NTNU
Norwegian University of Science and Technology

Investeringsanalyse

- Definisjon av grunnleggende presupposisjoner
- Bestem kontantstrømmer
- Kalkulasjonsrenta, nåverdi og slutverdi
- Metoder for å evaluere kontantstrømmer
  - Tilbakebetalingstiden – Pay Back
  - Nettonåverdi
  - Nåverdiskvoten
  - Internrente
  - Annuitet
- Summering

Definisjon

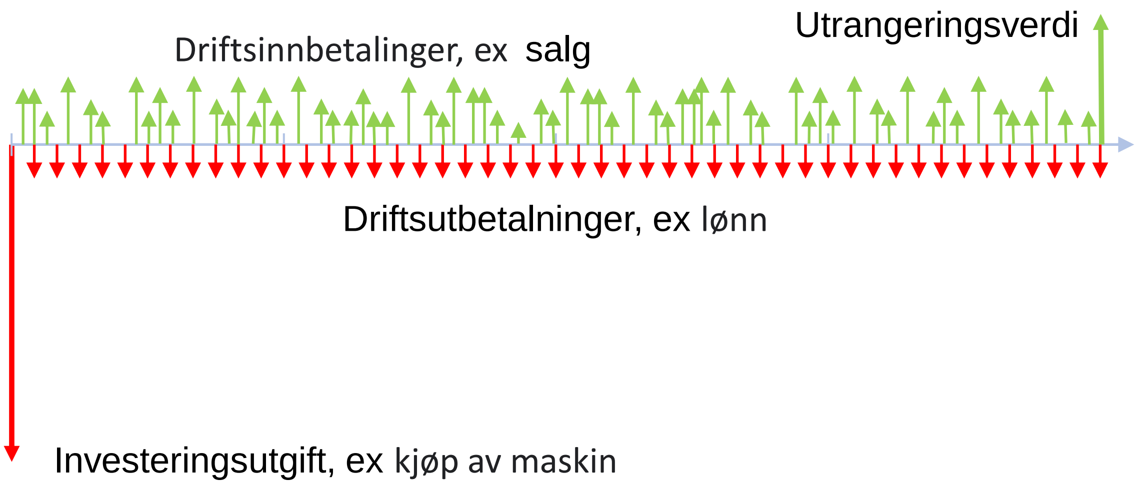
- ”… å bruke ressurser i dag for å skaffe seg bedre ressursgrunnlag i fremtiden”
- ”Investering er utsettelse av forbruk i dag til fordel for forbruk i fremtiden”

Grunnleggende presupposisjoner

- Folk liker å konsumere ting,…
- … de er utålmodige og …
- … misliker risiko.

Investeringsanalyse

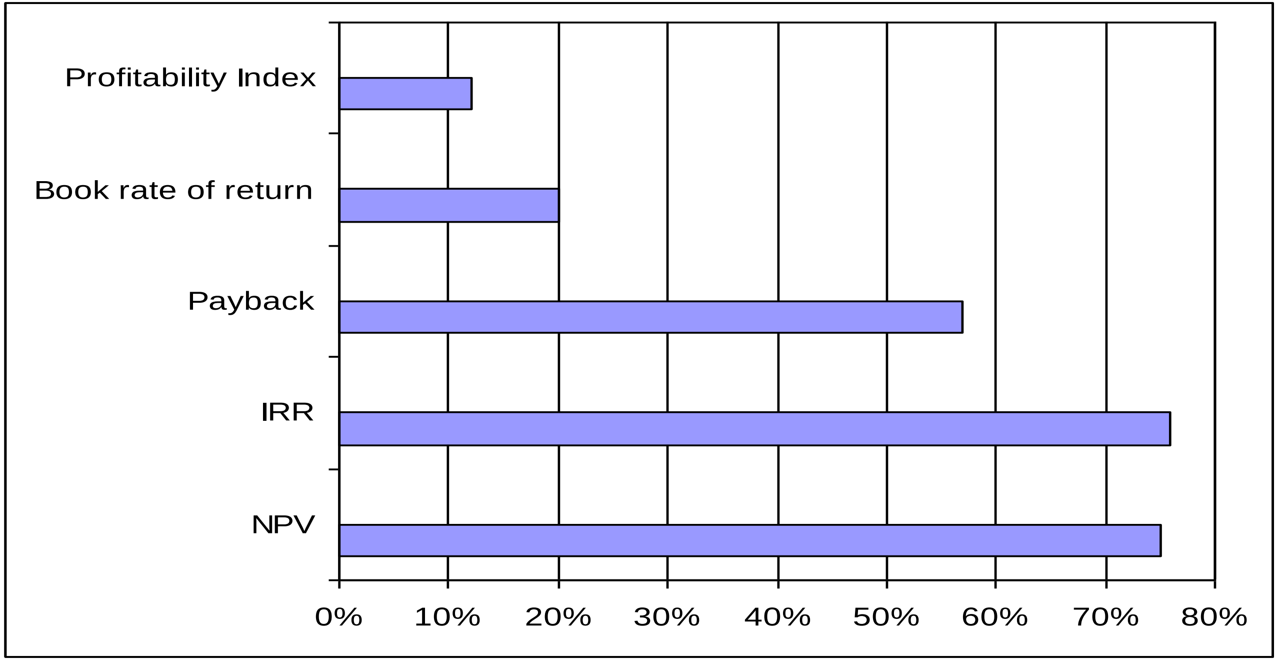
1. Bestem framtida kontantstrømmer
2. Bestem verdien av disse kontantstrømmene
3. Vurder risiko og fleksibilitet



