction affine $t \mapsto mt + p$, avec m et $p$réels.

3.3 Activité C : Circuit électrique RL

Questions :

1. On a $U = Li'(t) + Ri(t) \Leftrightarrow Li'(t) = -Ri(t) + U \Leftrightarrow i'(t) = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{U}{L}$, ce qui correspond bien à une expression de la forme $x' = mx + p$, avec $m = -\frac{R}{L}$ et $p = \frac{U}{L}$.
2. Pour tout $t \geqslant 0$, $-\frac{R}{L}\left(i(t) - \frac{U}{R}\right) = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{R}{L} \times \frac{U}{R} = i'(t)$.
3.
   a. La dérivée de $x \mapsto -\frac{U}{R}$ est égale à 0 car il s'agit d'une fonction constante. On a donc, pour tout $t \geqslant 0$, $y'(t) = i'(t)$.

   b. En remplaçant $y(t)$ par son expression, on obtient, pour tout $t \geqslant 0$, $-\frac{R}{L}y(t) = -\frac{R}{L}\left(i(t) - \frac{U}{R}\right) = i'(t) = y'(t)$. Donc y est solution de l'équation (E_2) : $y' = -\frac{R}{L}y$.
4.
   a. Comme (E_2) est de la forme $y' = ay$, ses solutions sont de la forme $t \mapsto ce^{at}$, où c est réel. On a ainsi $y(t) = c\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$.

   b. On utilise la relation entre $y(t)$ et $i(t)$. Pour tout $t \geqslant 0$, $y(t) = i(t) - \frac{U}{R} \Leftrightarrow i(t) = y(t) + \frac{U}{R} = \frac{U}{R} + c\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$.
5. $i(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{U}{R} + c\mathrm{e}^0 = 0 \Leftrightarrow \frac{U}{R} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{U}{R}$.
6. En remplaçant dans l'expression de i la valeur de c par celle obtenue dans la question précédente, on obtient, pour tout $t \geqslant 0$, que $i(t) = \frac{U}{R} - \frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

7. La fonction i définie, pour tout $t \geqslant 0$, par $i(t) = \frac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$ est dérivable sur $[0;+\infty[$. Et, pour tout $t \in [0;+\infty[$, $i'(t) = \frac{U}{R} \times \frac{R}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$. D'où $L \times i'(t) + R \times i(t) = L \times \frac{U}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + R \times i(t) = \frac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right) = U\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + U - U\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = U$. Donc la fonction i vérifie bien l'équation différentielle. De plus, $i(0) = \frac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}0}\right) = \frac{U}{R}(1-1) = 0$. Donc i vérifie aussi la condition initiale.

Bilan :

Lorsqu'on doit résoudre une équation différentielle de la forme $x' = mx+p$, on peut utiliser la fonction intermédiaire $y = x + \frac{p}{m}$ qui permet de transformer l'équation différentielle initiale en une équation différentielle du type $y' = my$. En effet, $y = x + \frac{p}{m} \Leftrightarrow x = y - \frac{p}{m}$ et on a $y' = x'$ (car $\frac{p}{m}$ est une constante). Et l'équation $x' = mx + p$ s'écrit alors $y' = m\left(y - \frac{p}{m}\right) + p \Leftrightarrow y' = my - p + p \Leftrightarrow y' = my$. Cette équation différentielle, qui est équivalente à l'équation différentielle initiale, peut être facilement résolue.

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 10 :

f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui implique que f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Puisque, par abus de notation, $(x^3)' = 3x^2$, $(x^2)' = 2x$ et $(x)' = 1$, f admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions de la forme $x \mapsto x^3 - x^2 + x + k$, où k est un réel. En prenant $k = 0$, on obtient alors que $x \mapsto x^3 - x^2 + x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Réponse : c

Corrigé exercice 11 :

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = 3e^{3x}$. Soient maintenant les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $u(x) = 3x$ et $v(x) = e^x$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathcal{D}_{v'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 3$ et $v'(x) = e^x$. Donc $f = u' \times (v' \circ u)$ et admet donc pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions de la forme $x \mapsto v \circ u\,(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$. Les solutions de $y' = f$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto e^{3x} + k$, où k est un réel. Pour finir, on calcule k : $F(0) = -1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^0 + k = -1 \Leftrightarrow 1 + k = -1 \Leftrightarrow k = -2$. La solution F de l'équation différentielle $y' = 3e^{3x}$ telle que $F(0) = -1$ est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^{3x} - 2$.

Réponse : b

Corrigé exercice 12 :

L'équation différentielle $y' + 3y = 0$, que l'on peut aussi écrire $y' = -3y$, admet pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{-3x}$, où C est un réel.

Réponse : a

Corrigé exercice 13 :

L'équation $(E) : y' = 2y + 3$ est de la forme $y' = ay + b$ dont les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est un réel. Donc les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{2x} - \frac{3}{2}$, où C est un réel.

Réponse : c

Corrigé exercice 14 :

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = 2x\left(x^2 + 1\right)^2$. Soient maintenant les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \frac{x^3}{3}$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathcal{D}_{v'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = x^2$. Donc $f = u' \times (v' \circ u)$ et admet donc pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions de la forme $x \mapsto v \circ u\,(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$. Les solutions de $y' = f$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{\left(x^2+1\right)^3}{3} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Réponses : b et d

Corrigé exercice 15 :

Les solutions de $y' = \mathrm{e}y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{\mathrm{e}x}$, où C est un réel. Pour $C = 0$, on obtient la solution $x \mapsto 0$. Pour $C = 1$, on obtient la solution $x \mapsto e^{\mathrm{e}x}$. Pour $C = 2$, on obtient la solution $x \mapsto 2e^{\mathrm{e}x}$. Pour $C = 2\mathrm{e}$, on obtient la solution $x \mapsto 2\mathrm{e} \times e^{\mathrm{e}x}$ et $2\mathrm{e} \times e^{\mathrm{e}x} = 2\mathrm{e}^1 \times e^{\mathrm{e}x} = 2e^{\mathrm{e}x+1}$.

$\boxed{\text{Réponses : a, b, c et d}}$

Corrigé exercice 16 :

L'équation différentielle $(E) : y' - \mathrm{e}y = \mathrm{e} \Leftrightarrow y' = \mathrm{e}y + \mathrm{e}$ est de la forme $y' = ay + b$ dont les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est un réel. Donc les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{\mathrm{e}x} - 1$, où C est un réel. Pour $C = 1$, on obtient la solution $x \mapsto e^{\mathrm{e}x} - 1$. Pour $C = 2$, on obtient la solution $x \mapsto 2e^{\mathrm{e}x} - 1$. Pour $C = -1$, on obtient la solution $x \mapsto -e^{\mathrm{e}x-1}$.

$\boxed{\text{Réponses : a, c et d}}$

Corrigé exercice 17 :

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2 - 1)\, e^{-x}$. Alors cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de la fonction polynôme $x \mapsto x^2 - 1$ par la composée de la fonction affine $x \mapsto -x$ avec la fonction exponentielle, toutes dérivables sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 2xe^{-x} + (x^2 - 1) \times (-1) \times e^{-x} = (-x^2 + 2x + 1)\, e^{-x}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) + 2\varphi(x) = (-x^2 + 2x + 1)\, e^{-x} + 2\,(x^2 - 1)\, e^{-x} = (-x^2 + 2x + 1 + 2x^2 - 2)\, e^{-x}$ $= (x^2 + 2x - 1)\, e^{-x}$. Donc φ est une solution particulière de l'équation $(E) : y' + 2y = (x^2 + 2x - 1)\, e^{-x}$.
L'équation homogène associée $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{-2x}$, où C est un réel. Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{-2x} + (x^2 - 1)\, e^{-x}$, où C est un réel.
Pour $C = 0$, on obtient alors la solution $x \mapsto (x^2 - 1)\, e^{-x}$; et pour $C = 1$, la solution $x \mapsto e^{-2x} + (x^2 - 1)\, e^{-x}$.

$\boxed{\text{Réponses : c et d}}$

Corrigé exercice 18 :

1. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de la fonction affine $x \mapsto x$ par la composée de la fonction affine $x \mapsto 3x$ par la fonction exponentielle, ces fonctions étant toutes dérivables sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} = (3x + 1)\, e^{3x}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) - 3\varphi(x) = (3x + 1 - 3x)\, e^{3x} = e^{3x}$. Et donc φ est bien une solution particulière de (E).

2. Les solutions de l'équation homogène associée $(E_0) : y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' = 3y$ sont les solutions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{3x}$, où C est un réel.

3. Soit y solution de (E). Alors $y - \varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Et $(y - \varphi)' - 3\,(y - \varphi) = (y' - 3y) - (\varphi' - 3\varphi) = e^{3x} - e^{3x} = 0$ car y et φ sont solutions de (E). Donc $y - \varphi$ est solution de (E_0). Réciproquement, soit $y - \varphi$

solution de (E_0). Alors $y = y - \varphi + \varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Et $y' - 3y = (y - \varphi + \varphi)' - 3(y - \varphi - \varphi) = \big((y - \varphi)' - 3(y - \varphi)\big) + \varphi' - 3\varphi = \varphi' - 3\varphi$ car $y - \varphi$ est solution de (E_0). Or, φ est solution de (E) donc $\varphi' - 3\varphi = e^{3x}$. Et donc $y' - 3y = e^{3x}$. Ainsi y est bien solution de (E).

4. Par conséquent, les solutions de (E) s'écrivent comme somme de φ et d'une solution de (E_0). Ce sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto (x + C)\, e^{3x}$, où C est un réel.

5. Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $F_C : x \mapsto (x + C)\, e^{3x}$, où C est un réel. On cherche maintenant $C \in \mathbb{R}$ tel que $F_C\left(\frac{1}{3}\right) = \mathrm{e}$, c'est à dire $\left(\frac{1}{3} + C\right) e^{3 \times \frac{1}{3}} = \mathrm{e} \Leftrightarrow \mathrm{e}\left(\frac{1}{3} + C\right) = \mathrm{e} \Leftrightarrow C = \frac{2}{3}$. En conclusion, la solution F de (E) telle que $F\left(\frac{1}{3}\right) = \mathrm{e}$ est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(x + \frac{2}{3}\right) e^{3x}$.

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1

Questions préliminaires

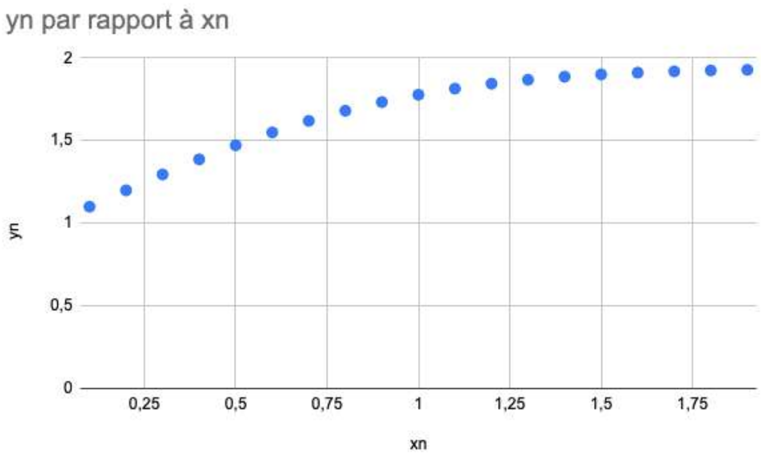
1. $x_1 = x_0 + h = h$ et $x_2 = x_1 + h = 2h$.
2. Par définition, $f'(x_n) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_n+h)-f(x_n)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{h}$. Donc, si h est proche de 0, $\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{h} \approx f'(x_n)$.
3. D'après la question précédente, on a $f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{h}$, lorsque h est proche de 0. Ce qu'on peut réécrire $f(x_{n+1}) \approx f(x_n) + hf'(x_n)$. Or, puisque f est solution de $(E) : y' = \mathrm{e}^{-x^2}$, on a bien $f(x_{n+1}) \approx f(x_n) + h\mathrm{e}^{-x_n^2}$, lorsque h est proche de 0.
4. a. Les points $P_n(x_n; y_n)$ approchent les points $M_n(x_n; f(x_n))$ en utilisant l'approximation de la question précédente. En remplaçant $f(x_n)$ par y_n et $f(x_{n+1})$ par y_{n+1}, on obtient bien $y_{n+1} = y_n + h\mathrm{e}^{-x_n^2}$.
   b. Étant donné que $f(0) = 1$, on doit avoir $y_0 = 1$.
   c. En utilisant la formule, on obtient $y_1 = y_0 + hf'(x_0) = 1 + hf'(0) = 1 + h\mathrm{e}^0 = 1 + h$ et $y_2 = y_1 + hf'(x_1) = 1 + h + hf'(h) = 1 + h + h\mathrm{e}^{-h^2} = 1 + h\left(1 + \mathrm{e}^{-h^2}\right)$.

Méthode 1 : Tableur

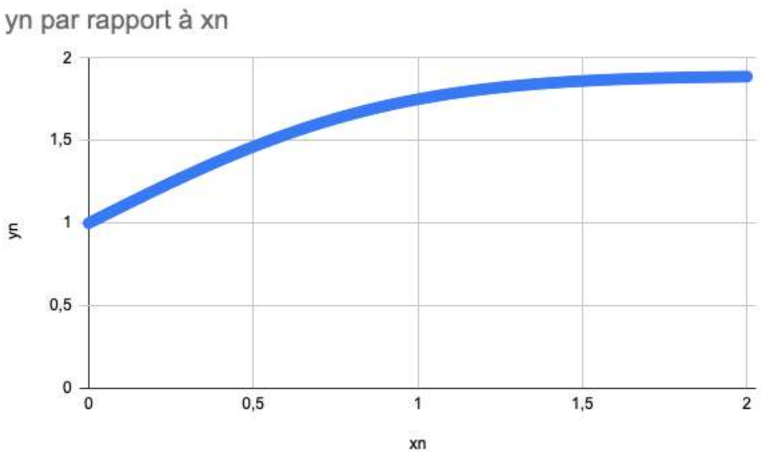
1. On entre en D2 la valeur de h (dans ce cas $h = 0,1$). On pourra ainsi utiliser la cellule D2 dans la suite de cette méthode (en n'oubliant pas d'utiliser le symbole « $ » avant le chiffre, afin de fixer la cellule quand on la recopie vers le bas). On entre respectivement en B3 et C3 les formules : =B2+D$2 et =C2+D$2*exp(-B2*B2). En étirant ces formules vers le bas, on obtient le tableau suivant.

	A	B	C	D
1	n	x_n	y_n	Pas h
2	0	0	1	0,1
3	1	0,1	1,1	
4	2	0,2	1,199004983	
5	3	0,3	1,295083927	
6	4	0,4	1,386477046	
7	5	0,5	1,471691425	
8	6	0,6	1,549571503	
9	7	0,7	1,619339136	
10	8	0,8	1,680601775	
11	9	0,9	1,733331017	
12	10	1	1,777816824	
13	11	1,1	1,814604768	
14	12	1,2	1,844424496	
15	13	1,3	1,868117272	
16	14	1,4	1,886569224	
17	15	1,5	1,900655066	
18	16	1,6	1,911194989	
19	17	1,7	1,918925463	
20	18	1,8	1,924483084	
21	19	1,9	1,928399474	
22	20	2	1,931104658	

2. En sélectionnant les données des colonnes B et C et en utilisant l'outil d'insertion de graphique du tableur, on obtient la courbe suivante.



Ces points représentent donc une approximation de la primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. Pour obtenir une approximation plus précise, il est possible de réduire le pas h utilisé (voir ci-dessous l'approximation avec $h = 0,01$).



Méthode 2 : Python

1. On veut diviser l'intervalle $[0;2]$ en 20 intervalles pour obtenir 21 points d'abscisses $x_0, x_1, \ldots, x_{20}$. On a donc $h = \frac{2-0}{20} = 0,1$.

2. On utilise la formule $y_{n+1} = y_n + he^{-x_n{}^2}$ démontrée dans les questions préliminaires, pour créer la fonction approximation.

```
from math import exp

def approximation(x,y,h):
    return(y+h*exp(-x**2))
```

3. a. Voici un programme possible.

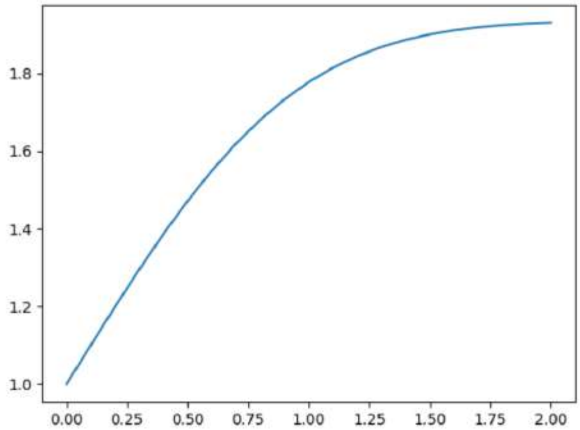
```
from math import exp

def approximation(x,y,h):
    return(y+h*exp(-x**2))

def Euler(x0, y0, h):
    print(x0, y0)
    while x0 <= 2 :
        y0 = approximation(x0, y0, h)
        x0 = x0 + h
        print(x0, y0)

Euler(0, 1, 0.1)
```

   b. On commence par importer le module matplotlib avec la commande import matplotlib.pyplot as plt. Il faut ensuite modifier la fonction Euler pour qu'elle retourne deux listes contenant respectivement les différentes de x_n et de y_n. Voici un programme possible.

```
from math import exp
import matplotlib.pyplot as plt

def approximation(x,y,h):
    return(y + h*exp(-x**2))

def Euler(x0, y0, h):
    yn = [1]
    xn = [0]
    while x0 <= 2 :
        y0 = approximation(x0, y0, h)
        x0 = x0 + h
        yn.append(y0)
        xn.append(x0)
    return xn, yn

fig = plt.figure()
ax = plt.axes()
xn, yn = Euler(0, 1, 0.1)
ax.plot(xn, yn)
plt.show()
```

Les commandes des lignes 17 à 20 permettent respectivement de :

- créer un repère pour tracer une courbe ;
- récupérer les valeurs x_n et y_n renvoyées par la fonction Euler ;
- représenter les points de coordonnées $(x_n ; y_n)$ dans le repère ;
- afficher la figure.



5.2 Corrigé du TP 2

Questions préliminaires :

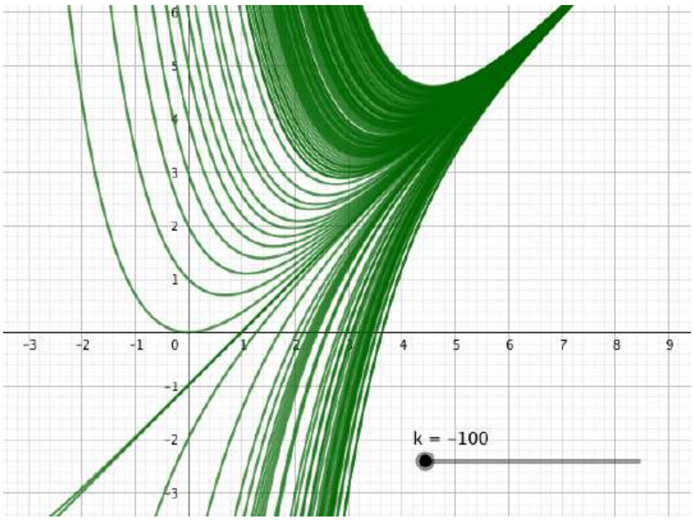
1. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = mx + p$, avec m et p deux réels à déterminer. φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = m$. Donc φ est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m + mx + p = x$. On résout alors le système $\begin{cases} m = 1 \\ m + p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ p = -m = -1 \end{cases}$ et on obtient que la fonction φ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x - 1$, est solution de l'équation (E).

2. Les solutions de l'équation (E_0) sont les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, et de la forme $x \mapsto k\mathrm{e}^{-x}$, où k est constante réelle. Or, les solutions de (E) sont données par la somme d'une solution de l'équation homogène (E_0) et d'une solution particulière de (E). On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions f_k, où k est un réel, définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = k\mathrm{e}^{-x} + x - 1$.

3. $f_{k_0}(0) = 1 \Leftrightarrow k_0\mathrm{e}^0 + 0 - 1 = 1 \Leftrightarrow k_0 = 2$. La solution f_{k_0} de (E) telle que $f_{k_0}(0) = 1$ est donc f_2, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_2(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + x - 1$.

Méthode 1 : Geogebra

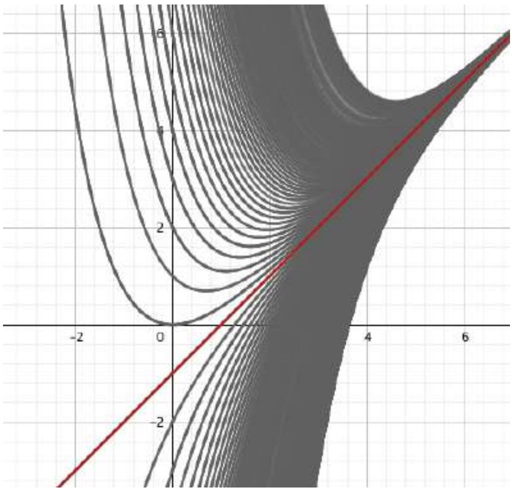
1. a.
   b. On obtient les courbes ci-dessous.



   c. On peut conjecturer que :
   - pour $k \leqslant 0$, f_k est croissante sur $\mathbb{R}$;
   - pour $k > 0$, f_k est décroissante sur $]-\infty; \alpha_k]$ et croissante sur $]\alpha_k; +\infty[$ avec $\alpha_k = \ln(k)$.

   d. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_k(x) = -f_k(x) + x = -k\mathrm{e}^{-x} - x + 1 + x = 1 - k\mathrm{e}^{-x}$. On procède ensuite par disjonction de cas : 1er cas : $k \leqslant 0$ Dans ce cas pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-k\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - k\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 > 0$ et donc, pour tout $k \leqslant 0$, f_k est croissante sur $\mathbb{R}$. 2nd cas : $k > 0$ Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_k(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - k\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant k\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant k \Leftrightarrow x \geqslant \ln(k)$. On en déduit que, pour tout $k > 0$, f_k est décroissante sur $]-\infty; \ln(k)]$ et croissante sur $]\ln(k); +\infty[$.

2. a. On obtient les courbes ci-dessous.



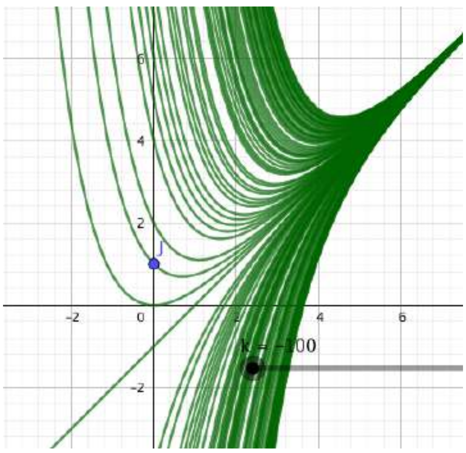
On peut alors conjecturer que :

- pour $k < 0$, $\mathcal{C}_k$ est en dessous de Δ ;
- pour $k > 0$, $\mathcal{C}_k$ est au-dessus de Δ ;
- pour $k = 0$, $\mathcal{C}_k$ et Δ sont confondues.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, étudions le signe de $f_k(x) - (x-1) = k\mathrm{e}^{-x}$. Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, alors cette expression est du signe de k. On en déduit que :

- si $k < 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) - (x-1) < 0 \Leftrightarrow f_k(x) < x-1$ donc $\mathcal{C}_k$ est en dessous de Δ ;
- si $k > 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) - (x-1) > 0 \Leftrightarrow f_k(x) > x-1$ donc $\mathcal{C}_k$ est au-dessus de Δ ;
- pour $k = 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = x-1$ donc $\mathcal{C}_k$ et Δ sont confondues.

3. a. On obtient la figure ci-dessous.

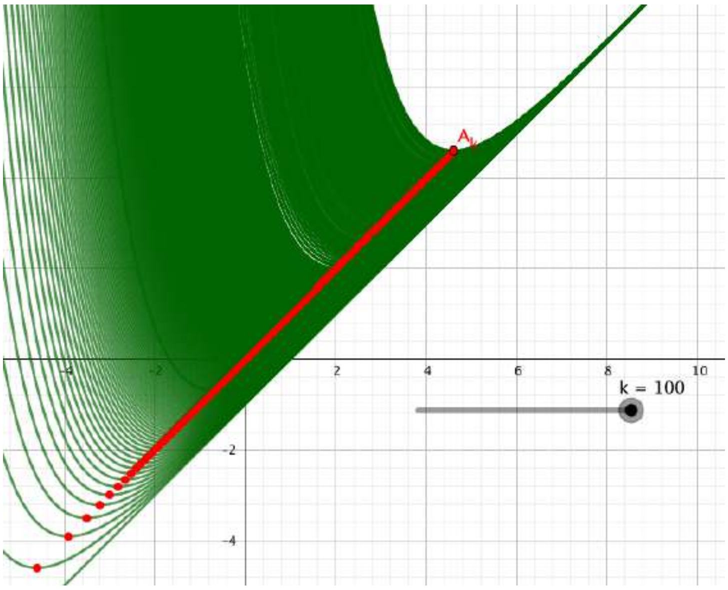


On peut donc conjecturer qu'une seule courbe $\mathcal{C}_k$ passe par le point $J(0;1)$.

b. $f_k(0) = 1 \Leftrightarrow k\mathrm{e}^0 - 1 = 1 \Leftrightarrow k = 2$ Donc $\mathcal{C}_2$ est l'unique courbe $\mathcal{C}_k$ passant par le point $J(0;1)$.

4. a. Dans la question 1.d. on a montré que, pour tout $k > 0$, f_k est décroissante sur $]-\infty; \ln(k)]$ et croissante sur $]\ln(k); +\infty[$. D'où, pour tout $k > 0$, f_k admet un minimum atteint en $x = \ln(k)$.

   b. On obtient la figure ci-dessous.



   L'ensemble des points A_k de $\mathcal{C}_k$ d'abscisse $\ln(k)$, pour $k > 0$, semble être la droite d'équation $y = x$.

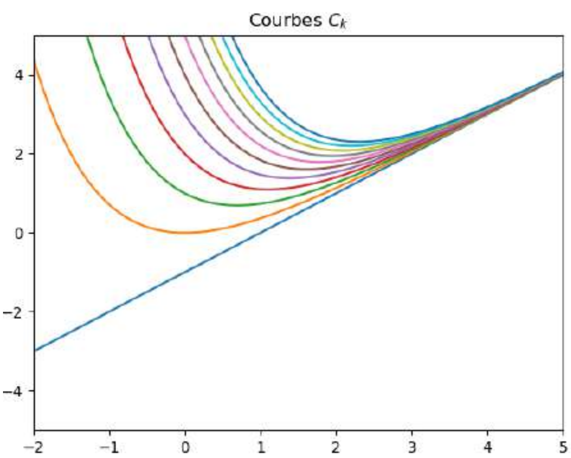
   c. Soit $k > 0$. Par définition, puisque $A_k \in \mathcal{C}_k$, A_k a pour coordonnées $(\ln(k); f_k(\ln(k)))$. Or, $f_k(\ln(k)) = k\mathrm{e}^{-\ln(k)} + \ln(k) - 1 = \frac{k}{\mathrm{e}^{\ln(k)}} + \ln(k) - 1 = \frac{k}{k} + \ln(k) - 1 = \ln(k)$. Donc, A_k appartient bien à la droite d'équation $y = x$.

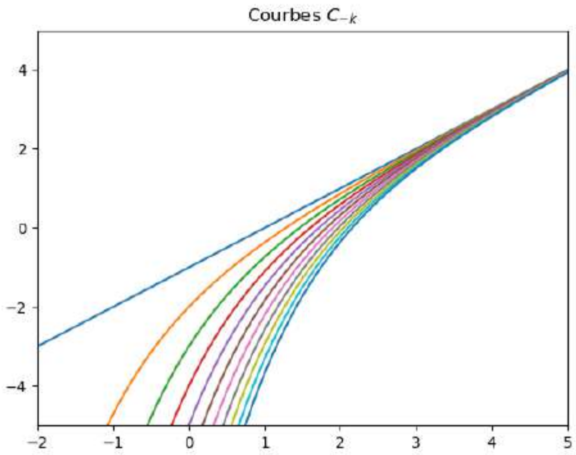
Méthode 2 : Python

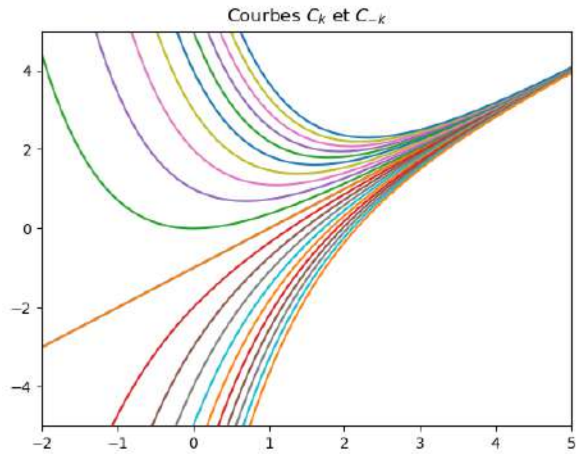
1. Le programme Python ci-dessous fonctionne.

```python
def solution(k,x):
    y=k*exp(-x)+x-1
    return y
```

2. a. On obtient les courbes ci-dessous.







b. On peut conjecturer que, pour $k > 0$, la courbe $\mathcal{C}_k$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_{-k}$.

c. Soit $k > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) - f_{-k}(x) = k\mathrm{e}^{-x} + x - 1 - (-k\mathrm{e}^{-x} + x - 1) = 2k\mathrm{e}^{-x} > 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) - f_{-k}(x) > 0 \Leftrightarrow f_k(x) > f_{-k}(x)$. D'où, pour $k > 0$, la courbe $\mathcal{C}_k$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_{-k}$.

3. a. La fonction solution renvoie `y_0= 0.0`. Donc l'image de 0 par f_1 est 0.

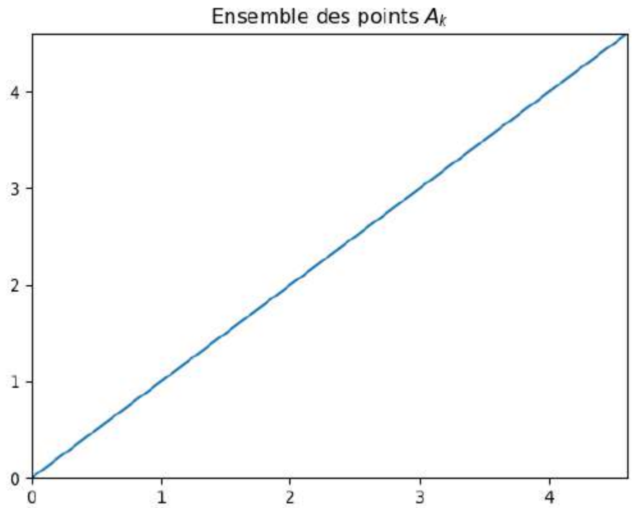
b. Cela signifie que la courbe $\mathcal{C}_1$ de la fonction f_1 passe par le point $O(0;0)$.

4. a. Soit $k > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k'(x) = -f_k(x) + x = -k\mathrm{e}^{-x} - x + 1 + x = 1 - k\mathrm{e}^{-x}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - k\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant k\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x} \geqslant k \Leftrightarrow x \geqslant \ln(k)$. On en déduit que, pour tout $k > 0$, f_k est décroissante sur $]-\infty; \ln(k)]$ et croissante sur $]\ln(k); +\infty[$. D'où, pour tout $k > 0$, f_k admet un minimum atteint en $x = \ln(k)$.

b. Le programme Python ci-dessous permet d'obtenir les valeurs souhaitées.

```python
abscisse=[log(k) for k in range(1,101)]
ordonnee=[solution(k,log(k)) for k in range(1,101)]

#on affiche les coordonnees des points A_k
for i in range (0,100):
    print(abscisse[i], ordonnee[i])
```

On peut alors conjecturer que, pour tout $k > 0$, l'ordonnée de A_k est égale à son abscisse : $\ln(k)$.



c. Soit $k > 0$. Par définition, puisque $A_k \in \mathcal{C}_k$, A_k a pour coordonnées $(\ln(k); f_k(\ln(k)))$. Or, $f_k(\ln(k)) = k\mathrm{e}^{-\ln(k)} + \ln(k) - 1 = \frac{k}{k} + \ln(k) - 1 = \ln(k)$. Donc, A_k appartient bien à la droite d'équation $y = x$.

6 Exercices d'applications directes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 19 :

Notons f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x + 1$ et $g(x) = 4x$. f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4$ et $g'(x) = 4$. Donc f et g sont bien des primitives sur $\mathbb{R}$ de la même fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 4$.

Corrigé exercice 20 :

Notons f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 - 1$. f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$ et $g'(x) = 2x$. Donc f et g sont bien des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2x$.

Corrigé exercice 21 :

1. Comme la dérivée de la fonction racine carrée est définie sur $]0; +\infty[$ par $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$, alors les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sont les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $y(x) = \sqrt{x} + k$, où k est un réel.

2. Comme la dérivée de la fonction inverse est définie pour tout $x \neq 0$ par $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$, alors les solutions sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{x^2}$ sont les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $y(x) = \frac{1}{x} + k$, où k est un réel.

3. Comme la dérivée de la fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est donnée par $x \mapsto \frac{2}{x^3}$, on peut en déduire que les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{2}{x^3}$ sont les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $y(x) = -\frac{1}{x^2} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 22 :

1. Comme la fonction exponentielle est sa propre primitive sur $\mathbb{R}$ alors les solutions de l'équation différentielle $y' = \mathrm{e}^x$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \mathrm{e}^x + k$, où k est un réel.

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\mathrm{e}^{3x+1}$. f admet pour primitive la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$ donc les solutions de l'équation différentielle $y' = 3\mathrm{e}^{3x+1}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \mathrm{e}^{3x+1} + k$, où k est un réel.

3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2\mathrm{e}^{-x^3}$. La fonction f est de la forme $f = u'\mathrm{e}^u$ avec $u = -x^3$ de dérivée $u' = -3x^2$, donc f admet pour primitive la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \mathrm{e}^{-x^3}$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = 3\mathrm{e}^{3x+1}$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \mathrm{e}^{-x^3} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 23 :

Soient a et b des réels avec $a \neq 0$. On sait que :

- les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle ;

- les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

1. On est dans le cas $a = 1$ et $b = 0$ donc les solutions de $y' = y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^x$, où C est un réel.
2. On a $\frac{y'}{3} + y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{3} = -y \Leftrightarrow y' = -3y$, on est donc dans le cas $a = -3$ et $b = 0$. Les solutions de $\frac{y'}{3} + y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{-3x}$, où C est un réel.
3. On a $y' - y = 1 \Leftrightarrow y' = y + 1$, on est donc dans le cas $a = b = 1$. Les solutions de $y' - y = 1$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^x - 1$, où C est un réel.
4. On a $3y' = 3y - 3 \Leftrightarrow y' = y - 1$, on est donc dans le cas $a = 1$ et $b = -1$. Les solutions de $3y' = 3y - 3$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^x + 1$, où C est un réel.

Corrigé exercice 24 :

φ est une fonction affine donc $\mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 1$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\varphi'(x) - \varphi(x) = 2 - x - 2 = -x \neq x$. La fonction φ n'est donc pas solution de l'équation différentielle $2y' = y + x$.

Corrigé exercice 25 :

φ est une fonction affine donc $\mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 1$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x)+\varphi(x) = 1+x-1 = x$. φ est donc bien une solution de l'équation différentielle $y' + y = x$. D'autre part, l'équation homogène associée à cette équation différentielle est $y' + y = 0$ dont les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}$, avec C réel. Par conséquent, les solutions de $y' + y = x$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{-x} + x - 1$, où C est un réel.

6.2 Exercices

Corrigé exercice 26 :

Dans cet exercice, on utilise le fait que $x \mapsto x^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, a pour primitive $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Une primitive de $x \mapsto -3$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto -3x$.
2. Une primitive de $x \mapsto 2x - \frac{1}{3}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2 - \frac{1}{3}x$.
3. Une primitive de $x \mapsto \frac{x^2}{3} - x$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2}$.
4. Une primitive de $x \mapsto 3x^2 + \frac{2x}{3} - 8$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3 + \frac{x^2}{3} - 8x$.

Corrigé exercice 27 :

f est une fonction rationnelle donc admet des primitives sur $I =]0; +\infty[$. Une primitive sur I de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x}$ et une primitive sur I de $x \mapsto -1$ est $x \mapsto -x$. Ainsi, les primitives de f sur I sont les fonctions F_k définies sur I par $F_k(x) = -\frac{1}{x} - x + k$, où$k$ est un réel. Enfin, $F_k(1) = -1 \Leftrightarrow -1 - 1 + k = -1 \Leftrightarrow k = 1$. En conclusion, pour tout $x \in I$, $F(x) = -\frac{1}{x} - x + 1$ est la primitive de la fonction f telle que $F(1) = -1$.

Corrigé exercice 28 :

La fonction exponentielle est sa propre primitive sur $\mathbb{R}$. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $F_k(x) = \mathrm{e}^x + k$, où$k$ est un réel. De plus, $F_k(0) = \mathrm{e} \Leftrightarrow \mathrm{e}^0 + k = \mathrm{e} \Leftrightarrow k = \mathrm{e} - 1$. En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e} - 1$ est la primitive de la fonction f telle que $F(0) = \mathrm{e}$.

Corrigé exercice 29 :

f est une fonction polynôme donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 3x^2$ est $x \mapsto x^3$ et une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -2x$ est $x \mapsto -x^2$. Ainsi, les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F_k(x) = x^3 - x^2 + k$, oùk est un réel. De plus, $F_k(1) = 2 \Leftrightarrow 1 - 1 + k = 2 \Leftrightarrow k = 2$. En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = x^3 - x^2 + 2$ est la primitive de la fonction f telle que $F(1) = 2$.

Corrigé exercice 30 :

1. On sait que si u est dérivable sur I alors e^u est dérivable sur I et $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$, donc $u'\mathrm{e}^u$ admet pour primitive e^u sur I. Avec quelques abus de notations, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^x + 2 \times (-1) \times \mathrm{e}^{-x} = (\mathrm{e}^x)' + 2\left(\mathrm{e}^{-x}\right)' = \left(\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x}\right)'$. Ainsi, une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x}$.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x}{(x^2+3)^2}$. f est définie sur $\mathbb{R}$ car x^2+3 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 3$ alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$. Ainsi la fonction f est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ et admet donc pour primitive $-\frac{1}{u}$ sur $\mathbb{R}$. Donc une primitive de $x \mapsto \frac{2x}{(x^2+3)^2}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto -\frac{1}{x^2+3}$.

3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$. f est définie sur $\mathbb{R}$ car $x^2 + 1$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 1$, alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$. Ainsi la fonction f est de la forme $\frac{1}{2} \times \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ et admet donc pour primitive $\frac{1}{2} \times \sqrt{u}$ sur $\mathbb{R}$. Donc une primitive de $x \mapsto \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$.

4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{9x^2-3}{(x^3-x)^2}$. $f(x)$ existe si, et seulement si, $x^3 - x \neq 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $x \neq -1$, $x \neq 0$ et $x \neq 1$. Ainsi, la fonction f est définie sur $I =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$. Soit u la fonction définie sur I par $u(x) = x^3 - x$, alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et donc u est dérivable sur I. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 3x^2 - 1$. Ainsi la fonction f est de la forme $\frac{3u'}{u^2} = 3\frac{u'}{u^2}$ et admet donc

pour primitive $3 \times \left(-\frac{1}{u}\right)$ sur I. Donc une primitive de $x \mapsto \frac{9x^2-3}{(x^3-x)^2}$ est la fonction définie sur I par $x \mapsto -\frac{3}{x^3-x}$.

Corrigé exercice 31 :

1. f est le produit de $x \mapsto x^2$ par la composée de $x \mapsto x^3$ avec la fonction exponentielle, toutes les trois dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc f est continue sur $\mathbb{R}$. f admet donc bien des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3$, alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et $u'(x) = 3x^2$. Ainsi la fonction f est de la forme $\frac{u'\mathrm{e}^u}{3}$ et admet donc pour primitives les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^3}}{3} + k$, où k est un réel. De plus, $F_k(1) = \mathrm{e} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}}{3} + k = \mathrm{e} \Leftrightarrow k = \frac{2\mathrm{e}}{3}$. La primitive F de f qui respecte la condition donnée est donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^3}+2\mathrm{e}}{3}$.

2. f est une fonction polynôme, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1-x^2$, alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et $u'(x) = -2x$. Ainsi, f est de la forme $\frac{1}{2} \times u'u^3$ et admet donc pour primitive $\frac{1}{2} \times \frac{u^{3+1}}{3+1} = \frac{u^4}{8}$. Donc les primitives de f sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = \frac{(1-x^2)^4}{8} + k$, où k est un réel. De plus, $F(0) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{8} + k = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{5}{8}$. La primitive F de f qui respecte la condition donnée est donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{\left(1-x^2\right)^4-5}{8}$.

Corrigé exercice 32 :

1. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 2x$. Alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 2$. Ainsi F est une solution de l'équation différentielle $y' = 2$. On en déduit que les solutions de $y' = 2$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = 2x + k$, où k est un réel.

2. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x - x^2$. Alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 1 - 2x$. Ainsi F est une solution de l'équation différentielle $y' = 1 - 2x$. On en déduit que les solutions de $y' = 1 - 2x$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = x - x^2 + k$, où k est un réel.

3. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{5}{2}x^2 - 3x$. Alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 5x - 3$. Ainsi F est une solution de l'équation différentielle $y' = 5x - 3$. On en déduit que les solutions de $y' = 5x - 3$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \frac{5}{2}x^2 - 3x + k$, où k est un réel.

4. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{3} \times \left(x^3\right)' = \frac{1}{3} \times 3x^2 = x^2$. Ainsi F est une solution de l'équation différentielle $y' = x^2$. On en déduit que les solutions de $y' = x^2$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \frac{x^3}{3} + k$, où k est un réel.

5. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3+x^2+x$. Alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 3x^2+2x+1$. Ainsi F est une solution de l'équation différentielle $y' = 3x^2 + 2x + 1$. On en déduit que les solutions de $y' = 3x^2 + 2x + 1$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = x^3 + x^2 + x + k$, où k est un réel.

6. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{x^4}{4}$. Alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{4} \times (x^4)' = \frac{1}{4} \times 4x^3 = x^3$. Ainsi F est une solution de l'équation différentielle $y' = x^3$. On en déduit que les solutions de $y' = x^3$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \frac{x^4}{4} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 33 :

La fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = -\frac{1}{2x^2}$ est une fonction rationnelle et est donc dérivable sur son ensemble de définition, donc sur $]0; +\infty[$. De plus, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $F'(x) = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{1}{2} \times \frac{-2x}{x^4} = \frac{1}{x^3}$. Donc F est solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{x^3}$. Ainsi les solutions de l'équation $y' = \frac{1}{x^3}$ sont les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $y(x) = -\frac{1}{2x^2} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 34 :

La fonction $x \mapsto x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ est la somme des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{x}}$. Une primitive sur $]0; +\infty[$ de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto \frac{x^3}{3}$. Une primitive sur $]0; +\infty[$ de $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{x}}$ est $x \mapsto -2\sqrt{x}$. Donc, par somme, une primitive sur $]0; +\infty[$ de $x \mapsto x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ est $x \mapsto \frac{x^3}{3} - 2\sqrt{x}$. Ainsi, les solutions de l'équation $y' = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ sont les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{x} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 35 :

1. Soit $F(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2x+1}$ pour $x \in I = \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$. On pose $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = 2x+1$ alors u et v sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc sur I. De plus v ne s'annule pas sur I. Par conséquent $F = \frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $F' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$. Ainsi, pour tout $x \in I$, $F'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(2x+1)-2\mathrm{e}^x}{(2x+1)^2} = \frac{(2x-1)\mathrm{e}^x}{(2x+1)^2} = f(x)$. Donc F est bien une primitive de f sur I.

2. Soit $F(x) = (-6x - 14)\,\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors F est dérivable sur I comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur I. Et, pour tout $x \in I$, $F'(x) = -6\mathrm{e}^{-0,6x} + (-6x-14) \times (-0,6)\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4 = (-6 + 3,6x + 8,4)\,\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4 = (3,6x + 2,4)\,\mathrm{e}^{-0,6x} - 1,4 = f(x)$. Donc F est bien une primitive de f sur I.

Corrigé exercice 36 :

1. En tant que fonction polynôme f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ a pour primitive $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ sur $\mathbb{R}$, alors f a pour primitive la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{x^3}{3} - 3 \times \frac{x^2}{2} + 5x$. Ainsi, les fonctions de la forme $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + d$, où d est un réel quelconque, sont une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. En tant que fonction polynôme f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ a pour primitive $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ sur $\mathbb{R}$, alors f a pour primitive la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto -5 \times \frac{x^3}{3} + 7 \times \frac{x^2}{2} - x$. Ainsi, les fonctions de la forme $x \mapsto -\frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - x + d$, où d est un réel quelconque, sont une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 37 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\mathrm{e}^x$. La fonction exponentielle est sa propre primitive sur $\mathbb{R}$, donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto -\mathrm{e}^x + k$, où k est un réel. Et donc les solutions de $y' = -\mathrm{e}^x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = -\mathrm{e}^x + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 38 :

Pour toute fonction u définie sur I, une primitive de $u'\mathrm{e}^u$ est e^u.

1. Posons $f(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$ et $u(x) = -2x$, on a $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -2$. Ainsi $f = u'\mathrm{e}^u$ donc f a pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$. Donc les solutions de $y' = -2\mathrm{e}^{-2x}$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \mathrm{e}^{-2x} + k$, où k est un réel.

2. Posons $f(x) = 4\mathrm{e}^{-5x}$ et $u(x) = -5x$, on a $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -5$. Ainsi $f = -\frac{4}{5}u'\mathrm{e}^u$ donc f a pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto -\frac{4}{5}\mathrm{e}^{-5x}$. Donc les solutions de $y' = 4\mathrm{e}^{-5x}$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = -\frac{4}{5}\mathrm{e}^{-5x} + k$, où k est un réel.

3. Posons $f(x) = -2\mathrm{e}^{6x-7}$ et $u(x) = 6x-7$, on a $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 6$. Ainsi $f = -\frac{1}{3}u'\mathrm{e}^u$ donc f a pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{6x-7}$. Donc les solutions de $y' = -2\mathrm{e}^{6x-7}$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{6x-7} + k$, où k est un réel.

4. Posons $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$ et $u(x) = -x^2$, on a $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -2x$. Ainsi $f = -\frac{1}{2}u'\mathrm{e}^u$ donc f a pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$. Donc les solutions de $y' = x\mathrm{e}^{-x^2}$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 39 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1$. f est une fonction polynôme, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x$ est $x \mapsto \frac{x^2}{2}$, et une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -1$ est $x \mapsto -x$. Ainsi, les solutions de $y' = x - 1$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F_k(x) = \frac{x^2}{2} - x + k$, avec k réel. De plus, $F_k(1) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - 1 + k = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$. Donc, la solution de $y' = x - 1$ vérifiant la condition initiale est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$.

Corrigé exercice 40 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x + 1$. f est une fonction polynôme, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto \frac{x^3}{3}$, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -x$ est $x \mapsto -\frac{x^2}{2}$ et une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 1$ est $x \mapsto x$. Ainsi, les solutions de $y' = x^2 - x + 1$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F_k(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + k$, où k est un réel. De plus, $F_k(0) = 0 \Leftrightarrow k = 0$. Donc, la solution de $y' = x^2 - x + 1$ vérifiant la condition initiale est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$.

Corrigé exercice 41 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + \frac{1}{x^2}$. f est une fonction rationnelle, elle admet donc des primitives sur son ensemble de définition $\mathbb{R}^*$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de

$x \mapsto x^3$ est $x \mapsto \frac{x^4}{4}$, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x$ est $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et une primitive sur $\mathbb{R}^*$ de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x}$. Ainsi, les solutions de $y' = x^3 + x + \frac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$ sont les fonctions $F_k(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + k$, où k est un réel. De plus, $F_k(1) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + k = \frac{3}{4} \Leftrightarrow k = 1$. Donc, la solution de $y' = x^3 + x + \frac{1}{x^2}$ vérifiant la condition initiale est la fonction définie pour tout $x > 0$ par $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + 1$.

Corrigé exercice 42 :

L'équation différentielle peut se réécrire $y' = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^5}$. Ainsi, les solutions de cette équation sont les fonctions, définies pour tout $x < 0$, par $F_k(x) = -\frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{2x^4} + k$, où k est un réel. De plus, $F_k(-1) = 1 \Leftrightarrow 2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + k = 1 \Leftrightarrow k = -2$. Donc, la solution de $y' = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^5}$ vérifiant la condition initiale est la fonction définie pour tout $x < 0$ par $F(x) = -\frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{2x^4} - 2$.

Corrigé exercice 43 :

Soit a un réel non nul. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle.

1. $y' - \frac{1}{2}y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2}y$, on est donc dans le cas où $a = \frac{1}{2}$. Ainsi les solutions de $y' - \frac{1}{2}y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, où C est un réel.

2. $2y' - 3y = 8y + 4y' \Leftrightarrow 2y' = -11y \Leftrightarrow y' = -\frac{11}{2}y$, on est donc dans le cas où $a = -\frac{11}{2}$. Ainsi les solutions de $2y' - 3y = 8y + 4y'$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{11x}{2}}$, où C est un réel.

3. $5y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{3}{5}y$, on est donc dans le cas où $a = -\frac{3}{5}$. Ainsi les solutions de $5y' + 3y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{3x}{5}}$, où C est un réel.

4. $-\frac{3}{2}y' - \sqrt{2}y = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}y' = \sqrt{2}y \Leftrightarrow y' = -\frac{2\sqrt{2}}{3}y$, on est donc dans le cas où $a = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Ainsi les solutions de $-\frac{3}{2}y' - \sqrt{2}y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{2\sqrt{2}}{3}x}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 44 :

Soit a un réel non nul. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$, où C est un réel.

1. $y' + \sqrt{2}y = 0 \Leftrightarrow y' = -\sqrt{2}y$, on est donc dans le cas où $a = -\sqrt{2}$. Ainsi les solutions de $y' + \sqrt{2}y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x}$, où C est un réel. On détermine C tel que $F\left(\sqrt{2}\right) = 1 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-2} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{\mathrm{e}^{-2}} = \mathrm{e}^2$. Ainsi, la solution à l'équation différentielle respectant la condition précisée est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{-\sqrt{2}x} = \mathrm{e}^{2-\sqrt{2}x}$.

2. $2y' - 3y = 2y + 3y' \Leftrightarrow y' = -5y$, on est donc dans le cas où $a = -5$. Ainsi les solutions de $2y' - 3y = 2y + 3y'$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-5x}$, où C est une constante réelle. On détermine C tel que $F(0) = 5 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^0 = 5 \Leftrightarrow C = 5$. Ainsi, la solution à l'équation différentielle respectant la condition précisée est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = 5\mathrm{e}^{-5x}$.

3. $\frac{1}{2}y'+y=\frac{1}{2}y-y' \Leftrightarrow \frac{3}{2}y'=-\frac{1}{2}y \Leftrightarrow y'=-\frac{1}{3}y$, on est donc dans le cas où $a=-\frac{1}{3}$. Ainsi les solutions de $\frac{1}{2}y'+y=\frac{1}{2}y-y'$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$, où C est une constante réelle. On détermine C tel que $F(3)=\frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-\frac{3}{3}}=\mathrm{e}^{-1} \Leftrightarrow C=1$. Ainsi, la solution à l'équation différentielle respectant la condition précisée est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$.

Corrigé exercice 45 :

Soit a et b deux réels, a non nul. Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay+b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=C\mathrm{e}^{ax}-\frac{b}{a}$, avec C une constante réelle.

1. $2y'-y=2 \Leftrightarrow 2y'=y+2 \Leftrightarrow y'=\frac{1}{2}y+1$, on est donc dans le cas où $a=\frac{1}{2}$ et $b=1$. Donc les solutions de $2y'-y=2$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=C\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-2$, où C est un réel.

2. $\sqrt{2}y'=\sqrt{6}y-1 \Leftrightarrow y'=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow y'=\sqrt{3}y-\frac{1}{\sqrt{2}}$, on est donc dans le cas où $a=\sqrt{3}$ et $b=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc les solutions de $\sqrt{2}y'=\sqrt{6}y-1$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=C\mathrm{e}^{\sqrt{3}x}+\frac{\sqrt{6}}{6}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 46 :

Soit a et b deux réels, a non nul. Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay+b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=C\mathrm{e}^{ax}-\frac{b}{a}$, où C est un réel.

1. $2y'+3y=3y'-2y+3 \Leftrightarrow y'=5y-3$, on est donc dans le cas où $a=5$ et $b=-3$. Donc les solutions de $2y'+3y=3y'-2y+3$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=C\mathrm{e}^{5x}+\frac{3}{5}$, où C est un réel. On détermine C tel que $F\left(\frac{1}{5}\right)=-\frac{2}{5} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{5\times\frac{1}{5}}+\frac{3}{5}=-\frac{2}{5} \Leftrightarrow C\mathrm{e}=-1 \Leftrightarrow C=-\mathrm{e}^{-1}$. Ainsi, la solution à l'équation différentielle respectant la condition précisée est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x)=-\mathrm{e}^{-1}\times\mathrm{e}^{5x}+\frac{3}{5}=-\mathrm{e}^{5x-1}+\frac{3}{5}$.

2. $2y'-3y=2y-3y'+5 \Leftrightarrow 5y'=5y+5 \Leftrightarrow y'=y+1$, on est donc dans le cas où $a=b=1$. Donc les solutions de $2y'-3y=2y-3y'+5$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=C\mathrm{e}^{x}-1$, où C est un réel. On détermine C tel que $F(0)=1 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{0}-1=1 \Leftrightarrow C=2$. Ainsi, la solution à l'équation différentielle respectant la condition précisée est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x)=2\mathrm{e}^{x}-1$.

3. $3y'-3y=2y'-2y+\mathrm{e}^2 \Leftrightarrow y'=y+\mathrm{e}^2$, on est donc dans le cas où $a=1$ et $b=\mathrm{e}^2$. Donc les solutions de $3y'-3y=2y'-2y+\mathrm{e}^2$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=C\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^2$, où C est un réel. On détermine C tel que $F(2)=2\mathrm{e}^2 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^2=2\mathrm{e}^2 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^2=3\mathrm{e}^2 \Leftrightarrow C=3$. Ainsi, la solution à l'équation différentielle respectant la condition précisée est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x)=3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^2$.

Corrigé exercice 47 :

Soit a un réel non nul et f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation différentielle (E) : $y'=ay+f$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=C\mathrm{e}^{ax}+\varphi(x)$, avec C une constante réelle et φ une solution particulière de (E). Or, φ est une fonction affine donc $\mathcal{D}_{\varphi'}=\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x)=3$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x)+3\varphi(x)=3+9x-3=9x$, et φ est donc bien solution de (E). Ainsi les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=Ce^{-3x}+3x-1$, avec C réel.

Corrigé exercice 48 :

Soit φ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = mx + p$, avec m et p deux réels. Alors $\mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = m$. φ est solution de $(E) \Leftrightarrow$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\varphi'(x) - \varphi(x) = 2x \Leftrightarrow 2m - mx - p = 2x$. On résout alors le système $\begin{cases} -m = 2 \\ 2m - p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ p = 2m = -4 \end{cases}$, et on en déduit que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = -2x - 4$ est solution de l'équation (E). Or, si a est un réel non nul et f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + f$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{ax} + \varphi(x)$, avec C une constante réelle et φ une solution particulière de (E). On en déduit que les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2x - 4$, où C est un réel. Enfin, on détermine C tel que $F(0) = -2 \Leftrightarrow C - 4 = -2 \Leftrightarrow C = 2$. Ainsi, la solution à l'équation différentielle respectant la condition précisée est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2x - 4$.

Corrigé exercice 49 :

φ est une fonction polynôme du second degré donc $\mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = -2x - 1$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) - 3\varphi(x) = -2x - 1 + 3x^2 + 3x + 3 = 3x^2 + x + 2$ et donc φ est bien solution de l'équation différentielle. Or, si a est un réel non nul et f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + f$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{ax} + \varphi(x)$, où C est un réel et φ une solution particulière de l'équation. On en déduit que les solutions de l'équation $y' - 3y = x^2 + x + 2$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{3x} - x^2 - x - 1$, où C est un réel.

Corrigé exercice 50 :

Soit φ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels. Alors $\mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 2ax + b$. Donc φ est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 4x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = 4x^2 - 2x + 1$. On résout alors le système $\begin{cases} 2a = 4 \\ 2a + 2b = -2 \\ b + 2c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases}$, et on en déduit que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 2x^2 - 3x + 2$ est solution de (E). Or, si a est un réel non nul et f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + f$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{ax} + \varphi(x)$, où C est un réel et φ une solution particulière de l'équation. Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{-2x} + 2x^2 - 3x + 2$, où C est un réel. Enfin, on détermine C tel que $F(0) = 4 \Leftrightarrow C + 2 = 4 \Leftrightarrow C = 2$. Ainsi, la solution à l'équation différentielle respectant la condition précisée est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = 2e^{-2x} + 2x^2 - 3x + 2$.

Corrigé exercice 51 :

φ est le produit de $x \mapsto x$, fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$, avec la composée de la fonction affine $x \mapsto -x$, dérivable sur $\mathbb{R}$, avec la fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$, donc

$\mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = \mathrm{e}^{-x} + x \times (-1) \times \mathrm{e}^{-x} = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) + \varphi(x) = (1 - x + x)\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$. φ est donc bien solution de (E). Comme les solutions de l'équation homogène associée $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}$, où C est un réel, on en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = (x + C)\,\mathrm{e}^{-x}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 52 :

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = mx\mathrm{e}^{2x}$, avec m un réel à déterminer. φ est le produit de $x \mapsto mx$, fonction affine, dérivable sur $\mathbb{R}$, avec la composée de la fonction affine $x \mapsto 2x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec la fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = m\mathrm{e}^{2x} + mx \times 2 \times \mathrm{e}^{2x} = (2mx + m)\,\mathrm{e}^{2x}$. Ainsi, φ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi'(x) - 2\varphi(x) = 2\mathrm{e}^{2x} \Leftrightarrow (2mx + m)\,\mathrm{e}^{2x} - 2mx\mathrm{e}^{2x} = 2\mathrm{e}^{2x} \Leftrightarrow m\mathrm{e}^{2x} = 2\mathrm{e}^{2x} \Leftrightarrow m = 2$. Ainsi, φ est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 2x\mathrm{e}^{2x}$. Comme les solutions de l'équation homogène associée $y' - 2y = 0 \Leftrightarrow y' = 2y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{2x}$, où C est un réel, on en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto (2x + C)\,\mathrm{e}^{2x}$, où C est un réel. Enfin, on détermine C tel que $F(0) = -1 \Leftrightarrow (2 \times 0 + C)\,\mathrm{e}^{0} = -1 \Leftrightarrow C = -1$. Ainsi, la solution à l'équation différentielle respectant la condition précisée est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = (2x - 1)\,\mathrm{e}^{2x}$.

Corrigé exercice 53 :

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{2x}$, où$a$, b et c sont des réels à déterminer. φ est le produit d'une fonction trinôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, avec la composée de la fonction affine $x \mapsto 2x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = (2ax + b)\mathrm{e}^{2x} + 2(ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{2x} = (2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c)\,\mathrm{e}^{2x}$. Donc φ est solution de (E) si, et seulement si, $2\varphi'(x) - 3\varphi(x) = (x^2 + 5x + 3)\mathrm{e}^{2x} \Leftrightarrow (ax^2 + (4a + b)x + 2b + c)\,\mathrm{e}^{2x} = (x^2 + 5x + 3)\,\mathrm{e}^{2x}$. On résout le système suivant $\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 5 \\ 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 - 4a = 1 \\ 2b + c = 3 - 2b = 1 \end{cases}$. Ainsi, φ est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)\,\mathrm{e}^{2x}$. L'équation homogène associée à (E) est $2y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{3}{2}y$. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{\frac{3x}{2}} + (x^2 + x + 1)\,\mathrm{e}^{2x}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 54 :

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = ax^2\mathrm{e}^{-x}$, avec a réel à déterminer. φ est le produit d'une fonction trinôme dérivable sur $\mathbb{R}$, avec la composée de la fonction affine $x \mapsto -x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec la fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 2ax\mathrm{e}^{-x} - ax^2\mathrm{e}^{-x} = (-ax^2 + 2ax)\,\mathrm{e}^{-x}$. Donc φ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi'(x) + \varphi(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow (-ax^2 + 2ax + ax^2)\,\mathrm{e}^{-x} = 2x\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow 2ax\mathrm{e}^{-x} = 2x\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow a = 1$. Ainsi, φ est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$. L'équation homogène associée à (E) est $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = (x^2 + C)\,\mathrm{e}^{-x}$, où C est un réel. On détermine C tel que $F(-1) = 1 \Leftrightarrow (1 + C)\mathrm{e}^{-(-1)} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{\mathrm{e}} - 1$.

Ainsi, la solution à l'équation différentielle respectant la condition précisée est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \left(x^2 + \frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right)\mathrm{e}^{-x}$.

Corrigé exercice 55 :

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (ax^2 + bx)\mathrm{e}^{-2x}$, où a et b sont des réels à déterminer. φ est le produit d'une fonction trinôme dérivable sur $\mathbb{R}$, avec la composée de la fonction affine $x \mapsto -2x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec la fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = (2ax + b)\mathrm{e}^{-2x} - 2(ax^2 + bx)\mathrm{e}^{-2x} = \left(-2ax^2 + (2a - 2b)x + b\right)\mathrm{e}^{-2x}$. Ainsi, φ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi'(x) + 2\varphi(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow \left(-2ax^2 + (2a - 2b)x + b + 2ax^2 + 2bx\right)\mathrm{e}^{-2x} = (2x + 1)\mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow$ $(2ax + b)\,\mathrm{e}^{-2x} = (2x + 1)\,\mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$. Donc φ est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = (x^2 + x)\,\mathrm{e}^{-2x}$. L'équation homogène associée à (E) est $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = (x^2 + x + C)\,\mathrm{e}^{-2x}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 56 :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ est une fonction trinôme définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 \times 2x - 2 = 6x - 2$. Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y' = 6x - 2$. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + 3f(x) = 6x - 2 + 9x^2 - 6x + 3 = 9x^2 + 1$, donc f est aussi solution de l'équation différentielle $y' + 3y = 9x^2 + 1$.

Corrigé exercice 57 :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4\mathrm{e}^{5x}$ est de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C et a sont deux réels, solution de l'équation différentielle $y' = ay$. Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y' = 5y$.

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 58 :

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + 1$ est une fonction polynôme et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = x^2 + x - 1 \neq x^2 + x + 1$. Donc F n'est pas une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.

Corrigé exercice 59 :

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$. On étudie donc le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ pour en déduire les variations de F. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f(x)$ est du signe de $x + 2$. Ainsi $F'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -2$. Donc F est décroissante sur $]-\infty; -2]$ et croissante sur $]-2; +\infty[$. On en déduit que la courbe de F est $\mathcal{C}_2$.

Corrigé exercice 60 :

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x\mathrm{e}^x$est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de la fonction affine $x \mapsto x$ avec la fonction exponentielle, toutes les deux dérivables sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (x+1)\,\mathrm{e}^x$. Ainsi, F est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = (x+1)\,\mathrm{e}^x$.

Corrigé exercice 61 :

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto x^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, a pour primitive sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Ainsi :

1. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 2020x + k$, où k est un réel.
2. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{x^2}{2} - x + k$, où k est un réel.
3. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{x^3}{3} + 2x + k$, où k est un réel.
4. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{3x^2}{2} - x + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 62 :

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto x^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, a pour primitive sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Ainsi :

1. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + k$, où k est un réel.
2. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + 2x + k$, où k est un réel.
3. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{x^4}{6} - \frac{x^3}{4} + \frac{2x^2}{5} - \frac{5x}{6} + k$, où k est un réel.

4. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{4} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 63 :

1. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto -6\sqrt{x} + k$, où k est un réel.
2. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{2}{x} + k$, où k est un réel.
3. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + k$, où k est un réel.
4. Pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{3x-2}{x^3} = \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 64 :

Une primitive de $u' \times (v' \circ u)$ sur I est $v \circ u$.

1. La fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$ est une fonction rationnelle définie pour $x \neq -2$. Cette fonction est dérivable, et donc continue sur I et admet donc des primitives sur I. Pour tout $x \in I$, $f(x) = (x+2)' \times g' \circ (x+2)$, où g est la fonction inverse. Ainsi, les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{1}{x+2} + k$, où k est un réel.
2. La fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{(x+3)^2}$ est une fonction rationnelle définie pour $x \neq -3$. Cette fonction est dérivable, et donc continue sur I et admet donc des primitives sur I. Pour tout $x \in I$, $f(x) = -2 \times (x+3)' \times g' \circ (x+3)$, où g est la fonction inverse. Ainsi, les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{2}{x+3} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 65 :

Une primitive de $u' \times (v' \circ u)$ sur I est $v \circ u$.

1. La fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{(x^2+2)^3}$ est une fonction rationnelle définie sur $I = \mathbb{R}$. Cette fonction est dérivable, donc continue sur I et admet donc des primitives sur I. Pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{1}{2} \times (x^2+2)' \times g' \circ (x^2+2)$, où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}$. Ainsi, les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{1}{4(x^2+2)^2} + k$, où k est un réel.
2. La fonction f définie par $f(x) = \frac{3x^2}{(x^3-1)^4}$ est une fonction rationnelle définie pour $x \neq -1$ et $x \neq 1$. Cette fonction est dérivable, donc continue sur I et admet donc des primitives sur I. Pour tout $x \in I$, $f(x) = (x^3-1)' \times g' \circ (x^3-1)$, où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto -\frac{1}{3}\frac{1}{x^3}$. Ainsi, les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{1}{3(x^3-1)^3} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 66 :

Une primitive de $u' \times (v' \circ u)$ sur I est $v \circ u$.

1. La fonction f définie par $f(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$ est définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$ comme produit d'une fonction constante par la composée d'une fonction affine avec la fonction exponentielle, donc f est continue et admet des primitives sur I. Soit $u(x) = 2x$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in I$, $u'(x) = 2$. Ainsi $f = u' \times \mathrm{e}^u$ admet pour primitive e^u. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions définies sur I par $x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + k$, où k est un réel.

2. La fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{1-3x}$ est définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$ comme composée d'une fonction affine par la fontion exponentielle, donc f est continue et admet des primitives sur I. Soit $u(x) = 1 - 3x$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in I$, $u'(x) = -3$. Ainsi $f = -\frac{1}{3} \times u' \times \mathrm{e}^u$ admet pour primitive $-\frac{1}{3} \times \mathrm{e}^u$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{\mathrm{e}^{1-3x}}{3} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 67 :

Une primitive de $u' \times (v' \circ u)$ sur I est $v \circ u$.

1. La fonction f définie par $f(x) = -x\mathrm{e}^{x^2-1}$ est définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$ comme produit d'une fonction affine par la composée d'une fonction trinôme par la fontion exponentielle, donc f est continue et admet des primitives sur I. Soit $u(x) = x^2 - 1$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in I$, $u'(x) = 2x$. Ainsi $f = -\frac{1}{2} \times u' \times \mathrm{e}^u$ admet pour primitive $-\frac{1}{2} \times \mathrm{e}^u$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{\mathrm{e}^{x^2-1}}{2} + k$, où k est un réel.

