

Una mirada al universo discreto a través de
modelos con autómatas celulares, disertación
sobre el fenómeno de la criticalidad
autoorganizada.

Octavio Rodríguez Vega

16 de octubre de 2022

Índice general

Introducción	III
1. Preliminares	1
1.1. Elementos básicos de la teoría de Autómatas Celulares	1
1.1.1. Ejemplo: el Juego de la Vida de Conway	8
2. Incendios Forestales	15
2.1. Percolación en una retícula	16
2.2. Un modelo determinista para un incendio forestal	18
2.2.1. Descripción del modelo	18
2.2.2. Simulación Computacional	19
2.2.3. Resultados	20
2.2.4. La modelación a escala de un incendio forestal y el fenómeno de la percolación	26
2.3. El modelo de Drossel y Schwabl	28
3. Medios excitables	33
3.1. El AC de Greenberg-Hastings	35
3.2. La reacción de Belousov-Zhabotinsky	38
3.2.1. La oxidación del monóxido de carbono usando óxido de paladio.	45
3.2.2. Resultados	50

4. El modelo de la pila de arena y algunas reflexiones sobre la criticidad autoorganizada	55
4.1. El modelo de la pila de arena	55
4.2. Reflexiones finales	62
A. Recursos Computacionales	69
A.1. Simulación de Modelos con AC	69
A.1.1. Código en Python para el modelo de Drossel y Schawbl .	74
B. Leyes de Potencias	75
Bibliografía	77

Introducción

*One water molecule is not fluid
one gold atom is not metallic
one neuron is not conscious
one amino acid is not alive.
— Jochen Fromm*

En un artículo de la revista *Wired*; titulado *Want to Fight the Zombie Fire Apocalypse? Weaponize Math* [1], publicado en Noviembre del 2020, se hacía referencia a cierto tipo de incendios forestales; llamados *incendios zombie*. Estos, que se caracterizan por parecer extintos durante cierto tiempo, tienen la capacidad de reanimarse después de días incluso. Se distinguen por emerger nuevamente así, como de la nada, debido a ciertos factores en la dinámica del suelo y el material incendiado. La reactivación de dichos incendios, en el lugar, o en zonas aledañas al sitio en donde ocurren por vez primera, han propiciado que se les otorgue ese nombre tan peculiar.

En dicho artículo, se planteaban algunas de las interrogantes alrededor de un evento de esta naturaleza. Los cuestionamientos principales; que tenían que ver con la propagación y esparcimiento de este tipo de incendios, hacían énfasis en saber el tiempo de propagación, así como determinar el lugar exacto de estos

—¿en qué lugares podría aparecer el fuego?—.

Luego, se mencionaba que, un «nuevo» e ingenioso modelo para atender a estas preguntas; o al menos para tener una noción más acertada sobre la dinámica de este tipo de eventos, son los *autómatas celulares* (AC).

Sin embargo; afirmar que los AC representan un modelo nuevo, es relativo. Consideremos que datan de la década de 1950 (finales de los cuarenta, para ser más exactos). Aunque, por otro lado, su utilización en años recientes, es cada vez más frecuente para modelar o reproducir, la dinámica de cierto tipo de fenómenos de gran escala —que no siempre es posible reproducir—, ya sea biológicos, sociales, físicos o químicos [2]. Más aún, algunos de los modelos más sobresalientes con autómatas celulares; y que tratan el fenómeno de los incendios forestales, datan de finales de la década de 1980, así como de principios de los 1990 [3] [4]. En este sentido, el carácter novedoso que se le otorgue a estos modelos, queda sujeto al contexto en el que se enmarquen.

Siguiendo el contenido del artículo de esta popular revista, se mencionaba que una de las bondades de los autómatas celulares —además de las ventajas computacionales que brinda—, es que partiendo de reglas sencillas, y luego de iterar varias veces estos modelos, se puede llegar a observar un «comportamiento emergente».

El concepto de *emergencia* está ligado a los sistemas complejos, y junto con el de *autoorganización*, constituyen piezas fundamentales cuando hablamos de complejidad —un tema bastante extenso por cierto—. De hecho, estos conceptos, suelen tratarse sin distinción, muy a menudo, como lo afirma Sayama en [5].

La emergencia, es una cualidad de ciertos sistemas que tiene que ver con sus propiedades, a diferentes escalas. Un fenómeno emergente no puede predecirse a partir del conocimiento particular, sobre el comportamiento de las partes que lo constituyen.

Así, tenemos ejemplos en la biología, que exhiben estas cualidades. La formación que sigue un conjunto de aves en parvada, en donde no podemos asumir que exista un ave que tome las decisiones de líder y establezca el rumbo del grupo.

En la física, el magnetismo propio de los materiales que cobran vida en nuestro día a día, emerge a partir de la interacción —alineamiento del momento magnético— de billones de electrones.

Los precios en los mercados financieros, son el resultado de la interacción de entes de diversa naturaleza —no precisamente de carácter económico—.

En algunos fenómenos, tales como el de un incendio forestal, el comportamiento fractal de la propagación del fuego, es el resultado de pequeños frentes —de fuego—, que si fuesen estudiados de manera independiente, difícilmente nos proporcionarían una idea certera del comportamiento futuro del sistema, desde un punto de vista holístico.

Es precisamente, en la formación de cierto tipo de patrones fractales, constituidos a partir de la aplicación recursiva de una regla sencilla, en donde cobra sentido el concepto de *autoorganización*.

Algunos sistemas, tienen la capacidad de generar patrones complejos, a partir de modelos sencillos. Un rasgo principal de los sistemas autoorganizados, es que las reglas que producen ese tipo de patrones —fractales—, no necesariamente van a ser explícitas a largo plazo. Esto es, este tipo de sistemas convergen hacia configuraciones que exhiben coherencia a largo plazo, aun sin haber comenzado con dicha configuración. Para ello no requieren que algún parámetro externo sea calibrado; de aquí el término *autoorganización*.

Y aunque el artículo de la revista no desmenuzaba estos conceptos —propios de los sistemas complejos—, al menos los mencionaba y nos invitaba a profundizar sobre estos, en otras fuentes. Al referirse a un fenómeno físico como el de los incendios forestales, y mencionar la gran relevancia que tienen los AC para abordarlos, nos ponía de manifiesto que, con estos sencillos modelos es posible tener un ligero contacto con estos conceptos.

Paralelo a la parte conceptual, luego de mirar al estado del arte —en cuanto a modelos sobre incendios forestales—, podíamos reflexionar entonces: si estos modelos a escala, son reproducibles con limitados recursos computacionales, ¿sería posible hacer algo más tangibles las cualidades de emergencia y criticalidad, a

partir de modelos sencillos, como los que se pueden realizar en una computadora convencional?

Es preciso mencionar que el concepto de *criticalidad autoorganizada* (abreviado como *SOC* en inglés), fue establecido por Per Bak, Chao Tang y Kurt Wiesenfeld, en un artículo de 1987[6].

La noción de *criticalidad* proviene de la termodinámica. En esta disciplina de la física las transiciones de fase ocurren en un *punto crítico*. Así, por ejemplo dos o más fases concurren en un punto, en un diagrama bidimensional, en donde los ejes representan presión y temperatura, respectivamente. Cuando un sistema (llámese un incendio forestal, una reacción química o la actividad cardíaca o neuronal, por mencionar algunos), se acerca a dicho punto crítico, su organización; a escala microscópica, genera una gran cantidad de fluctuaciones debido a interacciones locales. Se dice entonces que el sistema es *invariante en escala*, a nivel macroscópico, cuando se alcanza dicho punto crítico. Es decir que, a medida que el sistema se aproxima a su punto crítico, él mismo calibra sus parámetros hacia un valor específico.

Así el tipo de estructuras que la criticalidad autoorganizada trata de explicar, se asemejan a un sistema termodinámico, acercándose a un punto crítico.

De este modo, un problema de carácter ambiental —como el que trataba este artículo—, nos dejaba entrever algunos temas de estudio, relacionados con los sistemas complejos. En ese sentido, los modelos con autómatas celulares figuran como una herramienta esencial en la simulación de este tipo de eventos. Además de que los AC tienen muchas ventajas computacionales, estas estructuras matemáticas nos permiten visualizar rasgos complejos que se presentan en la naturaleza, y que no siempre es fácil tratar con herramientas como las ecuaciones diferenciales; pues la no linealidad de ciertos fenómenos, los hace un tanto más intrincados.

En este trabajo vamos a abordar ciertos fenómenos —en el contexto de la física y la química— desde la perspectiva de los autómatas celulares. Las simulaciones computacionales a las que hagamos referencia, estarán basadas en

reglas sencillas—operaciones elementales de la matemática—. El objetivo que persigue, es mostrar que a partir de interacciones locales, la evolución de dichos fenómenos nos lleva a observar cierto comportamiento *autoorganizado* en estos sistemas. Así, nuestro interés principal, no consiste en adentrarnos de manera rigurosa a la teoría de la complejidad, ni lograr obtener parámetros —de manera precisa— con los modelos computacionales propuestos (discretización de esos fenómenos). Sin embargo, lo que se pretende mostrar, son las nociones conceptuales detrás de los fenómenos mismos, de forma que nos encaminemos a ellos de manera algo más intuitiva.

En el primer capítulo, exponemos de manera breve la teoría que rige a los autómatas celulares. Ponemos particular énfasis a aquéllos en dos dimensiones. Este capítulo constituye el lienzo sobre el que quisiéramos bosquejar la parte cualitativa y conceptual posteriormente.

En el capítulo 2, mostraremos cómo el fenómeno de la propagación del fuego nos lleva a hablar de criticalidad en un sistema físico. Tomaremos como punto de partida la noción del fenómeno físico de la *percolación*.

En el capítulo 3, exhibiremos la dinámica de los medios excitables. Describiremos un AC que modela este tipo de medios. Se establecerá un vínculo estrecho entre un sistema excitable y el paradigma de la modelación de un agente infeccioso. Esto nos llevará a plantear un ejemplo relacionado con cierta clase de reacciones químicas.

Finalmente, en el capítulo 4, revisaremos el modelo de *la pila de arena*, ejemplo primordial, a partir del cual surge el concepto de *criticalidad autoorganizada*. Con este modelo, pretendemos aproximarnos a ciertas nociones, que tienen que ver con la complejidad en un sistema. Aprovecharemos la riqueza conceptual con la que cuenta este modelo, para tratar de establecer algunas reflexiones, sobre los alcances y las limitaciones, cuando intentamos recrear fenómenos naturales usando este tipo de paradigmas.

Con la intención de servir como apoyo, en el desarrollo conceptual y numérico, hemos incluido algunos modelos computacionales en la sección *apéndice*. Estos

recursos basados en AC, pueden servir para lograr una mejor visualización en la evolución de los fenómenos que se abordan en este trabajo.

CAPÍTULO 1

Preliminares

*If people do not believe that
mathematics is simple,
it is only because they do not realize
how complicated life is.
— John von Neumann*

1.1. Elementos básicos de la teoría de Autómatas Celulares

Los autómatas celulares (muchas veces nos referiremos a estos de forma abreviada como *AC*), son modelos cuyas variables toman valores discretos en tiempo y espacio. Se asemejan a una especie de máquinas, que evolucionan a partir de una configuración inicial.

La idea original de este tipo de modelos, data de finales de la década de 1940. John von Neumann fue quien comenzó a sistematizar la teoría de autómatas. En una serie de escritos, contenidos en su *Theory of Self-Reproducing Automata*, von Neumann daba a conocer algunos argumentos para la creación de modelos que se replicaran a sí mismos (*self-reproducing automata*) [7].

Mediante un mecanismo constructor y una instrucción, su idea de *auto-replicación*, era bastante similar al proceso de división celular; en donde las instrucciones (DNA) se copian de las células precedentes a aquella que efectúa la división celular.

Aunque von Neumann establecía por aquellos años la noción de *autómata*, su implementación no era posible en ese tiempo; debido a la falta de potencial tecnológico.

Fue Stanislaw Ulam quien sugirió a von Neumann construir su autómata *auto replicante* utilizando el concepto de *autómata celular* como se conoce en la actualidad.

A través de estas entidades, podemos estudiar fenómenos relacionados con enfermedades infecciosas, incendios forestales y medios excitables, por mencionar sólo algunos.

Estructuralmente, un AC es un arreglo de celdas. Así, podemos concebirlos en una, dos o más dimensiones. En este trabajo abordaremos modelos que utilizan AC bidimensionales, exclusivamente.

Una definición provisional de un AC, podría ser la siguiente.

Un AC consiste de una retícula; que es un arreglo regular de celdas cuadradas, triangulares o hexagonales. En donde cada celda tiene un estado. Dicho estado se actualiza en cada unidad de tiempo; de acuerdo a una regla o función de actualización.

Con *arreglo regular*, nos referimos a que todas y cada una de las celdas son idénticas —independientemente de la forma que tengan—. En la figura Fig. 1.1 mostramos algunas porciones de distintas retículas regulares.

En lo subsecuente, trabajaremos con retículas cuyas celdas son cuadradas (Fig.

1.1. ELEMENTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE AUTÓMATAS CELULARES³

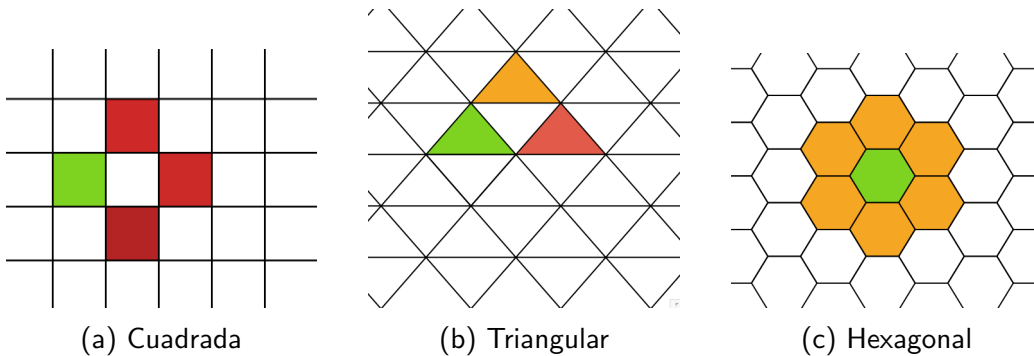


Fig. 1.1: Algunos tipos de retículas bidimensionales

Se muestran algunas porciones de retículas regulares. (a) Celdas cuadradas, (b) Celdas triangulares, (c) Celdas hexagonales

Los colores de las celdas son ilustrativos, estos pueden denotar un valor o característica para la celda en cuestión.

1.1a). Las retículas con celdas triangulares y hexagonales; si bien están presentes en la modelación de diferentes fenómenos, no se emplearán en los modelos que aborda este trabajo.

La variable temporal, con la que evoluciona un AC, son unidades discretas, i.e $t = 0, 1, 2, \dots$

En cualquier instante t , una celda puede tener únicamente un *estado*. Este único estado para una celda, se toma a partir de un subconjunto finito.

El estado de una celda en el instante $t + 1$, depende del valor de su propio estado en el instante previo (i.e en t), así como del que tengan las celdas vecinas a esta.

En cada unidad de tiempo, se aplica la regla de actualización a todas las celdas de la retícula de manera sincrónica.

Para cada celda x de la retícula, consideraremos su *vecindad*, esto es el conjunto de celdas adyacentes a x (mediante un lado o un vértice).

Al conjunto de celdas que tienen contacto con la celda x ; ya sea mediante un vértice o un lado, se le llama la *vecindad de Moore* de x . Este tipo de vecindad se muestra en la Fig. 1.2.

Otro tipo de vecindad, la constituyen las celdas situadas en los puntos cardinales de x (al norte sur este y oeste de x). Esto es, aquéllas que tienen contacto sólo mediante un lado con la celda x . A este otro tipo de vecindad, se le conoce como la *vecindad de Von Neumann*¹, y se muestra en la Fig. 1.3.

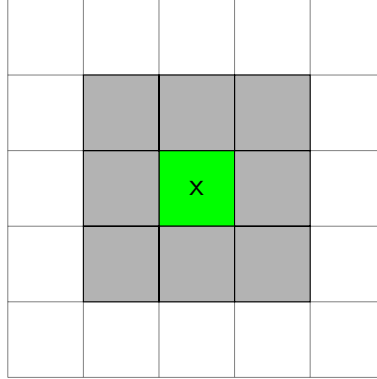


Fig. 1.2: Vecindad de Moore de una celda x .

La *vecindad de Moore* de x , esta formada por las 8 celdas vecinas de x que comparten, ya sea un vértice o un lado con la celda central x .

A continuación, estos elementos que definen a un AC, se resumen de manera un poco más formal.

Definición 1. *Retícula.*— Una retícula de dimensión d ; que denotaremos como \mathcal{L}^d , es un arreglo de celdas c . En donde c está indexada mediante una tupla de enteros, (i_1, \dots, i_d) .

En la figura Fig. 1.4, se muestra un ejemplo de una retícula bidimensional, \mathcal{L}^2 de tamaño 10 por 10.

Cuando nos referimos a una celda en particular de esta retícula \mathcal{L}^2 , lo hacemos a través de sus índices (i, j) .

En ocasiones, vamos a considerar a la retícula como un toro plano, esto es; de manera que la continuación del extremo derecho sea la primera columna de la

¹En [7], von Neumann establece que la comunicación entre las celdas, en el modelo de *estructura celular*, se da a través de los cuatro vecinos contiguos, refiriéndose a este tipo de vecindad.

1.1. ELEMENTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE AUTÓMATAS CELULARES5

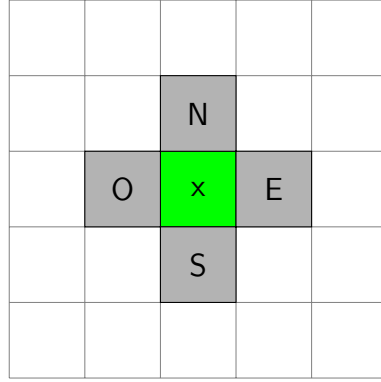


Fig. 1.3: Vecindad de von Neumann de la celda x

La *vecindad de von Neumann* de x , es el conjunto de celdas vecinas (al norte, sur, este y oeste de x)

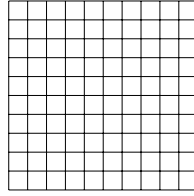


Fig. 1.4: Una retícula de 10 por 10 celdas

retícula, y que el borde superior sea la continuación del extremo inferior (último renglón de la retícula), como se observa en la Fig. 1.5. Esto permitiría que las celdas situadas en los bordes de la retícula también jueguen un papel dentro de la dinámica del sistema que se esté modelando.

Como ya mencionamos, la localidad de cada celda, es una característica importante al hablar de AC, a continuación, formalizamos las nociones de vecindad.

Definición 2. *Vecindad de una celda.*— Es una función $N : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}^n$, dada por

$$c \longrightarrow N(c) = \{c_1, \dots, c_n\},$$

i.e, a cada celda c , la función N , le asocia las n celdas más cercanas. El tamaño de la vecindad está dado por $n \in \mathbb{N}$. La vecindad $N(c)$ de la celda c , puede o no contener a c .

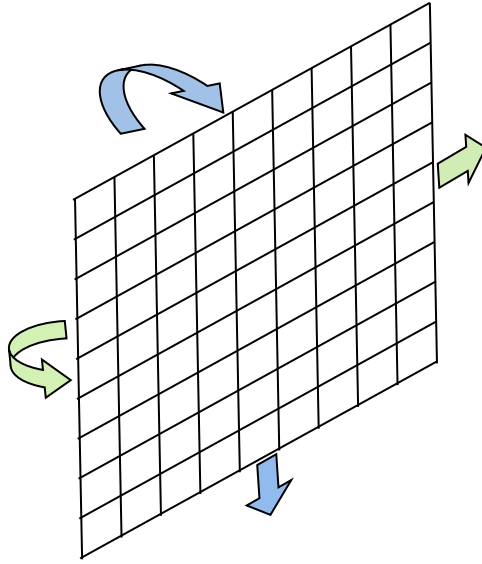


Fig. 1.5: Retícula vista como un toro plano

Cuando consideramos a una retícula como un toro plano, esta se dobla como una hoja de papel, de manera que podríamos «pegar» los bordes.

