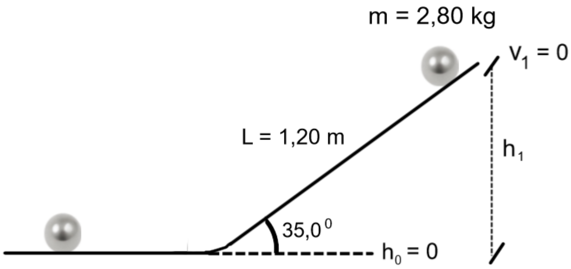
Oppgave 1

a)



Kulas hastighet når den ikke ruller nedover skråplanet finner vi fra loven om bevaring av den totale mekaniske energien. Med $h_0 = 0$ og $\mathrm{v}_1 = 0$ gir dette at:

$$mgh_1 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{v}_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gL\sin 35^0}$$

$$= \sqrt{2\cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}\cdot 1{,}20\ \mathrm{m}\cdot \sin 35^0} = 3{,}67\ \mathrm{m/s}$$

Den tilsvarende kinetiske energien er

$$E_K = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 2{,}80\ \mathrm{kg}\cdot(3{,}67\ \mathrm{m/s})^2 = 18{,}9\ \mathrm{J}$$

b)

1) Ettersom krafta som virker på kula nedover skråplanet er konstant vil også akselerasjonen a være konstant. Kulas hastighet idet den forlater skråplanet er dermed gitt ved:

$$\mathrm{v}_0^2 - \mathrm{v}_1^2 = 2aL \Rightarrow \mathrm{v}_0 = \sqrt{2aL} = \sqrt{2\cdot 4{,}02\ \mathrm{m/s^2}\cdot 1{,}20\ \mathrm{m}} = 3{,}11\ \mathrm{m/s}$$

   Kulas vinkelhastighet i same posisjon er:

$$\omega_0 = \frac{\mathrm{v}_0}{r} = \frac{2\mathrm{v}_0}{d} = \frac{2\cdot 3{,}11\ \mathrm{m/s}}{0{,}030\ \mathrm{m}} = 207\ \mathrm{rad/s}$$

2) Basert på verdiene funnet i del 1) er den lineære kinetiske energien og den roterende kinetiske energien henholdsvis:

$$E_{K,lin} = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 2{,}80\ \mathrm{kg}\cdot(3{,}11\ \mathrm{m/s})^2 = 13{,}5\ \mathrm{J}$$

$$E_{K,rot} = \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\omega_0^2 = \frac{1}{5}mr^2\omega_0^2$$

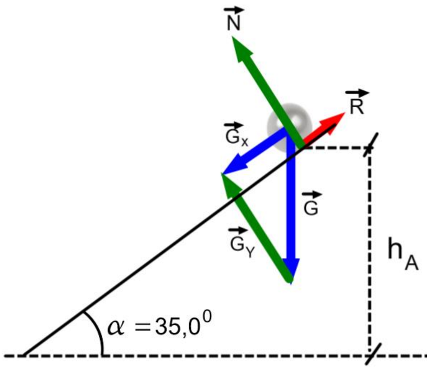
$$= \frac{1}{5}\cdot 2{,}80\ \mathrm{kg}\cdot(0{,}015\ \mathrm{m})^2\cdot(207\ \mathrm{rad/s})^2 = 5{,}40\ \mathrm{J}$$

Dette viser at

$$E_{K,tot} = E_{K,lin} + E_{K,rot} = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = 18{,}9\ \mathrm{J}$$

Denne verdien for $E_{K,tot}$ samsvarer med den kinetiske energien for kula som glir friksjonsfritt uten å rulle nedover skråplanet i oppgave a). Her det sentralt å innse at den **totale mekaniske energien er den samme** både for kula som kun glir nedover skråplanet og kula som ruller nedover skråplanet. Forskjellen er at den totale kinetiske energien for den rullende kula er **delt opp** i henholdsvis et rettlinjet og et roterende kinetisk energibidrag. Dette er ikke tilfelle for kula som kun glir nedover skråplanet.

c)