2. La fonction f définie par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$ est définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$, comme quotient de la fonction exponentielle par la composée de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x + 1$ par la fonction carré, et dont le dénominateur $(\mathrm{e}^x + 1)^2$ ne s'annule pas sur I. Donc f est continue et admet des primitives sur I. Soit $u(x) = \mathrm{e}^x + 1$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in I$, $u'(x) = \mathrm{e}^x$. Ainsi $f = \frac{u'}{u^2}$ admet pour primitive $-\frac{1}{u}$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{1}{\mathrm{e}^x+1} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 68 :

Une primitive de $u' \times (v' \circ u)$ sur I est $v \circ u$.

1. La fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ est définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$ comme quotient d'une fonction affine par la composée de la fonction trinôme $x \mapsto x^2 + 1$ par la fonction racine carrée, et dont le dénominateur $\sqrt{x^2+1}$ ne s'annule pas sur I. Donc f est continue sur I et admet des primitives sur I. Soit $u(x) = x^2 + 1$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$. Ainsi $f = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$ admet pour primitive $\sqrt{u}$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions définies sur I par $x \mapsto \sqrt{x^2+1} + k$, où k est un réel.

2. La fonction f définie par $f(x) = -\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ est définie et dérivable sur I comme quotient d'une fonction trinôme par la composée de la fonction trinôme $x \mapsto x^3 + 1$ par la fonction racine carrée, et dont le dénominateur $\sqrt{x^3+1}$ ne s'annule pas sur I.

Donc f est continue et admet des primitives sur I. Soit $u(x)=x^3+1$. Alors $\mathcal{D}_{u'}=\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in I$, $u'(x)=3x^2$. Ainsi $f=-\frac{u'}{\sqrt{u}}$ admet pour primitive $-2\sqrt{u}$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions définies sur I par $x\mapsto -2\sqrt{x^3+1}+k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 69 :

Une primitive de $u'\times(v'\circ u)$ sur I est $v\circ u$. Soient $f(x)=3\mathrm{e}^{2x}$ et $u(x)=2x$. Alors $\mathcal{D}_{u'}=\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $u'(x)=2$. Donc $f=\frac{3}{2}u'\mathrm{e}^u$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions définies par $x\mapsto\frac{3}{2}\mathrm{e}^{u(x)}+c_1$, où$c_1$ est un réel, c'est-à-dire $x\mapsto\frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x}+c_1$ où c_1 est un réel.

Corrigé exercice 70 :

Une primitive de $u'\times(v'\circ u)$ sur I est $v\circ u$. Soient $f(x)=\frac{4x^5}{\sqrt{x^6+2}}$ et $u(x)=x^6+2$. Alors $\mathcal{D}_{u'}=\mathbb{R}$, comme fonction polynôme, et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $u(x)>0$ et $u'(x)=6x^5$. Donc $f=\frac{4}{6}\frac{u'}{\sqrt{u}}=\frac{2}{3}\frac{u'}{\sqrt{u}}$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions définies par $x\mapsto\frac{2}{3}\times2\sqrt{u(x)}+k$, avec k réel, c'est-à-dire $x\mapsto\frac{4}{3}\sqrt{x^6+2}+k$, où k est un réel. Ainsi, Guillaume a pu dériver, par exemple, la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\frac{4\sqrt{x^6+2}}{3}$.

Corrigé exercice 71 :

1. La fonction f définie par $f(x)=x^3-2x$ est une fonction polynôme définie et dérivable sur $I=\mathbb{R}$, donc f est continue et admettant des primitives sur I. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x\mapsto\frac{x^4}{3}-x^2+k$, où k est un réel. On détermine maintenant k tel que $F(0)=2\Leftrightarrow k=2$. Ainsi, F est définie sur I par $F(x)=\frac{x^4}{4}-x^2+2$.

2. La fonction f définie par $f(x)=-\frac{2}{x^2}+x-1$ est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $I=]0;+\infty[$, donc f est continue et admet des primitives sur I. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x\mapsto\frac{2}{x}+\frac{x^2}{2}-x+k$, où k est un réel. On détermine k tel que $F(1)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2+\frac{1}{2}-1+k=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=-1$. Ainsi, F est définie sur I par $F(x)=\frac{2}{x}+\frac{x^2}{2}-x-1$.

Corrigé exercice 72 :

1. La fonction f définie par $f(x)=-x^3+x^2-x+1$ est une fonction polynôme définie et dérivable sur $I=\mathbb{R}$, donc f est continue et admet des primitives sur I. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x\mapsto-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+k$, où k est un réel. On détermine k tel que $F(1)=\frac{1}{12}\Leftrightarrow-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1+k=\frac{1}{12}\Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}$. Ainsi,$F$ est définie sur I par $F(x)=-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}$.

2. La fonction f définie par $f(x)=-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-x+\frac{1}{2}$ est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $I=]-\infty;0[$, donc f est continue et admet des primitives sur I. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x\mapsto\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+k$, où k est un réel. On détermine maintenant k tel que $F(-1)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+k=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=-1$. Ainsi,$F$ est définie sur I par $F(x)=\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-1$.

Corrigé exercice 73 :

1. La fonction $x \mapsto 1$ admet pour primitive $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ admet pour primitive $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$. Donc les primitives de la fonction $1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$sur $I =]0; +\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto x - \sqrt{x} + k$, où k est un réel. On détermine k tel que $F(2) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{2} + k = -\sqrt{2} \Leftrightarrow k = -2$. Ainsi, F est définie sur I par $F(x) = x - \sqrt{x} - 2$.

2. Les primitives de $x \mapsto 3\mathrm{e}^x$ sur $I = \mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto 3\mathrm{e}^x + k$, où k est un réel. On détermine k tel que $F(1) = \mathrm{e} \Leftrightarrow 3\mathrm{e}^1 + k = \mathrm{e} \Leftrightarrow k = -2\mathrm{e}$. Ainsi, F est définie sur I par $F(x) = 3\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}$.

Corrigé exercice 74 :

Une primitive de $u' \times (v' \circ u)$ sur I est $v \circ u$.

1. La fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ est définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$ comme somme de la composée de la fonction affine $x \mapsto 2x$ par la fonction exponentielle, et de la composée de la fonction affine $x \mapsto -\frac{x}{2}$ par la fonction $x \mapsto 2\mathrm{e}^x$, toutes définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc f est continue et admet des primitives sur I. Soient $u(x) = 2x$ et $v(x) = -\frac{x}{2}$. On a $\mathcal{D}_{u'} = I = \mathcal{D}_{v'}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -\frac{1}{2}$. Alors $f = \frac{1}{2} \times u'\mathrm{e}^u - 4 \times v'\mathrm{e}^v$ admet pour primitive $\frac{1}{2}\mathrm{e}^u - 4\mathrm{e}^v$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - 4\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + k$, où k est un réel. On détermine maintenant k tel que $F(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^0}{2} - 4\mathrm{e}^0 + k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 4$. Ainsi, F est définie sur I par $F(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - 4\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + 4$.

2. La fonction f définie par $f(x) = 2x\left(x^2+1\right)^3$ est définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme. Donc f est continue et admet des primitives sur I. Soit $u(x) = x^2 + 1$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = I$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$. Donc $f = u'u^3$ admet pour primitive $\frac{u^4}{4}$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{\left(x^2+1\right)^4}{4} + k$, où k est un réel. On détermine k tel que $F(0) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + k = \frac{3}{4} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$. Ainsi, F est définie sur I par $F(x) = \frac{\left(x^2+1\right)^4}{4} + \frac{1}{2}$.

Corrigé exercice 75 :

Une primitive de $u' \times (v' \circ u)$ sur I est $v \circ u$.

1. La fonction f définie par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^3}$ est définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$ en tant que quotient de la composée de $x \mapsto 2x$ par la fonction exponentielle, par la composée de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + 1$ par la fonction cube, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Soit $u(x) = \mathrm{e}^{2x} + 1$. On a $\mathcal{D}_{u'} = I$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$. Donc $f = \frac{1}{2}\frac{u'}{u^3}$ admet pour primitive $-\frac{1}{4u^2}$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{4\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2} + k$, où k est un réel. On détermine k tel que $F(0) = -\frac{1}{16} \Leftrightarrow -\frac{1}{4\left(\mathrm{e}^{0}+1\right)^2} + k = -\frac{1}{16} \Leftrightarrow -\frac{1}{16} + k = -\frac{1}{16} \Leftrightarrow k = 0$. Ainsi, F est définie sur I par $F(x) = -\frac{1}{4\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}$.

2. La fonction f définie par $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$ est définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$ en tant que quotient de la fonction affine $x \mapsto 2x$ par la composée de la fonction trinôme

$x \mapsto 2x^2+1$, strictement positive par la fonction racine carrée, dont le dénominateur $\sqrt{2x^2+1}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Soit $u(x) = 2x^2+1$. On a alors $\mathcal{D}_{u'} = I$ et, pour tout $x \in I$, $u'(x) = 4x$. Donc $f = \frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$ admet pour primitive $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{u} = \sqrt{u}$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions $x \mapsto \sqrt{2x^2+1} + k$, où k est un réel. On détermine k tel que $F(2) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2 \times 2^2 + 1} + k = 2 \Leftrightarrow 3 + k = 2 \Leftrightarrow k = -1$. Ainsi, F est définie sur I par $F(x) = \sqrt{2x^2+1} - 1$.

Corrigé exercice 76 :

Le signe de f donne les variations de g donc $g' = f$. Autrement dit : g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 77 :

Le signe de g donne les variations de f donc $f' = g$. Autrement dit : f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 78 :

Soit F une primitive de f sur I alors on a $F' = f$. Par lecture graphique, $f(x)$ est positive sur $]-3; -0,5[$ et négative sur $]-0,5; 2[$. On en déduit que F est strictement croissante sur $]-3; -0,5[$ et strictement décroissante sur $]-0,5; 2[$.

Corrigé exercice 79 :

1. Faux car les variations de f dépendent du signe de sa dérivée f' et non du signe d'une de ses primitives. Prenons un contre-exemple : Soit la fonction F définie sur $[0; 1]$ par $F(x) = -x^2 + 1$. Alors F est positive et dérivable sur $[0; 1]$ et, pour tout $x \in [0; 1]$, $F'(x) = -2x$ qui est strictement décroissante sur cet intervalle.

2. Vrai car si F est décroissante et dérivable sur I alors, pour tout $x \in I$, $F'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \leqslant 0$, puisque $F' = f$.

3. Faux car f est une primitive de F sur I si, et seulement si, f est dérivable sur I et $f' = F$.Ici, c'est F qui est une primitive de f.

4. Vrai car, par définition, F est une primitive de f sur I si, et seulement si, F est dérivable sur I et $F' = f$.

5. Vrai car $(F+k)' = F'$

Corrigé exercice 80 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} = \frac{(a+b)x^2 - 2ax + a}{x^2(x-1)^2}$ donc $\begin{cases} a+b=0 \\ -2a = 2 \\ a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}$.

2. f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur I, car le dénominateur ne s'annule qu'en 0 et en 1, donc f est continue et admet des primitives sur I. On sait d'une part que $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ a pour primitive $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur I. D'autre part, posons pour

tout $x \in I$, $v(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ et $u(x) = x - 1$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in I$, $u'(x) = 1$. Et donc $v = \frac{u'}{u^2}$ admet pour primitive $-\frac{1}{u}$. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 81 :

1. Pour tout $x \in I$, $a + \frac{b}{(x-1)^2} = \frac{ax^2-2ax+a+b}{(x-1)^2}$ donc $\begin{cases} a = 1 \\ -2a = -2 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$.

2. f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur I, car son dénominateur ne s'annule qu'en 1, donc f est continue et admet des primitives sur I. Or $x \mapsto 1$ a pour primitive $x \mapsto x$ sur I. D'autre part, posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ et $u(x) = x - 1$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 1$ donc $v = -\frac{u'}{u^2}$ admet pour primitive $\frac{1}{u}$. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto x + \frac{1}{x-1} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 82 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax + b + \frac{c}{(x+2)^2} = \frac{ax^3+(4a+b)x^2+(4a+4b)x+4b+c}{(x+2)^2}$.

   Donc $\begin{cases} a = 2 \\ 4a+b=9 \\ 4a+4b=12 \\ 4b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 9-4a=1 \\ 4\times 2+4\times 1=12 \\ c=2-4b=-2 \end{cases}$.

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1 - \frac{2}{(x+2)^2}$.

2. f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur I, car son dénominateur ne s'annule qu'en −2), donc f est continue et admet des primitives sur I. Or $x \mapsto 2x+1$ a pour primitive $x \mapsto x^2 + x$. D'autre part, posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(x) = -\frac{2}{(x+2)^2}$ et $u(x) = x+2$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 1$ donc $v = -2\frac{u'}{u^2}$ admet pour primitive $\frac{2}{u}$. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto x^2 + x + \frac{2}{x+2} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 83 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$ donc $(x^2-4)^2 = (x-2)^2(x+2)^2$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x+2)^2} = \frac{(a+b)x^2+(4a-4b)x+4a+4b}{(x^2-4)^2}$ donc $\begin{cases} a+b=0 \\ 4a-4b=1 \\ 4a+4b=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a = -b \\ -4b-4b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = -\frac{1}{8} \end{cases}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{8(x-2)^2} - \frac{1}{8(x+2)^2}$.

3. f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur I, car le dénominateur ne s'annule qu'en -2 et en 2, donc f est continue et admet des primitives sur I. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(x) = \frac{1}{8(x-2)^2} = \frac{1}{8} \times (x-2)^{-2}$ et $u(x) = x - 2$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 1$ donc $v = \frac{1}{8}\frac{u'}{u^2}$ admet pour primitive $-\frac{1}{8u}$. On raisonne de même pour déterminer que $x \mapsto \frac{1}{8(x+2)}$ est une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{8(x+2)^2}$. Par conséquent, f admet pour primitive $x \mapsto -\frac{1}{8(x-2)} + \frac{1}{8(x+2)} = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}\right) = -\frac{1}{2(x^2-4)}$ sur I. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{1}{2(x^2-4)} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 84 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x-1)(x+1)$ donc $(x^2-1)^3 = (x-1)^3(x+1)^3$.

2. Pour tout $x \in I$, $\frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x+1)^3} = \frac{(a+b)x^3+(3a-3b)x^2+(3a+3b)x+3a-3b}{(x^2-1)^3}$ donc

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 3a-3b=0 \\ 3a+3b=3 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{1}{2(x+1)^3}$.

3. f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur I, car son dénominateur ne s'annule qu'en –1 et en 1, donc f est continue et admet des primitives sur I. Posons, pour tout $x \in I$, $v(x) = \frac{1}{2(x-1)^3}$ et $u(x) = x - 1$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 1$ donc $v = \frac{1}{2}\frac{u'}{u^3}$ a pour primitive $-\frac{1}{4u^2}$. On raisonne de même pour déterminer que $x \mapsto -\frac{1}{4(x+1)^2}$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2(x+1)^3}$. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 85 :

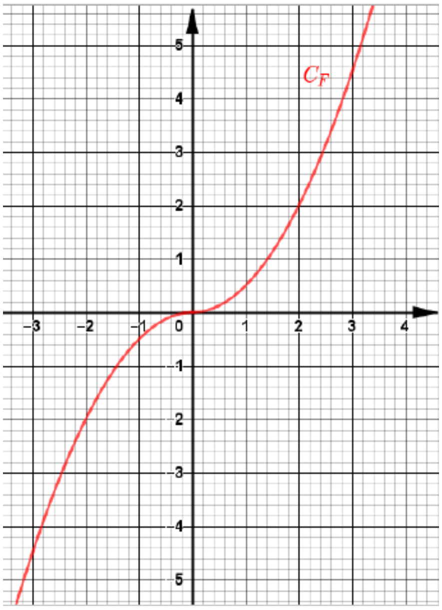
1. Soit $x \in I$. $\frac{1}{2}\left((x+1)^2 + (x-1)^2\right) = \frac{1}{2}(x^2+2x+1+x^2-2x+1) = \frac{1}{2}(2x^2+2) = x^2+1$.

2. D'après la question 1, on a, pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{(x+1)^2}{(x^2-1)^2} + \frac{(x-1)^2}{(x^2-1)^2}\right)$. Or $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ donc $(x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$. On a ainsi, pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right)$. Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) + k$, où k est un réel.

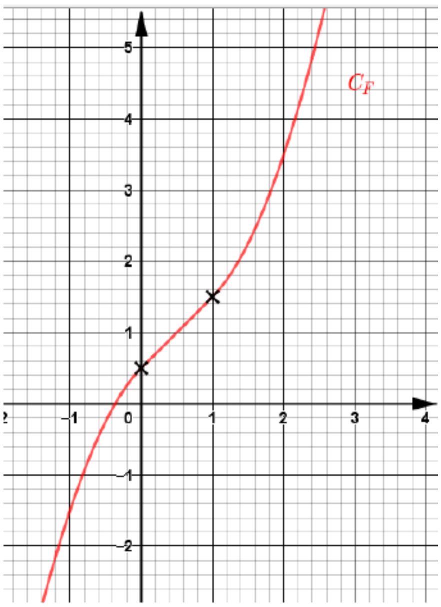
Corrigé exercice 86 :

1. L'équation s'écrit $y' = x$ sur $[0;+\infty[$ et $y' = -x$ sur $]-\infty;0]$. Les solutions de $y' = x$ sur $I = [0;+\infty[$ sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{x^2}{2} + k$, où k est un réel. Et les solutions de $y' = -x$ sur $J =]-\infty;0[$ sont les fonctions définies sur J par $x \mapsto -\frac{x^2}{2} + k'$, où k' est un réel. La condition initiale $F(0) = 0$ impose $k = k' = 0$.

On a donc $F(x) = \frac{x^2}{2}$ si $x \geqslant 0$ et $F(x) = -\frac{x^2}{2}$ si $x \leqslant 0$. La courbe représentative de cette fonction est la suivante.



2. Sur $I_1 =]-\infty; 0]$, l'équation s'écrit $y' = -2x + 1$ a pour solutions les fonctions définies sur I_1 par $x \mapsto -x^2 + x + k_1$, où k_1 est un réel ; Sur $I_2 = [0; 1]$, l'équation s'écrit $y' = 1$ a pour solutions les fonctions définies sur I_2 par $x \mapsto x + k_2$, où k_2 est un réel ; Sur $I_3 = [1; +\infty[$, l'équation s'écrit $y' = 2x - 1$ a pour solutions les fonctions définies sur I_3 par $x \mapsto x^2 - x + k_3$, où k_3 est un réel. On cherche F telle que $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. On a donc $\frac{1}{2} + k_2 = 1 \Leftrightarrow k_2 = \frac{1}{2}$. Et donc $F(0) = 0 + k_1 = 0 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow k_1 = \frac{1}{2}$, et $F(1) = 1^2 - 1 + k_3 = 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow k_3 = \frac{3}{2}$. D'où la fonction Fcherchée est définie par $F(x) = -x^2 + x + \frac{1}{2}$ si $x \leqslant 0$, $F(x) = x + \frac{1}{2}$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $F(x) = x^2 - x + \frac{3}{2}$ si $x \geqslant 1$. La courbe représentative de cette fonction est la suivante.



Corrigé exercice 87 :

1. Pour tout $x \neq 0$, l'équation s'écrit $y' = -\frac{1}{x^2}$ de solutions $x \mapsto \frac{1}{x} + k$, où k est un réel.
2. Pour tout $x > 0$, l'équation s'écrit $y' = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ de solutions $x \mapsto -2\sqrt{x} + k$, où k est un réel.
3. Pour tout $x \neq 0$, l'équation s'écrit $y' = 3\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)$ de solutions $x \mapsto -\frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} + k$, où k est un réel.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation s'écrit $y' = -\mathrm{e}^{-x}$ de solutions $x \mapsto \mathrm{e}^{-x} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 88 :

1. Si on pose $z = y'$, on a alors $z' = y''$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation $y'' = -4x+3$ est équivalente à l'équation $z' = -4x + 3$.
2. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $z' = -4x + 3$ sont les fonctions définies par $x \mapsto -2x^2 + 3x + k_1$, où k_1 est un réel.
3. Enfin, on résout l'équation $y' = -2x^2+3x+k_1$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation sont les fonctions définies par $x \mapsto -\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + k_1x + k_2$, où k_1 et k_2 sont des réels.

Corrigé exercice 89 :

1. On pose $z = y'$, on a alors $z' = y''$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation $y'' = 2x - 1$ est équivalente à l'équation $z' = 2x-1$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $z' = 2x-1$ sont les fonctions définies par $x \mapsto x^2 - x + k_1$, où k_1 est un réel. Enfin, on résout l'équation $y' = x^2 - x + k_1$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation sont les fonctions définies par $x \mapsto \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + k_1x + k_2$, où k_1 et k_2 sont des réels.
2. En posant $z = y'$, on a que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation $y'' = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ est équivalente à $z' = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ de solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions définies par $x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + k_1$, où k_1 est un réel. On résout alors $y' = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + k_1$, où k_1 est un réel, et on obtient que les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies par $x \mapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + k_1x + k_2$, où k_1 et k_2 sont des réels.
3. Pour tout $x \neq 0$, $x^3y'' = -2 \Leftrightarrow y'' = -\frac{2}{x^3} \Leftrightarrow z' = -\frac{2}{x^3}$, en posant $z = y'$. Les solutions, pour tout $x \neq 0$, de cette équation sont les fonctions définies par $x \mapsto \frac{1}{x^2} + k_1$, où k_1 est un réel. On résout alors l'équation $y' = \frac{1}{x^2} + k_1$, où k_1 est un réel. Les solutions de cette équation pour $x \neq 0$ sont les fonctions définies par $x \mapsto -\frac{1}{x} + k_1x + k_2$, où k_1 et k_2 sont des réels.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{2x}y'' = 4 \Leftrightarrow y'' = 4\mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow z' = 4\mathrm{e}^{-2x}$, en posant $z = y'$. Les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies par $x \mapsto -2\mathrm{e}^{-2x} + k_1$, où k_1 est un réel. On résout alors l'équation $y' = -2\mathrm{e}^{-2x} + k_1$ où k_1 est un réel. En conclusion, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont les fonctions définies par $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x} + k_1x + k_2$, où k_1 et k_2 sont des réels.

Corrigé exercice 90 :

1. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sqrt{x-1}$. Alors f est dérivable sur I comme produit et composée de fonctions de références, et on a, pour tout $x \in I$, $f'(x) = (3ax^2 + 2bx + c)\sqrt{x-1} + (ax^3 + bx^2 + cx + d) \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ $= \frac{7ax^3+(5b-6a)x^2+(3c-4b)x+d-2c}{2\sqrt{x-1}}$. Ainsi f est solution de (E) si, et seulement si, $f'(x) = \frac{x^3+x^2+x+1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x^3+2x^2+2x+2}{2\sqrt{x-1}}$. D'où $\begin{cases} 7a = 2 \\ 5b - 6a = 2 \\ 3c - 4b = 2 \\ d - 2c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{7} \\ b = \frac{26}{35} \\ c = \frac{58}{35} \\ d = \frac{186}{35} \end{cases}$. Donc la fonction f définie sur I par $f(x) = \left(\frac{2}{7}x^3 + \frac{26}{35}x^2 + \frac{58}{35}x + \frac{186}{35}\right)\sqrt{x-1}$ est solution de l'équation (E).

2. Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto f(x) + k$, où k est un réel.

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 91 :

Faux car $2y' + 3y \Leftrightarrow y' = -\frac{3}{2}y$.

Corrigé exercice 92 :

Faux sauf si $b = 0$. Un contre-exemple : l'équation $y' = y + 1$ n'admet pas pour solution la fonction $x \mapsto 0$.

Corrigé exercice 93 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,$f'(x) = 1$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(x) = 1 + x$. Donc f est bien solution de $y' + y = x + 1$ et l'affirmation est vraie.

Corrigé exercice 94 :

Les solutions de l'équation $y' = ay$, où a est un réel non nul, sont définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle. Ainsi :

1. $3y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{2}{3}y$, on est donc dans le cas $a = -\frac{2}{3}$. Les solutions de $3y' + 2y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x}$, où C est un réel.
2. $\frac{5}{3}y' - y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{3}{5}y$, on est donc dans le cas $a = \frac{3}{5}$. Les solutions de $\frac{5}{3}y' - y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{3}{5}x}$, où C est un réel.
3. $4y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{3}{4}y$, on est donc dans le cas $a = -\frac{3}{4}$. Les solutions de $4y' + 3y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}x}$, où C est un réel.
4. $\sqrt{2}y' - 2y = 0 \Leftrightarrow y' = \sqrt{2}y$, on est donc dans le cas $a = \sqrt{2}$. Les solutions de $\sqrt{2}y' - 2y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 95 :

Les solutions de l'équation $y' = ay$, avec a réel non nul, sont définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, avec C constante réelle. Ainsi :

1. $2y' = 3y \Leftrightarrow y' = \frac{3}{2}y$, on est donc dans le cas $a = \frac{3}{2}$. Les solutions de $2y' = 3y$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}$, où C est un réel.
2. $-y' = \frac{3}{2}y \Leftrightarrow y' = -\frac{3}{2}y$, on est donc dans le cas $a = -\frac{3}{2}$. Les solutions de $-y' = \frac{3}{2}y$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}$, où C est un réel.
3. $-2y' = \frac{1}{3}y \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{6}y$, on est donc dans le cas $a = -\frac{1}{6}$. Les solutions de $-2y' = \frac{1}{3}y$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}x}$, où C est un réel.
4. $5y' = \sqrt{5}y \Leftrightarrow y' = \frac{\sqrt{5}}{5}y$, on est donc dans le cas $a = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Les solutions de $5y' = \sqrt{5}y$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{5}}{5}x}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 96 :

Les solutions de l'équation $y' = ay$, où a est un réel non nul, sont définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle. Ainsi :

1. $y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' = 3y$, on est donc dans le cas $a = 3$. Les solutions de $y' - 3y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{3x}$, où C est un réel. On détermine maintenant C tel que $y(0) = 2 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^0 = 2 \Leftrightarrow C = 2$. Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = 2\mathrm{e}^{3x}$.

2. $y' + 4y = 0 \Leftrightarrow y' = -4y$, on est donc dans le cas $a = -4$. Les solutions de $y' + 4y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-4x}$, où C est un réel. On détermine C tel que $y(0) = -4 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^0 = -4 \Leftrightarrow C = -4$. Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = -4\mathrm{e}^{-4x}$.

Corrigé exercice 97 :

Les solutions de l'équation $y' = ay$, où a est un réel non nul, sont définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle. Ainsi :

1. $2y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{3}{2}y$, on est donc dans le cas $a = -\frac{3}{2}$. Les solutions de $2y' + 3y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}$, où C est un réel. On détermine C tel que $y(2) = 1 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\times 2} = 1 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-3} = 1 \Leftrightarrow C = \mathrm{e}^3$. Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} = \mathrm{e}^{3-\frac{3}{2}x}$.

2. $5y' - 2y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{2}{5}y$, on est donc dans le cas $a = \frac{2}{5}$. Les solutions de $5y' - 2y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{2}{5}x}$, où C est un réel. On détermine C tel que $y(5) = \mathrm{e} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\times 5} = \mathrm{e} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^2 = \mathrm{e} \Leftrightarrow C = \mathrm{e}^{-1}$. Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}^{\frac{2}{5}x} = \mathrm{e}^{\frac{2}{5}x-1}$.

Corrigé exercice 98 :

Les solutions de l'équation $y' = ay$, où a est un réel non nul, sont définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle. Ainsi :

1. $\sqrt{3}y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{3}}y \Leftrightarrow y' = -\frac{\sqrt{3}}{3}y$, on est donc dans le cas $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Les solutions de $\sqrt{3}y' + y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x}$, où C est un réel. On détermine C tel que $y\left(\sqrt{3}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}^3} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}} = \frac{1}{\mathrm{e}^3} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}^3} \Leftrightarrow C = \mathrm{e}^{-2}$. Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \mathrm{e}^{-2} \times \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x} = \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}x}{3}-2}$.

2. $y' - \pi^2 y = 0 \Leftrightarrow y' = \pi^2 y$, on est donc dans le cas $a = \pi^2$. Les solutions de $y' - \pi^2 y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\pi^2 x}$, où C est un réel. On détermine C tel que $y\left(\frac{1}{\pi}\right) = \pi \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{\pi^2\times\frac{1}{\pi}} = \pi \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{\pi} = \pi \Leftrightarrow C = \pi\mathrm{e}^{-\pi}$. Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \pi\mathrm{e}^{-\pi} \times \mathrm{e}^{\pi^2 x} = \pi\mathrm{e}^{\pi^2 x-\pi}$.

Corrigé exercice 99 :

Les solutions de l'équation $y' = ay$, où a est un réel non nul, sont définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle. Ainsi :

1. $\sqrt{2}y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -\sqrt{2}y$, on est donc dans le cas $a = -\sqrt{2}$. Les solutions de $\sqrt{2}y' + 2y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x}$, où C est un réel. On détermine C tel que $y\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-2} = \frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow C = \mathrm{e}$. Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^{-\sqrt{2}x} = \mathrm{e}^{1-\sqrt{2}x}$.

2. $2\pi y' - y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2\pi}y$, on est donc dans le cas $a = \frac{1}{2\pi}$. Les solutions de $2\pi y' - y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{x}{2\pi}}$, où C est un réel. On détermine C tel que $y(\pi) = -2\mathrm{e} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2\pi}} = -2\mathrm{e} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = -2\mathrm{e} \Leftrightarrow C = -2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$. Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = -2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \times \mathrm{e}^{\frac{x}{2\pi}} = -2\mathrm{e}^{\frac{x}{2\pi}+\frac{1}{2}} = -2\mathrm{e}^{\frac{x+\pi}{2\pi}}$.

Corrigé exercice 100 :

Les solutions de $y' = 2y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{2x}$, où C est un réel. Pour chaque courbe, on lit l'ordonnée du point d'abscisse 0 qui correspond donc à $y(0) = C$. Pour $\mathcal{C}_1$, on a $y(0) = 2$ donc $\mathcal{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction définie par $y_1(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$; Pour $\mathcal{C}_2$, on a $y(0) = 1$ donc $\mathcal{C}_2$ est la courbe représentative de la fonction définie par $y_2(x) = \mathrm{e}^{2x}$; Pour $\mathcal{C}_3$, on a $y(0) = 0$ donc $\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction définie par $y_3(x) = 0$; Pour $\mathcal{C}_4$, on a $y(0) = -\frac{1}{2}$ donc $\mathcal{C}_4$ est la courbe représentative de la fonction définie par $y_4(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$; Pour $\mathcal{C}_5$, on a $y(0) = -1$ donc $\mathcal{C}_5$ est la courbe représentative de la fonction définie par $y_5(x) = -\mathrm{e}^{2x} = -y_2(x)$.

Corrigé exercice 101 :

Les solutions de l'équation $y' = ay$, où a est un réel non nul, sont définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle. Ainsi :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$, on est donc dans le cas $a = \frac{1}{2}$. Ainsi f est une solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}$, on est donc dans le cas $a = \sqrt{2}$. Ainsi f est une solution de l'équation différentielle $y' = \sqrt{2}y$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2\mathrm{e}^{3-2x} = 2\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{-2x}$, on est donc dans le cas $a = -2$. Ainsi f est une solution de l'équation différentielle $y' = -2y$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \pi\mathrm{e}^{\pi+x} = \pi\mathrm{e}^{\pi} \times \mathrm{e}^x$, on est donc dans le cas $a = 1$. Ainsi f est une solution de l'équation différentielle $y' = y$.

Corrigé exercice 102 :

Faux car $y' - 4y \Leftrightarrow y' = 4y$. Cette équation admet pour solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{4x}$, où C est un réel. La fonction F solution de $y' - 4y = 0$ qui prend la valeur x_0 en y_0 vérifie donc $C\mathrm{e}^{4x_0} = y_0 \Leftrightarrow C = \frac{y_0}{\mathrm{e}^{4x_0}} = y_0\mathrm{e}^{-4x_0}$ d'où $F(x) = y_0\mathrm{e}^{-4x_0} \times \mathrm{e}^{4x} = y_0\mathrm{e}^{4(x-x_0)} \neq y_0 + \mathrm{e}^{4(x-x_0)}$.

Corrigé exercice 103 :

Vrai. En effet, si pour tout réel x, $y(x) = 0$ alors, pour tout réel x, $y'(x) = 0$ et on a bien $y' = ay$.

Corrigé exercice 104 :

Faux : la limite des solutions $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est un réel non nul et $a > 0$, dépend du signe de C. En effet, par limite d'une composée, en posant $t = ax$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{ax} = \lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{t} = +\infty$, car $a > 0$. Donc, par limite d'un produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} C\mathrm{e}^{ax} = +\infty$ si $C > 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} C\mathrm{e}^{ax} = -\infty$ si $C < 0$.

Corrigé exercice 105 :

Prenons, par exemple, $C = 0$. On obtient alors la fonction $x \mapsto \frac{2}{3}$, qui n'est pas solution de l'équation $3y' - 2y = 1$ puisque $3 \times 0 - 2 \times \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} \neq 1$. Donc cette affirmation est fausse.

Corrigé exercice 106 :

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

1. $3y' - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{2}{3}y - 1$, on est donc dans le cas $a = \frac{2}{3}$ et $b = -1$. On en déduit que les solutions de $3y' - 2y + 3 = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{2x}{3}} + \frac{3}{2}$, où C est un réel.

2. $y' + y = 2y' - y + 1 \Leftrightarrow y' = 2y - 1$, on est donc dans le cas $a = 2$ et $b = -1$. On en déduit que les solutions de $y' + y = 2y' - y + 1$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 107 :

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

1. $2y' - \sqrt{2}y = 3y' - 2\sqrt{2}y + \sqrt{2} \Leftrightarrow y' = \sqrt{2}y - \sqrt{2}$, on est donc dans le cas $a = \sqrt{2}$ et $b = -\sqrt{2}$. On en déduit que les solutions de $2y' - \sqrt{2}y = 3y' - 2\sqrt{2}y + \sqrt{2}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\sqrt{2}x} + 1$, où C est un réel.

2. $4y' + \sqrt{3}y = 5y' + 3\sqrt{3}y - \sqrt{3} \Leftrightarrow y' = -2\sqrt{3}y + \sqrt{3}$, on est donc dans le cas $a = -2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3}$. On en déduit que les solutions de $4y' + \sqrt{3}y = 5y' + 3\sqrt{3}y - \sqrt{3}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-2\sqrt{3}x} + \frac{1}{2}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 108 :

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

1. $2y' + 2\pi y = y' - \pi y - \pi \Leftrightarrow y' = -3\pi y - \pi$, on est donc dans le cas $a = -3\pi$ et $b = -\pi$. On en déduit que les solutions de $2y' + 2\pi y = y' - \pi y - \pi$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-3\pi x} - \frac{1}{3}$, où C est un réel.

2. $2\mathrm{e}y' + y = \mathrm{e}y' - y + \mathrm{e}^2 \Leftrightarrow y' = -\frac{2}{\mathrm{e}}y + \mathrm{e}$, on est donc dans le cas $a = -\frac{2}{\mathrm{e}}$ et $b = \mathrm{e}$. On en déduit que les solutions de $2\mathrm{e}y' + y = \mathrm{e}y' - y + \mathrm{e}^2$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{2}{\mathrm{e}}x} + \frac{\mathrm{e}^2}{2}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 109 :

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

1. $y' - 2y = 1 \Leftrightarrow y' = 2y + 1$, on est donc dans le cas $a = 2$ et $b = 1$. On en déduit que les solutions de $y' - 2y = 1$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}$, où C est un réel. On détermine C tel que $F(0) = 2 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^0 - \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow C = \frac{5}{2}$. Ainsi, la solution de l'équation différentielle respectant la condition initiale est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{5}{2}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}$.

2. $2y' - y = 3y' + y - 1 \Leftrightarrow y' = -2y + 1$, on est donc dans le cas $a = -2$ et $b = 1$. On en déduit que les solutions de $2y' - y = 3y' + y - 1$ sont les fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}$, où C est un réel. On détermine C tel que $F(0) = 1 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^0 + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$. Ainsi, la solution de l'équation différentielle respectant la condition initiale est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}$.

Corrigé exercice 110 :

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

1. $3y' - 3y = 2y' + 2y - 5 \Leftrightarrow y' = 5y - 5$, on est donc dans le cas $a = 5$ et $b = -5$. On en déduit que les solutions de $3y' - 3y = 2y' + 2y - 5$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{5x} + 1$, où C est un réel. On détermine C tel que $F\left(\frac{1}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{5\times\frac{1}{5}} + 1 = 0 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^1 + 1 = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{\mathrm{e}} = -\mathrm{e}^{-1}$. Ainsi, la solution de l'équation différentielle respectant la condition initiale est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -\mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}^{5x} + 1 = -\mathrm{e}^{5x-1} + 1$.

2. $y - y' = 3y' + 2y + 4 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{4}y - 1$, on est donc dans le cas $a = -\frac{1}{4}$ et $b = -1$. On en déduit que les solutions de $y - y' = 3y' + 2y + 4$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} - 4$, où C est un réel. On détermine C tel que $F(4) = 1 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-\frac{4}{4}} - 4 = 1 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-1} = 5 \Leftrightarrow C = 5\mathrm{e}^1$. Ainsi, la solution de l'équation différentielle respectant la condition initiale est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 5\mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} - 4 = 5\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}+1} - 4$.

Corrigé exercice 111 :

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

1. $\pi y' - 2y = 2y - \pi y' + \pi \Leftrightarrow y' = \frac{2}{\pi}y + \frac{1}{2}$, on est donc dans le cas $a = \frac{2}{\pi}$ et $b = \frac{1}{2}$. On en déduit que les solutions de $\pi y' - 2y = 2y - \pi y' + \pi$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{2x}{\pi}} - \frac{\pi}{4}$, où C est un réel. On détermine C tel que $F(\pi) = \pi \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\pi}} - \frac{\pi}{4} = \pi \Leftrightarrow C\mathrm{e}^2 = \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow C = \frac{5\pi}{4}\mathrm{e}^{-2}$. Ainsi, la solution de l'équation différentielle respectant la condition initiale est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{5\pi}{4}\mathrm{e}^{-2} \times \mathrm{e}^{\frac{2x}{\pi}} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}\mathrm{e}^{\frac{2x}{\pi}-2} - \frac{\pi}{4}$.
2. $\mathrm{e}y' + 2y = y - 2\mathrm{e}y' + \mathrm{e} \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{3\mathrm{e}}y + \frac{1}{3}$, on est donc dans le cas $a = -\frac{1}{3\mathrm{e}}$ et $b = \frac{1}{3}$. On en déduit que les solutions de $\mathrm{e}y' + 2y = y - 2\mathrm{e}y' + \mathrm{e}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{x}{3\mathrm{e}}} + \mathrm{e}$, où C est un réel. On détermine C tel que $F(3\mathrm{e}) = 2\mathrm{e} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-\frac{3\mathrm{e}}{3\mathrm{e}}} + \mathrm{e} = 2\mathrm{e} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e} \Leftrightarrow C = \mathrm{e}^2$. Ainsi, la solution de l'équation différentielle respectant la condition initiale est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{-\frac{x}{3\mathrm{e}}} + \mathrm{e} = \mathrm{e}^{-\frac{x}{3\mathrm{e}}+2} + \mathrm{e}$.

Corrigé exercice 112 :

Vrai. En effet, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{3}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2 \times 3\mathrm{e}^{3x} = 6\mathrm{e}^{3x}$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3f(x) + 1 = 3\left(2\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{3}\right) + 1 = 6\mathrm{e}^{3x} = f'(x)$. Donc f est bien solution de l'équation $y' = 3y + 1$.

Corrigé exercice 113 :

Faux car si F est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = y_0\mathrm{e}^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$ alors $F(x_0) = y_0\mathrm{e}^{a(x_0-x_0)} - \frac{b}{a} = y_0 - \frac{b}{a} \neq y_0$.

Corrigé exercice 114 :

Vrai. En effet, $y' + y = 1 \Leftrightarrow y' = -y + 1$. On est donc dans le cas d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -1$ et $b = 1$. Donc les solutions de $y' + y = 1$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x} + 1$ où C est un réel. La solution F qui prend la valeur 2 en 0 vérifie donc $C + 1 = 2 \Leftrightarrow C = 1$ et est donc définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $F(x) = \mathrm{e}^{-x} + 1$. Enfin, par limite d'une composée, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^t = +\infty$ donc, par limite d'une somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = +\infty$.

Corrigé exercice 115 :

Les solutions d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + f$ s'obtiennent en additionnant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène associée $y' = ay$, c'est-à-dire aux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle.

1. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = mx + p$, où m et p sont deux réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ car la fonction φ est affine. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = m$. Ainsi φ est solution de $2y' + y = x + 1$ si, et seulement si,$2\varphi' + \varphi = x + 1 \Leftrightarrow 2m + mx + p = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ 2m + p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ p = 1 - 2m = -1 \end{cases}$.
   Ainsi, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x - 1$ est une solution particulière de l'équation $2y' + y = x + 1$. D'autre part, comme l'équation homogène associée

$2y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2}y$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, où C est un réel, alors les solutions de l'équation $2y' + y = x + 1$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + x - 1$, où C est un réel.

2. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = mx + p$, où m et p sont deux réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ car la fonction φ est affine. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = m$. Ainsi φ est solution de $y' + 3y = 2x - 1$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Leftrightarrow m + 3mx + 3p = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = 2 \\ m + 3p = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ p = \frac{-1-m}{3} = -\frac{5}{9} \end{cases}$.
Ainsi, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{2}{3}x - \frac{5}{9}$ est une solution particulière de l'équation $y' + 3y = 2x - 1$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' = -3y$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-3x}$, où C est un réel, alors les solutions de l'équation $y' + 3y = 2x - 1$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-3x} + \frac{2}{3}x - \frac{5}{9}$, où C est un réel.

3. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ car la fonction φ est une fonction trinôme. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 2ax + b$. Ainsi φ est solution de l'équation $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) - 3\varphi(x) = -3x^2 - x - 2$ $\Leftrightarrow 2ax + b - 3ax^2 - 3bx - 3c = -3x^2 - x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = -3 \\ 2a - 3b = -1 \\ b - 3c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$.
Ainsi, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x^2 + x + 1$ est une solution particulière de l'équation $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' = 3y$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{3x}$, où C est un réel, alors les solutions de l'équation $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{3x} + x^2 + x + 1$, où C est un réel.

4. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ car la fonction φ est une fonction trinôme. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 2ax + b$. Ainsi φ est solution de l'équation $2y' - 3y = 3x^2 - x - 2$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\varphi'(x) - 3\varphi(x) = 3x^2 - x - 2$ $\Leftrightarrow 4ax + b - 3ax^2 - 3bx - 3c = 3x^2 - x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = 3 \\ 4a - 3b = -1 \\ 2b - 3c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$.
Ainsi, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = -x^2 - x$ est une solution particulière de l'équation $2y' - 3y = 3x^2 - x - 2$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $2y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{3}{2}y$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{3x}{2}}$, où C est un réel, alors les solutions de l'équation $2y' - 3y = 3x^2 - x - 2$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{3x}{2}} - x^2 - x$, où C est un réel.

Corrigé exercice 116 :

Les solutions d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + f$ s'obtiennent en additionnant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène associée $y' = ay$, c'est-à-dire aux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle.

1. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (mx+p)\mathrm{e}^{-2x}$, où m et p sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ comme produit d'une fonction affine par la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = m\mathrm{e}^{-2x} - 2(mx+p)\mathrm{e}^{-2x} = (-2mx+m-2p)\,\mathrm{e}^{-2x}$. Ainsi φ est solution de l'équation $y' + 3y = (2+2x)\mathrm{e}^{-2x}$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) + 3\varphi(x) = (2+2x)\mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow (-2mx+m-2p+3mx+3p)\,\mathrm{e}^{-2x} = (2+2x)\mathrm{e}^{-2x}$ $\Leftrightarrow (mx+m+p)\,\mathrm{e}^{-2x} = (2+2x)\mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m+p = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ p = 0 \end{cases}$. Ainsi, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 2x\mathrm{e}^{-2x}$ est une solution particulière de l'équation $y' + 3y = (2+2x)\mathrm{e}^{-2x}$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' = -3y$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-3x}$, où C est un réel, alors les solutions de l'équation $y' + 3y = (2+2x)\mathrm{e}^{-2x}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-3x} + 2x\mathrm{e}^{-2x}$,où C est un réel.

2. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (mx+p)\mathrm{e}^{x}$, où m et p sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ comme produit d'une fonction affine par la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = m\mathrm{e}^{x} + (mx+p)\mathrm{e}^{x} = (mx+m+p)\,\mathrm{e}^{x}$. Ainsi, φ est solution de l'équation $y' + y = (3-2x)\mathrm{e}^{x}$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) + \varphi(x) = (3-2x)\mathrm{e}^{x}$ $\Leftrightarrow (2mx+m+2p)\,\mathrm{e}^{x} = (3-2x)\mathrm{e}^{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -2 \\ m+2p = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ p = 2 \end{cases}$. Ainsi, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (2-x)\mathrm{e}^{x}$ est une solution particulière de l'équation $y' + y = (3-2x)\mathrm{e}^{x}$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}$, où C est un réel, alors les solutions de l'équation $y' + y = (3-2x)\mathrm{e}^{x}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x} + (2-x)\mathrm{e}^{x}$, où C est un réel.

3. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x}$, où a, b et c sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ comme produit d'une fonction trinôme par la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = (2ax+b)\mathrm{e}^{-x} - (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x} = (-ax^2+(2a-b)x+b-c)\,\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi φ est solution de l'équation $y' - 2y = -(3x^2+x+2)\mathrm{e}^{-x}$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) - 2\varphi(x) = -(3x^2+x+2)\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow (-3ax^2+(2a-3b)x+b-3c)\,\mathrm{e}^{-x} = -(3x^2+x+2)\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = -3 \\ 2a-3b = -1 \\ b-3c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$. Ainsi, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2+x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation $y' - 2y = -(3x^2+x+2)\mathrm{e}^{-x}$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $y' - 2y = 0 \Leftrightarrow y' = 2y$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{2x}$, où C est un réel, alors les solutions de l'équation $y' - 2y = -(3x^2+x+2)\mathrm{e}^{-x}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{2x} + (x^2+x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$, où C est un réel.

4. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{2x}$, où a, b et c sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ comme produit d'une fonction trinôme par la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = (2ax+b)\mathrm{e}^{2x} + 2(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{2x} = (2ax^2+(2a+2b)x+b+2c)\,\mathrm{e}^{2x}$. Ainsi la fonction φ

est solution de l'équation $y' + 2y = -\left(2x^2 - x + \frac{1}{2}\right)e^{2x}$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) + 2\varphi(x) = -\left(2x^2 - x + \frac{1}{2}\right)e^{2x} \Leftrightarrow \left(4ax^2 + (2a+4b)x + b + 4c\right)e^{2x} = \left(-2x^2 + x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = -2 \\ 2a + 4b = 1 \\ b + 4c = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases}$. Ainsi, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x}$ est une solution particulière de l'équation $y' + 2y = -\left(2x^2 - x + \frac{1}{2}\right)e^{2x}$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{-2x}$, où C est un réel, alors les solutions de l'équation $y' + 2y = -\left(2x^2 - x + \frac{1}{2}\right)e^{2x}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{-2x} + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 117 :

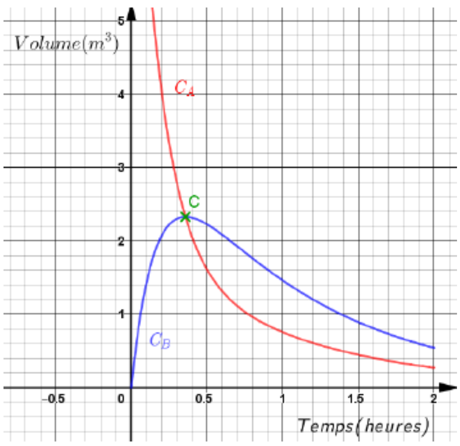
1. a. $f(0) = A(0) + 2B(0) = 10$ et $g(0) = -2A(0) + B(0) = -20$.

   b. Comme A et B sont dérivables sur $I = [0; +\infty[$ alors, par produit et somme, f et g sont aussi dérivables sur I. Et, pour tout $t \in I$, $f'(t) = A'(t) + 2B'(t) = -5A(t) + 2B(t) + 4A(t) - 4B(t) = -A(t) - 2B(t)$. Ainsi, pour tout $t \in I$, $f'(t) = -f(t)$ donc f est solution de l'équation différentielle $y' = -y$. De même, pour tout $t \in I$, $g'(t) = -6g(t)$ donc g est solution de l'équation différentielle $y' = -6y$.

   c. L'équation $y' = -y$ a pour solutions sur I les fonctions définies par $t \mapsto Ce^{-t}$, où C est un réel. De plus, $f(0) = 10 \Leftrightarrow C = 10$ donc, pour tout $t \geqslant 0$, $f(t) = 10e^{-t}$. De même, l'équation $y' = -6y$ a pour solutions sur I les fonctions définies par $t \mapsto Ce^{-6t}$, où C est un réel. De plus, $g(0) = -20 \Leftrightarrow C = -20$ donc pour tout $t \geqslant 0$, $g(t) = -20e^{-6t}$.

   d. On a $\begin{cases} A + 2B = f \\ -2A + B = g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5A = f - 2g \\ 5B = 2f + g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{5}(f - 2g) \\ B = \frac{1}{5}(2f + g) \end{cases}$. D'où, pour tout $t \geqslant 0$, $A(t) = 2\left(e^{-t} + 4e^{-6t}\right)$ et $B(t) = 4\left(e^{-t} - e^{-6t}\right)$.

2. Les courbes représentatives de A et B sur $[0; 2]$ sont les suivantes.



L'abscisse de leur point d'intersection C est $t \approx 0,36$. De plus, $A(0,36) \approx 2,329$. On en déduit que les deux cuves contiendront environ le même volume de gaz, environ égal à 2,329 m3, au bout d'environ 0,36 h (soit environ 21 minutes et 36 secondes).

9 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 118 :

Soit $(E_0) : y' = ay$ une équation différentielle où a est un réel non nul.

1. Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E_0). Alors y_1 et y_2 sont dérivables sur I et donc leur somme $y_1 + y_2$ l'est aussi. Et, pour tout $x \in I$, $(y_1 + y_2)'(x) = y_1'(x) + y_2'(x) = ay_1(x) + ay_2(x)$, car y_1 et y_2 sont solutions de (E_0), d'où, pour tout $x \in I$, $(y_1 + y_2)'(x) = a(y_1(x) + y_2(x)) = a(y_1 + y_2)(x)$. La fonction $y_1 + y_2$ est donc aussi une solution de (E_0).

2. Soient y une solution de (E_0) et k un réel. Alors y est dérivable sur I et donc le produit ky l'est aussi. Et, pour tout $x \in I$, $(ky)'(x) = ky'(x) = kay(x)$, car y est solution de (E_0), d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(ky)'(x) = a(ky)(x)$. La fonction ky est donc aussi une solution de (E_0).

Corrigé exercice 119 :

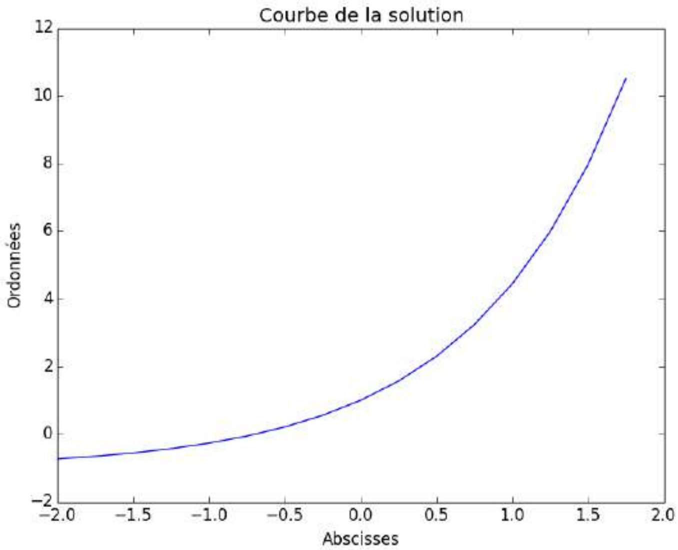
Soient $(E) : y' = ay + f$ une équation différentielle où $a \neq 0$ et f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soit φ une fonction dérivable sur I. On suppose que φ est une solution particulière de (E), on a donc $\varphi' = a\varphi + f$. Soit g une fonction dérivable sur I et solution de (E) : alors $g' = ag + f$. Comme g et φ sont dérivables sur I alors $g - varphi$ l'est aussi. Et on a, pour tout $x \in I$, $(g - \varphi)'(x) = g'(x) - \varphi'(x) = ag(x) + f(x) - a\varphi(x) - f(x) = a(g(x) - \varphi(x))$, c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, $(g - \varphi)'(x) = a(g - \varphi)(x)$. Ainsi $g - \varphi$ est solution de $y' = ay$.
Réciproquement, si $g - \varphi$ est solution de $y' = ay$ alors $g = g - \varphi + \varphi$ est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I. On a alors, pour tout $x \in I$, $g'(x) = (g - \varphi)'(x) + \varphi'(x) = a(g - \varphi)(x) + a\varphi(x) + f(x)$, car $g - \varphi$ est solution de $y' = ay$ et φ est solution de $\varphi' = a\varphi + f$. Ainsi $g'(x) = ag(x) + f(x)$ et la fonction g est bien solution de (E).

Corrigé exercice 120 :

1.
```
#Solution de y'=ay+b qui prend la valeur y_0 en x_0
def solution(x):
    y=(y_0+b/a)*exp(a*(x-x_0))-b/a
    return y
```

2.
```
#Coordonnées des points de la fonction solution sur [-2;2]
abs=[i*0.01 for i in range(-200,200,25)]
ord=[solution(k) for k in abs]
```

On obtient, par exemple, la courbe ci-dessous pour $y' = y + 1$, $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$.



Corrigé exercice 121 :

1. Par le théorème fondamental de la dynamique, on a, pour tout $t \geqslant 0$, $ma(t) = mg - kv(t) \Leftrightarrow mv'(t) = mg - kv(t) \Leftrightarrow v'(t) = g - \frac{k}{m}v(t)$, car $m \neq 0$. Par conséquent, v est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -\frac{k}{m}y + g$.

2. (E) est de la forme $y' = ay + b$ de solutions $t \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle. On est dans le cas où $a = -\frac{k}{m}$, $b = g$ et donc $\frac{b}{a} = -\frac{mg}{k}$. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par $t \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}$, où C est un réel. De plus, la vitesse initiale de l'objet est nulle, donc $v(0) = 0 \Leftrightarrow C + \frac{mg}{k} = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{mg}{k}$. Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$, $v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}\right)$.

Corrigé exercice 122 :

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f(x))^2 = 0$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (f(x))^2$: f est bien solution de (E).

2. Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur cet intervalle. Alors, pour tout $x \in I$, $g'(x) = (g(x))^2 \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{(g(x))^2} = 1$, en divisant chaque membre par $(g(x))^2 \neq 0$. Donc g est solution de (E) si, et seulement si, g est solution de l'équation différentielle $\frac{y'}{y^2} = 1$.

3. $\frac{y'}{y^2} = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{y}\right)' = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{y(x)} = x + k$ où k est un réel et pour $x \neq -k$. Ainsi, les solutions de (E) sont les fonctions définies avec $k \in \mathbb{R}$ et pour $x \neq -k$ par $y(x) = -\frac{1}{x+k}$.

4. On détermine k tel que $y(0) = 1 \Leftrightarrow k = -1$. Ainsi, la solution cherchée est la fonction définie pour $x \neq 1$ par $x \mapsto -\frac{1}{x-1}$.

Corrigé exercice 123 :

1. a. On sait que $f(0) = 1$. De plus, comme f est une solution de (E), on a $f'(0) = f(0) + 1 = 2$. L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donnée par : $y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = 2x+1$.

   b. Pour tout $x \in [0;1]$, $\varphi(x) = 2x+1$. Le point A_0 a pour coordonnées $(0;\varphi(0))$ soit $(0;1)$. Le point A_1 a pour coordonnées $(1;\varphi(1))$ soit $(1;3)$. (Voir courbe plus loin.)

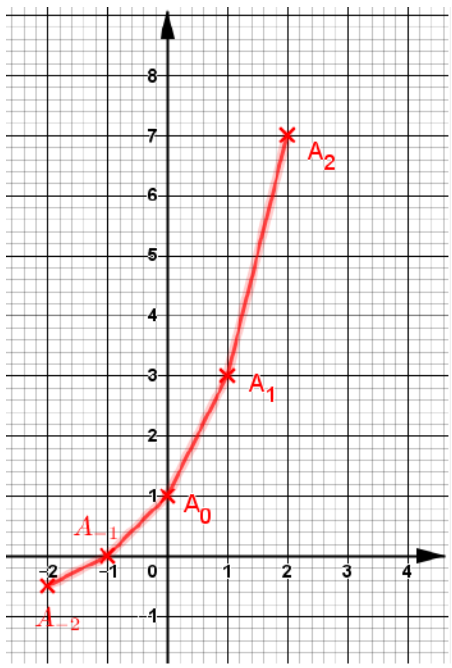
2. a. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est donnée par $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. En utilisant le fait que $f'(1) = f(1)+1$ (car f est une solution de (E)) et l'approximation $f(1) \approx \varphi(1) = 3$, on obtient : $y = (f(1)+1)(x-1) + f(1) \approx (\varphi(1)+1)(x-1) + \varphi(1) = 4(x-1)+3$ $= 4x-1$.

   b. La question précédente permet de déduire, l'expression de $\varphi(x)$: pour tout $x \in [1;2]$, $\varphi(x) = 4x-1$. Comme $\varphi(2) = 7$ on a donc $A_2(2;7)$. (Voir courbe ci-dessous.)

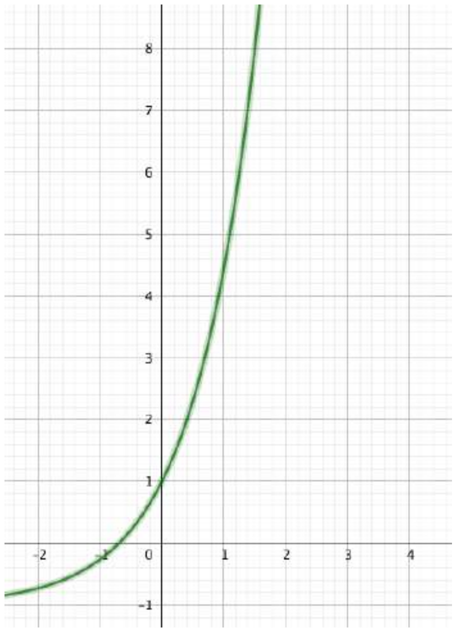
3. a. Soit n un entier compris entre -2 et 1. Soit y_n une expression de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse n. Sur l'intervalle $[n;n+1]$, $\varphi(x)$ est, par définition, égale à y_n. Donc, pour tout $x \in [n;n+1]$, on a, en utilisant le fait que f est une solution de (E) : $\varphi(x) = y_n = f'(n)(x-n) + f(n) = (f(n)+1)(x-n) + f(n) = f(n)(x+1-n) + x - n$.

   b. Le résultat précédent donne $\varphi(n) = f(n)$. Il permet également de calculer $\varphi(n+1) : \varphi(n+1) = f(n)(n+1+1-n) + n + 1 - n = 2f(n) + 1 = 2\varphi(n) + 1$. On obtient ainsi une relation de récurrence entre $\varphi(n)$ et $\varphi(n+1)$.

   c. La question précédente donne $\varphi(n) = \frac{\varphi(n+1)-1}{2}$ donc :$\varphi(0) = \frac{\varphi(1)-1}{2} = 1$; $\varphi(-1) = \frac{\varphi(0)-1}{2} = 0$ et $\varphi(-2) = \frac{\varphi(-1)-1}{2} = -\frac{1}{2}$. Ce qui donne les points $A_{-1}(-1;0)$ et $A_{-2}\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. On obtient ainsi la courbe ci-dessous.



4. La fonction f est définie et dérivable sur $[-2;2]$ comme composée de la fonction exponentielle avec la fonction $x \mapsto 2x-1$, toutes deux définies et dérivables sur cet intervalle. Et, pour tout $x \in [-2;2]$, $f'(x) = 2\mathrm{e}^x$. Or, pour tout $x \in [-2;2]$, $f(x)+1 = 2\mathrm{e}^x - 1 + 1 = 2\mathrm{e}^x$. La fonction f est donc bien solution de l'équation différentielle $(E) : y' = y+1$. En traçant la courbe représentative de la fonction f on obtient une courbe proche de celle obtenue à la question 3, même si l'approximation n'est pas parfaite. Pour améliorer l'approximation, on pourrait considérer d'avantage de points.



Corrigé exercice 124 :

1. Comme N est dérivable et ne s'annule pas sur $I = [0;+\infty[$ alors $g = \frac{1}{N}$ est dérivable sur I. Et, pour tout $t \geqslant 0$, $g'(t) = -\frac{N'(t)}{(N(t))^2}$.

2. N est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $t \geqslant 0$, $N'(t) = 3N(t) - 0,005\,(N(t))^2$. En divisant les deux membres de cette égalité par $-(N(t))^2 \neq 0$, on obtient alors $-\frac{N'(t)}{(N(t))^2} = -3 \times \frac{1}{N(t)} + 0,005$, c'est-à-dire $g'(t) = -3g(t) + 0,005$. Donc g est solution de $(E') : y' = -3y + 0,005$.

3. (E') est de la forme $y' = ay + b$, $a \neq 0$, de solutions $t \mapsto C\mathrm{e}^{at} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle. On est dans le cas où $a = -3$, $b = 0,005$ et donc $\frac{b}{a} = -\frac{1}{600}$. Les solutions de (E') sont donc les fonctions définies sur I par $t \mapsto C\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{600}$, où C est un réel. Puisque, pour tout $t \in I$, $g(t) = \frac{1}{N(t)} \Leftrightarrow N(t) = \frac{1}{g(t)}$, on en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur I par $t \mapsto \frac{1}{C\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{600}}$, où C est un réel, c'est-à-dire $t \mapsto \frac{600}{600C\mathrm{e}^{-3t}+1}$, où C est un réel.

4. a. On détermine C tel que $N(0) = 2000 \Leftrightarrow \frac{600}{600C+1} = 2000 \Leftrightarrow C = -\frac{7}{6000}$. La solution vérifiant la condition initiale de l'énoncé est donc définie sur I par $N(t) = \frac{600}{600\times\left(-\frac{7}{6000}\right)\mathrm{e}^{-3t}+1} = \frac{600}{-\frac{7}{10}\mathrm{e}^{-3t}+1} = \frac{6000}{10-7\mathrm{e}^{-3t}}$.

   b. Au bout de 2 heures, $N(2) = \frac{6000}{10-7\mathrm{e}^{-6}} \approx 601$ bactéries sont présentes dans l'enceinte.

Corrigé exercice 125 :

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition $(*)$. Soit y un réel fixé. Alors la fonction $x \mapsto f(x+y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction affine $x \mapsto 1x+y$ par la fonction f. La fonction $x \mapsto f(x)f(y)$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une constante par la fonction f. On dérive les deux membres de l'égalité $f(x+y) = f(x)f(y)$ par rapport à x, en appliquant la formule (avec abus de notations) $(f(ax+b))' = af'(ax+b)$, en prenant $a = 1$ et $b = y$. On obtient ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 \times f'(1x+y) = f(y) \times f'(x) \Leftrightarrow f'(x+y) = f(y)f'(x)$. En particulier pour $x = 0$, on obtient que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f'(y) = f'(0)f(y)$. La fonction f est donc solution de (E) : $y' = f'(0)y$.
2. Les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{f(0)x}$, où C est un réel.
3. On prend $x = 0$ et $y = 0$ dans la condition $(*)$. On obtient alors que f vérifie la condition $(*)$ si, et seulement si, $f(0) = (f(0))^2 \Leftrightarrow f(0)(1 - f(0)) = 0$ d'où $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
4. Si $f(0) = 0$ alors $C\mathrm{e}^{0x} = 0 \Leftrightarrow C = 0$ donc f est la fonction constante égale à 0. Si $f(0) = 1$ alors $C\mathrm{e}^{0x} = 1 \Leftrightarrow C = 1$ donc f est la fonction exponentielle. Les seules fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition $(*)$ sont la fonction nulle et la fonction exponentielle.

Corrigé exercice 126 :

1. Comme la cuve contient constamment 20 litres d'air et que x correspond à la proportion d'azote, le volume d'azote dans la cuve est donc donné, pour tout $t \geqslant 0$ par : $v(t) = 20x(t)$.
2. a. Entre t et $t + \Delta t$, il s'écoule Δt secondes. Le débit entrant d'azote est de 0.2 L·s^{-1}. Donc le volume d'azote entrant durant cette période est égal à $0,2\Delta t$ L.
   b. Le débit de sortie est identique mais la proportion d'azote dans le mélange de sortie est égale à$x(t)$. Donc le volume d'azote sortant est égal à $0,2x(t)\Delta t$ L.
3. On a $\Delta v(t) = 0,2\Delta t - 0,2x(t)\Delta t = 0,2\Delta t(1 - x(t))$, on en déduit donc que $\Delta x(t) = \frac{\Delta v}{20}(t) = (1 - x(t))\frac{0,2}{20}\Delta t = 0,01(1 - x(t))\Delta t$.
4. $\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t) = 0,01(1 - x(t))\Delta t$. Donc $\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = 0,01(1 - x(t))$. Or $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = x'(t)$ d'où x est solution de l'équation différentielle $y' = 0,01(1 - y)$.
5. a. Les solutions de $y' = 0,01(1-y) \Leftrightarrow y' = -0,01y + 0,01$ sont les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par $t \mapsto C\mathrm{e}^{-0,01t} + 1$, où C est un réel. On détermine maintenant C tel que $x(0) = 0,8 \Leftrightarrow C + 1 = 0,8 \Leftrightarrow C = -0,2$. Donc, en conclusion, pour tout $t \geqslant 0$, $x(t) = 1 - 0,2\mathrm{e}^{-0,01t}$.
   b. Cinq minutes correspondent à 300 secondes. La proportion d'azote dans la cuve au bout de cinq minutes est donc environ égale à $x(300) = 1 - 0,2\mathrm{e}^{-0,01\times 300} \approx 0,990$, soit environ 99,0 %.

Corrigé exercice 127 :

Soit l'équation différentielle $(E) : y'' - y' - 2y = 2x\mathrm{e}^x$.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{2x}$ où A et B sont deux réels. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -A\mathrm{e}^{-x} + 2B\mathrm{e}^{2x}$. De même, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = A\mathrm{e}^{-x} + 4B\mathrm{e}^{2x}$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) - f'(x) - 2f(x) = A\mathrm{e}^{-x} + 4B\mathrm{e}^{2x} - (-A\mathrm{e}^{-x} + 2B\mathrm{e}^{2x}) - 2\left(A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{2x}\right) = 0$. Donc f est bien solution de $(E_0) : y'' - y' - 2y = 0$.

2. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (mx + p)\mathrm{e}^x$, où m et p sont deux réels à déterminer. Alors φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = m\mathrm{e}^x + (mx + p)\mathrm{e}^x = (mx + m + p)\mathrm{e}^x$. De même, φ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi''(x) = m\mathrm{e}^x + (mx + m + p)\mathrm{e}^x = (mx + 2m + p)\mathrm{e}^x$. Ainsi φ est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi''(x) - \varphi'(x) - 2\varphi(x) = 2x\mathrm{e}^x \Leftrightarrow$ $(mx+2m+p-mx-m-p-2mx-2p)\mathrm{e}^x = 2x\mathrm{e}^x \Leftrightarrow \begin{cases} -2m = 2 \\ m - 2p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ p = -\frac{1}{2} \end{cases}$.
Ainsi, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \left(-x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^x$ est une solution particulière de (E).

3. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que g' soit dérivable sur $\mathbb{R}$. Si g est solution de (E) alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) - g'(x) - 2g(x) = 2x\mathrm{e}^x$. Comme g, g', φ et φ' sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors $g - \varphi$ et $(g - \varphi)' = g' - \varphi'$ le sont aussi. Et on a $(g - \varphi)'' = g'' - \varphi''$. $(g - \varphi)''(x) - (g - \varphi)'(x) - 2(g - \varphi)(x) = g''(x) - g'(x) - 2g(x) - (\varphi''(x) - \varphi'(x) - 2\varphi(x)) = 2x\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x = 0$. $g - \varphi$ est donc bien solution de (E_0). Réciproquement, si $g - \varphi$ est solution de (E_0) alors $g = g - \varphi + \varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée aussi, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) - g'(x) - 2g(x) = (g - \varphi)''(x) - (g - \varphi)'(x) - 2(g - \varphi)(x) + \varphi''(x) - \varphi'(x) - 2\varphi(x) = 0 + 2x\mathrm{e}^x = 2x\mathrm{e}^x$. Donc g est solution de (E). D'où l'équivalence.

4. Les solutions de (E) sont donc les fonctions h définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{2x} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^x$, où$A$ et B sont des réels. Déterminons maintenant A et B sachant que $h(0) = 1$ et $h'(0) = 0$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -A\mathrm{e}^{-x} + 2B\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^x = -A\mathrm{e}^{-x} + 2B\mathrm{e}^{2x} - \left(x + \frac{3}{2}\right)\mathrm{e}^x$. Ainsi, $h(0) = 1 \Leftrightarrow A + B - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow A + B = \frac{3}{2}$ et $h'(0) = 0 \Leftrightarrow -A + 2B - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow -A + 2B = \frac{3}{2}$. On doit donc résoudre le système $\begin{cases} A + B = \frac{3}{2} \\ -A + 2B = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 1 \end{cases}$. La solution cherchée est donc, en conclusion, la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{2x} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^x$.

Corrigé exercice 128 :

1. Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels à déterminer. Alors φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction trinôme, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 2ax + b$. De même, φ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction affine et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi''(x) = 2a$. Ainsi φ est solution de$(E) : y'' - y' - 6y = -6x^2 + 4x - 3$ si, et seulement si, $\varphi''(x) - \varphi'(x) - 6\varphi(x) = -6x^2 + 4x - 3 \Leftrightarrow -6ax^2 + (-2a - 6b)x +$

$2a-b-6c = -6x^2+4x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} -6a = -6 \\ -2a-6b = 4 \\ 2a-b-6c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 6b = -2a-4 = -6 \\ 6c = 2a-b+3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$. Ainsi, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x^2 - x + 1$ est une solution particulière de (E).

2. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que g' soit dérivable sur $\mathbb{R}$. Si g est solution de (E) alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x)-g'(x)-6g(x) = -6x^2+4x-3$. Comme g, g', φ et φ' sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors $g-\varphi$ et $(g-\varphi)' = g'-\varphi'$ le sont aussi. Et on a $(g-\varphi)'' = g''-\varphi''$. Et alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(g-\varphi)''(x) - (g-\varphi)'(x) - 6(g-\varphi)(x) = g''(x) - g'(x) - 6g(x) - (\varphi''(x) - \varphi'(x) - 6\varphi(x)) = -6x^2+4x-3-(-6x^2+4x-3) = 0$, donc $g-\varphi$ est solution de (E_0) : $y''-y'-6y = 0$, l'équation homogène associée à (E). Réciproquement, si $g-\varphi$ est solution de (E_0) alors $g = g-\varphi+\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, g' aussi, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x)-g'(x)-6g(x) = (g-\varphi)''(x) - (g-\varphi)'(x) - 6(g-\varphi)(x) + \varphi''(x) - \varphi'(x) - 6\varphi(x) = 0 + (-6x^2+4x-3) = -6x^2+4x-3$. Donc g est solution de (E). D'où l'équivalence.

3. a. L'équation caractéristique associée à l'équation $y''-y'-6y = 0$ est $r^2-r-6 = 0$. On a $r^2-r-6 = 0 \Leftrightarrow (r+2)(r-3) = 0 \Leftrightarrow r = -2$ ou $r = 3$. Donc les solutions de (E_0) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{3x}$, où A et B sont réels.
   b. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{3x} + x^2 - x + 1$, où A et B sont des réels.

4. Soit $f(x) = A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{3x} + x^2 - x + 1$, avec A et B réels à déterminer sachant que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 4$. Alors f est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2A\mathrm{e}^{-2x} + 3B\mathrm{e}^{3x} + 2x - 1$. D'où, $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+1 = 1 \\ -2A+3B-1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} A+B = 0 \\ -2A+3B = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$. En conclusion, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{3x} + x^2 - x + 1$.

Corrigé exercice 129 :

1. a. La fonction constante $y : t \mapsto K$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $t \geqslant 0$, $y'(t) = 0$. D'où, pour tout $t \geqslant 0$, $ay(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) = aK\left(1 - \frac{K}{K}\right) = 0 = y'(t)$. Cette fonction est donc bien solution de (L).
   b. Si pour tout $t \geqslant 0$, $y(t) > K$ alors, pour tout $t \geqslant 0$, $\frac{y(t)}{K} > 1$ donc $1 - \frac{y(t)}{K} < 0$ d'où $ay(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) < 0$ car $a > 0$ et, pour tout $t \geqslant 0$, $y(t) \geqslant K > 0$. On en déduit que, dans ce cas, la fonction y est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. De même, on montre que si pour tout $t \geqslant 0$, $y(t) < K$, alors la fonction y est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2. a. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $z'(t) = \left(\frac{1}{y(t)}\right)' = -\frac{y'(t)}{(y(t))^2}$.

b. $z' = -az + \frac{a}{K} \Leftrightarrow -\frac{y'}{y^2} = -\frac{a}{y} + \frac{a}{K} \Leftrightarrow y' = ay - y^2\frac{a}{K}$, en multipliant les deux membres de l'égalité par $-y^2$. Ainsi, cette équation est équivalente à l'équation $(L) : y' = ay\left(1 - \frac{y}{K}\right)$.

c. Les solutions de l'équation $z' = -az + \frac{a}{K}$ sont de la forme $z : t \mapsto C\mathrm{e}^{-at} + \frac{1}{K}$, où C est un réel. Ainsi, les solutions de (L) sont les fonctions de la forme $y : t \mapsto \frac{1}{C\mathrm{e}^{-at}+\frac{1}{K}}$, où C est un réel, c'est-à-dire de la forme $y : t \mapsto \frac{K}{1+KC\mathrm{e}^{-at}}$, où C est un réel.

3. a. y est de la forme $y : t \mapsto \frac{K}{1+KC\mathrm{e}^{-at}}$, où C est un réel. De plus, $y(0) = y_0$. Donc, $\frac{K}{1+KC} = y_0 \Leftrightarrow C = \frac{K-y_0}{Ky_0}$. Donc, en conclusion, pour tout $t \geqslant 0$, $y(t) = \frac{K}{1+\frac{K-y_0}{y_0}\mathrm{e}^{-at}}$.

b. Comme $a > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-at} = 0$. On obtient donc, par produit, somme puis quotient, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = K$.

10 Préparer le bac

Corrigé exercice 130 :

1. L'équation différentielle $y' = ay$, où a est un réel non nul, a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle. L'équation $(E) : 2y' + y = 0$ est équivalente à $y' = -\frac{1}{2}y$ qui a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, où C est un réel.

2. a. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (mx^2 + px)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, où m et p sont des réels à déterminer. Alors φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fonction trinôme par la composée d'une fonction affine avec la fonction exponentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = (2mx + p)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}(mx^2 + px)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \left(-\frac{m}{2}x^2 + \left(2m - \frac{p}{2}\right)x + p\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. D'où, φ est solution de (E') si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\varphi'(x)+\varphi(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \Leftrightarrow (-mx^2+(4m-p)x+2p+mx^2+px)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m = 1 \\ 2p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ p = \frac{1}{2} \end{cases}$. Ainsi la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ est une solution particulière de l'équation (E').

   b. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Si f est solution de (E') alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2f'(x) + f(x) = (x + 1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. Comme f et φ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors $f - \varphi$ l'est aussi et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2(f - \varphi)'(x) + (f - \varphi)(x) = 2f'(x) + f(x) - (2\varphi'(x) + \varphi(x)) = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = 0$. Donc $f - \varphi$ est solution de (E). Réciproquement, si $f - \varphi$ est solution de (E) alors $2(f-\varphi)'+f-\varphi = 0 \Leftrightarrow 2f'-2\varphi'+f-\varphi = 0 \Leftrightarrow 2f'+f = 2\varphi'+\varphi = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ donc f est solution de (E'). D'où l'équivalence.

   c. D'après la question 2.b., une solution de (E') est la somme d'une solution de (E) et de φ. D'après la question 1., on en déduit que les solutions de (E') sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, où C est un réel.

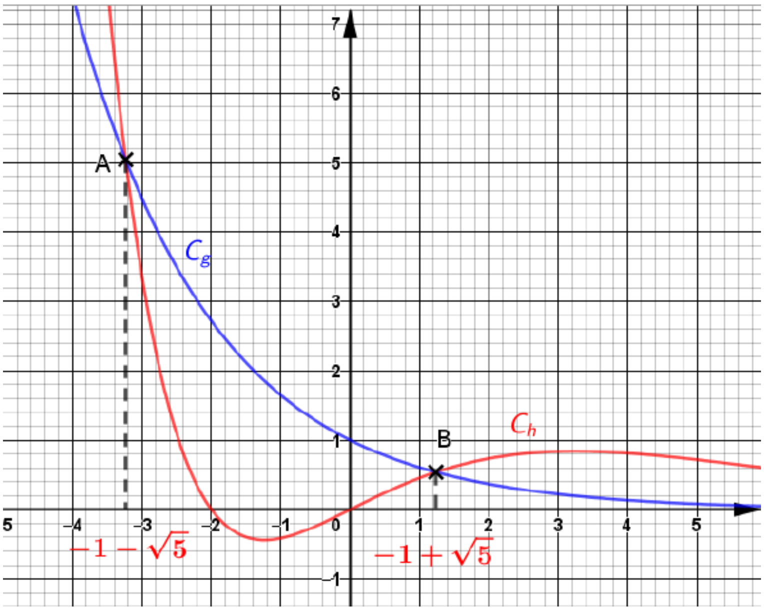
3. a. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{4}(x^2+2x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fonction trinôme par la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \frac{1}{4}(2x + 2)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}(x^2 + 2x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{8}\left(-x^2 + 2x + 4\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. Puisque $\frac{1}{8} > 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} > 0$ alors $h'(x)$ est du signe de $-x^2 + 2x + 4$, soit du signe de $a = -1$ à l'extérieur de ses racines : $1 - \sqrt{5}$ et $1 + \sqrt{5}$. Ainsi h est décroissante sur $\left]-\infty; 1 - \sqrt{5}\right]$ et sur $\left[1 + \sqrt{5}; +\infty\right[$, et est croissante sur $\left[1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}\right]$.

   b. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{4}(x^2 + 2x) = +\infty$ et, en posant $t = -\frac{x}{2}$, par limite d'une composée, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^t = +\infty$. Ainsi, par limite d'un produit $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$. D'autre part, la limite de h en $+\infty$ est une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$ ». On lève l'indétermination en transformant l'écriture de $h(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{x^2}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \frac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} + \frac{\frac{x}{2}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}$. On pose alors $t = \frac{x}{2}$. On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} t = +\infty$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{t^2}{\mathrm{e}^t} + \frac{t}{\mathrm{e}^t}$. Par croissances comparées, on a alors $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t^2} = +\infty$ donc, par limite d'un quotient, $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t} = 0$. Enfin, par limite d'une composée et d'une somme,

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^t} + \frac{t}{e^t} = 0.$

4. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x)-g(x) = \frac{1}{4}(x^2+2x-4)e^{-\frac{x}{2}}$ est du signe de x^2+2x-4, c'est-à-dire du signe de $a = 1$ à l'extérieur de ses racines : $-1-\sqrt{5}$ et $-1+\sqrt{5}$. Ainsi $\mathcal{C}_h$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur les intervalles $\left]-\infty; -1-\sqrt{5}\right[$ et $\left]-1+\sqrt{5}; +\infty\right[$, et $\mathcal{C}_h$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $\left]-1-\sqrt{5}; -1+\sqrt{5}\right[$.

   b. On obtient les courbes ci-dessous.



Corrigé exercice 131 :

Partie A :

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $I =]0; +\infty[$, solution de $(E) : xy' - y = x^2e^{2x}$. Soit g la fonction définie pour tout $x \in I$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Alors g est dérivable sur I comme quotient de fonctions dérivables sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I. Et, pour tout $x \in I$, $g'(x) = \frac{f'(x)\times x - f(x)}{x^2} = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \frac{x^2e^{2x}}{x^2} = e^{2x}$. Donc g est solution de l'équation $(E') : y' = e^{2x}$.

2. Les solutions de (E') sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x} + k$, où k est un réel, donc, pour tout $x \in I$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}e^{2x} + k$, où k est un réel. Ainsi, les solutions de (E) sont les fonctions définies sur Ipar $x \mapsto \frac{x}{2}e^{2x} + kx$, avec où k est un réel.

3. On détermine k tel que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{2\times\frac{1}{2}} + \frac{k}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{e}{4} + \frac{k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{e}{2}$. Ainsi la fonction f cherchée est la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{e}{2}x = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{e}{2}x$.

Partie B :
Pour tout pour $x \geqslant 0$, posons $h(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{e}{2}x$. Alors, pour tout $x \geqslant 0$, $h(x) = \frac{x}{2}\left(e^{2x} - e\right)$ est du signe de $e^{2x} - e$ car $\frac{x}{2} \geqslant 0$. $e^{2x} - e \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{2x} \geqslant e^1 \Leftrightarrow 2x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{2}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. En conclusion, $h(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ et $h(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Et $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Corrigé exercice 132 :

1. $(E) \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{10}y + 3$ de solutions définies sur $I = [0; +\infty[$ par $t \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} + 30$, où C est un réel. On détermine C tel que $v(0) = 0 \Leftrightarrow C + 30 = 0 \Leftrightarrow C = -30$. Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$, $v(t) = 30\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right)$.

2. a. La fonction v est dérivable sur $I = [0; +\infty[$ comme somme, produit et composée de fonction dérivables sur cet intervalle. Pour tout $x \geqslant 0$, $v'(t) = 3\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} > 0$. Donc v est strictement croissante sur I.

   b. Posons $x = -\frac{t}{10}$. On a alors $\lim\limits_{t \to +\infty} x = -\infty$. D'où, par limite d'une composée, $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$. Donc, par limite d'une somme puis d'un produit, $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 30$. La vitesse maximale atteinte par le cycliste est donc de 30 m·s-1.

3. On a $v'(t) < 0,1 \Leftrightarrow 3\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} < 0,1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} < \frac{1}{30} \Leftrightarrow -\frac{t}{10} < \ln\left(\frac{1}{30}\right) \Leftrightarrow t > -10\ln\left(\frac{1}{30}\right) \approx 34,01$. Donc au bout de 35 secondes, la vitesse du cycliste sera stabilisée.

   Remarque : si le chapitre sur la fonction logarithme népérien n'a pas encore été traitée, alors il suffit d'utiliser le tableau de valeurs réalisé à la calculatrice pour déterminer le résultat.

Corrigé exercice 133 :

1. Soient y une fonction définie, dérivable et strictement positive sur $I = [0; 30]$ telle que $y(0) = 0,01$ et z la fonction définie sur I par $z = \frac{1}{y}$. Alors z est dérivable sur I et, pour tout $\in I$, $z'(t) = -\frac{y'(t)}{(y(t))^2}$. Donc y est solution de $(E) : y' = 0,05y(10 - y)$ avec $y(0) = 0,01$ si, et seulement si, pour tout $t \in I$, $z'(t) = -\frac{0,05y(t)(10-y(t))}{(y(t))^2} \Leftrightarrow z'(t) = -0,5 \times \frac{1}{y(t)} + 0,05$, c'est-à-dire $z'(t) = -0,5z(t) + 0,05$. Et donc si, et seulement si, z est solution de $(E') : z' = -0,5z + 0,05$. De plus $z(0) = \frac{1}{y(0)} = 100$. D'où l'équivalence.

2. a. Les solutions de (E') sont les fonctions définies sur I par $t \mapsto C\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,1$, où C est un réel. On détermine C tel que $z(0) = 100 \Leftrightarrow C + 0,1 = 100 \Leftrightarrow C = 99,9$. Ainsi, pour tout $t \in I$, $z(t) = 99,9\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,1$ et donc $y(t) = \frac{1}{99,9\mathrm{e}^{-0,5t}+0,1}$.

   b. $y(30) = \frac{1}{99,9\mathrm{e}^{-0,5\times30}+0,1} \approx 10$ donc environ 10 % de la population sera contaminé au bout d'un mois.

Corrigé exercice 134 :

1. Les solutions de l'équation différentielle $(E) : y' + \frac{1}{2}y = 10 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2}y + 10$ sont les fonctions définies sur $I = [0; +\infty[$ par $t \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 20$, où C est un réel. On détermine C tel que $f(0) = 220 \Leftrightarrow C + 20 = 220 \Leftrightarrow C = 200$. Ainsi, pour tout $t \in I$, $f(t) = 200\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 20$.

2. a. La fonction f est dérivable sur I comme produit, somme et composée de fonctions dérivables sur cet intervalle. Et, pour tout $t \in I$, $f'(t) = -100\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} < 0$, car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f est strictement décroissante sur I.

b. On pose $x = -\frac{t}{2}$. On a alors $\lim\limits_{t \to +\infty} x = -\infty$. Et par limite d'une composée on obtient que $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$. D'où, par limite d'un produit puis d'une somme, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 20$. La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 20$ en $+\infty$. La température minimale de l'objet après refroidissement est donc de 20 degrés celsius.

3. a. On obtient la courbe ci-dessous.

b. On lit graphiquement l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = 50$. On obtient $t \approx 3,79$. La température de l'objet atteint donc 50 degrés celsius au bout d'environ 3 heures et 47 minutes.

Corrigé exercice 135 :

1. $(E') : y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$ admet pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-2x}$, où C est une constante réelle.

2. La fonction h est de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{-2x}$, avec $C = \frac{9}{2}$: il s'agit donc bien d'une solution de (E').

3. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$ alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -3 \times (-3)\mathrm{e}^{-3x} = 9\mathrm{e}^{-3x}$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) + 2g(x) = 9\mathrm{e}^{-3x} + 2 \times (-3\mathrm{e}^{-3x}) = 9\mathrm{e}^{-3x} - 6\mathrm{e}^{-3x} = 3\mathrm{e}^{-3x}$. Donc g est bien solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-3x}$.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x}$. Alors $f = h + g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + 2f(x) = h'(x) + g'(x) + 2h(x) + 2g(x) = (h'(x) + 2h(x)) + (g'(x) + 2g(x)) = 3\mathrm{e}^{-3x}$ d'après les questions 2. et 3. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + 2f(x) = 3\mathrm{e}^{-3x}$ et donc f est également une solution de (E).

Corrigé exercice 136 :

Par lecture graphique, on constate que la fonction f est décroissante sur $[0;+\infty[$ donc sa dérivée f' doit être négative sur $[0;+\infty[$. On en déduit que Γ est la courbe représentative de f'.
Autre méthode : La fonction f est positive puis négative donc ses primitives sont croissantes puis décroissantes, ce qui correspond à l'allure de la fonction $\mathcal{C}$.

Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 11 : Calcul intégral

Table des matières

1 Informations sur ce chapitre

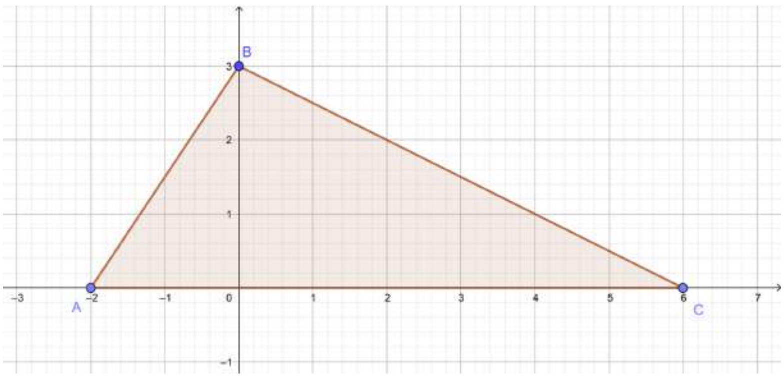
Le B.O. précise que « l'analyse est une part centrale des mathématiques, et un outil puissant de modélisation qui permet l'étude de phénomènes issus d'autres disciplines ».
Après avoir étudié le calcul de primitives dans le chapitre dédié aux équations différentielles, le calcul intégral est introduit. Cette approche démarre par une notion intuitive de l'aire d'un domaine dans le cas d'une fonction continue positive. Le lien est ensuite fait avec la notion de primitives d'une fonction, qui permet d'aborder les propriétés du calcul intégral. Pour finir ce chapitre, l'intégration par parties est abordée afin d'effectuer des calculs plus délicats.
Les exercices proposés permettent d'acquérir la notion de calcul intégral, de s'entraîner sur les différentes techniques de calcul d'une intégrale et de faire le lien entre le calcul intégral et son interprétation graphique, dans certains cas.
Vous trouverez aussi des exercices abordant les méthodes de calcul approximatif d'une intégrale : rectangles, trapèzes, milieux, ainsi que des exercices sur les suites d'intégrales.
Selon vos choix pédagogiques, vous trouverez, si besoin, des exercices de calcul intégral avec les fonctions trigonométriques et logarithme népérien dans les exercices transversaux en fin de manuel. De même, les suites d'intégrales ne sont traitées ni dans ce chapitre ni dans le chapitre sur les suites mais en exercices transversaux.

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

Voici la représentation graphique de la fonction $f$dans un repère orthonormé du plan.



On cherche donc à calculer l'aire d'un triangle de base de longueur 8 et de hauteur de longueur 3. Ainsi $\mathcal{A} = \dfrac{8 \times 3}{2} = 12$.

Corrigé exercice 2 :

L'aire d'un trapèze se calcule avec la formule suivante : $\mathcal{A} = \dfrac{(B+b) \times h}{2}$ où h est la la hauteur du trapèze, B la longueur de sa grande base et b celle de sa petite base.
Dans cet exercice on a donc $\mathcal{A} = \dfrac{(10+7) \times 3}{2} = \dfrac{17 \times 3}{2} = \dfrac{51}{2}$.

Corrigé exercice 3 :

f est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{2-x^2}{6x-5} \text{ si } x > 1 \end{cases}$.

Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \dfrac{2-x^2}{6x-5}$ sont continues respectivement sur $[0;1]$ et sur $]1;+\infty[$. On doit donc étudier la continuité de f en $x=1$.
On a d'une part $f(1) = \sqrt{1} = 1$ et d'autre part $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{2-x^2}{6x-5} = \dfrac{2-1^2}{6 \times 1 - 5} = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = f(1)$ donc f est continue en 1 et, par conséquent, f est continue sur $[0;+\infty[$.

Corrigé exercice 4 :

1. La fonction $f : x \mapsto 5x^3 - \sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $I =]0;+\infty[$ comme somme de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle. Et, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 5 \times 3x^2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{30x^4\sqrt{x} - x^2 + 2\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}}$.

2. On définit les fonctions u et v sur $I =]2; +\infty[$ par $u(x) = 5x - 10$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Ainsi $g = u \circ v$ d'où, pour tout $x \in I$, $g' = u' \times v' \circ u$, avec $u'(x) = 5$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Ainsi, pour tout réel $x > 2$, $g'(x) = 5 \times \left[\dfrac{1}{2\sqrt{5x-10}}\right] = \dfrac{5}{2\sqrt{5x-10}}$.

3. On définit les fonctions u et v sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2 - 9x^4$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. Ainsi $h = v \circ u$ d'où $h' = u' \times v' \circ u$, avec $u'(x) = -9 \times 4x^3 = -36x^3$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Ainsi, pour tout réel x, $h'(x) = -36x^3 \times \mathrm{e}^{2-9x^4} = -36x^3\mathrm{e}^{2-9x^4}$.

4. On définit la fonction u sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 3x^2 + 1$. Ainsi $\ell = \dfrac{1}{u}$, ℓ est dérivable sur I et $\ell' = -\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u'(x) = 3 \times 2x = 6x$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ell'(x) = -\dfrac{6x}{(3x^2+1)^2}$.

Corrigé exercice 5 :

On pose les fonctions u et v sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 4x^2 + 1$ et $v(x) = 3x^2 + 1$. Ainsi $F = \dfrac{u}{v}$ d'où $F' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 4 \times 2x = 8x$ et $v'(x) = 3 \times 2x = 6x$. Pour tout réel x,
$F'(x) = \dfrac{8x(3x^2+1) - (4x^2+1) \times 6x}{(3x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(3x^2+1)^2} = f(x)$.
Donc, F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 6 :

1. On définit la fonction u dérivable sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \mathrm{e}^x - 2$ avec $u'(x) = \mathrm{e}^x$. Ainsi $f = 3u'u^2$, d'où une primitive F de f est donnée par $F(x) = (\mathrm{e}^x - 2)^3$.

2. On définit la fonction u dérivable sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \mathrm{e}^x$ avec $u'(x) = \mathrm{e}^x$. Ainsi, pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{1}{5} \times 5u'(5x+2)$. g admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $G(x) = \dfrac{1}{5}u(5x+2)$. Ainsi, pour tout réel x, $G(x) = \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{5x+2}$.

3. On définit la fonction u dérivable sur $I = \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ par $u(x) = 3x^2 - 6$ avec $u'(x) = 3 \times 2x = 6x$. Ainsi $h = -\left(-\dfrac{u'}{u^2}\right)$ d'où h admet une primitive sur $I = \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ telle que $H = -\dfrac{1}{u}$. Ainsi, pour tout réel x, $H(x) = -\dfrac{1}{3x^2-6}$.

4. On définit la fonction u dérivable sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 7$ avec $u'(x) = 2x$. Ainsi $k = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u^4}$ et donc k admet une primitive sur $\mathbb{R}$ telle que $K = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{u^3}\right) = -\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{u^3}$.
Pour tout réel x, $K(x) = -\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{(x^2+7)^3}$.

5. On définit la fonction u dérivable sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 4$ avec $u'(x) = 2x$. Ainsi $\ell = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ et donc ℓ admet une primitive sur $\mathbb{R}$ telle que $L = \sqrt{u}$. D'où, pour tout réel x, $L(x) = \sqrt{x^2+4}$.

Corrigé exercice 7 :

1. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout réel x, $F(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x + k$, où k est un réel.

2. La primitive de f s'annulant en -1 vérifie donc $F(-1) = 0$. Or $F(-1) = (-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 + 7 \times (-1) + k$, où k est un réel.
   Et $0 = -1 - \frac{1}{2} - 7 + k \Leftrightarrow k = \frac{17}{2}$. La primitive de f s'annulant en -1 est donc la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x + \frac{17}{2}$.

Corrigé exercice 8 :

D'après le graphique, f semble croissante sur $[-3; -0,8]$ et sur $[2,1; 4]$, et décroissante sur $[-0,8; 2,1]$. La fonction dérivée f' semble donc devoir être positive sur $[-3; -0,8]$ et sur $[2,1; 4]$, et négative sur $[-0,8; 2,1]$. Elle semble s'annuler en $x = -0,8$ et $x = 2,1$.
D'après le graphique, f est négative sur $[-3; -2]$ et sur $[1; 3]$, et positive sur $[-2; 1]$ et sur $[3; 4]$.
Une fonction primitive F de f est donc décroissante sur $[-3; -2]$ et sur $[1; 3]$, et croissante sur $[-2; 1]$ et sur $[3; 4]$ car $F' = f$.

3 Activités

3.1 Corrigé activité A :

Questions :

1. Ce quadrillage est composé de carrés de côté 0,2 cm et donc d'aire $0,2 \times 0,2 = 0,04$ cm^2. On peut estimer que l'aire $\mathcal{D}$ est environ de 16 carrés, soit $16 \times 0,04 = 0,64$ cm^2.

2. a. A_k correspond à l'aire d'un rectangle de largeur $\dfrac{1}{n}$ et de hauteur $f\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$ d'où $A_k = \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$.

   B_k correspond à l'aire d'un rectangle de largeur $\dfrac{1}{n}$ et de hauteur $f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ d'où $B_k = \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

   b. La fonction f est décroissante sur $[0;1]$. Donc, la somme des aires A_k, pour k allant de 0 à $n-1$, minore $\mathcal{D}$ et la somme des aires B_k, pour k allant de 0 à $n-1$, majore $\mathcal{D}$. Ainsi $I_n \leqslant \mathcal{D} \leqslant J_n$ c'est-à-dire :

   $$\frac{1}{n} f\left(\frac{0+1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n-1+1}{n}\right) \leqslant \mathcal{D} \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{0}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

   soit :

   $$\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f(1)\right] \leqslant \mathcal{D} \leqslant \frac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

   d'où : $u_n \leqslant \mathcal{D} \leqslant \dfrac{1}{n} f(0) + \dfrac{1}{n}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right) + f\left(\dfrac{2}{n}\right) + \cdots + f(1)\right] - \dfrac{1}{n} f(1)$

   soit : $u_n \leqslant \mathcal{D} \leqslant \dfrac{1}{n} \times 1 + u_n - \dfrac{1}{n} \times 0$ car $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.

   D'où, en conclusion, $u_n \leqslant \mathcal{D} \leqslant \dfrac{1}{n} + u_n$.

   c. L'amplitude de cet encadrement est $u_n + \dfrac{1}{n} - u_n = \dfrac{1}{n}$.

   d. Lorsque n tend vers $+\infty$, l'amplitude de cet encadrement devient proche de 0. L'encadrement devient donc de plus en plus précis. On peut ainsi obtenir un encadrement de $\mathcal{D}$ avec une amplitude souhaitée.

3. a. Dans la cellule B2, il a été saisi = 1 - (A2 / $F$1)^2.

   b. Dans la cellule C11, on obtient la valeur du calcul

   $$f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{10}{n}\right) \text{ avec } n = 10.$$

   En C1, on peut donc, par exemple, mettre comme intitulé « Somme des f(k/n) ».

   c. Pour obtenir $u_{10} = I_{10}$ dans la cellule F2, il faut calculer :

$$\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{10}{n}\right)\right].$$

Il faut donc saisir $=$ C11/F1. Dans la cellule F3, li faut calculer $u_{10}+\frac{1}{n}$, soit saisir $=$ F2 $+$ 1/F1.

d. Afin d'obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-3}, on doit prendre $n = 1000$. Il faut donc tout d'abord descendre les colonnes A, B et C jusqu'à la ligne 1001, modifier la cellule F1, puis modifier la formule en F2 par $=$ C1001/F1.
On obtient ainsi le résultat ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F
1	k	f(k/n)	???		n =	1000
2	1	0,999999	0,999999		In =	0,6661665
3	2	0,999996	1,999995		Jn =	0,6671665
4	3	0,999991	2,999986			
5	4	0,999984	3,99997			
6	5	0,999975	4,999945			
7	6	0,999964	5,999909			
8	7	0,999951	6,99986			
9	8	0,999936	7,999796			
10	9	0,999919	8,999715			
11	10	0,9999	9,999615			

On en conclut que $0,666 \leqslant \mathcal{D} \leqslant 0,667$.

Dans la suite du chapitre, on obtiendra la valeur exacte de cette aire : $\frac{2}{3}$.

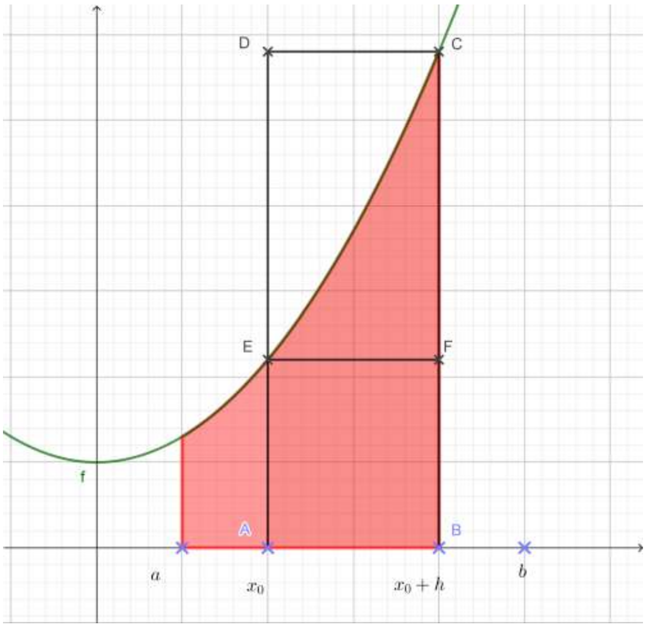
Bilan :

Afin d'obtenir une valeur approchée de l'aire d'un domaine, on subdivise l'intervalle $[0;1]$ en n intervalles de même amplitude. On construits les rectangles de largeur $\frac{1}{n}$ et de hauteur $f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $f\left(\frac{k+1}{n}\right)$, pour k variant de 0 à $n-1$. On obtient ainsi des rectangles « inférieurs » et « supérieurs ». L'aire du domaine est alors compris entre la somme des aires des rectangles « inférieurs » et celle des rectangles « supérieurs ».

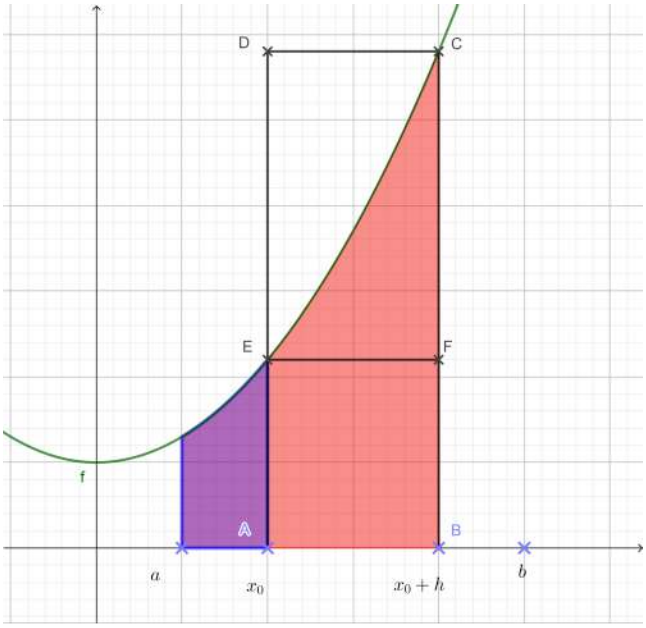
3.2 Corrigé activité B :

Questions :

1. a. Pour tout réel $h > 0$ tel que $x_0 + h < b$, $F_a(x_0 + h) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ correspond à l'aire sous la courbe représentative de f entre les droites $x = a$ et $x_0 + h$ soit l'aire ci-dessous.



$F_a(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t$ correspond à l'aire sous la courbe représentative de f entre les droites $x = a$ et x_0 soit l'aire ci-dessous.



b. L'opération $F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)$ correspond donc au calcul de l'aire sous la courbe représentative de f entre les droites $x = x_0$ et $x_0 + h$.

c. La fonction f étant croissante sur $[a;b]$, on aaire$(ABFE) \leqslant F_a(x_0+h) - F_a(x_0) \leqslant$ aire$(ABCD)$.
Or aire$(ABCD) = AB \times BC = (x_0+h-x_0)\,[f\,(x_0+h) - 0]\,hf\,(x_0+h)$.
Et aire$(ABFE) = AB \times AE = (x_0+h-x_0)\,[f\,(x_0) - 0] = hf\,(x_0)$.
D'où $hf\,(x_0) \leqslant F_a(x_0+h) - F_a(x_0) \leqslant hf\,(x_0+h)$.
On divise ensuite les membres de l'inégalité par $h > 0$ et on obtient

$$f\,(x_0) \leqslant \frac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} \leqslant f\,(x_0+h).$$

2. Lorsque $h < 0$, on a $x_0 + h < x_0$. Donc l'opération $F_a(x_0) - F_a(x_0+h)$ donne l'aire sous la courbe représentative de f entre les droites d'équation $x = x_0 + h$ et $x = x_0$. On peut alors écrire aire$(ABEF) \leqslant F_a(x_0) - F_a(x_0+h) \leqslant$ aire$(ABDC)$.
   Or, aire$(ABDC) = AB \times AC = [x_0 - (x_0+h)]\,[f\,(x_0) - 0] = -hf\,(x_0)$ et
   aire$(ABEF) = AB \times BE = [x_0 - (x_0+h)]\,[f\,(x_0+h) - 0]$ et
   aire$(ABEF) = -hf\,(x_0+h)$.
   Donc $-hf\,(x_0+h) \leqslant F_a(x_0) - F_a(x_0+h) \leqslant -hf\,(x_0)$. On divise ensuite les membres de l'inégalité par $-h > 0$ et on obtient $f\,(x_0+h) \leqslant \dfrac{F_a(x_0) - F_a(x_0+h)}{-h} \leqslant f\,(x_0)$
   d'où $f\,(x_0+h) \leqslant \dfrac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} \leqslant f\,(x_0)$.
3. f est continue sur $[a;b]$ et donc en x_0.
   Ce qui permet de conclure que $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.

Bilan :

Dans les deux cas $h > 0$ et $h < 0$, les inégalités permettent d'utiliser le théorème d'encadrement et de conclure que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} = f(x_0)$.
Par définition du nombre dérivé de F_a en x_0, on conclut que F_a est dérivable en x_0 et $F_a'(x_0) = f(x_0)$. Donc, F_a est dérivable sur $[a;b]$ et $F_a' = f$.

3.3 Corrigé activité C :

Questions :

1. La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction exponentielle. D'où $J = \displaystyle\int_0^3 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_0^3 = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^3 - 1$.
   La fonction $x \mapsto 2x\mathrm{e}^{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est de la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$. Une primitive de cette fonction est donc
   $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2+1}$. D'où $K = \displaystyle\int_0^3 2x\mathrm{e}^{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{x^2+1}\right]_0^3 = \mathrm{e}^{10} - \mathrm{e}^1$.
   Il est impossible de trouver une primitive de $x \mapsto x\mathrm{e}^x$, on ne peut donc pas calculer l'intégrale I de cette façon.

2. Calcul de l'intégrale I.

3. a. La fonction dérivée de $u \times v$ est $u'v + uv'$ avec $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = 1$. Donc, pour tout réel $x \in [0;3]$, on a $(uv)'(x) = \mathrm{e}^x \times x + \mathrm{e}^x \times 1 = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$.

   b. On intègre cette égalité sur $x \in [0;3]$.
   $\displaystyle\int_0^3 (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \left(x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x\right)\,\mathrm{d}x$ d'où $\displaystyle\int_0^3 (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int_0^3 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale.
   $(uv)'$ est une fonction continue sur $[0;3]$ et admet pour primitive uv d'où $\displaystyle[(uv)(x)]_0^3 = \int_0^3 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + [\mathrm{e}^x]_0^3$ et donc $\displaystyle\int_0^3 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^3 + 1$.

   c. On définit les fonctions u et v sur $[0;3]$ par $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x^2$. La fonction dérivée de uv est $u'v + uv'$ avec $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = 2x$. Pour tout réel $x \in [0;3]$, on a donc $(uv)'(x) = \mathrm{e}^x \times x^2 + \mathrm{e}^x \times 2x = x^2\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x$.
   On intègre cette égalité sur $x \in [0;3]$ et on obtient alors $\displaystyle\int_0^3 (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \left(x^2\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x\right)\,\mathrm{d}x$ d'où $\displaystyle\int_0^3 (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + 2\int_0^3 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale. Or $(uv)'$ est une fonction continue sur $[0;3]$ et admet pour primitive uv. D'où $\displaystyle[(uv)(x)]_0^3 = \int_0^3 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + 2I$ et donc $\displaystyle\int_0^3 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 5\mathrm{e}^3 - 2$.

4. Cas général.
   On a $\displaystyle[(uv)(x)]_a^b = \int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (uv')(x)\,\mathrm{d}x$ d'où $\displaystyle\int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}x = [(uv)(x)]_a^b - \int_a^b (uv')(x)\,\mathrm{d}x$.

Bilan :

Pour calculer une intégrale avec une intégration par parties, l'intégrale doit pouvoir s'exprimer sous la forme $\displaystyle\int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}x$. On définit ensuite les fonctions dérivables u et v sur $[a;b]$ et telles que u' et v' soient continues sur $[a;b]$.
On utilise ensuite la formule $\displaystyle\int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}x = [(uv)(x)]_a^b - \int_a^b (uv')(x)\,\mathrm{d}x$ pour terminer le calcul.

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 9 :

La valeur moyenne de f est égale à $\dfrac{1}{7-2}\displaystyle\int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x$.
Pour estimer l'intégrale, on estime en u.a. l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 7$. On comptabilise environ 18 carreaux d'aire $1 \times 2 = 2$ u.a., donc l'aire du domaine est d'environ $18 \times 2 = 36$ u.a..
On obtient donc $\displaystyle\int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 36$, soit $\dfrac{1}{7-2}\displaystyle\int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 7$.

Réponse : b.

Corrigé exercice 10 :

La fonction $x \mapsto -x^3 + 2x^2 - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives. Une primitive de cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{2x^3}{3} - x$.
On a donc $\displaystyle\int_{-2}^1 (-x^3 + 2x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{-2}^1 = F(1) - F(-2) = \dfrac{27}{4}$.

Réponse : d.

Corrigé exercice 11 :

D'après la linéarité de l'intégrale, la réponse b. est correcte.
La réponse a. est incorrecte, puisque c'est une multiplication de fonctions.
La réponse c. est incorrecte car la fonction $x \mapsto 3x\mathrm{e}^x$ est négative sur $[-2; -1]$.
La réponse d. est incorrecte. La relation de Chasles permet en réalité d'écrire :

$$\int_{-2}^{-1} 3x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} 3x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{-1} 3x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

Réponse : b.

Corrigé exercice 12 :

La fonction $u\colon t \mapsto (t-1)\mathrm{e}^t$ est continue, car dérivable, et positive sur $[1; +\infty[$.
Ainsi, pour tout réel $x \geqslant 1$, on a $f(x) = \displaystyle\int_1^x u(t)\,\mathrm{d}t$.
D'après le cours, f est alors dérivable sur $[1; +\infty[$ et $f'(x) = u(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$.

Réponse : a.

Corrigé exercice 13 :

f est continue donc les intégrales sont bien définies.
Tout d'abord d'après l'énoncé, $f \leqslant 0$ donc $\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$ et, en inversant les bornes, $\int_{0}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
De plus, pour tout réel x, on a $-5 \leqslant f(x) \leqslant -2$. On intègre alors cette inégalité sur $[-2;0]$ et on obtient $\int_{-2}^{0} -5\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-2}^{0} -2\,\mathrm{d}x$ d'où $[-5x]_{-2}^{0} \leqslant \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant [-2x]_{-2}^{0}$ et donc $-10 \leqslant \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant -4$.

Réponses : a. et d.

Corrigé exercice 14 :

La fonction carré est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
L'aire du domaine demandée en u.a. est égale à $\int_{-1}^{2} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3$.
Ici, 1 u.a. correspond à $2 \times 1 = 2$ cm^2. Donc, l'aire est égale à $3 \times 2 = 6$ cm^2 et 3 u.a..

Réponses : a. et d.

Corrigé exercice 15 :

D'après le cours, on sait que $\int_{-1}^{1} f(x) = 0$ lorsque la fonction est impaire.
Pour les affirmations a. et d., il est impossible de répondre sans information supplémentaire sur la fonction. Par exemple si la fonction f est la fonction cube alors $\int_{0}^{1} f(x) = \frac{1}{4}$ mais si la fonction f est définie par $f(x) = -x^3$ alors $\int_{0}^{1} f(x) = -\frac{1}{4}$.

Réponse : c.

Corrigé exercice 16 :

f et g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. De plus, sur l'intervalle $[0;1]$, on a $f \leqslant g$.
Donc, l'aire entre les deux courbes est
$$\int_{0}^{1} [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} (x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{12}.$$
Cette aire vaut donc $\frac{1}{12}$ u.a..

Réponses : b. et c.

Corrigé exercice 17 :

Soit f la fonction définie sur $[1;3]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x-1}}{x}$.

f est dérivable sur $[1;3]$ et, pour tout $x \in [1;3]$, $f'(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^{x-1} - \mathrm{e}^{x-1}}{x^2} = \dfrac{(x-1)\mathrm{e}^{x-1}}{x^2} \geqslant 0$.
f est donc croissante sur $[1;3]$. Ainsi, pour tout réel x appartenant à $[1;3]$, $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(3)$ d'où $1 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^2}{3}$.
Comme f est continue sur $[1;3]$, on peut intégrer ces inégalités sur $[1;3]$. On obtient alors $\displaystyle\int_1^3 1\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^3 \frac{\mathrm{e}^2}{3}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow [x]_1^3 \leqslant \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left[x\frac{\mathrm{e}^2}{3}\right]_1^3$ et on en déduit que $\displaystyle 2 \leqslant \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2\mathrm{e}^2}{3}$.

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1

Questions préliminaires

1. f est une fonction dérivable donc continue sur $[0;1]$. f admet donc des primitives sur $[0;1]$. On a $f = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 1 + x^2$ et $u'(x) = 2x$. Donc $F = \sqrt{u}$ est une primitive de f sur $[0;1]$. D'où $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$.

   f est une fonction positive sur $[0;1]$. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est donc égale à $\sqrt{2} - 1$.

2. C_k est l'aire d'un rectangle de largeur $\dfrac{k+1}{n} - \dfrac{k}{n} = \dfrac{1}{n}$ et de hauteur $f\left(\dfrac{\frac{k}{n} + \frac{k+1}{n}}{2}\right)$ donc
$$C_k = \frac{1}{n} f\left(\frac{\frac{k}{n} + \frac{k+1}{n}}{2}\right) = \frac{1}{n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) = \frac{1}{n}\frac{\frac{2k+1}{2n}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2k+1}{2n}\right)^2}} = \frac{1}{n}\frac{2k+1}{\sqrt{4n^2 + (2k+1)^2}}.$$

3. On a donc $C_0 = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}}$ et donc, pour $n = 10$, $C_0 = \dfrac{1}{10}\dfrac{1}{\sqrt{401}} \approx 0,00499$.

Méthode 1

1. Voir le dossier TICE.

2. a. On entre en B4 la formule :
   =(1/$B$1)*(2*A4+1)/RACINE(4*($B$1)^2+(2*A4+1)^2).
   Pour $n = 0$, on a $A = C_0$.
   Pour obtenir la valeur en C4, on entre la formule = B4.

   b. La formule en B4 doit être étiré jusqu'à la ligne 13, pour aller jusqu'à $k = n - 1 = 9$.

3. a. Dans la cellule C5 on calcule la somme $A = C_0 + C_1$. On a obtenu la valeur C_0 dans la cellule C4, la cellule B5 contient la valeur C_1. On doit donc entrer dans la cellule C5 la formule = C4 + B5.

	A	B	C
1	n =	10	
2			
3	k	C_k	A
4	0	0,0049938	0,0049938
5	1	0,0148340	0,0198278
6	2	0,0242536	0,0440814
7	3	0,0330350	0,0771164
8	4	0,0410365	0,1181529
9	5	0,0481919	0,1663448
10	6	0,0544988	0,2208436
11	7	0,0600000	0,2808436
12	8	0,0647648	0,3456084
13	9	0,0688749	0,4144834

b. D'après le résultat obtenu dans la cellule C13, on conclut que $\mathcal{D} \approx 0,414$.
Or, $\mathcal{D} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414$. Ainsi $\sqrt{2} \approx 1,414$.

4. On entre dans la cellule B1 la valeur 100 puis on étire la formule B4 et C4 jusqu'à la ligne 103. D'après le résultat obtenu dans la cellule C103, on a $\mathcal{D} \approx 0,41422$.
Or $\mathcal{D} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,41422$. Ainsi $\sqrt{2} \approx 1,41422$.

Méthode 2

1. La ligne 2 permet d'initialiser la somme en donnant la valeur de C_0.
On complète ensuite cet algorithme comme ci-dessous.

Fonction Aire(n) :
$$A \leftarrow \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}$$
Pour k allant de 1 à $n-1$, faire :
$$A \leftarrow A + \frac{1}{n}\frac{2k+1}{\sqrt{4n^2+(2k+1)^2}}$$
Fin Pour
Retourner A
Fin Fonction

2. On peut programmer cet algorithme en Python comme ci-dessous.

```
from math import sqrt

def Aire(n) :
    A = (1/n)*(1/sqrt(4*n**2+1))
    for k in range (1,n):
        A = A + (1/n)*((2*k+1)/sqrt(4*n**2+(2*k+1)**2))
    return(A)
print(Aire(10))
print(Aire(100))
```

Pour $n = 10$, on obtient le résultat ci-dessous.

```
0.4144833779345177
0.41421625594676165
```

D'où $\mathcal{D} \approx 0,414$. Or, $\mathcal{D} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414$. Ainsi $\sqrt{2} \approx 1,414$.
Pour $n = 100$, on obtient le résultat ci-dessous.

```
0.4144833779345177
0.41421625594676165
```

D'où $\mathcal{D} \approx 0,41422$. Or $\mathcal{D} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,41422$. Ainsi $\sqrt{2} \approx 1,41422$.

Pour aller plus loin

On utilise la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$.

En effet, dans ce cas, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_0^1=\left[\sqrt{4+x^2}\right]_0^1=\sqrt{5}-2$.

On utilise ensuite une des deux méthodes proposées en modifiant les formules là où elles doivent être modifiées. Ainsi dans ce cas on a, pour tout entier naturel k compris entre 0 et $n-1$, $C_k=\dfrac{1}{n}\dfrac{2k+1}{\sqrt{16n^2+(2k+1)^2}}$ et on peut en déduire que $C_0=\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{\sqrt{16n^2+1}}$.

Si on utilise le tableur, on doit modifier la cellule B4 pour contenir la formule :
=(2*A4+1)/(RACINE(16*$B$1^2+(2*A4+1)^2))*(1/$B$1).

On obtient ainsi les résultats suivants.

	A	B	C
1	n =	10	
2			
3	k	C_k	A
4	0	0,0024992	0,0024992
5	1	0,0074790	0,0099782
6	2	0,0124035	0,0223817
7	3	0,0172380	0,0396197
8	4	0,0219512	0,0615709
9	5	0,0265156	0,0880866
10	6	0,0309086	0,1189952
11	7	0,0351123	0,1541075
12	8	0,0391141	0,1932216
13	9	0,0429057	0,2361273

On en déduit que $\mathcal{D}\approx 0,236$ et donc que $\sqrt{5}\approx 2,236$.

Si on préfère utiliser un algorithme en Python, on doit modifier le programme comme ci-dessous.

```python
from math import sqrt

def Aire(n) :
    A = (1/n)*(1/sqrt(16*n**2+1))
    for k in range (1,n):
        A = A + (1/n)*((2*k+1)/sqrt(16*n**2+(2*k+1)**2))
    return(A)
print(Aire(10))
```

```
0.23612728527253768
```

On en déduit alors que $\mathcal{D}\approx 0,236$ et donc que $\sqrt{5}\approx 2,236$.

5.2 Corrigé du TP 2

Question préliminaire

La formule de Taylor avec reste intégral donne :

- Pour $n = 1$, $\mathrm{e}^x = 1 + x + \displaystyle\int_0^x (x-t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.
- Pour $n = 2$, $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^2}{2}\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.
- Pour $n = 3$, $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^3}{6}\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.

Méthode 1

1. Voir le dossier TICE.
2. a. Pour obtenir la valeur en B5, il faut saisir = \$B\$2^A5/FACT(A5).
   Remarque : FACT() permet de calculer la factorielle d'un nombre.

   b. Pour obtenir E_0 dans la cellule C5, il faut saisir = B5.
3. a. Dans la cellule C6, on veut obtenir $E_1 = \dfrac{x^0}{0!} + \dfrac{x^1}{1!}$. On doit donc calculer la somme entre la somme précédente, située en cellule C5, et ajouter la valeur de la cellule B6. On saisit donc = C5+B6 dans la cellule C6.

   b. Afin d'obtenir une valeur approchée de $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$, on doit aller jusqu'à $k = 8$. C'est en effet à ce moment là qu'on peut observer la stabilité des 4 première décimales.

	A	B	C
1	n =	10	
2	x =	1	
3			
4	k	x^k/k!	Somme
5	0	1	1
6	1	1	2
7	2	0,5	2,5
8	3	0,1666666667	2,666666667
9	4	0,04166666667	2,708333333
10	5	0,008333333333	2,716666667
11	6	0,001388888889	2,718055556
12	7	0,0001984126984	2,718253968
13	8	0,0000248015873	2,71827877
14			

   On obtient ainsi $\mathrm{e} \approx 2,7183$.
4. On doit entrer en B2 la valeur 3 et étirer les formules jusqu'à la ligne 20 ($k = 15$).
   On obtient alors les résultats ci-dessous.

	A	B	C
1	n =	10	
2	x =	3	
3			
4	k	x^k/k!	Somme
5	0	1	1
6	1	3	4
7	2	4,5	8,5
8	3	4,5	13
9	4	3,375	16,375
10	5	2,025	18,4
11	6	1,0125	19,4125
12	7	0,4339285714	19,84642857
13	8	0,1627232143	20,00915179
14	9	0,05424107143	20,06339286
15	10	0,01627232143	20,07966518
16	11	0,004437905844	20,08410308
17	12	0,001109476461	20,08521256
18	13	0,0002560330295	20,08546859
19	14	0,0000548642206	20,08552346
20	15	0,00001097284412	20,08553443

On obtient ainsi $\mathrm{e}^3 \approx 20,0855$.

Méthode 2

1. a. On a $E_0 = \dfrac{x^0}{0!} = \dfrac{1}{1} = 1$.

   b. La 2e ligne permet d'initialiser la somme E_n, soit $E = E_0 = 1$.
   On complète l'algorithme comme ci-dessous.

> Fonction Exp(x,n) :
>
> $E \leftarrow 1$
>
>   Pour k allant de 1 à n
>
> $E \leftarrow E + \dfrac{x^k}{k!}$
>
>   Fin Pour
>
>   Retourner E
>
> Fin Fonction

2. On peut programmer cet algorithme en Python comme ci-dessous, par exemple.

```python
from math import factorial

def Exp(x,n):
    E = 1
    for k in range(1,n+1):
        E = E + (x**k/factorial(k))
    return(E)

print(Exp(1,10))
```

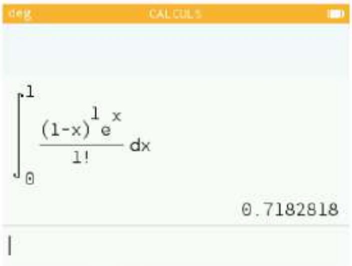
```
2.7182818011463845
```

On obtient ainsi $e \approx 2,7182$

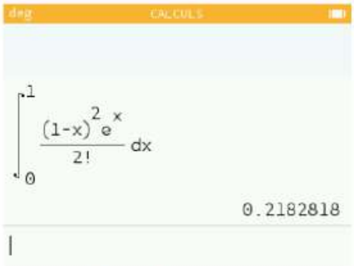
3. En entrant la commande Exp(3,15) on obtient $e^3 \approx 20,0855$.

Méthode 3

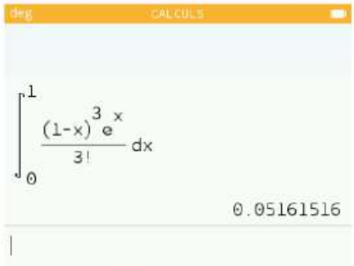
1. a. On obtient les résultats suivants.



Pour $n = 1$



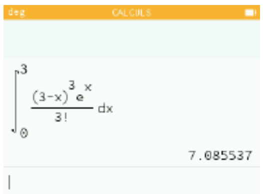
Pour $n = 2$



Pour $n = 3$

b. Pour $n = 1$, on a $e \approx 1 + 1 + 0,7182818 \approx 2,7182818$.
Pour $n = 2$, on a $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + 0,2182818 \approx 2,7182818$.
Pour $n = 3$, on a $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + 0,05161516 \approx 2,718282$.

2. De la même manière, on obtient à l'aide de la calculatrice le résultat ci-dessous.



Ainsi, $e^3 \approx 1 + \frac{3}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{6} + 7,0855 \approx 20,0855$.

6 Travailler les automatismes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 18 :

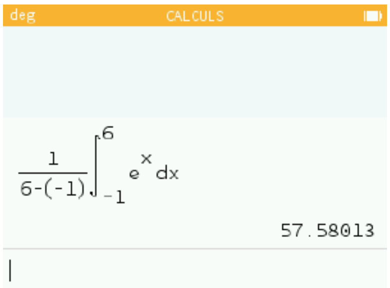
D'après le graphique, la fonction est continue et positive sur $[0; 10]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond donc à l'aire du domaine $\mathcal{D}$ compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 10$.
Ce domaine est ici un trapèze donc $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(B+b)\times h}{2} = \frac{(10+2)\times 4}{2} = 24.$

Corrigé exercice 19 :

1. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{x^2}$ est continue, car dérivable, sur $[-3; -1]$. Elle admet donc des primitives. Une primitive de cette fonction est $F : x \mapsto -\dfrac{2}{x}$.
   D'où $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{-3}^{-1} = F(-1) - F(-3) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$
2. La fonction valeur absolue est continue sur $[-10; 10]$ et paire.
   D'où $\displaystyle\int_{-10}^{10} |x|\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{10} |x|\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{10} x\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10} = 100.$

Corrigé exercice 20 :

À l'aide de la calculatrice, on obtient le résultat ci-dessous.



Ainsi, la valeur moyenne de la fonction exponentielle sur $[-1; 6]$ est

$$\frac{1}{6-(-1)}\int_{-1}^{6} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \approx 57,58.$$

Corrigé exercice 21 :

1. Sur $[2; 3]$, la fonction f est continue et positive. D'après la positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ est donc positive.

2. Sur $[-1;1]$, la fonction f est continue et négative. D'après la positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ est donc négative.
3. Sur $[-2;0]$, la fonction f est continue et de signe non constant. Soit $\alpha \in [-2;0]$ la valeur où $f(\alpha) = 0$. On définit alors $\mathcal{D}_1$ le domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = \alpha$, et $\mathcal{D}_2$ le domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 0$.

   Sur $[-2;\alpha]$, la fonction f est continue et positive, et sur $[\alpha;0]$, la fonction f est continue et négative. Donc $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \text{aire}(\mathcal{D}_1) - \text{aire}(\mathcal{D}_2)$. Or $\text{aire}(\mathcal{D}_1) < \text{aire}(\mathcal{D}_2)$, d'où $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x < 0$.

Corrigé exercice 22 :

1. Si $x = -2$, $\displaystyle\int_{-2}^{-2} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. De plus, si $x \in [-2;1]$, on sait que $f(t) \leqslant 0$ pour tout $t \in [-2;x]$. D'où, d'après la positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_{-2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$.
2. Si $x \in [1;4]$, il n'est pas possible de déterminer le signe de I, puisque la fonction n'est pas de signe constant sur l'intervalle $[-2;x]$.

Corrigé exercice 23 :

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leqslant x \leqslant 9$ alors $1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 3$ par la fonction racine carrée est croissante sur cet intervalle. De plus la fonction racine carrée est continue sur $[1;9]$. On intègre alors les inégalités précédentes et on obtient $\displaystyle\int_{1}^{9} 1\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{1}^{9} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{1}^{9} 3\,\mathrm{d}x$ d'où $\displaystyle 8 \leqslant \int_{1}^{9} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \leqslant 24$.

Corrigé exercice 24 :

Dans ce cas, pour faire une intégration par parties, on pose $u'(x) = \mathrm{e}^{5x}$ et $v(x) = 2x$ ce qui nous donne $u(x) = \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}$ et $v'(x) = 2$. Ces quatre fonctions sont bien définies, dérivables et continues sur $\mathbb{R}$.

6.2 Exercices

Corrigé exercice 25 :

1. Sur $[2;8]$, la fonction f est continue et positive. Cette intégrale correspond donc à l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 8$. Ce domaine est un triangle. Son aire est donc égale à $\dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{6 \times 3}{2} = 9$ u.a.. D'où $\displaystyle\int_{2}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x = 9$.

2. Sur $[4;8]$, la fonction f est continue et positive. Cette intégrale correspond donc à l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 8$. Ce domaine est un trapèze. Son aire est donc égale à $\dfrac{(B+b)\times h}{2} = \dfrac{(3+1)\times 4}{2} = 8$ u.a.. D'où $\displaystyle\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$.

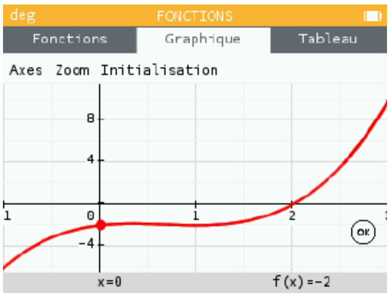
3. Sur $[0;2]$, la fonction f est continue et négative. L'intégrale correspond donc à l'opposé de l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 8$. Ce domaine est un triangle. Son aire est donc égale à $\dfrac{b\times h}{2} = \dfrac{2\times 1}{2} = 1$ u.a.. D'où $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$.

Corrigé exercice 26 :

1. Sur $\left[\dfrac{1}{2};3\right]$, la fonction f est continue et positive. L'aire du domaine est donc égale à $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Sur $[-1;1]$, la fonction f est continue et positive. L'aire du domaine est donc égale à $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. On trace la représentation graphique de la fonction à l'aide de la calculatrice.



Sur $[1;2]$, la fonction f est donc continue et négative. L'aire du domaine est donc égale à $\displaystyle\int_1^2 -f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque : Il est possible de faire une étude des variations de f sur $[1;2]$ et d'en déduire le signe de f sur cet intervalle afin de répondre plus formellement à cette question.

f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $[1;2]$ et, pour tout réel $x \in [1;2]$, on a $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. f' est donc une fonction polynôme du second degré, de discriminant $\Delta = 4$ et admettant donc deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{1}{3}$ et $x_2 = 1$.

f' est donc positive sur $[1;2]$ et donc f est croissante sur $[1;2]$. Or, $f(1) = -2$ et $f(2) = 0$. On en conclut que f est négative sur $[1;2]$.

4. Sur $[0;1]$, la fonction f est continue et négative. Sur $[1;3]$, la fonction f est continue et positive. L'aire du domaine est donc égale à $\displaystyle\int_0^1 -f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Corrigé exercice 27 :

La fonction f est une fonction trinôme du second degré.
Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 37$, il admet donc deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{37}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{37}}{6}$. Puisque $x_1 < 1$ et $x_2 < 1$, sur $\left[1; \sqrt{3}\right]$, la fonction f est donc continue et positive. Elle admet pour primitive F définie par $F(x) = x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 - x$.
L'aire du domaine est donc égale à $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + 5$ u.a..

Corrigé exercice 28 :

La fonction exponentielle est continue et positive sur $[-2; 2]$. Elle admet pour primitive elle-même.
L'aire du domaine est donc égale à $\displaystyle\int_{-2}^{2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_{-2}^2 = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}$ u.a..
Donc, l'aire de ce domaine est environ égale à 7,25 u.a.

Corrigé exercice 29 :

1. La fonction f est dérivable, donc continue, sur $\mathbb{R}$ et admet pour primitive la fonction F définie par $F(x) = \mathrm{e}^x + x^3 + x$. La valeur moyenne de f sur $[-3; 2]$ est donc
$\displaystyle\frac{1}{2-(-3)}\int_{-3}^{2}\left(\mathrm{e}^x + 3x^2 + 1\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\left[\mathrm{e}^x + x^3 + x\right]_{-3}^{2}$
$= \dfrac{1}{5}\left[\left[\mathrm{e}^2 + 2^3 + 2\right] - \left[\mathrm{e}^{-3} + (-3)^3 + (-3)\right]\right] = \dfrac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3} + 40}{5}$.
2. f est positive sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{D}$ le domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 2$.
Alors le rectangle $ABCD$, avec $A\,(-3; 0)$, $B\,(2; 0)$, $C\left(2; \dfrac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3} + 40}{5}\right)$ et $D\left(-3; \dfrac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3} + 40}{5}\right)$, a la même aire que le domaine $\mathcal{D}$.

Corrigé exercice 30 :

La fonction f est dérivable, donc continue, sur $\mathbb{R}$ et admet pour primitive la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{7}x$. La valeur moyenne de f sur $[-1; 0]$ est donc
$\displaystyle\frac{1}{0-(-1)}\int_{-1}^{0}\left(x^3 - \mathrm{e}^x + \frac{1}{7}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1}\left[\frac{x^4}{4} - \mathrm{e}^x + \frac{1}{7}x\right]_{-1}^{0}$
$= \left[\left[\dfrac{0^4}{4} - \mathrm{e}^0 + \dfrac{1}{7}\times 0\right] - \left[\dfrac{(-1)^4}{4} - \mathrm{e}^{-1} + \dfrac{1}{7}\times(-1)\right]\right]$
$= -\dfrac{31}{28} + \mathrm{e}^{-1}$.

Corrigé exercice 31 :

La valeur moyenne de f sur $[-3;3]$ est égale à $\dfrac{1}{3-(-3)}\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.
D'après ce graphique, la fonction f est continue et positive sur $[-3;3]$. Cette intégrale correspond donc ici à l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-3$ et $x=3$.
On estime alors que $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 8$.
La valeur moyenne de f sur $[-3;3]$ est donc environ égale à $\dfrac{1}{6}\times 8 \approx \dfrac{4}{3}$.

Corrigé exercice 32 :

1. $F(2)-F(-1)=\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $F(3)-F(6)=-(F(6)-F(3))=-\displaystyle\int_{3}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x$
3. $-F(-2)+F(4)=F(4)-F(-2)=\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$
4. $F(x)-F(2)=\displaystyle\int_{2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

Corrigé exercice 33 :

1. La fonction $x\mapsto\pi$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet pour primitive la fonction F définie par $F(x)=\pi x$. Donc $\displaystyle\int_{-1}^{3}\pi\,\mathrm{d}x=[\pi x]_{-1}^{3}=3\pi+\pi=4\pi$.
2. La fonction $x\mapsto 5-2x$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet pour primitive la fonction F définie par $F(x)=5x-x^2$. Donc $\displaystyle\int_{-1}^{3}(5-2x)\,\mathrm{d}x=\left[5x-x^2\right]_{-1}^{3}=12$.
3. La fonction $t\mapsto -t^3+2t^2-4t+2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet pour primitive la fonction F définie par $F(t)=-\dfrac{1}{4}t^4+\dfrac{2}{3}t^3-2t^2+2t$. Donc $\displaystyle\int_{-2}^{1}(-t^3+2t^2-4t+2)\,\mathrm{d}t=\left[-\dfrac{1}{4}t^4+\dfrac{2}{3}t^3-2t^2+2t\right]_{-2}^{1}=\dfrac{87}{4}$.
4. La fonction $s\mapsto\dfrac{1}{s^2}$ est continue sur $[1;6]$. Elle admet pour primitive la fonction F définie par $F(s)=-\dfrac{1}{s}$. Donc $\displaystyle\int_{1}^{6}\dfrac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s=\left[-\dfrac{1}{s}\right]_{1}^{6}=\left(-\dfrac{1}{6}\right)-\left(-\dfrac{1}{1}\right)=\dfrac{5}{6}$.
5. La fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ est dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet pour primitive F définie par $F(x)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$. Donc $\displaystyle\int_{0}^{-1}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x=\left[-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_{0}^{-1}=\dfrac{1-\mathrm{e}^2}{2}$.