El tipo de vecindad con la que opere un autómata celular dependerá, en gran medida, del fenómeno que se esté modelando. En algunos casos será conveniente usar la vecindad de Moore (Fig. 1.2), en otros la de von Neumann (Fig. 1.3).

Otra de las nociones a tener en cuenta en la dinámica de algunos sistemas modelados con AC, será el de la *trayectoria* que exista entre dos celdas c y c' en \mathcal{L} , misma que denotaremos como (c, c') .

Definición 3. *Trayectoria entre dos celdas.*— *Cualquier poligonal que empiece en c y termine en c' , formada por uno o más segmentos de recta que unen los centros de celdas adyacentes.*

Desde luego, podemos definir más de una trayectoria entre c y c' . Al conjunto de todas las posibles trayectorias entre dos celdas lo denotaremos como $\mathcal{C}(c, c')$.

Cada trayectoria de c a c' , tiene una longitud $\ell(c, c')$, que a su vez, está dada por el número de celdas por las que atraviesa.

1.1. ELEMENTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE AUTÓMATAS CELULARES⁷

Definición 4. *La distancia entre dos celdas de la retícula se define como*

$$L(c, c') = \min\{\ell(c, c') \mid (c, c') \in \mathcal{C}(c, c')\}$$

Definición 5. *Radio de la vecindad.— El radio r de $N(c)$ es el entero positivo más pequeño tal que*

$$\forall c_i \in N(c), L(c_i, c) \leq r, \forall i = 1, \dots, n.$$

Definición 6. *Conjunto de estados.— Es un subconjunto ordenado y no vacío de \mathbb{N} , en el que cada valor corresponde a un estado, lo denotamos como S .*

Generalmente, la cardinalidad de este conjunto es pequeña. Los modelos que abordaremos en los siguientes capítulos, tienen como máximo 4 estados ².

En la mayoría de casos, este conjunto es cíclico y el estado de una celda va a tomar un valor módulo k , en donde k es la cardinalidad de S .

La dinámica de un AC está propiciada por la *regla de actualización*, que generalmente está dada como una lista de reglas.

Definición 7. *Regla de Actualización.— Es una función $f : S^n \rightarrow S$, dada por*

$$s_t(N(c)) \rightarrow s_{t+1}(c),$$

en donde $s_t(N(c))$ es el estado de la vecindad $N(c)$ al tiempo t , mientras que $s_{t+1}(c)$ denota el estado de la celda c al tiempo $t + 1$.

Con estas definiciones, la ecuación

$$s_{t+1}(c) = s_t(N(c)), \tag{1.1}$$

representa la regla de evolución de un AC. Esta expresión está dada en función de la retícula \mathcal{L}^d , la vecindad N y del conjunto de estados S .

²Cabe mencionar que von Neumann, en [7], consideraba un conjunto de 29 estados para las celdas.

Con los elementos que acabamos de establecer, definimos un AC de la siguiente manera.

Definición 8. *Un autómata celular es una tupla $\mathcal{A} = (\mathcal{L}, S, N, f)$, en donde \mathcal{L} es una retícula regular, S es el conjunto de estados, N es la vecindad y f es una regla de actualización.*

1.1.1. Ejemplo: el Juego de la Vida de Conway

Mencionamos anteriormente, que el origen de los autómatas celulares se remonta aproximadamente al año de 1950. Sin embargo, el interés popular hacia estas estructuras, surgió a partir de una publicación de Martin Gardner en la revista *Scientific American*, de 1970 [8]. En esa edición, se hacía alusión a un AC llamado *Game of Life*, creado por el matemático John Horton Conway.

Vamos a describir, en qué consiste este AC.

Consideremos una retícula regular de celdas \mathcal{L}^2 . Suponemos que tenemos dos estados; uno al que llamaremos *vivo* y otro, que será *muerto*. Así mismo, consideraremos la vecindad de Moore (Fig. 1.2), en cada iteración de este AC, vamos a aplicar las reglas que enunciamos a continuación.

- Si una celda viva tiene 2 o 3 vecinos vivos, entonces permanecerá en estado *vivo* para la siguiente generación, de otro modo pasará a estado *muerto*.
- Si una celda en estado *muerto*, tiene exactamente 3 vecinos vivos, entonces cambiará su estado a *vivo* en la siguiente generación (como si resucitara por el hecho de tener compañía).

En la figura Fig. 1.6, mostramos cómo evoluciona un arreglo sencillo de celdas, cuando aplicamos las condiciones anteriores (regla de Conway).

A una configuración que se repite, cuando aplicamos sucesivamente la regla de actualización, se le llama *oscilador*. Dependiendo del número de iteraciones necesarias, para que cierta configuración se repita, diremos que esta es de periodo

1.1. ELEMENTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE AUTÓMATAS CELULARES 9

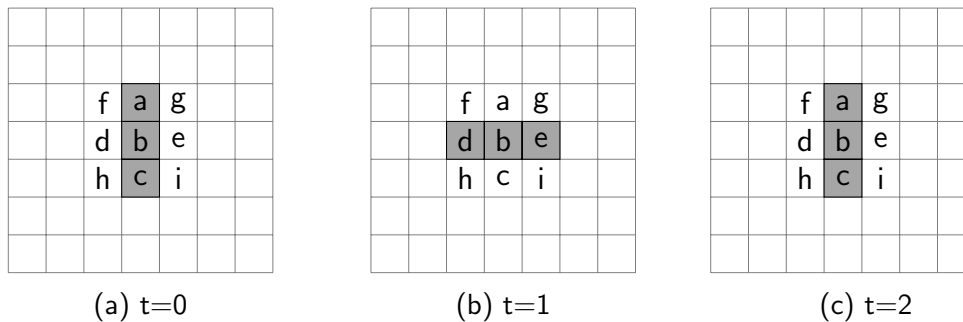


Fig. 1.6: Oscilador de periodo 2

Un arreglo de celdas sobre una retícula para mostrar cómo opera la regla de Conway.

Aparecen sombreadas las celdas *vivas*.

En la primera retícula (a), aparecen vivas las celdas **a, b, c**. Observe que **f, g, h & i**, no cambian su estado (en $t = 1$), en cambio, **d & e**, sí reviven.

En (b), obtenemos la figura de la configuración inicial ($t = 0$), pero rotada. Aquí la celda **b**, va a permanecer viva en $t = 2$, mientras que, tanto **a** como **c**, revivirán.

En (c), hemos recuperando la configuración con la que empezamos ($t = 0$).

p , en donde p es el número de iteraciones. Así, la figura que presentamos en Fig. 1.6, es una de periodo $p = 2$.

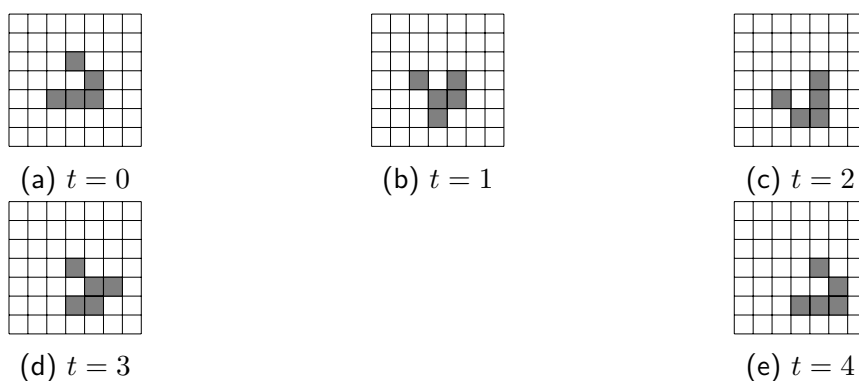
Habrán figuras que tienen periodo 1 —i.e que no cambian para nada al aplicar la regla de evolución—, a dichos arreglos se les conoce como figuras estacionarias o *Still Lives*.

Algunos osciladores, cambian su posición en la retícula; de tal forma que parece que se desplazan o caminan sobre esta. A este tipo de osciladores que se mueven, se les conoce como *gliders*. Mostramos un *glider* de periodo $p = 4$, en la Fig. 1.7.

A partir de la popularización del *juego de la vida* de Conway, se comenzaron a estudiar una gran variedad de formas, que nos llevan a observar comportamientos muy variados de este AC. Así, nos encontramos con diversos tipos de *osciladores*, *gliders* o *still lifes*.

Un ejemplo de un *still life*, es el que se muestra en Fig. 1.8, este oscilador de periodo uno, está formado por 5 celdas.

Para referirse a este tipo de estructuras, se adoptaron ciertos nombres muy

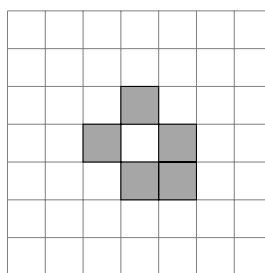
Fig. 1.7: *Glider* (Oscilador de periodo 4)

La figura inicial(a), se desplaza en *dirección* $(1,-1)$, después de 4 unidades de tiempo. Al aplicar la regla de Conway a la figura (a), observamos que hasta cuarta iteración ($t = 4$), se obtiene la misma figura, pero desplazada una unidad a la derecha y una unidad hacia abajo en la retícula. Por lo que este es un oscilador de periodo $p = 4$.

peculiares, por ejemplo *Spaceships*, *Eaters* o *Blinkers*, etcétera.

Para un estudio más detallado de algunas propiedades de estos objetos, consideramos que [9], es un buen recurso.

Más aún, para tener noción sobre la clasificación —una tanto más taxonómica— que existe sobre las figuras que emergen en el *Juego de la vida*, creemos que un buen compendio es el que encuentra en [10].

Fig. 1.8: *Boat*

El único *still life* que se conoce con 5 celdas.

Este ejemplo —*Game of Life*— resulta bastante ilustrativo a la hora de estudiar la evolución de un AC, cuando se aplican una conjunto de reglas sencillas.

1.1. ELEMENTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE AUTÓMATAS CELULARES¹¹

Constituye *el ejemplo* primordial para observar la emergencia de patrones que no es fácil predecir, dada una configuración inicial.

A través de este modelo, podemos identificar algunos aspectos importantes en la evolución de un sistema complejo, discreto en tiempo y espacio.

Observamos que resulta difícil determinar cuándo una estructura arbitraria va a crecer de manera indefinida. No podemos saber —de forma más o menos trivial— qué figuras o configuraciones iniciales van a estar en constante expansión, o cuáles son aquéllas que morirán de manera súbita en el proceso iterativo.

Así mismo, existirán patrones sencillos, que evolucionen, luego de muchas iteraciones, para después llegar a establecerse de manera oscilatoria en una configuración sencilla, de forma indefinida.

Si bien este AC no representa un juego —en el sentido lúdico—, pues su evolución depende de la configuración inicial que se tenga, nos acerca al comportamiento complejo de un sistema.

La cercanía que tiene con un sistema biológico, al establecer un modelo poblacional de crecimiento o decrecimiento en el número de individuos que lo componen, está dado por la dinámica local de estos componentes.

Por otro lado, este ejemplo muestra cualidades que tienen que ver con aspectos de *universalidad* en cuanto a computabilidad, como lo afirma Ilachinski en [9].

Sobre este último aspecto, —y dada la intención que este ejemplo persigue para este capítulo—, podemos comentar que la evolución del *juego de la vida*, muestra los mismos aspectos sobre el límite en la ejecución de un programa en Computación.

La modificación de esta regla —la de Conway— puede llevarnos a observar un comportamiento distinto, en donde se observa una explosión en el crecimiento de celdas vivas. Un claro ejemplo, es el AC que usa una regla denominada 2/2. Aquí las celdas vivas permanecerán vivas con dos vecinos exactamente a su alrededor, mientras que una celda muerta revive con la presencia de dos vecinos vivos.

La regla 2/2 —similar de la regla de Conway— es la siguiente.

- Si una celda viva tiene 2 vecinos vivos, permanece viva en la siguiente generación — de otro modo, muere—.
- Si las celdas que no están vivas —en estado muerto—, tienen exactamente 2 vecinos vivos, pasan a estado vivo en la siguiente generación.

Usando dicha regla, casi siempre es posible obtener *gliders* con un reducido número de celdas vivas o bien, con sólo unas cuantas celdas vivas al inicio; podemos obtener un sistema que se expande rápidamente (Fig. 1.9).

En el apéndice [A](#), encontrará las instrucciones para experimentar con el AC; tanto del Juego de la vida, como del que usa la regla 2/2. Sugerimos ampliamente su consulta.

1.1. ELEMENTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE AUTÓMATAS CELULARES13

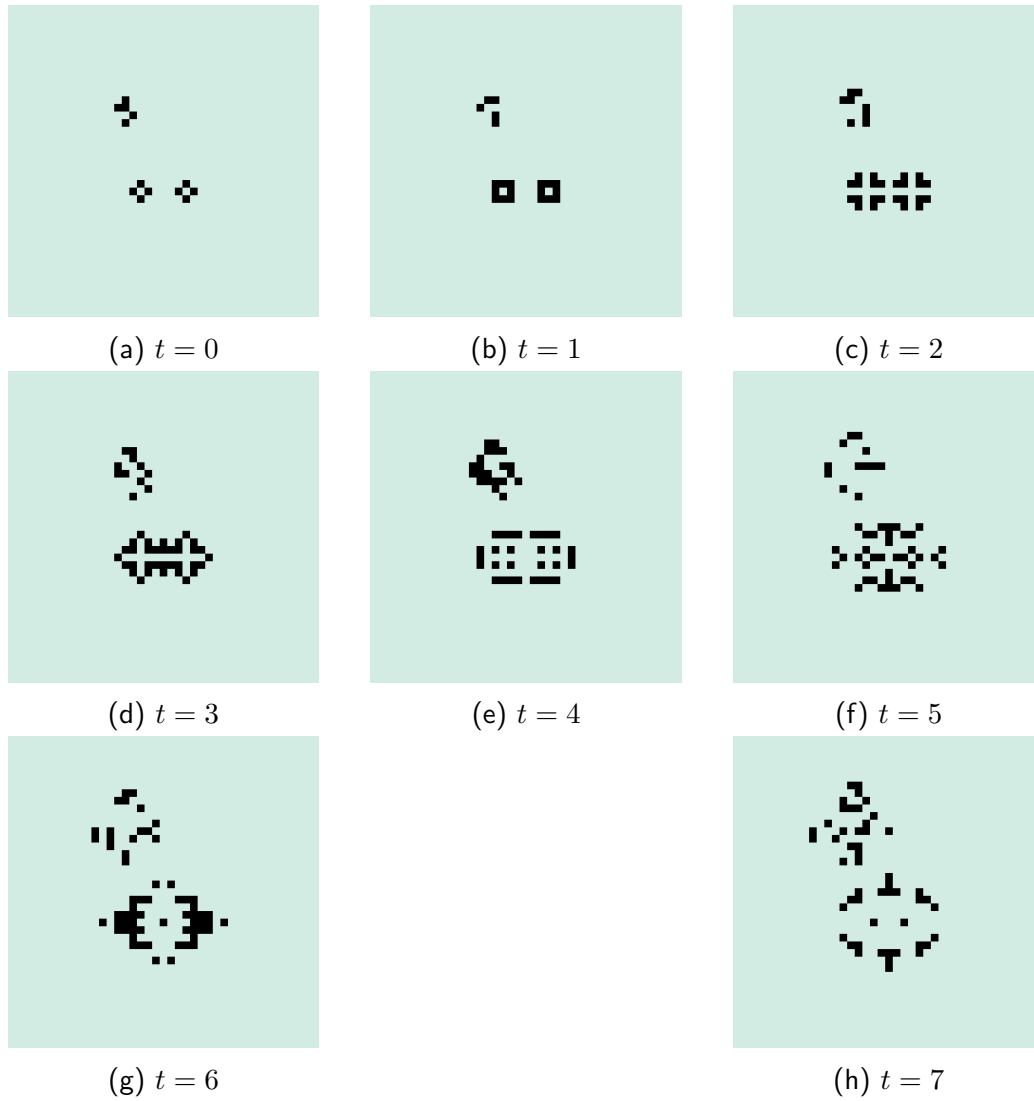


Fig. 1.9: AC que usa la regla 2/2

Se muestran las primeras 7 iteraciones de la regla 2/2 a partir de una configuración inicial arbitraria. Aquí podemos observar la expansión de celdas vivas rápidamente.

CAPÍTULO 2

Incendios Forestales

*Gris es toda teoría y verde el áureo
árbol de la vida.*
— Johann Wolfgang von Goethe

Uno de los fenómenos que podemos representar mediante un AC, es el de la propagación del fuego sobre un área determinada —pensemos en un bosque, por ejemplo—. En este capítulo revisaremos ciertos modelos que utilizan a un AC para simular este fenómeno.

Para modelar este fenómeno, podemos usar reglas de evolución sencillas —deterministas y también estocásticas—.

Este tipo de sistemas, pueden exhibir un comportamiento crítico (en el sentido de que a partir de ciertos valores en sus parámetros, el sistema va a presentar un comportamiento límite).

Aunado a esto, es posible distinguir el fenómeno de percolación sobre una retícula; que hace que este fenómeno se pueda concebir como un objeto fractal.

Cabe mencionar que, para hablar de *criticalidad* y *autoorganización*, se requiere de un amplio conocimiento de diversos aspectos teóricos —mismos que no siempre son fáciles de abordar y su tratamiento requiere ciertas sutilezas—. En este capítulo se abordarán estos aspectos de manera general.

Para ello, nos apoyaremos en la simulación computacional que se nos permita hacer de estos modelos. En esa línea, primero vamos a aproximarnos al concepto de percolación.

2.1. Percolación en una retícula

Consideremos una retícula \mathcal{L}^2 (Fig. 2.1a). Sobre esta, marcamos algunas celdas con una x en el centro (ver Fig. 2.1b), y dejamos vacías las restantes.

Definimos un *bloque*, como una agrupación de celdas que están marcadas con una x y que además, forman parte de una vecindad de von Neumann —con otras celdas marcadas—. Esto es, un bloque van a estar formado por celdas marcadas, pero que a su vez compartan un lado en común con otras del mismo tipo.

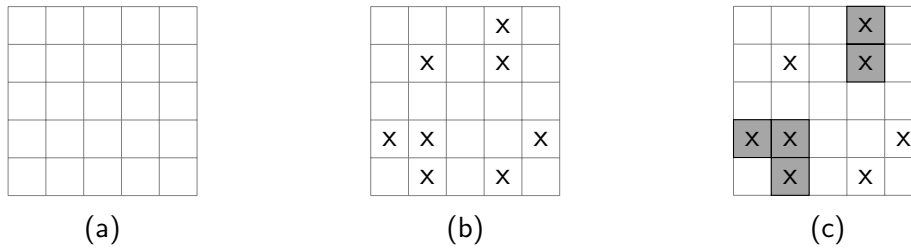
Para identificar estos bloques, hemos sombreado dichas celdas, como se muestra en la figura Fig. 2.1c.

La teoría de *percolación*, estudia las propiedades que tienen estos bloques, así como cuántas de estas estructuras surgen en un sistema dado.

Con este sistema podemos obtener —en la medida de lo posible— un umbral de percolación para el sistema.

Antes de proceder a describir el fenómeno que nos ocupa, debemos hacer algunas consideraciones en la formación de estos bloques.

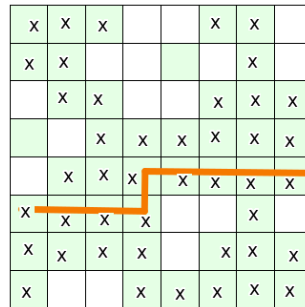
La configuración con celdas marcadas o vacías, surge de manera aleatoria, esto no depende de la vecindad en donde se encuentre una celda marcada con una x . Entonces la ubicación de una celda x no induce que una del mismo tipo aparezca lejos o cerca de esta.