Bestem verdien av kontantstrømmen

- Økonomibaserte teknikker (Economics based techniques)
  - Nettonåverdi (Net Present Value)
  - Nåverdiskvoten (Profitability index)
  - Internrente (Internal Rate of Return)
  - Annuitet (Annuity)
- Regnskapsbaserte teknikker (Accounting based tech.)
  - Tilbakebetalingstid (Pay-Back)
  - Book-rate of return – Accounting rate of return

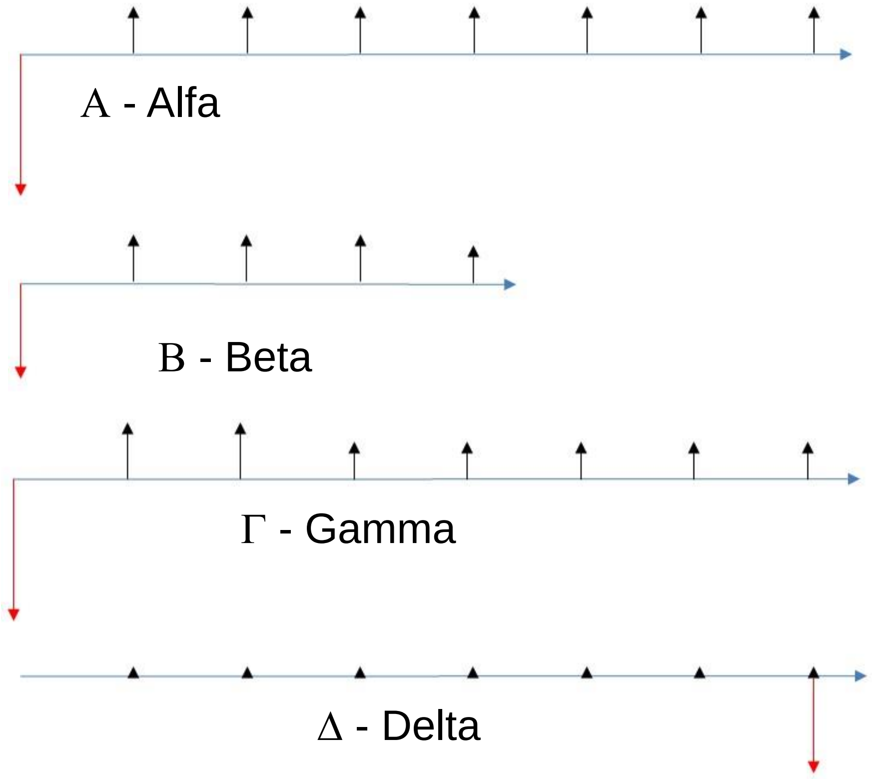
Bestem verdien av kontantstrømmen



Adapted from : Graham, J. R., & Harvey, C. R. (2001). The theory and practice of corporate finance: Evidence from the field. *Journal of financial economics*, *60*(2-3), 187-243.