6. La fonction $f\colon x \mapsto 24x(3x^2+1)^3$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a $f = 4u'u^3$ avec $u(x) = 3x^2+1$. f admet donc pour primitive la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = (3x^2+1)^4$. Donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} 24x(3x^2+1)^3\,\mathrm{d}x = \left[(3x^2+1)^4\right]_{-1}^{1} = 0$.

Corrigé exercice 34 :

Première méthode : Les fonctions $f\colon x \mapsto x^2$ et $g\colon x \mapsto x^2-3x$ sont continues, car dérivables, sur $[-1;2]$. Elles admettent respectivement pour primitive respectivement $F\colon x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$ et $G\colon x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2}$.
Ainsi $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{-1}^{2} = F(2)-F(-1) = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3$ et $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left(x^2-3x\right)\mathrm{d}x = [G(x)]_{-1}^{2} = G(2)-G(-1) = -\frac{3}{2}$. D'où $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2\,\mathrm{d}x - 4\int_{-1}^{2} (x^2-3x)\,\mathrm{d}x = 3-4\times\left(-\frac{3}{2}\right) = 9$.
Deuxième méthode : Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_{-1}^{2} x^2\,\mathrm{d}x - 4\int_{-1}^{2} (x^2-3x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-1}^{2} \left[x^2 - 4(x^2-3x)\right]\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-1}^{2} (-3x^2+12x)\,\mathrm{d}x.$$

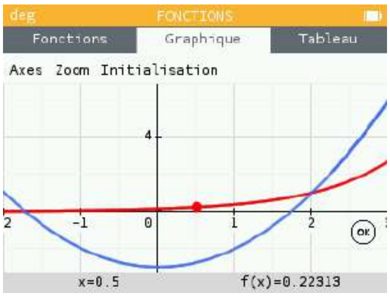
La fonction $f\colon x \mapsto -3x^2+12x$ est continue, car dérivable, sur $[-1;2]$. Elle admet pour primitive la fonction $F\colon x \mapsto -x^3+6x^2$. D'où $\displaystyle\int_{-1}^{2} (-3x^2+12x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{-1}^{2} = 9$.

Corrigé exercice 35 :

1. Par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_{-2}^{1} 3x\,\mathrm{d}x - 3\int_{-2}^{1} x\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} (3x-3x)\,\mathrm{d}x = 0$.
2. Par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 1\,\mathrm{d}x = 1$.
3. D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_{-4}^{1} (3t^2+2)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{3} (3t^2+2)\,\mathrm{d}t = \int_{-4}^{3} (3t^2+2)\,\mathrm{d}t$. Or, la fonction $t \mapsto 3t^2+2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet pour primitive la fonction F définie par $F(t) = t^3+2t$. D'où $\displaystyle\int_{-4}^{1} (3t^2+2)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{3} (3t^2+2)\,\mathrm{d}t = \left[t^3+2t\right]_{-4}^{3} = [3^3+2\times3] - [(-4)^3+2\times(-4)] = 105$.

Corrigé exercice 36 :

1. À l'aide d'une calculatrice, on obtient que, pour tout réel $x \in [-1;2]$, $f(x) \geqslant g(x)$.

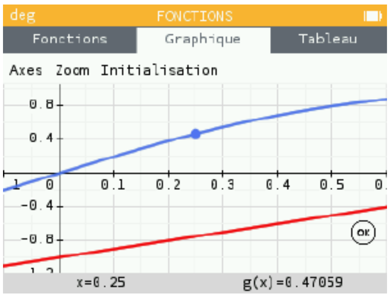


L'aire du domaine demandée, exprimée en u.a., est donc donnée par :

$$\int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} \left(\mathrm{e}^{x-2} - x^2 + 3\right)\ \mathrm{d}x.$$

On peut aussi répondre à cette question en étudiant les variations de la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$.

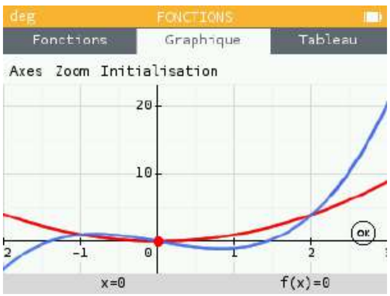
2. À l'aide d'une calculatrice, on obtient que, pour tout réel $x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$, $f(x) \leqslant g(x)$.



Donc l'aire du domaine demandée, exprimée en u.a., est donnée par :

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} [g(x) - f(x)]\ \mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2x}{x^2+1} - x + 1\right)\ \mathrm{d}x.$$

3. À l'aide d'une calculatrice, on obtient que, pour tout réel $x \in [-1; 0]$, $f(x) \leqslant g(x)$ et, pour tout réel $x \in [0; 2]$, $f(x) \geqslant g(x)$.



L'aire du domaine demandée, exprimée en u.a., est donc donnée par :

$$\int_{-1}^{0} [g(x) - f(x)]\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} [f(x) - g(x)]\ \mathrm{d}x =$$
$$\int_{-1}^{0} (x^3 - 2x - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} (x^2 - x^3 + 2x)\,\mathrm{d}x.$$

Corrigé exercice 37 :

La courbe représentative de f est au-dessus de la courbe représentative de g sur $[3;8]$. La valeur de l'intégrale correspond donc à l'aire du domaine compris entre les deux courbes et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 8$. Ainsi $\displaystyle\int_3^8 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x \approx 12$ u.a..

Corrigé exercice 38 :

1. Pour tout réel $x \in [-1;4]$, $-5 \leqslant f(x) \leqslant 7$. On intègre les inégalités précédentes sur $[-1;4]$ et on obtient $\displaystyle\int_{-1}^4 -5\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^4 7\,\mathrm{d}x$ soit
$$-25 \leqslant \int_{-1}^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 35.$$

2. Pour tout réel $x \in [-1;4]$, $\pi \leqslant f(x) \leqslant 4$. On intègre les inégalités précédentes sur $[-1;4]$ et on obtient $\displaystyle\int_{-1}^4 \pi\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^4 4\,\mathrm{d}x$ soit
$$5\pi \leqslant \int_{-1}^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 20.$$

3. Pour tout réel $x \in [-1;4]$, $-\dfrac{2}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$. On intègre les inégalités précédentes sur $[-1;4]$ et on obtient $\displaystyle\int_{-1}^4 -\frac{2}{3}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^4 1\,\mathrm{d}x$ soit
$$-\frac{10}{3} \leqslant \int_{-1}^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 5.$$

4. Pour tout réel $x \in [-1;4]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{3}$. On intègre les inégalités précédentes sur $[-1;4]$ et on obtient $\displaystyle\int_{-1}^4 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^4 \sqrt{3}\,\mathrm{d}x$ soit
$$0 \leqslant \int_{-1}^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 5\sqrt{3}.$$

Corrigé exercice 39 :

Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x \geqslant x$. De plus, les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}$. On intègre l'inégalité précédente sur $[0;5]$ et on obtient $\displaystyle\int_0^5 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^5 x\,\mathrm{d}x$. Donc $\displaystyle\int_0^5 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \geqslant \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5$ soit $\displaystyle\int_0^5 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{5^2}{2} - \frac{0^2}{2}$ d'où $\displaystyle\int_0^5 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{25}{2}$.

Corrigé exercice 40 :

En utilisant l'intégration par parties, on obtient les résultats suivants.

1. $\displaystyle\int_2^6 u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_2^6 - \int_2^6 u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_2^6 u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_2^6 - \int_2^6 u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle[u(x)v(x)]_{-3}^4 - \int_{-3}^4 u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-3}^4 u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle u(3)v(3)-u(1)v(1)-\int_1^3 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_1^3-\int_1^3 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$

Corrigé exercice 41 :

1. On pose $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = -x$. On a alors $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = -1$. De plus, u, v, u' et v' sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont continues sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par intégration par parties, $\displaystyle\int_0^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$
$\displaystyle= [-x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 -1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [-x\mathrm{e}^x]_0^1 - [-\mathrm{e}^x]_0^1 = -1.$
2. On pose $u'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $v(x) = x+3$. On a alors $u(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ et $v'(x) = 1$. De plus, u, v, u' et v' sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et u' et v' sont continues sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par intégration par parties, $\displaystyle\int_{-1}^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$
$\displaystyle= [-(x+3)\mathrm{e}^{-x}]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$
$= [-(x+3)\mathrm{e}^{-x}]_{-1}^1 - [\mathrm{e}^{-x}]_{-1}^1$
$= [-(1+3)\mathrm{e}^{-1} + (-1+3)\mathrm{e}^1] - [\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^1]$
$= -4\mathrm{e}^{-1} + 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e} = 3\mathrm{e} - 5\mathrm{e}^{-1}.$

Corrigé exercice 42 :

En posant $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = x^2$, on a $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = 2x$. De plus u, v, u' et v' sont bien dérivables sur $\mathbb{R}$ et u' et v' sont bien continues sur $\mathbb{R}$. Et, d'après l'intégration par parties,
$\displaystyle\int_2^5 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\mathrm{e}^x\right]_2^5 - \int_2^5 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_2^5 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 25\mathrm{e}^5 - 4\mathrm{e}^2 - \int_2^5 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

Corrigé exercice 43 :

Énoncé :
Soit f une fonction définie sur $[-2;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2} - x$.

1. a. Étudier les variations de la fonction f sur $[-1;2]$.

b. En déduire un encadrement de f sur $[-1;2]$.

2. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction :

1. a. f est une fonction dérivable sur $[-1;2]$ et, pour tout réel $x \in [-1;2]$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} - 1 = \dfrac{1-2\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}}$.
   Or, $-1 \leqslant x \leqslant 2$ donc $1 \leqslant x+2 \leqslant 4$ d'où, par croissance de la fonction racine carrée, $1 \leqslant \sqrt{x+2} \leqslant 2$ et donc $-2 \geqslant -2\sqrt{x+2} \geqslant -4$ et enfin $-1 \geqslant 1-2\sqrt{x+2} \geqslant -3$. Donc, en conclusion, $1-2\sqrt{x+2} < 0$.
   On en déduit que f' est strictement négative sur $[-1;2]$ et donc que f est strictement décroissante sur $[-1;2]$.
   b. D'après la question précédente, pour tout réel $x \in [-1;2]$, $f(2) \leqslant f(x) \leqslant f(-1)$ d'où $0 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

2. f est continue sur $[-1;2]$. On peut donc intégrer les inégalités précédentes sur $[-1;2]$ et on obtient alors $\displaystyle\int_{-1}^{2} 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{2} 2\,\mathrm{d}x$ d'où $\displaystyle 0 \leqslant \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 6$.

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 44 :

- D'après le graphique, la fonction f est positive. L'aire du domaine recherchée, exprimée en u.a., est donc égale à $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. De plus, cette aire est celle d'un rectangle de longueur 4 et largeur 2, d'où $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$.
- D'après le graphique, la fonction g est négative. L'aire du domaine recherchée, exprimée en u.a., est donc égale à $\displaystyle\int_1^5 -g(x)\,\mathrm{d}x$. De plus, cette aire est celle d'un rectangle de longueur 4 et largeur 4, d'où $\displaystyle\int_1^5 -g(x)\,\mathrm{d}x = 16$.
- D'après le graphique, la fonction h est positive sur $[1;5]$. L'aire du domaine recherchée, exprimée en u.a., est donc égale à $\displaystyle\int_1^5 h(x)\,\mathrm{d}x$. De plus, cette aire est celle d'un trapèze. Ainsi l'aire du domaine recherchée est :

$$\int_1^5 h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(B+b)\times h}{2} = \frac{(1+3)\times 4}{2} = 8.$$

Corrigé exercice 45 :

- f est positive sur $[-2;3]$ donc cette intégrale est égale à l'aire en u.a. du domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-2$ et $x=3$. Donc $\displaystyle\int_{-2}^3 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 6,5$.
- g est positive sur $[1;3]$ donc cette intégrale est égale à l'aire en u.a. du domaine compris entre la courbe représentative de g, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=3$. Donc $\displaystyle\int_1^3 g(t)\,\mathrm{d}t \approx 2,5$.

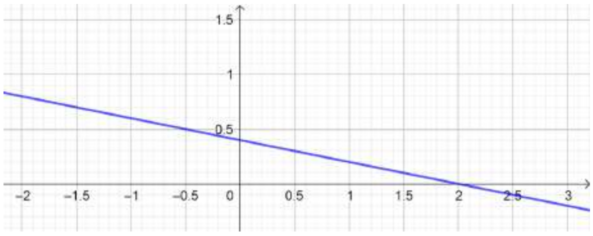
Corrigé exercice 46 :

D'après le cours, la fonction définie sur $[a;b]$ par $F_a(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a. Donc $F_a' = f$ sur $[a;b]$.
Donc f et g sont dérivables sur I et, pour tout réel x appartenant à I, on a :

1. $f'(x) = x^2$.
2. $g'(x) = \mathrm{e}^{2x+4}$.

Corrigé exercice 47 :

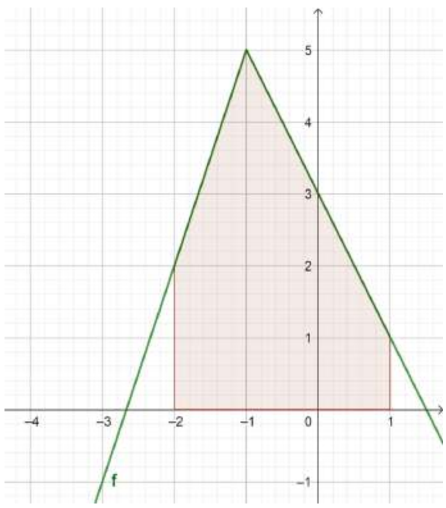
1. On obtient la représentation graphique ci-dessous.



2. a. f est une fonction affine de coefficient directeur $m = -0,2$ (donc $m < 0$) et s'annulant en $x = 2$. f est donc positive sur $[-2; 2]$ et négative sur $[2; 3]$. On sépare alors le domaine où la fonction est positive, sur $[-2; 2]$, et le domaine où la fonction est négative, sur $[2; 3]$.
Le premier domaine est un triangle de base $b = f(-2) = 0,4-0,2\times(-2) = 0,8$ et et hauteur 4. Donc, l'aire du premier domaine est égale à $\dfrac{4\times 0,8}{2} = 1,6$ u.a..
Le deuxième domaine est un triangle de base $b = |f(3)| = |0,4 - 0,2 \times 3| = 0,2$ et de hauteur 1. Donc, l'aire du deuxième domaine est égale à $\dfrac{1\times 0,2}{2} = 0,1$ u.a..
L'aire du domaine cherchée est donc égale à $1,6 + 0,1 = 1,7$ u.a..
Remarque : Il est possible aussi de déterminer cette aire en utilisant une primitive de la fonction f.
L'aire du premier domaine est $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[0,4x - 0,1x^2\right]_{-2}^{2} = 1,6$.
L'aire du deuxième domaine est $\displaystyle\int_{2}^{3} -f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-0,4x + 0,1x^2\right]_{2}^{3} = 0,1$.
L'aire du domaine cherchée est donc égale à $1,6 + 0,1 = 1,7$ u.a..
b. On a 1 u.a. $= 2 \times 2$ cm^2 $= 4$ cm^2. Donc, l'aire du domaine en cm^2 est égale à $1,7 \times 4 = 6,8$ cm^2.

Corrigé exercice 48 :

La courbe représentative de la fonction f est la suivante.



La fonction f est positive, cette intégrale est donc égale à l'aire du domaine entre la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.
On sépare alors ce domaine en deux domaines : celui compris entre les droites d'équation $x = -2$ et $x = -1$ et celui entre les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$. Ces deux domaines sont des trapèzes. L'aire du premier trapèze est égale à $\dfrac{(B+b)\times h}{2} = \dfrac{[f(-1)+f(-2)]\times[-1-(-2)]}{2} = \dfrac{(2+5)\times 1}{2} = \dfrac{7}{2}$ u.a..
L'aire du deuxième trapèze est égale à $\dfrac{(B+b)\times h}{2} = \dfrac{[f(-2)+f(1)]\times[1-(-1)]}{2} = \dfrac{(5+1)\times 2}{2} = 6$ u.a..
D'où $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{19}{2}$ u.a..

Corrigé exercice 49 :

1. L'aire du logo est égale à l'aire du domaine bleu. Par symétrie du logo, l'aire du domaine est le double de l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 5$.

   Donc l'aire du logo est égale à $\displaystyle 2\int_{0}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\times\frac{50}{3} = \frac{100}{3}$ u.a..
2. D'après l'énoncé, l'unité du graphique est 10 cm. Donc, 1 u.a. $= 10\times 10$ cm^2 $= 100$ cm^2. Donc, l'aire du logo est $100\times\dfrac{100}{3} = \dfrac{10000}{3}$ cm^2 soit $\dfrac{1}{3}$ m^2.

Corrigé exercice 50 :

- $f\colon x\mapsto 2x+1$ est une fonction affine de coefficient directeur $m = 2$ et s'annulant en $x = -\dfrac{1}{2}$. f est donc négative sur $\left[-1;-\dfrac{1}{2}\right]$ et positive sur $\left[-\dfrac{1}{2};5\right]$. On sépare alors les domaines où la fonction est négative, sur $\left[-1;-\dfrac{1}{2}\right]$, et où la fonction est positive, sur $\left[-\dfrac{1}{2};5\right]$. Le premier domaine est un triangle de base $b = |f(-1)| = |2\times(-1)+1| = 1$ et de hauteur $\dfrac{1}{2}$ donc l'aire de ce domaine est égale à $\dfrac{\frac{1}{2}\times 1}{2} = \dfrac{1}{4}$ u.a..

  Le deuxième domaine est donc un triangle de base $B = f(5) = 2\times 5+1 = 11$ et de hauteur $\dfrac{11}{2}$. Donc, l'aire du deuxième domaine est égale à $\dfrac{\frac{11}{2}\times 11}{2} = \dfrac{121}{4}$ u.a..

  D'où $\displaystyle\int_{-1}^{5} (2x+1)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}+\frac{121}{4} = 20$.
- $g\colon x\mapsto |x+2|$ est une fonction positive sur $[-3;1]$ donc cette intégrale est égale à l'aire du domaine située entre la courbe représentative de g, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 1$.

On sépare ce domaine en deux domaines : celui compris entre les droites d'équation $x = -3$ et $x = -2$ et celui compris entre les droites d'équation $x = -2$ et $x = 1$.

Le premier domaine est un triangle de base $b = f(-3) = 1$ et de hauteur 1 donc d'aire égale à $\dfrac{1 \times 1}{2} = \dfrac{1}{2}$ u.a..

Le deuxième domaine est un triangle de base $b = f(1) = 3$ et de hauteur 3 donc d'aire égale à $\dfrac{3 \times 3}{2} = \dfrac{9}{2}$ u.a..

D'où $\displaystyle\int_{-3}^{1} |x+2| \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$.

Corrigé exercice 51 :

1. Cette affirmation est fausse. D'après le cours,la fonction définie sur $[a; b]$ par $F_a(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a. Donc $F_a' = f$ sur $[a; b]$. La dérivée de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $\displaystyle\int_0^x \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ est donc définie par $f'(x) = \sqrt{x}$.
2. Cette affirmation est vraie. En effet, d'après le cours,la fonction définie sur $[a; b]$ par $F_a(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a.

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 52 :

f est une fonction dérivable, donc continue, sur $[1;2]$. Une primitive de f est F définie par $F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{3}{2}x^2 - x$. Ainsi $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x} + \frac{3}{2}x^2 - x\right]_1^2 = 4$.

Corrigé exercice 53 :

g est une fonction dérivable, donc continue, sur $[-2;4]$. Une primitive de g est G définie par $G(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$. Ainsi $\int_{-2}^4 g(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_{-2}^4 = -6$.

Corrigé exercice 54 :

h est une fonction dérivable, donc continue, sur $[1;4]$. Une primitive de h est H définie par $H(x) = 2\sqrt{x}$. Ainsi $\int_1^4 h(x)\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = \left[2\sqrt{4}\right] - \left[2\sqrt{1}\right] = 2$.
La valeur moyenne de h sur $[1;4]$ est donc égale à $\frac{1}{4-1}\int_1^4 h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$.

Corrigé exercice 55 :

1. Pour tout réel $x \in [4;10]$, on a, par décroissance de la fonction inverse, $\frac{1}{10} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{4}$.
2. La fonction inverse est dérivable, donc continue, sur $[4;10]$. On intègre alors les inégalités précédentes sur $[4;10]$, et on obtient alors $\int_4^{10} \frac{1}{10}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_4^{10} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_4^{10} \frac{1}{4}\,\mathrm{d}x$ d'où $\frac{3}{5} \leqslant \int_4^{10} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{3}{2}$.

Corrigé exercice 56 :

La fonction $x \mapsto x\sin(x)$ est dérivable, donc continue sur $[0;2]$.
Or d'après l'énoncé, pour tout $x \in [0;2]$, $-x \leqslant x\sin(x) \leqslant x$ d'où

$$\int_0^2 -x\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 x\sin(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 x\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 \leqslant \int_0^2 x\sin(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$$
$$\Leftrightarrow -2 \leqslant \int_0^2 x\sin(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2.$$

Corrigé exercice 57 :

D'après le graphique, la fonction est continue, négative sur $[1;2]$ et positive sur $[2;5]$.
D'où $\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -0,5 + 4,5 = 4$.

Corrigé exercice 58 :

1. On définit la fonction g sur I par $g(x) = f(x) - m$.

   f est continue sur I. Donc, g est continue sur I. De plus, m est le minimum de f sur I donc, pour tout réel $x \in [a; b]$, on a $f(x) \geqslant m$, soit $f(x) - m \geqslant 0$ et donc g est positive sur I. On en déduit que g admet une primitive G sur I définie par $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Soit F la fonction définie sur I par $F(x) = G(x) + mx$. La fonction F est dérivable sur I et, pour tout réel $x \in I$, $F'(x) = G'(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$. F est donc une primitive de f sur I.

Corrigé exercice 59 :

La fonction $u\colon t \mapsto t^2 + 2t - 5$ est dérivable, donc continue sur $[-5; +\infty[$. f est donc dérivable sur $[-5; +\infty[$ et, pour tout $x \in [-5; +\infty[, f'(x) = x^2 + 2x - 5$.
On calcule alors le déterminant de f', fonction polynôme du second degré : $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 24$. f' admet donc deux racines réelles :$x_1 = -1 - \sqrt{6}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{6}$.
On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$.

x	-5		$-1-\sqrt{6}$		$-1+\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

f est donc croissante sur $\left[-5; -1 - \sqrt{6}\right]$, décroissante sur $\left[-1 - \sqrt{6}; -1 + \sqrt{6}\right]$ puis croissante sur $\left[-1 + \sqrt{6}; +\infty\right[$.

Corrigé exercice 60 :

Les fonctions à intégrer sont toutes dérivables, donc continues, sur l'intervalle d'intégration.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{4} (x^2 - 4x - 1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - x\right]_{-1}^{4} = -\frac{40}{3}$

2. $\displaystyle\int_{-2}^{2} 5\,\mathrm{d}x = [5x]_{-2}^{2} = 20$

3. $\displaystyle\int_{0}^{3} \left(\frac{1}{7}t + 2\right)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{14}t^2 + 2t\right]_{0}^{3} = \frac{93}{14}$

4. $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{2}} \left(x^4 - 2x^2 + 9\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 9x\right]_{1}^{\sqrt{2}} = \frac{127\sqrt{2} - 128}{15}$

5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(3t^3 + 3t^2 - 5t + 1\right)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{3}{4}t^4 + t^3 - \frac{5}{2}t^2 + t\right]_{-1}^{1} = 4$

6. $\displaystyle\int_1^3 1\,\mathrm{d}x = [x]_1^3 = 2$

Corrigé exercice 61 :

Les fonctions à intégrer sont toutes dérivables, donc continues, sur l'intervalle d'intégration.

1. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{4}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{4}{x}\right]_{-2}^{-1} = 2$
2. $\displaystyle\int_5^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_5^1 = \mathrm{e} - \mathrm{e}^5$ (Attention, dans cette question, les bornes de l'intervalle ont été volontairement inversées : le nombre le plus petit est en haut).
3. $\displaystyle\int_2^{49} \frac{3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[6\sqrt{x}\right]_2^{49} = 42 - 6\sqrt{2}$
4. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(\mathrm{e}^x + 3x^3 - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{x}\right]_{-2}^{-1} = \frac{-47\mathrm{e}^2 + 4\mathrm{e} - 4}{4\mathrm{e}^2}$

Corrigé exercice 62 :

Les fonctions à intégrer sont toutes dérivables, donc continues sur l'intervalle d'intégration.

1. La fonction $x \mapsto 3x^2(5x^3-1)^2$ est de la forme $\dfrac{1}{15}u'u^2$ avec $u(x) = 5x^3 - 1$ et $u'(x) = 15x^2$. Une primitive de cette fonction est donc $x \mapsto \dfrac{1}{15}(5x^3-1)^3$. D'où $\displaystyle\int_{-1}^{2} 3x^2(5x^3-1)^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{15}(5x^3-1)^3\right]_{-1}^{2} = 3969$.
2. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{5x-1}$ est de la forme $\dfrac{1}{5}u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = 5x - 1$ et $u'(x) = 5$. Une primitive de cette fonction est donc $x \mapsto \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{5x-1}$. D'où $\displaystyle\int_{-2}^{1} \mathrm{e}^{5x-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x-1}\right]_{-2}^{1} = \frac{\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^{-11}}{5}$.
3. La fonction $x \mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{2x^2+1}}$ est de la forme $\dfrac{3}{2}\times\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 2x^2+1$ et $u'(x) = 4x$. Une primitive de cette fonction est donc $x \mapsto \dfrac{3}{2}\sqrt{2x^2+1}$. D'où $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{3x}{\sqrt{2x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}\sqrt{2x^2+1}\right]_{-2}^{3} = \frac{3\sqrt{19}-9}{2}$.
4. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x(5\mathrm{e}^x+3)^2$ est de la forme $\dfrac{1}{15}u'u^2$ avec $u(x) = 5\mathrm{e}^x + 3$ et $u'(x) = 5\mathrm{e}^x$. Une primitive de cette fonction est donc $x \mapsto \dfrac{1}{15}(5\mathrm{e}^x+3)^3$. D'où $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^x(5\mathrm{e}^x+3)^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{15}(5\mathrm{e}^x+3)^3\right]_0^2 = \frac{(5\mathrm{e}^2+3)^3 - 512}{3}$.

5. La fonction $x \mapsto \dfrac{2}{(3-5x)^2}$ est de la forme $-\dfrac{2}{5}\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 3-5x$ et $u'(x) = -5$. Une primitive de cette fonction est donc $x \mapsto \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{3-5x}$. D'où $\displaystyle\int_1^2 \dfrac{2}{(3-5x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{3-5x}\right]_1^2 = \dfrac{1}{7}$.

6. Pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est de la forme $-u'\mathrm{e}^u$, avec $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Une primitive de cette fonction est donc $x \mapsto -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. D'où $\displaystyle\int_1^2 \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

Corrigé exercice 63 :

1. f est dérivable, donc continue, sur $\mathbb{R}$. f admet donc une primitive. Une primitive de f est $F\colon x \mapsto 2x - x^3$. D'où $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[2x - x^3\right]_0^2 = -4$.

2. La valeur moyenne de f sur $[0;2]$ est $\dfrac{1}{2-0}\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2} \times (-4) = -2$.

Corrigé exercice 64 :

Les fonctions à intégrer sont toutes dérivables, donc continues, sur l'intervalle d'intégration.

1. Une primitive de $f : x \mapsto 1-5x^2$ est $F\colon x \mapsto x - \dfrac{5}{3}x^3$. La valeur moyenne de f sur I est $\dfrac{1}{5-(-2)}\displaystyle\int_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{7}\left[x - \dfrac{5}{3}x^3\right]_{-2}^5 = -\dfrac{92}{3}$.

2. Une primitive de $f : x \mapsto 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ est $F\colon x \mapsto \dfrac{3}{4}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - x$. La valeur moyenne de f sur I est $\dfrac{1}{3-(-1)}\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{3}{4}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - x\right]_{-1}^3 = \dfrac{31}{30}$.

3. Une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{5}{3x^2}$ est $F\colon x \mapsto -\dfrac{5}{3x}$. La valeur moyenne de f sur I est $\dfrac{1}{(-1)-(-4)}\displaystyle\int_{-4}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\left[-\dfrac{5}{3x}\right]_{-4}^{-1} = \dfrac{5}{12}$.

4. Une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{3}{5\sqrt{x}}$ est $F\colon x \mapsto \dfrac{6}{5}\sqrt{x}$. La valeur moyenne de f sur I est $\dfrac{1}{4-1}\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{6}{5}\sqrt{x}\right]_1^4 = \dfrac{2}{5}$.

5. Une primitive de $f : x \mapsto 2\mathrm{e}^x$ est $F\colon x \mapsto 2\mathrm{e}^x$. La valeur moyenne de f sur I est $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\left[2\mathrm{e}^x\right]_{\frac{1}{2}}^1 = 4\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)$.

Corrigé exercice 65 :

1. La fonction f est dérivable, donc continue, sur $\mathbb{R}$. f est de la forme $5u'u^4$ avec $u(x) = x^2 + 3$ et $u'(x) = 2x$. Une primitive de f est donc $F\colon x \mapsto (x^2 + 3)^5$.

2. On en déduit que $\displaystyle\int_{-0,5}^{1} 10x(x^2+3)^4 \, \mathrm{d}x = \left[(x^2+3)^5\right]_{-0,5}^{1} = \frac{677\,283}{1024}$.

3. La valeur moyenne de f sur $[-0,5;1]$ est :
$$\frac{1}{1-(-0,5)} \int_{-0,5}^{1} 10x(x^2+3)^4 \, \mathrm{d}x = \frac{225\,761}{512} \approx 440,94.$$

Corrigé exercice 66 :

Les fonctions à intégrer sont toutes dérivables, donc continues, sur l'intervalle d'intégration.

1. La fonction f est de la forme $\dfrac{1}{6}u'u^2$ avec $u(x) = 3x^2 - 1$ et $u'(x) = 6x$. Une primitive de cette fonction est donc $x \mapsto \dfrac{1}{18}(3x^2-1)^3$.
D'où $\displaystyle\int_{-1}^{2} x(3x^2-1)^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{18}(3x^2-1)^3\right]_{-1}^{2} = \frac{147}{2}$.
La valeur moyenne de f sur I est donc égale à $\displaystyle\frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2} f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \times \frac{147}{2} = \frac{49}{2}$.

2. La fonction f est de la forme $-\dfrac{3}{2}u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x^2 - 2$ et $u'(x) = 2x$. Une primitive de cette fonction est donc $x \mapsto -\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{x^2-2}$.
D'où $\displaystyle\int_{-1}^{3} -3x\mathrm{e}^{x^2-2} \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{x^2-2}\right]_{-1}^{3} = \frac{3(-\mathrm{e}^7 + \mathrm{e}^{-1})}{2}$.
La valeur moyenne de f sur I est donc égale à :
$$\frac{1}{3-(-1)}\int_{-1}^{3} f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \times \frac{3(-\mathrm{e}^7 + \mathrm{e}^{-1})}{2} = \frac{3(-\mathrm{e}^7 + \mathrm{e}^{-1})}{8}.$$

3. La fonction f est de la forme $-\dfrac{1}{3} \times \dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 8 - x^3$ et $u'(x) = -3x^2$.
Une primitive de cette fonction est donc $x \mapsto \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{u}$.
D'où $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2}{(8-x^3)^2} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3} \times \frac{1}{8-x^3}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{168}$.
La valeur moyenne de f sur I est donc égale à $\displaystyle\frac{1}{1-0}\int_{0}^{1} f(x)\, \mathrm{d}x = 1 \times \frac{1}{168} = \frac{1}{168}$.

4. La fonction f est de la forme $\dfrac{3}{20} \times \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^4 + 2$ et $u'(x) = 4x^3$.

   Une primitive de cette fonction est donc $x \mapsto \dfrac{3}{10}\sqrt{x^4+2}$.

   D'où $\displaystyle\int_1^4 \frac{3x^3}{5\sqrt{x^4+2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{10}\sqrt{x^4+2}\right]_1^4 = \frac{3(\sqrt{258}-\sqrt{3})}{10}$.

   La valeur moyenne de f sur I est donc :

$$\frac{1}{4-1}\int_1^4 \frac{3x^3}{5\sqrt{x^4+2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \times \frac{3(\sqrt{258}-\sqrt{3})}{10} = \frac{\sqrt{258}-\sqrt{3}}{10}.$$

Corrigé exercice 67 :

1. F est une fonction affine telle que $F(0) = 400$, l'expression de F est donc de la forme $F(x) = mx + p$ avec $p = 400$. De plus $F(4) = 0$ donc $4m + 400 = 0$. D'où $m = -100$. Et donc $F(x) = -100x + 400$.

2. F est une fonction dérivable, donc continue, sur $\mathbb{R}$.
   Une primitive de F est $x \mapsto -50x^2 + 400x$.
   Donc, le travail de cette force est égale à $\displaystyle\int_0^4 F(x)\,\mathrm{d}x = \left[-50x^2 + 400x\right]_0^4 = 800$ Joules.

Corrigé exercice 68 :

v est une fonction dérivable, donc continue, sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel t, on a $v(t) = -6t^2 + 48t$. Ainsi une primitive de v est $t \mapsto -2t^3 + 24t^2$. La vitesse moyenne de Charline lors de ce trajet vaut donc $\displaystyle\frac{1}{8-0}\int_0^8 v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\left[-2t^3 + 24t^2\right]_0^8 = 64$ km.h^{-1}.

Corrigé exercice 69 :

Les fonctions à intégrer sont toutes dérivables, donc continues, sur l'intervalle d'intégration.

1. Par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_{-2}^3 (3x-6)\,\mathrm{d}x + 3\int_{-2}^3 (2-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^3 0\,\mathrm{d}x = 0$.

2. D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_{-1}^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int_1^{-1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{-1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 0$.

3. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_{-1}^0 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x - 2\int_2^0 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^2 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

   D'après la relation de Chasles,

$$\int_{-1}^0 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x - 2\int_2^0 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Or, une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2+1}$.

D'où $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x - 2\int_{2}^{0} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x^2+1}\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{10}$.

Corrigé exercice 70 :

1. a. f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive que l'on note F. On a alors $\ell(a) = F(a+T) - F(a)$. De plus F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$. Donc ℓ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\ell'(a) = F'(a+T) - F'(a) = f(a+T) - f(a) = 0$ car f est périodique de période T.

   b. On en déduit que ℓ est constante sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout réel a, on a donc $\ell(a) = \ell(0)$, soit $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Corrigé exercice 71 :

1. a. La symétrie de la courbe représentative de f par rapport à l'axe des ordonnées permet d'écrire $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   b. Pour tout réel a, d'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ d'où $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. La fonction valeur absolue est paire donc :
$$\int_{-\pi}^{\pi} |x|\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} |x|\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} 2x\mathrm{d}x = \left[x^2\right]_0^{\pi} = \pi^2.$$

Corrigé exercice 72 :

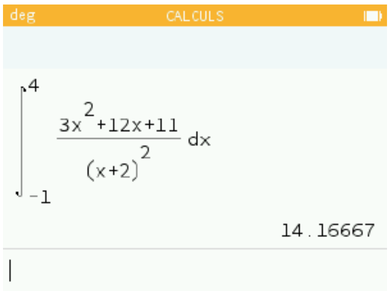
1. f est une fonction continue et impaire sur $\mathbb{R}$. La courbe représentative de f est donc symétrique par rapport à l'origine du repère. On note $\mathcal{D}_1$ le domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -a$ et $x = 0$, et $\mathcal{D}_2$ le domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$. La symétrie de la courbe représentative de f permet d'écrire $\text{aire}\,(\mathcal{D}_1) = \text{aire}\,(\mathcal{D}_2)$ et le signe de f sur $[-a;0]$ est l'opposé du signe de f sur $[0;a]$.

   On peut donc écrire $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Pour tout réel a, d'après la relation de Chasles,
$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ d'où $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Corrigé exercice 73 :

1. À l'aide d'une calculatrice, on obtient $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 14,17$.



2. a. Pour tout réel $x \neq -2$, $3 - \dfrac{1}{(x+2)^2} = \dfrac{3(x+2)^2 - 1}{(x+2)^2} = \dfrac{3x^2+12x+11}{(x+2)^2}$. Donc, pour tout réel $x \neq -2$, $f(x) = 3 - \dfrac{1}{(x+2)^2}$.

   b. f est une fonction continue, car dérivable, sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.
   Donc $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{4}\left(3 - \frac{1}{(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x = [3x]_{-1}^{4} - \left[-\frac{1}{x+2}\right]_{-1}^{4} = \frac{85}{6}$.

Corrigé exercice 74 :

1. Soit un réel x tel que $1 \leqslant x \leqslant 6$. Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, $\dfrac{1}{1} \geqslant \dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{6}$ et donc $\dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1$.

2. La fonction inverse est continue sur $]0;+\infty[$. On intègre alors les inégalités précédentes et on obtient $\displaystyle\int_{1}^{6}\frac{1}{6}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{1}^{6}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{1}^{6} 1\,\mathrm{d}x$ d'où $\displaystyle\frac{5}{6} \leqslant \int_{1}^{6}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant 5$.

Corrigé exercice 75 :

1. Soit un réel x tel que $0 \leqslant x \leqslant 2$. Comme la fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$ et donc $1 \leqslant 1+x^2 \leqslant 5$. De plus, la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, d'où $\dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$. Enfin, on multiplie tous les membres de l'inégalité par $x^3 \geqslant 0$, ce qui nous permet alors d'obtenir $\dfrac{x^3}{5} \leqslant \dfrac{x^3}{1+x^2} \leqslant x^3$.

2. f est continue, car dérivable, sur $\mathbb{R}$. On intègre alors les inégalités précédentes et on obtient $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{x^3}{5}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{0}^{2}\frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{0}^{2} x^3\,\mathrm{d}x$ d'où $\displaystyle\left[\frac{1}{20}x^4\right]_{0}^{2} \leqslant \int_{0}^{2}\frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{2}$ et donc $\displaystyle\frac{4}{5} \leqslant \int_{0}^{2}\frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 4$.

9 Exercices d'entraînement partie 3

Corrigé exercice 76 :

On pose ici $u'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $v(x) = 3x$, d'où $u(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ et $v'(x) = 3$. De plus u, v, u' et v' sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient alors
$\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-3x\mathrm{e}^{-x}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -3\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$
Or $x \mapsto -3\mathrm{e}^{-x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admettant donc une primitive.Une telle primitive est la fonction $F : x \mapsto 3\mathrm{e}^{-x}$.
D'où $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -3\mathrm{e}^{-1} - 3\mathrm{e}^{1} - \left[3\mathrm{e}^{-x}\right]_{-1}^{1} = -6\mathrm{e}^{-1}.$

Corrigé exercice 77 :

On pose ici $u'(x) = \mathrm{e}^{x}$ et $v(x) = 4x$, d'où $u(x) = \mathrm{e}^{x}$ et $v'(x) = 4$. De plus u, v, u' et v' sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient alors $\displaystyle\int_{0}^{6} 4x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = [4x\mathrm{e}^{x}]_0^6 - \int_0^6 4\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x.$
Or $x \mapsto 4\mathrm{e}^{x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admettant donc une primitive.Une telle primitive est la fonction $F : x \mapsto 4\mathrm{e}^{x}$.
D'où $\displaystyle\int_{0}^{6} 4x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = [4x\mathrm{e}^{x}]_0^6 - \int_0^6 4\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = 24\mathrm{e}^{6} - [4\mathrm{e}^{x}]_0^6 = 20\mathrm{e}^{6} + 4.$

Corrigé exercice 78 :

On pose ici $u'(x) = \dfrac{1}{(2+x)^3}$ et $v(x) = x$, d'où $u(x) = -\dfrac{1}{2(2+x)^2}$ et $v'(x) = 1$. De plus u, v, u' et v' sont dérivables sur $[-1;2]$, et u' et v' sont continues sur $[-1;2]$. Par intégration par parties, on obtient alors $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x}{(2+x)^3}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\frac{x}{(2+x)^2}\right]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} -\frac{1}{2}\frac{1}{(2+x)^2}\,\mathrm{d}x.$
Or $x \mapsto -\dfrac{1}{2(2+x)^2}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admettant donc une primitive.
Une telle primitive est la fonction $F : x \mapsto \dfrac{1}{2(2+x)}$.
D'où $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x}{(2+x)^3}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\frac{x}{(2+x)^2}\right]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} -\frac{1}{2}\frac{1}{(2+x)^2}\,\mathrm{d}x$
$\displaystyle= \left[-\frac{1}{2}\frac{x}{(2+x)^2}\right]_{-1}^{2} - \left[\frac{1}{2}\frac{1}{2+x}\right]_{-1}^{2} = -\frac{3}{16}.$

Corrigé exercice 79 :

1. On pose $u'(x) = \mathrm{e}^{3x-1}$ et $v(x) = 4x$. u est donc définie par $u(x) = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x-1}$ et, pour tout réel x, on a $v'(x) = 4$. De plus u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient alors $\displaystyle I = \int_{-2}^{2} 4x\mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{3}x\mathrm{e}^{3x-1}\right]_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2} \frac{4}{3}\mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x.$

Or $x \mapsto \frac{4}{3}e^{3x-1}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admettant donc une primitive. Elle admet pour primitive la fonction $F\colon x \mapsto \frac{4}{9}e^{3x-1}$.
D'où $I = \left[\frac{4}{3}xe^{3x-1}\right]_{-2}^{2} - \left[\frac{4}{9}e^{3x-1}\right]_{-2}^{2} = \frac{20}{9}e^5 + \frac{28}{9}e^{-7}$.

2. On pose $u'(x) = e^{4+5x}$ et $v(x) = x$. u est donc définie par $u(x) = \frac{1}{5}e^{4+5x}$ et, pour tout réel x, on a $v'(x) = 1$. De plus u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient alors $\int_0^1 xe^{4+5x}\,dx = \left[\frac{1}{5}xe^{4+5x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{5}e^{4+5x}\,dx$. Or $x \mapsto \frac{1}{5}e^{4+5x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admettant donc une primitive. Une telle primitive est la fonction $F\colon x \mapsto \frac{1}{25}e^{4+5x}$. D'où $J = \left[\frac{1}{5}xe^{4+5x}\right]_{-2}^{2} - \left[\frac{1}{25}e^{4+5x}\right]_{-2}^{2} = \frac{4}{25}e^9 + \frac{1}{25}e^4$.

Corrigé exercice 80 :

On pose $u'(x) = 2xe^{x^2-1}$ et $v(x) = x^2$. u est donc définie par $u(x) = e^{x^2-1}$ et, pour tout réel x, on a $v'(x) = 2x$. u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient alors $\int_{-1}^{1} 2x^3e^{x^2-1}\,dx = \left[x^2e^{x^2-1}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2xe^{x^2-1}\,dx$. Or $x \mapsto 2xe^{x^2-1}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admettant donc une primitive. Une telle primitive est la fonction $F\colon x \mapsto e^{x^2-1}$.
Donc $I = \left[x^2e^{x^2-1}\right]_{-1}^{1} - \left[e^{x^2-1}\right]_{-1}^{1} = [e^0 - e^0] - [e^0 - e^0] = 0$.
Remarque : La fonction à intégrer est une fonction impaire. Il est donc possible de calculer cette intégrale sans utiliser une intégration par parties.

Corrigé exercice 81 :

1. On pose $u'(x) = \frac{1}{(5x+3)^3}$ et $v(x) = x$. u est donc définie par $u(x) = -\frac{1}{10}\frac{1}{(5x+3)^2}$ et, pour tout réel x, $v'(x) = 1$. u et v sont dérivables, donc continues sur $[0;1]$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $[0;1]$. Par intégration par parties, on obtient $\int_0^1 \frac{x}{(5x+3)^3}\,dx = \left[-\frac{1}{10}\frac{x}{(5x+3)^2}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{10}\frac{1}{(5x+3)^2}\,dx$.
Or, $x \mapsto -\frac{1}{10}\frac{1}{(5x+3)^2}$ est une fonction continue sur $[0;1]$ et admettant donc une primitive. Une telle primitive est la fonction $F\colon x \mapsto \frac{1}{50}\frac{1}{5x+3}$.
D'où $I = \left[-\frac{1}{10}\frac{x}{(5x+3)^2}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{50}\frac{1}{5x+3}\right]_0^1 = \frac{1}{384}$.

2. On pose $u'(x) = \frac{1}{(3x-9)^3}$ et $v(x) = 5x$. u est donc définie par $u(x) = -\frac{1}{6}\frac{1}{(3x-9)^2}$ et, pour tout réel x, $v'(x) = 5$. u et v sont dérivables, donc continues sur $[-1;0]$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $[-1;0]$. Par intégration par parties, on

obtient $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{5x}{(3x-9)^3}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}\frac{5x}{(3x-9)^2}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -\frac{5}{6}\frac{1}{(3x-9)^2}\,\mathrm{d}x$.
Or, $x \mapsto -\dfrac{5}{6}\dfrac{1}{(3x-9)^2}$ est une fonction continue sur $[-1;0]$ et admettant donc une primitive. Une primitive de f est $F\colon x \mapsto \dfrac{5}{18}\dfrac{1}{3x-9}$.
D'où $J = \left[-\dfrac{1}{6}\dfrac{5x}{(3x-9)^2}\right]_{-1}^{0} - \left[\dfrac{5}{18}\dfrac{1}{3x-9}\right]_{-1}^{0} = \dfrac{5}{2592}$.

Corrigé exercice 82 :

1. On pose $u'(x) = (8x+2)^2$ et $v(x) = 2x$. u est donc définie par $u(x) = \dfrac{1}{24}(8x+2)^3$ et, pour tout réel x, $v'(x) = 2$. u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2x(8x+2)^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{12}x(8x+2)^3\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{1}{12}(8x+2)^3\,\mathrm{d}x$.
   Or, $x \mapsto \dfrac{1}{12}(8x+2)^3$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admettant donc une primitive.
   Elle admet pour primitive la fonction $F\colon x \mapsto \dfrac{1}{384}(8x+2)^4$.
   D'où $I = \left[\dfrac{1}{12}x(8x+2)^3\right]_{-1}^{1} - \left[\dfrac{1}{384}(8x+2)^4\right]_{-1}^{1} = \dfrac{128}{3}$.
   Remarque : Il est aussi possible de développer l'expression de départ et de déterminer ensuite une primitive de cette forme développée.

2. On pose $u'(x) = (8x+2)^5$ et $v(x) = -x$. u est donc définie par $u(x) = \dfrac{1}{48}(8x+2)^6$ et, pour tout réel x, $v'(x) = -1$. u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, $\displaystyle\int_{-2}^{1} -x(8x+2)^5\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{48}x(8x+2)^6\right]_{-2}^{1} - \int_{-2}^{1} -\frac{1}{48}(8x+2)^6\,\mathrm{d}x$. Or, $x \mapsto -\dfrac{1}{48}(8x+2)^6$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc une primitive. Elle admet pour primitive la fonction $F\colon x \mapsto -\dfrac{1}{2688}(8x+2)^7$.
   D'où $J = \left[-\dfrac{1}{48}x(8x+2)^6\right]_{-2}^{1} - \left[-\dfrac{1}{2688}(8x+2)^7\right]_{-2}^{1} = -\dfrac{2041392}{7}$.

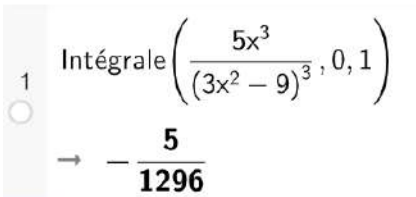
Corrigé exercice 83 :

1. On pose $u'(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$ et $v(x) = 3x^2$. u est donc définie par $u(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ et, pour tout réel x, on a $v'(x) = 6x$. u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient $\displaystyle\int_{-1}^{3} 3x^3\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}x^2\mathrm{e}^{x^2}\right]_{-1}^{3} - \int_{-1}^{3} 3x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$. Or, $x \mapsto 3x\mathrm{e}^{x^2}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui admet donc une primitive. Elle admet pour primitive la fonction $F\colon x \mapsto \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{x^2}$. D'où $I = \left[\dfrac{3}{2}x^2\mathrm{e}^{x^2}\right]_{-1}^{3} - \left[\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{x^2}\right]_{-1}^{3} = \left[\dfrac{27}{2}\mathrm{e}^9 - \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^1\right] - \left[\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^9 - \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^1\right] = 12\mathrm{e}^9$.

2. On pose $u'(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x-1}$ et $v(x) = 4(2x+1)^2$. u' est de la forme $w'\mathrm{e}^w$ avec $w(x) = x^2+x-1$ donc u est donc définie par $u(x) = \mathrm{e}^{w(x)} = \mathrm{e}^{x^2+x-1}$. Pour tout réel x, $v'(x) = 16(2x+1)$. De plus, u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient $\displaystyle\int_0^2 4(2x+1)^3\mathrm{e}^{x^2+x-1}\,\mathrm{d}x = \left[4(2x+1)^2\mathrm{e}^{x^2+x-1}\right]_0^2 - \int_0^2 16(2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x-1}\,\mathrm{d}x$.
   Or, $x \mapsto 16(2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x-1}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une primitive. Elle admet pour primitive la fonction $F\colon x \mapsto 16\mathrm{e}^{x^2}+x-1$.
   D'où $J = \left[4(2x+1)^2\mathrm{e}^{x^2+x-1}\right]_0^2 - \left[16\mathrm{e}^{x^2+x-1}\right]_0^2 = 84\mathrm{e}^5 + 12\mathrm{e}^{-1}$.

Corrigé exercice 84 :

1. On pose $u'(x) = \dfrac{x}{(3x^2-9)^3}$ et $v(x) = 5x^2$.
   u est donc définie par $u(x) = -\dfrac{1}{12}\dfrac{1}{(3x^2-9)^2}$ et, pour tout réel x, $v'(x) = 10x$. u et v sont dérivables, donc continues sur $[0;1]$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $[0;1]$. Par intégration par parties, on obtient $\displaystyle\int_0^1 \frac{5x^3}{(3x^2-9)^3}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{5}{12}\frac{x^2}{(3x^2-9)^2}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{10}{12}\frac{x}{(3x^2-9)^2}\,\mathrm{d}x$. Or, $x \mapsto -\dfrac{10}{12}\dfrac{x}{(3x^2-9)^2}$ est une fonction continue sur $[0;1]$, elle admet donc une primitive. Elle admet donc pour primitive la fonction $F\colon x \mapsto \dfrac{5}{36}\dfrac{1}{3x^2-9}$.
   D'où $I = \left[-\dfrac{5}{12}\dfrac{x^2}{(3x^2-9)^2}\right]_0^1 - \left[\dfrac{5}{36}\dfrac{1}{3x^2-9}\right]_0^1 = -\dfrac{5}{1296}$.
   Avec Geogebra, on obtient le résultat ci-dessous.
   Ce qui correspond bien à ce que nous avons trouvé.



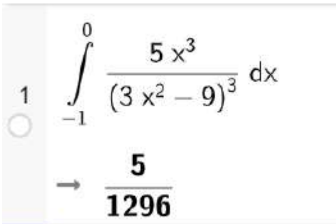
2. On pose $u'(x) = \dfrac{x}{(3x^2-9)^3}$ et $v(x) = 5x^2$.
   u est donc définie par $u(x) = -\dfrac{1}{12}\dfrac{1}{(3x^2-9)^2}$ et, pour tout réel x, $v'(x) = 10x$. u et v sont dérivables, donc continues sur $[-1;0]$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $[-1;0]$. Par intégration par parties, on obtient $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{5x^3}{(3x^2-9)^3}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{12}\frac{5x^2}{(3x^2-9)^2}\right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 -\frac{10}{12}\frac{x}{(3x^2-9)^2}\,\mathrm{d}x$. Or, $x \mapsto -\dfrac{10}{12}\dfrac{x}{(3x^2-9)^2}$ est une fonction continue sur $[-1;0]$, elle admet donc des primitives. Elle admet pour primitive

la fonction $F\colon x \mapsto \dfrac{5}{36}\dfrac{1}{3x^2-9}$.

D'où $J = \left[-\dfrac{5}{12}\dfrac{x^2}{(3x^2-9)^2}\right]_{-1}^{0} - \left[\dfrac{5}{36}\dfrac{1}{3x^2-9}\right]_{-1}^{0} = \dfrac{5}{1296}$.

Avec Geogebra, on obtient le résultat ci-dessous.

Ce qui correspond bien à ce que nous avons trouvé.



Remarque : La fonction à intégrer est impaire, donc les intégrales I et J sont opposées.

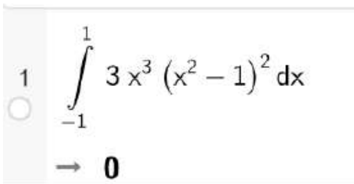
Corrigé exercice 85 :

1. On pose $u'(x) = x(x^2-1)^2$ et $v(x) = 3x^2$. u est donc définie par $u(x) = \dfrac{1}{6}(x^2-1)^3$et, pour tout réel x, $v'(x) = 6x$. u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x^3(x^2-1)^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2(x^2-1)^3\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} x(x^2-1)^3\,\mathrm{d}x$. Or, $x \mapsto x(x^2-1)^3$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitive. Elle admet pour primitive la fonction $F\colon x \mapsto \dfrac{1}{8}(x^2-1)^4$.

   D'où $I = \left[\dfrac{1}{2}x^2(x^2-1)^3\right]_{-1}^{1} - \left[\dfrac{1}{8}(x^2-1)^4\right]_{-1}^{1} = 0$.

   Avec Geogebra, on obtient le résultat ci-dessous.

   Ce qui correspond bien à ce que nous avons trouvé.



Remarques :

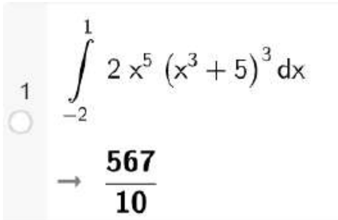
- La fonction à intégrer est une fonction impaire. Il est donc possible de ne pas utiliser l'intégration par parties.
- Il est aussi possible de développer l'expression de départ et de déterminer ensuite une primitive de cette forme développée.

2. On pose $u'(x) = x^2(x^3+5)^3$ et $v(x) = 2x^3$. u est donc définie par $u(x) = \frac{1}{12}(x^3+5)^4$ et, pour tout réel x, $v'(x) = 6x^2$. u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient $\int_{-2}^{1} 2x^5(x^3+5)^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^3(x^3+5)^4\right]_{-2}^{1} - \int_{-2}^{1} \frac{1}{2}x^2(x^3+5)^4\,\mathrm{d}x$. Or, $x \mapsto \frac{1}{2}x^2(x^3+5)^4$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitive. Elle admet pour primitive la fonction $F\colon x \mapsto \frac{1}{30}(x^3+5)^5$.

   D'où $J = \left[\frac{1}{6}x^3(x^3+5)^4\right]_{-2}^{1} - \left[\frac{1}{30}(x^3+5)^5\right]_{-2}^{1} = \frac{567}{10}$.

   Avec Geogebra, on obtient le résultat ci-dessous.

   Ce qui correspond bien à ce que nous avons trouvé.



   Remarque : Il est aussi possible de développer l'expression de départ et de déterminer ensuite une primitive de cette forme développée.

Corrigé exercice 86 :

1. On pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$. u est donc définie par $u(x) = x$ et, pour tout réel $x > 0$, $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. u et v sont dérivables, donc continues sur $]0;+\infty[$. u' et v' sont dérivables, donc continues sur $]0;+\infty[$. Par intégration par parties, on obtient $\int_{1}^{4} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = [x\sqrt{x}]_1^4 - \int_1^4 \frac{x}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = [x\sqrt{x}]_1^4 - \int_1^4 \frac{1}{2}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

   D'où $\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = [x\sqrt{x}]_1^4$ c'est-à-dire $\frac{3}{2}\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 7$ et donc $\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \times 7 = \frac{14}{3}$.

2. On pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \sqrt{x+5}$. u est donc définie par $u(x) = x+5$ et, pour tout réel $x > -5$, $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$. u et v sont dérivables, donc continues sur $]-5;+\infty[$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $]-5;+\infty[$. Par intégration par parties, on obtient $\int_{-1}^{4} \sqrt{x+5}\,\mathrm{d}x = \left[(x+5)\sqrt{x+5}\right]_{-1}^{4} - \int_{-1}^{4} \frac{x+5}{2\sqrt{x+5}}\,\mathrm{d}x$

   $= \left[(x+5)\sqrt{x+5}\right]_{-1}^{4} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{4} \sqrt{x+5}\,\mathrm{d}x$.

   Donc $\frac{3}{2}\int_{-1}^{4} \sqrt{x+5}\,\mathrm{d}x = 19$ d'où $\int_{-1}^{4} \sqrt{x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \times 19 = \frac{38}{3}$.

Corrigé exercice 87 :

1. On pose $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x$. u est donc définie par $u(x) = \mathrm{e}^x$ et, pour tout réel x, $v'(x) = 1$. u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient
$J = \int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [x\mathrm{e}^x]_0^1 - [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^1 + 1 = 1.$

2. a. On pose $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x^2$. u est donc définie par $u(x) = \mathrm{e}^x$ et, pour tout réel x, $v'(x) = 2x$. u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient
$I = \int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\mathrm{e}^x\right]_0^1 - 2J$
   b. En se servant du résultat de la question 1, on obtient $I = [x^2\mathrm{e}^x]_0^1 - 2J = \mathrm{e}^1 - 2 = \mathrm{e} - 2$.

Corrigé exercice 88 :

1. On pose $u_1'(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$ et $v_1(x) = \frac{3}{2}x^4$. u_1 est donc définie par $u_1(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ et, pour tout réel x, $v_1'(x) = 6x^3$. u_1 et v_1 sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u_1' et v_1' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient
$$I = \int_{-1}^2 \frac{3}{2}x^5\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{4}x^4\mathrm{e}^{x^2}\right]_{-1}^2 - \int_{-1}^2 3x^3\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$
Pour calculer la deuxième intégrale, on pose maintenant $u_2'(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$ et $v_2(x) = 3x^2$. u_2 est donc définie par $u_2(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ et, pour tout réel x, $v_2'(x) = 6x$. u_2 et v_2 sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u_2' et v_2' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient
$$\int_{-1}^2 3x^3\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}x^2\mathrm{e}^{x^2}\right]_{-1}^2 - \int_{-1}^2 3x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\mathrm{e}^4.$$
D'où, en conclusion, $I = \int_{-1}^2 \frac{3}{2}x^5\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = 12\mathrm{e}^4 - \frac{3}{4}\mathrm{e} - \frac{9}{2}\mathrm{e}^4 = \frac{15}{2}\mathrm{e}^4 - \frac{3}{4}\mathrm{e}.$

2. On pose $u_1'(x) = x\mathrm{e}^{x^2-1}$ et $v_1(x) = x^4$. u_1 est donc définie par $u_1(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-1}$ et, pour tout réel x, $v_1'(x) = 4x^3$. u_1 et v_1 sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u_1' et v_1' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient
$J = \int_{-1}^0 x^5\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^4\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 2x^3\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$
Pour calculer la deuxième intégrale, on pose maintenant $u_2'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2-1}$ et $v_2(x) = x^2$. u_2 est donc définie par $u_2(x) = \mathrm{e}^{x^2-1}$ et, pour tout réel x, $v_2'(x) = 2x$. u_2 et v_2 sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u_2' et v_2' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient

$\displaystyle\int_{-1}^{0} 2x^3 \mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[x^2\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 2x\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[x^2\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_{-1}^{0} - \left[\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_{-1}^{0} = -\mathrm{e}^{-1}.$

D'où, en conclusion, $J = \displaystyle\int_{-1}^{0} x^5 \mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} + \mathrm{e}^{-1}.$

Corrigé exercice 89 :

1. On pose $u_1'(x) = x(x^2-4)^3$ et $v_1(x) = x^4$. u_1 est donc définie par $u_1(x) = \dfrac{1}{8}(x^2-4)^4$ et, pour tout réel x, $v_1'(x) = 4x^3$. u_1 et v_1 sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u_1' et v_1' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient $I = \displaystyle\int_{-1}^{2} x^5(x^2-4)^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{8}x^4(x^2-4)^4\right]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3(x^2-4)^4\,\mathrm{d}x.$

   Pour calculer la deuxième intégrale, on pose maintenant $u_2'(x) = x(x^2-4)^4$ et $v_2(x) = \dfrac{1}{2}x^2$. u_2 est donc définie par $u_2(x) = \dfrac{1}{10}(x^2-4)^5$ et, pour tout réel x, $v_2'(x) = x$. u_2 et v_2 sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u_2' et v_2' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient

$$\int_{-1}^{2} x^5(x^2-4)^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{20}x^2(x^2-4)^5\right]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} \frac{1}{10}x(x^2-4)^5\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{20}x^2(x^2-4)^5\right]_{-1}^{2} - \left[\frac{1}{120}(x^2-4)^6\right]_{-1}^{2} = \frac{729}{40}.$$

   D'où, en conclusion, $I = \displaystyle\int_{-1}^{2} x^5(x^2-4)^3\,\mathrm{d}x = -\frac{81}{8} - \frac{729}{40} = -\frac{567}{20}.$

2. On pose $u_1'(x) = x^2(2x^3+1)^4$ et $v_1(x) = -x^6$. u_1 est donc définie par $u_1(x) = \dfrac{1}{30}(2x^3+1)^5$ et, pour tout réel x, $v_1'(x) = -6x^5$. u_1 et v_1 sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u_1' et v_1' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient

$$J = \int_{0}^{1} -x^8(2x^3+1)^4\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{30}x^6(2x^3+1)^5\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} -\frac{1}{5}x^5(2x^3+1)^5\,\mathrm{d}x.$$

   Pour calculer la deuxième intégrale, on pose maintenant $u_2'(x) = x^2(2x^3+1)^5$ et $v_2(x) = -\dfrac{1}{5}x^3$. u_2 est donc définie par $u_2(x) = \dfrac{1}{36}(2x^3+1)^6$ et, pour tout réel x, on a : $v_2'(x) = -\dfrac{3}{5}x^2$. u_2 et v_2 sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u_2' et v_2' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient

$$\int_{0}^{1} -\frac{1}{5}x^5(2x^3+1)^5\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{180}x^3(2x^3+1)^6\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} -\frac{1}{60}x^2(2x^3+1)^6\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{180}x^3(2x^3+1)^6\right]_{0}^{1} - \left[-\frac{1}{2520}(2x^3+1)^7\right]_{0}^{1} = -\frac{401}{126}.$$

   D'où, en conclusion, $J = \displaystyle\int_{0}^{1} -x^8(2x^3+1)^5\,\mathrm{d}x = -\frac{81}{10} + \frac{401}{126} = -\frac{1549}{315}.$

Corrigé exercice 90 :

1. On pose $u_1'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^4}$ et $v_1(x) = x^2$. u_1 est donc définie par $u_1(x) = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(x+1)^3}$ et, pour tout réel, $v_1'(x) = 2x^3$. u_1 et v_1 sont dérivables, donc continues sur $[0;3]$, et u_1' et v_1' sont dérivables, donc continues sur $[0;3]$. Par intégration par parties, on obtient $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{x^2}{(x+1)^4}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}\frac{x^2}{(x+1)^3}\right]_0^3 - \int_0^3 -\frac{2}{3}\frac{x}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x$.
   Pour calculer la deuxième intégrale, on pose maintenant $u_2'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^3}$ et $v_2(x) = -\dfrac{2}{3}x$. u_2 est donc définie par $u_2(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x+1)^2}$et, pour tout réel x, $v_2'(x) = -\dfrac{2}{3}$. u_2 et v_2 sont dérivables, donc continues sur $[0;3]$, et u_2' et v_2' sont dérivables, donc continues sur $[0;3]$. Par intégration par parties, on obtient
   $$\int_0^3 -\frac{2}{3}\frac{x}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\frac{x}{(x+1)^2}\right]_0^3 - \int_0^3 \frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\frac{x}{(x+1)^2}\right]_0^3 - \left[-\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}\right]_0^3 = -\frac{3}{16}.$$
   D'où, en conclusion, $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^2}{(x+1)^4}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{64} + \frac{3}{16} = \frac{9}{64}$.

2. On pose $u_1'(x) = \dfrac{x}{(2-3x^2)^4}$ et $v_1(x) = 36x^4$. u_1 est donc définie par $u_1(x) = \dfrac{1}{18}\dfrac{1}{(2-3x^2)^3}$ et, pour tout réel, $v_1'(x) = 144x^3$. u_1 et v_1 sont dérivables, donc continues sur $[1;3]$, et u_1' et v_1' sont dérivables, donc continues sur $[1;3]$. Par intégration par parties, on obtient $J = \displaystyle\int_1^3 \frac{36x^5}{(2-3x^2)^4}\,\mathrm{d}x = \left[2\frac{x^4}{(2-3x^2)^3}\right]_1^3 - \int_1^3 8\frac{x^3}{(2-3x^2)^3}\,\mathrm{d}x$.
   Pour calculer la deuxième intégrale, on pose maintenant $u_2'(x) = \dfrac{x}{(2-3x^2)^3}$ et $v_2(x) = 8x^2$. u_2 est donc définie par $u_2(x) = \dfrac{1}{12}\dfrac{1}{(2-3x^2)^2}$ et, pour tout réel x, $v_2'(x) = 16x$. u_2 et v_2 sont dérivables, donc continues sur $[1;3]$, et u_2' et v_2' sont dérivables, donc continues sur $[1;3]$. Par intégration par parties, on obtient
   $$\int_1^3 8\frac{x^3}{(2-3x^2)^3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\frac{x^2}{(2-3x^2)^2}\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{4}{3}\frac{x}{(2-3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\frac{x^2}{(2-3x^2)^2}\right]_1^3 - \left[\frac{2}{9}\frac{1}{2-3x^2}\right]_1^3 = -\frac{544}{625}.$$
   D'où, en conclusion, $J = \displaystyle\int_1^3 \frac{36x^5}{(2-3x^2)^4}\,\mathrm{d}x = -\frac{31088}{1565} + \frac{544}{625} = \frac{44688}{15625}$.

10 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 91 :

1. L'affirmation est fausse. En effet l'aire du domaine demandée est d'environ 8,5 carreaux. Or, 1 carreau est d'aire 2×1 u.a., soit 2 u.a.. L'aire demandée est donc environ de 17 u.a..

2. L'affirmation est vraie. L'aire du domaine comprise entre la courbe représentative de g, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$ est environ 38 carreaux d'aire $0,2 \times 0,2 = 0,04$ u.a.. L'aire du domaine est donc d'environ 1,5 u.a.. La fonction g étant négative sur $[-1; 1]$, on en conclut que $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x \approx -\frac{3}{2}$.

3. L'affirmation est vraie. Soit un réel $x \geqslant 1$. Pour tout réel t tel que $1 \leqslant t \leqslant x$, $1-t \leqslant 0$ et $\mathrm{e}^t > 0$, donc $(1-t)\mathrm{e}^t \leqslant 0$. La fonction $t \mapsto (1-t)\mathrm{e}^t$ est continue, car dérivable, sur $\mathbb{R}$. D'après la positivité de l'intégrale, on en conclut que $\displaystyle\int_{1}^{x} (1-t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leqslant 0$.

4. L'affirmation est fausse. Prenons par exemple h et k définies et continues sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x-5)^3$ et $k(x) = x - 5$. On a alors $\displaystyle\int_{1}^{9} (x-5)^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x-5)^4}{4}\right]_1^9 = 0$ et $\displaystyle\int_{1}^{9} (x-5)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x-5)^2}{2}\right]_1^9 = 0$ donc $\displaystyle\int_{1}^{9} (x-5)^3\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{9} (x-5)\,\mathrm{d}x$ mais $h(1) = -64 \neq -4 = k(1)$.