Fig. 2.1: Formación de *bloques*

(a) una retícula vacía; en (b) algunas celdas aparecen marcadas con x; en (c) aparecen sombreadas las celdas que forman cada *bloque*.

Decimos que p es la probabilidad de que una celda esté ocupada por una x y $(1 - p)$ la probabilidad de que esté vacía.

Luego de hacer estas observaciones, ahora supongamos una situación similar a la que acabamos de describir, pero ahora, con una retícula como la que se muestra en la figura Fig. 2.2.

Fig. 2.2: Formación de un bloque en una retícula de 8×8

Sobre esta retícula, aparecen celdas de dos tipos distintos; que hemos denotado de color verde y otras que aparecen vacías —utilizar los estados vivo y vacío, respectivamente, resultaría similarmente conveniente—.

Elegimos, de manera aleatoria, una celda verde y la marcamos. Cuando hacemos esto, y con la intención de generar bloques, ahora debemos marcar aquellas celdas que están en la vecindad de von Neumann de cada celda marcada con una x . De este modo se formará un gran bloque de celdas marcadas, tal y como se

muestra en Fig. 2.2.

Observe que a través de las celdas «x», podemos trazar una trayectoria, para ir de un extremo a otro en la retícula. Una de estas se muestra en color naranja en la figura —podrían existir más de una—.

Mediante este camino, podemos unir un punto en el extremo izquierdo de la retícula con un punto en el extremo derecho de la misma.

Podríamos hacer lo mismo para unir una celda de la primera fila con alguna en la última fila de la retícula. La intención es generar una trayectoria de celdas en estado «vivo» que conecte a ambos extremos de la retícula.

Si denotamos con p , la probabilidad de que una celda sea del tipo *vivo*, cuando p es grande, entonces la existencia de una trayectoria que cumpla con la función de unir dos extremos opuestos de la retícula, es mayor.

Sin embargo, cuando esta probabilidad p es pequeña, esto no siempre será posible.

De aquí, surge la importancia de investigar un valor umbral para p , (llamado el *umbral de percolación*). Uno a partir del cual podamos establecer, qué tan probable será poder obtener dicha trayectoria —al menos una—.

Con este razonamiento, resulta conveniente analizar un modelo para un incendio forestal.

Aquí surgen las nociones de percolación, pero desde el punto de vista de la propagación del fuego sobre una retícula.

2.2. Un modelo determinista para un incendio forestal

2.2.1. Descripción del modelo

Utilizaremos un autómata celular con reglas deterministas para simular la propagación del fuego en un bosque. Nuestro objetivo será observar cómo se comporta la propagación del fuego, a partir de la formación de ciertos bloques

—con material combustible—. En dado caso, obtener un umbral de percolación, con las vecindades de von Neumann y de Moore.

Contamos con tres tipos de celdas —estados—. Dos de estos estados hacen referencia a un árbol (vivo o en llamas) y un tercer estado, denota la ausencia de estas especies —esto lo haremos mediante una celda vacía—.

Entonces, definimos tres estados para las celdas;

$$\mathcal{S} = \{\text{arbol}, \text{fuego}, \text{vacio}\}$$

La dinámica del modelo será la siguiente: el fuego se propagará desde las celdas en estado *fuego*, hacia las celdas en estado *árbol*. Siempre que una celda *árbol* tenga a un vecino en llamas, la primera se incendia en la siguiente unidad de tiempo.

Una celda en llamas no puede incendiarse nuevamente, se quema en el instante t y pasa a estado *vacío* en $t + 1$, es decir se hace cenizas. Así, descartamos la posibilidad de que el fuego se propague a través de las celdas vacías.

Usaremos, en principio la vecindad de von Neumann —posteriormente la de Moore—.

Enunciemos las reglas con las que evolucionan las celdas de este modelo:

1. Una árbol se incendia, si hay alguna celda en estado *fuego* en su vecindad.
2. Un árbol incendiado pasa a *vacío* en la siguiente generación.
3. Una celda en estado *vacío* permanece en ese estado.

Estas reglas se resumen en la figura Fig. 2.3, en donde mostramos la transición de estados.

2.2.2. Simulación Computacional

Sobre una retícula de 250 por 250 celdas, representamos con celdas de color verde los árboles vivos. Con celdas de color rojo a los árboles que se encuentran en llamas. Mientras que los sitios vacíos, aparecen con celdas oscuras.

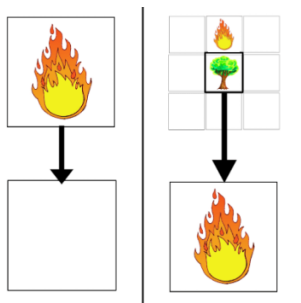


Fig. 2.3: Las reglas de evolución para un modelo de incendio forestal.

Cada tipo de celda se denota con un dibujo en el centro (las celdas vacías aparecen en blanco).

Las celdas en los bordes no juegan un papel preponderante en la dinámica de este modelo.

Suponemos que al inicio se tiene una configuración inicial, formada por una columna de celdas rojas, tal como se muestra en la figura Fig. 2.4a. Por otro lado, colocaremos algunos árboles sobre la retícula, de manera aparezcan distanciados por algunas celdas vacías. No pretendemos tener una densidad del 100 % de árboles vivos al inicio, pues queremos que nuestra retícula tenga cierto apego a un bosque, como es en realidad.

Si consideramos a p como la probabilidad de que una celda tenga un árbol plantado; en donde $p \in (0, 1)$. Entonces, si especificamos un cierto valor para p al inicio, los árboles van a aparecer espaciados con lugares vacíos entre ellos.

2.2.3. Resultados

Hicimos algunas simulaciones de este modelo, con diferentes densidades de árboles vivos al inicio.

Pudimos observar que cuando p es cercano a 0, la propagación del fuego es un evento de corta duración. Cuando están demasiado espaciados los árboles, difícilmente se transmite el fuego entre estos, el fuego se extingue rápidamente.

Por otro lado, a medida que el parámetro p toma valores más grandes, el fuego

se esparce a través de trayectorias formadas por árboles vivos. Incluso algunas veces llegando al lado opuesto de donde inició el fuego, otras veces estancándose en algún sitio al interior de la retícula.

Observaciones más específicas sobre el parámetro p , muestran que, cuando este se encuentra cerca de 0.5 (por debajo de este valor), el fuego se queda *atascado* en ciertas áreas de la retícula como se aprecia en la Fig. 2.4c.

Una situación similar ocurre cuando $p = 0.59$. Sin embargo, en este caso, existen algunas simulaciones en las que el fuego penetra hasta el extremo derecho de la retícula (opuesto a la columna inicial de celdas rojas), como se observa en la Fig. 2.4b.

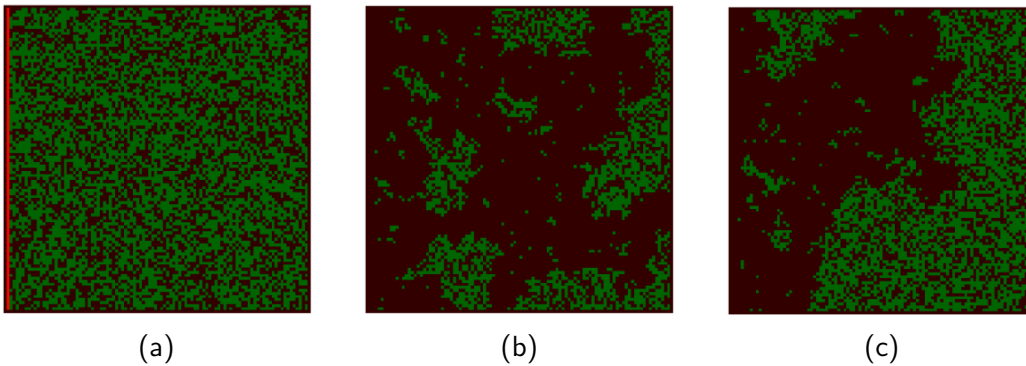


Fig. 2.4: AC del modelo de incendio forestal, con una densidad $p = 59\%$. En (b) se observa que el fuego alcanza a destruir los árboles del extremo derecho de la retícula, mientras que en (c) el fuego deja de propagarse en algún sitio al interior de la retícula.

Con las suposiciones hechas en la descripción del modelo, así como con estas primeras observaciones, nos propusimos a determinar los tiempos de propagación del fuego —duración del incendio—. Importante es mencionar que consideramos finalizado este evento, cuando ya no hay celdas en llamas sobre la retícula.

Se realizaron diversas simulaciones con diferentes densidades (p). De esta manera, la densidad con la que pudimos observar un fenómeno cercano, cualitativamente, a la percolación, sucedió cuando la densidad inicial fue de 59 % de árboles vivos.

Con densidades por debajo de este valor, pudimos registrar tiempos de propagación muy diversos (ver Fig. 2.5).

Con un rango de densidades para p del 40 al 80 %, hicimos 10 simulaciones para cada uno de estos valores. En este mismo cuadro, se muestra la cantidad de árboles; vivos al inicio, y quemados al final del incendio. Las unidades que consideramos para la duración del evento, t , han sido horas.

En el cuadro de la Fig. 2.6, se aprecian estas mismas mediciones, cuando nuestro algoritmo usa la vecindad de Moore.

densidad de árboles (p)	árboles al inicio	árboles quemados	duración (t)
40	25118	259	26
45	28235	397	37
50	31407	827	62
55	34448	2139	133
60	37659	21767	527
65	40771	38488	411
70	43947	43059	358
75	47065	46750	328
80	50220	50110	308

Fig. 2.5: Datos obtenidos para el modelo de incendio forestal usando la vecindad de von Neumann

Cuando $p = 60$, el fenómeno extiende su duración de manera «indefinida». Para cada valor de p , se realizaron 10 simulaciones del AC. En la tabla se reporta el promedio de dichas mediciones.

Una forma de establecer un comportamiento relativo al fenómeno de la percolación del fuego, es obtener la relación entre el número de árboles que hay al inicio y la duración del evento. Esta relación establece que, cuando se tenga el suficiente material combustible en la retícula, entonces podríamos tener un evento con mayor duración.

Así, cuando graficamos la duración del incendio contra la densidad de árboles al inicio del evento, obtenemos una gráfica como la que se muestra en la Fig.

densidad inicial de árboles (p)	árboles al inicio	árboles quemados	duración (t)
40	25162	8044	288
45	28246	26476	325
50	31368	30802	279
55	34501	34300	271
60	37723	37663	267
65	40796	40771	265
70	43941	43932	264
75	47070	47068	264
80	50196	50196	263

Fig. 2.6: Datos obtenidos en la simulación el modelo de incendio forestal usando la vecindad de Moore

Aquí se observa una «subida» en la duración del evento, que ocurre cuando $p = 45$.

2.7.

Decimos que $p = 0.6$, representa un valor «crítico»(cuando consideramos como vecinos los puntos cardinales a cada celda). Cerca de este valor, la duración del incendio se extiende indefinidamente.

Si denotamos denotamos con p_c al valor umbral para la densidad p , —llamado el *umbral de percolación* del fuego—, tenemos que, con valores por arriba de p_c podríamos observar una camino que conecte el extremo izquierdo, con el derecho de la retícula del autómatas que acabamos de utilizar.

Este camino o trayectoria será la mínima y no será una línea recta sino trayectorias rectas por pedazos (conectando lugares en existe un árbol plantado).

Cuando $p_c = 0.6$, se comienza a formar un bloque infinito —el conjunto de celdas rojas en este modelo—, que nos permite observar la percolación del fuego en el sistema.

Por arriba de este umbral, el fuego se propaga dejando a la mayoría de árboles quemados y por debajo de este el fuego sigue un comportamiento fractal, para

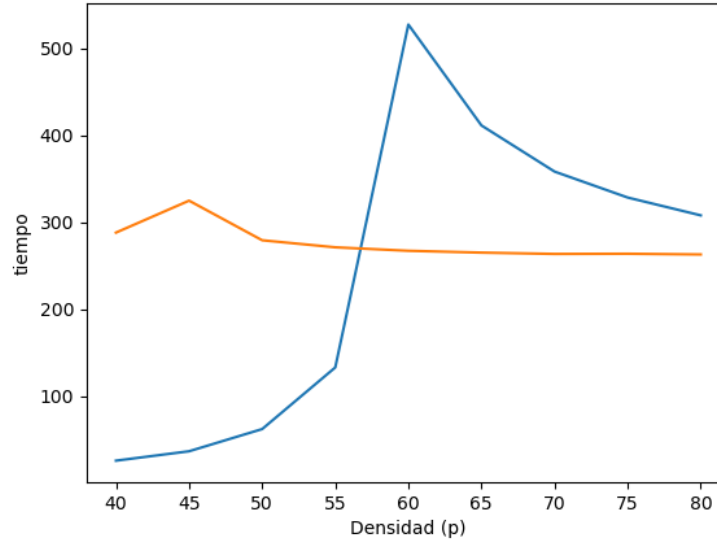


Fig. 2.7: Duración promedio de un incendio forestal sobre una retícula de 250 x 250 celdas.

Se muestra la duración del incendio con distintas densidades de árboles en la retícula. La curva azul corresponde a un AC que usa la vecindad de von Neumann; mientras que la curva color naranja se refiere a uno que usa la vecindad de Moore.

después extinguirse de manera espontánea.

Ahora, cuando se considera la vecindad de Moore, este valor crítico estaría cerca de 0.45. Esto resulta consistente en el sentido que, al considerar no sólo a los vecinos cardinales de una celda, sino también a aquéllos que hacen contacto mediante sus vértices —vecinos en diagonal—, el fuego se propagaría hacia más lugares —celdas—, así el valor para p_c resulta menor.

Siguiendo la teoría de percolación, expuesta en [11], la relación entre la distancia del valor para p_c y la densidad p , con el tamaño del bloque —número de celdas en llamas— nos llevaría a determinar los exponentes críticos del sistema mediante la expresión.

$$S \propto \frac{1}{p_c - p}, \quad (2.1)$$

cuando p se aproxima a p_c por la izquierda.

Decimos que esta relación es un ejemplo de un *fenómeno crítico* en el sentido que, las cantidades que nos interesan se van a cero o infinito —en este caso la variable temporal parece divergir— mediante *leyes de potencias*.

Así, cuando consideraremos los valores de p , menores a $p_c = 0.6$, podemos establecer la siguiente ecuación para determinar el exponente crítico γ para este sistema,

$$S \sim |p - p_c|^{-\gamma} \quad (2.2)$$

en donde S representa el número de árboles quemados al final de la propagación del fuego (calculado al final de cada una de las simulaciones).

Usando los datos de la tabla de la Fig. 2.5, graficamos el tamaño del bloque S , contra la distancia entre p y p_c , y hacemos

$$\epsilon = |p - p_c|$$

Considerando que, tomamos en cuenta los valores de $\epsilon > 0$, hemos representado estos datos en la gráfica de la Fig. 2.8.

Sustituyendo los valores de S , en la ecuación 2.2, obtenemos que $\gamma = 2.75$, valor que caracterizamos como la pendiente de la recta obtenida en esta gráfica. Observe que el valor de la pendiente es negativa, por lo que al sustituir en la ecuación 2.2 y despejar γ , conseguimos valores positivos.

El valor teórico para γ es de $43/18 \sim 2.39$. Esta diferencia es, de algún modo razonable, por el hecho de usar una retícula pequeña, como la de 250 por 250 con la que hemos simulado este modelo.

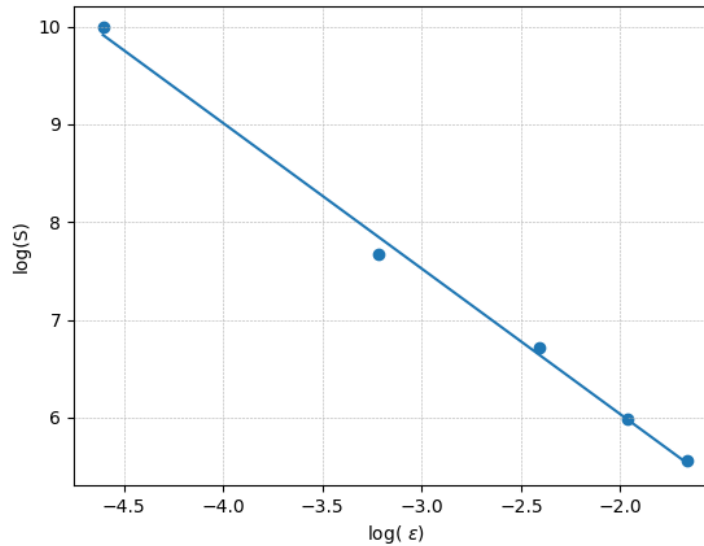


Fig. 2.8: Gráfica del logaritmo del tamaño del bloque contra el logaritmo de ϵ . La pendiente de la recta que se ajusta a los puntos es la mejor aproximación a γ .

2.2.4. La modelación a escala de un incendio forestal y el fenómeno de la percolación

La importancia del umbral de percolación p_c , radica en que a partir de éste, podemos distinguir dicho fenómeno en el sistema, es decir la penetración del fuego al otro extremo del bosque, ya sea aproximandonos con valores por arriba o por debajo de éste.

Determinar el valor exacto para p , con el cual observemos que la duración del incendio parezca divergir, no es una tarea sencilla. Si hacemos que p esté muy cerca de la unidad, entonces el fuego se propaga inmediatamente la mayoría de celdas verdes sin obstáculos y la duración del incendio es corta.

Análogamente, con valores cercanos a cero, la retícula es demasiado rala respecto a los árboles plantados y el fuego no se transmite entre las celdas verdes, entonces el fuego deja de propagarse, se extingue rápidamente.

Podemos analizar la propagación del fuego desde el punto de vista dinámico, más allá del comportamiento crítico que acabamos de estudiar. Para esto, es necesario analizar otros exponentes —dinámicos— de este sistema, por ejemplo aquéllos que tienen que ver con la evolución del número de árboles quemados en el tiempo.

Así tenemos que

$$S \sim t^\nu,$$

es otra relación que podemos establecer, entre el tamaño del bloque y el tiempo. En esta, el exponente ν describe la dificultad del fuego para propagarse por la retícula. Si seguimos una metodología similar a la que hemos descrito para determinar γ , obtenemos que $\nu = 1.62$.

2.3. El modelo de Drossel y Schwabl

Otro esquema para observar el comportamiento fractal, en un sistema que simula un incendio forestal, es aquél en donde la transición entre estados depende de ciertos parámetros o probabilidades —asignados a cada una de las celdas—. Esto es lo que se conoce como un AC con reglas estocásticas. En este tipo de modelos, la transición de estados no sucede de manera «directa», como en el modelo determinista.

No quisiéramos culminar este capítulo, sin antes revisar —a manera de ejemplo—, un modelo que trata el fenómeno de la propagación del fuego, con reglas estocásticas.

Este modelo para un incendio forestal, fue propuesto por Drossel y Schwabl en 1992 [3]. Resaltamos algunas de sus características más sobresalientes y realizamos una simulación computacional que nos permita; en la medida de lo posible, tener un acercamiento a un fenómeno denominado *criticalidad autoorganizada*.

Comenzamos resaltando que en este modelo, se incluye un parámetro con el cual una celda puede incendiarse; incluso sin tener celdas en llamas a su alrededor¹.

Consideremos los mismos estados que usamos en el modelo de determinista de la sección anterior, es decir; *árbol*, *fuego* o *vacío*.

Y consideremos la siguiente regla de evolución.

1. Un árbol crece en una celda vacía con probabilidad p .
2. Un árbol se incendia con probabilidad f (incluso sin árboles en llamas a su alrededor).
3. Un árbol se incendia si uno de sus vecinos está en llamas.
4. Un árbol en llamas pasa a estado *vacío* en la siguiente generación (se convierte en cenizas).

¹En un artículo anterior al de Drossel y Schwabl (publicado en 1990), Bak, Chen y Tang[4]; tratan este fenómeno, usando únicamente el parámetro p .

Estas reglas se resumen en la figura Fig. 2.9.