Eksempel

	Α	Β	Γ	Δ
G	150	100	150	1
N_e	7	4	7	7
a_1	50	50	60	5
a_2	50	50	60	5
a_3	50	50	40	5
a_4	50	40	40	5
a_5	50		40	5
a_6	50		40	5
a_7	50		40	5
S	0	0	0	-100
r	20%	20%	20%	20%



Kontantstrømmer

Investeringsutgift, G

- Refererer til alle betalinger som skjer når investeringsobjektet blir anskaffet og tatt i bruk.
- Disse er i nær fremtid og kan vurderes med relativt høy sikkerhet ved hjelp av anbud etc.
- Glem ikke såkalte konsekvensinvesteringer
  - Hjemkjøring
  - Installasjon
  - Opplæring
  - Økning av omløpsmidler
- Alternativkostnader skal tas hensyn til
  - Eks. «kostnad» for et lokale som ikke kan selges
- Disse betalingene tilskrives vanligvis til tidspunkt 0, $\mathrm{k}_0 = -\mathrm{G}$

Innbetalingsoverskudd (drift), a_t

- Summen av inn- og utbetalinger fra drift, $a(t) = I(t) - U(t)$
- Alternativkostnader/inntekter skal tas hensyn til
- Inn- og utbetalinger tilskrives vanligvis slutten av hvert år.
- De antas dermed å forekomme samtidig, noe som betyr at det er tilstrekkelig å studere forskjellen mellom disse, dvs....
- ... innbetalingsoverskuddet $a_t = \int_{\tau=t-1}^{t} I(\tau) - U(\tau) dt$

Utrangerings-/Restverdi, S

- Verdien (positiv / negativ) av investeringen på slutten av den økonomiske levetiden, N_e.
  - Salgs-/skrapverdi
  - Riving
- Kontantstrømmer
  - $k_{N_e} = S + a_{N_e}$
  - $k_t = a_t \,;\, 0 < t < N_e$

Økonomisk levetid, $\mathbf{N_e}$

- Det antall år en investering antas å være lønnsom for bedriften.
- Anleggsmiddelet kan fremdeles fungere, $\mathrm{N_t} > \mathrm{N_e}, \ldots$
- … men nye modeller eller økt vedlikehold kan gjøre at den ikke lenger er lønnsom.

Kapitalkostnad og Nåverdi

Kapitalkostnad/rente, r

- Bedriftens krav til fortjeneste (avkastning)
- Fanger tidsverdien av penger, dvs. betalingens nåverdi

- Settes i forhold til investeringens systematiske risiko

$$\mathrm{r} = \text{Risikofri rente} + \text{risikotillllegg}$$

- Skiller mellom nominell rente (avkastning i penger) og realrente (avkastning i verdi /konsumpsjon)

Kapitalkostnadssynonymer

- Alternativkostnadene til kapital brukt i nåverdiberegninger omtales også som:
  - Kalkulasjonsrente
  - Diskonteringsrente
  - Forventet avkastning
  - Avkastningskrav
  - ...

Tidsverdi av penger – nåverdi

- Nåverdi uttrykker verdien nå av pengebeløp som kommer i framtiden
- Minieksempel
  - Hva er nåverdien av å få 1000 om ett år dersom kapitalkostnaden/kalkulasjonsrenten er 12 % p.a.?
  - Verdi om ett år pr krone investert nå: $1 + 12\% = 1.12$
  - Nåverdi, NV, investert nå skal gi $1\ 000$ om ett år:

$$NV \cdot 1.12 = 1000 \Rightarrow NV = 1000/1.12 \approx 892.9$$

  - 892.9 nå gir 1000 om ett år hvis investert med 12% avkastning og er derfor nåverdien til 1000 om ett år

Sluttverdi/Nåverdi

Hvis vi nå investerer 1000kr (f.eks. setter dem inn i banken) med en årlig avkastning på $\mathrm{r} = 12\%$. Hvor stor er verdien etter n år?