Corrigé exercice 92 :

1. f est continue sur $\mathbb{R}$. D'après la linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_{0}^{3} (5x-2)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{3} 5x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} -2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$. Pour calculer la première de ces deux intégrales, on utilise une intégration par partie. On pose $u'(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ et $v(x) = 5x$. u est donc définie par $u(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ et, pour tout réel, $v'(x) = 5$. u et v sont dérivables, donc continues, sur $[0; 3]$, et u' et v' sont dérivables, donc continues, sur $[0; 3]$. Par intégration par parties, on obtient alors

$$\int_{0}^{3} (5x-2)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{5}{2}x\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^3 - \int_{0}^{3} -\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} -2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x =$$
$$\left[-\frac{5}{2}x\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^3 - \left[\frac{5}{4}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^3 + \left[\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^3 = -\frac{31}{4}\mathrm{e}^{-6} + \frac{1}{4}.$$

2. La valeur moyenne de f sur $[0; 3]$ est $\displaystyle\frac{1}{3-0}\int_{0}^{3} (5x-2)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{31}{12}\mathrm{e}^{-6} + \frac{1}{12}$.

Corrigé exercice 93 :

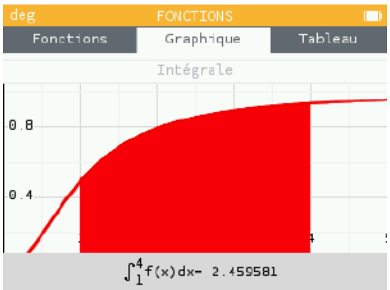
1. Pour tout réel $x \in I$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$. De plus, f est continue sur $[a; b]$. On intègre ces inégalités et on obtient alors $\displaystyle\int_{a}^{b} m\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{a}^{b} M\,\mathrm{d}x$ c'est-à-dire

$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$

2. **Application**

   a. La fonction f est dérivable sur $[1;4]$ et, pour tout $x \in [1;4]$, $f'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} > 0$. f est donc strictement croissante sur $[1;4]$. D'où, pour tout réel $x \in [1;4]$, $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(4)$, soit $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{16}{17}$.
   Or, f est continue, car dérivable, sur $[1;4]$.
   Ainsi, d'après la question 1., $\dfrac{3}{2} \leqslant \int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{48}{17}$.

   b. Avec la calculatrice, on obtient le résultat ci-dessous.



   Une valeur approchée de la valeur moyenne de f sur $[1;4]$ est :

$$\frac{1}{4-1}2,4596 \approx 0,8199.$$

Corrigé exercice 94 :

1. f est positive sur $[0;25]$. L'aire en u.a. de la piscine est donc égale à $\int_0^{25} f(x)\,\mathrm{d}x$. Et $\int_0^{25} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{25} (5x+7)\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{25} 5x\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{25} 7\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale.

   Pour déterminer la valeur de la première intégrale on utilise une intégration par parties. On pose alors $u'(x) = \mathrm{e}^{-0,2x}$ et $v(x) = 5x$. u est donc définie par $u(x) = -\dfrac{1}{0,2}\mathrm{e}^{-0,2x} = -5\mathrm{e}^{-0,2x}$ et, pour tout réel x, $v'(x) = 5$. u et v sont dérivables, donc continues, sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues, sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient alors

$$\int_0^{25} (5x+7)\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{5}{0,2}x\mathrm{e}^{-0,2x}\right]_0^{25} - \int_0^{25} -25\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{25} 7\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x = \left[-25x\mathrm{e}^{-0,2x}\right]_0^{25} - \left[125\mathrm{e}^{-0,2x}\right]_0^{25} + \left[-35\mathrm{e}^{-0,2x}\right]_0^{25} = -785\mathrm{e}^{-5} + 160.$$

   De plus l'unité d'aire est de 1 u.a. = 1 m^2. Donc, l'aire de la piscine est de $160 - 785\mathrm{e}^{-5}$ m^2, soit environ 154,711 m^2.

2. Pour répondre à cette question, on calcule la valeur moyenne de f sur $[0;25]$. On obtient $\dfrac{1}{25-0}\displaystyle\int_0^{25} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{32}{5} - \dfrac{157}{5}\mathrm{e}^{-5} \approx 6,1884$. L'organisme devra donc construire une piscine rectangulaire de largeur environ égale à 6,2 m.

Corrigé exercice 95 :

1. a. La fonction f est dérivable sur $[0;20]$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Et, pour tout $x \in [0;20]$, $f'(x) = 1000\mathrm{e}^{-0,2x} - 200(x+5)\mathrm{e}^{-0,2x} = -200x\mathrm{e}^{-0,2x} \leqslant 0$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $[0;20]$.

   b. Lorsque le prix unitaire croît entre 0 et 20, le nombre d'objets demandés diminue.

2. a. f est continue, car dérivable, sur $[0;20]$. On peut donc intégrer la fonction f. $\displaystyle\int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_5^{15} 1000x\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x + \int_5^{15} 5000\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x$par linéarité de l'intégrale. Pour calculer la première intégrale, on utilise une intégration par parties. On pose alors $u'(x) = \mathrm{e}^{-0,2x}$ et $v(x) = 1000x$. u est donc définie par $u(x) = -\dfrac{1}{0,2}\mathrm{e}^{-0,2x} = -5\mathrm{e}^{-0,2x}$ et, pour tout réel, $v'(x) = 1000$. u et v sont dérivables, donc continues, sur $\mathbb{R}$, u' et v' sont dérivables, donc continues, sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient alors

   $$\int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-5000x\mathrm{e}^{-0,2x}\right]_5^{15} - \int_5^{15} -5000\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x + \int_5^{15} 5000\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x =$$
   $$\left[-5000x\mathrm{e}^{-0,2x}\right]_5^{15} - \left[25000\mathrm{e}^{-0,2x}\right]_5^{15} + \left[-25000\mathrm{e}^{-0,2x}\right]_5^{15} = 1000\left(75\mathrm{e}^{-1} - 125\mathrm{e}^{-3}\right).$$

   b. La valeur moyenne de la fonction f vaut alors :

   $$\frac{1}{15-10}\int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x = 200\left(75\mathrm{e}^{-1} - 125\mathrm{e}^{-3}\right) \approx 4274.$$

   Ainsi, le nombre moyen d'objets demandés lorsque le prix unitaire varie entre 5 et 15 euros est d'environ 4274.

Corrigé exercice 96 :

1. a. Pour tout réel $x \neq -2$, $ax + b + \dfrac{c}{(x+2)^2} = \dfrac{(ax+b)(x+2)^2 + c}{(x+2)^2}$ soit $ax + b + \dfrac{c}{(x+2)^2} = \dfrac{ax^3 + (4a+b)x^2 + (4a+4b)x + (4b+c)}{(x+2)^2}$. En identifiant les coefficients des polynômes au numérateur, on obtient alors :

   $$\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 6 \\ 4a + 4b = 12 \\ 4b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ b = 2 \\ c = -9 \end{cases}.$$

   En conclusion, pour tout réel $x \neq -2$, $f(x) = x + 2 - \dfrac{9}{(x+2)^2}$.

b. f est continue, car dérivable, sur $[-1;4]$. Elle admet donc une primitive. Une telle primitive est $F\colon x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + 2x + \dfrac{9}{x+2}$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{x+2}\right]_{-1}^{4} = 10$.

2. Pour tout réel $x \neq -1$, $ax + b + \dfrac{c}{(x+1)^2} = \dfrac{(ax+b)(x+1)^2 + c}{(x+1)^2}$ soit

$ax + b + \dfrac{c}{(x+1)^2} = \dfrac{ax^3 + (2a+b)x^2 + (a+2b)x + (b+c)}{(x+1)^2}$.

En identifiant les coefficients des polynômes au numérateur, on obtient alors :

$$\begin{cases} a = -1 \\ 2a + b = 1 \\ a + 2b = 5 \\ b + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ b = 3 \\ c = 5 \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout réel $x \neq -1$, $f(x) = -x + 3 + \dfrac{5}{(x+1)^2}$.

De plus f est continue, car dérivable, sur $[0;3]$. Elle admet donc une primitive. Une telle primitive est $F\colon x \mapsto -\dfrac{x^2}{2} + 3x - \dfrac{5}{x+1}$.

Ainsi $\displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{x+1}\right]_{0}^{3} = \frac{33}{4}$.

Corrigé exercice 97 :

1. Pour tout réel x, $f(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{-x}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Or, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est paire, donc $\displaystyle\int_{-x}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

D'où $f(-x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -f(x)$. Ainsi, f est une fonction impaire.

2. a. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue, car dérivable, sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

b. D'après la question précédente, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. a. Soit un réel $x \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1 = 1 - \frac{1}{x}$.

b. Soit un réel $x \geqslant 1$,

$f(x) - \dfrac{1}{x} + 1 = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x} + 1$

$= \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ d'après la question précédente

$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$, par relation de Chasles

$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$, par linéarité de l'intégrale

$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{1+2t^2}{t^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$

c. Pour tout réel $t \geqslant 1$, on a $\frac{1}{1+t^2} \geqslant 0$ et $\frac{1+2t^2}{t^2(1+t^2)} \geqslant 0$. Pour tout réel $x \geqslant 1$, d'après la positivité de l'intégrale, $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ et $\int_1^x \frac{1+2t^2}{t^2(1+t^2)} \geqslant 0$. Donc $f(x) - \frac{1}{x} + 1 \geqslant 0$ d'où $f(x) \geqslant \frac{1}{x} - 1$.

Corrigé exercice 98 :

Partie A : Position relative de $\mathcal{C}_f$ et de l'une de ses tangentes

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est alors de la forme $y = f'(0)(x-0)+f(0)$. Or, $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$ donc une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = -x+1$. Cette tangente est donc bien la droite Δ.

2. a. Pour tout réel x, $h(x) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1$. Ainsi h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 1$.

   b. $h'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -\mathrm{e}^{-x} + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 \Leftrightarrow -x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$. h' est donc positive sur $[0;+\infty[$ et négative sur $]-\infty;0]$.

   c. D'après la question précédente, h est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.

3. D'après la question précédente, h est minorée par $h(0) = 0$. Donc h est une fonction positive. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) \geqslant g(x)$. On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente Δ sur $\mathbb{R}$, ces deux courbes étant sécantes en $x = 0$.

Partie B : Calcul d'aire

1. h est une fonction continue, car dérivable, sur $\mathbb{R}$. h admet donc une primitive. Une telle primitive est $H : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x$.

   D'où $\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{-x} + x - 1\right)\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}}.$

2. a. D'après la figure, le domaine $\mathcal{D}$ est la réunion du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, Δ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$, puis du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$.

   Ainsi $\mathcal{A} = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x + \int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}} + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^a = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}^a}.$

   b. À l'aide d'une calculatrice, on conjecture que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{A} = \frac{1}{2}$.

Corrigé exercice 99 :

1. Soit un réel $x \in I$. Si $f(x) \geqslant 0$, alors $|f(x)| = f(x)$ et $-|f(x)| = -f(x) \leqslant f(x)$. Donc $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$. Si $f(x) \leqslant 0$, alors $|f(x)| = -f(x)$ et $-|f(x)| = f(x) \leqslant f(x)$. Donc $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$.

   Par disjonction des cas, pour tout réel $x \in I$, $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$.

2. La fonction f est continue sur I. La fonction $x \mapsto | f(x) |$ est aussi continue sur cet intervalle comme composée de deux fonctions continues sur I. On intègre alors les inégalités précédentes et on obtient $\int_a^b -|f(x)|\, \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x$.
   D'où, par linéarité de l'intégrale, $-\int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x$. Et donc, on en déduit que $\left|\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x$.

Corrigé exercice 100 :

1. f est dérivable sur $[0;1]$ et, pour tout réel $x \in [0;1]$, $f'(x) = \dfrac{(1+x)\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{(1+x)^2} = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2} \geqslant 0$. Donc, f est croissante sur $[0;1]$.

2. a. Soit k un entier compris entre 0 et 4. Alors, pour tout réel $x \in \left[\dfrac{k}{5}; \dfrac{k+1}{5}\right]$, $0 \leqslant \dfrac{k}{5} \leqslant x \leqslant \dfrac{k+1}{5} \leqslant 1$ et donc $f\left(\dfrac{k}{5}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\dfrac{k+1}{5}\right)$ car f est croissante sur $[0;1]$. De plus f est continue, car dérivable, sur $[0;1]$. On peut donc intégrer les inégalités précédentes sur $\left[\dfrac{k}{5}; \dfrac{k+1}{5}\right]$, ce qui donne
   $$\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f\left(\frac{k}{5}\right) \mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)\, \mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f\left(\frac{k+1}{5}\right) \mathrm{d}x$$
   $$\Leftrightarrow \left[f\left(\frac{k}{5}\right) x\right]_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)\, \mathrm{d}x \leqslant \left[f\left(\frac{k+1}{5}\right) x\right]_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}}$$
   $$\Leftrightarrow \frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{\mathrm{e}^x}{1+x} \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right).$$

   b. f est positive sur $[0;1]$, $\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x} \mathrm{d}x$ est donc égale à l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \dfrac{k}{5}$ et $x = \dfrac{k+1}{5}$.
   Les inégalités précédentes signifient alors que l'aire de ce domaine est compris entre celle du rectangle de base $\dfrac{1}{5}$ et de hauteur $f\left(\dfrac{k}{5}\right)$, et celle du rectangle de base $\dfrac{1}{5}$ et de hauteur $f\left(\dfrac{k+1}{5}\right)$.

c. On somme les inégalités précédentes pour k allant de 0 à 4, et on obtient alors $\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{4}\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{4}\frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right)$. Ainsi, d'après la relation de Chasles, $\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} f\left(\frac{k+1}{5}\right)$ et donc $\frac{1}{5}S_4 \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5}(S_5-1)$.

d. On calcule S_4 et S_5 à la calculatrice, avec un tableur ou bien encore via un algorithme en Python, et on obtient $S_4 \approx 5,4587$ et $S_5 \approx 6,8178$.

e. On déduit de la question d. que $\frac{1}{5}\times 5,4587 \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5}\times(6,8178-1)$ et donc que $1,091 \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1,164$.

3. a. Pour tout réel $x \in [0;1]$,
$1-x+\frac{x^2}{1+x} = \frac{(1-x)(1+x)+x^2}{1+x} = \frac{1-x^2+x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x}$.

b. En multipliant par e^x l'égalité précédente, on obtient $\frac{\mathrm{e}^x}{1+x} = (1-x)\mathrm{e}^x + \frac{x^2\mathrm{e}^x}{1+x}$.
Les fonctions $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}$, $x \mapsto (1-x)\mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \frac{x^2\mathrm{e}^x}{1+x}$ sont continues sur $[0;1]$, on peut donc intégrer les deux membres de l'égalité précédente, ce qui donne $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^2\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + I$.

c. On va utiliser une intégration par parties. Pour se faire, on pose $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = 1-x$. u est donc définie par $u(x) = \mathrm{e}^x$ et, pour tout réel, $v'(x) = -1$. u et v sont dérivables, donc continues, sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues, sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par intégration par parties,
$\int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = [(1-x)\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = -1+\mathrm{e}-1 = \mathrm{e}-2$.

d. D'après la question 2.e.,
$1,091 \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1,164$ d'où $1,091 \leqslant \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + I \leqslant 1,164$ et donc, d'après la question précédente, $1,091 \leqslant \mathrm{e}-2+I \leqslant 1,164$. Et on peut ainsi en déduire que $0,3727 \leqslant I \leqslant 0,4458$ et donc que $0,37 \leqslant I \leqslant 0,45$.

Corrigé exercice 101 :

1. a. La fonction $f\colon x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$ est continue, car dérivable, sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur sur $\mathbb{R}$ est $F\colon -\mathrm{e}^{-\lambda x}$. D'où $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_a^b = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$.

b. De même, $P(0 \leqslant X \leqslant b) = \int_0^b \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^b = 1-\mathrm{e}^{-\lambda b}$.

2. 2 ans correspondent à 24 mois. On doit donc calculer la probabilité $P(6 \leqslant X \leqslant 24)$.

D'après la question 1. a., on obtient alors $P(6 \leqslant X \leqslant 24) = \mathrm{e}^{-6\lambda} - \mathrm{e}^{-24\lambda} = \mathrm{e}^{-0,3} - \mathrm{e}^{-1,2} \approx 0,44$.

Corrigé exercice 102 :

1. a. G est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur cet ensemble et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = 2x \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} = x\mathrm{e}^{x^2} = g(x)$. Donc G est bien une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

   b. $I_1 = \int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_0^1 = G(1) - G(0) = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}$.

   c. $I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.
   Posons $u'(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$ et $v(x) = x^{n+1}$. D'après la question 1.a., $u = G$. De plus on a $v'(x) = (n+1)x^n$. u et v sont dérivables, donc continues, sur $\mathbb{R}$. u' et v' sont dérivables, donc continues, sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par intégration par parties,
   $I_{n+2} = [G(x)x^{n+1}]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$
   $= [G(x)x^{n+1}]_0^1 - \frac{n+1}{2}\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale
   $= \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}I_n$.

   d. Grâce à la relation de récurrence, $I_3 = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{2}{2}I_1 = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}\mathrm{e} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
   De même, $I_5 = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{4}{2}I_3 = \frac{1}{2}\mathrm{e} - 2\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - 1$.

2. L'algorithme initialise u avec la valeur de I_1, puis il calcule I_3 et ainsi de suite jusqu'à I_{21}. En sortie de cet algorithme on obtient donc I_{21}.

3. a. Pour tout réel $x \in [0;1]$, $x^n\mathrm{e}^{x^2} \geqslant 0$ donc, par positivité de l'intégrale, pour tout n non nul, $I_n = \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

   b. Pour tout entier naturel n non nul, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ donc, par linéarité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x-1)x^n\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$. Or, pour tout réel $x \in [0;1]$, $(x-1)x^n\mathrm{e}^{x^2} \leqslant 0$ donc, par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x-1)x^n\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.
   La suite (I_n) est donc décroissante.

   c. À l'aide d'une calculatrice, on conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Corrigé exercice 103 :

La fonction $g\colon x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$ est continue, car dérivable, sur $\mathbb{R}$ et est de la forme $\frac{u'}{u^2}$. Elle admet donc une primitive G de la forme $G = -\frac{1}{u}$. Ainsi une primitive de g est la fonction

G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$. D'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{\mathrm{e}+1}+\frac{1}{2}$.

On en déduit que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x+1}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(\mathrm{e}^x+1)^2+\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ d'où

$I = \displaystyle\int_0^1 \frac{(\mathrm{e}^x+1)^2}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale.

Ainsi $I = \displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\mathrm{e}+1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}+1}$.

Corrigé exercice 104 :

1. Pour tout réel x,

$$g(x) = f(a) \times \frac{x^2 - \left(b+\frac{a+b}{2}\right)x + b\frac{a+b}{2}}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}$$

$$+f\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \frac{x^2-(a+b)x+ab}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}$$

$$+f(b) \times \frac{x^2 - \left(a+\frac{a+b}{2}\right)x + a\frac{a+b}{2}}{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)(b-a)}$$

d'où

$$g(x) = \left[\frac{f(a)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)} + \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)} + \frac{f(b)}{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)(b-a)}\right]x^2$$

$$+\left[\frac{-f(a)\left(b+\frac{a+b}{2}\right)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)} + \frac{-(a+b)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)} + \frac{-f(b)\left(a+\frac{a+b}{2}\right)}{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)(b-a)}\right]x$$

$$+\left[\frac{f(a)b\frac{a+b}{2}}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)} + \frac{abf\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)} + \frac{f(b)a\frac{a+b}{2}}{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)(b-a)}\right].$$

Ainsi g est bien une fonction polynôme de degré au plus 2.

De plus,

$$g(a) = f(a) \times \frac{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \frac{(a-a)(a-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)} +$$

$$f(b)\times\frac{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-a)}{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)(b-a)}=f(a)\times\frac{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}=f(a),$$

$$g(b)=f(b)\times\frac{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)(b-a)}{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)(b-a)}=f(b)\text{ et}$$

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\times\frac{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}=f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

La fonction g respecte donc bien les conditions :

$$f(a)=g(a),\ f(b)=g(b)\text{ et }f\left(\frac{a+b}{2}\right)=g\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

2. On remarque que g_k sont des fonctions vérifiant les conditions de la question 1. pour k variant de 0 à 3 avec $a=\frac{k}{4}$ et $b=\frac{k+1}{4}$, puisque $\frac{\frac{k}{4}+\frac{k+1}{4}}{2}=\frac{2k+1}{8}$.
On détermine alors, grâce à la formule de la question 1., l'expression des polynômes à intégrer. Ces fonctions polynomiales sont définies sur $\mathbb{R}$ par $g_0(x)=\frac{3}{8}x^2+\frac{31}{32}x-1$, $g_1(x)=\frac{9}{8}x^2+\frac{19}{32}x-\frac{61}{61}$, $g_2(x)=\frac{15}{8}x^2-\frac{5}{32}x-\frac{49}{64}$ et $g_3(x)=\frac{21}{8}x^2-\frac{41}{32}x-\frac{11}{32}$.
On calcule ensuite les intégrales de ces fonctions en cherchant une de leurs primitives, et on obtient $\int_0^{0,25}g_0(x)\,\mathrm{d}x=-0,22$, $\int_{0,25}^{0,5}g_1(x)\,\mathrm{d}x=-0,14$, $\int_{0,5}^{0,75}g_2(x)\,\mathrm{d}x=-0,03$ et $\int_{0,75}^{1}g_3(x)\,\mathrm{d}x=0,14$. D'où $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\approx-0,25$.
Remarque : Cette méthode est, bien entendu, utile lorsque l'intégrale de départ n'est pas calculable. Dans le cas de cet exercice, afin de le simplifier, la fonction f de départ est suffisamment simple pour que l'on puisse calculer directement cette intégrale sans avoir à l'approximer par la méthode de Simpson.

Corrigé exercice 105 :

Partie A

1. a. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=+\infty$, car $x>0$, donc, par composition, $\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$. Ainsi, par produit, on en déduit que $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$.
   b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$. On en déduit, par produit, que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

c. On peut en déduire que la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées, est une asymptote verticale à $\mathcal{C}$, et que la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

2. a. La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée et produit de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = -\dfrac{2x}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = -\dfrac{2x+1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = -\dfrac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(2x+1)$.

b. Pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x^4} > 0$, $\mathrm{e}^{\dfrac{1}{x}} > 0$ et $2x+1 > 0$. Donc, f' est strictement négative sur $]0;+\infty[$ et donc f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0

c. f est dérivable, donc continue, sur $]0;+\infty[$. De plus f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ et 2 appartient à l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,;\lim\limits_{x\to 0} f(x)\right[$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α.
D'après une calculatrice, on obtient $f(1,109) \approx 2,003$ et $f(1,11) \approx 1,99$ d'où $1,109 < \alpha < 1,11$. Ainsi une valeur approchée arrondie au centième de α est 1,11.

Partie B : Étude d'une suite d'intégrales

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $[1;2]$, elle admet donc des primitives sur cet intervalle. Une telle primitive est $x \mapsto -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

D'où $I_2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \left[-\mathrm{e}^{\dfrac{1}{x}}\right]_1^2 = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

2. a. Soit entier naturel $n \geqslant 2$. On pose $u'(x) = \dfrac{1}{x^n}$ et $v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. u et v sont dérivables sur $[1;2]$, avec $u(x) = -\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$ et $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. u' et v' sont dérivables, donc continues, sur $[1;2]$. Par intégration par parties, on a alors

$$I_n = \left[-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{2^{n-1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n-1}\mathrm{e}\right] - \frac{1}{n-1}\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{2^{n-1}}\sqrt{\mathrm{e}} + \frac{1}{n-1}\mathrm{e}\right] - \frac{1}{n-1}I_{n+1} \text{ puisque } \mathrm{e}^{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

D'où $\dfrac{1}{n-1}I_{n+1} = \left[-\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{2^{n-1}}\sqrt{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{n-1}\mathrm{e}\right] - I_n$.

Et ainsi $I_{n+1} = \mathrm{e} - \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{n-1}} + (1-n)\,I_n$.

b. On utilise la formule précédente en prenant $n = 2$. On obtient alors $I_3 = \mathrm{e} - \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2} - I_2 = \mathrm{e} - \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2} - \left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$.

3. a. Pour tout réel x tel que $1 \leqslant x \leqslant 2$, $0 < \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1$, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$, donc $0 < \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leqslant \mathrm{e}$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. De plus $\dfrac{1}{x^n} > 0$, d'où $0 < \dfrac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{x^n}$.

b. La fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}}{x^n}$ est continue sur $]0;+\infty[$, on intègre donc les inégalités précédentes sur $[1;2]$. Et on obtient alors $0 < I_n \leqslant \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}}{x^n}\,\mathrm{d}x$ d'où $0 < I_n \leqslant \left[-\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{\mathrm{e}}{x^{n-1}}\right]_1^2$ et donc $0 < I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.

De plus $2 > 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^{n-1} = +\infty$ donc, par addition, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = 1$.

De plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{n-1} = 0$. D'où, par produit, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, on conclut que la suite (I_n) converge vers 0.

Corrigé exercice 106 :

1. I correspond à l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_{f'}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

2. a. Pour tout $x \in [0;5]$,

$$f'(x) = (2x+2) \times \mathrm{e}^{-x} - (x^2+2x) \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(2x+2-x^2-2x) = (-x^2+2)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

b. Pour tout réel $x \in [0;5]$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $(-x^2+2)$. On obtient ainsi le tableau de variations ci-dessous.

x	0		$\sqrt{2}$		5
f'		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$(2+2\sqrt{2})\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$	↘	$35\mathrm{e}^{-5}$

L'abscisse du maximum de f sur $[0;5]$, est donc $\sqrt{2}$.

c. Le maximum de f vaut $f\left(\sqrt{2}\right) = (2+2\sqrt{2})\mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \approx 1,174$.

3. La fonction f' est dérivable, donc continue, sur $[0;1]$. Une primitive de f' est f. Ainsi $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = f(1)$, car $f(0) = 0$. Les deux valeurs sont donc bien égales.

4. De même $\displaystyle\int_0^1 f''(x)\,\mathrm{d}x = [f'(x)]_0^1 = f'(1) - f'(0) = f'(1) - 2$.

Corrigé exercice 107 :

Partie A

1. Pour tout $x \in [0;4]$, $f'(x) = 3,6\mathrm{e}^{-0,6x} + (3,6x+2,4) \times (-0,6)\mathrm{e}^{-0,6x}$
$= (3,6 - 2,16x - 1,44)\mathrm{e}^{-0,6x}$
$= (-2,16x + 2,16)\mathrm{e}^{-0,6x}$.

2. a. Sur $[0;4]$, $\mathrm{e}^{-0,6x} > 0$, donc f' est du signe de $-2,16x+2,16$. Or $-2,16x+2,16 > 0 \Leftrightarrow x < 1$. Ainsi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$ et $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$.

   b. D'après la question précédente, on obtient le tableau de variations ci-dessous.

x	0		1		4
f'		+	0	−	
f	1	↗	1.89	↘	0.12

3. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^4 = F(4) - F(0) = 8,4 - 38\mathrm{e}^{-2,4} \approx 4,95$.

Partie B

1. g est continue sur $[0;4]$. g admet donc des primitives sur $[0;4]$. Une primitive de g est G définie sur $[0;4]$ par $G(x) = \dfrac{4x^3}{3} - 2x^2 + x$.
D'où $\displaystyle\int_0^{0,5} g(x)\,\mathrm{d}x = G(0,5) - G(0) = \frac{1}{6}$.

2. L'aire du domaine grisé est égale à 2 fois l'aire du domaine grisé situé au-dessus de l'axe des abscisses. Cette dernière a pour aire, en u.a., $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{0,5} g(x)\,\mathrm{d}x$, puisqu'il s'agit de l'aire du domaine compris sous la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$, à laquelle on soustrait l'aire du domaine compris sous la courbe représentative de g, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

On a $\displaystyle\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^{0{,}5} g(x)\mathrm{d}x = 8,4 - 38\mathrm{e}^{-2{,}4} - \frac{1}{6} = \frac{247}{30} - 38\mathrm{e}^{-2{,}4}$. L'aire du domaine grisé vaut donc $2 \times \left(\frac{247}{30} - 38\mathrm{e}^{-2{,}4}\right) = \frac{247}{15} - 76\mathrm{e}^{-2{,}4} \approx 9,57$ u.a..

Corrigé exercice 108 :

1. a. La fonction $x \mapsto 2xy$ est continue, car dérivable, sur $[-1;2]$. Elle admet pour primitive $x \mapsto yx^2$. Donc $\displaystyle\int_{-1}^{2} 2xy\mathrm{d}x = \left[yx^2\right]_{-1}^{2} = 3y$.

   b. La fonction $y \mapsto 3y$ est continue, car dérivable, sur $[0;1]$. Elle admet pour primitive $y \mapsto \frac{3}{2}y^2$. Donc $\displaystyle\int_0^1 3y\,\mathrm{d}y = \left[\frac{3y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$.

2. Pour calculer $\iint_{\mathcal{D}} xy\mathrm{e}^{x+2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, on calcule en premier $\displaystyle\int_0^1 xy\mathrm{e}^{x+2y}\,\mathrm{d}x$, où y est un réel fixé. On pose alors $u_1'(x) = \mathrm{e}^{x+2y}$ et $v_1(x) = xy$. Ainsi u_1 est donc définie par $u_1(x) = \mathrm{e}^{x+2y}$ et, de plus, on a $v_1'(x) = y$. u_1 et v_1 sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u_1' et v_1' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on a alors $\displaystyle\int_0^1 xy\mathrm{e}^{x+2y}\mathrm{d}x = \left[xy\mathrm{e}^{x+2y}\right]_0^1 - \int_0^1 y\mathrm{e}^{x+2y}\mathrm{d}x = y\mathrm{e}^{1+2y} - \left[y\mathrm{e}^{x+2y}\right]_0^1 = y\mathrm{e}^{2y}$.

   On calcule maintenant $\displaystyle\int_{-2}^{3} y\mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}y$. On pose $u_2'(y) = \mathrm{e}^{2y}$ et $v_2(y) = y$. u_2 est donc définie par $u_2(y) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y}$ et on a $v_2'(y) = 1$. u_2 et v_2 sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u_2' et v_2' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on a alors $\displaystyle\int_{-2}^{3} y\mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{2}y\mathrm{e}^{2y}\right]_{-2}^{3} - \int_{-2}^{3}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{6} + \mathrm{e}^{-4} - \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2y}\right]_{-2}^{3} = \frac{5}{4}\mathrm{e}^{6} + \frac{5}{4}\mathrm{e}^{-4}$.

Corrigé exercice 109 :

1. L'aire d'un trapèze se calcule à l'aide de la formule $\frac{(B+b)\times h}{2}$. Ainsi l'aire du trapèze T_k est égal à $\dfrac{\left[f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right] \times \frac{1}{n}}{2} = \dfrac{f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right)}{2n}$.

2. L'algorithme ci-dessous fonctionne, par exemple.

$T \leftarrow 0$

Pour k allant de 0 à $n-1$:

$T \leftarrow T + \dfrac{\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}}{2n}$

Fin Pour

Retourner T

3. On peut programmer cet algorithme en Python comme ci-dessous.

```python
def trapeze(n):
  T=0
  for k in range (1,n):
    T=T+(1/(1+(k/n)**2)+1/(1+((k+1)/n)**2))/(2*n)
  return T
print(trapeze(30))
```

```
0.7520370317337228
```

On obtient ainsi $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 0,752$.

4. Il suffit de changer la ligne 3 de l'algorithme en :

$$T \leftarrow T + \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}}}{2n}.$$

Remarque : Il est possible d'utiliser cet exercice afin de faire comparer aux élèves les méthodes des rectangles, des milieux et des trapèzes.

Corrigé exercice 110 :

1. Les conditions nécessaire sont $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.
2. a. Cet algorithme calcule la proportion de points M appartenant au domaine hachuré en bleu.

   b. Voici l'algorithme en langage Python.

```python
from math import*
from random import*

def montecarlo(n):
  S = 0
  for k in range (1,n+1):
    x = random()
    y = random()
    if y <= 1/(sqrt(2*pi)) * exp(-x**2):
      S = S+1
  P = S/n
  return P
print(montecarlo(1000))
```

```
0.293
```

On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 0,293$.

Corrigé exercice 111 :

Soit x un réel non nul et soit $n \in \mathbb{N}$.
On note alors P_n la proposition : « $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n \mathrm{e}^t}{n!}\,\mathrm{d}t$ ». On va alors démontrer, par récurrence, que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Si $n=0$,
$\sum_{k=0}^{0}\frac{x^k}{k!}+\int_0^x \frac{(x-t)^0\mathrm{e}^t}{0!}\,\mathrm{d}t=\frac{x^0}{0!}+\int_0^x \frac{(x-t)^0\mathrm{e}^t}{0!}\,\mathrm{d}t=1+\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=1+\mathrm{e}^x-1=\mathrm{e}^x$.
Ainsi P_0 est bien vraie.
Hérédité : On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie, autrement dit tel que $\mathrm{e}^x=\sum_{p=0}^{k}\frac{x^p}{p!}+\int_0^x \frac{(x-t)^k\mathrm{e}^t}{k!}\,\mathrm{d}t$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $\mathrm{e}^x=\sum_{p=0}^{k+1}\frac{x^p}{p!}+\int_0^x \frac{(x-t)^{k+1}\mathrm{e}^t}{(k+1)!}\,\mathrm{d}t$.
Par hypothèse de récurrence, $\mathrm{e}^x=\sum_{p=0}^{k}\frac{x^p}{p!}+\int_0^x \frac{(x-t)^k\mathrm{e}^t}{k!}\,\mathrm{d}t$.
On va réécrire le deuxième membre de l'égalité à l'aide d'une intégration par parties. Pour se faire, on pose $u'(t)=\frac{(x-t)^k}{k!}$ et $v(t)=\mathrm{e}^t$. u est alors définie par $u(t)=-\frac{1}{(k+1)}\frac{(x-t)^{k+1}}{k!}=\frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}$ et on a, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $v'(t)=\mathrm{e}^t$. Or, u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, par intégration par parties,
$\int_0^x \frac{(x-t)^k\mathrm{e}^t}{k!}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{(x-t)^{k+1}\mathrm{e}^t}{(k+1)!}\right]_0^x+\int_0^x \frac{(x-t)^{k+1}\mathrm{e}^t}{(k+1)!}\,\mathrm{d}t=\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}+\int_0^x \frac{(x-t)^{k+1}\mathrm{e}^t}{(k+1)!}\,\mathrm{d}t$.
D'où, $\mathrm{e}^x=\sum_{p=0}^{k}\frac{x^p}{p!}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}+\int_0^x \frac{(x-t)^{k+1}\mathrm{e}^t}{(k+1)!}\,\mathrm{d}t=\sum_{p=0}^{k+1}\frac{x^p}{p!}+\int_0^x \frac{(x-t)^{k+1}\mathrm{e}^t}{(k+1)!}\,\mathrm{d}t$.
Donc P_{k+1} est aussi vraie.
D'où, en conclusion, par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n est vraie c'est-à-dire
$\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\int_0^x \frac{(x-t)^n\mathrm{e}^t}{n!}\,\mathrm{d}t$.

Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 12 : Loi binomiale

Table des matières

1 Informations sur ce chapitre

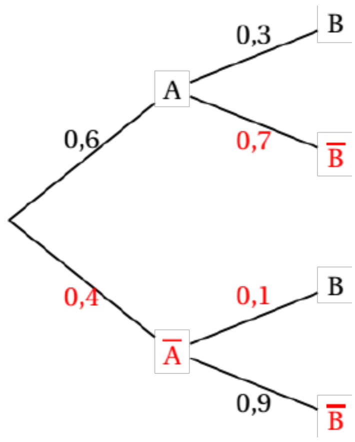
Ce premier chapitre de probabilités se concentre sur l'étude de la succession d'un nombre quelconque d'épreuves aléatoires indépendantes. C'est l'occasion d'introduire les épreuves et schéma de Bernoulli, ainsi que la distribution binomiale.
Plusieurs exemples simples permettent de découvrir les schémas de Bernoulli, et la loi de probabilité de la distribution binomiale, avec l'utilisation d'arbres modélisant une répétition d'un nombre croissant d'épreuves de Bernoulli. Naturellement, la notion d'espérance est abordée et la formule donnant la variance est conjecturée (sa démonstration étant reportée dans le chapitre suivant).
Après une révision des principales notions de probabilités vues en première en introduction, la première partie du chapitre permet de définir les épreuves et loi de Bernoulli. Dans un deuxième temps, les schémas de Bernoulli et la distribution binomiale sont abordés ainsi que la loi de probabilité, l'espérance et la variance de cette loi. Dans une dernière partie, des questions en rapport avec l'échantillonnage sont soulevées.
Les exercices permettent tout d'abord de découvrir, de manière progressive, les trois parties du chapitre ; de nombreux exercices simples sont donnés, pour revenir sur le sens, et construire les automatismes. Une fois cette étape franchie, des problèmes de modélisation plus ambitieux permettent à la fois une synthèse des contenus, à la fois du chapitre, et plus généralement du programme des classes de seconde et première, ainsi que la découverte d'applications de la distribution binomiale.

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud doit valoir 1. L'ensemble des événements correspondant aux branches issues d'un même noeud doivent constituer une partition de l'univers. On obtient l'arbre suivant.



Corrigé exercice 2 :

$P(A \cap B)$ se calcule de la manière suivante : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,18$.
Pour calculer $P(B)$, on utilise la formule des probabilités totales : $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A \cap B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$ $P(B) = 0,18 + 0,4 \times 0,1 = 0,22$.

Corrigé exercice 3 :

Par lecture directe sur l'arbre pondéré, $P_A(B) = 0,3$. D'après la définition des probabilités conditionnelles, $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,18}{0,22} = \frac{9}{11}$.

Corrigé exercice 4 :

On a d'une part, $P(A)P(B) = 0,6 \times 0,22 = 0,132$. D'autre part, $P(A \cap B) = 0,18$. Donc $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ et A et B ne sont donc pas indépendants.

Corrigé exercice 5 :

Première méthode :
$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$ $P(A \cup B) = 0,18 + 0,42 + 0,04$ $P(A \cup B) = 0,64$
Seconde méthode :
L'événement contraire de $A \cup B$ est $\overline{A} \cap \overline{B}$, donc : $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B})$ $P(A \cup B) = 1 - 0,4 \times 0,9$ (par lecture de l'arbre) $P(A \cup B) = 0,64$
Une troisième méthode consiste à utiliser $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Corrigé exercice 6 :

Calcul de l'espérance de X :
$E(X) = P(X = -1) \times (-1) + P(X = 0) \times 0 + P(X = 1) \times 1 + P(X = 5) \times 5$
$E(X) = 0,2 \times (-1) + 0,15 \times 0 + 0,5 \times 1 + 0,15 \times 5 = 1,05$
Calcul de la variance de X :
$V(X) = P(X = -1) \times (-1 - E(X))^2 + \ldots + P(X = 5) \times (5 - E(X))^2$
$V(X) = 0,2 \times (-1 - 1,05)^2 + 0,15 \times (0 - 1,05)^2 + 0,5 \times (1 - 1,05)^2 + 0,15 \times (5 - 1,05)^2$
$V(X) = 3,3475$

Corrigé exercice 7 :

1. $C_0 = \binom{5}{0} = 1$
   $C_1 = \binom{5}{1} = 5$
   $C_4 = \binom{5}{4} = \binom{5}{5-4} = 5$
   $C_5 = \binom{5}{5} = \binom{5}{5-5} = 1$
2. $C_2 = C_3 = 10$

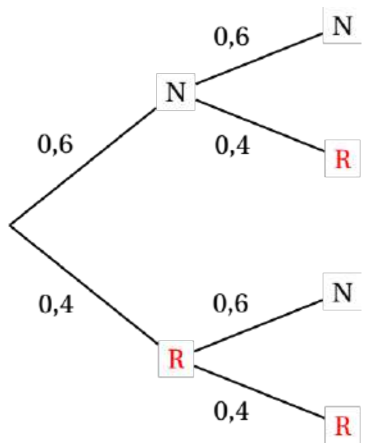
Corrigé exercice 8 :

Voici un exemple de script possible.

```python
from random import randint

def lancers(N):
    NombreCinqObtenus = 0
    for jet in range(N):
        if randint(1, 6) == 5:
            NombreCinqObtenus = NombreCinqObtenus + 1
    return NombreCinqObtenus
```

Corrigé exercice 9 :

1. Cette situation peut être représentée par l'arbre suivant.

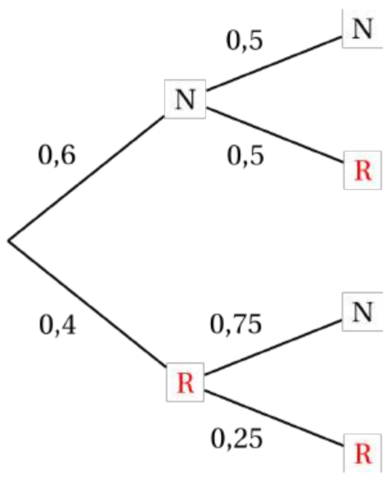


On obtient alors la loi de probabilité suivante.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,36	0,48	0,16

La formule de l'espérance donne $E(X) = 0,36 \times 0 + 0,48 \times 1 + 0,16 \times 2 = 0,8$.

2. Cette situation peut être représentée par l'arbre suivant.



On obtient alors la loi de probabilité suivante.

y_i	0	1	2
$P(Y = y_i)$	0,3	0,6	0,1

La formule de l'espérance donne $E(Y) = 0,3 \times 0 + 0,6 \times 1 + 0,1 \times 2 = 0,8$.

3 Activités

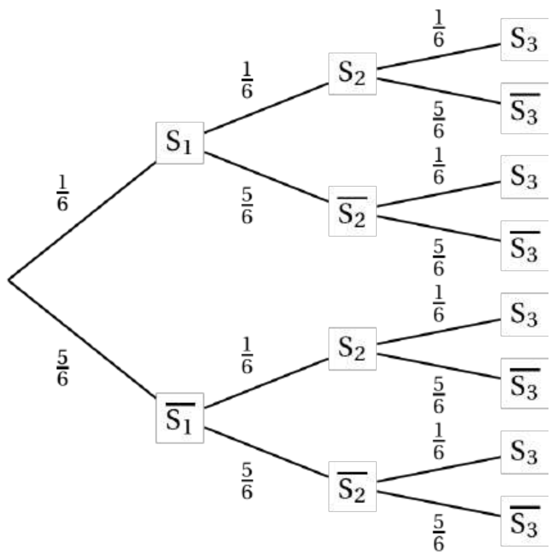
3.1 Corrigé activité A :

Questions :

Partie A

1. Les lancers sont identiques et indépendants, la même expérience aléatoire est répétée plusieurs fois, sans effet sur les suivantes.

2. Étant donné que $n = 3$, on obtient l'arbre pondéré suivant.



3. X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3.

4. Un seul chemin permet d'obtenir $X = 0$.Par lecture de l'arbre on obtient $P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} \approx 0,579$.

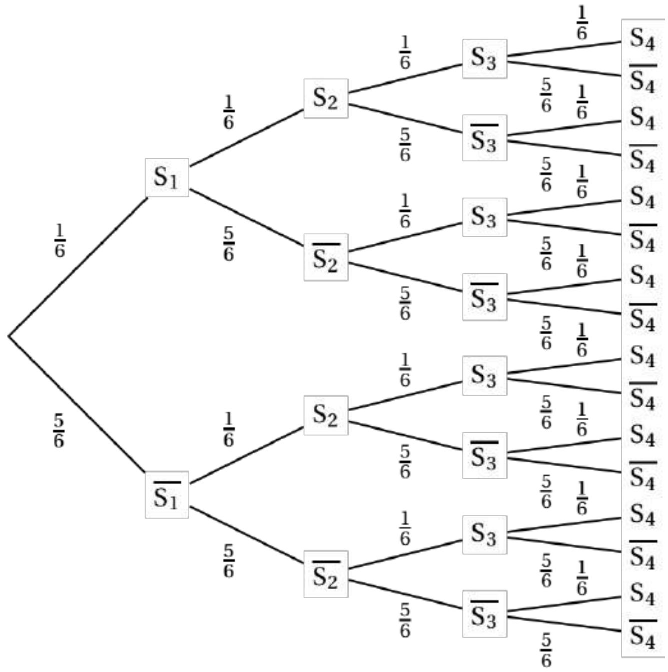
5. a. Trois chemins permettent d'obtenir une unique apparition de la face 6.
   b. Pour chacun de ces chemins, on passe une fois par la probabilité $\frac{1}{6}$ et deux fois par la probabilité $\frac{5}{6}$.
   c. La probabilité pour chaque chemin est donc de $\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,116$. On en déduit que $P(X = 1) = 3 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216} \approx 0,347$.

6. La loi de probabilité suivie par X est résumée dans le tableau ci-dessous.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216} = \frac{25}{72}$	$\frac{15}{216} = \frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

Partie B

1. Les lancers sont identiques et indépendants, pour les mêmes raisons que ci-dessus. On obtient cette fois l'arbre pondéré suivant.



X peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 et 4. Un seul chemin permet d'obtenir $X = 0$. On a donc $P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$.

Quatre chemins permettent d'obtenir une unique apparition de la face 6. Ces chemins correspondent tous à la même probabilité, $\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^3$. On en déduit $P(X = 1) = 4 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{324} \approx 0,386$ La loi de probabilité de X est résumée ci-dessous.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{625}{1296}$	$\frac{125}{324}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{324}$	$\frac{1}{1296}$

2. Dans le cas quelconque, X peut prendre toutes les valeurs entières de 0 à n. Lorsque $0 \leqslant k \leqslant n$, le nombre de chemins menant à $X = k$ est égal à $\binom{n}{k}$, car un tel chemin correspond au choix des k dés affichant un 6 parmi les n jets. Chaque chemin a une probabilité égale à $\left(\frac{1}{6}\right)^k \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$. On en déduit que $P(X = k) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{6}\right)^k \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$.

Bilan :

En adaptant le même raisonnement que ci-dessus à une situation où un succès S a une probabilité p et son contraire $\overline{S}$ une probabilité $1-p$, on peut écrire que la variable aléatoire X comptant le nombre d'apparitions de l'événement S lors de n répétitions identiques et indépendantes de cette expérience a pour loi de probabilité : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

3.2 Corrigé activité B :

Questions :

Partie A

1. Le tirage d'une carte est une épreuve de Bernoulli de succès S : « Une carte de carreau est apparue ». Sa probabilité est $p = \frac{1}{4}$. L'expérience aléatoire correspond à la répétition de $n = 3$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. La variable

aléatoire X compte le nombre de succès lors de cette expérience aléatoire, donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{4}$.

2. En utilisant la formule $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, on obtient les valeurs suivantes.

x_i	0	1	2	3	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$	1

3. La formule de l'espérance donne $E(X) = \frac{27}{64} \times 0 + \frac{27}{64} \times 1 + \frac{9}{64} \times 2 + \frac{1}{64} \times 3 = \frac{3}{4}$.

4. On peut conjecturer que l'espérance de X est égale au produit des paramètres de la loi binomiale soit : $E(X) = np$.

Partie B

1. Voici un exemple d'algorithme.

   NbCarreauxObtenus ← 0

   Pour chaque tirage parmi 100 tirages avec remise :

       Si un carreau est obtenu :

           NbCarreauxObtenus ← NbCarreauxObtenus + 1

       Fin Si

   Fin Pour

2. Voici un exemple de script Python.

```python
from random import randint

def partie(n):
    NbCarreauxObtenus = 0
    for lancer in range(n):
        if randint(1, 4) == 1:
            NbCarreauxObtenus = NbCarreauxObtenus + 1
    return NbCarreauxObtenus

def simulation():
    N = 1000
    esperance = 0
    for experience in range(N):
        esperance = esperance + partie(100)
    return esperance/N
```

   On peut constater que l'espérance est proche de 25.

3. Il semble que l'espérance soit égale à $np = 100 \times 0,25 = 25$, ce qui conforte la conjecture de la partie A.

Bilan :

Si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire X, on aura en moyenne $E(X)$ carreaux. Si X suit une loi binomiale, $E(X)$ semble être égale à np. Ce résultat est très intuitif. Appliqué à notre situation, il indique qu'en moyenne, lors d'une telle épreuve avec 100 répétitions, on obtient 25 cartes de carreau, ou dit autrement, qu'un quart des cartes obtenues sont des cartes de carreau.

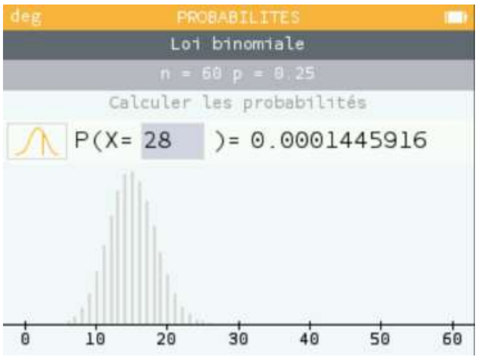
3.3 Corrigé activité C :

Questions :

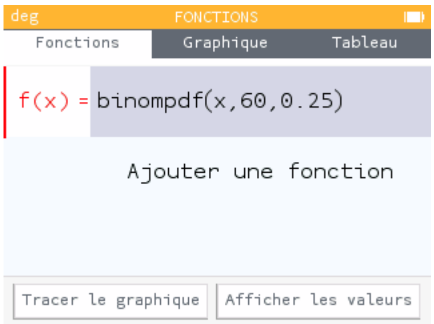
1. Le choix aléatoire d'une réponse est une épreuve de Bernoulli de succès S : « La réponse est juste » de probabilité $p = \frac{1}{4}$. L'expérience aléatoire correspond à la répétition de $n = 60$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n = 60$ et $p = 0,25$.

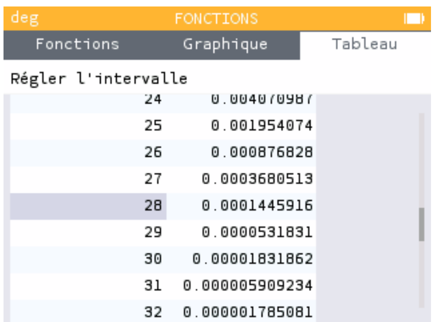
2. On obtient, en appliquant la formule du cours, $E(X) = np = 15$. Sur un très grand nombre de tests réalisés, un étudiant qui répond au hasard aura, en moyenne, 15 réponses exactes.

3. a. La calculatrice donne par exemple :



On peut créer une fonction de la façon suivante pour obtenir un tableau de valeurs :





b. Un entier a tel que $P(X \leqslant a) \approx 0,95$ est $a = 20$. Un entier b tel que $P(X \geqslant b) \approx 0,95$ est $b = 10$.

c. Deux entiers c et d tels que $P(c \leqslant X \leqslant d) \approx 0,95$ sont $c = 9$ et $d = 21$. Ces résultats ne sont pas uniques : $c = 10$ et $d = 25$ conviennent également.

d. $P(9 \leqslant X \leqslant 21) \approx 0,95$ signifie qu'un étudiant qui répond au hasard aura entre 9 et 22 réponses exactes avec une probabilité proche de 0,95.

Bilan :

Soit α un nombre réel compris entre 0 et 1. Pour trouver deux nombres entiers a et b compris entre 0 et n, tels que $P(a \leqslant X \leqslant b) \approx \alpha$, on peut :

- trouver le plus grand entier a tel que $P(X < a) \approx \frac{1-\alpha}{2}$;
- trouver le plus petit entier b tel que $P(X > b) \approx \frac{1-\alpha}{2}$;
- on a alors $P(a \leqslant X \leqslant b) \approx \alpha$.

Pour faire cela, un outil numérique (tableur, calculatrice, etc.) sera souvent très utile.

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 10 :

On a $P(X=1) = \binom{5}{1} \times 0,2^1 \times (1-0,2)^4 = 5 \times 0,2 \times 0,8^4 = 0,8^4$. La réponse a est donc juste. La réponse b est fausse, car $E(X) = 5 \times 0,2 = 1$. La réponse c est fausse, c'est $P(X=1)$ qui est égal au membre de droite. La réponse d est fausse, car le coefficient binomial a été oublié.

$\boxed{\text{Réponse : a}}$

Corrigé exercice 11 :

Les réponses a, b et d sont fausses, car la variable aléatoire ne donne pas un nombre de succès. La réponse c donne le nombre de succès lors de la répétition de 5 expériences de Bernoulli de succès S : « Une face paire apparaît ».

$\boxed{\text{Réponse : c}}$

Corrigé exercice 12 :

On peut vérifier que $P(X \leqslant 150) \approx 0,949$ et $P(X \leqslant 151) \approx 0,964$. La réponse c est donc vraie, les autres sont fausses.

$\boxed{\text{Réponse : c}}$

Corrigé exercice 13 :

La réponse a est fausse. On a bien $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, mais l'égalité proposée est fausse car $p^k(1-p)^{n-k} \neq p^{n-k}(1-p)^k$ si $p \neq 0,5$. La réponse b est juste, car $P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$. La réponse c est fausse car, pour une loi binomiale de paramètres n et p, $V(X) = np(1-p)$. $p(1-p)$ est la variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p ou de paramètre $1-p$. La réponse d est fausse, car $V(X) = (1-p)E(X)$.

$\boxed{\text{Réponse : b}}$

Corrigé exercice 14 :

La réponse a est fausse, car il y a trois issues, et non pas deux. Les trois réponses b, c et d sont vraies, les trois expériences admettent pour succès respectif : « La boule est bleue », « Les deux boules sont de la même couleur" et "La boule n'est pas rouge" ».

$\boxed{\text{Réponses : b, c, d}}$

Corrigé exercice 15 :

On obtient à l'aide de la calculatrice les résultats suivants. $P(25 \leqslant X \leqslant 44) \approx 0,952$ $P(32 \leqslant X \leqslant 68) \approx 0,919$ $P(30 \leqslant X \leqslant 72) \approx 0,970$ $P(30 \leqslant X \leqslant 46) \approx 0,954$ Les réponses a et d sont donc justes, les deux autres sont fausses.

$\boxed{\text{Réponses : a, d}}$

Corrigé exercice 16 :

L'épreuve de Bernoulli de l'expérience aléatoire admet pour succès « La carte prélevée est un pique », de probabilité $p = \frac{1}{4}$. L'expérience aléatoire est répétée $n = 5$ fois donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{4}$. La réponse a est juste et la réponse c est fausse. À la calculatrice, on vérifie que $P(X \geqslant 3) \approx 0,103$. La réponse b est juste. Comme X suit une loi binomiale de paramètres n et p, $V(X) = np(1-p) = (1-p)E(X) = \frac{3}{4}E(X)$. La réponse d est donc fausse.

$\boxed{\text{Réponses : a, b}}$

Corrigé exercice 17 :

À la calculatrice, on vérifie que les trois premières affirmations a, b et c sont justes. $V(X) = np(1-p) = 15 \times 0,23 \times 0,77 \approx 2,66$. La réponse d est donc juste aussi.

$\boxed{\text{Réponses : a, b, c, d}}$

Corrigé exercice 18 :

1. L'arrivée d'un élève est une épreuve de Bernoulli de succès S : « l'élève est en retard » de probabilité $p = 0,04$. La variable aléatoire X donne le nombre de succès lors de la répétition de $n = 35$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $n = 35$ et $p = 0,04$.

2. On obtient $P(X = 2) \approx 0,248$.

3. On obtient $P(X \leqslant 2) \approx 0,837$.

4. On obtient $E(X) = np = 1,4$. Sur un très grand nombre d'expériences, on peut donc s'attendre, en moyenne, à 1,4 élève en retard dans cette classe.

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1

Questions préliminaires

1. Chaque passage de clou est une épreuve de Bernoulli de succès S : « La bille tombe à droite », de probabilité $p = 0,5$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 12$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ de paramètres $n = 12$ et $p = 0,5$.

2. La probabilité que la bille tombe dans la case de gauche est $P(X = 0) = \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{4096}$.
La probabilité que la bille tombe dans la case n° 11 est $P(X = 11) = 12 \times \frac{1}{2^{12}} = \frac{3}{1024}$.
La probabilité que la bille tombe dans la case n° 6 est $P(X = 6) = \binom{12}{6} \frac{1}{2^{12}} = \frac{231}{1024}$.

3. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,5$. Donc $E(X) = np = 6$. En moyenne, lorsque l'on réalise un très grand nombre d'expériences, le numéro de la case dans lesquelles les billes tombent est 6.

Méthode 1

1. La probabilité d'aller à droite est de 0,5. La fonction doit donc renvoyer 1 avec une probabilité de 0,5.

```
from random import randint
def direction():
    return randint(0, 1)
```

2. La ligne 8 doit être complétée en ajoutant n car on souhaite réaliser n simulations. À la ligne 10, il faut ajouter 12 car la planche que nous simulons possède 12 rangées. À la ligne 11, il faut ajouter 1 avec une probabilité de 0,5. Pour cela, on utilise la fonction de la question précédente. On obtient donc le code suivant.

```
5 def simulation(n):
6     #liste correspondant aux 13 cases
7     cases = 13*[0]
8     for bille in range(n):
9         case_finale = 0
10        for clou in range(12):
11            case_finale = case_finale + direction()
12        cases[case_finale] = cases[case_finale] + 1
13    return cases
```

3. Les résultats sont en accord avec les réponses aux questions préliminaires car très peu de billes terminent dans la case n° 11 et la majorité terminent dans la case n° 6.

Méthode 2

1. Le fichier est disponible dans le dossier « Fichiers TICE ».
2. a. Dans les cellules C5 à N5, on peut écrire =ALEA.ENTRE.BORNES(0 ; 1). Cette fonction renvoie aléatoirement un nombre entier compris entre les deux bornes indiquées.
   b. Dans la cellule B5, on peut entrer =SOMME(C5 :N5).
3. a. Pour simuler la chute de 1000 billes, il faut étirer la ligne 5 jusqu'à la lignes 1004.
   b. Dans la cellule B2, on peut écrire =NB.SI($B$5 :$B$1004 ; B1), pour compter le nombre de billes arrivées dans la case de gauche. On peut ensuite étirer cette formule jusqu'à la cellule N2.
   c. Les résultats sont en accord avec les réponses aux questions préliminaires car très peu de billes terminent dans la case n° 11 et la majorité terminent dans la case n° 6.

5.2 Corrigé du TP 2

Questions préliminaires

1. La présence ou non de chaque passager à l'embarquement est une épreuve de Bernoulli de succès S : « Le passager est présent » et de paramètre $p = 0,91$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ de paramètres n (le nombre de billets vendus), et $p = 0,91$.
2. On suppose ici que $n = 126$.
3. a. Un problème de surréservation apparaît lorsque plus de 124 passagers se présentent à l'embarquement. Cette probabilité est très faible : $P(X > 124) \approx 9,3 \times 10^{-5}$.
   b. L'espérance de X est de $E(X) = np \approx 114,66$. En moyenne, $114,66$ passagers se présentent à l'embarquement.

Méthode 1

Voici les résultats que l'on obtient.

Nombre de billets vendus	124	125	126	127	128	129	130	131
Profit moyen	11621	11710	11796	11895	11992	12074	12169	12248

Nombre de billets vendus	132	133	134	135	136	137	138
Profit moyen	12334	12383	12443	12444	12445	12419	12372

Le nombre optimal de billets à vendre dans cette simulation est 136.

Méthode 2

1. Le fichier complété se trouve dans le dossier « Fichiers TICE ».
2. Lorsque $n = 130$, le profit moyen est d'environ 12170 euros par avion.
3. On peut estimer que le nombre idéal de billets à vendre se situe entre 133 et 138.
4. En faisant des tests plus poussés, on trouve que le nombre idéal de billets à vendre est 135.

Pour aller plus loin

1. On suppose dans cette question que $n = 135$ billets ont été vendus. Soit G la variable aléatoire donnant le profit de la compagnie aérienne. On a alors $E(X) = 0,91 \times 135 = 122,85$. Si $X \leqslant 124$, alors $G = 100X + 30(n - X) = 70X + 4\,050$. D'après le chapitre 13, on a alors $E(G) = 70E(X) + 4\,050 = 12\,649,50$.

   Si $X > 124$, certains clients ne peuvent pas embarquer donc $G = 100 \times 124 + 30(n - X) - 150(X - 124) = -180X + 35\,050$.

   On a alors $E(G) = -180E(X) + 35\,050 = 12\,937$.

2. Une entreprise qui ne pratiquerait pas la surréservation vendrait 124 billets. Comme les billets ne sont pas remboursés, chaque client rapporte, présent ou non, 100 euros. Le profit associé à chaque vol est alors 12 400 euros.La pratique de la surréservation permet à la compagnie de faire un profit légèrement supérieur, et permet de soigner l'image de la société, en permettant des remboursements aux clients non présents, et en compensant financièrement les clients ne pouvant embarquer.

6 Travailler les automatismes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 19 :

Les expériences suivantes sont des exemples d'épreuves de Bernoulli.

1. Tirer une boule et regarder si elle porte le numéro 3. La probabilité de succès est de $0,2$.
2. Tirer une boule et regarder si le numéro est un nombre premier. La probabilité de succès est de $0,6$ car il y a trois nombres premiers entre 1 et 5 : 2, 3 et 5.

Les expériences suivantes ne sont pas des épreuves de Bernoulli.

1. Tirer une boule et regarder son numéro car il y a cinq issues possibles.
2. Tirer deux boules avec remise et compter le nombre de boules numérotées 1 obtenues car il peut y avoir zéro, une ou deux boules avec le numéro 1. Il y a donc trois issues possibles.

Corrigé exercice 20 :

Tirer un 7 dans un jeu de 52 cartes est une épreuve de Bernoulli de succès S « La carte est un 7 » et d'échec « La carte n'est pas un 7 ». Comme il y a quatre cartes 7 dans un jeu de 52 cartes, la probabilité du succès est $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

Corrigé exercice 21 :

Une urne opaque contient 87 boules noires et 13 boules rouges indiscernables au toucher. On tire une boule et on regarde sa couleur. L'expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{13}{87+13} = 0,13$ et de succès S « La boule obtenue est rouge ».

Corrigé exercice 22 :

L'énoncé ne précise pas que les tirages sont indépendants. Une information qui aurait pu assurer l'indépendance est que les tirages soient fait avec remise. Dans ce cas, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = \frac{1}{13}$.

Corrigé exercice 23 :

L'expérience aléatoire décrite est bien la répétition de plusieurs expériences aléatoires identiques et indépendantes mais la variable aléatoire Y ne donne pas le nombre de succès, plusieurs résultats sont possibles. Y ne suit donc pas une loi binomiale.

Corrigé exercice 24 :

D'après le contexte, $P(T = 0) = 0$: en effet, en effectuant 0 lancer, il est impossible d'obtenir 5 fois le côté pile. Donc $P(T = 0) = 0$. Or, si T suit une loi binomiale, on ne peut avoir $P(T = 0) = 0$ que si la probabilité du succès est $p = 1$; ce qui n'est pas le cas ici. T ne suit donc pas une loi binomiale.

Corrigé exercice 25 :

Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n = 3$ et $p = 0,1$. L'espérance de Y est $E(Y) = np = 3 \times 0,1 = 0,3$. La variance de Y est $V(Y) = np(1-p) = 3 \times 0,1 \times 0,9 = 0,27$. L'écart type de Y est $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{0,27} = 0,3\sqrt{3} \approx 0,52$.

Corrigé exercice 26 :

D'après la représentation graphique de l'énoncé, la loi de probabilité de X est la suivante.

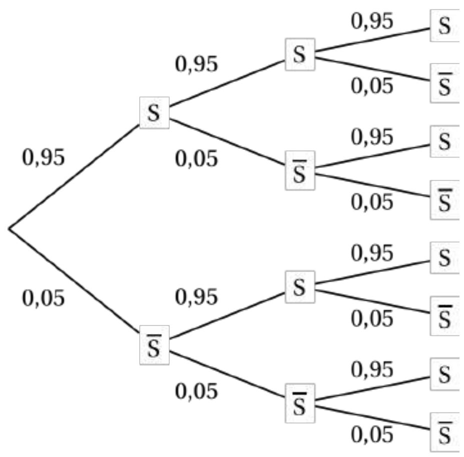
k	0	1	2	3	Total
$P(X=k)$	0,2	0,4	0,3	0,1	1

L'espérance de X est $E(X) = 0 \times 0,2 + 1 \times 0,4 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,1 = 1,3$. Si X suivait une loi binomiale de paramètres n et p alors, d'après le tableau, $n = 3$. Pour calculer p on peut utiliser le fait que $E(X) = np$ et donc que $p = \frac{E(X)}{n} = \frac{1,3}{3} = \frac{13}{30}$. Si X suivait une loi binomiale, il faudrait que $P(X = 3)$ soit égale à p^3 or ce n'est pas le cas car $p^3 \approx 0,08$ donc X ne suit pas une loi binomiale.

6.2 Exercices

Corrigé exercice 27 :

1. Voici l'arbre que l'on obtient.



2. Il existe trois chemins qui mènent à un succès.

   On obtient $P(X = 1) = 3 \times 0,95 \times 0,05^2 \approx 0,007$.

Corrigé exercice 28 :

En utilisant les formules du cours on obtient les résultats suivants.
$P(X=0) = \binom{4}{0} \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{4-0} = 1 \times 1 \times \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$
$P(X=2) = \binom{4}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{4-2} = 6 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{8}{27}$

Corrigé exercice 29 :

1. L'application des formules donne :
   $P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,001 + 0,027 = 0,028.$
2. Étant donné que $\{X \geqslant 2\}$ est l'événement contraire de $\{X \geqslant 1\}$, on obtient :
   $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 0,972.$

Corrigé exercice 30 :

On rappelle que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. L'application des formules donne :
$P(X = 3) = \binom{4}{3} \times p^3(1-p) = 4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \times \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \sqrt{2} - 1.$

Corrigé exercice 31 :

À l'aide de la calculatrice on obtient les résultats suivants.
$P(X = 16) \approx 0,104$
$P(X \leqslant 16) \approx 0,672$
$P(X > 16) \approx 0,328$

Corrigé exercice 32 :

À l'aide de la calculatrice on obtient les résultats suivants.
$P(X = 6) \approx 0,200$
$P(X \leqslant 7) \approx 0,617$
$P(X \geqslant 5) \approx 0,953$

Corrigé exercice 33 :

À l'aide de la calculatrice on obtient les résultats suivants.
$P(X > 9) \approx 0,522$
$P(X < 13) \approx 0,884$
$P(7 \leqslant X \leqslant 10) \approx 0,553$

Corrigé exercice 34 :

D'après la représentation graphique, $n = 5$. On a $P(X = 5) = p^5 = 0,07776$. À l'aide de la touche $\sqrt[n]{\dots}$ de la calculatrice, on obtient $p = 0,6$. Étant donné que $p = \frac{a}{100}$ d'après l'énoncé, on obtient $a = 60$.

Corrigé exercice 35 :

Voici comment compléter le code Python.

```python
from math import factorial

def LoiDeProbabilite():
  bino = 11*[0]
  for k in range(11):
    bino[k] = factorial(10)/(factorial(k)*factorial(10-k)) * 0.7**k * (1-0.7)**(10-k)
  return bino
```

Corrigé exercice 36 :

Voici comment compléter le code Python.

```
from math import factorial

def binomFRep(n, p, k):
  # Si la v.a. suit une loi B(n,p), renvoie P(X <= k)
  s = 0
  for i in range(k+1):
    s = s + factorial(n)/(factorial(i)*factorial(n-i))*(p**i)*(1-p)**(n-i)
  return s
```

Corrigé exercice 37 :

L'espérance d'une loi binomiale X est égale au produit des paramètres n et p donc $E(X) = np = 35 \times \frac{3}{7} = 15$.
Si on reproduit un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, X est en moyenne égale à 15.

Corrigé exercice 38 :

On applique la formule de la variance d'une loi binomiale X de paramètres n et p et on obtient $V(X) = np(1-p) = 75 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = 18$.
L'écart type de X est égal à $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 3\sqrt{2}$.

Corrigé exercice 39 :

L'espérance de X est égale à $E(X) = np = 7,13$.
La variance de X est égale à $V(X) = np(1-p) = 5,4901$.