La probabilidad de que en una celda vacía brote un árbol es p , y el parámetro f se refiere a la probabilidad de que un árbol pueda incendiarse debido a la luz solar o a un relámpago².

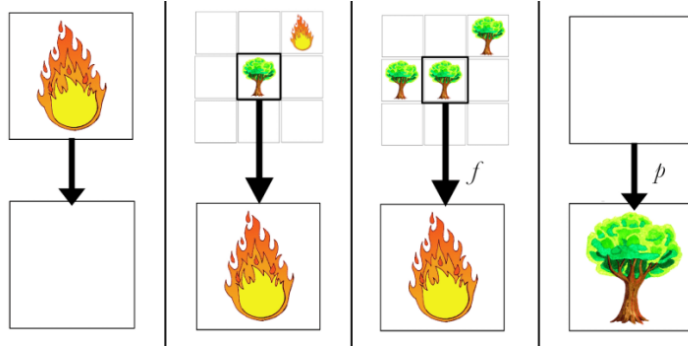


Fig. 2.9: Las reglas de evolución de las celdas en el modelo de Drossel y Schwabl.

Una celda en llamas se convierte en cenizas en la siguiente generación, por lo que su siguiente estado será vacío. Un árbol se incendia al tener una celda en llamas en su vecindad(aquí se consideró la de Moore). Mientras que, un árbol va a tener probabilidad f de incendiarse, incluso sin vecinos en llamas. Por último, la probabilidad de que en una celda vacía aparezca un árbol; en la siguiente generación, es p .

La fracción $\frac{p}{f}$, la razón entre la tasa de crecimiento de un árbol en una celda vacía y la probabilidad de que un árbol se incendie por la caída de un relámpago, representa el parámetro más importante en la dinámica de este modelo.

La razón $\frac{1}{p}$, representa el tiempo requerido para el surgimiento de un árbol en una celda vacía, mientras que $\frac{1}{f}$ es el tiempo requerido para que un árbol se incendie —debido a una causa distinta al fuego en su vecindad—.

Siguiendo el modelo propuesto en [3], si

$$f \ll p \ll 1,$$

²En el artículo original de Drossel y Schwabl a este parámetro se le llama «*lightning parameter*».

es decir, cuando el tiempo que tarda en crecer un árbol es mucho menor de lo que tarda en ocurrir un relámpago en el bosque, se esperaría que este sistema mostrara un comportamiento crítico.

Así, cuando $\lim_{\frac{f}{p}} \rightarrow 0$, el tamaño de los bloques formados por celdas en llamas seguiría una ley de potencias.

Si denotamos con S al tamaño de un bloque; i.e el promedio de árboles dañados por el fuego, esta cantidad estaría dada por la ecuación

$$S = \left(\frac{p}{f} \right) \frac{(1 - \bar{p})}{\bar{p}}. \quad (2.3)$$

en donde \bar{p} es el promedio de las densidades de árboles vivos, en todas las iteraciones que se hagan del sistema.

La ecuación 2.3 representa una ley de potencias, $S \propto \frac{p}{f}$.

En este punto, la teoría nos indica que sería necesaria una separación de variables, para posteriormente realizar el cálculo de los exponentes críticos que resultan de interés para el sistema. Estos exponentes están relacionados con el tamaño, así como con la distribución de los bloques (árboles en llamas) sobre la retícula.

Para tener una noción de las variables que hemos descrito en la teoría, realizamos una simulación sencilla; misma que se puede realizar en cualquier computadora personal.

Sobre una retícula de 100 por 100 celdas, con una densidad inicial de árboles vivos al inicio del 20 % y en la que al principio de la simulación, ninguna celda está en llamas. Hemos fijado la probabilidad p , con la que crece un árbol en 0.03, y $f = 0.0001$. De este modo se tiene que $\frac{p}{f} = 300$.

Así mismo, $\bar{p} \approx 0.446$, mientras que el número promedio de árboles dañados —en todas la iteraciones del AC— sería de $S = 372$ (usando la vecindad de von Neumann).

En este caso se observó la evolución del sistema durante 1000 unidades de tiempo.

Las variaciones en el número de árboles (vivos y quemados), se muestra en

la grafica de la Fig. 2.10.

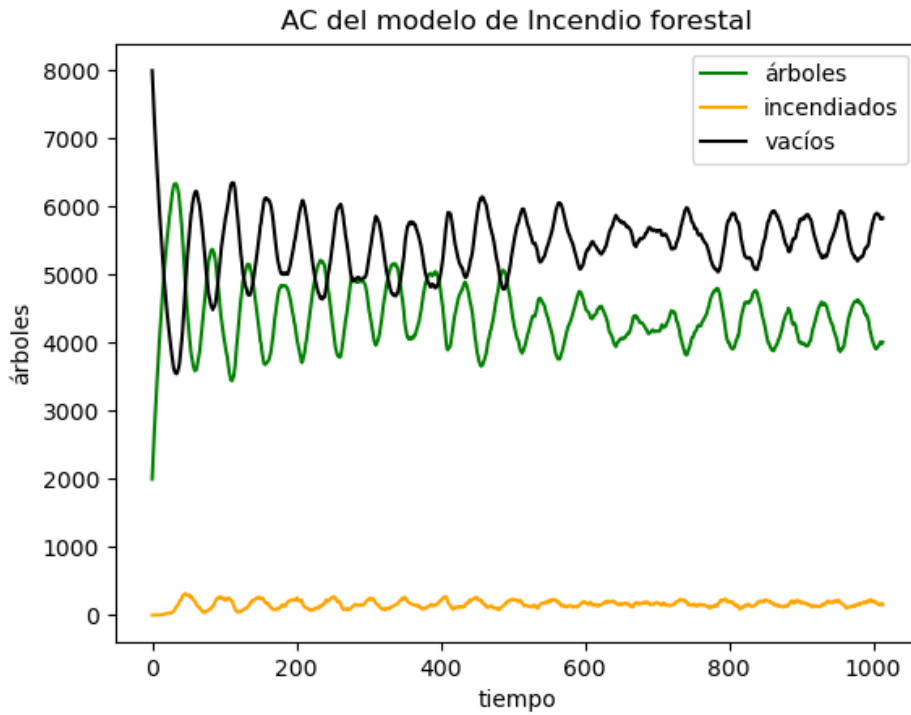


Fig. 2.10: AC del modelo Drossel y Schwabl, con $p = 0.03$ y $f = 0.0001$.

Se muestra la cantidad de árboles (vivos e incendiados) y quemados(vacíos), durante más de 1000 iteraciones del modelo, sobre una retícula con 10 mil celdas.

Mientras que en la Fig. 2.11 mostramos algunos momentos —en una simulación— en la evolución del AC de este modelo.

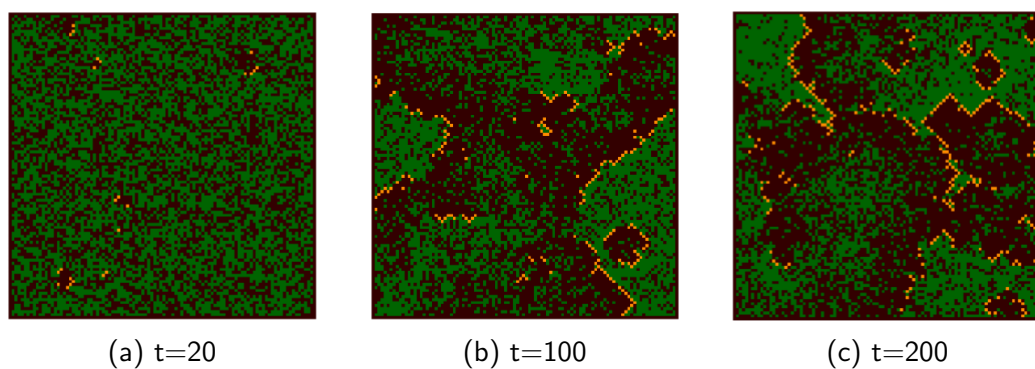


Fig. 2.11: Algunos momentos en el AC de un modelo de incendio forestal.

Aquí la densidad de árboles vivos es de 20 %, $p = 0.03$ y $f = 0.0001$. Se muestra la evolución del fuego en a) $t=20$, b) $t=100$ y c) $t=200$ unidades de tiempo. Las celdas en llamas aparecen en color naranja y los árboles vivos en verde.

CAPÍTULO 3

Medios excitables

Había una gran confusión acerca del comportamiento verdadero del electrón — como onda o partícula—. Todo parecía que era ambas cosas a la vez.
— Richard P. Feynman, Quantum Mechanics.

En 1946, Wiener y Rosenblueth dieron a conocer la noción de *medio excitable*, para explicar ciertas arritmias cardíacas provocadas por ondas en espiral. Estos dos científicos, fueron quienes introdujeron los términos *excitable*, *excitado* y *refractario*, que hasta nuestros días son utilizados para referirse a cada una de las etapas en un sistema excitable.

Las siguientes características, son propias de este tipo de sistemas.

- Iniciar en un punto de *equilibrio* o reposo (también llamado estado *excita-*

ble).

- Recibir un estímulo por arriba de cierto umbral.
- Entrar en estado de activación (estado *excitado*).
- Abandonar el estado excitado y entrar en periodo de recuperación (estado *refractario*).

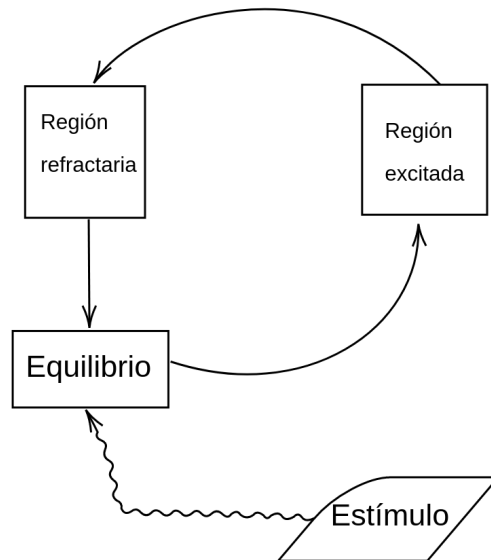


Fig. 3.1: Diagrama en donde se muestran las diferentes etapas del proceso que sigue un sistema excitable.

Cuando el sistema se encuentra equilibrio ($t=0$), éste recibe un estímulo por arriba de cierto umbral, sólo así pasa a estado excitado. Al completar su periodo de excitación, pasa a (*estado refractario*). Aquí, el sistema no puede ser accionado nuevamente, vuelve inmediatamente a estado de equilibrio.

En este proceso podemos identificar tres estados, el de reposo, el excitado y el refractario. Estos caracterizan a un medio excitable.

Su dinámica se resume a continuación. En estado de equilibrio, el sistema responde a una perturbación local para ser excitado. En estado excitado, el sistema evoluciona (dependiendo si hay una o más fases de excitación), luego pasa a estado refractario. En este punto, no se ve afectado por la influencia que le rodea. De acuerdo al periodo que se considere refractario, después de este lapso, pasa a estado de equilibrio nuevamente.

Algunos ejemplos en donde podemos distinguir este tipo de procesos, se encuentran en la excitabilidad neuronal, la actividad muscular cardíaca, así como en múltiples eventos fisiológicos.

Los patrones que se pueden generar mediante estos sistemas, son ondas en espiral de diferentes tipos. Las ondas químicas, juegan un papel importante en muchos procesos biológicos ya que pueden transportar información de un lugar a otro.

El AC de Greenberg-Hastings utiliza estos tres estados. En su versión más sencilla, es posible generar este tipo de ondas en espiral.

3.1. El AC de Greenberg-Hastings

En 1978, Greenberg y Hastings propusieron un AC para modelar un sistema excitable con reglas deterministas. La implementación de este modelo, la podemos hallar en diferentes versiones en la literatura científica, sin embargo, en todas estas, se presentan los tres estados que caracterizan a un sistema excitable (*reposo, excitado y refractario*).

Vamos a enunciar las reglas que utiliza la versión más sencilla de este modelo.

Denotemos mediante $s(r)$, el estado de una celda en la posición r , sobre una retícula bidimensional de cualquier tamaño.

A los estados de reposo, excitado y refractario, los denotaremos con los números 0, 2 y 1, respectivamente.

Una celda en reposo ($s(r) = 0$), pasa a estado excitado ($s(r) = 2$), si existe al menos un vecino en estado excitado, de lo contrario permanece en estado de

reposo.

Una celda en estado excitado, pasa a refractario o de recuperación ($s(r) = 1$).

Una celda en estado de recuperación pasa al reposo ($s(r) = 0$), completándose así este proceso.

Resumimos la dinámica del AC de Greenberg y Hastings como sigue,

$$s(r, t+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } s(r, t) = 1, \text{ o} \\ & \text{si } s(r, t) = 0 \wedge \forall \tilde{r} \in \mathcal{N}(r): s(\tilde{r}, t) \neq 2, \\ 1 & \text{si } s(r, t) = 2, \\ 2 & \text{si } s(r, t) = 0 \wedge \exists \tilde{r} \in \mathcal{N}(r): s(\tilde{r}, t) = 2, \end{cases} \quad (3.1)$$

en donde $\mathcal{N}(r)$, es la vecindad de von Neumann, correspondiente a la celda cuya posición es r . Aquí r se refiere a la posición de la celda en la retícula y t es la variable temporal.

En la figura Fig. 3.2 presentamos un ejemplo de cómo evoluciona una configuración arbitraria de celdas —la primera imagen—, cuando aplicamos estas reglas.

Un caso más general, en la dinámica de este AC, es aquél en donde consideramos e estados excitados y r estados refractarios (tanto e como r , son números enteros positivos)¹. En este caso, las reglas de evolución son las siguientes:

- Una celda en estado k , con $1 \leq k \leq e + r - 1$, pasa a estado $k + 1$ para la siguiente generación.
- Una celda en el último estado refractario, $e + r$, regresa al estado de reposo, 0, en la siguiente generación.
- Una celda en estado de reposo 0 pasa a estado excitado, 1, si tiene algún vecino en estado excitado, de lo contrario permanece en estado de reposo,

¹Podemos llamar a estos estados, fases. Así decimos que hay e fases de excitación y r fases en el estado refractario.

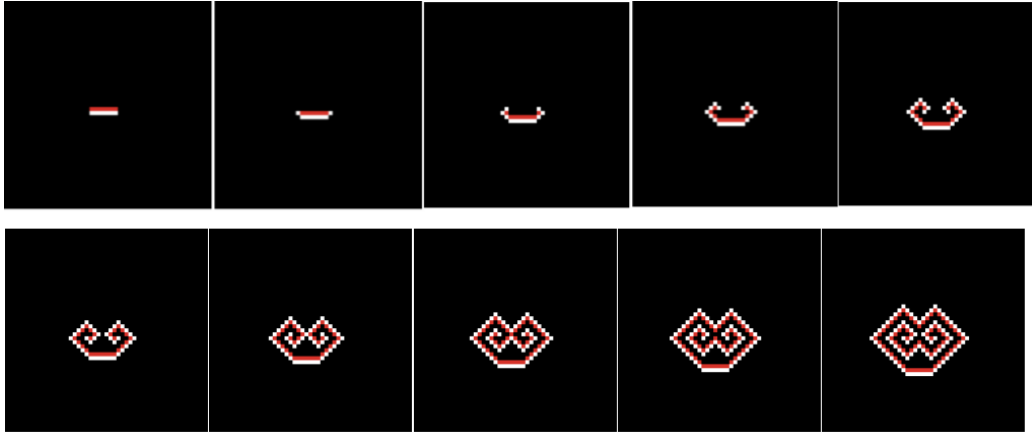


Fig. 3.2: El AC de Greenberg-Hastings en una retícula pequeña.

Se muestra cómo evoluciona; en 9 iteraciones, una configuración inicial de celdas. Las celdas oscuras están en reposo, las rojas, en estado refractario; mientras que las blancas, están en estado excitado. Podemos observar la generación de ondas tipo espiral, sin que la configuración inicial, tenga precisamente esta forma.

estas reglas se esquematizan en el diagrama de la Fig. 3.3.

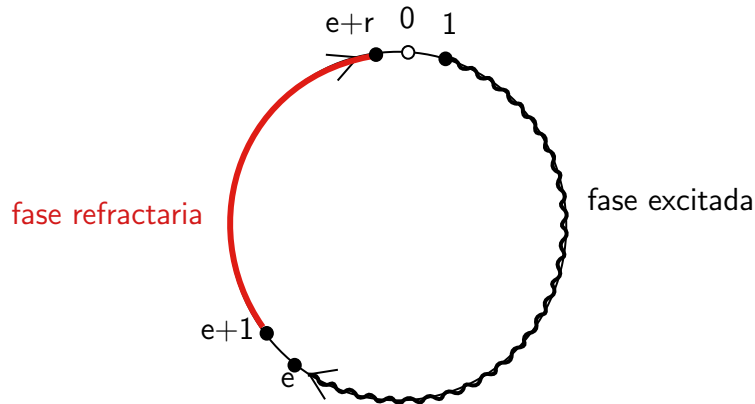


Fig. 3.3: Ciclo que sigue la versión general del AC de Greenberg y Hastings.

El valor $s(r) = 0$, corresponde al único estado de reposo. Los primeros e valores, corresponden al estado excitado —los valores en el conjunto $\{1, 2, \dots, e\}$ — mientras que los siguientes r , i.e los valores en el conjunto $\{e + 1, \dots, e + r\}$, corresponden a la fase refractaria.

En ocasiones, a las dos primeras condiciones que acabamos de enunciar, se le denomina la fase de *reacción*, mientras que a la tercera regla, suele llamarse la fase de *difusión*.

Observe que la versión más simple —a la que hicimos alusión en la Fig. 3.2—, considera sólo, un estado excitado y uno refractario. En el apéndice A se encuentra un modelo (conocido como *Brian's Brain*) que ilustra un AC de un medio excitable, con únicamente un estado refractario y uno excitado. Este modelo, es una variación del esquema que vimos al principio de esta sección (ya que utiliza otro tipo de vecindad y modifica la regla de difusión).

Al haber mencionado las fases de reacción y difusión, en la dinámica de los medios excitables, quisiéramos abordar un tipo de reacciones químicas, en las que surgen ciertos patrones en forma de espiral.

3.2. La reacción de Belousov-Zhabotinsky

Como se mencionó en la sección anterior, existen sistemas químicos que exhiben el comportamiento de medios excitables.

La reacción de Belousov-Zhabotinsky, conocida como reacción *BZ*, constituye una importante reacción química que presenta ciertas cualidades oscilatorias. Fue descubierta por Boris Belousov y su estudio posterior se debe a Zhabotinsky. En sus investigaciones, Belousov encontró oscilaciones en la concentración del catalizador que intervenía en esta reacción. Dicho catalizador era el Cerio (*Ce*), este actuaba en la oxidación del ácido malónico por el bromuro de potasio —se puede utilizar Hierro en lugar de Cerio—.

Al observar el proceso que sigue esta reacción química, podemos notar que, a medida que el Cerio cambia (de Ce^{3+} a Ce^{4+}), la reacción química se hace visible a través de un cambio de color en la sustancia. Cuando se agita la solución de la reacción BZ, ésta cambia periódicamente de rojo a azul. Cuando se deja de agitar, en la capa superior se forman círculos concéntricos u ondas en espiral (Fig. 3.4).

Debido a que ahora se conocen muchas más reacciones químicas que presentan este tipo de comportamiento periódico, a todas estas, se les denomina *reacciones tipo BZ*.

Las ondas que produce una reacción BZ están dadas en términos de un sistema no lineal de dos ecuaciones diferenciales parciales, llamadas las ecuaciones de reacción-difusión².



Fig. 3.4: Reacción BZ en una caja de petri. / Foto: Stephen Morris.

Cuando la solución deja de agitarse, se aprecian cierto tipo de figuras concéntricas. Los reactivos son $NaBr$ (60 mM), H_2SO_4 (0.37 M) y $NaBrO_3$ (0.33 M), así como ácido malónico y Hierro.

Nuestra intención ahora, es acercarnos al comportamiento oscilatorio de este tipo de reacciones químicas. Con reglas deterministas, vamos a analizar un modelo de autómatas celulares que presenta ciertas cualidades oscilatorias.