Nåverdi	n			Sluttverdi
1000	1år	$1000 \cdot (1+12\%) =$	$1000 \cdot 1.12 =$	1120.00
	2år	$1120 \cdot (1+12\%) =$	$1000 \cdot 1.12^2 =$	1254.40
	3år	$1254 \cdot (1+12\%) =$	$1000 \cdot 1.12^3 =$	1404.93
	. . .	. . .		. . .
	10år	$2773 \cdot (1+12\%) =$	$1000 \cdot 1.12^{10} =$	3105.85

Kapitalisere: Flytt betalingskonsekvensene fremover i tid

$$\text{Sluttverdi} = \text{Nåverdi} \cdot (1+r)^n$$

Nåverdi/Sluttverdi

Hva er verdien på 1000kr år n fra en investering med $\mathrm{r} = 12\%$?

Sluttverdi	n			Nåverdi
1000	1år	1000 / (1+12%) =	$1000 / 1.12 =$	892.86
	2år	893 / (1+12%) =	$1000 / 1.12^2 =$	797.19
	3år	797 / (1+12%) =	$1000 / 1.12^3 =$	711.78
	.	.		.
	.	.		.
	.	.		.
	10år	361 / (1+12%) =	$1000 / 1.12^{10} =$	321.97

Diskontere: Flytt betalingskonsekvensene tilbake i tid

Nåverdi = Sluttverdi / $(1+r)^n$

Effektiv rente

Hvor stor er den effektive årlige renten hvis den årlige listerenten er 12% og renten betales hver

	j		Effektive årsrente
År	1	$(1+12\%) - 1 =$	12.00%
Halvt år	2	$(1+12\%/2)^{2} - 1 =$	12.36%
Kvartal	4	$(1+12\%/4)^{4} - 1 =$	12.55%
Måned	12	$(1+12\%/12)^{12} - 1 =$	12.68%
Dag	365	$(1+12\%/365)^{365} - 1 =$	12.75%

Generell formell: $r_{eff} = \left(1 + \frac{r}{j}\right)^{j} - 1$

Maksimal årsrente: $\hat{r}_{eff} = \lim_{j \to \infty} \left(1 + \frac{r}{j}\right)^{j} - 1 = e^{r} - 1 = e^{0.12} - 1 = 12.75\%$

Real og nominell rente

Real og nominell rente

- Nominell rente, r_N, er rente i penger
- Realrente, r_R, er rente i verdi/konsumpsjon
- Forholdet mellom nominell rente og realrente er

$$r_N = r_R + \text{infl.} + r_R \cdot \text{infl.} \approx r_R + \text{infl.}$$

hvilken er kjent som Fisher-effekten etter Irving Fisher

Forventet økning av penger

Forventet økning av verdi/konsumpsjon

Forventet økning av priser (KPI)