Corrigé exercice 40 :

L'espérance de X est égale à $E(X) = np = \frac{497}{9}$.
La variance de X est égale à $V(X) = np(1-p) = \frac{994}{81}$.

Corrigé exercice 41 :

On sait que $E(X) = 3,7$. Or X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et p, donc $E(X) = np = 5p$.
On en déduit que $p = \frac{E(X)}{5} = 0,74$.

Corrigé exercice 42 :

On obtient à l'aide de la calculatrice $P(X \leqslant 8) \approx 0,76$ et $P(X \leqslant 9) \approx 0,87$.
Donc le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) \geqslant 0,8$ est $a = 9$.

Corrigé exercice 43 :

On obtient à l'aide de la calculatrice $P(X \geqslant 14) \approx 0,86$ et $P(X \geqslant 15) \approx 0,77$.
Donc le plus grand entier a tel que $P(X \geqslant a) \geqslant 0,8$ est $a = 14$.

Corrigé exercice 44 :

1. Un entier a tel que $P(X \leqslant a) \approx 0,025$ est $a = 19$.
   Un entier b tel que $P(X \leqslant b) \approx 0,975$ est $b = 34$.
2. On en déduit que $P(a \leqslant X \leqslant b) \approx 0,95$.

Corrigé exercice 45 :

1. Un entier a tel que $P(X \leqslant a) \approx 0,05$ est $a = 88$. Un entier b tel que $P(X \leqslant b) \approx 0,95$ est $b = 111$.
2. On en déduit que $P(a < X \leqslant b) \approx 0,9$.

Corrigé exercice 46 :

1. On peut entrer la formule « =LOI.BINOMIALE(A2 ; 5 ; 0,4 ; 0) ».La commande « =LOI.BINOMIALE(k ; n ; p ; 0) » permet d'obtenir $P(X = k)$ lorsque X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
2. On peut entrer la formule « =LOI.BINOMIALE(A4 ; 5 ; 0,4 ; 1) ». La commande « =LOI.BINOMIALE(k ; n ; p ; 1) » permet d'obtenir $P(X \leqslant k)$ lorsque X suit une loi binomiale de paramètres n et p. On peut également utiliser la commande « =SOMME(B2 :B4) ».

Corrigé exercice 47 :

X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,4$:

- si $n = 23$, $P(X \leqslant 5) \approx 0,054$
- si $n = 24$, $P(X \leqslant 5) \approx 0,040$

Le plus grand entier n tel que $P(X \leqslant 5) \geqslant 0,05$ est $n = 23$.

Corrigé exercice 48 :

Dans une ville imaginaire, les élèves arrivent jusqu'au baccalauréat sans avoir redoublé avec une probabilité égale à 0,83. Si on considère des classes de $n = 35$ élèves, dont on supposera les parcours scolaires totalement indépendants les uns des autres, quel est le nombre moyen d'élèves n'ayant jamais redoublé ?

Corrigé exercice 49 :

Chaque heure de ses 35 heures de travail de la semaine, Tania est appelée au téléphone par la direction de l'entreprise avec une probabilité de 0,18. On suppose que les différents appels sont indépendants les uns des autres. Quelle est la probabilité que Tania soit appelée au moins 10 fois dans une semaine ?

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 50 :

Une partie de Clémentine est une expérience aléatoire, avec deux issues : un succès S « Clémentine gagne la partie » de probabilité 0,71 et un échec, le contraire de S, de probabilité 0,29. Une partie de Clémentine est donc une épreuve de Bernoulli de succès S et de paramètre 0,71.

Corrigé exercice 51 :

1. Loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p = 0,6$	$p = 0,4$

2. L'espérance de X est égale à $E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p = 0,4$. La variance de X est égale à $V(X) = (0-p)^2 \times (1-p) + (1-p)^2 \times p = (p^2 + p - p^2)(1-p) = p(1-p) = 0,24$.

Corrigé exercice 52 :

La variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p donc $V(X) = p(1-p)$. $V(X) = \frac{6}{49}$ implique que $p(1-p) = \frac{6}{49}$ soit $p^2 - p + \frac{6}{49} = 0$. Les racines de ce trinôme du second degré sont $\frac{1}{7}$ et $\frac{6}{7}$. Les deux valeurs possibles de p sont donc $\frac{1}{7}$ et $\frac{6}{7}$.

Corrigé exercice 53 :

1. Oui, c'est une épreuve de Bernoulli. Mais il n'y a pas ici besoin de considérer une répétition d'épreuves de Bernoulli.

2. Oui, on considère la variable aléatoire X donnant le nombre de succès lors de la répétition de $n = 10$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de succès « La boule tirée est noire » de paramètre $p = \frac{1}{2}$. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$. L'événement considéré correspond à $X = 3$.

3. Oui, mais il n'y a pas ici besoin de considérer une répétition d'épreuves de Bernoulli.

4. Oui. Le succès est « Une boule noire est obtenue ». Si on note S_k l'événement « Une boule noire est obtenue au k-ème tirage », la probabilité de l'événement présenté est $P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3} \cap \overline{S_4} \cap S_5)$.

5. Oui, on considère la variable aléatoire Y donnant le nombre de succès lors de la répétition de $n = 10$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de succès « La boule tirée est rouge » de paramètre $p = \frac{3}{8}$. Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{8}$. L'événement considéré correspond à $Y \leqslant 5$.

Corrigé exercice 54 :

1. Oui, il n'y a que deux issues possibles (« Le véhicule est électrique » et « Le véhicule n'est pas électrique »).

2. Non car il y a plus de deux issues.
3. Oui, il n'y a que deux issues possibles (« L'immatriculation se termine par un Z » et « L'immatriculation ne se termine pas par un Z »).
4. Non car il y a plus de deux issues.
5. Oui, il n'y a que deux issues possibles (« La longueur est inférieure ou égale à 450 cm » et « La longueur est strictement supérieure à 450 cm »).

Corrigé exercice 55 :

1. Oui, la probabilité du succès est de $\frac{7}{28} = 0,25$.
2. Oui, la probabilité du succès est de $\frac{5}{14}$ (on rappelle que 0 est un nombre pair).
3. Non, il y a plus de deux issues.
4. Oui, la probabilité du succès est de $\frac{21}{28} = 0,75$.

Corrigé exercice 56 :

Prendre une carte de fidélité au hasard est une expérience aléatoire avec deux issues : un succès S « La carte de fidélité est celle du magasin », de probabilité $0,2$ et un échec, le contraire de S, de probabilité $0,8$. Prendre une carte de fidélité au hasard est donc une épreuve de Bernoulli de succès S et de paramètre $0,2$.

Corrigé exercice 57 :

Piocher une boule au hasard est une expérience aléatoire avec deux issues : un succès S « La boule n'est pas noire », de probabilité $0,95$ et un échec $\overline{S}$, « La boule est noire » de probabilité $0,05$.
Piocher une boule au hasard est donc une épreuve de Bernoulli de succès S et de paramètre $0,95$.

Corrigé exercice 58 :

Retourner une seconde carte au hasard est une expérience aléatoire avec deux issues : un succès S « La seconde carte représente un palmier » de probabilité $\frac{1}{15}$, et un échec $\overline{S}$, « La seconde carte ne représente pas un palmier » de probabilité $\frac{14}{15}$. Retourner une seconde carte au hasard est donc une épreuve de Bernoulli de succès S et de paramètre $\frac{1}{15}$.

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 59 :

1. La réponse correcte est la réponse a. En utilisant la formule du cours on obtient : $P(X=1) = \binom{10}{1} \times 0,6^1 \times (1-0,6)^{10-1} = \binom{10}{1} \times 0,6 \times (0,4)^9$.

2. La réponse correcte est la réponse d. $\{X \geqslant 1\}$ est l'événement contraire de $\{X = 0\}$ donc $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0)$. On obtient $P(X \geqslant 1) = 1 - \binom{10}{0} \times 0,6^0 \times (1 - 0,6)^{10-0} = 1 - 0,4^{10}$.

Corrigé exercice 60 :

On obtient, à l'aide de la calculatrice pour les questions 1 et 2 et en utilisant les formules du cours pour les questions 3 et 4, les valeurs suivantes.

1. $P(X=5) \approx 0,182$

2. $P(X \leqslant 5) \approx 0,758$

3. $E(X) = 5 \times 0,17 = 0,85$

4. $V(X) = 5 \times 0,17 \times (1-0,17) = 0,7055$

Corrigé exercice 61 :

En testant différentes valeurs de k à la calculatrice, on constate que la probabilité $P(X = k)$ est maximale pour $k = 5$. On obtient alors $P(X=5) \approx 0,225$.

Corrigé exercice 62 :

1. Faux sauf si $p = 1$, c'est-à-dire si le succès est certain.

2. Vrai car la variable aléatoire ne prend que des valeurs positives ou nulles.

3. Vrai car $E(X) = np$ et $n \geqslant 0$.

4. Vrai car $E(X) = np$ et $p \geqslant 0$.

5. Vrai car $V(X) = np(1-p)$ et $p(1-p) \geqslant 0$.

6. Faux. Par exemple, si $p = 0,5$, $V(X) = 0,25n$, alors que, si $p = 1$, $V(X) = 0 < 0,25n$.

Corrigé exercice 63 :

Les différents jets de dés sont indépendants. Sachant que les 6 premiers jets ont donné un 1, la probabilité d'obtenir $X = 7$ est égale à la probabilité d'avoir un 1 au dernier jet, c'est-à-dire $\frac{1}{6}$. Le fait que les 6 premiers jets de dé ont donné un 1 n'influe pas sur la probabilité d'obtenir un 1 au septième jet.

Corrigé exercice 64 :

1. Cela signifie que les événements « Le feux est vert » sont indépendants.

2. L'arrivée à un passage piéton est une épreuve de Bernoulli de succès S « Le feu est vert » et de paramètre $p = 0,4$. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de feux verts rencontrés.

   Y donne le nombre de succès lors de la répétition de $n = 4$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,4$.

   On obtient $P(Y = 4) = 0,4^4 = 0,0256$.

   La probabilité d'avoir tous les feux au vert vaut donc $0,0256$.

3. En utilisant les formules, on obtient $P(X = 1) = \binom{4}{1} \times 0,4^1 \times 0,6^3 = 0,3456$ et $P(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0,4^2 \times 0,6^2 = 0,3456$.

   Les deux événements ont donc la même probabilité de survenir.

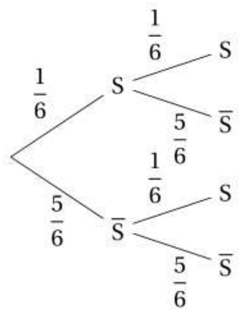
Corrigé exercice 65 :

1. Chaque lancer de dé est une épreuve de Bernoulli de succès « Le résultat est un 5 ou un 6 » et de paramètre $p = \frac{1}{3}$. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès lors de la répétition des $n = 5$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. D'après l'énoncé, « l'elfe terrasse le troll » correspond à l'événement $\{X \geqslant 3\}$, dont la probabilité (qui peut être calculée à la calculatrice) est $P(X \geqslant 3) \approx 0,210$.

2. Pour cette question, on peut :

   - utiliser une loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{1}{6}$, puis calculer la probabilité d'avoir au moins un succès ;
   - utiliser directement un arbre pondéré et calculer la probabilité de l'événement recherché.

   Soit S le succès d'un lancer de dé, c'est-à-dire « Le résultat est 6 ». On obtient l'arbre suivant.



   Il existe trois chemins menant à au moins un succès. La probabilité de neutraliser le troll en utilisant une attaque spéciale est donc de $\frac{11}{36} \approx 0,306$.

3. L'attaque spéciale est donc plus avantageuse que l'attaque standard.

Corrigé exercice 66 :

1. Soient X la variable aléatoire donnant le nombre d'as tirés et G le gain algébrique de Tatiana. Chaque tirage de carte est une épreuve de Bernoulli de succès S « La carte tirée est un as » et de paramètre $p = \frac{1}{8}$. X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 4$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{8}$. On en déduit la loi de probabilité de G.

g_i	-5	5	45
$P(G = g_i)$	$0,5862$	$0,4136$	$0,0002$

L'espérance de G est donc $E(G) \approx -5\times 0,5862+5\times 0,4136+45\times 2\times 10^{-4} \approx -0,85$. Comme cette espérance est strictement négative, ce jeu n'est pas équitable et est en défaveur de Tatiana.

2. Dans le cas général, la loi de probabilité de G est la suivante.

g_i	-5	5	$m-5$
$P(G = g_i)$	$0,5862$	$0,4136$	$0,0002$

L'espérance de G vaut alors $E(G) = -0,864 + 0,0002m$. Ce résultat devient strictement positif si $m > 4320$. Le jeu devient donc favorable à Tatiana si $m > 4320$.

Corrigé exercice 67 :

On rappelle la formule des probabilités conditionnelles : $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

1. On obtient $P_{X\leqslant 10}(X = 9) = \frac{P((X=9)\cap(X\leqslant 10))}{P(X\leqslant 10)} = \frac{P(X=9)}{P(X\leqslant 10)}$. Puis à l'aide de la calculatrice $P_{X\leqslant 10}(X = 9) \approx \frac{0,1154}{0,8957} \approx 0,129$.

2. On obtient $P_{X>5}(X < 15) = \frac{P(5<X<15)}{P(X>5)}$ qui peut se réécrire de la manière suivante $P_{X>5}(X < 15) = \frac{P(6\leqslant X\leqslant 14)}{P(X\geqslant 6)}$. Puis à l'aide de la calculatrice $P_{X>5}(X < 15) \approx \frac{0,7479}{0,7522} \approx 0,9942$.

Corrigé exercice 68 :

En utilisant la calculatrice et la formule des probabilités totales, on obtient les résultats suivants.

1. $P(X = 13) \approx 0,184$
2. $P(X < 15) \approx 0,755$
3. $P(7 \leqslant X \leqslant 14) \approx 0,753$
4. $P_{X<15}(X = 13) = \frac{P((X=13)\cap(X<15))}{P(X<15)} = \frac{P(X=13)}{P(X<15)} \approx \frac{0,184}{0,755} \approx 0,244$
5. Si X est compris dans l'intervalle $[7; 14]$ alors il est nécessairement plus petit que 15 donc $P_{7\leqslant X\leqslant 14}(X < 15) = 1$.
6. $P_{X<15}(7 \leqslant X \leqslant 14) = \frac{P(7\leqslant X\leqslant 14)}{P(X<15)} \approx 0,998$

Corrigé exercice 69 :

1. Chaque lancer de pièce est une épreuve de Bernoulli de succès S « Le côté Face est obtenu » et de probabilité $p = 0,5$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de face obtenues lors de la répétition de n lancers suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,5$. L'événement contraire de « Obtenir au moins un face » est l'événement « Obtenir 0 face » dont la probabilité vaut $0,5^n$. On obtient donc $p_n = P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,5^n$.

2. Voici un exemple d'algorithme :

   $n \leftarrow 0$

   Tant que $1 - 0,5^n < 0,9999$, faire :

   $\quad n \leftarrow n + 1$

   Fin Tant que

   Renvoyer n

3. Voici la version Python de cet algorithme.

```python
def lancers():
    n = 0
    while 1 - 0.5**n < 0.9999:
        n = n + 1
    return n
```

Corrigé exercice 70 :

1. Le choix d'une plage par un touriste est une épreuve de Bernoulli de succès S « Le touriste choisit la place à l'est » et de probabilité $p = \frac{1}{2}$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$.

2. a. Si deux touristes sont heureux, il y a deux plages avec exactement un touriste. Or on sait que $n \geqslant 3$ et qu'il n'y a que deux plages. Il est donc impossible qu'il y ait deux touristes heureux.

   b. Si $n = 3$, « Il y a un touriste heureux » signifie soit qu'il y a un touriste sur la place à l'est (ce qui correspond à l'événement $\{X = 1\}$) soit qu'il y a un touriste sur la plage à l'ouest (ce qui correspond à l'événement $\{X = 2\}$). Ces deux événements ont la même probabilité qui vaut $P(X = 1) = P(X = 2) = \binom{3}{1} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2^3}$. Donc la probabilité qu'un touriste soit heureux vaut $P(X = 1) + P(X = 2) = 2 \times \frac{3}{2^3} = \frac{3}{2^2} = 0,75$.

   c. « Il y a un touriste heureux » correspond à la réunion des deux événements incompatibles $\{X = 1\}$ et $\{X = n - 1\}$. Ces deux événements ont la même probabilité qui est égale à : $P(X = 1) = P(X = n-1) = \binom{n}{1} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n}{2^n}$. Donc la probabilité qu'un touriste soit heureux est bien égale à : $P(X = 1) + P(X = n - 1) = 2 \times \frac{n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

   d. Pour $n = 10$, la probabilité pour qu'un touriste soit heureux est égale à $\frac{n}{2^{n-1}} = \frac{10}{2^9} \approx 0,02$.

Corrigé exercice 71 :

Le succès à chaque tirage de boules peut être défini comme une épreuve de Bernoulli, de succès « La boule est rouge ». La variable aléatoire compte le nombre de succès lors de la répétition de ces épreuves de Bernoulli. Mais la loi suivie par X n'est pas binomiale car chaque tirage modifie le contenu de l'urne (puisque le tirage est sans remise) et les épreuves de Bernoulli ne sont donc pas identiques ni indépendantes.

Corrigé exercice 72 :

La variable aléatoire Y ne compte pas le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire ne suit donc pas une loi binomiale.

Corrigé exercice 73 :

1. Oui, $n = 1$ et $p = \frac{1}{16}$.
2. Non, on ne compte pas un nombre de succès.
3. Oui, $n = 7$ et $p = \frac{2}{3}$.
4. Non, le nombre de répétitions dépend du résultat des tirages.
5. Non, le nombre de répétitions dépend du résultat des tirages.
6. Oui, $n = 4$ et $p = \frac{1}{4}$.
7. Non, comme le tirage se fait sans remise, les épreuves de Bernoulli ne sont ni identiques ni indépendantes.
8. Oui, $n = 100$ et $p = 0,93$ (en supposant que les personnes se présentent indépendamment les unes des autres).
9. Non, la variable aléatoire ne compte pas un nombre de succès.
10. Oui, $n = 3$ et $p = \frac{4}{11}$.
11. Non, comme le tirage se fait sans remise, les épreuves de Bernoulli ne sont ni identiques ni indépendantes. Cependant, dans la pratique, l'hypothèse sera souvent faite qu'un tirage ne modifie par le contenu de l'urne de manière importante (car la probabilité de tirer une pièce défectueuse parmi 100 000 pièces est presque égale à la probabilité de tirer une pièce défectueuse parmi 99 999 pièces). Si on accepte cette approximation, le tirage peut donc être assimilé à un tirage avec remise. X suit alors une loi binomiale de paramètres n et p, avec $n = 3$ et $p = 0,01$.

Corrigé exercice 74 :

1. On obtient à l'aide de la calculatrice $P(X = 11) \approx 0,125$.

   $P(X = 13,5) = 0$ car X ne prend que des valeurs entières positives.

   $P(X = -1) = 0$ car X ne prend que des valeurs entières positives.

2. $P(X \leqslant 12) \approx 0,522$.
   $P(X > 17) = 1 - P(X \leqslant 17) \approx 0,044$.
3. $P(10 < X \leqslant 20) = P(9 \leqslant X \leqslant 20) \approx 0,734$.
   $P(7,8 \leqslant X < 9) = P(X = 8) \approx 0,046$.
4. $E(X) = np = 40 \times 0,31 = 12,4$
   $V(X) = np(1-p) = 40 \times 0,31 \times (1 - 0,31) = 8,556$
   $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 2,925$

Corrigé exercice 75 :

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs gagnants. L'ordre prédit par chaque joueur est une épreuve de Bernoulli, de succès S « L'ordre prédit est le bon » et de paramètre $p = \frac{1}{116\,280}$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 80\,000$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n = 80\,000$ et $p = \frac{1}{116\,280}$. Son espérance est égale à $E(X) = np = 80\,000 \times \frac{1}{116\,280} = \frac{2\,000}{2\,907} \approx 0,688$. Sur un très grand nombre de courses, le nombre moyen de gagnants parmi les joueurs est égal à l'espérance de X, c'est-à-dire 0,69 en arrondissant au centième.

Corrigé exercice 76 :

Les différentes valeurs prises par la variable aléatoire X sont des entiers compris entre 0 et 6. Donc $n = 6$. Comme on dispose de la loi de probabilité, une méthode pour retrouver le paramètre p consiste à utiliser l'espérance de X. X suit une loi binomiale de paramètres n et p donc $E(X) = np = 6p$. Or d'après le tableau, $E(X) = 0 \times \frac{64}{15\,625} + 1 \times \frac{576}{15\,625} + 2 \times \frac{432}{3\,125} + \ldots + 6 \times \frac{729}{15\,625} = 3,6$. On en déduit que $p = \frac{E(X)}{6} = 0,6$. On vérifie que les différentes probabilités dans le tableau correspondent bien à une loi binomiale $\mathcal{B}(6;0,6)$ et on en conclut donc que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,6$.

Corrigé exercice 77 :

Lorsqu'elle gagne, Yasmine a dépensé 1 € pour ensuite gagner 3 €. Son gain est donc de 2 € sur une partie. Le gain maximal de Yasmine est donc égal à 8 €. Le gain minimal de Yasmine est égal à –40 €. Chaque coup à la roulette est une épreuve de Bernoulli de succès S « Le rouge sort » et de paramètre $p = \frac{18}{37}$. À la roulette, les résultats successifs obtenus sont indépendants. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 40$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres $n = 40$ et $p = \frac{18}{37}$. Son espérance est $E(X) = np = 40 \times \frac{18}{37} = \frac{720}{37}$. G est égal à $3X - n$. On en déduit le gain algébrique moyen : $E(G) = 3 \times \frac{720}{37} - 40 = \frac{680}{37} \approx 18,378\,3$. Le gain algébrique moyen est égal à 18,38 €, arrondi au centième près.

Corrigé exercice 78 :

Si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors l'espérance de X vaut $E(X) = np$ et sa variance vaut $V(X) = np(1-p)$. L'énoncé nous permet d'aboutir au système d'équations d'inconnues n et p : $\begin{cases} np = 19,2 \\ np(1-p) = 3,84 \end{cases}$. En substituant np par 19,2 dans la seconde équation, nous arrivons à l'équation d'inconnue p suivante $19,2(1-p) = 3,84$. On en déduit que $p = 1 - \frac{3,84}{19,2} = 0,8$. Avec la première équation, on déduit alors que $n = \frac{19,2}{0,8} = 24$. Une loi binomiale de paramètres $n = 24$ et $p = 0,8$ vérifie les deux conditions sur l'espérance et la variance de l'énoncé. Donc X peut suivre une loi binomiale.

Corrigé exercice 79 :

Supposons que X suive une loi binomiale. Avec le même raisonnement que dans l'exercice précédent, on arrive à la conclusion que ses paramètres valent $n = 62,4$ et $p = 0,3$. Cependant, pour une loi binomiale, n doit être un entier. On arrive donc à une contradiction. On vient de montrer par l'absurde que X ne peut pas suivre une loi binomiale.

Corrigé exercice 80 :

1. Chaque tir est une épreuve de Bernoulli de succès S « La cible est touchée » et de paramètre $p = \frac{3}{4} = 0,75$. La variable aléatoire C compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 60$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc C suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n = 60$ et $p = 0,75$.

2. L'événement « Sven touche au moins 50 fois la cible » correspond à $C \geqslant 50$. On obtient avec la calculatrice $P(C \geqslant 50) \approx 0,0859$. L'arrondi au millième de la probabilité que Sven touche au moins 50 fois la cible pendant la séance est égale à 0,086.

Corrigé exercice 81 :

1. Une journée sans intervention correspond à l'événement $\{X = 0\}$ dont la probabilité est de $P(X = 0) \approx 0,262$.

2. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,2$ donc $E(X) = np = 6 \times 0,2 = 1,2$. En moyenne, sur un très grand nombre de jours, il y a donc 1,2 intervention par jour.

3. Il s'agit ici d'un calcul de probabilités conditionnelles.

   $P_{X\geqslant 1}(X \geqslant 3) = \frac{P((X\geqslant 3)\cap(X\geqslant 1))}{P(X\geqslant 1)} = \frac{P(X\geqslant 3)}{P(X\geqslant 1)} \approx 0,134$ Sachant qu'il y a déjà eu une intervention ce matin, la probabilité, qu'il y ait au moins trois interventions aujourd'hui est d'environ 0,134.

Corrigé exercice 82 :

1. La formule « =ENT(ALEA()+0,7) » permet de simuler une expérience aléatoire suivant une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,7$.

   La formule « =NB.SI(G2 :G101 ;0) » compte le nombre de cellules dans la plage G2 :G101 contenant 0.

2. D'après la formule de la cellule J2, les simulations vont de la ligne 2 à la ligne 101 : il y en a donc 100. Ce résultat est confirmé par le nombre en face de « Total ».

3. D'après les réponses de la question 1, Dominique a simulé une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n=5$ et $p=0,7$.

4. On peut déduire que le résultat de la cellule J2 est $100-(4+16+25+35+20)=0$. On obtient ainsi la moyenne pondérée $\overline{m}=\frac{0\times0+1\times4+2\times16+3\times25+4\times35+5\times20}{100}=3,51$. Ce résultat est proche de l'espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, qui vaut $n\times p=3,5$, il n'est donc pas surprenant.

Corrigé exercice 83 :

1. La ligne 8 permet de commencer une boucle, pour répéter cinq épreuves de Bernoulli, de manière identique et indépendante. L'instruction « random()<= p » permet de simuler une épreuve de Bernoulli de paramètre p (avec $p=0,7$ dans ce cas). À la ligne 11, l'instruction « If » placée en début de ligne introduit une structure conditionnelle : s'il y a eu au moins 3 succès dans le schéma de Bernoulli, le compteur « c » sera incrémenté la ligne suivante. La ligne 14 renvoie la valeur de « c » qui compte le nombre de simulations (parmi 100) où le nombre de succès a été supérieur ou égal à 3.

2. Si X suit une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,7$, ce programme renvoie une valeur approchée de $100\times P(X\geqslant3)$ c'est-à-dire environ 84.

Corrigé exercice 84 :

1. Si le joueur ne prélève aucune boule noire, il perd 1 euro, soit un gain algébrique de -1 euro. Si le joueur tire respectivement 1, 2, 3 ou 4 boules noires, il gagne respectivement 0, 1, 2 ou 3 euros.

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en euros. On a $G=X-1$ (car la mise de départ est de 1 euro). Le tirage d'une boule de l'urne est une épreuve de Bernoulli de succès S « La boule tirée est noire » et de paramètre $p=0,25$. X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n=4$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc X suit une loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=0,25$. La probabilité que le joueur perde 1 euro est donc de$P(G=-1)=P(X=0)=(1-0,25)^4=\frac{81}{256}\approx0,316$.

3. La probabilité d'obtenir le gain maximal, c'est-à-dire 3 euros, est :

   $P(G=3)=P(X=4)=(0,25)^4=\frac{1}{256}\approx0,004$.

4. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ donc l'espérance de X est :

   $E(X)=np=4\times0,25=1$.

   L'espérance du gain est $E(G)=E(X)-1=0$ donc le jeu est équitable.

Corrigé exercice 85 :

La probabilité d'obtenir un pile au deuxième lancer est égale à la probabilité d'obtenir deux pile de suite, c'est-à-dire à 0,25. Cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli de succès S « Le deuxième lancer a donné un pile » de probabilité $p=\frac{1}{4}$. La variable aléatoire

X compte le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ avec $p = \frac{1}{4}$. Son espérance est $E(X) = np = \frac{n}{4}$. Sa variance est $V(X) = np(1-p) = \frac{3n}{16}$.

Corrigé exercice 86 :

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'œufs cassés dans l'année. Chaque gâteau fait est une épreuve de Bernoulli de succès S « Un œuf est cassé » de probabilité $p = 0,6$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de 52 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 52$ et $p = 0,6$. En moyenne, Maxime casse chaque année $E(X) = np = 52 \times 0,6 = 31,2$ œufs. En moyenne, Maxime aura besoin chaque année de $52 + E(X) = 52 + 52 \times 0,6 = 83,2$ œufs.

Corrigé exercice 87 :

1. Pour résoudre l'exercice, et sans perte de généralité, appelons Aurélie et Bianca les deux jumelles. Notons A et B les variables aléatoires donnant le nombre respectif de balades avec leur père dans l'année d'Aurélie et Bianca. A et B suivent les lois binomiales de paramètres $n = 365$ et $p = 0,5$, telles que $A + B = 365$ (soit $B = 365 - A$). Il n'y a pas injustice lorsque $B - 6 \leqslant A \leqslant B + 6$ c'est-à-dire, en utilisant l'égalité précédente, $179,5 \leqslant A \leqslant 185,5$. On obtient, à l'aide de la calculatrice, $P(179,5 \leqslant A \leqslant 185,5) = P(180 \leqslant A \leqslant 185) \approx 0,246$ La probabilité qu'il y ait une injustice est donc de $p \approx 0,754$.

2. Notons Y le nombre d'années où il y a une injustice sur cette période de 20 ans. Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p \approx 0,754$. La probabilité qu'il y ait plus de 3 injustices sur cette période de 20 ans est $P(Y > 3) = P(Y \geqslant 4) \approx 1$. Il est donc quasiment certain qu'il y ait plus de trois injustices au bout de 20 ans.

Corrigé exercice 88 :

D'après le cours, si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, alors $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On veut montrer que $E(X) = np$.

1. $k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = k\frac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)! \times ((n-1)-(k-1))!}$ $k\binom{n}{k} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)! \times ((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$.

2. D'après la définition de l'espérance d'une variable aléatoire et en utilisant l'égalité

précédente on a :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

3. On procède au changement d'indice $i = k-1$ et on obtient :
   $E(X) = n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^{i+1}(1-p)^{n-i-1}$
   $E(X) = np\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^{i}(1-p)^{(n-1)-i}$
4. D'une part, $(p+(1-p))^{n-1} = 1^{n-1} = 1$. D'autre part, en utilisant l'indication fournie, avec $a = p$ et $b = 1-p$, il vient $1 = (p+(1-p))^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^i(1-p)^{(n-1)-i}$. Donc $E(X) = np \times 1 = np$.

9 Exercices d'entraînement partie 3

Corrigé exercice 89 :

On remarque c'est à partir de $k = 28$ que $P(X \leqslant k)$ est plus grand que 0,25. La réponse est donc $k = 28$.

Corrigé exercice 90 :

On remarque c'est à partir de $k = 36$ que $P(X \leqslant k)$ est plus grand que 0,95. La réponse est donc $k = 36$.

Corrigé exercice 91 :

1. $a = 22$
2. $b = 37$
3. $(a; b) = (22; 36)$ car $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X < a) \approx P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a)$ $P(a \leqslant X \leqslant b) \approx 0,975 - 0,025 = 0,95$.

Corrigé exercice 92 :

1. $a = 25$ et $b = 36$. On a alors $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant 36) - P(X \leqslant 24) \approx 0,901$ d'après le tableau.
2. $(a; b) = (26; 33)$ ou $(a; b) = (27; 34)$ ou $(a; b) = (28; 35)$.

P(k<=X<=k')	k'	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	P(X<=k')	0,008	0,0172	0,0328	0,0583	0,0972	0,1526	0,2257	0,3154	0,4177	0,5262	0,6331	0,7309	0,8139	0,8791	0,9266	0,9584	0,9781	0,9894	0,9953	0,9981
k	P(X<k)																				
22	0,008	0	0,0092	0,0248	0,0503	0,0892	0,1446	0,2177	0,3074	0,4097	0,5182	0,6251	0,7229	0,8059	0,8711	0,9186	0,9504	0,9701	0,9814	0,9873	0,9901
23	0,0172		0	0,0156	0,0411	0,08	0,1354	0,2085	0,2982	0,4005	0,509	0,6159	0,7137	0,7967	0,8619	0,9094	0,9412	0,9609	0,9722	0,9781	0,9809
24	0,0328			0	0,0255	0,0644	0,1198	0,1929	0,2826	0,3849	0,4934	0,6003	0,6981	0,7811	0,8463	0,8938	0,9256	0,9453	0,9566	0,9625	0,9653
25	0,0583				0	0,0389	0,0943	0,1674	0,2571	0,3594	0,4679	0,5748	0,6726	0,7556	0,8208	0,8683	0,9001	0,9198	0,9311	0,937	0,9398
26	0,0972					0	0,0554	0,1285	0,2182	0,3205	0,429	0,5359	0,6337	0,7167	0,7819	0,8294	0,8612	0,8809	0,8922	0,8981	0,9009
27	0,1526						0	0,0731	0,1628	0,2651	0,3736	0,4805	0,5783	0,6613	0,7265	0,774	0,8058	0,8255	0,8368	0,8427	0,8455
28	0,2257							0	0,0897	0,192	0,3005	0,4074	0,5052	0,5882	0,6534	0,7009	0,7327	0,7524	0,7637	0,7696	0,7724
29	0,3154								0	0,1023	0,2108	0,3177	0,4155	0,4985	0,5637	0,6112	0,643	0,6627	0,674	0,6799	0,6827
30	0,4177									0	0,1085	0,2154	0,3132	0,3962	0,4614	0,5089	0,5407	0,5604	0,5717	0,5776	0,5804
31	0,5262										0	0,1069	0,2047	0,2877	0,3529	0,4004	0,4322	0,4519	0,4632	0,4691	0,4719
32	0,6331											0	0,0978	0,1808	0,246	0,2935	0,3253	0,345	0,3563	0,3622	0,365
33	0,7309												0	0,083	0,1482	0,1957	0,2275	0,2472	0,2585	0,2644	0,2672
34	0,8139													0	0,0652	0,1127	0,1445	0,1642	0,1755	0,1814	0,1842
35	0,8791														0	0,0475	0,0793	0,099	0,1103	0,1162	0,119
36	0,9266															0	0,0318	0,0515	0,0628	0,0687	0,0715
37	0,9584																0	0,0197	0,031	0,0369	0,0397
38	0,9781																	0	0,0113	0,0172	0,02
39	0,9894																		0	0,0059	0,0087
40	0,9953																			0	0,0028
41	0,9981																				0

Corrigé exercice 93 :

On obtient à l'aide de la calculatrice que $P(X \leqslant 21) \approx 0,57$ et $P(X \leqslant 22) \approx 0,72$. Le plus petit nombre entier k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0,6$ est donc $k = 22$.

Corrigé exercice 94 :

On obtient à l'aide de la calculatrice que $P(X \leqslant 30) \approx 0,54$ et $P(X \leqslant 31) \approx 0,63$. Le plus grand nombre entier k tel que $P(X \leqslant k) \leqslant 0,6$ est donc $k = 30$.

Corrigé exercice 95 :

1. On trouve grâce à la calculatrice que $a = 8$ et $b = 21$.
2. On a $P(8 < X \leqslant 21) = P(X \leqslant 21) - P(X \leqslant 8)$ d'où $P(8 < X \leqslant 21) \approx 0,95$ puisque les valeurs de a et b ont été choisies de telle sorte que $P(X \leqslant 8) \approx 0,025$ et $P(X \leqslant 21) \approx 0,975$.

Corrigé exercice 96 :

On résume les différentes possibilités dans le tableau suivant.

k	$P(X_1 > k)$	$P(X_2 < k)$
0	0,344	0
1	0,052	0,000006
2	0,004	0,00014
3	0,0001	0,0016
4	0	0,0106
5	0	0,047
6	0	0,150
7	0	0,350
8	0	0,617
9	0	0,851
10	0	0,972
11	0	1

On constate donc que $P(X_1 > k) \leqslant P(X_2 < k)$ si, et seulement si, $k \geqslant 3$.

Corrigé exercice 97 :

1. Le choix d'un élève est une épreuve de Bernoulli de succès S « L'élève est gaucher » de probabilité $p = 0,127$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 35$ épreuves de Bernoulli identiques (car le choix de l'élève se fait avec remise) et indépendantes. X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 35$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = 0,127$.
2. On obtient à l'aide de la calculatrice que $P(X \leqslant 7) \approx 0,93$ et $P(X \leqslant 8) \approx 0,97$.Le plus entier a tel que $P(X \leqslant a) \geqslant 0,95$ est donc 8.
3. Il y a une probabilité supérieure ou égale à 95 % d'avoir 8 gauchers ou moins dans une classe de 35 élèves. On ne peut pas affirmer qu'il est exceptionnel de trouver 7 gauchers dans une classe.

Corrigé exercice 98 :

1. À l'aide de la calculatrice on obtient $a = 177$ et $b = 191$.
2. Si le taux de satisfaction est égal à 92 %, la probabilité que, lors d'un sondage aléatoire de 200 personnes, le nombre de personnes satisfaites soit compris entre 177 et 191 est proche de 0,95. Comme $173 < a$, on peut remettre en cause le taux de satisfaction présenté dans la bande-annonce.

10 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 99 :

1. Le prélèvement de chaque pièce est une épreuve de Bernoulli de succès S « La pièce est défectueuse » de paramètre $p = 0,05$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 20$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 20$ et $p = 0,05$. La probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse est $P(X = 0) = \binom{20}{0} \times 0,05^0 \times (1 - 0,05)^{20} \approx 0,36$. La probabilité qu'une pièce soit défectueuse est $P(X = 1) = \binom{20}{1} \times 0,05^1 \times (1 - 0,05)^{19} \approx 0,38$.

2. La probabilité qu'au plus trois pièces soient défectueuses est $P(X \leqslant 3) \approx 0,98$.

3. X suit une loi binomiale de paramètres n et p donc son espérance est $E(X) = np = 20 \times 0,05 = 1$. En moyenne, sur un très grand nombre de lots de 20 pièces, une pièce par lot est défectueuse.

Corrigé exercice 100 :

1. Le contrôle d'une pièce est une épreuve de Bernoulli de succès « La pièce est défectueuse » de paramètre $p = 0,04$. On peut considérer que les différentes épreuves de Bernoulli sont identiques et indépendantes. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses dans une boîte. X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 25$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $p = 0,04$ donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(25; 0,04)$. L'événement « Une boîte est non conforme » correspond à l'événement $X \geqslant 4$. Sa probabilité est $P(X \geqslant 4) \approx 0,02$.

2. Le contrôle d'une boîte est une épreuve de Bernoulli de succès « La boîte est non conforme » de paramètre $p = 0,02$. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boîtes défectueuses. Y compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 30$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $p = 0,02$ donc Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(30; 0,02)$. La probabilité qu'au moins trois boîtes soient non conformes est $P(Y \geqslant 3) \approx 0,02$.

3. L'espérance de Y est égale à $E(Y) = 30 \times 0,02 = 0,6$. En moyenne, sur un grand nombre de lots de 30 boîtes, 0,6 boîte parmi les 30 sont non conformes.

Corrigé exercice 101 :

1. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, donc son espérance est $E(X) = np$ et sa variance vaut $V(X) = np(1-p)$. Comme p appartient à $[0; 1]$, $1-p$ appartient aussi à $[0; 1]$ et donc $1 \geqslant 1-p$. De plus, comme $n > 0$, np est positif. On obtient donc $np \geqslant np(1-p)$ ce qui implique que $E(X) \geqslant V(X)$.

2. L'écart type $\sigma(X)$ de X est la racine carrée de sa variance, donc $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$. Pour $n = 10$ et $p = 0,9$ on a $E(X) = np = 9$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} \approx 0,95$ donc $E(X) > \sigma(X)$. Pour $n = 10$ et $p = 0,01$, $E(X) = np = 0,1$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} \approx 0,31$ donc $E(X) < \sigma(X)$. L'espérance n'est donc ni toujours supérieure, ni toujours inférieure à l'écart type.

Corrigé exercice 102 :

1. a. Si le test est négatif, un seul test a été réalisé. Si le test est positif, il faut réaliser $1+5=6$ tests.

   b. La variable aléatoire X peut prendre deux valeurs : 1 et 6. En utilisant une loi binomiale, on détermine $P(X=1)=0,999^5 \approx 0,995$ et $P(X=6)=1-P(X=1)\approx 0,005$.

   c. Le nombre moyen de tests réalisés est égal à l'espérance de X soit $E(X)\approx 1\times 0,995+6\times 0,005 \approx 1,025$. Si on compare cela avec la méthode standard où 5 tests sont réalisés, on économise en moyenne 3,975 tests.

2. a. Si le test est négatif, un seul test est réalisé. Si le test est positif, $1+n$ tests sont nécessaires.

   b. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de tests réalisés. X_n peut prendre deux valeurs : 1 et $1+n$. Les probabilités sont $P(X_n=1)=0,999^n$ et $P(X_n=n+1)=1-P(X_n=1)=1-0,999^n$.

   c. Le nombre moyen de tests réalisés est $E(X_n)=1\times 0,999^n+(n+1)\times(1-0,999^n)=1+n-n0,999^n$. L'économie moyenne réalisée est $n-E(X_n)=n0,999^n-1$

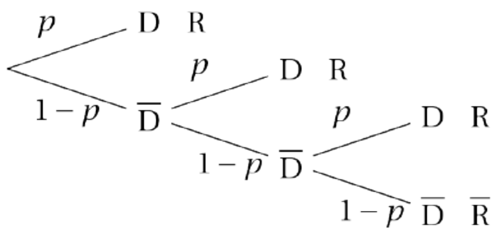
3. Minimiser le nombre de tests à pratiquer est équivalent à maximiser les économies réalisées. Si on sépare les $N=110\,880$ recrues en groupes de taille n (de sorte que N est un multiple de n), on obtient $\frac{N}{n}$ groupes. Les économies moyennes réalisées sont $\frac{N}{n}\times(0,999^n\times n-1)=N\times(0,999^n-\frac{1}{n})$. Avec un tableur, on trouve que la taille idéale des groupes est $n=32$. Cette taille permet d'identifier les malades avec en moyenne 6959 tests, au lieu de 110880.

B15 =$B$1*(0,999^A15-1/A15)

	A	B	C	D
1	N	110880		
2				
3	Taille du groupe n	Economies	Nombre de tests	
4	2	55218,35088	55661,64912	
5	3	73587,69253	37292,30747088	
6	...	...	...	
7	24	103629,2596	7250,74036760708	
8	25	103705,8104	7174,18962723948	
9	26	103768,254	7111,74602222761	
10	27	103818,1698	7061,8301736413	
11	28	103856,9117	7023,08834346764	
12	29	103885,6465	6994,35353098625	
13	30	103905,3857	6974,61434986905	
14	31	103917,0101	6962,98992906757	
15	**32**	**103921,2905**	**6958,70951978368**	
16	33	103918,9042	6961,09581026388	
17	34	103910,4488	6969,55118504186	
18	35	103896,4537	6983,54633973917	

Corrigé exercice 103 :

1. a. Soit D l'événement « L'article est défectueux » et R l'événement « Le Lot est refusé ». La situation peut-être modélisée par l'arbre pondéré suivant.



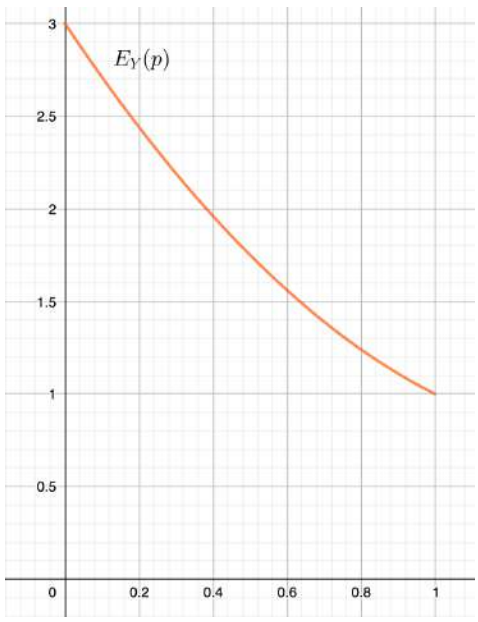
La probabilité de refuser le lot $P(R)$ est obtenue en calculant la probabilité de son événement contraire, $\overline{R}$. Par lecture de l'arbre on obtient $P(\overline{R}) = (1-p)^3$ et donc $P(R) = 1-(1-p)^3$.

b. La loi de probabilité suivie par Y est résumée dans le tableau ci-dessous.

y_i	1	2	3	Total
$P(Y = y_i)$	p	$p(1-p)$	$(1-p)^2$	1

L'espérance de Y est égale à : $E(Y) = 1\times p + 2\times p(1-p) + 3\times(1-p)^2 = p^2 - 3p + 3$. Pour confirmer la cohérence de ce résultat, vérifions les deux cas extrêmes. Si $p = 0$ (aucun produit défectueux) alors $E(Y) = 3$. On vérifie toujours 3 produits, puis on accepte le lot. Si $p = 1$ (tous les produits défectueux) alors $E(Y) = 1$. Le premier produit est défectueux et le lot est refusé.

2. Avec cette méthode, on prélève toujours 3 articles. Avec la méthode étudiée à la la question 1, le nombre moyen de prélèvements est donné par l'espérance de Y. Voici la valeur de $E(Y)$ en fonction de la valeur de $p \in [0; 1]$.



La première méthode permet d'autant plus d'économies que p est proche de 1.

Corrigé exercice 104 :

1. Le comportement de chaque client est une épreuve de Bernoulli de succès S « Le client se présente à l'embarquement » et de paramètre $p = 0,9$. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès lors de la répétition des $n = 125$ épreuves de

Bernoulli identiques et indépendantes. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n = 125$ et $p = 0,9$. L'événement « tous les passagers qui se présentent peuvent monter à bord » correspond à $X \leqslant 120$, dont la probabilité vaut $P(X \leqslant 120) \approx 0,996\,1$.

2. L'événement « Il reste des places libres à bord » correspond à $\{X \leqslant 119\}$ dont la probabilité vaut $P(X \leqslant 119) \approx 0,9886$.

3. Comme X suit une loi binomiale, on a $E(X) = np = 125 \times 0,9 = 112,5$. Le nombre moyen de passagers se présentant à l'embarquement est $E(X) = 112,5$.

4. En utilisant un tableur, on vérifie que la probabilité de devoir refuser un passager vaut 0,025 si on vend 127 billets, et qu'elle est légèrement supérieure à 0,05 si on vend 128 billets. La compagnie aérienne peut donc vendre jusqu'à 127 billets par vol avec la contrainte qu'elle s'est fixée.

Corrigé exercice 105 :

Calcul de p_X :
D'après le graphe, on a $P(X=0) = 0,086$. Or $P(X=0) = \binom{11}{0} \times (p_X)^0 \times (1-p_X)^{11-0} = (1-p_X)^{11}$ On en déduit que $1 - p_X \approx 0,8$ à l'aide de la calculatrice et donc que $p_X \approx 0,2$.
Calcul de p_Y :
D'après le graphe, on a $P(Y=11) = 0,020$. Or $P(Y=11) = \binom{11}{11} \times (p_Y)^{11} \times (1-p_Y)^0 = (p_Y)^{11}$. On en déduit que $p_Y \approx 0,7$ à l'aide de la calculatrice.
Calcul de p_Z :
L'étude de la probabilité $P(Z=6)$ donne une équation qu'il est difficile de résoudre de manière exacte. En procédant à l'étude des possibilités pour les valeurs de p_Z, on trouve que plusieurs valeurs peuvent convenir. En particulier, $p_Z = 0,54$ et $p_Z = 0,55$ conviennent.

Corrigé exercice 106 :

1. Comme on effectue des tirages avec remise, il est possible de prendre trois fois la boule verte. Cet événement n'est donc pas impossible.

2. Tirer une boule noire est une épreuve de Bernoulli de succès S_N « La boule tirée est noire » et de paramètre $p_N = \frac{7}{17}$. L'échec est « La boule tirée n'est pas noire ». La variable aléatoire N compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 10$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc N suit une loi binomiale $\mathcal{B} = (n, p_N)$ de paramètres $n = 10$ et $p_N = \frac{7}{17}$. De même, R suit une loi binomiale $\mathcal{B} = (n, p_R)$ de paramètres $n = 10$ et $p_R = \frac{9}{17}$. Pour finir, V suit une loi binomiale $\mathcal{B} = (n, p_V)$ de paramètres $n = 10$ et $p_V = \frac{1}{17}$.

3. $P(N=5) = \binom{10}{5}\left(\frac{7}{17}\right)^5\left(1-\frac{7}{17}\right)^5 \approx 0,210$

   $P(R=6) = \binom{10}{6}\left(\frac{9}{17}\right)^6\left(1-\frac{9}{17}\right)^4 \approx 0,227$

   $P(V=1) = \binom{10}{1}\left(\frac{1}{17}\right)^1\left(1-\frac{1}{17}\right)^9 \approx 0,341$

4. $P(N \leqslant 3) \approx 0,353$

   $P(R < 3) = P(R \leqslant 2) \approx 0,037$

   $P(V > 3) = 1 - P(V \leqslant 2) \approx 0,002$

5. $P(3 \leqslant N \leqslant 8) \approx 0,849$

6. On a $E(N) = n \times p_N = \frac{70}{17}$, $E(R) = n \times p_R = \frac{90}{17}$ et $E(V) = n \times p_V = \frac{10}{17}$. Lors d'un très grand nombre de tirages avec remise de 10 boules de cette urne, on obtient en moyenne par tirage de 10 boules $\frac{70}{17}$ boules noires, $\frac{90}{17}$ boules rouges et $\frac{10}{17}$ boules vertes. La somme de ces trois nombres est égale à 17.

Corrigé exercice 107 :

Chaque partie de chasse est une épreuve de Bernoulli de succès « Un dahu est capturé » et de probabilité $p = 0,05$. Soit X_n la variable aléatoire comptant le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes où n est un entier naturel non nul. La probabilité de ne capturer aucun dahu est $P(X_n = 0) = (1-p)^n = 0,95^n$. La probabilité d'en capturer au moins un est $P(X \geqslant 1) = 1 - 0,95^n$.
$1 - 095^n = 0,95 \Leftrightarrow 0,95^n = 0,05 \Leftrightarrow n = \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,95)} \approx 58,4$. On choisit donc $n = 59$.
Si la fonction ln n'a pas été étudiée, pour déterminer le rang n_0 à partir duquel $P(X \geqslant 1)$ est supérieur ou égal à 0,95, on peut procéder par tâtonnements ou utiliser le programme ci-dessous.

```
def dahu():
    n = 1
    while 1 - 0.95**n < 0.95:
        n = n + 1
    return n
```

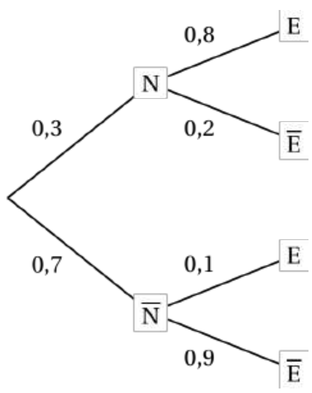
Le résultat retourné est 59. Il faut donc 59 chasses pour avoir une probabilité de 95 % d'attraper au moins un animal.

Corrigé exercice 108 :

Partie A

1. a. Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité donc $P(N) = \frac{15}{50} = 0,3$ et $P_N(E) = \frac{8}{10} = 0,8$.

   b. La situation peut être représentée avec l'arbre pondéré suivant.



2. $P(N \cap E) = P(N) \times P_N(E) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$ La probabilité que le client trouve un numéro entre 1 et 15 et une étoile est égale à 0,24.

3. D'après la formule des probabilités totales $P(E) = P(N \cap E) + P(\overline{N} \cap E) = 0,24 + 0,7 \times 0,1 = 0,31$. La probabilité que le client gagne un bon d'achat est égale à 0,31.

4. D'après la définition des probabilités conditionnelles $P_E(N) = \frac{P(E \cap N)}{P(E)} = \frac{0,24}{0,31} = \frac{24}{31}$. Sachant qu'il a gagné un bon d'achat, la probabilité que le client ait obtenu un numéro entre 1 et 15 à la première étape est $\frac{24}{31}$.

Partie B

1. Le succès de l'épreuve de Bernoulli est le gain d'un bon d'achat de probabilité $p = 0,31$. Il y a $n = 100$ répétitions de l'épreuve de Bernoulli. X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $n = 100$ et $p = 0,31$.

2. On obtient $P(X = 30) \approx 0,085$.

3. X suit une loi binomiale donc $E(X) = np = 31$. En moyenne, pour 100 clients, il y a 31 gagnants et 310 euros sont donc offerts. Le budget de 250 euros n'est pas suffisant.

Corrigé exercice 109 :

Soient S et D les événements :
S : « C'est la méthode soignée qui est utilisée ».
D : « Trois articles sont défectueux sur un échantillon de 20 ».

1. a. La variable aléatoire donnant le nombre d'articles défectueux suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,05$. La probabilité d'avoir trois articles défectueux est $P_S(D) = \binom{20}{3} 0,05^3 \times 0,95^{17} \approx 0,060$
   b. La variable aléatoire donnant le nombre d'articles défectueux suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,10$. La probabilité d'avoir trois articles défectueux est $P_{\overline{S}}(D) = \binom{20}{3} 0,1^3 \times 0,9^{17} \approx 0,190$

2. D'après l'énoncé, on a $P(S) = 0,7$. On en déduit la probabilité que la méthode soigneuse ait été utilisée, sachant que sur un échantillon de 20 objets, trois sont défectueux en utilisant la formules des probabilités conditionnelles (on calcule $P(D)$ grâce aux résultats de la question précédente).

   $P_D(S) = \frac{P(S \cap D)}{P(D)} = \frac{0,7 \times 0,060}{0,7 \times 0,060 + 0,3 \times 0,190} \approx 0,424$

3. En cas de refus de la palette, l'entreprise gagne –200 euros (donc elle perd 200 euros). Si elle l'accepte, l'espérance du gain est donnée par $-500 \times 0,576 + 700 \times 0,424 \approx 8,8$. Comme $8,8 > -200$, la palette doit être acceptée.

Corrigé exercice 110 :

1. Soit s le nombre de claviers à avoir en stock. La contrainte imposée consiste à trouver le plus petit entier tel que $P(X > s) \leqslant 0,05$. On peut utiliser un tableur pour résoudre ce problème.

   On trouve que la plus petite valeur de s telle que $P(X > s) \leqslant 0,05$ est $s = 68$. La probabilité d'une rupture de stock est alors 0,0398.

Nombre de claviers k	P(X<=k)	Pr. Rupture Stock
60	0,5379	0,4621
61	0,6178	0,3822
62	0,6932	0,3068
63	0,7614	0,2386
64	0,8205	0,1795
65	0,8697	0,1303
66	0,9087	0,0913
67	0,9385	0,0615
68	**0,9602**	**0,0398**
69	0,9752	0,0248
70	0,9852	0,0148
71	0,9916	0,0084
72	0,9954	0,0046
73	0,9976	0,0024
74	0,9988	0,0012
75	0,9994	0,0006

2. Quelques calculs rapides permettent de comprendre que le nombre de claviers en stock est le résultat d'un compromis. S'il n'y a pas assez de claviers, on aura souvent des ruptures de stocks, très coûteuses. S'il y en a trop, on limite les risques de rupture de stock, mais on paie du stockage pour rien. Le coût total des stocks est la somme de deux termes :

   - le coût moyen associé à une rupture de stock qui est égal à $1000E(Y)$ où Y suit une loi de Bernoulli de succès « Une rupture de stock survient » ;
   - le coût de stockage des claviers, c'est-à-dire le produit de 1 euros/clavier et du nombre de claviers stockés

   Pour $s = 68$, ce coût est de $1000 \times 0,0398 + 68 = 107,8$ euros.

Stock	Probabilité de rupture de stock	Coût moyen lié aux ruptures de stock	Coût lié au stock	Coût total (stock + risque rupture)
69	0,03985	39,85	69	108,85
70	0,02478	24,78	70	94,78
71	0,01478	14,78	71	85,78
72	0,00843	8,43	72	80,43
73	0,00460	4,60	73	77,60
74	0,00240	2,40	74	76,40
75	0,00119	1,19	75	76,19
76	0,00056	0,56	76	76,56
77	0,00025	0,25	77	77,25

   L'optimum est atteint pour $s = 75$ claviers en stock avec un coût moyen de 76,19 euros par jour.

Corrigé exercice 111 :

Si la variable aléatoire suit une loi de Poisson de paramètre 3, on a, pour tout entier positif k, $P(X = k) = \frac{3^k}{k!}\mathrm{e}^{-3}$. On en déduit le tableau ci-dessous. Attention tout de même, $P(X \geqslant 6) \neq 0$.

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	0,050	0,149	0,224	0,224	0,168	0,101	0,050

La probabilité qu'il y ait au moins deux absents un jour donné est :
$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X=0) + P(X=1) = 1 - (0,05 + 0,149) = 0,801$.

Corrigé exercice 112 :

1. La variable aléatoire peut prendre pour valeur tout nombre entier naturel entre 1 et n. En effet, le premier succès peut être obtenu après un nombre quelconque d'épreuves.

2. Si $X = k$, cela signifie qu'il a fallu $k-1$ échecs avant d'obtenir le premier succès. On en déduit que $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$.

3. En notant S_n la somme considérée on a :

   $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} = p\sum\limits_{k=1}^{n}(1-p)^{k-1} = p\sum\limits_{i=0}^{n-1}(1-p)^i$.

   Or $\sum\limits_{i=0}^{n-1}(1-p)^i$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $1-p$. On en déduit donc que (avec $p \neq 0$) :

   $\sum\limits_{i=0}^{n-1}(1-p)^i = \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = \frac{1-(1-p)^n}{p}$.

   Et donc $S_n = p\frac{1-(1-p)^n}{p} = 1-(1-p)^n$.

   Comme $1-p$ appartient à $[0;1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-p)^n = 0$.

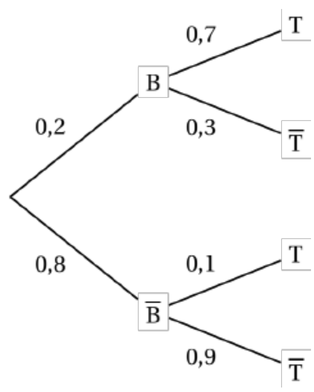
   On obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

   On a démontré que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} P(X=k) = 1$.

11 Préparer le bac

Corrigé exercice 113 :

1. Avec les informations de l'énoncé, on obtient l'arbre pondéré suivant.



2. a. On s'intéresse ici à l'événement $B \cap T$ dont la probabilité est :
$P(B \cap T) = P(B) \times P_B(T) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$.
La probabilité que l'angine du malade soit bactérienne et que le test soit positif est égale à 0,14.

   b. D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(B \cap T) + P(\overline{B} \cap T) \\ &= 0,14 + P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(T) \\ &= 0,14 + 0,8 \times 0,1 \\ &= 0,22 \end{aligned}$$

La probabilité que le test soit positif est égale à 0,22.

   c. On sait que le test est positif. D'après la formule des probabilités conditionnelles on a : $P_T(B) = \frac{P(B \cap T)}{P(T)} = \frac{0,14}{0,22} = \frac{7}{11}$. La probabilité que l'angine soit bactérienne sachant que le test est positif est égale à $\frac{7}{11}$.

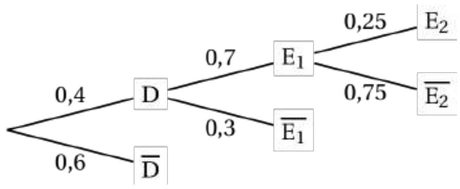
3. a. L'examen d'un malade est une épreuve de Bernoulli de succès T « Le test effectué sur le malade est positif », de probabilité $p = 0,22$ (d'après la question 2.b).La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 5$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,22$.

   b. L'événement « Au moins un des cinq tests est positif » correspond à l'événement contraire de « Aucun test n'est positif ». On obtient donc $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^5 \approx 0,71$.L'arrondi au centième de probabilité qu'au moins l'un des cinq malades ait un test positif est donc de 0,71.

   c. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,22$ donc l'espérance de X est $E(X) = np = 5 \times 0,22 = 1,1$.

Corrigé exercice 114 :

1. a. On obtient, d'après les données de l'énoncé, l'arbre pondéré suivant.



   b. On obtient, par lecture de l'arbre :

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P(D \cap E_1) \\ &= P(D) \times P_D(E_1) \\ &= 0,4 \times 0,7 \\ &= 0,28 \end{aligned}$$

   c. F est l'événement contraire de E_2. Or $P(E_2) = 0,4 \times 0,7 \times 0,25 = 0,07$donc $P(F) = 1 - P(E_2) = 0,93$.La probabilité de l'événement F est égale à 0,93.

2. a. Chaque candidature est une épreuve de Bernoulli de succès « Le candidat est recruté » et de probabilité $0,07$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de $n = 5$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,07$.

   b. En appliquant la formule du cours, on obtient $P(X = 2) \approx 0,039$. L'arrondi au millième de la probabilité qu'exactement deux des cinq amis soient recrutés est 0,039.

3. Supposons que N personnes se portent candidats, où N est un entier naturel. On suppose également que les candidatures sont étudiées de manières identiques et indépendantes. La variable aléatoire Y donnant le nombre de candidats retenus suit une loi binomiale de paramètres N et $p = 0,07$.La probabilité qu'aucun candidat ne soit retenu est $P(Y = 0) = (1 - 0,07)^N = 0,93^N$.La probabilité qu'au moins un candidat soit retenu est donc de $1 - 0,93^N$. On cherche à déterminer la plus petite valeur de N telle que cette probabilité soit supérieure à 0,999.

$$\begin{aligned} 1 - 0,93^N > 0,999 &\Leftrightarrow 0,93^N < 0,001 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(0,93^N\right) < \ln(0,001) \\ &\Leftrightarrow N\ln(0,93) < \ln(0,001) \\ &\Leftrightarrow N > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,93)} \end{aligned}$$

   car $\ln(0,93) < 0$. On obtient alors $N > 95,2$.Le nombre minimum de dossiers à traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999 est 96.

Corrigé exercice 115 :

Dans tout l'exercice, on note B_1 l'événement « La première boule prélevée est blanche » et B_2 l'événement « La deuxième boule prélevée est blanche ».
Partie A

1. Pour gagner, il faut soit tirer une boule blanche puis une boule noire, soit tirer une boule noire puis une boule blanche. La probabilité de gagner une partie est donc $p = P(B_1 \cap \overline{B_2}) + P(\overline{B_1} \cap B_2) = 0,3 \times 0,7 + 0,7 \times 0,3 = 0,42$.

2. a. Chaque partie est une épreuve de Bernoulli de succès « La partie est gagnée » et de probabilité p. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

   b. L'événement « Le joueur gagne au moins une partie » est le contraire de « Le joueur perd toutes les parties ». Donc la probabilité que le joueur gagne au moins une partie est $p_n = 1-(1-p)^n = 1-0,58^n$. On en déduit que $p_{10} \approx 0,996$.

   c. On montre que $p_8 \approx 0,987$ et $p_9 \approx 0,993$. Il faut donc au moins 9 parties pour que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 % (on pourrait également utiliser la fonction ln). Partie B

1. a. $Y_k = 5$ lorsque le joueur tire deux boules de couleurs différentes donc

$$\begin{aligned} P(Y_k = 5) &= P(B_1 \cap \overline{B_2}) + P(\overline{B_1} \cap B_2) \\ &= \frac{3}{k+3} \times \frac{k}{k+3} + \frac{k}{k+3} \times \frac{3}{k+3} \\ &= \frac{6k}{(k+3)^2}. \end{aligned}$$

   b. La loi de probabilité du gain Y_k est résumée dans le tableau ci-dessous.

g_i	-9	-1	5
$P(Y_k = g_i)$	$\frac{9}{(k+3)^2}$	$\frac{k^2}{(k+3)^2}$	$\frac{6k}{(k+3)^2}$

2. L'espérance de Y_k est :

$$\begin{aligned} E(Y_k) &= -9 \times \frac{9}{(k+3)^2} - 1 \times \frac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \frac{6k}{(k+3)^2} \\ &= \frac{-81 - k^2 + 30k}{(k+3)^2} \\ &= \frac{-(k-27)(k-3)}{(k+3)^2} \end{aligned}$$

$E(Y_k) > 0$ si, et seulement si, $k \in]3;27[$. Le jeu est favorable au joueur si, et seulement si, le nombre de boules noires k est strictement compris entre 3 et 27.

Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 13 : Sommes de variables aléatoires

Table des matières

1 Informations sur ce chapitre

Le B.O. introduit ce chapitre comme un prolongement du programme de première dans lequel ont été étudiées les notions de variables aléatoires et de leur espérance, variance et écart-type.
Il est également précisé que l'objectif du chapitre est de développer l'intuition, les compétences de calculs et de raisonnement sur les variables aléatoires.
C'est dans cette optique que le chapitre « Sommes de variables aléatoires » a été rédigé.
Il est question d'aborder les variables aléatoires d'un point de vue concret, comme en témoignent les activités d'introduction qui ont pour but de conjecturer, notamment, la propriété de linéarité de l'espérance (déjà observée en seconde sur la moyenne) et l'additivité de la variance dans le cadre de variables aléatoires indépendantes.
Les exercices de ce chapitre sont très largement issus de situations de la vie courante, ce qui permet notamment de développer les compétences de modélisation, en plus de celles de calculs et de raisonnement.

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

On pioche au hasard une carte du paquet de tarot. La variable aléatoire X correspond au nombre de points qui lui est associé. X peut donc prendre comme valeurs $4,5$; $3,5$; $2,5$; $1,5$ et $0,5$.

Corrigé exercice 2 :

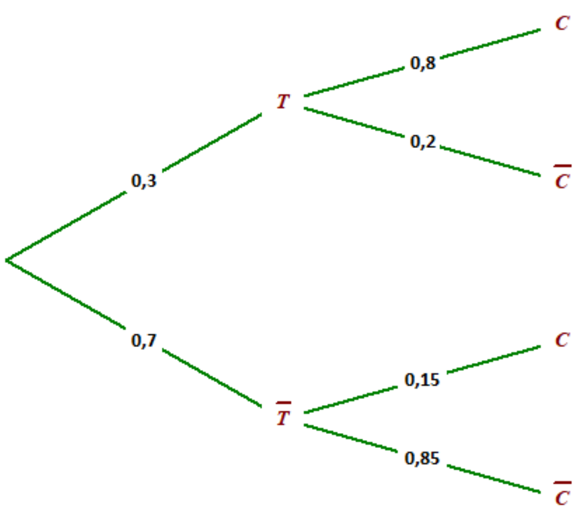
1. X correspond au gain algébrique obtenu donc X peut ici prendre les valeurs 2 et -10.
2. Le dé est équilibré, on est donc en situation d'équiprobabilité.

x_i	2	-10
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

3. On a $E(X) = x_1p_1 + ... + x_rp_r$ donc $E(X) = 2 \times \frac{2}{3} + (-10) \times \frac{1}{3} = -2$. Ainsi, au bout d'un grand nombre de répétitions de l'expérience, la moyenne théorique des valeurs prises par X s'élève à -2.
4. On a $V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + ... + p_r(x_r - E(X))^2$ Ainsi, $V(X) = 32$. Or $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ donc $\sigma(X) = 4\sqrt{2}$.

Corrigé exercice 3 :

1. On construit l'arbre ci-dessous.



2. $P(T \cap C) = P(T) \times P_T(C) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$.
3. D'après la formule des probabilités totales, on a $P(C) = P(T \cap C) + P(\overline{T} \cap C) = 0,24 + 0,7 \times 0,15 = 0,345$. Ainsi, la probabilité qu'un client du magasin achète une coque de protection s'élève à $0,345$.