El siguiente AC, fue propuesto por A. K. Dewdney[13] y está dado en el contexto de una infección —pensemos en la transmisión de una enfermedad entre humanos—.

En este modelo figuran los estados de reposo, excitado y refractario de los que ya hablamos anteriormente, sin embargo aquí se denominan *sano*, *infectado* y *enfermo*.

²Este tipo de ecuaciones pueden consultarse en [12], pp. 399-401

Sea $c(t)$ el estado de una celda al tiempo t y $n \in \mathbb{N}$. El valor de n denota el número de fases en el estado *infectado*.

Así, el estado de una celda —un individuo— será *sano* si $c(t) = 0$, *enfermo* si $c(t) = n$ e *infectado*, cuando $0 < c(t) < n$.

Las siguientes reglas precisan mejor, la evolución de las celdas sobre la retícula.

- Si $c(t) = 0$, entonces su nuevo estado será

$$c(t+1) = \left\lfloor \frac{a}{k_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{k_2} \right\rfloor, \quad (3.2)$$

en donde a y b son, el número de celdas infectadas y enfermas, respectivamente, que hay en la vecindad de la celda en cuestión.

Así mismo k_1, k_2 son constantes que se refieren a los niveles mínimos de una celda para infectarse.

Los paréntesis rectangulares denotan la parte entera. Por lo que si ambos términos son menores que 1, $c(t+1)$ es cero y entonces la celda permanece sana.

- Si una celda está enferma, i.e $c(t) = n$, entonces se recupera en la siguiente generación, i.e

$$c(t+1) = 0. \quad (3.3)$$

- Si una celda está infectada, i.e $0 < c(t) < n$, entonces su nuevo estado será

$$c(t+1) = g + \left\lfloor \frac{s}{a+b+1} \right\rfloor, \quad (3.4)$$

en donde s es la suma de los estados; tanto de la celda central como de sus vecinos; g es un número natural llamado la tasa de infección³.

Cuando realicemos la simulación computacional, utilizaremos celdas de color negro para representar al estado *sano*, así como una gama de colores de diversas

³Al valor de g , podemos pensarlo como la tendencia que tiene la infección para propagarse.

tonalidades, para las distintas fases del estado *infectado*. De manera que cuando una celda pase de sano a infectado, se tornará en rojo. A medida que las celdas se encuentren en una fase más avanzada dentro de este estado (infectado), su tonalidad se tornará más pálida, así hasta que lleguen al máximo nivel. Cuando alcancen ese nivel de infección, pasan a estado *enfermo* — y su color será blanco — (Fig. 3.5).

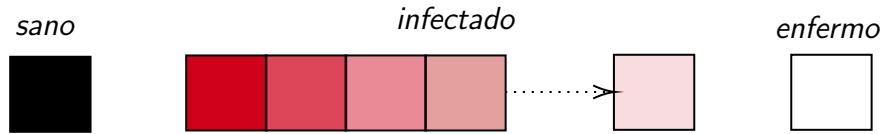


Fig. 3.5: Las distintas fases para el AC de una reacción tipo BZ. Las celdas negras denotan al estado *sano*, blancas para *enfermo* y una gama de tonalidades rojas (que van palideciendo), para las distintas fases del estado *infectado*.

Cuando hacemos la simulación computacional de este modelo sobre una retícula con 10 mil celdas (i.e una con 100 por 100 celdas), consideramos a esta como un toro plano (Fig. 1.5). En esta simulación, hemos optado por utilizar la vecindad de Moore.

Realizamos algunas iteraciones de este modelo, variando arbitrariamente los parámetros para observar su comportamiento a largo plazo.

Cuando $n = 30$ y $g = 10$, en más de 2300 iteraciones, observamos que el número de celdas en estado excitado (infectado), predominan en la retícula. Si bien, aunque no representan el 100 % de esta, se hallan oscilando constantemente por arriba del 75 %. Mientras que el número de pasos consecutivos, en el que las celdas están en el máximo estado de infección ($c(t) = n$), resulta ser muy breve. Esto significa que podemos observar picos breves en las oscilaciones en el número infectados.

En la gráfica de la figura Fig. 3.6, se ilustran las oscilaciones, utilizando estos parámetros, mientras que en la Fig. 3.7 observamos un momento captado en la evolución de la retícula de dicho AC.

Con la intención de ver cómo repercute la variación de estos parámetros, en la formación de los patrones que emergen a largo plazo, fijemos la tasa de infección

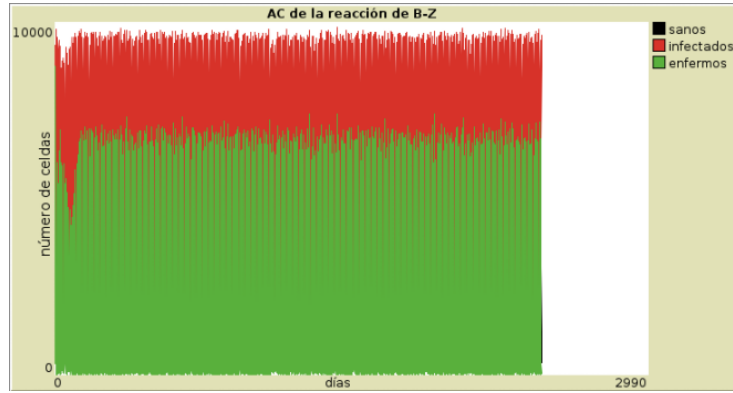


Fig. 3.6: La gráfica de las oscilaciones en el AC de la reacción de Belousov-Zhabotinsky.

Se muestran más de 2300 iteraciones del sistema. Con los parámetros $k_1 = 1 = k_2$, $g = 10$ y $n = 30$.

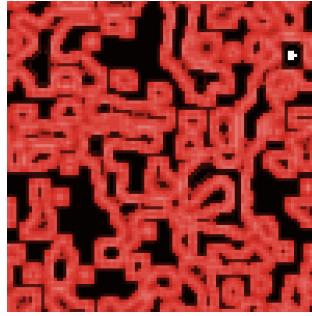


Fig. 3.7: Un instante en la evolución de la retícula del AC de la reacción química.

Se fijaron los parámetros $k_1 = 1 = k_2$, $g = 10$ y $n = 30$.

en $g = 40$, y el número de fases infecciosas en $n = 200$.

Habiendo hecho esto, podemos observar que el sistema se va constituyendo de ondas en espiral, con células en estado infectado en mayor proporción, seguidas de células en estado sano y enfermo (Fig. 3.8a).

Las oscilaciones en el número de infectados no presentan variaciones muy grandes, y la mayor parte del tiempo son el 75 % de la retícula. Esta situación, se describe mejor en la gráfica de la Fig. 3.9, en donde consideramos cada unidad de tiempo como el equivalente a un día.

Ahora, cuando $g = 20$, se forman patrones difusos, predominando porciones importantes de celdas rojas (Fig. 3.8b). Las oscilaciones en el número de infectados se constituyen de picos de corta duración, oscilando entre el 35 % y casi llegando a cubrir en su totalidad la retícula, como se muestra en Fig. 3.10.

Estos picos muy variables en el número de celdas infectadas los pudimos observar durante más de 2 mil iteraciones del sistema.

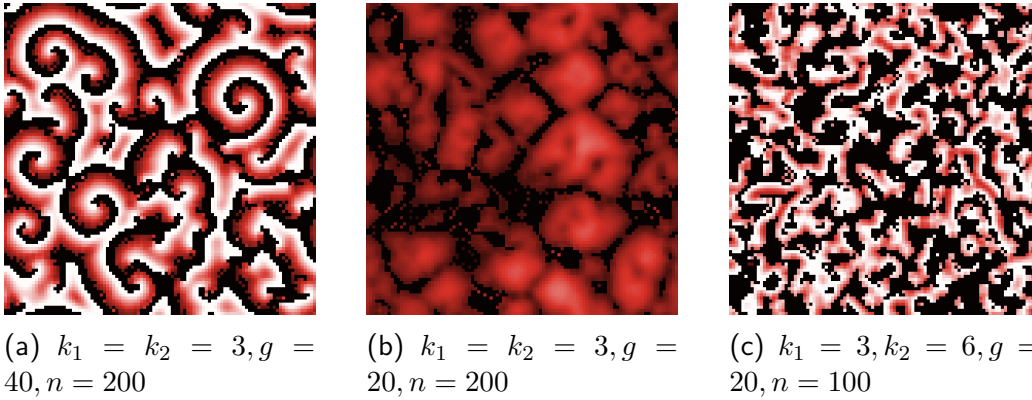


Fig. 3.8: Algunos instantes en el AC de la reacción de Belousov-Zhabotinsky.

Tanto en (a) como en (b) se consideran 200 valores para el estado infectado, sólo cuando g es considerable (un valor no muy pequeño) podemos observar ondas en espiral como en (a). Mientras que cuando g relativamente pequeño (b), la retícula presenta cambios abruptos en el número de infectados. (c) Cuando k_2 , se duplica, la oscilaciones en el número de sanos e infectados presentan cambios parecidos y representan el 30 y el 50 % de la retícula respectivamente.

La formación de ondas en espiral, así como las oscilaciones que prevalecen a largo plazo, son comportamientos característicos de los sistemas excitables. En estos, la configuración inicial no precisamente es una en donde se presentan este tipo de formas. Se dice que estos de auto organizan para presentar el comportamiento oscilatorio que acabamos de analizar cualitativamente.

La presencia de este tipo de ondas en diversos fenómenos relacionados con la conducción eléctrica, así como con la propagación química, nos dan una idea cualitativa de la versión discreta de algunos fenómenos de naturaleza continua.

Dentro de las investigaciones correspondientes a estudiar la dinámica de las

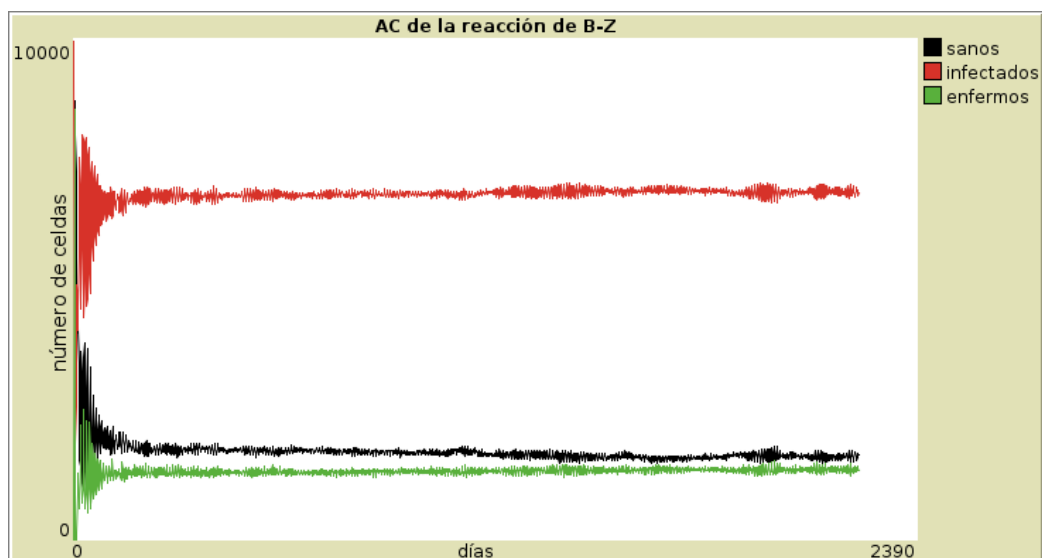


Fig. 3.9: El AC de la reacción B-Z con $k_1 = k_2 = 3, g = 40, n = 200$

Pequeñas variaciones en el número de celdas infectadas que en promedio se encuentran ocupando el 75 % de la retícula durante más de 2 mil unidades de tiempo.

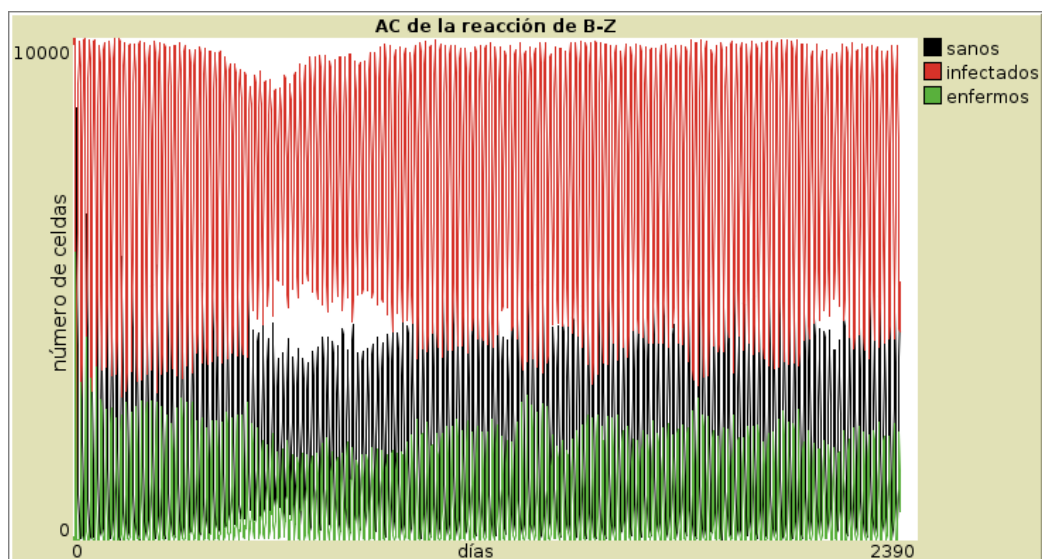


Fig. 3.10: El AC de la reacción B-Z con $k_1 = k_2 = 3, g = 20, n = 200$

La variación en el número de celdas infectadas presenta picos grandes.

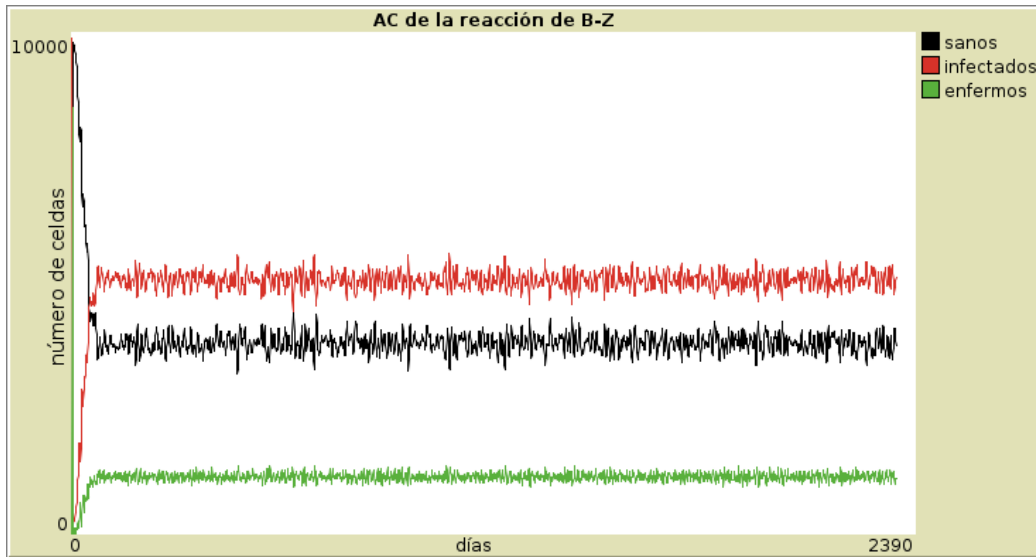


Fig. 3.11: El AC de la reacción B-Z con $k_1 = 3$, $k_2 = 6$, $g = 20$, $n = 100$

Las oscilaciones en el número de infectados presenta variaciones de diferentes tamaños, pero siempre se encuentran cubriendo alrededor del 50 % de la retícula.

ondas en sistemas excitables, por medio de modelos discretos en tiempo y espacio, muchos de ellos atienden a temas relacionados con la curvatura y dispersión de este tipo de ondas. Estos quedan fuera de los alcances de este trabajo.

Para cerrar este capítulo, y a manera de poner el modelo que acabamos de describir, en el contexto de la Química, revisemos una reacción química de gran importancia.

3.2.1. La oxidación del monóxido de carbono usando óxido de paladio.

Existen algunas reacciones químicas que oscilan, presentando ondas en espiral en su comportamiento. Este tipo de ondas juegan un papel muy importante en diversos procesos biológicos —en el sistema nervioso o en el sistema cardíaco, por ejemplo—.

El siguiente modelo, propuesto por Martin Gerhardt y Heike Schuster en 1989

[14], simula una reacción catalítica con un AC. Las reglas de evolución de este son casi idénticas —salvo ligeros detalles⁴— a las del modelo epidémico propuesto por Dewdney.

Este modelo, a medida que evoluciona en el tiempo, nos aproxima a la formación de ciertas estructuras circulares, así como de ondas tipo espiral. Se trata de la oxidación del CO (monóxido de carbono), en donde se utiliza como catalizador al paladio en forma de pequeños cristales.

La idea general del funcionamiento del AC, se basa en el supuesto químico de que los cristales de paladio —en la fase que podemos denominar paladio *puro*—, puede excitarse debido a la interacción con partículas vecinas para formar óxido de paladio. Esta excitación en el estado de paladio puro puede concebirse como un proceso infeccioso; tal y como el "*hodge podge machine*" de Dewdney⁵.

El proceso de excitación de una unidad catalítica; es decir la transición de paladio a óxido de paladio, puede pensarse como un proceso de almacenamiento, en el que el interior de los cristales de paladio se va llenando de oxígeno, así, hasta que estas unidades catalíticas alcanzan cierto valor umbral — en la concentración de oxígeno —. Lo anterior va a caracterizar el estado refractario, propio de la fase del óxido de paladio (Fig. 3.12).

En base a estas suposiciones vamos a representar mediante una celda de la retícula a una unidad catalítica, o en su defecto, a un conjunto fuertemente enlazado de cristales de paladio, que actúan de manera sincrónica.

La vecindad que consideremos, la denotamos con \mathcal{V} .

La retícula, X se define como

$$X := \{(i, j) | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}, n, m \in \mathbb{N}, \quad (3.5)$$

por otro lado, el conjunto de posibles estados para la celdas, Ω , es un subconjunto finito de los naturales,

⁴El modelo de Gerhardt y Schuster no considera a la retícula como un toro plano y también hace algunas variaciones a los parámetros en las reglas de evolución de las celdas.

⁵La descripción de este modelo apareció por vez primera en [13]

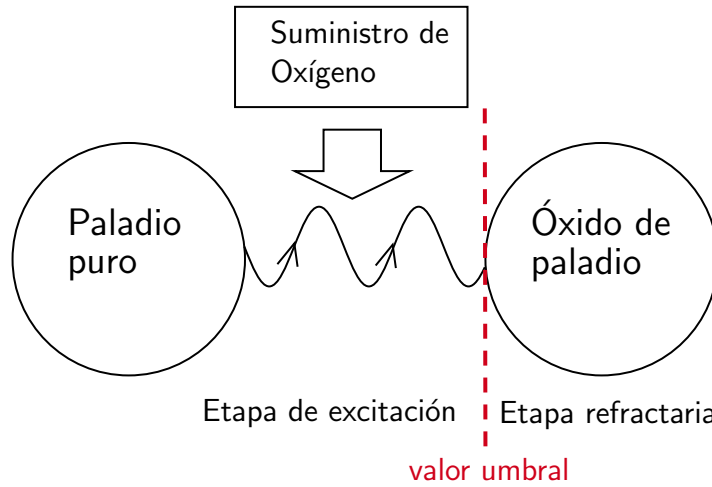


Fig. 3.12: El proceso que sigue una unidad catalítica en estado excitado.

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots, V\} \quad \text{con } V \in \mathbb{N}, \quad (3.6)$$

a los estados de las celdas los vamos a interpretar de acuerdo a las fases de la reacción catalítica que estamos modelando.