Figuren viser kreftene som virker på kula mens den ruller nedover skråplanet. Friksjonskrafta $\vec{R}$ finnes ved å benytte rotasjonsdynamikkens grunnlov der:

$$\tau = r \cdot |\vec{R}| = I\alpha = I\frac{a}{r}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{R}| = R = I \cdot \frac{a}{r^2} = \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{a}{r^2} = \frac{2}{5}ma = \frac{2}{5} \cdot 2{,}80\ \mathrm{kg} \cdot 4{,}02\ \mathrm{m/s^2} = 4{,}50\ \mathrm{N}$$

d) Loven om bevaring av den totale mekaniske energien vil i dette tilfelle være gitt ved

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh = \text{konstant}$$

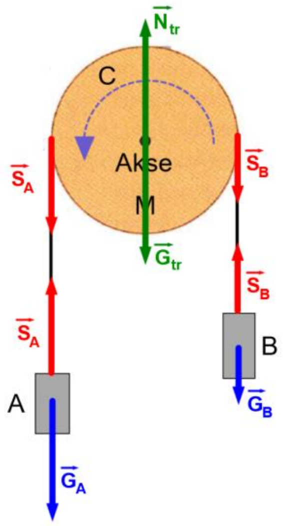
Mer spesifikt med hensyn på posisjon A oppe på skråplanet og posisjon B på toppen av loopen gir dette at

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_A^2 + \frac{1}{2}I\omega_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2 + mgh_B$$

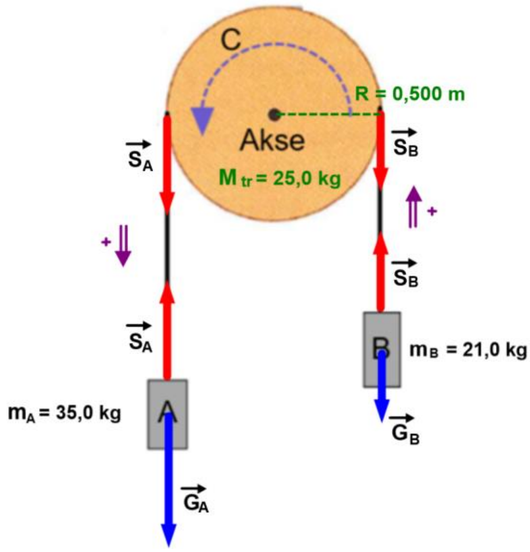
Legg merke til at treghetsmomentet I ikke endrer seg selv om kula går fra en lineær forflytning nedover langs skråplanet til en sirkulær forflytning inne i loopen.

Oppgave 2

a) Figur som viser alle kreftene som virker på trinsa.



b) De to kreftene $\vec{G}_{tr}$ og $\vec{N}_{tr}$ tegnet inn i figuren i oppgave a) bidrar ikke til loddets akselerasjon a siden de to kreftene går gjennom aksen til trinsa (arma $= 0$). De kreftene som bidrar til a er angitt i figuren nedenfor:



Vi finner a ved å sette opp de tre bevegelsesligningene

$$G_A - S_A = m_A a \qquad (1)$$

$$S_B - G_B = m_B a \qquad (2)$$

$$\tau = (S_A - S_B)R = I\alpha = \frac{Ia}{R} \qquad (3)$$

Ligning (3) gir direkte at:

$$S_A - S_B = \frac{Ia}{R^2} \qquad (4)$$

Kombinerer vi ligningene (1) og (2) finner vi at differensen på venstre side i ligning (4) også kan uttrykkes på formen:

$$S_A - S_B = m_A g - m_A a - m_B a - m_B g$$

Med andre ord:

$$m_A g - m_A a - m_B a - m_B g = \frac{Ia}{R^2}$$

Ettersom treghetsmomentet til trinsa er

$$I = \frac{1}{2} M_{tr} R^2$$

gir dette etter litt reorganisering at

$$a = \frac{(m_A - m_B)g}{m_A + m_B + \frac{1}{2} M_{tr}} = \frac{(35{,}0\ \mathrm{kg} - 21{,}0\ \mathrm{kg}) \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}{35{,}0\ \mathrm{kg} + 21{,}0\ \mathrm{kg} + \frac{1}{2} \cdot 25{,}0\ \mathrm{kg}} = 2{,}00\ \mathrm{m/s^2}$$

c) Snordragene S_A og S_B finner vi fra henholdsvis ligning (1) og (2):

$$S_A = m_A(g - a) = 35{,}0\ \mathrm{kg} \cdot (9{,}81\ \mathrm{m/s^2} - 2{,}00\ \mathrm{m/s^2}) = 273\ \mathrm{N}$$

$$S_B = m_B(g + a) = 21{,}0\ \mathrm{kg} \cdot (9{,}81\ \mathrm{m/s^2} + 2{,}00\ \mathrm{m/s^2}) = 248\ \mathrm{N}$$