Corrigé exercice 4 :

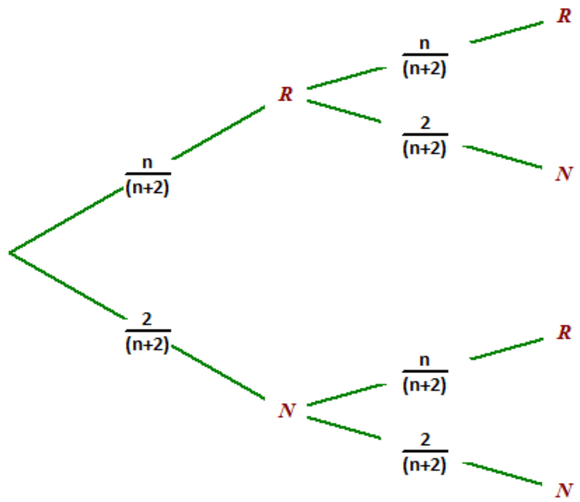
On répète 100 fois de manière supposée identique et indépendante l'expérience ayant deux issues :

- le succès : « Le train est arrivé en retard » de probabilité $p = 0,23$;
- l'échec : « Le train n'est pas arrivé en retard » de probabilité $1 - p = 0,77$.

X compte le nombre de succès donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,23$.

Corrigé exercice 5 :

On note respectivement N et R les événements « On obtient une boule noire » et «On obtient une boule rouge ». On construit l'arbre pondéré représentant la situation.



Soit X la variable aléatoire correspondant au gain total à l'issue de la partie.
Les calculs sur les arbres de probabilités permettent de déterminer la loi de probabilité de X.

x_i	-6	1	20
$P(X = x_i)$	$\dfrac{4n}{(n+2)^2}$	$\dfrac{n^2}{(n+2)^2}$	$\dfrac{4}{(n+2)^2}$

On veut trouver les valeurs possibles de n donnant un jeu équitable. Autrement dit, on veut trouver n tel que $E(X) = 0$.
Or, $E(X) = -6 \times \dfrac{4n}{(n+2)^2} + 1 \times \dfrac{n^2}{(n+2)^2} + 20 \times \dfrac{4}{(n+2)^2} = \dfrac{n^2 - 24n + 80}{(n+2)^2}$.
Ainsi, $E(X) = 0$ si, et seulement si, $n^2 - 24n + 80 = 0$. On reconnaît une équation du second degré avec $a = 1$, $b = -24$ et $c = 80$. Ainsi, $\Delta = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4 \times 1 \times 80 = 256$. Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles : $n_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $n_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. D'où $n_1 = 4$ et $n_2 = 20$.
Les deux solutions devant être entières et positives, les deux valeurs obtenues sont bien des solutions cherchées. Ainsi, le jeu est équitable pour $n = 4$ ou $n = 20$.

3 Activités

3.1 Activité A : Étude d'un jeu de dé

Questions :

Partie A : On ne joue qu'une seule fois

1. X peut prendre les valeurs -12, 6 et 15.

   Le dé étant équilibré, on est dans en situation d'équiprobabilité.

   On peut alors déterminer la loi de probabilité de X.

x_i	-12	6	15
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

2. On a $E(X) = x_1p_1 + ... + x_rp_r = -1,5e$. Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre de répétitions de l'expérience, la valeur moyenne théorique prise par X s'élève à $-1,5$ €. Le jeu est donc défavorable au joueur.

Partie B : On triple les gains (et les pertes)

1. En triplant les gains et les pertes, la variable aléatoire T peut prendre les valeurs -36, 18 et 45. On obtient donc, en raisonnant comme ci-dessus, la loi de probabilité de T.

t_i	-36	18	45
$P(T = t_i)$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

   On calcule alors $E(T) = -4,5$.

2. On joue au même jeu dans les mêmes conditions : seuls les gains sont triplés. Tout se passe comme si on jouait au jeu avec les règles décrites initialement et qu'on multipliait par trois les gains et les pertes pour obtenir le second jeu. On a donc $T = 3X$.

3. On a $E(T) = 3E(X)$. Or $T = 3X$ donc $E(3X) = 3E(X)$.

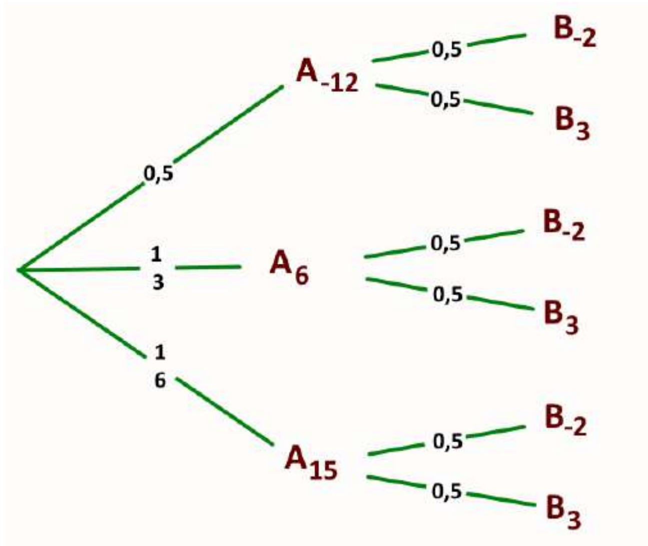
Partie C : On étend le jeu

1. Y peut prendre les valeurs -2 et 3. De plus, on se trouve dans une situation d'équiprobabilité. On peut alors déterminer la loi de probabilité de Y.

y_i	-2	3
$P(Y = y_i)$	$0,5$	$0,5$

Z correspond au gain total obtenu, donc au gain de la première manche auquel on ajoute les gains obtenus à la seconde manche. X correspondant aux gains de la première manche et Y à ceux de la seconde manche, on a donc $Z = X + Y$.

2. Les pondérations de la “première colonne” ont déjà été calculées en partie 1. Celles de la deuxième colonne se trouvent par un simple calcul de probabilités.



3. On obtient le tableau ci-dessous.

z_i	-14	-9	4	9	13	18
$P(Z = z_i)$	$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$	$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$	$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

En effet, pour obtenir un gain total égal à 13 €, il faut obtenir 15 € à la première étape et perdre 2 € à la seconde étape alors que pour obtenir au total 18 €, il faut obtenir 15 € à la première étape et 3 € à la seconde.

4. On a $E(Z) = z_1 p_1 + ... + z_r p_r = -1e$.

Or $E(X) = -1,5e$ et $E(Y) = 0,5 \times (-2) + 0,5 \times 3 = 0,5$. Donc $E(X) + E(Y) = -1e$.

Ainsi, on obtient que $E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Le jeu est légèrement moins désavantageux pour le joueur mais cela reste assez proche de ce qui était obtenu avec les règles de la partie A.

Bilan :

On peut conjecturer que si X et Y sont deux variables aléatoires et a un nombre réel, $E(aX) = aE(X)$ et $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

3.2 Activité B : Étude de la variance

Questions :

Partie A : Étude de T

1. On est en situation d'équiprobabilité. On en déduit la loi de probabilité de T.

t_i	-1	2
$P(T=t_i)$	$\frac{2}{5}=0,4$	$\frac{3}{5}=0,6$

   On a donc $E(T)=t_1p_1+t_2p_2=0,8$, soit une espérance de 0,80 €.

2. On a donc $V(T)=0,4(-1-0,8)^2+0,6(2-0,8)^2=2,16$.

Partie B : On double les gains (et les pertes)

1. La loi de probabilité de U est donnée dans le tableau ci-dessous.

u_i	-2	4
$P(U=u_i)$	$\frac{2}{5}=0,4$	$\frac{3}{5}=0,6$

   Les lois de probabilité de T et de U sont les mêmes, à multiplication par 2 près, on a donc $U=2T$.

   On a donc $E(U)=E(2T)=2E(T)=1,6$, soit une espérance de 1,60 €.

2. On a donc $V(U)=0,4(-2-1,6)^2+0,6(4-1,6)^2=8,64$.

   D'où $V(U)=V(2T)=4V(T)=2^2V(T)$.

3. On suppose maintenant que tous les gains sont triplés et on note W la variable aléatoire correspondant au gain algébrique alors obtenu. Le loi de probabilité de W est donnée dans le tableau ci-dessous.

w_i	-3	6
$P(W=w_i)$	0,4	0,6

   On a ainsi $W=3T$ et $E(W)=3E(T)=3\times 0,8=2,4$. D'où $V(W)=0,4\times(-3-2,4)^2+0,6\times(6-2,4)^2=19,44$. On remarque alors qu'on a $V(W)=19,44=9\times 2,16$. Donc $V(3T)=9V(T)$.

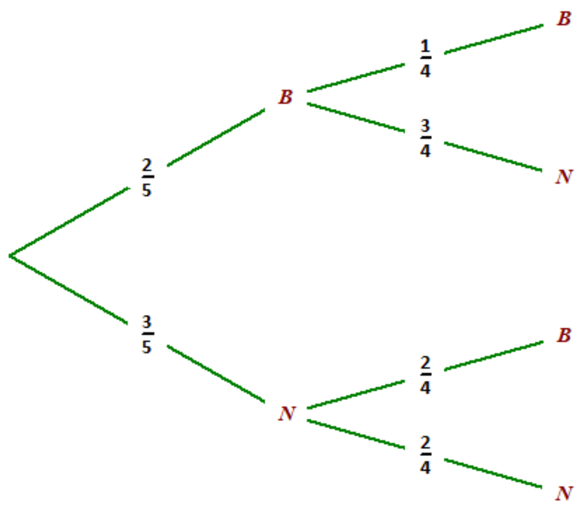
Bilan :

Il semble que si X est une variable aléatoire et a un nombre réel, alors $V(aX)=a^2V(X)$.

3.3 Activité C : Tirage avec ou sans remise

Questions :

1. On obtient l'arbre suivant.



2. a. X peut prendre les valeurs -1 et 2. Y peut également prendre les valeurs -1 et 2. Z peut donc prendre les valeurs -2, 1 et 4.

   b. On obtient les lois de probabilités suivantes (en utilisant pour Y et Z les propriétés de calculs sur les arbres de probabilité).

x_i	-1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5} = 0,4$	$\frac{3}{5} = 0,6$

y_i	-1	2
$P(Y = x_i)$	$\frac{2}{5} = 0,4$	$\frac{3}{5} = 0,6$

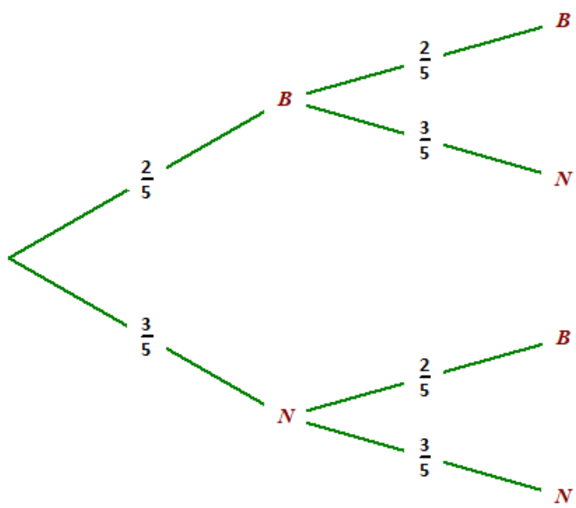
z_i	-2	1	4
$P(Z = z_i)$	0,1	0,6	0,3

   c. On a $E(X) = E(Y) = 0,8$ et $E(Z) = 1,6$.

   d. On a donc $V(X) = V(Y) = 0,4(-1-0,8)^2 + 0,6(2-0,8)^2 = 2,16$ et $V(Z) = 3,24$.

   e. On a $V(X+Y) \neq V(X) + V(Y)$.

3. Dans le cas d'un tirage avec remise, on obtient l'arbre de probabilité ci-dessous.



X peut prendre les valeurs -1 et 2. Y peut également prendre les valeurs -1 et 2. Z peut donc prendre les valeurs -2 ; 1 et 4.On obtient les lois de probabilités suivantes (en utilisant pour Y et Z les règles de calculs sur les arbres de probabilité).

x_i	-1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5} = 0,4$	$\frac{3}{5} = 0,6$

y_i	-1	2
$P(Y = x_i)$	$\frac{2}{5} = 0,4$	$\frac{3}{5} = 0,6$

z_i	-2	1	4
$P(Z = z_i)$	0,16	0,48	0,36

On a $E(X) = E(Y) = 0,8$ et $E(Z) = 1,6$. On a donc $V(X) = V(Y) = 2,16$ et $V(Z) = 4,32$. On obtient donc dans ce cas $V(Z) = V(X) + V(Y)$ et ainsi $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Bilan :

Ainsi, si X et Y sont indépendantes, il semble que l'on a l'égalité $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 6 :

On a $E(X) = -4\times 0,25+2\times 0,6+3\times 0,15 = 0,65$ donc $E(2X) = 2E(X) = 2\times 0,65 = 1,3$.

Réponse : d

Corrigé exercice 7 :

On a $E(X) = 1,3$ d'après les calculs de l'exercice précédent, et $E(Y) = -7\times 0,15+1\times 0,2+3\times 0,35+5\times 0,3 = 1,7$.
Donc $E(3X-Y) = 3E(X)-E(Y) = 3\times 0,65-1,7 = 0,25$.

Réponse : c

Corrigé exercice 8 :

$V(X) = 0,25(-4-0,65)^2+0,6(2-0,65)^2+0,15(3-0,65)^2 = 7,3275$.
De même, $V(Y) = 15,31$. Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, on a donc$V(X+Y) = V(X)+V(Y) = 22,6375$.

Réponse : a

Corrigé exercice 9 :

Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, on a $V(2X+Y) = V(2X)+V(Y) = 4V(X)+V(Y) = 44,62$.

Réponse : d

Corrigé exercice 10 :

X et Y suivant des lois binomiales, on a $E(X) = np = 100\times 0,25 = 25$ et $E(Y) = mq = 200\times 0,4 = 80$. On a également $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{18,75}$ et $\sigma(Y) = \sqrt{mq(1-q)} = \sqrt{48}$. On a donc $E(X) < E(Y)$ et $\sigma(X) < \sigma(Y)$.

Réponses : b et d

Corrigé exercice 11 :

Si X et Y sont indépendantes, alors $V(2X-Y) = V(2X+(-Y)) = V(2X)+V(-Y)$.
Or $V(-Y) = (-1)^2V(Y) = V(Y)$ donc $V(2X-Y) = V(2X)+V(Y)$ et donc la réponse c. est vraie. En poursuivant le calcul on obtient $V(2X-Y) = 2^2V(X)+V(Y) = 4V(X)+V(Y)$, donc la réponse d. est vraie.

Réponses : c et d

Corrigé exercice 12 :

Par hypothèse, $E(X_2) = E(X_n)$ donc la réponse a. est juste.
Par ailleurs, $E(X_1+...+X_n) = E(X_1)+...+E(X_n) = nE(X_1) = nE(X_n)$ car toutes les variables aléatoires ont même loi de probabilité. Donc c. et d. sont justes également.

En revanche, la réponse b. est a priori fausse. Les variables aléatoires X_1 et X_n ne font que suivre la même loi de probabilité : cela signifie seulement qu'elles peuvent prendre les mêmes valeurs et qu'elles ont la même probabilité de prendre chacune de ces valeurs. On peut juste dire, dans ce cas, que 3 est aussi une valeur possible de X_n.

Réponses : a, c et d

Corrigé exercice 13 :

Il manque une hypothèse ! En général, aucune des propositions des réponses a., b. et c. ne convient. Ajouter l'hypothèse d'indépendance des variables, par exemple, permettrait de justifier ces égalités.

Réponse : d

Corrigé exercice 14 :

1. $E(X) = -8 \times 0,35 + 2 \times 0,45 + 4 \times 0,2 = -1,1$

   $E(Y) = 1 \times 0,1 + 3 \times 0,25 + a \times 0,45 + 7 \times 0,2 = 0,45a + 2,25$

2. $E(X + 2Y) = E(X) + 2E(Y) = -1,1 + 2(0,45a + 2,25) = 0,9a + 3,4$. On résout alors l'équation $0,9a + 3,4 = 7$ et on obtient $a = 4$.

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1

Méthode 1

1. Voir le dossier TICE.

2. On entre dans la case D1 la formule = C1+1 puis on étend la formule vers la droite.

3. On entre dans la case B4 la formule = ALEA.ENTRE.BORNES(1 ;3) et on étend la formule.

4. On entre dans la case B8 la formule = NB.SI(B4 :B6 ;1), dans la case B9 la formule = NB.SI(B4 :B6 ;2) et, enfin, on entre la formule = NB.SI(B4 :B6 ;3) dans la case B10. Puis on étend ces formules vers la droite.

5. On entre dans la case B12 la formule = NB.SI(B8 :B10 ;0) (on compte le nombre de tiroir contenant zéro objet).

6. On entre dans la case B14 la formule = SOMME(B12 :CW12)/100.

   On pourrait ensuite essayer d'augmenter le nombre d'essais pour et changer la dernière formule pour observer ce qui se passe.

Méthode 2

1. On procède trois fois, (c'est-à-dire une fois pour chaque objet), au choix des tiroirs. On choisit aléatoirement un nombre entier parmi 0 (tiroir 1), 1 (tiroir 2) et 2 (tiroir 3). Chaque entier choisi augmente d'une unité le nombre d'objets présents dans le tiroir associé.

2. On part de l'élément 0 de la liste (le tiroir 1) puis on regarde le contenu de chaque tiroir. Dès qu'un tiroir ne contient pas d'objet, on augmente le compteur d'une unité. Concrètement, on compte donc le nombre de tiroirs vides à l'issue de la distribution.

3. Cette fonction répète m fois la fonction précédente, et donc répète m fois l'expérience aléatoire. A chaque répétition, le programme ajoute le nombre de tiroirs vides à la variable S. A la fin, la valeur de cette variable est divisée par m, calculant ainsi le nombre moyen de tiroirs vides.

   Les résultats obtenus sont proches de 0,88. Cela signifie qu'en moyenne sur 100 (ou 10 000) essais, le nombre moyen de tiroirs restés vides s'élève à environ 0,88.

5.2 Corrigé du TP 2

Questions préliminaires

1. On peut obtenir la somme 9 avec les tirages suivants : 1 + 3 + 5 ; 1 + 4 + 4 ; 1 + 2 + 6 ; 2 + 2 + 5 et 4 + 3 + 2.
2. Les six possibilités d'obtenir 10 avec trois dés sont : 1 + 3 + 6 ; 6 + 2 + 2 ; 5 + 4 + 1 ; 5 + 3 + 2 ; 4 + 4 + 2 et 4 + 3 + 3.

Méthode 1

1. Voir le dossier TICE.
2. On doit écrire dans la case C1 la formule = B1 + 1.
3. On écrit dans la case B3 la formule = ALEA.ENTRE.BORNES(1 ;6). On étend ensuite cette formule à la ligne 4 et à la ligne 5 jusqu'à la colonne GS.
4. On entre dans la cellule B7 la formule = SOMME(B3 :B5) puis on étend la formule.
5. Enfin, on entre dans la case B9 la formule = NB.SI(B7 :GS7 ;9) et dans la case B10 la formule = NB.SI(B7 :GS7 ;10).
6. Il faut suffisamment de lancers pour obtenir une différence saisissante, d'où l'intérêt d'une mise en commun des résultats.

Méthode 2

1. Le programme simule le lancer de trois dés équilibrés et retourne la somme obtenue.
2. On lance n fois le dé : si la somme vaut 9, la variable de comptage associée augmente d'une unité et si la somme vaut 10, la variable de comptage associée augmente d'une unité.
3. L'hypothèse semble être vérifiée. : la somme 10 apparaît plus souvent que la somme 9.

Pour aller plus loin

1. On a $X = X_1 + X_2 + X_3$.
2. On a ainsi $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$. Toutes ces variables ont même loi de probabilité. Étudions donc, par exemple, la loi de probabilité de X_1.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On obtient ainsi $E(X_1) = 3,5$ et donc $E(X) = 10,5$.

De même, les variables étant indépendantes, le calcul de variance donne $V(X) = 3V(X_1) = 3 \times \frac{35}{12} = 8,75$ et on a ainsi, $\sigma(X) = \sqrt{8,75}$.

6 Travailler les automatismes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 15 :

On a $Y = 2X$.

Corrigé exercice 16 :

On a $E(X) = -4 \times 0,2 - 1 \times 0,3 + 2 \times 0,4 + 8 \times 0,1 = 0,5$ et $E(Y) = 1,3$.
Ainsi, $E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0,5 + 1,3 = 1,8$.

Corrigé exercice 17 :

$V(X) = 0,2(-4-0,5)^2 + 0,3(-1-0,5)^2 + 0,4(2-0,5)^2 + 0,1(8-0,5)^2 = 11,25$ et $V(Y) = 7,81$. Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, on a $V(Z) = V(X+Y) = V(X) + V(Y) = 11,25 + 7,81 = 19,06$.
Ainsi, $\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{19,06} \approx 4,365\,78$.

Corrigé exercice 18 :

X suit une loi binomiale de paramètres n et p donc $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$. Ainsi, $E(X) = 100 \times 0,3 = 30$, $V(X) = 21$ et $\sigma(X) = \sqrt{21} \approx 4,6$.

Corrigé exercice 19 :

Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_4$ ont la même loi donc $E(X) = E(X_1 + ... + X_4) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 4E(X_1)$.
Or, $E(X_1) = -4 \times 0,25 + 1 \times 0,15 + 5 \times 0,2 + 10 \times 0,4 = 4,15$.
Donc $E(X) = 4 \times 4,15 = 16,6$.
Par ailleurs, $X_1, \ldots, X_4$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi donc $V(X) = 4V(X_1)$. Or $V(X_1) = 31,9275$ d'où $V(X) = 127,71$ et donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{127,71} \approx 11,30$.

Corrigé exercice 20 :

D'après les résultats de l'exercice précédent, on a :
$E(Y) = E(X_1) = 4,15$,
$V(Y) = V\left(\dfrac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}\right) = \dfrac{4V(X_1)}{4^2} = \dfrac{31,9275}{4} = 7,981875$
et $\sigma(Y) = \sqrt{7,981875} \approx 2,825$.

6.2 Exercices

Corrigé exercice 21 :

1. Par exemple, X_1 correspond au gain remporté à la roulette, X_2 à celui remporté en jouant la première fois aux machines à sous et X_3 au gain remporté en y jouant une seconde fois.

2. Yvann a tort : le gain remporté la première aux machines à sous n'est pas nécessairement le même que celui remporté à la seconde tentative.

Corrigé exercice 22 :

En prenant X_1 comme prix de la boisson chaude choisie par Ridwan et X_2 comme celui des boissons froides identiques choisies par Justine et Victor, le prix total payé par Victor s'élève donc bien à $X = X_1 + 2X_2$.

Corrigé exercice 23 :

On a $E(X) = -7 \times 0,04 - 4 \times 0,27 + 2 \times 0,36 + 5 \times 0,33 = 1,01$ et $E(Y) = 0,48$.
Donc $E(3X) = 3E(X) = 3,03$ et $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 1,49$.

Corrigé exercice 24 :

D'après les résultats de l'exercice précédent, $E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 0,53$ et $E(3X - Y) = E(3X) - E(Y) = 2,55$.

Corrigé exercice 25 :

On a $E(X) = -0,9 + 0,37a$ et $E(Y) = 4,23$.
Ainsi, $E(2X + 5Y) = 2E(X) + 5E(Y) = 19,35 + 0,74a$.
Or $E(2X + 5Y) = 20,29$ donc $19,35 + 0,74a = 20,29$ et donc $a = \dfrac{47}{37}$.

Corrigé exercice 26 :

On a $V(X) = 14,9499$ et $V(Y) = 8,6896$.
Donc $V(5X) = 25V(X) = 373,7475$ et, comme X et Y sont indépendantes, $V(X+Y) = V(X) + V(Y) = 23,6395$. On a donc $\sigma(5X) = \sqrt{373,7475} \approx 19,3323$ et $\sigma(X + Y) = \sqrt{23,6395} \approx 4,8620$.

Corrigé exercice 27 :

X et Y étant supposées indépendantes, on a $V(3X + 2Y) = 9V(X) + 4V(Y) = 169,3075$.
Par ailleurs, $V(3X - 2Y) = 9V(X) + (-2)^2V(Y) = 169,3075$.
On a donc $\sigma(3X + 2Y) = \sigma(3X - 2Y) = \sqrt{169,3075} \approx 13,012$.

Corrigé exercice 28 :

X suit une loi binomiale donc $E(X) = np = 150 \times 0,6 = 90$. De même, $E(Y) = mq = 120$.
On a $E(Y) > E(X)$ donc Y est la variable aléatoire qui a la moyenne théorique la plus forte.

Corrigé exercice 29 :

La dispersion des valeurs autour de la moyenne s'étudie à l'aide de l'écart-type.
X et Y suivant des lois binomiales, on a $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{36} = 6$ et $\sigma(Y) = \sqrt{mq(1-q)} = \sqrt{84}$. On a $\sigma(X) < \sigma(Y)$ donc X est la variable aléatoire pour laquelle la dispersion des valeurs autour de la moyenne est la plus faible.

Corrigé exercice 30 :

X suit une loi binomiale de paramètres n et p donc $E(X) = np = 60$ et $V(X) = np(1-p) = 48$. D'où $60(1-p) = 48$. Par conséquent, $p = 0,2$ et $n = 300$.

Corrigé exercice 31 :

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,7$ donc $E(X) = np = 15 \times 0,7 = 10,5$.
Par ailleurs, on a $V(X) = np(1-p) = 3,15$ et ainsi $\sigma(X) = \sqrt{3,15}$.

Corrigé exercice 32 :

1. On a $E(X_7) = -5 \times 0,4 + 0 \times 0,3 + 1 \times 0,2 + 3 \times 0,1 = -1,5$. Les variables X_1 ; ... ; X_{10} étant identiquement distribuées, on a $E(S_{10}) = 10 \times E(X_7) = -15$.
2. Les variables X_1 ; ... ; X_{10} étant indépendantes, on a $V(S_{10}) = 10 \times V(X_7)$.

   Or $V(X_7) = 8,175$ donc $V(S_{10}) = 81,75$ et donc $\sigma(S_{10}) = 2,86$.

Corrigé exercice 33 :

1. On a $E(M_{10}) = E(X_7) = -1,5$ et $V(M_{10}) = \dfrac{10V(X_7)}{10^2} = 0,8175$.
2. Ainsi, $\sigma(M_{10}) = \sqrt{1,785}$.

Corrigé exercice 34 :

Pour tout $k \in \{1;...;n\}$, on a $E(X_k) = 4 \times 0,25 + 10 \times 0,5 + 12 \times 0,25 = 9$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(S_n) = 9n$.
De fait, $E(S_n) \geqslant 2\,453$ si, et seulement si, $9n \geqslant 2\,453$ si, et seulement si, $n \geqslant 273$.
Donc la valeur minimale cherchée est $n = 273$.

Corrigé exercice 35 :

Les variables aléatoires X_1 ; ... ; X_n étant de plus indépendantes, on a, pour tout $k \in \{1;...;n\}$, $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X_k)$. Or $V(X_k) = 0,25 \times (4-9)^2 + 0,5 \times (10-9)^2 + 0,25 \times (12-9)^2 = 9$ donc $\sigma(X_k) = 3$. Ainsi, $\sigma(S_n) = 3\sqrt{n}$.
Donc $\sigma(S_n) \leqslant 60$ si, et seulement si, $3\sqrt{n} \leqslant 60$ c'est-à-dire $\sqrt{n} \leqslant 20$ et donc $n \leqslant 400$, par croissance de la fonction racine carrée sur son ensemble de définition. La valeur maximale de n cherchée vaut donc 400.

Corrigé exercice 36 :

On peut reprendre, par exemple, la situation de l'exercice 21 en ne jouant qu'une seule fois aux machines à sous.

Corrigé exercice 37 :

On peut, par exemple, imaginer la situation suivante. On joue à un jeu consistant à piocher un jeton de couleur dans un sac, puis à lancer un dé cubique équilibré. Il faut penser à donner des valeurs aux gains obtenus, et à faire en sorte que le choix du jeton n'influe pas sur le gain obtenu avec le lancer de dé.

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 38 :

X_1 peut correspondre au prix initial de la gourmette et X_2 au prix de la gravure.

Corrigé exercice 39 :

1. Z peut prendre les valeurs $-4-2$, $-4+5$, $1-2$, $1+5$, $20-2$ et $20+5$ c'est-à-dire -6, 1, -1, 6, 18 et 25.
2. Il n'est pas possible, sous ces conditions, de déterminer la loi de probabilité de Z.

   Il faudrait des informations supplémentaires, par exemple l'indépendance des variables aléatoires X et Y.

Corrigé exercice 40 :

C'est faux. Par exemple si on obtient un 1 avec le premier dé, un 6 avec le deuxième dé et un 6 avec le troisième dé, on a $X_1 = 1$ et $X = 1+6+6 = 13 \neq 3 \times 1$.

Corrigé exercice 41 :

1. On peut écrire $X = X_1 + X_2$ où X_1 correspond au prix initialement payé selon l'âge et X_2 au prix payé pour un supplément.
2. X_1 prend les valeurs 15, 10 et 30. X_2 prend les valeurs 5, 15 et 17. X prend donc les valeurs 20, 30, 32, 15, 25, 27, 35, 45 et 47.

Corrigé exercice 42 :

1. X_1 correspond au gain obtenu grâce au premier lancer donc $X_1((3;4)) = 3 \times 3 = 9$.

   X_2 correspond au gain obtenu grâce au second lancer donc $X_2((1;6)) = 3 \times 6 = 18$.

   Enfin $X_1((4;2)) = 3 \times 4 = 12$.
2. a. X correspond au gain total obtenu à l'issue des deux lancers.

   b. $X((3;5)) = 3 \times 3 + 3 \times 5 = 24$.

Corrigé exercice 43 :

1. On a $X_2((V;R;N)) = -10$, $X_1((N;V;V)) = 5$ et $X_3((R;N;R)) = -10$.
2. a. On a $X = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$.

   b. On a donc $X((N;V;V)) = \dfrac{X_1((N;V;V)) + X_2((N;V;V)) + X_3((N;V;V))}{3}$

   $= \dfrac{5+2+2}{3} = 3$.

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 44 :

1. $E(X+3Y) = E(X) + 3E(Y)$.
   Or, $E(X) = 1 \times 0,12 + 2 \times 0,54 + 3 \times 0,34 = 2,22$ et $E(Y) = 5 \times 0,2 + 10 \times 0,4 + 15 \times 0,4 = 11$. Donc $E(X+3Y) = 2,22 + 3 \times 11 = 35,22$.

2. On a $V(X) = 0,12 \times (1-2,22)^2 + 0,54 \times (2-2,22)^2 + 0,34 \times (3-2,22)^2 = 0,411\,6$ et $V(Y) = 14$. Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, on obtient $V(X+3Y) = V(X) + 9V(Y) = 126,411\,6$.
   D'où $\sigma(X+3Y) = \sqrt{V(X+3Y)} = \sqrt{126,411\,6} \approx 11,24$.

Corrigé exercice 45 :

$E(X-Y) = E(X+(-1)\times Y) = E(X) + (-1)E(Y) = E(X) - E(Y)$ donc l'affirmation est vraie.

Corrigé exercice 46 :

En règle générale, cette affirmation est fausse. Dans le cas où X et Y sont indépendantes, on a $V(X-Y) = V(X+(-1)\times Y) = V(X) + (-1)^2 V(Y) = V(X) + V(Y)$, donc cette affirmation est fausse même dans ce cas.

Corrigé exercice 47 :

On doit avoir $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(2X-3Y) = 2E(X) - 3E(Y)$.
On obtient les résultats ci-dessous.

$E(X)$	$E(Y)$	$E(X+Y)$	$E(2X-3Y)$
0,35	0,2	0,55	0,1
0,12	-0,47	-0,35	1,65
-0,22	0,45	0,23	-1,79

Corrigé exercice 48 :

On sait que $E(Z) = E(X+3Y)$ et donc, d'après la linéarité de l'espérance, que $E(Z) = E(X) + 3E(Y)$.
Or $E(X) = -5 \times 0,4 + 2 \times 0,05 + 4 \times 0,25 + 12 \times 0,3 = 2,7$ et $E(Y) = 4,1$ donc $E(Z) = 2,7 + 3 \times 4,1 = 15$.
Or $E(Z) = 12 \times 0,75 + 0,25 \times a = 9 + 0,25a$. Ainsi, on a $9 + 0,25a = 15$ d'où $a = \dfrac{6}{0,25} = 24$.
En conclusion, l'ensemble des valeurs prises par Z est $\{12;24\}$.

Corrigé exercice 49 :

1. Commençons par déterminer la loi de probabilité de X_1. X_1 correspond au prix de la place en euros. X_1 peut donc prendre trois valeurs : 12 ; 7 et 5. On choisit un client en hasard. La répartition des ventes de places permet de déterminer la loi de probabilité suivante.

x_i	5	7	12
$P(X_1 = x_i)$	$0,22$	$0,3$	$0,48$

Déterminons maintenant la loi de X_2. X_2 correspond au prix de l'éventuel supplément en euros. X_2 peut donc prendre quatre valeurs : 0 ; 4 ; 5 et 7. On choisit un client en hasard. La répartition des ventes de confiseries permet de déterminer la loi de probabilité suivante.

x_i	0	4	5	7
$P(X_2 = x_i)$	$0,5$	$0,12$	$0,23$	$0,15$

2. a. X correspond au prix total payé par un client, c'est-à-dire à la somme du prix de la place et du prix de l'éventuelle confiserie donc $X = X_1 + X_2$.
   b. On a alors $E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$.
   Or $E(X_1) = 5 \times 0,22 + 7 \times 0,3 + 12 \times 0,48 = 8,96$ et $E(X_2) = 2,68$ donc $E(X) = 8,96 + 2,68 = 11,64$. Sur l'ensemble des clients du cinéma, le prix moyen payé s'élève à 11,64 €.

Corrigé exercice 50 :

1. On a $E(aX + Y) = E(aX) + E(Y)$ donc $E(aX + Y) = aE(X) + E(Y)$.
2. La variables aléatoire b est une variable aléatoire constante : elle prend une seule valeur, b, avec une probabilité égale à 1. D'où $E(b) = b \times 1 = b$. Ainsi, en utilisant la formule de la question précédente, $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Corrigé exercice 51 :

1. X ne peut prendre que quatre valeurs : 70, 90, 120 et 160. D'après les données de l'énoncé, la loi de probabilité de X est la suivante.

x_i	70	90	120	160
$P(X = x_i)$	$0,12$	$0,47$	$0,40$	$0,01$

Y ne peut prendre que trois valeurs : 100, 150 et 200. D'après les données de l'énoncé, la loi de probabilité de Y est la suivante.

y_i	100	150	200
$P(Y = y_i)$	$0,45$	$0,40$	$0,15$

2. a. Z_1 correspond au prix total payé après le changement de deux pneus et des plaquettes de frein donc $Z_1 = X + Y$.

   b. On a, d'une part, $E(X) = 70\times 0,12+90\times 0,47+120\times 0,40+160\times 0,01 = 100,3$ et, d'autre part, $E(Y) = 100 \times 0,45 + 150 \times 0,40 + 200 \times 0,15 = 135$ d'où $E(Z_1) = E(X) + E(Y) = 235,3$. En moyenne, le changement des plaquettes de frein et de deux pneus s'élève donc à 235,30 €.

3. Dans ce cas, on a $Z_2 = X+2Y$ donc $E(Z_2) = E(X)+2E(Y)$ et donc $E(Z_2) = 370,3$. En moyenne, le changement des plaquettes de frein et des quatre pneus s'élève donc à 370,30 €.

Corrigé exercice 52 :

Comme X et Y sont indépendantes, on a $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ et $V(X - 3Y) = V(X) + V(-3Y) = V(X) + 9V(Y)$.

$V(X)$	$V(Y)$	$V(X+Y)$	$V(X-3Y)$
1,4	1,6	3	15,8
2,8	$\frac{122}{30}$	$\frac{206}{30}$	39,4
6,1	5,3	11,4	53,8

Corrigé exercice 53 :

1. Pour tout $k \in \{1; 2; 3\}$, X_k vaut 1 si l'automobiliste s'est arrêté au feu k et 0 sinon. Ainsi, X_k est une variable de comptage selon que l'automobiliste choisi se soit arrêté ou non au ke feu. Par définition, $X = X_1 + X_2 + X_3$ donc X compte bien le nombre de feux auxquels s'est arrêté l'automobiliste.

2. On commence par déterminer la loi de probabilité de chacune des variables aléatoires.

x_i	0	1
$P(X_1 = x_i)$	$0,2$	$0,8$

x_i	0	1
$P(X_2 = x_i)$	$0,7$	$0,3$

x_i	0	1
$P(X_3 = x_i)$	$0,35$	$0,65$

On a $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 0,8 + 0,3 + 0,65 = 1,75$. En moyenne, un automobiliste s'arrête donc à $1,75$ feux.

Corrigé exercice 54 :

1. Au total, un client paie la monture et deux verres identiques. Ainsi, le prix payé correspond à celui de la monture, qu'on associe à la variable aléatoire X, auquel s'ajoute le prix des deux verres, chaque verre associé à la variable aléatoire Y. On a donc $Z = X + 2Y$.

2. On commence par donner les lois de probabilité de X et de Y.

x_i	100	200	300
$P(X = x_i)$	$0,26$	$0,56$	$0,18$

y_i	20	60	110	220	375
$P(Y = y_i)$	$0,07$	$0,48$	$0,22$	$0,2$	$0,03$

Ainsi, $E(X) = 100 \times 0,26 + 200 \times 0,56 + 300 \times 0,18 = 192$ et $E(Y) = 20 \times 0,07 + 60 \times 0,48 + 110 \times 0,22 + 220 \times 0,2 + 375 \times 0,03 = 109,65$.

On a donc $E(Z) = E(X) + 2E(Y) = 192 + 2 \times 109,65 = 411,3$.

En moyenne, un client paie 411,30 € une paire de lunettes chez cet opticien.

3. X et Y sont indépendantes donc $V(Z) = V(X) + V(2Y) = V(X) + 4V(Y)$.

On a $V(X) = 0,26 \times (100 - 192)^2 + 0,56 \times (200 - 192)^2 + 0,18 \times (300 - 192)^2$d'où $V(X) = 4\,336$.

Et $V(Y) = 0,07 \times (20 - 109,65)^2 + \ldots + 0,03 \times (375 - 109,65)^2 = 6\,293,627\,5$. Ainsi, $V(Z) = 4\,336 + 4 \times 6\,293,6275 = 29\,510,51$. On a donc $\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{29\,510,51} \approx 171,7862$.

Corrigé exercice 55 :

1. On peut écrire $Z = X + Y$ où X est la variable aléatoire correspondant au prix du CD et Y la variable aléatoire correspondant au prix du vinyle.

2. On commence par déterminer la loi de probabilité de chacune des variables aléatoires.

x_i	5	10	15	20
$P(X = x_i)$	$0,07$	$0,12$	$0,64$	$0,17$

y_i	10	20	30
$P(Y = y_i)$	$0,33$	$0,45$	$0,22$

On a $E(X) = 5 \times 0,07 + 10 \times 0,12 + 15 \times 0,64 + 20 \times 0,17 = 14,55$ et $E(Y) = 10 \times 0,33 + 20 \times 0,45 + 30 \times 0,22 = 18,9$.

Ainsi, $E(Z) = E(X) + E(Y) = 14,55 + 18,9 = 33,45$.

Sur un grand nombre de client, la dépense moyenne est 33,45 €.

3. Le choix du CD n'a aucune influence sur le choix du vinyle, les variables aléatoires X et Y sont donc indépendantes. On a donc $V(Z) = V(X) + V(Y)$.

   Or $V(X) = 0,07(5 - 14,55)^2 + \ldots 0,17 \times (20 - 14,55)^2 = 14,0475$ et $V(Y) = 0,33 \times (10 - 18,9)^2 + \ldots + 0,22(30 - 18,9)^2 = 53,79$, donc $V(Z) = 14,0475 + 53,76 = 67,8375$ d'où $\sigma(Z) = \sqrt{67,8375} \approx 8,236$.

Corrigé exercice 56 :

1. a. Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un univers Ω. On note P_n la propriété : « $E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n)$ ».

   Initialisation : Pour $n = 1$, $E(X_1) = E(X_1)$.

   Pour $n = 2$, $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$ d'après le cours.

   Donc P_1 et P_2 sont vraies.

   Hérédité : Soit k un entier naturel non nul tel que P_k soit vraie. On veut montrer que P_{k+1} est vraie.

   $E(X_1 + \ldots + X_k + X_{k+1}) = E((X_1 + \ldots + X_k) + (X_{k+1}))$ donc $E(X_1 + \ldots + X_k + X_{k+1}) = E(X_1 + \ldots + X_k) + E(X_{k+1})$ d'après le cours. Et donc, par hypothèse de récurrence, $E(X_1 + \ldots X_k + X_{k+1}) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_k) + E(X_{k+1})$.

   Donc la propriété est vraie au rang $k + 1$.

   Conclusion : Ainsi, par récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel non nul n, P_n est vraie.

   b. D'après le résultat de la question précédente, on a $E(a_1X_1 + \ldots + a_nX_n) = E(a_1X_1) + \ldots + E(a_nX_n)$. Pour toute variable aléatoire X définie sur un univers Ω et pour tout réel a, on a $E(aX) = aE(X)$, donc $E(a_1X_1 + \ldots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + \ldots + a_nE(X_n)$.

2. a. Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes définies sur un univers Ω. On note P_n la propriété : « $V(X_1 + \ldots + X_n) = V(X_1) + \ldots + V(X_n)$ ».

   Initialisation : Pour $n = 1$, $V(X_1) = V(X_1)$.

   Pour $n = 2$, $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$ car X_1 et X_2 sont indépendantes. Donc P_1 et P_2 sont vraies.

   Hérédité : Soit k un entier naturel non nul tel que P_k soit vraie. On veut montrer que P_{k+1} est vraie.

   $V(X_1 + \ldots + X_k + X_{k+1}) = V((X_1 + \ldots + X_k) + (X_{k+1}))$ donc, puisque les variables X_i sont indépendantes, $V(X_1 + \ldots + X_k + X_{k+1}) = V(X_1 + \ldots + X_k) + V(X_{k+1})$. D'où, par hypothèse de récurrence, $V(X_1 + \ldots X_k + X_{k+1}) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_k) + V(X_{k+1})$.

   Donc la propriété est vraie au rang $k + 1$.

   Conclusion : Ainsi, par récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel non nul n, P_n est vraie.

b. D'après le résultat de la question précédente, on a $V(a_1X_1 + \ldots + a_nX_n) = V(a_1X_1) + \ldots + V(a_nX_n)$. On en déduit que $V(a_1X_1 + \ldots + a_nX_n) = a_1^2V(X_1) + \ldots + a_n^2V(X_n)$ en utilisant que, pour toute variable aléatoire X définie sur un univers Ω et pour tout réel a, $V(aX) = a^2V(X)$.

9 Exercices d'entraînement partie 3

Corrigé exercice 57 :

$E(Z) = 2E(X) + 3E(Y)$. Or X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,2$ donc $E(X) = np = 20 \times 0,2 = 4$. De même, $E(Y) = 100 \times 0,5 = 50$.
Ainsi, $E(Z) = 2 \times 4 + 3 \times 50 = 158$.
Par ailleurs, X et Y sont indépendantes, donc $V(Z) = 4V(X) + 9V(Y)$.
X suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,2$, on a $V(X) = np(1-p) = 20 \times 0,2 \times 0,8 = 3,2$. De même, $V(Y) = 100 \times 0,5 \times 0,5 = 25$.
On a donc $V(Z) = 4 \times 3,2 + 9 \times 25 = 237,8$.
Enfin, $\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{237,8} \approx 15,421$.

Corrigé exercice 58 :

$E(S_n) = n \times E(X_1) = 423$.
Or $E(X_1) = -2 \times 0,35 + 1 \times 0,225 + 8 \times 0,125 + 10 \times 0,3 = 3,525$.
D'où $n = \dfrac{E(S_n)}{E(X_1)} = \dfrac{423}{3,525} = 120$.

Corrigé exercice 59 :

On a $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X_1)}{\sqrt{n}}$. Or $E(X_1) = 5 \times 0,2 + 10 \times 0,4 + 15 \times 0,4 = 11$ donc $V(X_1) = 0,2 \times (5-11)^2 + 0,4 \times (10-11)^2 + 0,4 \times (15-11)^2 = 14$ d'où $\sigma(X_1) = \sqrt{14}$. Ainsi $\sigma(M_n) = \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{n}}$ et on en déduit que $n = 7$.

Corrigé exercice 60 :

1. X suit une loi binomiale donc $E(X) = np = 11 \times 0,35 = 3,85$, $V(X) = np(1-p) = 11 \times 0,35 \times 0,65 = 2,5025$ et ainsi $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2,5025} \approx 1,582$.
2. Seule une victoire rapporte des points (trois points pour être précis), on a donc $Y = 3X$. D'où $E(Y) = 3 \times 3,85 = 11,55$, $V(Y) = 9 \times 2,5025 = 22,5225$ et $\sigma(Y) \approx 3 \times 1,582 \approx 4,746$.

Corrigé exercice 61 :

1. On répète 12 fois de manière identique et indépendante une expérience à deux issues :
   - le succès : « L'élève choisi a obtenu une mention », de probabilité $p = 0,75$;
   - l'échec : « l'élève choisi n'a pas obtenu de mention », de probabilité $1-p = 0,25$.

   X compte le nombre de succès, donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,75$. De même, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,55$.
2. a. $Z = X + Y$.

b. On a $E(Z) = E(X) + E(Y)$. Or, X suit une loi binomiale donc $E(X) = np = 12 \times 0,75 = 9$. De même, $E(Y) = 20 \times 0,55 = 11$. D'où $E(Z) = 9 + 11 = 20$. En interrogeant des élèves de ces deux lycées, dans ces conditions, on devrait donc obtenir, en moyenne, 20 élèves ayant obtenu leur bac avec mention.

c. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes donc $V(Z) = V(X)+V(Y)$. Or, X suit une loi binomiale donc $V(X) = np(1-p) = 12\times 0,75\times 0,25 = 2,25$. De même, $V(Y) = 20\times, 0,55 \times 0,45 = 4,95$. Ainsi, $V(Z) = 2,25 + 4,95 = 7,2$ d'où $\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{7,2} \approx 2,683$.

Corrigé exercice 62 :

1. S_{20} correspond au prix total des 20 timbres des 20 enveloppes prélevées.

2. $E(S_{20}) = 20 \times E(X_1)$. Or, la loi de probabilité de X_1 est la suivante.

x_i	0,95	0,97	1,16	1,40
$P(X_1 = x_i)$	0,12	0,56	0,20	0,12

Ainsi, $E(X_1) = 0,95 \times 0,12 + 0,97 \times 0,56 + 1,16 \times 0,2 + 1,40 \times 0,12 = 1,0572$.

Donc $E(S_{20}) = 20 \times 1,0572 = 21,144$. En moyenne, le prix des 20 timbres s'élève donc à 21,144 euros.

3. D'après l'énoncé on peut assimiler l'expérience a un tirage avec remise, les variables aléatoires X_k sont donc identiquement distribuées. On est donc dans le cadre d'un échantillon de variables aléatoires. D'où $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X_1)$.

Or, $V(X_1) = 0,12\times(0,95-1,0572)^2+\ldots+0,12\times(1,40-1,0572)^2 = 0,021\,852\,16$. Ainsi, $\sigma(S_{20}) = \sqrt{20} \times \sqrt{0,021\,852\,16} = \sqrt{0,437\,043\,2}$.

Corrigé exercice 63 :

1. La variable aléatoire S_7 désigne le nombre de points que rapporte le tirage si jamais on arrive à former un mot avec les sept jetons tirés.

2. Puisqu'on assimile cette expérience à un tirage avec remise, alors les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_7$ sont identiquement distribuées. On est donc dans le cadre d'un échantillon de variables aléatoires. Ainsi, $E(S_7) = 7 \times E(X_1)$.

La loi de probabilité de X_1 est décrite dans le tableau ci-dessous.

x_i	0	1	2	3	4	8	10
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{102}$	$\frac{73}{102}$	$\frac{8}{102}$	$\frac{6}{102}$	$\frac{6}{102}$	$\frac{2}{102}$	$\frac{5}{102}$

On a ainsi $E(X_1) = 0 \times \dfrac{2}{102} + \ldots + 10 \times \dfrac{5}{102} = \dfrac{197}{102}$.

Donc $E(S_7) = 7 \times E(X_1) = 7\left(0 \times \dfrac{2}{102} + \ldots + 10 \times \dfrac{5}{102}\right) = \dfrac{1379}{102} \approx 13,5$.

Ainsi, en choisissant sept lettres au hasard dans le lot des 102 lettres, en moyenne, la somme de leurs points vaut environ 13,5.

3. $E(M_7) = E(X_1) \approx \dfrac{197}{102} \approx 2$. Cela signifie que lorsqu'on choisit 7 lettres au hasard, en moyenne, la moyenne des points des sept lettres vaut environ 2.

Corrigé exercice 64 :

1. La variable aléatoire S_2 correspond à la somme des points obtenus après avoir pioché (avec remise) les deux cartes.

2. On remet la carte tirée dans le paquet : on est dans le cadre d'un tirage avec remise, et donc d'un échantillon de variables aléatoires. Ainsi, $E(S_2) = 2E(X_1)$.

   La loi de probabilité de X_1 est la suivante.

x_i	$0,5$	$1,5$	$2,5$	$3,5$	$4,5$
$P(X_1 = x_i)$	$\dfrac{59}{78}$	$\dfrac{4}{78}$	$\dfrac{4}{78}$	$\dfrac{4}{78}$	$\dfrac{7}{78}$

   On a ainsi $E(X_1) = 0,5 \times \dfrac{59}{78} + \ldots + 4,5 \times \dfrac{7}{78} = \dfrac{7}{6}$ soit $E(S_2) = \dfrac{7}{3} \approx 2,33$. En moyenne, la somme des points des deux cartes tirées vaut donc environ 2,33.

3. On remet la première carte tirée dans le paquet. Ainsi, le nombre de points que vaut la première carte n'a aucune influence sur la seconde : les variables aléatoires X_1 et X_2 sont donc indépendantes. Ainsi, $V(S_2) = 2V(X_1)$.

   Or, $V(X_1) = \dfrac{200}{117}$ donc $V(S_2) = \dfrac{400}{117}$ et on en déduit que $\sigma(S_2) = \sqrt{V(S_2)} \approx 1,85$.

Corrigé exercice 65 :

1. En numérotant les clients de 1 à 20, on peut écrire $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{20}$ où, pour tout $k \in \{1; \ldots; 20\}$, X_k correspond au prix payé par le k-ième client.

2. On peut assimiler cette expérience à un tirage avec remise, donc on est dans le cadre d'un échantillon de variables aléatoires. Ainsi, $E(X) = 20 \times E(X_1)$.

   La loi de probabilité de X_1 est la suivante.

x_i	45	65	80	100
$P(X_1 = x_i)$	0,24	0,32	0,34	0,1

   On a donc $E(X_1) = 0,24 \times 45 + \ldots + 0,1 \times 100 = 68,8$. Ainsi, $E(X) = 20 \times 68,8 = 1\,376$. Cela signifie qu'en moyenne, en choisissant 20 clients au hasard, le montant total s'élève à 1376 euros.

3. Puisque les variables aléatoires sont indépendantes (l'expérience étant assimilée à un tirage avec remise), on a $V(X) = 20V(X_1)$.

   Or $V(X_1) = 280,56$, d'où $V(X) = 5611,2$. Et on obtient alors $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{5611,2} \approx 74,9079$.

Corrigé exercice 66 :

1. On a $S_{100} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$.

2. On veut le montant moyen total moyen payé par les 100 contrevenants, c'est-à-dire qu'on cherche à calculer $E(S_{100})$. Puisqu'on assimile l'expérience à un tirage avec remise, on est bien dans le cadre d'un échantillon de variables aléatoires. On a donc $E(S_{100}) = 100 \times E(X_1)$. La loi de probabilité de la variable aléatoire X_1 est la suivante.

x_i	90	135	375
$P(X_1 = x_i)$	$0,79$	$0,15$	$0,06$

Ainsi, $E(X_1) = 0,79 \times 90 + 0,15 \times 135 + 0,06 \times 375 = 113,85$. On a donc $E(S_{100}) = 100 \times 113,85 = 11\,385$. Ainsi, en moyenne, le montant total payé en choisissant 100 contrevenants au hasard s'élève à 11385 euros.

3. On assimile l'expérience à un tirage avec remise. On a donc $V(S_{100}) = 100V(X_1)$.

   Or $V(X_1) = 4\,608,4275$ donc $V(S_{100}) = 460\,842,75$. Et on en déduit alors que $\sigma(S_{100}) \approx 678,884$.

4. D'après le cours, $\sigma(M_{100}) = \dfrac{\sigma(X_1)}{\sqrt{100}} \approx 6,789$.

Corrigé exercice 67 :

1. La variable aléatoire X_1 correspond au prix payé pour l'entrée. Sa loi de probabilité est donc la suivante.

x_i	0	9	11
$P(X_1 = x_i)$	$0,64$	$0,22$	$0,14$

La variable aléatoire X_2 correspond au prix payé pour la plat. Sa loi de probabilité est donc la suivante.

x_i	19	22
$P(X_2 = x_i)$	$0,76$	$0,24$

La variable aléatoire X_3 correspond au prix payé pour le dessert. Sa loi de probabilité est donc la suivante.

x_i	0	6	7	8
$P(X_3 = x_i)$	$0,22$	$0,38$	$0,3$	$0,1$

2. On a $X = X_1 + X_2 + X_3$.

3. $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$.

   Or $E(X_1) = 0,22 \times 9 + 11 \times 0,14 = 3,52$, $E(X_2) = 0,76 \times 19 + 0,24 \times 22 = 19,72$ et $E(X_3) = 0,38 \times 6 + 0,3 \times 7 + 0,1 \times 8 = 5,18$. Donc $E(X) = 28,42$.

   En moyenne, sur un grand nombre de clients, un client du restaurant paie donc 28,42 €.

4. On obtient un échantillon de taille 10 de la variable aléatoire X. Le prix total payé par les dix clients vaut donc $10 \times E(X) = 10 \times 28,42$ soit 284,20 €.

10 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 68 :

1. a. On a $Z = X + Y$.

   b. La loi de probabilité de la variable X est donnée par le tableau suivant.

x_i	-15	2	10
$P(X = x_i)$	$\frac{26}{52} = 0,5$	$\frac{13}{52} = 0,25$	$\frac{13}{52} = 0,25$

   La loi de probabilité de la variable Y est donnée par le tableau suivant.

y_i	-1	0	1	2	5
$P(Y = y_i)$	$\frac{24}{52}$	$\frac{4}{52}$	$\frac{8}{52}$	$\frac{4}{52}$	$\frac{12}{52}$

   c. On a $E(Z) = E(X) + E(Y)$.
   Or, $E(X) = 0,5 \times (-15) + 2 \times 0,25 + 10 \times 0,25 = -4,5$ et
   $E(Y) = -1 \times \frac{24}{52} + \ldots + 5 \times \frac{12}{52} = 1$.
   D'où $E(Z) = -4,5 + 1 = -3,5$.
   Par ailleurs, on remarque que la couleur obtenue n'a aucune influence sur la valeur de la carte. Les variables aléatoires X et Y sont donc indépendantes et on a donc $V(Z) = V(X) + V(Y)$.
   Or, $V(X) = 118,25$ et $V(Y) = \frac{74}{13}$. D'où $V(Z) = 118,25 + \frac{74}{13} = \frac{6\,645}{52}$.
   Ainsi, $\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{\frac{6\,645}{52}} \approx 11,132\,9$.

2. a. On a $S = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5$.

   b. Pour tout $k \in \{1; \ldots ; 5\}$, Z_k suit la même loi de probabilité que Z. On étudie donc un échantillon de taille 5 de la variable aléatoire Z.
   Ainsi, $E(S) = 5 \times E(Z) = 5 \times (-3,5) = -17,5$. Et puisqu'on remet systématiquement la carte obtenue dans le paquet, les variables Z_k sont indépendantes.
   On a donc $\sigma(S) = \sqrt{5} \times \sqrt{\frac{6\,645}{52}} = \sqrt{\frac{33\,225}{52}} \approx 25,277\,3$.

   c. La variable aléatoire M correspond à la moyenne des points obtenus à l'issue des cinq parties. On a $\sigma(M) = \frac{\sigma(Z)}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{6\,645}{52}}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6\,645}}{\sqrt{260}}$ d'où $\sigma(M) \approx 5,055\,4$.

Corrigé exercice 69 :

1. a. $E(X) = -5 \times 0,06 + \ldots + 10 \times 0,13 = 4,42 + 0,21a$ et $E(Y) = b \times 0,01 + \ldots + 20 \times 0,3 = 5,46 + 0,01b$.

b. $E(T) = E(Y) - E(X) = 5,46 + 0,01b - 4,42 - 0,21a = 1,04 + 0,01b - 0,21a$ et $E(Z) = 3E(X) + 2E(Y) = 24,18 + 0,63a + 0,02b$.
On résout donc le système suivant $\begin{cases} 1,04 + 0,01b - 0,21a = 0,1 \\ 24,18 + 0,63a + 0,02b = 26,5 \end{cases}$ et on obtient $a = 4$ et $b = -10$.

2. a. Puisque $a = 4$, on a $E(X) = 5,26$ et, puisque $b = -10$, on a $E(Y) = 5,36$. Donc $V(X) = 14,792\,4$ et $V(Y) = 103,850\,4$.
On a $V(10Z) = 10^2V(Z) = 100V(Z) = 54\,853,32$ donc $V(Z) = 548,533\,2$. Or $V(3X) + V(2Y) = 9V(X) + 4V(Y) = 548,533\,2$. On a donc bien$V(Z) = V(3X + 2Y) = 9V(X) + 4V(Y)$ donc les variables aléatoires X et Y peuvent être indépendantes.
b. D'après l'énoncé, $V(T) = 89,058$.
Or, $V(Y) + V(X) = 103,850\,4 + 14,792\,4 = 118,642\,8$.
Donc $V(T) = V(Y - X) \neq V(Y) + V(X)$.
Les variables aléatoires X et Y ne peuvent donc pas être indépendantes.

Corrigé exercice 70 :

1. La variable aléatoire X_1 correspond au nombre de points gagnés avec la règle 1.

x_i	0	1
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{18}{36} = 0,5$	$\frac{18}{36} = 0,5$

D'où $E(X_1) = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,5 = 0,5$.

La variable aléatoire X_2 correspond au nombre de points gagnés avec la règle 2.

x_i	0	2
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

Donc $E(X_2) = 0 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

La variable aléatoire X_3 correspond au nombre de points gagnés avec la règle 3.

x_i	0	5
$P(X_3 = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Donc $E(X_3) = 0 \times \frac{5}{6} + 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

La variable aléatoire X_4 correspond au nombre de points gagnés avec la règle 4.

x_i	-10	0
$P(X_4 = x_i)$	$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$	$\frac{13}{18}$

Donc $E(X_4) = -10 \times \frac{5}{18} + 0 \times \frac{13}{18} = -\frac{25}{9}$.

2. a. On a $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

   b. $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 0,5 + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{25}{9} = -\frac{4}{3}$.
   On a $E(X) < 0$, le jeu est donc défavorable au joueur.

3. a. Y correspond au nombre de points obtenus par le groupe entier donc $Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{18}$.

   b. On étudie échantillon de taille 18 de la variable aléatoire X. Ainsi, pour tout $k \in \{1; \ldots ; 18\}$, $E(Y_k) = E(X)$.

   c. On a donc $E(Y) = 18 \times E(X) = 18 \times \frac{-24}{18} = -24$. En moyenne, le groupe perd 24 points au total.

Corrigé exercice 71 :

1. a. La pièce étant équilibrée, on est en situation d'équiprobabilité. On en déduit la loi de la variable aléatoire X_k.

x_i	0	k
$P(X_k = x_i)$	0,5	0,5

   b. On a donc, pour tout $k \in \{1; \ldots ; n\}$, $E(X_k) = 0 \times 0,5 + k \times 0,5 = \frac{k}{2}$.

   c. Pour tout $k \in \{1; \ldots ; n\}$, $V(X_k) = 0,5 \times \left(0 - \frac{k}{2}\right)^2 + 0,5 \times \left(k - \frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{8} + \frac{k^2}{8} = \frac{k^2}{4}$.

2. a. D'après sa définition, pour tout $\ell \in \{1; \ldots ; n\}$, on a $Y_\ell = X_1 + \ldots + X_\ell$.

   b. $E(Y_\ell) = E(X_1) + \ldots + E(X_\ell) = \frac{1}{2}(1 + \ldots + \ell) = \frac{1}{2} \times \frac{\ell(\ell+1)}{2} = \frac{\ell(\ell+1)}{4}$On cherche maintenant à résoudre $E(Y_\ell) > 280$.
   $E(Y_\ell) > 280 \Leftrightarrow \frac{\ell(\ell+1)}{4} > 280 \Leftrightarrow \ell^2 + \ell > 1\,120 \Leftrightarrow \ell^2 + \ell - 1\,120 > 0$.
   On reconnaît un polynôme du second degré avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1\,120$.
   Puisque $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1\,120) = 4\,481$,$\Delta > 0$ et donc le polynôme étudié admet deux racines réelles distinctes :$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{4\,481}}{2 \times 1} \approx -33,97$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{4\,481}}{2 \times 1} \approx 32,97$.
   On obtient ainsi le tableau de signes suivant.

ℓ	$-\infty$		$x_1 \approx -33{,}97$		$x_2 \approx 32{,}97$		$+\infty$
$\ell^2+\ell-1\,120$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Il faut donc au moins 33 lancers pour que le gain moyen dépasse 280 euros.

c. On va montrer par récurrence que pour tout $m \geqslant 1$:
$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

Initialisation : $1^2 = 1$ et $\dfrac{1\times(1+1)\times(2\times1+1)}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$.
Donc la proposition est vraie au rang 1.

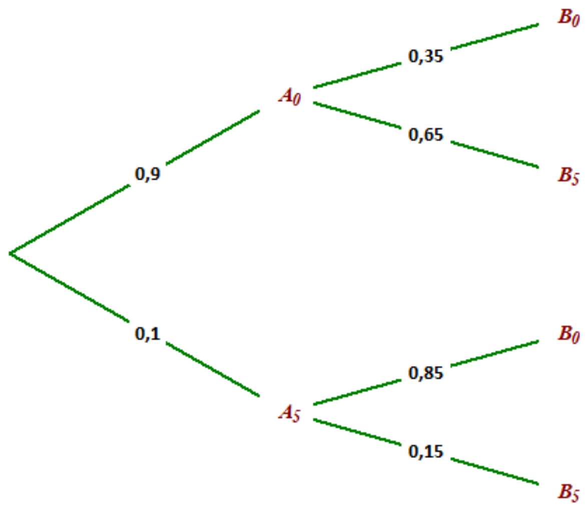
Hérédité : Supposons qu'il existe un entier m tel que :
$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.
Montrons alors que cette formule est aussi vraie au rang $m+1$, c'est-à-dire
$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \dfrac{(m+1)(m+1+1)(2(m+1)+1)}{6} = \dfrac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$.
On a $\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \sum_{k=1}^{m} k^2 + (m+1)^2$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence,
$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 = \dfrac{m(m+1)(2m+1)+6(m+1)^2}{6}$.
En factorisant, on obtient alors :
$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \dfrac{(m+1)\,[m(2m+1)+6(m+1)]}{6} = \dfrac{(m+1)(2m^2+7m+6)}{6}$.
Or, $\dfrac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} = \dfrac{(m+1)(2m^2+7m+6)}{6}$.
Ainsi, $\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \dfrac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$.

Conclusion : On a montré que l'égalité était vraie au rang $m=1$, puis que si elle était vraie pour un entier naturel non nul m quelconque, alors elle est vraie au rang $m+1$. D'après le principe de récurrence, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

Les variables X_k étant indépendantes (les résultats obtenus lors des lancers précédents n'ayant pas d'influence sur les lancers futurs), on a :
$V(Y_\ell) = V(X_1) + \ldots + V(X_\ell)$.
Or, pour tout $k \in \{1;\ldots;n\}$, $V(X_k) = \dfrac{k^2}{4}$.
D'où $V(Y_\ell) = \dfrac{1^2}{4} + \ldots + \dfrac{\ell^2}{4} = \dfrac{1}{4}(1^2+\ldots+\ell^2) = \dfrac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{24}$.

Corrigé exercice 72 :

1. Les informations et notations de l'énoncé donnent l'arbre de probabilités suivant :



2. La variable aléatoire X_1 ne peut prendre que deux valeurs : 0 et 5.

x_i	0	5
$P(X_1 = x_i)$	$0,9$	$0,1$

De même, la variable aléatoire X_2 ne peut prendre que deux valeurs : 0 et 5.

x_i	0	5
$P(X_2 = x_i)$	$0,9 \times 0,35 + 0,1 \times 0,85 = 0,4$	$0,6$

3. On a $E(X_1) = 0,5$ et $E(X_2) = 3$.

   Les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas identiquement distribuées puisqu'elles n'ont pas la même loi de probabilité.

4. On a $P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = 0,9 \times 0,35 = 0,315$ d'après l'arbre de probabilité.

   Par ailleurs, $P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 0) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$. Ainsi, $P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) \neq P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 0)$ donc les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

5. a. On obtient les lois de probabilités suivantes.

y_i	0	5
$P(Y_1 = y_i)$	$0,1$	$0,9$

y_i	0	5
$P(Y_2 = y_i)$	$0,4$	$0,6$

b. Les deux variables aléatoires ne sont pas identiquement distribuées car elles n'ont pas la même loi de probabilité.
En revanche, on vérifie que :
- $P((Y_1 = 0) \cap P(Y_2 = 0)) = P(Y_1 = 0) \times P(Y_2 = 0)$
- $P((Y_1 = 0) \cap P(Y_2 = 5)) = P(Y_1 = 0) \times P(Y_2 = 5)$
- $P((Y_1 = 5) \cap P(Y_2 = 0)) = P(Y_1 = 5) \times P(Y_2 = 0)$
- $P((Y_1 = 5) \cap P(Y_2 = 5)) = P(Y_1 = 5) \times P(Y_2 = 5)$

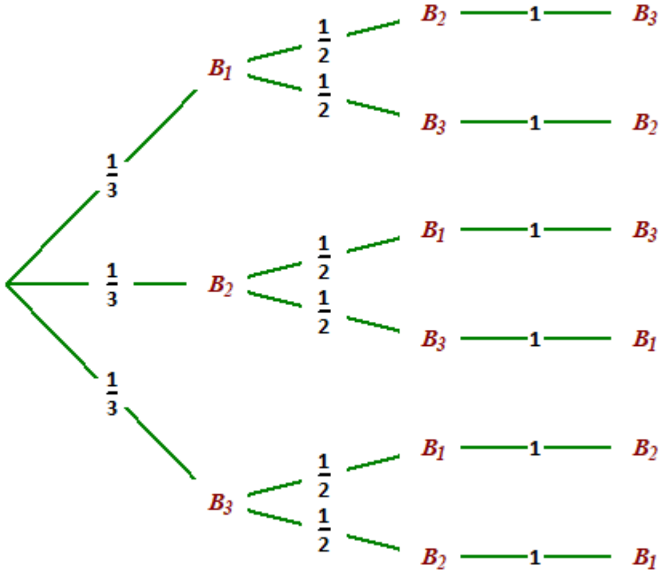
Donc les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

Corrigé exercice 73 :

1. Y peut prendre les valeurs $y_1 = (x_1 - E(X))^2; \ldots; y_r = (x_r - E(X))^2$.
Ainsi, $E(Y) = p_1 \times (x_1 - E(X))^2 + \ldots + p_r \times (x_r - E(X))^2$.
D'où $E(Y) = V(X)$.
2. On a $(X - E(X))^2 = X^2 - 2E(X)X + E(X)^2$.
3. On a $Y = (X - E(X))^2$ donc $E(Y) = E(X^2 - 2E(X)X + E(X)^2)$.
D'après la linéarité de l'espérance, $E(Y) = E(X^2) - E(2E(X)X) + E(E(X)^2)$. De plus, $2E(X)$ est un réel donc, toujours par linéarité de l'espérance, $E(2E(X) \times X) = 2E(X) \times E(X) = 2E(X)^2$. D'où $E(Y) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2$ et donc $E(Y) = E(X^2) - E(X)^2$.
Or, d'après la question 1, $E(Y) = V(X)$ d'où $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Corrigé exercice 74 :

1. a. On obtient l'arbre pondéré suivant.



b. X correspond au nombre de « rencontres » à l'issue des trois tirages.

c. La variable aléatoire X_1 peut prendre exactement deux valeurs : 0 et 1.
X_1 prend la valeur 1 si, et seulement si, la boule 1 est tirée au premier tirage.

x_i	0	1
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

La variable aléatoire X_2 peut prendre exactement deux valeurs : 0 et 1. X_2 prend la valeur 1 si, et seulement si, la boule 1 est tirée au premier tirage.

x_i	0	1
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

La variable aléatoire X_3 peut prendre exactement deux valeurs : 0 et 1. X_3 prend la valeur 1 si, et seulement si, la boule 1 est tirée au premier tirage.

x_i	0	1
$P(X_3 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

d. Pour tout $k \in \{1; 2; 3\}$, $E(X_k) = 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ donc $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$.

e. En moyenne, durant cette expérience, a lieu une rencontre.