Así, vamos a representar con el valor 0 a la etapa en la que el paladio es puro; este es el estado *sano*.

El estado cuyo valor es V , representa la fase en la que tenemos al óxido de paladio; este será el estado *enfermo*.

Cualquier valor que se encuentre entre 1 y $V - 1$, representa a la unidad catalítica en su transición hacia el óxido de paladio, dicho estado será *infectado*, estas etapas se muestran en la Fig. 3.13.

Una celda x_{ij} tendrá alguno de estos tres estados, y va a evolucionar, de acuerdo a las siguientes consideraciones —reglas—.

Una celda en la fase paladio va a ser excitada para formar óxido de paladio de dos maneras. La primera, por transferencia de calor de las partículas vecinas —celdas vecinas— que se encuentren transitando hacia el óxido de paladio. Estas celdas, al estar en estado más reactivo y a mayor temperatura, transmiten el calor

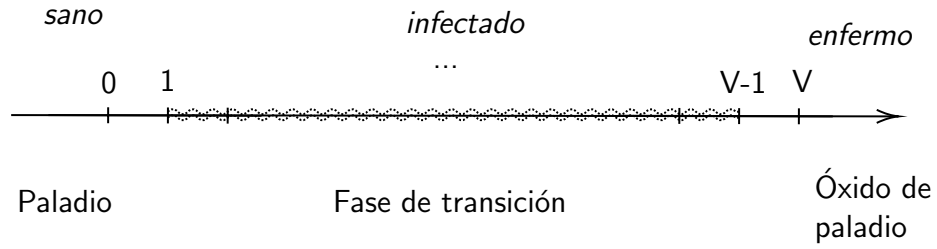


Fig. 3.13: Las distintas etapas en la evolución de una celda.

A cada estado le corresponde un valor, éste determina en qué fase de la reacción química se sitúa la unidad catalítica.

a la celda central.

La segunda es a través de las celdas vecinas que ya han alcanzado el estado óxido de paladio. Esto sería posible por difusión de CO . Así una celda sana pasaría a estar infectada, cuando cierto número de celdas enfermas estén en su vecindad.

Entonces, si una celda x_{ij} está en estado *sano* al tiempo t , denotaremos con $K_{ij}(t)$ al número de celdas enfermas y con $I_{ij}(t)$ al número de celdas infectadas en su vecindad al tiempo t .

$$K_{ij} = \# \{ (r, s) \in X \mid (r, s) \text{ es vecina a } (i, j) \text{ y } x_{rs}(t) = V \}, \quad (3.7)$$

$$I_{ij} = \# \{ (r, s) \in X \mid (r, s) \text{ es vecina a } (i, j) \text{ y } 0 < x_{rs}(t) < V \}, \quad (3.8)$$

Podemos escribir la regla de evolución de una celda sana así,

$$x_{ij}(t+1) = \left[\frac{K_{ij}(t)}{k_1} \right] + \left[\frac{I_{ij}(t)}{k_2} \right] \text{ para } x_{ij} = 0. \quad (3.9)$$

en donde k_1 y $k_2 \in \mathbb{N}$.

Si el valor de 3.7, o el de 3.8 resultan mayores a k_1 y a k_2 , respectivamente, entonces alguno o ambos de los valores entre paréntesis en (3.9) serían mayores

que cero, y en consecuencia la celda sana pasaría a estar infectada.

Establezcamos ahora la regla de evolución para una celda infectada. Para que una celda infectada llegue a estar enferma, ésta aumenta su grado o nivel de infección de manera lineal respecto al tiempo.

En cada unidad de tiempo consideremos una constante g , en \mathbb{N} . De modo que el estado de una celda infectada, al tiempo $t + 1$, está dado por la suma de dos cantidades. La primera, es g , una constante que determina qué tan rápido la celda pasa al estado *infectado*. A la otra cantidad, la llamaremos el *grado promedio de infección*. Para determinar esta última vamos a calcular la suma de los grados de infección de las celdas vecinas, esto será $S_{ij}(t)$ y estará dada por la siguiente fórmula

$$S_{ij}(t) = \sum_{(r,s) \in \mathcal{V}(i,j)} x_{rs}(t) \quad \text{cuando} \quad 0 < x_{rs}(t) < V, \quad (3.10)$$

en donde $\mathcal{V}(i, j)$ es la vecindad de la celda (i, j) .

Al dividir esta última expresión entre el número de celdas infectadas en esta vecindad al tiempo t , i.e $I_{ij}(t)$, obtendremos el grado promedio de infección⁶.

El máximo valor que puede tomar este cociente estará acotado por V , de manera que si éste sobrepasa a V , tomaremos como el nuevo estado a V mismo.

Así, el estado de una celda infectada al tiempo $t + 1$ está dado por

$$x_{ij}(t + 1) = \min \left\{ \left[\frac{S(t)}{I(t)} \right] + g, V \right\}, \quad \text{cuando} \quad 0 < x_{ij}(t) < V, \quad (3.11)$$

Observe que el proceso de obtener promedios locales en una celda —a partir de sus celdas vecinas en estado infectado— podemos interpretarlo —química-mente— como la transferencia de calor entre unidades catalíticas vecinas, mismas que se encuentran en transición hacia el estado del óxido de paladio y que

⁶Es preciso mencionar que cuando hagamos la simulación computacional tomaremos como denominador a $I_{ij}(t) + 1$ para evitar cualquier división entre cero.

estarían actuando de manera sincrónica.

Por otro lado, y al igual que en las reglas de Dewdney —que enunciamos anteriormente—, una celda enferma pasa a estado sano en la siguiente generación, i.e

$$x_{ij}(t+1) = 0 \quad \text{si} \quad x_{ij}(t) = V. \quad (3.12)$$

Esta regla describe la reducción de una unidad catalítica después de haber alcanzado la fase del óxido de paladio y puede pensarse como un reinicio del proceso descrito en Fig. 3.13.

Las reglas para cada tipo de celda se resumen de la siguiente manera,

$$x_{ij}(t+1) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{K_{ij}(t)}{k_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{I_{ij}(t)}{k_2} \right\rfloor & \text{para } x_{ij} = 0, \\ \min \left\{ \left\lfloor \frac{S(t)}{I(t)} \right\rfloor + g, V \right\}, & 0 < x_{ij}(t) < V, \\ 0 & \text{si } x_{ij}(t) = V, \end{cases} \quad (3.13)$$

en donde V, g, k_1 y $k_2 \in \mathbb{N}$.

3.2.2. Resultados

Luego de simular este modelo sobre una retícula con 10 mil celdas, mostramos el comportamiento de esta reacción.

Consideramos la vecindad de Moore. La configuración inicial de la retícula es una en donde las celdas tienen estados aleatorios.

La retícula es un toro plano (Fig. 1.5), así las celdas situadas sobre los bordes de la retícula tienen la misma cantidad de vecinos que cualquier celda al interior de ésta. Al igual que lo hicimos en la sección anterior, procedemos experimentando, fijando algunos valores para los parámetros. Por ejemplo, cuando $V = 100$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, y g toma ciertos valores en el intervalo $(1, 20]$, pudimos observar lo siguiente —durante casi mil días—.

Cuando $g = 12$, las oscilaciones en el número de infectados, presentan am-

plitudes pequeñas (Fig. 3.14a). Estas oscilaciones, tienen valores por encima del 80 % del total de celdas. Lo que representa el hecho que la mayoría de las unidades catalíticas están en fase de transición.

Cuando $g = 16$, las ondas que describen el comportamiento del AC, transitan de amplitudes grandes a pequeñas⁷. Observamos que cuando las amplitudes de las ondas son pequeñas, las celdas infectadas se encuentran en promedio cubriendo el 0.75 del área total de la retícula (Fig. 3.14b).

Un comportamiento similar al descrito anteriormente, se observa cuando $g = 18$ y $g = 20$ (Fig. 3.14c y Fig. 3.14d).

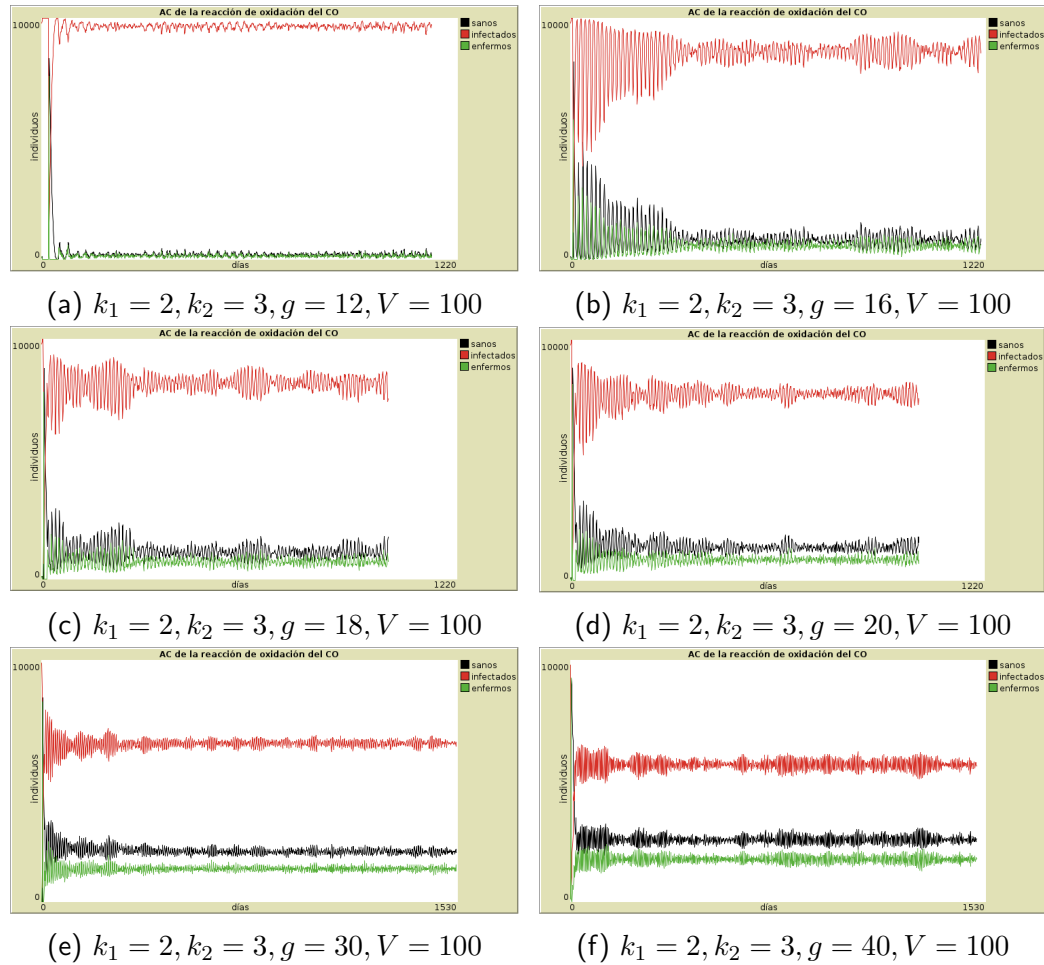
Mientras que, otro tipo de comportamiento observado, ocurre cuando $g = 30$, en donde las variaciones en la amplitud son muy pequeñas como se muestra en Fig. 3.14e.

Para valores mayores de g , el comportamiento de estas ondas nos muestra que habría una disminución de celdas infectadas cubriendo la retícula, sin embargo los picos de esta gráfica son de corta duración —fluctuaciones que no son para nada lentas—.

Este comportamiento, que nos parecería algo errático (de las celdas infectadas), se observa en el aspecto que tomaría la retícula, en donde el patrón que logramos observar, carece de una forma semejante a una espiral (o de círculos concéntricos), como uno quisiera esperar a corto plazo. Sin embargo, conforme avanza el tiempo, es impresionante cómo el sistema muestra sus patrones ondulatorios ((3.15f))

La predominancia de celdas infectadas en la retícula puede estar relacionada con la conversión de CO , esto debido a que, como mencionamos anteriormente, los cristales de paladio en su transición a la fase de óxido de paladio son los responsables de la producción de CO_2 .

⁷En la clasificación de Gerhardt y Schuster[14] a este cambio se le nombra *transición del tipo 3 al tipo 4*

Fig. 3.14: Oxidación de CO por óxido de paladio.

(a) Las unidades catalíticas en su transición al paladio oscilan con amplitudes pequeñas. (b) Las oscilaciones de celdas infectadas comienzan teniendo una amplitud grande, con valores del 50 % o más (sobre el total de la retícula). Sin embargo cuando la reacción evoluciona, estas oscilaciones son de amplitud corta. El mismo sistema modula estas variaciones, a medida que pasa el tiempo. En (c) y (d) el número de unidades catalíticas, en fase de transición al óxido de paladio se modulan en oscilaciones con valores del 75 % al 80 % del total de la retícula. Tanto en (e) como en (f), las oscilaciones son algo más abruptas, los picos que experimentan la gráfica de infectados tienen duración corta, la intensidad en g hace que las fluctuaciones sean más rápidas.

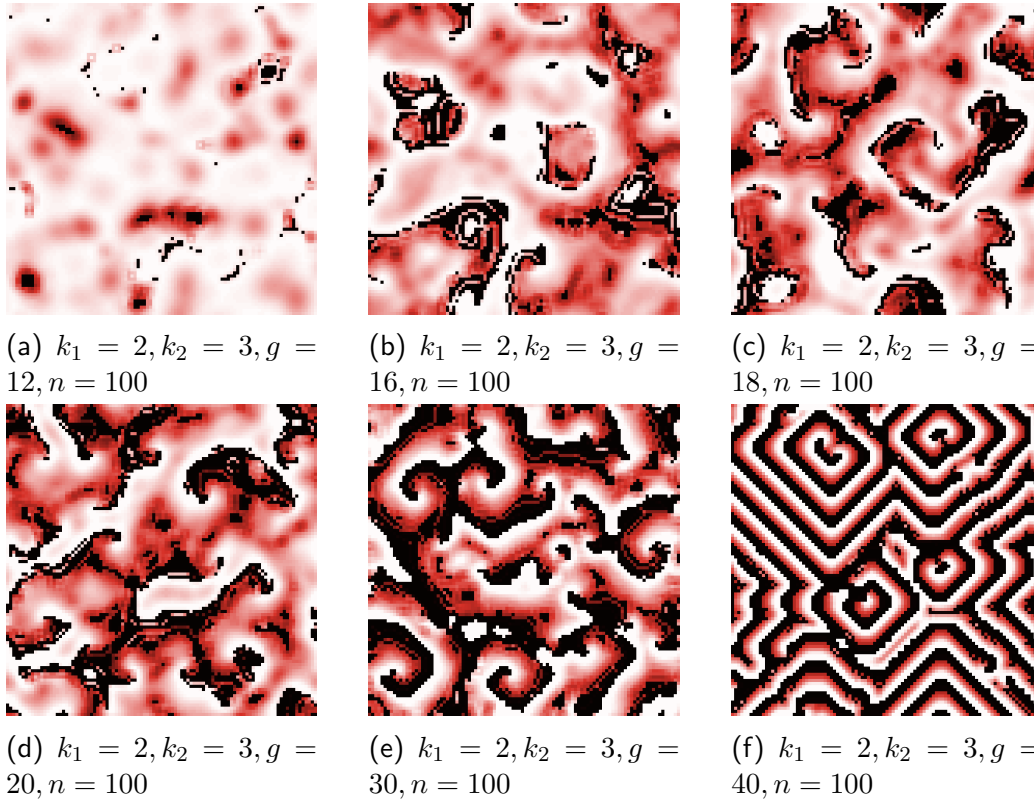


Fig. 3.15: Diversos momentos en la evolución de una reacción BZ.

Las celdas en color blanco denotan la fase óxido de paladio, mientras que las de color negro corresponden al paladio puro. Las diferentes fases de transición (100 en este caso) corresponden a las tonalidades rojas. A mayor palidez, más avanzada es la fase de excitación (transición hacia el óxido de paladio). El sistema se organiza de manera autónoma para mostrar ciertos patrones ondulatorios, que son más visibles en (e) y (f).

CAPÍTULO 4

El modelo de la pila de arena y algunas reflexiones sobre la criticalidad autoorganizada

*¿Quién puede calcular la trayectoria de
una molécula?
¿Y si la creación de nuevos mundos no
depende de la caída de granos de
arena? — Victor Hugo, Los Miserables.*

4.1. El modelo de la pila de arena

Un modelo típico que se aborda, al hablar de criticalidad auto organizada, es el de *la pila de arena*. Este prototipo; creado por Bak, Tang, y Wiesenfeld, en 1987 [6], surge —de manera algo accidental— debido a la necesidad (o por

empecinamiento por parte de sus autores) por intentar explicar el fenómeno conocido como *ruido* $1/f$.

El contraste entre la sencillez con la que opera este modelo, y su capacidad para exhibir un comportamiento complejo —que se modula sin la necesidad de que un agente externo calibre sus parámetros— es realmente impresionante.

Consideremos un montón de arena, en este se van agregando granos de este mismo material. A medida que se tiene una pila de arena más grande, la pendiente que se forma resulta más inclinada cada vez, por lo que se van a crear una serie de avalanchas de diferente magnitud.

El rasgo principal de este sistema, es que la distribución en el tamaño de las avalanchas, la duración de éstas, así como la energía liberada obedecen una ley de potencias (vea apéndice B) .

Más adelante, se concibió a la criticalidad auto organizada como un rasgo característico de aquéllos sistemas fuera de equilibrio, en donde actuaba una pequeña fuerza externa. Un sistema como este —*la pila de arena*—, proporciona un mecanismo que resulta de utilidad para analizar fenómenos naturales como los terremotos (la ley de Gutenberg Richter sigue una ley de potencias), así como la extinción (evolución) que surgen en temas de biodiversidad.

Más aún, este modelo es la base para analizar sistemas sociales y económicos, un ejemplo de ello, son las fluctuaciones en los precios de los mercados financieros.

A continuación, describimos la dinámica con la que opera este modelo.

Se vierte un montón de arena sobre un tablero cuadrado. Al tablero sobre el cual yace la arena, lo representaremos mediante una retícula bidimensional.

Cada celda tiene un par de coordenadas (x, y) , este par, denota la posición que tiene dicha celda sobre el tablero.

Nuestra configuración inicial, es entonces, una en la cual se ha vertido una cantidad de arena sobre el tablero. Después de esto, en cada celda va a existir un determinado número de granos de este material. Para ello suponemos que los granos de arena son ideales, en el sentido de que todos tienen la misma forma y tamaño. Cuando se vayan apilando, lo hacen de manera que uno de estos se

acopla encima del otro.

De este modo, en cada instante, una celda va a contener un número específico de granos de arena, este es un número entero positivo —denotado con $z_{x,y}$ —. El valor de $z_{x,y}$, representa el número de granos de arena que están apilados en la celda que tiene coordenadas (x, y) .

Sólo podemos agregar un grano de arena a la vez en el sistema. Lo anterior lo podemos hacer de manera aleatoria, sobre cualquier celda del tablero. De este modo, se modifica la altura de la celda en cuestión —i.e el valor de $z_{x,y}$ — en una unidad.

$$z_{x,y} \rightarrow z_{x,y} + 1$$

La adición de un grano de arena a la pila original, hace que el sistema se vaya modificando en cada instante. Lo interesante surge cuando consideramos una restricción a las celdas. Que posean un límite de granos de arena que puedan apilar —capacidad máxima—. Así, cuando una celda tenga los suficientes granos de arena (digamos 4), estos se van a distribuir —uno a uno— hacia las celdas de su vecindad de von Neumann (Fig. 1.3).

Esta regla, que podemos traducir como la regla de *volcadura*, permite que los granos de arena se desplacen de una a otra celda. Se aplica cuando una celda rebasa su capacidad máxima $z_c = 3$. Así, cuando $z_c > 3$, en ese preciso momento, esta celda disminuye su altura $z_{x,y}$ en cuatro unidades —se queda vacía—. De este modo, las celdas vecinas —cada una— aumentan su altura en uno.