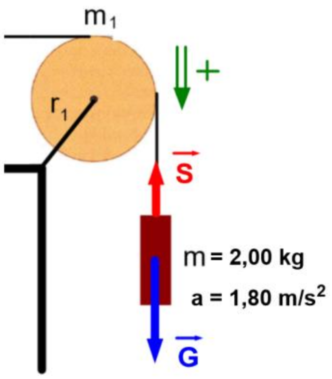
d) Ligning (4) i oppgave a) angir direkte at når trinsa roterer så gjelder sammenhengen

$$S_A - S_B = \frac{Ia}{R^2} \neq 0$$

Denne sammenhengen viser at snordragene S_A og S_B ikke kan ha samme verdi ettersom trinsas treghetsmoment $I \neq 0$ når den roterer (akselerasjonen a og trinseradiusen R er i utgangspunktet forskjellige fra null). Sagt på en annen måte: $S_A \neq S_B$ da et dreiemoment $\tau = (S_A - S_B)R = I\alpha \neq 0$ sørger for at trinsa begynner å rotere idet loddene slippes. Den underliggende årsaken til at dette dreiemomentet oppstår er friksjonskreftene som virker mellom trinsa og snora. Dersom disse friksjonskreftene ikke er tilstede vil ikke trinsa rotere ($I = 0$), noe som innebærer at $S_A = S_B$.

Oppgave 3

a)



Kreftene som virker på loddet:

1. Gravitasjonskrafta G på loddet er

$$G = mg = 2{,}00\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} = 19{,}6\ \mathrm{N}$$

2. Newtons 2.lov gir videre at snordraget på loddet er:

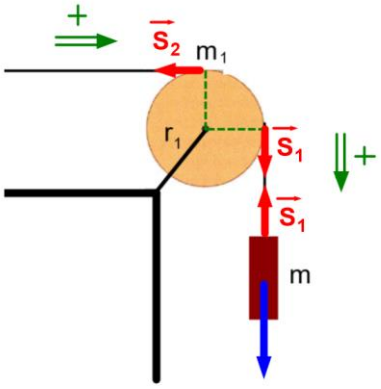
$$\sum F = G - S_1 = ma$$

$$\Rightarrow \quad S_1 = mg - ma = m(g-a)$$

$$= 2{,}00\ \mathrm{kg} \cdot (9{,}81\ \mathrm{m/s^2} - 1{,}80\ \mathrm{m/s^2})$$

$$= 16{,}0\ \mathrm{N}$$

b) Figur:



Positiv retning velges i rotasjonsretningen til trinsa

Snordraget S_1 er like stort som snordraget på loddet. Det vil si:

$$S_1 = 16{,}0\ \mathrm{N}$$

Snordraget S_2 finner vi ved å benytte rotasjonsdynamikkens grunnlov:

$$\tau = (S_1 - S_2)r_1 = \frac{Ia}{r_1}$$

Den solide trinsas treghetsmoment er gitt ved:

$$I = \frac{1}{2}m_1 r_1^2$$

og innsatt i uttrykket for dreiemomentet τ over gir dette:

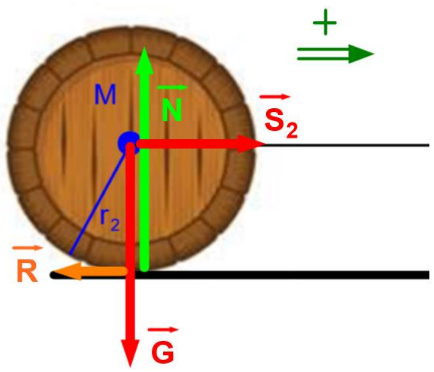
$$\tau = (S_1 - S_2)r_1 = \frac{1}{2}m_1 r_1^2 \cdot \frac{a}{r_1} = \frac{1}{2}m_1 r_1 \cdot a$$