2. On reprend le même raisonnement. Pour $k \in \{1; \ldots ; n\}$, on note Y_k la variable aléatoire valant 1 si on tire la boule numérotée k au ke tirage et 0 sinon. On pose $Y = Y_1 + \ldots + Y_n$.

   Pour tout $k \in \{1; \ldots ; n\}$, Y_k suit alors la loi de probabilité suivante.

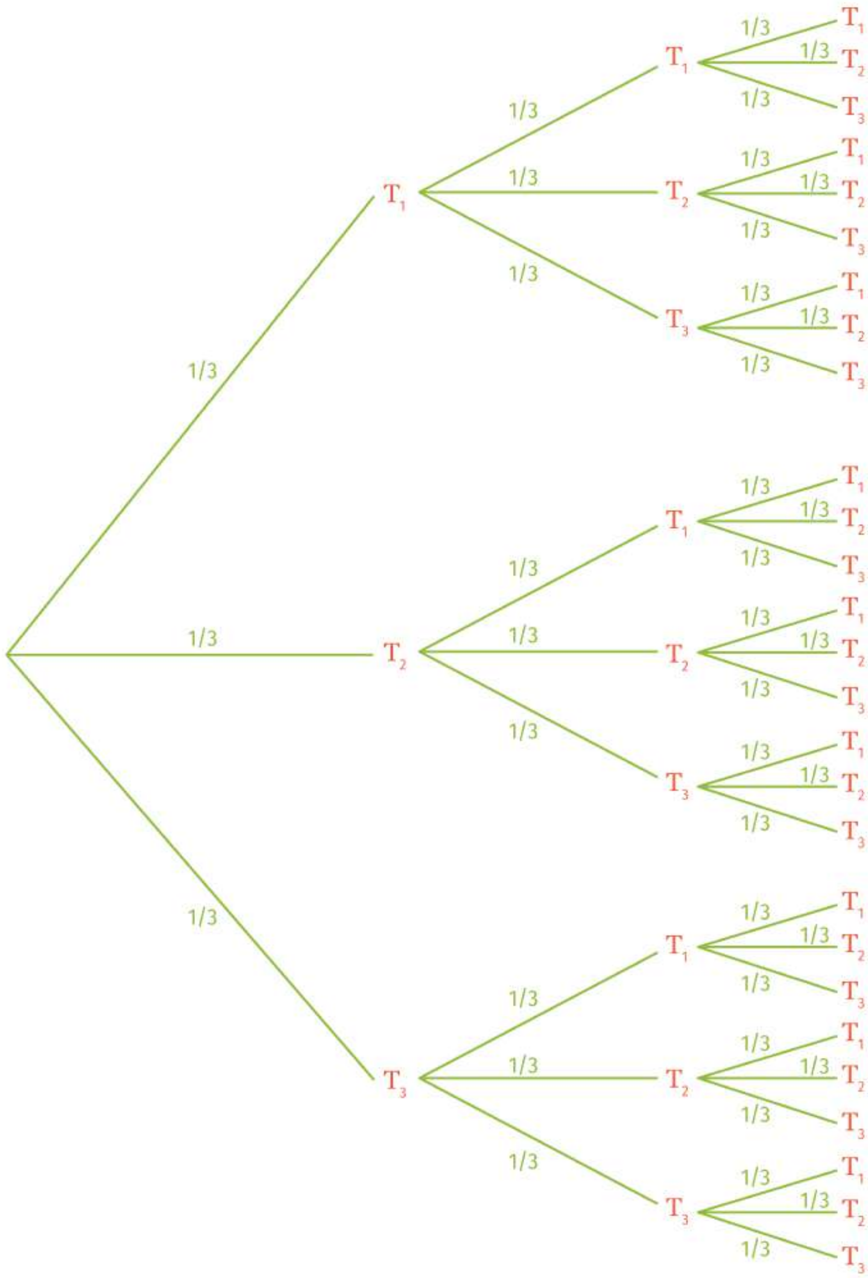
y_i	0	1
$P(Y_k = y_i)$	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{1}{n}$

   Ainsi, pour tout $k \in \{1; \ldots ; n\}$, $E(Y_k) = \frac{1}{n}$ et donc $E(Y) = 1$.

   Ainsi, en moyenne, a lieu une rencontre.

Corrigé exercice 75 :

1. a. Chaque étape de l'arbre suivant correspond à un objet.



b. X correspond au nombre de tiroirs vides à l'issue de la distribution.

c. On commence par déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1.
X_1 prend la valeur 1 si, et seulement si, le tiroir 1 n'a jamais été choisi.
Sinon, X_1 prend la valeur 0.
X_1 prend donc la valeur 1 lors des choix $(T_2; T_2; T_2)$, $(T_2; T_2; T_3)$, $(T_2; T_3; T_2)$, $(T_2; T_3; T_3)$, $(T_3; T_2; T_2)$, $(T_3; T_2; T_3)$, $(T_3; T_3; T_2)$ et $(T_3; T_3; T_3)$, ce qui correspond à une probabilité de $8 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{27}$.
On obtient ainsi la loi de probabilité de X_1.

x_i	0	1
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{19}{27}$	$\frac{8}{27}$

Ainsi, $E(X_1) = 1 \times \frac{8}{27} = \frac{8}{27}$.
De la même façon, on obtient les lois de probabilité de X_2 et X_3.

x_i	0	1
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{19}{27}$	$\frac{8}{27}$

x_i	0	1
$P(X_3 = x_i)$	$\frac{19}{27}$	$\frac{8}{27}$

Ainsi, $E(X_2) = E(X_3) = E(X_1)$ d'où $E(X) = 3 \times \frac{8}{27} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$.

d. Il y a donc en moyenne $\frac{8}{9}$ tiroir vide à l'issue de la distribution.

2. a. Y_1 est la variable aléatoire valant 1 si le tiroir 1 n'est jamais choisi et 0 sinon. Cette situation pourrait être modélisée par un arbre de probabilité à n colonnes représentant les n objets et, à chaque issue, n branches représentant les n tiroirs possibles. On a donc, à chaque rangement, n choix de tiroirs possibles, ce qui fait au total n^n possibilités. Si $Y_1 = 1$, cela signifie qu'on ne choisit jamais le tiroir 1. Cela veut dire qu'à chaque étape, on a en réalité $n-1$ choix (tout sauf le tiroir 1).
Ainsi, $P(Y_1 = 1) = \frac{(n-1)^n}{n^n}$.
Or, $E(Y_1) = 0 \times P(Y_1 = 0) + 1 \times P(Y_1 = 1) = P(Y_1 = 1) = \frac{(n-1)^n}{n^n}$.

   b. Les variables aléatoires $Y_1; \dots; Y_n$ ont toutes la même loi de probabilité. Ainsi, $E(Y) = nE(Y_1) = \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}}$. En moyenne, on a donc $\frac{(n-1)^n}{n^{n-1}}$ tiroirs vides à l'issue de la distribution.

Corrigé exercice 76 :

1. Supposons qu'il existe z_0 et z_1 tels que A_{z_0} et A_{z_1} ne soient pas disjoints. Alors il existerait un couple de réels $(x; y) \in \text{Val}_X \times \text{Val}_Y$ tel que $x \times y = z_0$ et $x \times y = z_1$. Ainsi on aurait $z_0 = z_1$, et donc les ensembles A_{z_0} et A_{z_1} seraient les mêmes. Pour deux valeurs distinctes prises par Z, les ensembles A_z sont donc disjoints.

2. On a $\bigcup_{z \in \text{Val}_Z} A_z = \text{Val}_X \times \text{Val}_Y$.

3. On a $P(Z = z) = P(X \times Y = z) = P(\bigcup_{(x;y) \in A_z} (X = x) \cap (Y = y))$. Or, les ensembles A_z sont tous disjoints donc $P(Z = z) = \sum_{(x;y) \in A_z} P((X = x) \cap (Y = y))$.

4. Par définition,
   $E(Z) = \sum\limits_{z \in \text{Val}_Z} zP(Z = z)$ d'où $E(Z) = \sum\limits_{z \in \text{Val}_Z} \sum\limits_{(x;y) \in A_z} zP((X = x) \cap (Y = y))$ donc
   $E(Z) = \sum\limits_{z \in \text{Val}_Z} \sum\limits_{(x;y) \in A_z} xyP((X = x) \cap (Y = y))$.
   Donc $E(Z) = \sum\limits_{z \in \text{Val}_Z} \sum\limits_{(x;y) \in A_z} zP(X = x) \times P(Y = y))$ car les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
5. Or, $E(X)E(Y) = \sum\limits_{x \in \text{Val}_X} xP(X = x) \times \sum\limits_{y \in \text{Val}_Y} yP(Y = y)$ donc
   $E(X)E(Y) = \sum\limits_{x \in \text{Val}_X} \sum\limits_{y \in \text{Val}_Y} xyP(X = x) \times P(Y = y)$. Or, la famille d'ensembles $(A_z)_{z \in \text{Val}_Z}$ forme une partition de $\text{Val}_X \times \text{Val}_Y$ d'où :
   $E(X)E(Y) = \sum\limits_{z \in \text{Val}_Z} \sum\limits_{(x;y) \in A_z} zP(X = x) \times P(Y = y)$.

Corrigé exercice 77 :

1. On a $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$.
2. Par définition de la variable aléatoire Z, $V(Z) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2$.
   Or $E((X+Y)^2) = E(X^2 + 2XY + Y^2) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2)$
   et $(E(X+Y))^2 = (E(X) + E(Y))^2 = (E(X))^2 + 2E(X)E(Y) + (E(Y))^2$.
   Ainsi, $V(Z) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - (E(X))^2 - 2E(X)E(Y) - (E(Y))^2$
   donc $V(Z) = E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 + 2E(XY) - 2E(X)E(Y)$.
3. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. L'exercice précédent permet alors d'affirmer que $E(XY) = E(X)E(Y)$.
   On obtient alors $V(Z) = E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2$, c'est-à-dire, d'après la formule de König-Huygens, $V(Z) = V(X) + V(Y)$.
   Ainsi, si X et Y sont indépendantes, on a alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 14 : Loi des grands nombres

Table des matières

1 Informations sur ce chapitre

Bien que le B.O ne mentionne que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, celle de Markov semblait indispensable à aborder pour des raisons de compréhension, ainsi que pour proposer un enchaînement cohérent des notions présentées dans le cours. Ainsi le cours et les exercices consacrent une partie non négligeable à cette inégalité.
C'est un chapitre inédit, qui est enseigné d'une façon extrêmement théorique dans le supérieur. Ici, le parti pris a été de faire un cours théorique, afin de garder toute la rigueur mathématique, et de l'accompagner d'exemples concrets et appliqués à des situations réelles. Même si l'intérêt n'est pas forcément pratique ici, c'est un cheminement essentiel pour que les élèves puissent manipuler les propriétés et théorèmes de ce cours.
L'inégalité de Markov permet de démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev qui elle-même permet de démontrer l'inégalité de concentration (prenant une place importante dans le B.O) qui elle-même permet de justifier la loi faible des grands nombres, cœur du chapitre.
Les exercices commencent donc naturellement par des applications directes pour comprendre les différentes inégalités et propriétés. Ensuite, des exercices plus consistants portent sur des applications théoriques, ou bien sur une partie numérique, ayant une place essentielle dans ce chapitre.
Il est important de souligner que les exercices sont variés, ce qui était loin d'être facile avec un chapitre aussi rigide. Il est donc essentiel de ne pas se concentrer seulement sur un type d'exercice mais de réussir à travailler sur l'ensemble des notions proposées.

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

On répète douze fois de façon identique et indépendante une expérience aléatoire de succès l'événement : « Tomber sur la face numérotée 1 ». La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = \frac{1}{6}$. Ainsi $E(X) = 12 \times \frac{1}{6} = 2$. Cela signifie, qu'en moyenne, si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, sur 12 lancers, on obtiendra 2 fois la face 1.

Corrigé exercice 2 :

1. La loi de X est donnée dans le tableau ci-dessous.

x_i	-5	175
$P(X = x_i)$	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

2. $E(X) = -5 \times \frac{36}{37} + 175 \times \frac{1}{37} = -\frac{5}{37} \approx -0,14$. Si un joueur joue un très grand nombre de fois, alors, en moyenne, il perdra 0,14 € par partie.

3. $V(X) = \frac{36}{37} \times (-5)^2 + \frac{1}{37} \times 175^2 \approx 852$.

Corrigé exercice 3 :

Un exemple possible : Lancer un dé à six faces équilibré. On obtient 5 € si on obtient 1 ou 2, rien si on obtient 3 ou 4 et on perd 5 € si on obtient 5 ou 6.

Corrigé exercice 4 :

1. Par linéarité de l'espérance, $E(Z) = E(X) + E(Y) = 2 + 3 = 5$.

   Comme X et Y sont indépendantes $V(Z) = V(X) + V(Y) = 9$.

2. Par linéarité, $E(2Z) = 2 \times E(Z) = 10$ et par indépendance des variables aléatoires $V(2Z) = 4 \times V(Z) = 36$.

Corrigé exercice 5 :

Le programme Python ci-dessous fonctionne par exemple.

```python
def esperance(x) :
    return((1/13)*3 + (2/13)*2 - (10/13)*x)
```

Corrigé exercice 6 :

1. a. X peut prendre les valeurs -3 et 4.

   b. La loi de X est donnée dans le tableau ci-dessous.

x_i	-3	4
$P(X = x_i)$	$\dfrac{n}{8+n}$	$\dfrac{8}{8+n}$

   c. $E(X) = \dfrac{-3n+32}{8+n}$

   d. Puisque $n \geqslant 3$ alors $8+n > 0$. $-3n+32 > 0$ si, et seulement si, $n < 10,66$ donc ce jeu est favorable au joueur lorsque l'urne contient de 3 à 10 boules blanches.

2. a. Y peut prendre les valeurs -6, 1 et 8.

   b. La loi de Y est donnée dans le tableau ci-dessous.

y_i	-6	1	8
$P(Y = y_i)$	$\dfrac{n(n-1)}{(8+n)(7+n)}$	$\dfrac{16n}{(8+n)(7+n)}$	$\dfrac{56}{(8+n)(7+n)}$

   c. $E(Y) = \dfrac{-6n^2+22n+448}{(8+n)(7+n)}$

   d. Puisque $n \geqslant 3$ alors $(8+n)(7+n) > 0$. On étudie le signe du polynôme $-6n^2+22n+448$ dont les racines sont $n_1 = \dfrac{32}{3}$ et $n_2 = -7$. Ainsi l'espérance est positive entre ces racines : le jeu est donc favorable si $3 \leqslant n \leqslant 10$.

3 Activités

3.1 Corrigé activité A :

Questions :

1. L'apparition de la première boule blanche se fera au maximum au bout de 5 tirages car l'urne ne contient que 4 boules noires. Donc les valeurs pouvant être prises par X sont $\{1; 2; 3; 4; 5\}$. La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-dessous.

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{210}$

2. La calculatrice nous donne $E(X) = \frac{11}{7} \approx 1,571$ et $V(X) \approx 0,673$.
3. D'une autre $P(|X - E(X)| \geqslant 2) = P(\{X \leqslant -0,47\} \cup \{X \geqslant 3,57\}) = P(X \geqslant 4)$ $= \frac{1}{30} \approx 0,03$. D'autre part $\frac{V(X)}{4} \approx 0,17$. Ainsi, $P(|X - E(X)| \leqslant 2) \leqslant \frac{V(X)}{4}$.
4. D'une autre $P(|X - E(X)| \geqslant 0,5) = P(\{X \leqslant 1,07\} \cup \{X \geqslant 2,07\})$ $= P(\{X \leqslant 1\} \text{ ou } \{X \geqslant 3\}) = \frac{8}{15} \approx 0,54$. D'autre part $\frac{V(X)}{0,5^2} \approx 2,692$. Ainsi, $P(|X - E(X)| \geqslant 0,5) \leqslant \frac{V(X)}{0,5^2}$.

Bilan :

On peut supposer que, pour tout $a > 0$, $P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$.

3.2 Corrigé activité B :

Questions :

1. Le programme ci-dessous fonctionne par exemple.

```
from math import*
from random import *

def piece(n):
    # n est un entier correspondant au nombre de lancers voulu
    # on initialise le nombre de chaque face :
    P=0
    F=0
    # on réitère le lancer n fois
    for i in range(0,n):
        # on simule le lancer d'une pièce équilibrée en codant 1 pour Pile et 2 pour Face
        X=randint(1,2)
        if X==1:
            P=P+1
        else:
            F=F+1
    # on renvoie le nombre de Pile et de Face obtenu
    return(P,F)
```

2. a. En utilisant le programme ci-dessous, on pourra écrire par exemple print(piece(10)).

   b. Les valeurs obtenues sont différentes suivant les élèves et les tentatives. Voilà ce qu'on obtient par exemple pour 20 lancers de 10 000 pièces.

```
from math import*
from random import *

def piece(n):
    # n est un entier correspondant au nombre de lancers voulu
    # on initialise le nombre de chaque face :
    P=0
    F=0
    # on réitère le lancer n fois
    for i in range(0,n):
        # on simule le lancer d'une pièce équilibrée en codant 1 pour Pile et 2 pour Face
        X=randint(1,2)
        if X==1:
            P=P+1
        else:
            F=F+1
    # on renvoie le nombre de Pile et de Face obtenu
    return(P,F)

for i in range(20):
  print(piece(10000))
```

```
(4908, 5092)
(4968, 5032)
(5007, 4993)
(5053, 4947)
(4970, 5030)
(5078, 4922)
(5016, 4984)
(5059, 4941)
(4934, 5066)
(4993, 5007)
(5022, 4978)
(5089, 4911)
(4991, 5009)
(4984, 5016)
(4983, 5017)
(5091, 4909)
(4920, 5080)
(4934, 5066)
(5101, 4899)
(4935, 5065)
```

   c. Les valeurs obtenues semblent se rapprocher d'une répartition équilibrée entre pile ou face mais plus le nombre de pièces est important et plus rares sont les lancers qui obtiennent exactement le même nombre de piles que de faces.

3. La probabilité d'obtenir pile et la probabilité d'obtenir face sont égales, ce n'est donc pas très surprenant que, sur l'ensemble des lancers, pile et face tombent presque aussi souvent l'un que l'autre.

4. a. Sur 1000 lancers, la moyenne théorique du nombre de piles obtenus est de 500 piles.

b. La réponse à cette question dépend des résultats obtenus par l'élève. Voilà un exemple de résultats :

```
Lancer n° 1 : (502, 498)
Lancer n° 2 : (487, 513)
Lancer n° 3 : (504, 496)
Lancer n° 4 : (490, 510)
Lancer n° 5 : (490, 510)
Lancer n° 6 : (468, 532)
Lancer n° 7 : (483, 517)
Lancer n° 8 : (483, 517)
Lancer n° 9 : (511, 489)
Lancer n° 10 : (474, 526)
Lancer n° 11 : (483, 517)
Lancer n° 12 : (479, 521)
Lancer n° 13 : (497, 503)
Lancer n° 14 : (490, 510)
Lancer n° 15 : (509, 491)
Lancer n° 16 : (513, 487)
Lancer n° 17 : (481, 519)
Lancer n° 18 : (503, 497)
Lancer n° 19 : (503, 497)
Lancer n° 20 : (509, 491)
Lancer n° 21 : (528, 472)
Lancer n° 22 : (522, 478)
Lancer n° 23 : (463, 537)
Lancer n° 24 : (489, 511)
Lancer n° 25 : (532, 468)
Lancer n° 26 : (535, 465)
Lancer n° 27 : (503, 497)
Lancer n° 28 : (500, 500)
Lancer n° 29 : (515, 485)
Lancer n° 30 : (481, 519)
```

Théoriquement, la plupart des simulations devraient ne pas dévier de trop de la moyenne théorique. Presque toutes les simulations devraient donc donner un écart maximal de 100 par rapport à cette moyenne. Dans l'exemple ci-dessous, le nombre de piles est toujours compris entre 400 et 600.

c. Sur 10 lancers, la moyenne théorique est de 5.

d. Encore une fois, la réponse à cette question dépend des résultats obtenus par l'élève. L'image ci-après montre un exemple de résultat. Le nombre de pièces lancées étant plus faibles, il n'est pas rare que le nombre de pile dévie plus souvent de la moyenne, mais ce nombre reste globalement compris entre 4 et 6 (20 fois sur 30 dans notre exemple).

```
Lancer n° 1 : (7, 3)
Lancer n° 2 : (4, 6)
Lancer n° 3 : (6, 4)
Lancer n° 4 : (4, 6)
Lancer n° 5 : (4, 6)
Lancer n° 6 : (6, 4)
Lancer n° 7 : (7, 3)
Lancer n° 8 : (2, 8)
Lancer n° 9 : (2, 8)
Lancer n° 10 : (6, 4)
Lancer n° 11 : (5, 5)
Lancer n° 12 : (5, 5)
Lancer n° 13 : (4, 6)
Lancer n° 14 : (5, 5)
Lancer n° 15 : (5, 5)
Lancer n° 16 : (8, 2)
Lancer n° 17 : (4, 6)
Lancer n° 18 : (9, 1)
Lancer n° 19 : (5, 5)
Lancer n° 20 : (4, 6)
Lancer n° 21 : (3, 7)
Lancer n° 22 : (8, 2)
Lancer n° 23 : (4, 6)
Lancer n° 24 : (5, 5)
Lancer n° 25 : (3, 7)
Lancer n° 26 : (5, 5)
Lancer n° 27 : (4, 6)
Lancer n° 28 : (4, 6)
Lancer n° 29 : (3, 7)
Lancer n° 30 : (6, 4)
```

Bilan :

Dans une situation d'équiprobabilité, lorsque l'on répète une expérience un grand nombre de fois, on s'attend à trouver des fréquences très proches des probabilités.

3.3 Corrigé activité C :

Questions :

1. a. X peut prendre les valeurs entières de 1 à 6.

   b. $2 \times \dfrac{1}{10} + 4 \times \dfrac{1}{5} = 1$ donc cette situation décrit bien une loi de probabilité.

2. Alice a commis l'erreur de ne pas se soucier des probabilités de chaque face et de faire comme si le dé est équilibré. C'est pour cela d'ailleurs que le programme renvoie une répartition relativement équitable.

3. a. On le modifie, par exemple, comme ci-dessous.

```python
from random import randint

def Lancers_de_dé(n):
  # n correspond au nombre de lancers effectués.
  # On initialise le nombre de faces obtenues :
  F1 = 0
  F2 = 0
  F3 = 0
  F4 = 0
  F5 = 0
  F6 = 0
  # on effectue n lancers :
  for i in range(n):
    # on simule le lancer du dé à 6 faces non équilibré.
    # On choisit 10 comme dénominateur commun pour les probabilités.
    X = randint(1,10)
    # La probabilité est 2/10 pour toutes les faces sauf les faces 3 et 4 :
    if X == 1 or X == 2:
      F1 = F1 + 1
    elif X == 3 or X == 4:
      F2 = F2 + 1
    elif X == 5:
      F3 = F3 + 1
    elif X == 6:
      F4 = F4 + 1
    elif X == 7 or X == 8:
      F5 = F5 + 1
    else:
      F6 = F6 + 1
  # on renvoie le nombre de résultats obtenus :
  return(F1, F2, F3, F4, F5, F6)
```

   b. Les valeurs obtenues dépendent de l'élève et des tentatives.

Bilan :

Même dans une situation non équiprobable, lorsque l'on répète une expérience un grand nombre de fois, on s'attend à trouver des fréquences très proches des probabilités théoriques.

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 7 :

Si $a \leqslant E(X)$, la majoration obtenue est supérieure à 1 ce qui n'apporte aucune information supplémentaire sur une probabilité.

Réponse : c

Corrigé exercice 8 :

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à l'événement $|X - E(X)| \geqslant 7$, $P(|X - E(X)| \geqslant 7) \leqslant \frac{16,15}{7^2}$ donc $P(|X - E(X)| \leqslant 6) > 0,67$.

Réponse : a

Corrigé exercice 9 :

L'algorithme simule une loi binomiale. Le paramètre n de cette loi n'est pas connu. Mais puisque la variable C est incrémentée lorsque $X = 1$, X pouvant prendre n'importe quelle valeur entière entre 0 et 10, la valeur de la variable p est connue : $p = 0,1$.

Réponse : b

Corrigé exercice 10 :

Posons X la variable aléatoire valant 1 si la face 4 a été obtenue et 0 sinon. D'après l'inégalité de concentration, $P(M_n - E(X) \geqslant 0,1) \leqslant \frac{V(X)}{n \times 0,1^2}$. Puisque $V(X) = \frac{5}{36}$, on résout donc l'inéquation $\frac{\frac{5}{36}}{n \times 0,1^2} \leqslant 0,1 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{1250}{9}$ soit $n \geqslant 139$.

Réponse : d

Corrigé exercice 11 :

L'inégalité de Markov ne peut être utilisée que dans le cadre d'une variable aléatoire positive.

Réponses : a et c

Corrigé exercice 12 :

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de réponses justes obtenues par un élève. Alors cette variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$. L'espérance de cette variable aléatoire vaut $E(X) = 20 \times 0,25 = 5$.

Réponse : c

Corrigé exercice 13 :

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous donne :

$$P(|X-170| \geqslant 5) \leqslant \frac{7,2}{5^2} \text{ soit } P(|X-170| \geqslant 5) \leqslant 0,288.$$

Réponses : b, c et d

Corrigé exercice 14 :

D'après l'inégalité de concentration :

$$P(|M_{36}-E(X)| \geqslant 2,4) \leqslant \frac{1,2}{36 \times 2,4^2} \text{ soit } P(|M_{36}-E(X)| \geqslant 2,4) \leqslant \frac{5}{864}.$$

D'où $P(|M_{36}-E(X)| \leqslant 2,4) \geqslant \dfrac{859}{864}$.

Réponses : a et d

Corrigé exercice 15 :

La loi de probabilité de X_i est donnée dans le tableau ci-dessous.

x_k	0	1
$P(X_i = x_k)$	$\dfrac{334}{365}$	$\dfrac{31}{365}$

L'espérance de cette variable aléatoire est donc $E(X_i) = \dfrac{31}{365}$ et sa variance $V(X_i) = \dfrac{10\,354}{133\,225}$.
D'après l'inégalité de concentration on a donc, pour tout $n > 0$:

$$P(|M_n - E(M_n)| \geqslant 0,1) \leqslant \frac{10\,354}{133\,225n \times 0,1^2}.$$

On résout alors $\dfrac{10\,354}{133\,225n \times 0,1^2} \leqslant 0,05$ ce qui donne $n \geqslant 156$.

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1

Question préliminaire

L'aire du quart de disque de rayon 1 vaut $\frac{\pi}{4}$. L'aire du carré de côté 1 a pour aire 1.
La probabilité que le point appartienne à $\mathcal{D}$ est donc de $\frac{\pi}{4}$.

Méthode 1

1. On complète le programme Python comme ci-dessous.

```python
from math import *
from random import *

def estimateur_Pi(n):
    Compteur = 0
    for i in range(n):
        x = random()
        y = random()
        r = sqrt(x**2 + y**2)
        if r <= 1:
            Compteur = Compteur + 1
    Prop = Compteur/n
    return 4*Prop

print(estimateur_Pi(100000))
```

2. La variable Compteur permet de compter le nombre de points placés à la surface de $\mathcal{D}$.

3. La fréquence du nombre de points appartenant à $\mathcal{D}$ lorsqu'on place n points est égale à $\frac{Compteur}{n}$. Cette fréquence se rapproche de la probabilité théorique de $\frac{\pi}{4}$. Ainsi $\frac{4 \times Compteur}{n}$ se rapproche de π.

4. Plus le nombre de test est grand, plus l'approximation de π est précise. C'est ce que nous dit la loi des grands nombres : plus le nombre de tests est grand, plus la moyenne expérimentale a une probabilité élevée de se rapprocher de la moyenne théorique.

Méthode 2

1. On entre en B2 et en C2 la formule = ALEA().

2. On entre en D2 la formule = RACINE(B2ˆ2+C2ˆ2).

3. On entre en E2 la formule = SI(D2<=1 ;1 ;0).

4. On entre en F2 la formule = NB.SI(E2 :E501 ;1).

5. La formule = F2/500 donne la fréquence du nombre de points appartenant à $\mathcal{D}$ lorsqu'on place 500 points aléatoirement dans le carré de côté 1. Cette fréquence se rapproche de la probabilité théorique de $\frac{\pi}{4}$. Ainsi, si on veut déterminer une approximation de π dans la cellule G2, on doit y entrer la formule = 4*F2/500.

Pour aller plus loin

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ dont la courbe représentative est le quart de cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. Pour tout point $M(x;f(x)) \in \mathcal{C}$, $OM = 1$ ou bien encore $OM^2 = 1$. Or, $OM^2 = x^2 + [f(x)]^2$ soit $1 = x^2 + [f(x)]^2$. Puisque $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $x^2 \leqslant 1$ et $1 - x^2 \geqslant 0$. On trouve donc finalement que, pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
Par conséquent, l'intégrale de l'énoncé correspond à l'aire du quart de disque étudié dans ce TP.
Ainsi, les deux méthodes présentées dans ce TP permettent de déterminer une approximation de la valeur de cette intégrale : $\frac{\pi}{4}$.

5.2 Corrigé du TP 2

Questions préliminaires

1. La variable aléatoire S_n suit une loi binomiale de paramètres n et p.
   Ainsi $E(S_n) = np$.

2. La variance de S_n est égale à $np(1-p)$.

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|S_n - np| \geqslant \sqrt{n}) \leqslant \dfrac{np(1-p)}{n}$ soit $P(|S_n - np| \geqslant \sqrt{n}) \leqslant p(1-p)$.

Méthode 1

1. On complète le programme Python comme ci-dessous.

```python
from math import *
from random import *
n = int(input("Entrer la valeur du paramètre n"))
N = int(input("Entrer le nombre de simulations de l'expérience"))

def binom(n):
    C = 0
    # On réitère l'expérience n fois
    for i in range(n):
        X = randint(1, 10)
        if X <= 4:
            C = C + 1
    return C

def simulation(n, N):
    simul = []
    # On simule N fois Sn
    for k in range(N):
        simul.append(binom(n))
    return simul

a = simulation(n, N)
K = 0
for i in range(0, len(a)):
    if abs(a[i] - n*0.4 ) >= sqrt(n):
        K = K + 1
print(K/N)
```

2. La variable C compte le nombre de succès pour la variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,4$. K compte le nombre d'expériences qui vérifient l'inégalité de l'énoncé.

3. Les résultats obtenus dépendent des élèves et des tentatives.

4. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $P(|S_n - np| \geqslant \sqrt{n}) \leqslant 0,24$.

5. On peut par exemple modifier le programme comme ci-dessous.

```python
from math import *
from random import *
n = int(input("Entrer la valeur du paramètre n"))
N = int(input("Entrer le nombre de simulations de l'expérience"))
p = float(input("Entrez p au dixième"))

def binom(n):
    C = 0
    for i in range(n):
        X = randint(1, 100)
        if X<= p*100 :
            C = C + 1
    return C

def simulation(n, N):
    simul = []
    for k in range(N):
        simul.append(binom(n))
    return simul

a = simulation(n, N)
K = 0
for i in range(0, len(a)):
    if abs(a[i] - n*0.4 ) >= sqrt(n):
        K = K + 1
print(K/N)
```

Méthode 2

1. Il est possible de télécharger le fichier dans le dossier TICE.
2. Avec les données de l'énoncé, l'événement devient $|S_n - 40| \geqslant 10$. Cela revient à dire que $S_n \geqslant 50$ ou $S_n \leqslant 30$.
3. a. L'événement contraire de $\{S_n \geqslant 50 \text{ ou } S_n \leqslant 30\}$ est $\{31 \leqslant S_n \leqslant 49\}$.
   b. D'après le logiciel, $P(31 \leqslant S_n \leqslant 49) = 0,94812$ d'où :
   $$P\left(\{S_n \geqslant 50 \text{ ou } S_n \leqslant 30\}\right) = 0,05188.$$
4. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $P(|S_n - np| \geqslant \sqrt{n}) \leqslant 0,24$. Cette inégalité est bien vérifiée. On remarque par ailleurs que cette inégalité est assez large.
5. On obtient de même que $P(66 \leqslant S_n \leqslant 84) = 0,97249$ d'où :
   $$P\left(\{S_n \geqslant 85 \text{ ou } S_n \leqslant 65\}\right) = 0,02751.$$
   L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne, dans ce cas :
   $$P(|S_n - np| \geqslant \sqrt{n}) \leqslant 0,1875.$$
6. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev semble être une majoration assez grossière de la probabilité recherchée. Elle donne une majoration de cette probabilité mais le majorant obtenu est visiblement assez éloignée de la véritable valeur théorique.

Pour aller plus loin

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est la plus large possible lorsque le majorant obtenu est le plus grand possible. Dans notre cas ce majorant vaut $p(1-p)$. Ainsi l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est la plus large lorsque $p = \frac{1}{2}$.

6 Travailler les automatismes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 16 :

Soit X la variable aléatoire donnant la moyenne obtenue par l'élève choisi. Cette variable aléatoire est positive, on peut donc utiliser l'inégalité de Markov qui nous donne $P(X \geqslant 14) \leqslant \frac{6}{7}$.

Corrigé exercice 17 :

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|X-40| \geqslant 5) \leqslant \frac{3}{25}$.

Corrigé exercice 18 :

D'après l'inégalité de concentration, $P(|M_n - E(M_n)| \geqslant 0,1) \leqslant \frac{1}{72}$.

Corrigé exercice 19 :

On peut par exemple penser à des lois binomiales de paramètres $p = 0,75$ ou $p = 0,749$.

Corrigé exercice 20 :

L'inégalité de concentration nous donne $P(|M_n - E(M_n)| \geqslant 0,01) \leqslant \frac{V(X)}{n \times 0,01^2}$. On résout donc $\frac{V(X)}{n \times 0,01^2} \leqslant V(X)$ et on obtient alors $n \geqslant 10000$.

6.2 Exercices

Corrigé exercice 21 :

L'inégalité de Markov ne peut être appliquée que dans le cas d'une variable aléatoire positive. Ainsi, l'inégalité de Markov ne peut être appliquée que dans les cas 1 et 3.

Corrigé exercice 22 :

On utilise l'inégalité de Markov.

1. $P(X \geqslant 1) \leqslant \frac{0,5}{1}$ soit $P(X \geqslant 1) \leqslant 0,5$
2. $P(X \geqslant 24) \leqslant \frac{6}{24}$ soit $P(X \geqslant 24) \leqslant 0,25$
3. $P(X \geqslant 4) \leqslant \frac{4}{3 \times 4}$ soit $P(X \geqslant 4) \leqslant \frac{1}{3}$

Corrigé exercice 23 :

Soit X la variable aléatoire donnant le temps d'attente de l'ascenseur. Cette variable aléatoire est positive, on peut donc appliquer l'inégalité de Markov et on obtient alors $P(X \geqslant 5) \leqslant \frac{2}{5}$.

Corrigé exercice 24 :

Soit X la variable aléatoire donnant la température aux Maldives. Cette variable aléatoire est supposée positive, on peut donc appliquer l'inégalité de Markov et on obtient alors$P(X \geqslant 34) \leqslant \frac{28,4}{34}$ soit $P(X \geqslant 34) \leqslant 0,84$.

Corrigé exercice 25 :

Soit X la variable aléatoire donnant la vitesse d'une voiture choisie au hasard. Cette variable aléatoire est positive, on peut donc utiliser l'inégalité de Markov.

1. $P(X \geqslant 150) \leqslant \frac{120}{150}$ soit $P(X \geqslant 150) \leqslant 0,8$.
2. D'après l'inégalité de Markov, $P(X \geqslant 100) \leqslant \frac{120}{100}$ d'où $P(X < 100) \geqslant -0,2$. L'inégalité de Markov ne donne donc ici aucune information utile.

Corrigé exercice 26 :

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|X - E(X)| \geqslant 2) \leqslant \frac{1}{4}$.

Corrigé exercice 27 :

On obtient les résultats suivants en utilisant l'inégalité Bienaymé-Tchebychev.

1. $P(|X - E(X)| \geqslant 2) \leqslant 0,5$.
2. $P(|X - E(X) \geqslant 20) \leqslant 0,025$.
3. $P(|X - E(X)| \geqslant 7) \leqslant \frac{12}{49}$.
4. L'événement $\{X \geqslant 3\} \cup \{X \leqslant 17\}$ est équivalent à l'évènement $\{|X - 10| \leqslant 7\}$ et $P(|X - E(X)| \geqslant 7) \leqslant \frac{5}{49}$ d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Corrigé exercice 28 :

Ici $P(X \geqslant 195) = P(|X - E(X)| \geqslant 8)$ car le pilote roule à une vitesse supérieure à la moyenne. Ainsi, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(X \geqslant 195) \leqslant \frac{7,3}{8^2}$ soit $P(X \geqslant 195) \leqslant 0,11$.

Corrigé exercice 29 :

1. On a $E(X) = 2,8$ et $V(X) = 7,56$.
2. $P(|X - E(X)| \geqslant 2) = P(|X - 2,8| \geqslant 2) = P(X = 10) = 0,1$
3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|X-E(X)| \geqslant 2) \leqslant \dfrac{7,56}{4}$ soit $P(|X-E(X)| \geqslant 2) \leqslant 1,89$. Cette inégalité ne fournit dans ce cas aucune information réellement utile puisqu'il est immédiat que cette probabilité est inférieure à 1 et donc à 1,89.

Corrigé exercice 30 :

1. En supposant que la fréquence de marquage reste vraie sur l'ensemble des matchs, on peut estimer que la moyenne des points marqués est l'espérance de la variable aléatoire X, soit $E(X) = \frac{60}{20} = 3$.
2. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|X - E(X)| \geqslant 1) \leqslant 0,67$.
3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|X - E(X)| \geqslant 2) \leqslant 0,1675$ donc $P(|X - E(X)| < 2) \geqslant 0,8325$.

Corrigé exercice 31 :

1. On a $E(X_i) = \dfrac{1}{4}$ et $V(X_i) = \dfrac{3}{16}$.
2. $E(M_n) = E(X_i) = \dfrac{1}{4}$ et $V(M_n) = \dfrac{V(X_i)}{n} = \dfrac{3}{16n}$.
3. D'après l'inégalité de concentration, $P(|M_n - E(X_i)| \geqslant 0,1) \leqslant \dfrac{\frac{3}{16}}{n \times 0,1^2}$. On résout donc $\dfrac{3}{16n \times 0,1^2} \leqslant 0,05$ et on obtient $n \geqslant 375$.

Corrigé exercice 32 :

1. On a $E(X_i) = 0,4$ et $V(X_i) = 0,24$.
2. $E(M_n) = E(X_i) = 0,4$ et $V(M_n) = \dfrac{V(X_i)}{n} = \dfrac{0,24}{n}$.
3. D'après l'inégalité de concentration, $P(|M_n - E(X_i)| \geqslant 0,1) \leqslant \dfrac{0,24}{n \times 0,1^2}$. On résout donc $\dfrac{0,24}{n \times 0,1^2} \leqslant 0,05$ et on obtient $n \geqslant 480$.

Corrigé exercice 33 :

1. Les variables aléatoires X_i sont indépendantes deux à deux et de même loi, on peut donc appliquer appliquer la loi des grands nombres.

2. Dans ce cas, les tirages sont sans remise, les variables X_i ne sont donc pas indépendantes et ne suivent pas la même loi, on ne peut donc pas appliquer la loi des grands nombres.

Corrigé exercice 34 :

1. Cette expérience revient en réalité à lancer n fois une pièce et compter le nombre de fois où elle est tombée sur face, par exemple. En effet, la probabilité que le dé tombe sur la face 3 est $\frac{1}{2}$ et donc la probabilité pour que le résultat du dé ne soit pas 3 est $\frac{1}{2}$ aussi.

   On peut donc, par exemple, modéliser cette expérience avec le programme suivant (voir dossier TICE).

```
from math import *
from random import *

def lancer(n):
    C = 0
    for i in range(n):
        X = randint(1, 2)
        if X == 1:
            C = C + 1
    return C
```

2. a. Il s'agit d'une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,5$.

   b. $E(X) = 0,5n$ et $V(X) = 0,25n$.

3. a. Les résultats obtenus dépendent de l'élève et de la tentative.

   b. On illustre ici la loi faible des grands nombres. En effet, plus la valeur de n sera grande, plus l'écart des résultats obtenus avec la moyenne sera petit.

Corrigé exercice 35 :

1. Dix lancers sont insuffisants pour atteindre ou non une telle conclusion.

2. Les fréquences d'apparition des faces semblent toutes très proches de $\frac{1}{6}$, ce qui peut nous amener à penser que le dé n'est pas pipé. En effet, d'après la loi des grands nombres, ces fréquences d'apparitions tendent vers les probabilités théoriques d'apparition de chacune de ces faces. Il est donc assez improbable que ce dé soit truqué.

Corrigé exercice 36 :

L'inégalité de Markov fait intervenir $\dfrac{E(X)}{a}$. Il suffirait alors de choisir $E(X) = 3$ et $a = 7$.
Un exemple d'énoncé possible : « Lors d'un contrôle sur 10, la moyenne de la classe est de 3. Majorer la probabilité qu'un élève ait eu plus de 7 à ce contrôle ».

Corrigé exercice 37 :

Ici l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $P(|X - E(X)| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{V(X)}{9}$. On cherche donc une situation telle que $\dfrac{V(X)}{9} \leqslant 0,2 \Leftrightarrow V(X) \leqslant 1,8$.
On peut par exemple considérer l'énoncé suivant : « Un restaurant propose différents menus à différents prix. En moyenne, un client de ce restaurant paye 12 €, avec une variance de 1,8. Majorer la probabilité qu'un client paye moins de 9 € ou plus de 15 € en mangeant dans ce restaurant ».

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 38 :

Puisque X est une variable aléatoire positive, on peut utiliser l'inégalité de Markov. On obtient alors $P(X \geqslant 4) \leqslant \frac{1}{4}$.

Corrigé exercice 39 :

Puisque X est une variable aléatoire positive, on peut utiliser l'inégalité de Markov qui donne alors $P(X \geqslant 2) \leqslant \frac{x}{2}$. On résout ainsi $\frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{3}$ et on obtient $x \leqslant \frac{2}{3}$.

Corrigé exercice 40 :

Puisque X est une variable aléatoire positive, on peut utiliser l'inégalité de Markov qui donne alors $P(X \geqslant 9) \leqslant \frac{3}{9}$. On en déduit que $P(X < 9) \geqslant \frac{2}{3}$.

Corrigé exercice 41 :

On calcule tout d'abord la variance de cette variable aléatoire :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2,4.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a alors :

$$P(|X-4| \geqslant 3) \leqslant \frac{2,4}{9} \text{ soit } P(|X-4| \geqslant 3) \leqslant 0,27.$$

Corrigé exercice 42 :

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - E(X)| \geqslant 2,5) \leqslant \frac{1,44}{6,25} \text{ soit } P(|X - E(X)| \geqslant 2,5) \leqslant 0,2304.$$

Corrigé exercice 43 :

On a $\frac{V(X)}{25} = 0,3$ donc $V(X) = 7,5$.

Corrigé exercice 44 :

$P(X \geqslant 5) \leqslant \frac{3}{5}$

Corrigé exercice 45 :

$P(X < 2) \geqslant 1 - \frac{1}{2}$ soit $P(X < 2) \geqslant \frac{1}{2}$.

Corrigé exercice 46 :

$P(X \geqslant 0,5) \leqslant \frac{0,1}{0,5}$ soit $P(X \geqslant 0,5) \leqslant 0,2$.

Corrigé exercice 47 :

$P(X < 1,4) \geqslant 1 - \dfrac{0,75}{1,4}$ soit $P(X < 1,4) \geqslant 0,46$.

Corrigé exercice 48 :

$P(X \geqslant 151) \leqslant \dfrac{130}{151}$ $P(X \geqslant 151) \leqslant 0,86$

Corrigé exercice 49 :

L'inégalité de Markov donne $P(X \geqslant 2) \leqslant \dfrac{E(X)}{2}$. D'après l'énoncé on a donc $\dfrac{E(X)}{2} = 0,7$ et on en déduit ainsi que $E(X) = 1,4$.

Corrigé exercice 50 :

La variable aléatoire présentée dans l'énoncé n'est, a priori, pas positive ; une condition pourtant nécessaire pour utiliser l'inégalité de Markov. L'élève fait donc une erreur dès qu'il décide d'utiliser cette inégalité sans vérifier la positivité de X.

Corrigé exercice 51 :

La variable aléatoire X est positive, on peut donc utiliser l'inégalité de Markov qui donne alors $P(X \geqslant a^n) \leqslant \dfrac{1}{a^{n-1}}$. Or $a > 2$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $[0;+\infty[$, $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{2}$. De plus $n \geqslant 2$ donc, par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $[0;+\infty[$, $\dfrac{1}{a^{n-1}} < \dfrac{1}{a^n} < \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{2}$. On en déduit alors que $P(X \geqslant a^n) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Corrigé exercice 52 :

Soit X la variable aléatoire correspondant à l'argent restant sur le compte bancaire de Léo en fin de mois. Puisque la banque de Léo ne lui autorise aucun découvert, X est une variable aléatoire positive et on peut donc utiliser l'inégalité de Markov qui nous donne $P(X < 50) \geqslant 1 - \dfrac{4}{5}$ soit $P(X < 50) \geqslant \dfrac{1}{5}$.

Corrigé exercice 53 :

Soit X la variable aléatoire correspondant à l'argent possédé par un adulte. La richesse moyenne par personne adulte est égale, d'après les données de l'énoncé, à $E(X) = \dfrac{278100}{4,5} = 61800$. De plus la variable aléatoire X est positive, on peut donc utiliser l'inégalité de Markov, et on obtient alors $P(X \geqslant 1000000) \leqslant \dfrac{61800}{1000000}$ soit $P(X \geqslant 1000000) \leqslant 0,062$. On vérifie ainsi les propos de l'économiste.

Corrigé exercice 54 :

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 33$ et $p = \dfrac{1}{3}$ donc $E(X) = 33 \times \dfrac{1}{3} = 11$.
2. La variable X est positive, on peut donc utiliser l'inégalité de Markov qui nous donne alors $P(X \geqslant 21) \leqslant \dfrac{11}{21}$.

Corrigé exercice 55 :

1. La variable aléatoire X est positive, on peut donc utiliser l'inégalité de Markov qui, dans ce cas, nous donne $P(X \geqslant kE(X)) \leqslant \dfrac{E(X)}{kE(X)}$ soit $P(X \geqslant kE(X)) \leqslant \dfrac{1}{k}$.
2. On applique le résultat de la question 1 avec X la variable aléatoire donnant le salaire d'un salarié et $k = 10$.

Corrigé exercice 56 :

$P(|X - E(X)| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{2,5}{9}$ soit $P(|X - E(X)| \geqslant 3) \leqslant 0,28$.

Corrigé exercice 57 :

$P(|X - E(X)| \geqslant 1,5) \leqslant \dfrac{1}{2,25}$ soit $P(|X - E(X)| \geqslant 1,5) \leqslant 0,45$.

Corrigé exercice 58 :

$P(|X - E(X)| < 3) \geqslant 1 - \dfrac{1}{9}$ soit $P(|X - E(X)| < 3) \geqslant 0,88$.

Corrigé exercice 59 :

$P(|X - E(X)| \leqslant 11) \geqslant 1 - \dfrac{7}{121}$ soit $P(|X - E(X)| \leqslant 11) \geqslant 0,95$.

Corrigé exercice 60 :

$P(|X - E(X)| \geqslant 2) \leqslant \dfrac{4}{16}$ soit $P(|X - E(X)| \geqslant 2) \leqslant 0,25$.

Corrigé exercice 61 :

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de passagers durant une journée. Alors, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $P(|X - E(X)| \geqslant 100) \leqslant \dfrac{2500}{10000}$ soit $P(|X - E(X)| \geqslant 100) \leqslant 0,25$.

Corrigé exercice 62 :

1. La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-dessous.

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$

2. $E(X) = 1,375$ et $V(X) = \dfrac{77}{192}$.

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|X - E(X)| \geqslant 1,625) \leqslant \dfrac{77}{507}$ d'où $P(|X - E(X)| < 1,625) \geqslant 0,85$.

4. a. L'événement $\{|X - E(X)| < 1,625\}$ correspond à l'événement $\{X < 3\}$ donc $P(|X - E(X)| < 1,625) = \dfrac{7}{10} + \dfrac{7}{30} \approx 0,93$.
   b. La minoration obtenue à la question 3 n'est pas très précise. En règle générale, la majoration ou minoration de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est grossière et ne peut pas être prise comme une estimation de la probabilité.

Corrigé exercice 63 :

1. $E(Y) = n$ et $V(Y) = n(n-1)$.

2. Y est une variable aléatoire positive, on peut donc utiliser l'inégalité de Markov et on en déduit alors que $P(Y \geqslant n^2) \leqslant \dfrac{n}{n^2}$ soit $P(Y \geqslant n^2) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

3. On applique cette fois l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour obtenir :

$$P(|Y - n| \geqslant n) \leqslant \frac{(n-1) \times n}{n^2} \text{ soit } P(|Y - n| \geqslant n) \leqslant 1 - \frac{1}{n}.$$

Corrigé exercice 64 :

On a $E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$ et
$V(X) = (0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1-p)$.
Ainsi, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \dfrac{p(1-p)}{a^2}$.
La fonction $p \mapsto p(1-p)$ définie sur $[0;1]$ admet un maximum en $p = \dfrac{1}{2}$ donc la valeur de p pour laquelle le majorant obtenu à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est le plus grand est $p = \dfrac{1}{2}$.

Corrigé exercice 65 :

D'après l'énoncé, $P(|X - E(X)| < 3) = 0,55$. De plus, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $P(|X - E(X)| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(X)}{9}$. D'où $1 - P(|X - E(X)| < 3) \leqslant \frac{V(X)}{9}$ donc $V(X) \geqslant 4,05$ et donc, par croissance de la fonction racine carrée, $\sigma \geqslant 2,01$

Corrigé exercice 66 :

1. La première erreur commise par l'élève vient du fait qu'il ne prend pas en compte que l'expérience est sans remise et ne suit donc pas une loi binomiale. La deuxième erreur commise par l'élève est sur l'expression de l'événement contraire. En effet $P(|X - E(X)| \leqslant 20) = 1 - P(|X - E(X)| > 20)$.

2. Il est très difficile dans ce cas d'obtenir la loi de probabilité puisque l'on ne connaît pas le nombre exact de boules ni, par conséquent l'espérance et la variance de cette loi. Ainsi, on ne peut rien dire sur la probabilité demandée.

Corrigé exercice 67 :

Pour appliquer l'inégalité, l'espérance est forcément aussi proche de $1,8$ que de $0,4$ donc $E(X) = 1,1$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|X - E(X)| \geqslant 0,7) \leqslant \dfrac{V(X)}{0,49}$. Ainsi, d'après les données de l'énoncé, on doit avoir $\dfrac{V(X)}{0,49} \leqslant 0,15$ ce qui conduit à $V(X) \leqslant 0,0735$.

Corrigé exercice 68 :

Le pain n'est pas mis en vente si sa masse s'écarte de plus de 25 g par rapport à la masse moyenne des pains de ce boulanger. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a alors $P(|X - E(X)| \geqslant 25) \leqslant \dfrac{225}{25^2}$ soit $P(|X - E(X)| \geqslant 25) \leqslant 0,36$.

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 69 :

Chaque variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$ d'où $E(X_i) = \frac{1}{6}$ et $V(X_i) = \frac{5}{36}$. D'où, d'après l'inégalité de concentration :

$$P(|\overline{X} - E(X)| \geqslant 0,05) \leqslant \frac{5}{36 \times 0,05^2 \times 10000} \text{ soit } P(|\overline{X} - E(X)| \geqslant 0,05) \leqslant 0,0056.$$

Corrigé exercice 70 :

D'après la loi des grands nombres, M_n va tendre vers l'espérance de cette expérience aléatoire.
Ici la variable aléatoire X correspondant à cette expérience aléatoire suit une loi binomiale de paramètres $n = 13$ et $p = \frac{1}{13}$. Donc la limite de M_n est $n \times p = 1$.

Corrigé exercice 71 :

Soit X_i, $i \in \{1; \ldots; n\}$, la variable aléatoire correspondant au i-ème lancer de la pièce. X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$ d'où $E(X) = \frac{1}{2}$ et $V(X) = \frac{1}{4}$. Ainsi, d'après l'inégalité de concentration, $P(|M_n - \frac{1}{2}| \geqslant 0,01) \leqslant \frac{1}{4 \times 0,01^2 \times n}$. On résout donc $\frac{1}{4 \times 0,01^2 \times n} \leqslant 0,01$ et on obtient alors $n \geqslant 250\,000$.

Corrigé exercice 72 :

On résout $\frac{5}{36 \times 0,05^2 \times n} \leqslant 0,1$ pour trouver $n \geqslant 556$.

Corrigé exercice 73 :

On résout $\frac{5}{36 \times 0,02^2 \times n} \leqslant 0,05$ pour trouver $n \geqslant 6\,945$.

Corrigé exercice 74 :

On résout $1 - \frac{5}{36 \times 0,1^2 \times n} \geqslant 0,95$ pour trouver $n \geqslant 278$.

Corrigé exercice 75 :

On résout $1 - \frac{5}{36 \times 0,01^2 \times n} \geqslant 0,99$ pour trouver $n \geqslant 138\,889$.

Corrigé exercice 76 :

1. L'inégalité de concentration affirme que pour tout réel a strictement positif :
$$P(|M_n - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{na^2}.$$
où $M_n = \dfrac{X_1 + \ldots X_n}{n}$ représente la variable aléatoire moyenne.
2. $E(M_n) = \dfrac{1}{n}E(X_1 + \ldots + X_n) = \dfrac{n}{n}E(X_i) = E(X)$ par linéarité de l'espérance.
3. a. $V(X_1 + ... + X_n) = nV(X)$ car les variables aléatoires X_i sont indépendantes et de même loi que X.
   b. On en déduit que $V(M_n) = \dfrac{n}{n^2}V(X_i) = \dfrac{V(X)}{n}$.
4. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|M_n - E(M_n)| \geqslant a) \leqslant \dfrac{V(M_n)}{a^2}$.
   Or $E(M_n) = E(X)$ et $V(M_n) = \dfrac{V(X)}{n}$ d'où $P(|M_n - E(X)| \geqslant a) \leqslant \dfrac{V(X)}{a^2}$.

Corrigé exercice 77 :

1. On répète n fois de façon indépendante une même expérience aléatoire admettant deux issues : « Obtenir un 1. » qu'on nomme succès et « Ne pas obtenir un 1. » qu'on nomme échec. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{1}{6}$. On en déduit que $E(X) = \dfrac{n}{6}$ et $V(X) = \dfrac{5n}{36}$.
2. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|X - \dfrac{n}{6}| \geqslant \dfrac{n}{100}) \geqslant \dfrac{12\,500}{9n}$ d'où $P(|X - \dfrac{n}{6}| < \dfrac{n}{100}) \geqslant 1 - \dfrac{12\,500}{9n}$.
3. On résout $1 - \dfrac{12\,500}{9n} \leqslant 0,05$ et on obtient $n \geqslant 27\,778$.

Corrigé exercice 78 :

1. On simule un tirage avec remise de boules colorées dans une urne jusqu'à obtention d'une boule rouge. On ne sait donc pas à l'avance quand cet événement aura lieu. D'où l'utilisation d'une boucle while.
2. On complète le programme comme ci-dessous.

```python
from random import randint
def rang(n):
    S=0
    for i in range(n):
        X = randint(1,10)
        C = 1
        while X <= 6:
            X = randint(1, 10)
            C = C+1
        S = S+C
    return(S/n)
```

3. La variable S compte la somme des rangs d'apparition du premier succès obtenu pour chacune des expériences
4. On obtient une moyenne du nombre d'apparitions qui semble tendre vers 2,5. D'après la loi des grands nombres, on peut donc supposer que l'espérance est donc de 2,5.

Corrigé exercice 79 :

1. L'algorithme ci-dessous, par exemple, fonctionne.

```python
from random import randint
def paire(n):
    K=0
    for i in range(n):
        X = randint(1,51)
        if X <= 3:
            K = K + 1
    return(K/n)
```

   En effet, après avoir reçu la première carte, il reste trois cartes de même valeur permettant d'obtenir une paire.

2. Le programme Python nous donne une fréquence avoisinant les $0,06$ lorsqu'on répète l'expérience un très grand nombre de fois.
3. La probabilité d'obtenir une paire est de $\dfrac{3}{51} \approx 0,059$ ce qui correspond bien aux résultats obtenus avec le programme Python.

Corrigé exercice 80 :

La proportion de boules blanches, donnée par $\dfrac{N-50}{N}$, semble tendre vers 0,75. Ainsi, d'après la loi des grands nombres, $\dfrac{1}{4}$ des boules de l'urne semblent être des boules noires. Ainsi il semble y avoir $N = 200$ boules dans cette urne.

Corrigé exercice 81 :

1. Un joueur touche la cible si elle est dans le cercle de rayon 0,75. Ainsi, on choisit n coordonnées x et y aléatoirement dans $[0;1] \times [0;1]$ et on compte le nombre de points qui vérifie $x^2+y^2 \leqslant 0,75^2$. Le programme ci-dessous fonctionne, par exemple.

```python
from math import*
from random import *

n = int(input("Entrer le nombre de points à tester"))

# question 1
Compteur = 0
for i in range(n):
    x = random()
    y = random()
    r = sqrt(x**2 + y**2)
    if r <= 0.75:
        Compteur = Compteur + 1
print("La probabilité d'atteindre la cible délimitée par le cercle bleu est environ égale à",Compteur/n)
```

   Le programme renvoie une estimation de cette probabilité proche de 0,44.

2. On procède de la même manière. Le programme ci-dessous fonctionne, par exemple.

```python
# question 2
Compteur = 0
for i in range(n):
    x = random()
    y = random()
    r = sqrt(x**2 + y**2)
    if r <= 0.25:
        Compteur = Compteur + 1
print("La probabilité d'atteindre la cible délimitée par le cercle rouge est environ égale à",Compteur/n)
```

   Le programme renvoie une estimation de cette probabilité proche de 0,05.

9 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 82 :

1. On choisit la boîte numéro 1. Si la boîte 1 contient bien l'argent, il ne faut pas changer de boîte. Si, au contraire, la boîte numéro 2 ou 3 contient l'argent, alors il faut changer de boîte si l'on veut gagner. Laura a donc raison : en changeant de boîte à ce stade là, on a deux chances sur trois de gagner.

2. Le programme ci-dessous fonctionne, par exemple.

```
from random import *

def jeu(n):
    #k compte les choix gagnants
    k = 0
    for i in range(n):
        #Les trois boites initiales sont numérotées 1, 2 et 3 :
        TroisBoites = [1, 2, 3]
        #Argent désigne la boite gagnante que le candidat doit trouver :
        Argent = choice(TroisBoites)
        #Choix_initial indique le choix du candidat :
        Choix_initial = choice(TroisBoites)
        #Le présentateur révèle la boite qui n'est ni la boite gagnante ni le choix du joueur ; c'est une boîte forcément perdante:
        p = choice(TroisBoites)
        while p == Choix_initial or p == Argent:
            p = choice(TroisBoites)
        #Cette boîte révélée ne fait donc plus partie des choix du joueur :
        TroisBoites.remove(p)
        #Il reste la boîte gagnante et une boite perdante :
        DeuxBoites = TroisBoites
        #Le choix final du joueur est initialisé comme étant égal à son choix initial :
        Choix_final = Choix_initial
        #On suppose que le joueur change systématiquement son choix initial
        while Choix_final == Choix_initial:
            Choix_final = choice(DeuxBoites)
        #Le choix final est forcément différent du choix initial... est-il le choix gagnant ?
        if Choix_final == Argent:
            k = k + 1
    return(k/n)

for i in range(20):
    print("Test", i+1, ":", jeu(10000))
```

3. On doit trouver un résultat proche de $\dfrac{2}{3}$.

Corrigé exercice 83 :

1. a. Les variables n'ont a priori pas le même paramètre et donc ne sont pas de même loi, ce qui est une condition d'utilisation de la loi des grands nombres.

   b. Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

   De plus, comme les variables aléatoires X_i sont indépendantes :

$$V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i).$$

   Enfin, pour tout $k \in \{1; \ldots; n\}$, $p_k(1-p_k) \leqslant 1$ d'où $\sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} 1 \leqslant n$ soit $V(S_n) \leqslant n$.

c. Tout d'abord $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i\right|\geqslant\varepsilon\right)=P\left(\left|S_n-\sum_{i=1}^{n}p_i\right|\geqslant n\varepsilon\right)$.
Et, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
$$P\left(|S_n-E(S_n)|\geqslant n\varepsilon\right)\leqslant\frac{V(S_n)}{n^2\varepsilon^2}.$$
De plus, une probabilité est toujours positive et, d'après la question 1.b., $V(S_n)\leqslant 1$. D'où $0\leqslant P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{1}{n^2\varepsilon^2}$. On peut alors en conclure, grâce au théorème des gendarmes, que :
$$\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i\right|\geqslant\varepsilon\right)=0.$$

2. Ce résultat permet d'appliquer la loi des grands nombres dans le cas où les variables aléatoires ont la même loi mais de paramètres différents.

Corrigé exercice 84 :

1. a. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $e\times n!>1$ donc, par décroissance et positivité de $x\mapsto\frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$, $0\leqslant\frac{1}{e\times n!}\leqslant 1$.
   b. Le programme ci-dessous fonctionne, par exemple.

```python
from math import*

def factorielle(n):
    x = 1
    for i in range(1, n + 1):
        x = x*i
    return x

def somme1(n):
    S = 1/exp(1)
    for i in range(1, n):
        S = S + 1/(exp(1)*factorielle(i))
    return(S)
```

   c. On n'obtient aucun résultat pour $n=1\,000$ avec ce programme Python : le programme demande beaucoup trop d'opérations pour se finir. En revanche en le testant pour $n=100$, on constate que cette somme semble tendre vers 1.
   Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant\frac{1}{e\times n!}\leqslant 1$ et la somme des ces $\frac{1}{e\times n!}$ semble tendre vers 1. Ces termes semblent donc être les probabilités des différentes issues élémentaires d'une expérience aléatoire.

2. D'une part, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^n\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4^{n+1}}$ d'où $0\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^n\times\frac{3}{4}\leqslant 1$. D'autre part, le programme Python ci-dessous nous permet de conjecturer que la somme des $\left(\frac{1}{4}\right)^n\times\frac{3}{4}$ tend bien vers 1. On vérifie donc ainsi qu'on a bien défini ainsi une loi de probabilité.

```
def somme2(n):
    S = 0
    for i in range(n):
        S = S + 0.25**i
    return 0.75*S
```

Corrigé exercice 85 :

1. En 2008, le sex ratio était égal à $\dfrac{406\,784}{389\,260} \approx 1,05$.

   En 2018, il était égal à $\dfrac{369\,121}{350\,616} \approx 1,05$. Ce ratio semble donc stable.

2. a. La moyenne des sexes ratio vaut environ $SR \approx 1,048$. On pose alors H le moyenne d'hommes et F le moyenne de femmes dans la population française. On cherche alors $p = \dfrac{H}{H+F}$ ce qu'on peut réécrire $\dfrac{1}{p} = \dfrac{H+F}{H} = 1 + \dfrac{F}{H}$.
   Or $SR = \dfrac{H}{F}$ d'où $p = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{S_R}} \approx 0,512$.

   b. D'après la loi des grands nombres, on peut choisir $p \approx 0,512$ comme estimation de la proportion d'hommes dans la population française.

3. En reprenant l'estimation précédente, chaque variable aléatoire X_i, $i \in \{1; \ldots; n\}$, peut être considérée comme suivant une loi de Bernoulli de paramètres n et $p = 0,488$. On obtient ainsi $E(X_i) = 0,488$ et $V(X_i) = 0,488 \times 0,512 = \dfrac{3\,904}{15\,625}$. Ainsi, d'après l'inégalité de concentration, $P\left(|M_n - E(M_n)| \geqslant 0,1\right) \leqslant \dfrac{3\,904}{15\,625 \times 0,1^2 n}$.

   On doit donc résoudre l'inéquation $\dfrac{3\,904}{15\,625 \times 0,1^2 n} < 0,05$ ce qui donne $n > 499,712$. Ainsi, pour avoir la précision souhaitée, il faudrait interroger au minimum 500 personnes.

Corrigé exercice 86 :

Partie A :

1. D'après l'énoncé $p_1 = 0,2$.

   Pour déterminer p_2 et p_3, on utilise la formule des probabilités totales :

$$p_2 = p(E_1) \times p_{E_1}(E_2) + p(\overline{E_1}) \times p_{\overline{E_1}}(E_2) = 0,2 \times 0,1 + 0,8 \times 0,4 = 0,34$$

   et, de même, $p_3 = 0,298$.

2. Pour tout entier $n > 0$, d'après la formule des probabilités totales

$$p_{n+1} = 0,1p_n + 0,4(1 - p_n) = -0,3p_n + 0,4.$$

3. Pour tout entier $n > 0$, $u_{n+1} = p_{n+1} + \alpha = -0,3p_n + 0,4 + \alpha = -0,3u_n + 0,4 + 1,3\alpha$ car $p_n = u_n - \alpha$. On résout alors $0,4 + 1,3\alpha = 0$ ce qui donne $\alpha = -\dfrac{0,4}{1,3} = -\dfrac{4}{13}$.
   Ainsi la suite (u_n) définie pour tout entier $n > 0$ par $u_n = p_n - \dfrac{4}{13}$ est une suite géométrique de raison $q = -0,3$ et de premier terme $u_1 = 0,2 - \dfrac{4}{13} = -\dfrac{7}{65}$.
4. Comme (u_n) est une suite géométrique de raison $q = -0,3$ et de premier terme $u_1 = -\dfrac{7}{65}$, pour tout entier $n > 0$, $u_n = -\dfrac{7}{65} \times (-0,3)^{n-1}$.
   On en déduit que, pour tout entier $n > 0$, $p_n = -\dfrac{7}{65} \times (-0,3)^{n-1} + \dfrac{4}{13}$.
5. Puisque $-1 < -0,3 < 0$, $\lim_{n\to\infty} p_n = \dfrac{4}{13}$. On peut donc en conclure que la probabilité que le professeur oublie ses clefs un jour tend vers $\dfrac{4}{13}$.

Partie B :

1. Le programme ci-dessous fonctionne, par exemple.

```python
from math import*

n = int(input("n ="))
p = 0.2
for i in range(0, n + 1):
    p = -0.3*p + 0.4
print(p)
```

2. Les valeurs varient évidemment mais on devrait trouver des résultats proches de $\dfrac{4}{13}$.
3. La limite semble valoir approximativement 0,308 ce qui est une bonne approximation de $\dfrac{4}{13}$.