Formalmente, decimos que al exceder el valor crítico, i.e $z_{x,y} > z_c = 3$, tenemos que

$$z_{x,y} \rightarrow z_{x,y} - 4$$

$$z_{x\pm 1,y} \rightarrow z_{x\pm 1,y} + 1$$

$$z_{x,y\pm 1} \rightarrow z_{x,y\pm 1} + 1,$$

En la iteración de este proceso, puede suceder que las celdas vecinas, a una en la cual se haya añadido un grano, resulten sobrecargadas (excediendo el valor

crítico z_c). De este modo se genera una reacción en cadena —efecto dominó—. De esta manera surge una avalancha: una sucesión de volcaduras de arena, que ocurren en una o más celdas.

Una avalancha deja de propagarse en el momento en el que ya no hay derrumbes de arena.

Un punto importante a considerar, es que antes de agregar un grano de arena al sistema, debemos dejar que ocurran todas las avalanchas, así hasta que la pila se estabilice —en el sentido que las celdas no rebasan su capacidad máxima—.

En Fig. 4.1, mostramos un ejemplo en donde ocurren este tipo de derrumbes. Aquí ocurre una reacción en cadena sobre una retícula pequeña, después de que se agrega un grano en la celda situada en el centro del tablero.

En dado caso que las celdas que forman los bordes del tablero, resultaran sobrecargadas de arena —excediendo el valor umbral z_c —, los granos de arena que estén apilados en estas celdas salen del tablero, abandonan la dinámica de la pila de arena y no se consideran más en el sistema.

Más allá de la reducción que hace este modelo, de una pila de arena real —en el que se ignoran muchas situaciones físicas—, hemos podido recrear una reacción en cadena a partir de reglas de evolución sencillas.

La adición de un grano —en cualquier lugar de la retícula— afecta en lo colectivo la pila de arena del inicio. Cuando se generen avalanchas de diferentes magnitudes, nos preguntamos ¿cuál es el tamaño de estas? o ¿cuánto tiempo tardan en desarrollarse?

Con el *tamaño de una avalancha* nos referiremos al número de celdas que se ven derrocadas.

Mientras que la duración de una avalancha, se refiere al número de iteraciones requeridas para que sucedan todas las volcaduras y el sistema se estabilice nuevamente.

Así, en nuestro ejemplo el tamaño de la avalancha es 9 y su duración es duración 7 (Fig. 4.2).

Regularmente, cuando se realiza la simulación computacional de este modelo,

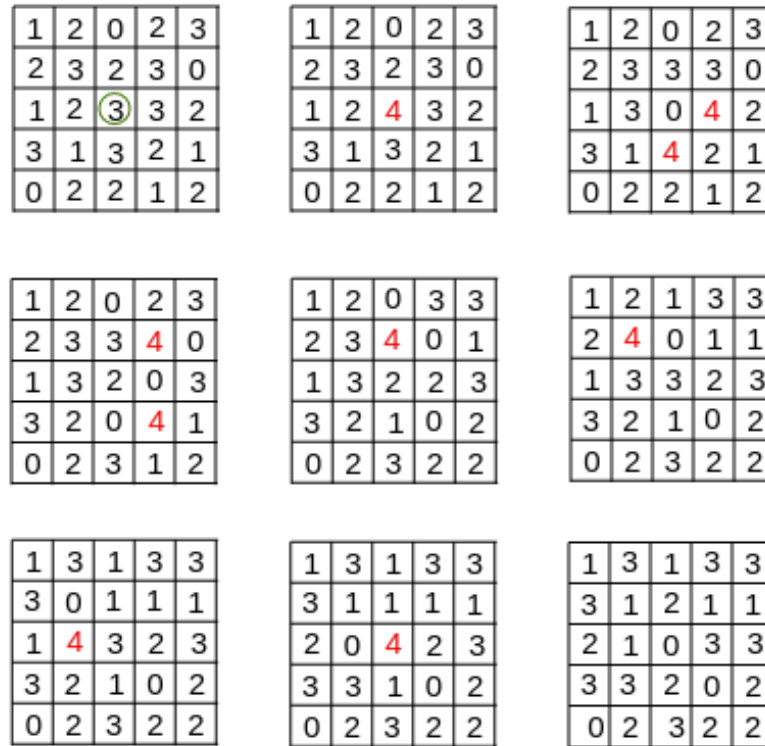


Fig. 4.1: Una avalancha de arena en una retícula de 5 por 5. En la retícula inicial, se coloca un grano de arena en la celda central (la que aparece señalada con un círculo). Esto genera una avalancha. En esta, 9 celdas se «derrumban». La celda central cae dos veces, en diferentes momentos. La duración de la avalancha es de 7 pasos, en la última retícula todo está listo para añadir un grano de arena en cualquier sitio.

es posible caracterizar a las avalanchas en función de su tamaño, el área afectada, así como su duración.

Si S es el tamaño de una avalancha, y $N(S)$ el número de avalanchas de tamaño S , una simulación de la pila de arena, en un tablero de 50 por 50 celdas, nos lleva a graficar la frecuencia con la que ocurren las avalanchas, de acuerdo a su tamaño S (Fig. 4.3).

1	3	1	3	3
3				1
2				3
3	3			2
0	2	3	2	2

Fig. 4.2: Zona afectada por la avalancha.
El área sombreada indica las celdas que se derribaron. El tamaño de la avalancha es 9. Una celda cayó dos veces.

La recta que se ajusta mejor a estos datos es una recta cuya pendiente es negativa. De este modo $N(s)$ y S están relacionados mediante una ley de potencias, que podemos escribir como:

$$N(S) \sim S^{-\tau}$$

Los datos obtenidos para esta simulación, muestran que $\tau \approx 2 \times 10^{-4}$.

Cuando realizamos el ajuste lineal de estos datos, observamos la recta con pendiente τ que se muestra en Fig. 4.4.

Con el fin de corroborar nuestras observaciones del experimento que acabamos de realizar, hemos realizado 5 simulaciones del modelo de la pila de arena. Todas, fijando las mismas condiciones con las que simulamos nuestro primer experimento. Al obtener el promedio en $N(S)$ para cada tamaño de avalancha, hemos obtenido los datos que se resumen en Fig. 4.5. Aquí obtuvimos que $\tau \approx 2.5 \times 10^{-4}$

Haciendo un experimento más, para evaluar cómo se comporta el sistema cuando la variable espacial del AC es más grande, modificamos las dimensiones de la retícula a una de 100×100 . La realización de 5 simulaciones del modelo de la pila de arena, nos muestran que $\tau \approx 0.37$. Por lo que la recta correspondiente a estos datos (Fig. 4.6), tendrá una pendiente (negativa) más grande que en el caso de una retícula de 50×50 .

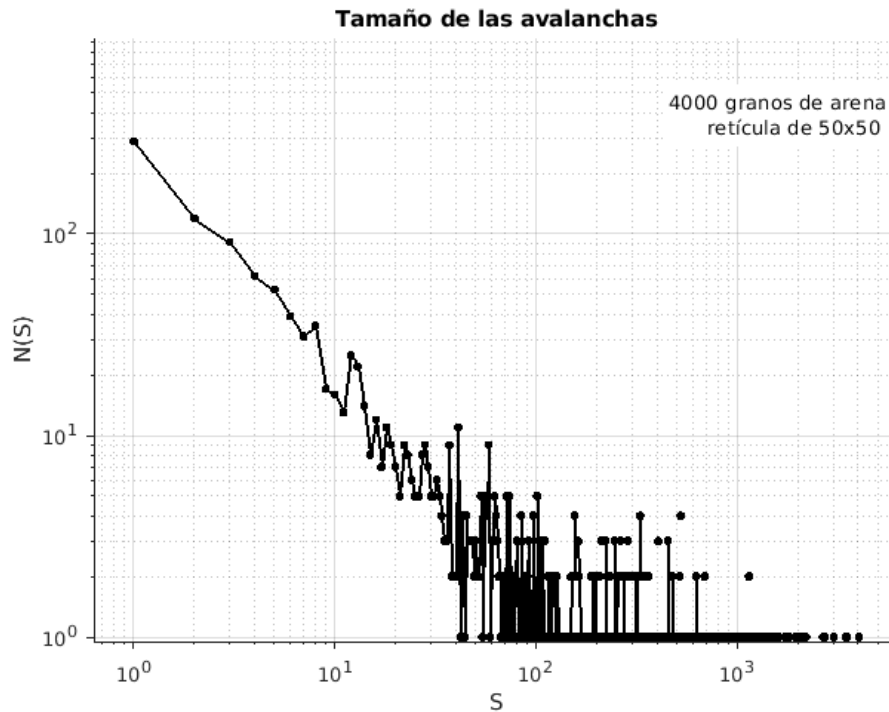


Fig. 4.3: Tamaño de las avalanchas.

La gráfica muestra en escala logarítmica $N(S)$ contra S . En el eje horizontal aparecen en potencias de 10, los valores de S , mientras que en el vertical, el número de avalanchas de tamaño S . En esta simulación, se agregaron 4000 granos de arena —uno a uno— en distintas celdas de la retícula —seleccionadas de manera aleatoria—.

Es decir, que al incrementar la componente espacial de este modelo, el exponente τ , nos indica que la pendiente es más negativa en la aproximación lineal que hagamos de estos datos. Por lo que la dimensión de los bloques de celdas que se vean afectadas por una avalancha serán más pequeños. Eso no impide que sigamos viendo avalanchas de todos los tamaños. Simplemente que la medida de estos bloques modifica su escala.

Esto de algún modo es natural, pues al tener un tablero más amplio, las avalanchas se propagarán de manera que las zonas afectadas, involucrarían menos celdas derrocadas.

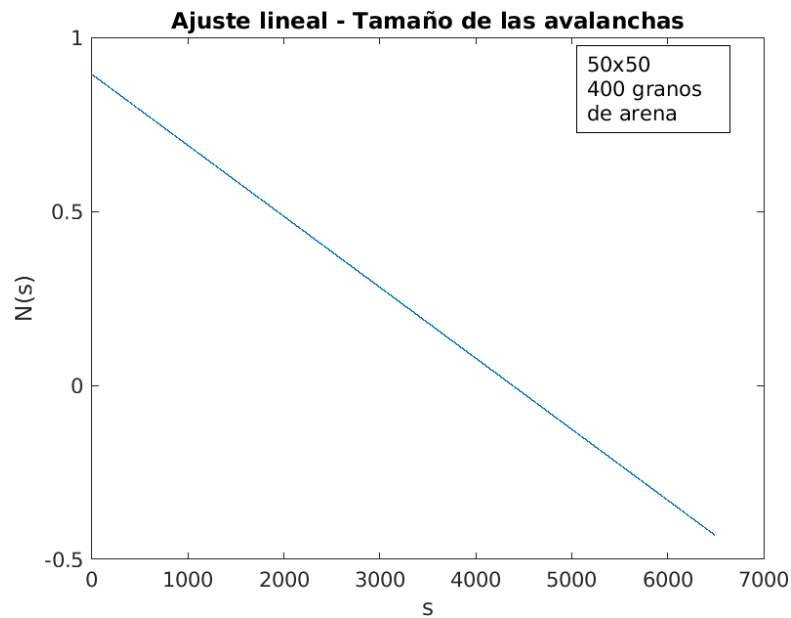


Fig. 4.4: Ajuste lineal del tamaño de las avalanchas.
La gráfica muestra la recta que se ajusta mejor a los datos de la Fig. 4.3.

4.2. Reflexiones finales

Llegamos a un punto en el que quisiéramos reflexionar —brevemente y a manera de conclusión— sobre algunas de las enseñanzas, alcances, limitaciones, así como nuevos cuestionamientos, que nos propone el contenido abordado en los capítulos anteriores (incluida la sección con la que iniciamos este).

Antes de entrar en materia, sobre la parte conceptual, queremos hacer notar que la tónica que se ha establecido como herramienta principal, para acercarnos a los modelos a escala de estos fenómenos, son los autómatas celulares. Sin embargo es preciso mencionar que no podemos limitarnos a un esquema basado en AC. Puede haber otro tipo de modelos, desde los que se puedan abordar estos temas.

Sin embargo por su sencillez, y al discretizar tiempo y espacio, simplifican mucho la dinámica de un fenómeno natural, a pesar de ser continuo. De este modo, siempre nos ofrece una excelente percepción del fenómeno real.

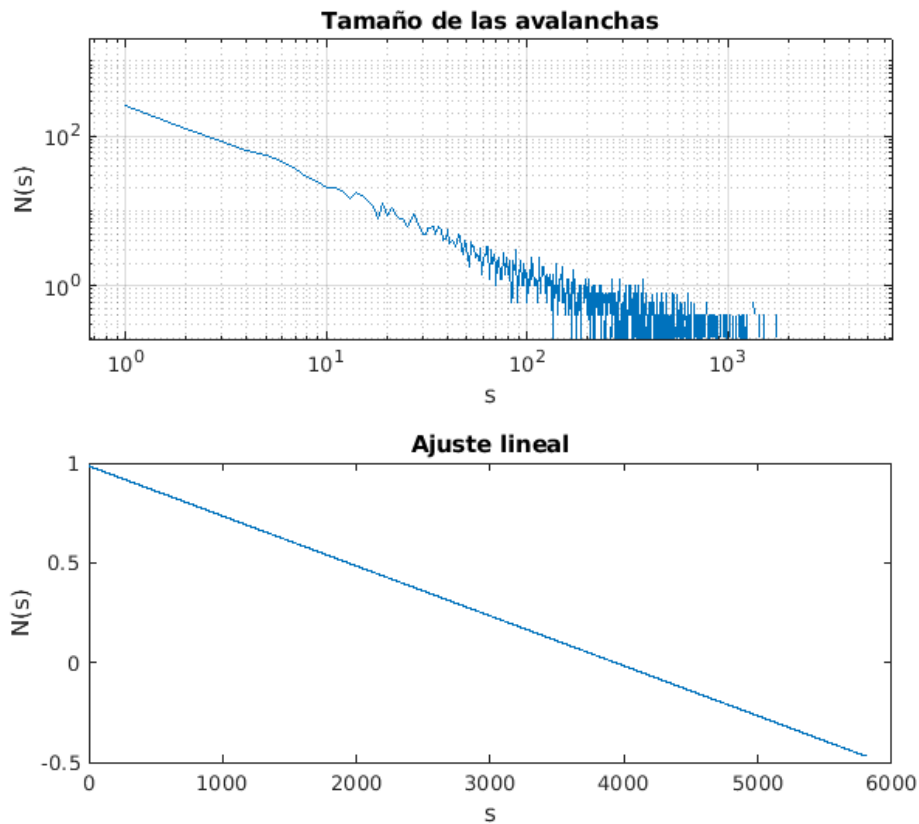


Fig. 4.5: Tamaño de las avalanchas.

[arriba] Gráfica que muestra en escala logarítmica $N(S)$ contra S . Se agregaron 4000 granos de arena —uno a uno— en distintas celdas de la retícula. [abajo] Ajuste lineal de los datos de la gráfica de $N(S)$ contra S . El valor obtenido para τ es aproximadamente 2.5×10^{-4} , que es la pendiente (negativa) de la recta que mejor se ajusta a estos datos.

Un modelo sencillo como al que apelan ciertos AC, sobre fenómenos diversos en la naturaleza, fortalecen nuestra intuición de lo que ocurre en el mundo real, pues nos proporcionan un panorama metafórico del fenómeno en sí.

Quisiéramos resaltar este aspecto: que ya sean terremotos, el cambio climático o la economía mundial, los modelos (y en particular los que usan AC), a partir de los cuales se generan predicciones, en base a cálculos en el sistema, son

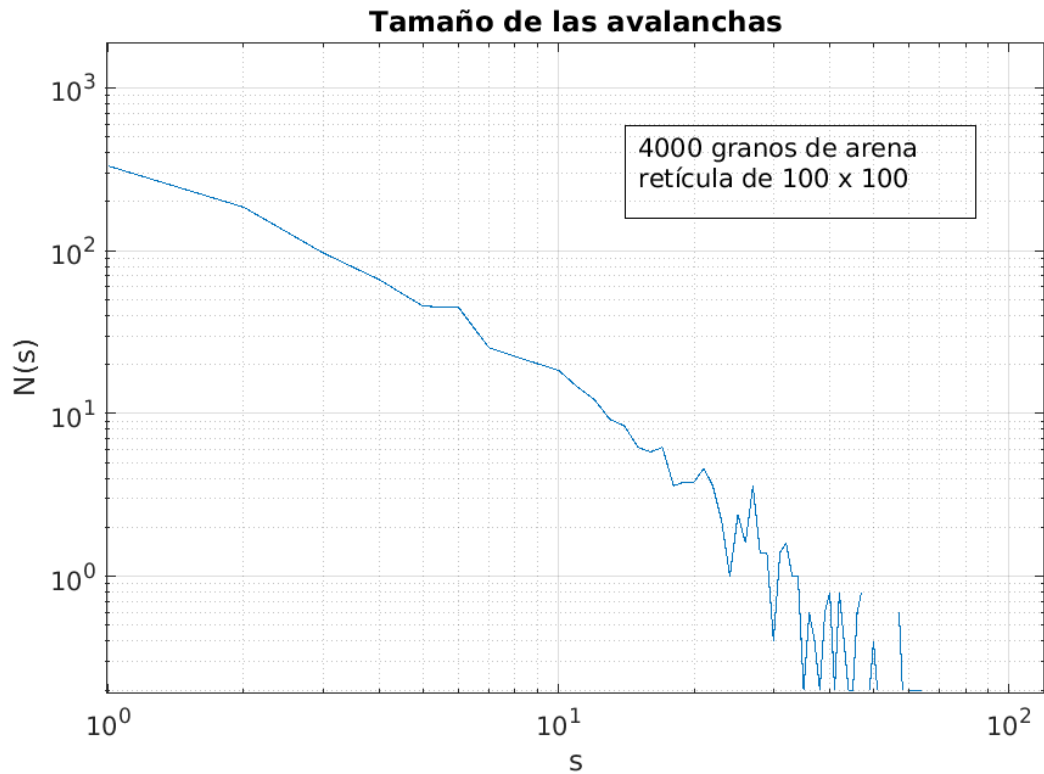


Fig. 4.6: Tamaño de las avalanchas en una retícula de 100×100 . Gráfica de $N(S)$ contra S , en escala logarítmica. El valor obtenido para τ es aproximadamente 0.37.

abstracciones del mundo real y no el fenómeno real como tal.

La naturaleza compleja de este tipo de fenómenos (sistemas dinámicos de gran magnitud), hace que la predicción del momento y el lugar en donde ocurrirán, sea una tarea bastante sofisticada de determinar (como los incendios forestales que ocurren alrededor del mundo, que año con año son devastadores). Así mismo, establecer conclusiones erróneas del estilo «ocurre un sismo de gran magnitud, de manera periódica, el 19 de septiembre en México», nos remiten a atender al hecho de que habría que analizar un fenómeno, como el choque —deslizamiento— de las placas tectónicas, es decir, obtener un registro temporal de este tipo de eventos, y por ende remitirnos a eras geológicas bastante remotas

en la historia de nuestro planeta.

En ese sentido, es preciso apuntar que en este tipo de esquemas —una reacción química, la propagación del fuego, las fluctuaciones de arena—, lo primero que se ha hecho, es identificar los elementos primordiales para la realización de un modelo sencillo, ignorando de algún modo algunos otros detalles que podrían parecer no tan esenciales. Por ejemplo, en el esquema infeccioso propuesto por Dewdney, al utilizar una retícula en donde cada individuo tiene un lugar fijo en el espacio, pasamos por alto la movilidad de los individuos, aquí la interacción es local, un individuo está plantado en su sitio, como una árbol. De este modo algunos podrían decir que queda cubierto el principio de *universalidad*.

El acoplamiento ideal que hacen los granos de arena en la pila de arena, descartan situaciones físicas como la fricción o la influencia del medio circundante.