Snordraget S_2 blir dermed av størrelsesorden:

$$S_1 r_1 - S_2 r_1 = \frac{1}{2}m_1 r_1 \cdot a \quad \Rightarrow \quad S_2 = S_1 - \frac{1}{2}m_1 a$$

$$\Rightarrow \qquad S_2 = 16{,}0\ \mathrm{N} - \frac{1}{2} \cdot 1{,}10\ \mathrm{kg} \cdot 1{,}80\ \mathrm{m/s^2} = 15{,}0\ \mathrm{N}$$

c) Kreftene som virker på tønna:



Kreftene som virker på tønna er henholdsvis:

1. Gravitasjonskrafta $\vec{G}$.
2. Normalkrafta $\vec{N}$
3. Snordraget $\vec{S}_2$
4. Friksjonskrafta $\vec{R}$.

Gravitasjonskrafta og normalkrafta:

$$G = N = M_t g = 5{,}00\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} = 49{,}1\ \mathrm{N}$$

Snordraget $S_2 = 15{,}0$ N fra oppgave b).

Friksjonskrafta R finner vi fra Newtons 2.lov (positiv retning mot trinsa):

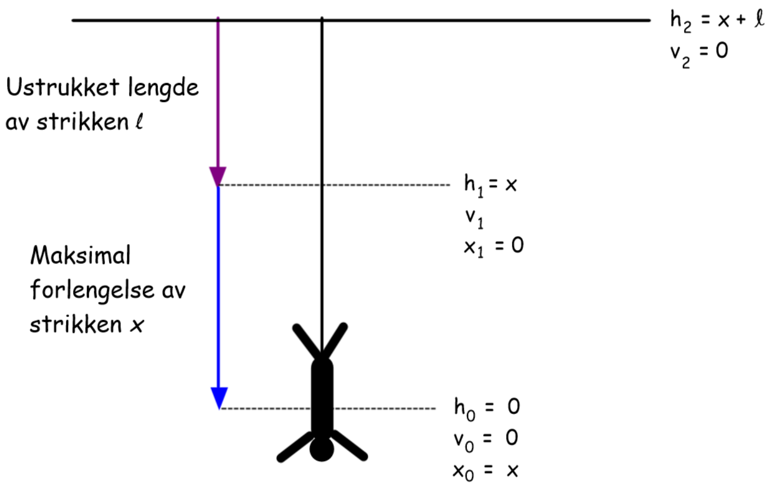
$$S_2 - R = Ma \quad \Rightarrow \quad R = S_2 - Ma = 15{,}03\ \mathrm{N} - 5{,}00\ \mathrm{kg} \cdot 1{,}80\ \mathrm{m/s^2} = 6{,}03\ \mathrm{N}$$

Tønnas treghetsmoment I finner vi fra rotasjonsdynamikkens grunnlov:

Det er kun friksjonskrafta $\vec{R}$ som bidrar til tønnas dreiemoment da snorkrafta $\vec{S}_2$, gravitasjonskrafta $\vec{G}$ og normalkrafta $\vec{N}$ alle har retning enten bort fra, eller inn mot, senteret av tønna. Det vil si:

$$\tau = r_2 \cdot R = I \frac{a}{r_2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{r_2^2 \cdot R}{a} = \frac{(0{,}20\ \mathrm{m})^2 \cdot 6{,}03\ \mathrm{N}}{1{,}80\ \mathrm{kgm^2}} = 0{,}134\ \mathrm{kgm^2}$$

Oppgave 4



Velger nullpunktet for høyden der strikken er maksimalt utstrukket. I løpet av fallhøyden $h = l$ oppnår hun ifølge loven om bevaring av den totale mekaniske energien en kinetisk energi av størrelsesorden:

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2 + mgx = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_2^2 + mg(x+l)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2 + mgx = mg(x+l) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2 = mgl$$

Når fjæra begynner å strekke seg virker det <u>to krefter</u> i systemet: gravitasjonskrafta og fjærkrafta. Dermed må vi sette opp følgende <u>utvidede energiligning</u> med hensyn på den <u>totale</u> potensielle energien i systemet når fjæras utstrekning ut fra likevektspunktet er maksimal:

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + mgx = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_0^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mgh_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2 + mgx = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow \qquad mgl + mgx = mg(l+x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Ligningen til høyre samsvarer med alternativ E.