Por otro lado, nos podemos preguntar ¿qué tienen en común los incendios forestales, las reacciones BZ y la distribución de terremotos? Atendiendo un poco a los cuestionamientos del por qué de incluir —precisamente— estos temas en el presente trabajo. Aquí podemos comentar que todos estos ejemplos, son sistemas dinámicos, y que los elementos que los constituyen interactúan localmente, pero de manera no lineal. Todos ellos evolucionan de acuerdo a reglas sencillas (según su modelo), sin embargo a escala macroscópica muestran un comportamiento bastante complejo.

Los bloques que se forman a largo plazo con celdas incendiadas en el modelo estocástico, visto en el Cap.2, para nada se asemejan al arreglo de árboles con el que se inicia el experimento. Sucede lo mismo con los patrones que emergen en las reacciones BZ.

En la pila de arena, no hay un tamaño de avalancha que prevalezca en el sistema, ocurren avalanchas de todos los tamaños. Así, en la escala de los terremotos, no podemos decir que los sismos de mayor magnitud sean más frecuentes que otros de menor intensidad.

En este punto podemos distinguir dos aspectos: emergencia y autoorganización. Conceptos centrales en el desarrollo de este trabajo. El primero apelando a

la escala y el segundo; tanto a la escala como a la variable temporal.

A pesar de que los fenómenos a los que hicimos alusión, no son lineales, parte de la labor de simplificación que se hace sobre ellos, es describirlos mediante leyes de potencias. Jensen en [15], menciona que algunos de estos exponentes de hecho pueden ser idénticos, aunque los sistemas sean distintos desde la perspectiva microscópica.

Y en este rubro, nos permitimos hacer la pregunta: ¿podemos caracterizar estos fenómenos de acuerdo a los exponentes críticos que se observen?

En este sentido, el surgimiento del concepto de criticalidad autoorganizada (SOC), tuvo un impulso —similar a nuestra inocente pregunta— al tratar de establecer algo así como la segunda ley de Newton para los sistemas complejos. Y aunque nuestras aspiraciones no son tan grandes, luego de estudiar este tipo de sistemas complejos, creemos que podrían existir una amplia gama de nuevas perspectivas sobre cómo explicar estos fenómenos.

Un cambio de fase (genuino), como el que observamos en sistemas termodinámicos, no se percibe en este tipo de sistemas complejos de manera tan contundente. Fijémonos en el modelo de la pila de arena. Cuando observamos avalanchas de todo tipo de tamaños, podemos pensar a este sistema como un sistema dinámico en constante cambio de fases. Y es que de hecho, mencionamos que cuando termina una serie de pequeñas avalanchas (volcaduras), el sistema se *estabiliza*.

Pero ¿cómo podríamos hablar de un estado estable en estas condiciones? Pues, subsecuente a estos estados de *estabilidad marginal*, la adición de un grano de arena puede —o no— producir una avalancha grande o pequeña. Esto es parte de las implicaciones que tiene la falta de una escala característica, que nos diga cuándo el sistema experimenta un cambio en magnitud.

En la constante tarea de abordar estos modelos a escala; sobre fenómenos físicos y químicos, vinieron a tomar parte estos dos conceptos (autoorganización y criticalidad). El tratamiento algo intuitivo —e informal a veces— de estos, nos inspira muchos más motivos para seguir trabajando las nociones sobre com-

plejidad. Y es que citando a Jensen en [15], «la formulación matemática de la criticalidad autoorganizada, es aún emergente.»

◇

APÉNDICE A

Recursos Computacionales

Los siguientes recursos se encuentran en este [repositorio en línea](#). Este funge como la compilación de los modelos computacionales usados en este trabajo. Se ha citado cada una de las fuentes de donde se obtuvieron (en la parte inferior de su descripción).

A.1. Simulación de Modelos con AC

Capítulo 1

La regla 2,2 en Netlogo. Descargue *Rule22.nlogo*, este es un AC que opera con la regla que acabamos de ver (conocida también como la regla 2/2), pero ahora en una retícula de 40 por 40. En esta aplicación en Netlogo podemos dibujar celdas vivas sobre una retícula en donde sólo hay celdas muertas (observe que cuando oprime el botón *limpiar*, en la retícula sólo hay celdas vacías). Dibuje algunas celdas, para ello oprima el botón *dibujar celdas*. Al dar clic sobre la retícula observe que aparecen celdas vivas. Cuando haya dibujado algunas celdas, oprima el botón *avanzar una vez*. Observe cómo cambia la disposición de las celdas vivas. Vuelva a oprimir el botón *avanzar una vez* y observe los nuevos

cambios. Ahora oprima el botón *Play* para observar más iteraciones de la regla 2/2.

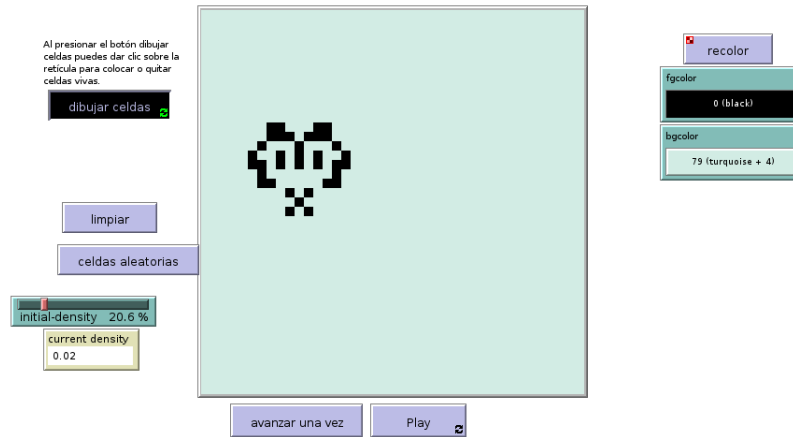


Fig. A.1: Interfaz del AC con la regla 2/2, en Netlogo.

Wilensky, U. (1998). NetLogo Life model. <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/Life> Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL.

Capítulo 2

Un modelo para un incendio forestal en Netlogo. Descargue *Fire.nlogo*, este es un AC determinista para observar la propagación del fuego en un retícula de 250 por 250. El slider *density* se refiere a la densidad de árboles vivos, como lo vimos en el modelo determinista. Deslice este slider de manera conveniente para fijar una cantidad de árboles y luego presione el botón *go*, para correr la simulación y observar la propagación del fuego. Observe que el recuadro llamado *percent burned*, muestra el porcentaje de árboles quemados respecto al volumen inicial de árboles vivos. Con densidades que vayan del 57 al 59%, ¿puede observar que el fuego llegue al otro extremo de la retícula?

Wilensky, U. (1997). NetLogo Fire model. <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/Fire> Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL.

Capítulo 3

«**Brian's Brain**» en Netlogo. Es un modelo de medio excitable que usa la vecindad de Moore y tres estados. *Excitado*, *refractario* y *en reposo*. Para estos utiliza celdas de color blanco, rojo y negro, respectivamente. El valor umbral, con el que una celda en reposo cambia a estado excitado, es cuando existen exactamente dos vecinos en su vecindad. Lo interesante de este modelo es su semejanza con cierta actividad neuronal.

Wilensky, U. (2002). NetLogo Brian's Brain model. <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/Brian\OT1\textquoterightsBrain> Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL.

La reacción BZ en Netlogo. Para ilustrar el comportamiento de la gama de reacciones que tratamos en este capítulo, en el repositorio se encuentra el archivo *Belousov.z.nlogo*. En la interfaz de este, encontrará sliders para variar los parámetros k_1, k_2, g . También es posible definir el número de estados excitados con el control denominado *max-state*. Hemos incluido la gráfica en esta simulación para un mejor análisis.

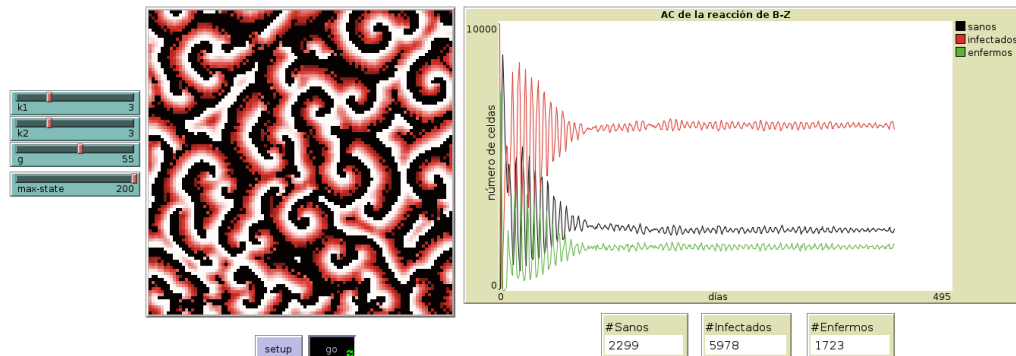


Fig. A.2: Interfaz del modelo de la reacción BZ en netlogo.

Wilensky, U. (2003). NetLogo B-Z Reaction model. <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/B-ZReaction>. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL.

Capítulo 4

El modelo de la pila de arena en Matlab. Simulación computacional del modelo de la pila de arena de Bak-Tang-Wiesenfeld. Muestra una visualización de las avalanchas en una retícula bidimensional, además de que permite ajustar el tamaño del tablero mediante la variable *pile_width*, así como *no_of_grains*, el número de granos de arena que queremos agregar a lo largo de la simulación. Además de la gráfica

de las frecuencias en el tamaño de las avalanchas, esta simulación tiene como salida la matriz *avalanche_output*, en donde podemos analizar el número de avalanchas de cada tamaño.

Florian Roscheck (2022). Visual Bak-Tang-Wiesenfeld Sandpile Model for Matlab https://github.com/flrs/visual_sandpile, GitHub. Consultado el 3 de Octubre de 2022.

A.1.1. Código en Python para el modelo de Drossel y Schawbl

```

1  #AC del modelo de Incendio forestal
2  #Modelo de Drossel y Schwabl(1992).
3  #Basado en el código de Christian Hill en https://scipython.com/blog/the-forest-fire-model/
4  '''Las funciones inicialize y update, así como las gráficas
5  fueron agregadas por Octavio Rodríguez Vega'''
6  import numpy as np
7  import matplotlib.pyplot as plt
8  from matplotlib import animation
9  from matplotlib import colors
10 from operator import itemgetter
11
12 '''Vecindad de Von Neumann '''
13 neighbourhood = ((0, 1),(0,-1),(-1,0), (1,0))
14 '''Los estados para las celdas en la reticula, vacio,
15 árbol y fuego'''
16 EMPTY, TREE, FIRE = 0, 1, 2
17 '''usamos un color para cada celda, observe que hay que agregar uno más a la lista
18 con la intención de que el mapa de colores reconozca los tres que deseamos'''
19 colors_list = [(0.2,0,0), "lawngreen", "gray","darkorange" ]
20 cmap = colors.ListedColormap(colors_list)
21 bounds = [0,1,2,3]
22 norm = colors.BoundaryNorm(bounds, cmap.N)
23 '''se especifican la densidad inicial de árboles, density,
24 así como p, la probabilidad de que surja un árbol en una celda vacia y
25 f la probabilidad de que un árbol se incendie por causas naturales'''
26 density = 0.2
27 p, f = 0.05, 0.0001
28
29 '''las lista universeList contiene los estados de cada una de las celdas de la reticula,
30 es un arreglo de 102 por 102, en donde la orilla no juega un papel en la dinámica.
31 La lista RES es el registro, en cada iteración(currentTimeStep), de árboles vivos y quemados,
32 que se cuentan con la variable oneCount y twoCount, respectivamente '''
33 universeList, RES = [], []
34 oneCount = 0
35 twoCount = 0
36 '''cellCountX y cellCountY son las dimensiones de la reticula'''
37 cellCountX, cellCountY = 102, 102
38 '''Inicialización de la reticula'''
39 def initialize():
40     global currentTimeStep, universeList, RES
41     currentTimeStep=0
42     '''Se llena de celdas vacias primero, luego planta árboles de manera aleatoria
43     y por último, de acuerdo a la densidad, va a acomodar a los árboles vivos, observe que si
44     la condición es verdadera, dicha celda será un árbol vivo, de lo contrario un lugar vacío'''
45     universeList = np.zeros((cellCountX, cellCountY))
46     universeList[1:cellCountY-1, 1:cellCountX-1] = np.random.randint(0, 2, size=(cellCountY-2, cellCountX-2))
47     universeList[1:cellCountY-1, 1:cellCountX-1] = np.random.random(size=(cellCountY-2, cellCountX-2)) < density
48     '''se cuenta cuántos árboles vivos y quemados hay,
49     suponemos que en este paso la cantidad de árboles quemados es cero'''
50     twoCount = np.count_nonzero(universeList==2)
51     oneCount = np.count_nonzero(universeList==1)
52     RES.append([currentTimeStep, oneCount, twoCount])
53
54 '''actualización de la reticula'''
55 def update(universeList):
56     global X1, currentTimeStep, RES
57     '''creamos una reticula espejo de la reticula universeList'''
58     X1 = np.zeros((cellCountX, cellCountY))
59     '''se incrementa el número de iteración'''
60     currentTimeStep += 1
61     '''recorrido de la reticula en donde se aplica la regla de evolución'''
62     for ix in range (1,cellCountX-1):
63         for iy in range (1,cellCountY-1):
64             if universeList[iy,ix] == EMPTY and np.random.random() <= p:
65                 X1[iy,ix] = TREE

```

APÉNDICE B

Leyes de Potencias

Una ley de potencias es una relación entre dos cantidades, digamos x & y .

El cambio que experimenta una variable, da lugar a un cambio proporcional, en la otra cantidad. Así podemos escribir

$$y = ax^k, \tag{B.1}$$

a esta relación, se le llama a veces una relación escalar entre las variables x & y , en donde a y k son constantes distintas de cero.

Decimos que dos cantidades siguen una ley de potencias, cuando podemos expresar una como potencia de la otra, independiente del tamaño inicial de estas dos variables.

Al tomar el logaritmo en ambos lados de la ecuación [B.1](#), obtenemos

$$\log(y) = k \log(x) + \log(a), \tag{B.2}$$

así al graficar de manera logarítmica, obtenemos una línea recta, en donde la pendiente es k .

Una ley de potencias presenta escala invariante. La razón es la siguiente. Observe-mos que una ley de potencias

$$f(x) = x^a,$$

en donde a es un número distinto de cero, al ser evaluada en kx , en donde k es una constante, se tiene que

$$f(kx) = k^a x^a,$$

por lo que el cociente o cambio relativo

$$\frac{f(kx)}{f(x)} = k^a,$$

no depende de x .

Algunos ejemplos de leyes de potencias son, la relación entre el área de una figura plana A , con las dimensiones de un lado l . La relación es $A \sim l^2$.

Observe que cuando se duplica la medida de un lado del cuadrado l , el área de la figura original se multiplica por 4.

Un ejemplo, en la física, es la ley de la atracción gravitacional de Newton. La fuerza F está relacionada con la distancia r , mediante $F \sim r^{-2}$.

Otro ejemplo se encuentra en la ley de Gutenberg-Richter, que relaciona el número de terremotos de cierta magnitud $N(S)$, con la magnitud del terremoto S . La relación $N(S) \sim S^{-\tau}$, representa también una ley de potencias.

Acerca de esta ley, Per Bak en [16], comenta lo siguiente:

«Esta ley es sorprendente, ¿cómo es posible que la dinámica de todos los elementos de un sistema tan sofisticado como la corteza terrestre, con montañas, valles y lagos, puedan conspirar como por arte de magia, para generar una ley extremadamente sencilla?»

La ley de Zipf, en el ámbito de los sistemas humanos, que relaciona el número de ciudades en el mundo (desde 1920), en donde existe cierto número de habitantes. Aquí la relación es $N(s) \sim \frac{1}{s}$, en donde $N(s)$ es el número de ciudades con más de s habitantes. Esta es una ley de potencias con exponente -1 .

Una ley de potencias puede tener exponente negativo, como en este último ejemplo. A esta se le llama un relación inversa, dado que el cambio en una de las cantidades, tiene como resultado el cambio en sentido inverso de la otra.

Los exponentes en una ley de potencias no necesariamente tienen que ser números enteros. Un ejemplo es el de la pila de arena del capítulo 4.

Bibliografía

- [1] M. Simon, “Want to fight the zombie fire apocalypse? weaponize math.” Disponible en <https://www.wired.com/story/want-to-fight-the-zombie-fire-apocalypse-weaponize-math/> (consultado el 5 de Septiembre del 2022).
- [2] G. Ermentrout and L. Edelstein-Keshet, “Cellular Automata Approaches to Biological Modeling,” *Journal of Theoretical Biology*, vol. 160, pp. 97–133, Jan. 1993.
- [3] B. Drossel and F. Schwabl, “Self-organized critical forest-fire model,” *Physical Review Letters*, vol. 69, pp. 1629–1632, Sept. 1992.
- [4] P. Bak, K. Chen, and C. Tang, “A forest-fire model and some thoughts on turbulence,” *Physics Letters A*, vol. 147, pp. 297–300, July 1990.
- [5] H. Sayama, *Introduction to the modeling and analysis of complex systems*. Geneseo, NY: Open SUNY Textbooks, Milne Library, 2015.
- [6] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, “Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise,” *Physical Review Letters*, vol. 59, pp. 381–384, July 1987.
- [7] J. von Neumann, *Theory of Self-Reproducing Automata*, edited and completed by Arthur W. Burks. Illinois, USA: University of Illinois Press, 1966.

- [8] M. Gardner, "Conway's Game of Life: Scientific American, October 1970." Disponible en <https://www.ibiblio.org/lifepatterns/october1970.html> (consultado el 7 de Octubre del 2022).
- [9] A. Ilachinski, *Cellular automata: a discrete universe*. Singapore ; River Edge, NJ: World Scientific, 2001. OCLC: ocm47721403.
- [10] E. Weisstein, "Treasure trove of the life cellular automaton." Disponible en <http://www.ericweisstein.com/encyclopedias/life/> (consultado el 17 de Agosto del 2022).
- [11] D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction to percolation theory*. London: Taylor & Francis, rev. 2. ed., transferred to digital print ed., 2003.
- [12] J. D. Murray, *Mathematical biology*. Interdisciplinary applied mathematics, New York: Springer, 3rd ed ed., 2002.
- [13] A. K. Dewdney, "Computer Recreations," *Scientific American*, vol. 258, pp. 100–103, Jan. 1988.
- [14] M. Gerhardt and H. Schuster, "A cellular automaton describing the formation of spatially ordered structures in chemical systems," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 36, pp. 209–221, Aug. 1989.
- [15] H. J. Jensen, *Self-organized criticality: emergent complex behavior in physical and biological systems*. No. 10 in Cambridge lecture notes in physics, Cambridge ; New York: Cambridge University Press, 1998.
- [16] P. Bak, *How Nature Works: the Science of Self-Organized Criticality*. New York, NY: Springer, 2013. OCLC: 1059402712.
- [17] G. d. Vries, ed., *A course in mathematical biology: quantitative modeling with mathematical and computational methods*. Mathematical modeling and computation, Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006. OCLC: ocm65341291.

- [18] A. Deutsch and S. Dormann, *Cellular automaton modeling of biological pattern formation: characterization, applications, and analysis*. Modeling and simulation in science, engineering and technology, Boston: Birkhauser, 2005.
- [19] J. L. Schiff, *Cellular automata: a discrete view of the world*. Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization, Hoboken, N.J: Wiley-Interscience, 2008. OCLC: ocn154713093.
- [20] B. Chopard and M. Droz, *Cellular automata modeling of physical systems*. No. 6 in Collection Aléa-Saclay, Cambridge, [England] ; New York: Cambridge University Press, 1998.
- [21] J. Miyazaki, "Belousov–Zhabotinsky Reaction," in *Pattern Formations and Oscillatory Phenomena*, pp. 61–83, Elsevier, 2013.
- [22] K. Sawhill, "Self-organized criticality and complexity theory," *Nadel L., Stein DL (eds)*, 1993.
- [23] M. R. Schroeder, *Fractals, chaos, power laws: minutes from an infinite paradise*. New York: W.H. Freeman, 1991.