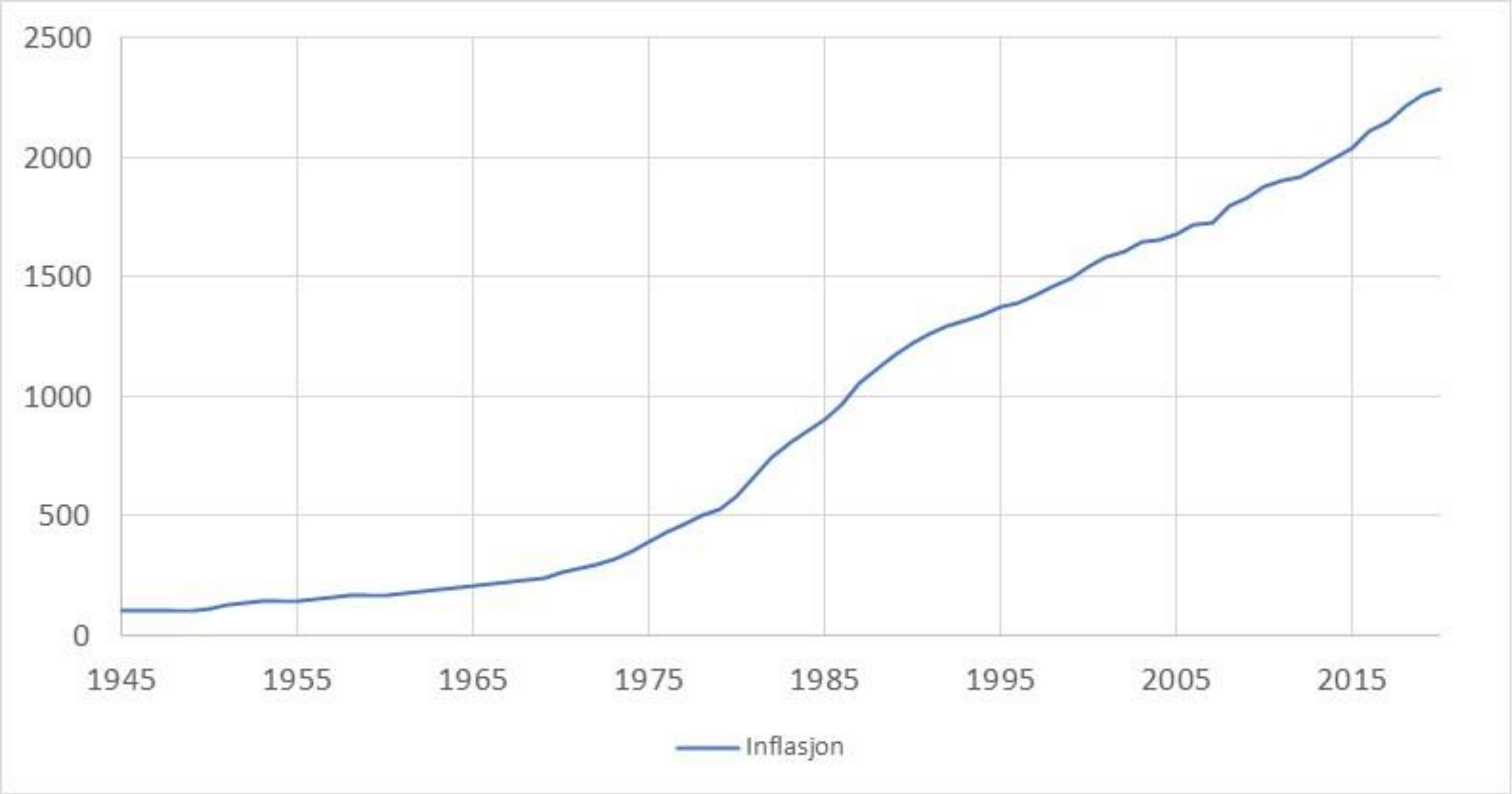
Tidsverdi av penger – nåverdi

- Hva er nåverdien av å få 1000 kr om ett år dersom den reale kapitalkostnaden/kalkulasjonsrenten er $12\ \%$ p.a. om inflasjonen er 2%?
- Krav om ”kompensasjonskonsumpsjon” for hver enhet ikke konsumeres nå er 1.12 ”konsumpsjonsenheter / k-enheter” om ett år.
- Anta at 1 ”k-enhet” koster 1 kr nå da vil den koste 1.02 kr om ett år => for 1000 kr kan man då kjøpe $1000/1.02 = 980.4$ ”k−enheter” om ett år
- Nåverdi, NV, investert nå skal gi $1\ 000\mathrm{kr} = 980.4"\mathrm{k} - \mathrm{enheter}"$ om ett år:

$$NV \cdot 1.12 = 980.4 = \frac{1000}{1.02} \Rightarrow NV = \frac{1000}{1.02 \cdot 1.12} = \frac{1000}{1.1424} \approx 875.4$$

- En investering på 875.4kr nå gir $1000\mathrm{kr}$ om ett år hvis investert med 14.24% nominell avkastning. Man kan kjøpe samme konsumpsjon for disse 1000kr som du kan kjøpe for 980.4kr i dag, dvs. $980.4/875.4 - 1 = 12\%$ mer.
- Nåverdien til $1\ 000$kr om ett år er derfor 875.4

Inflasjon – Generelle prisendringer



Inflasjon og prisendringer

I Pippi på rømmen kjøper Pippi 18 kg karameller for en gullmynt. Var dette ett godt kjøp for Pippi?

Inflasjon og prisendringer

- En "standard" gullmynt veier ca. 5-6 g og er 22 karat …
- … gullprisen er ca. 500kr/g => ca. 2500kr/mynt.

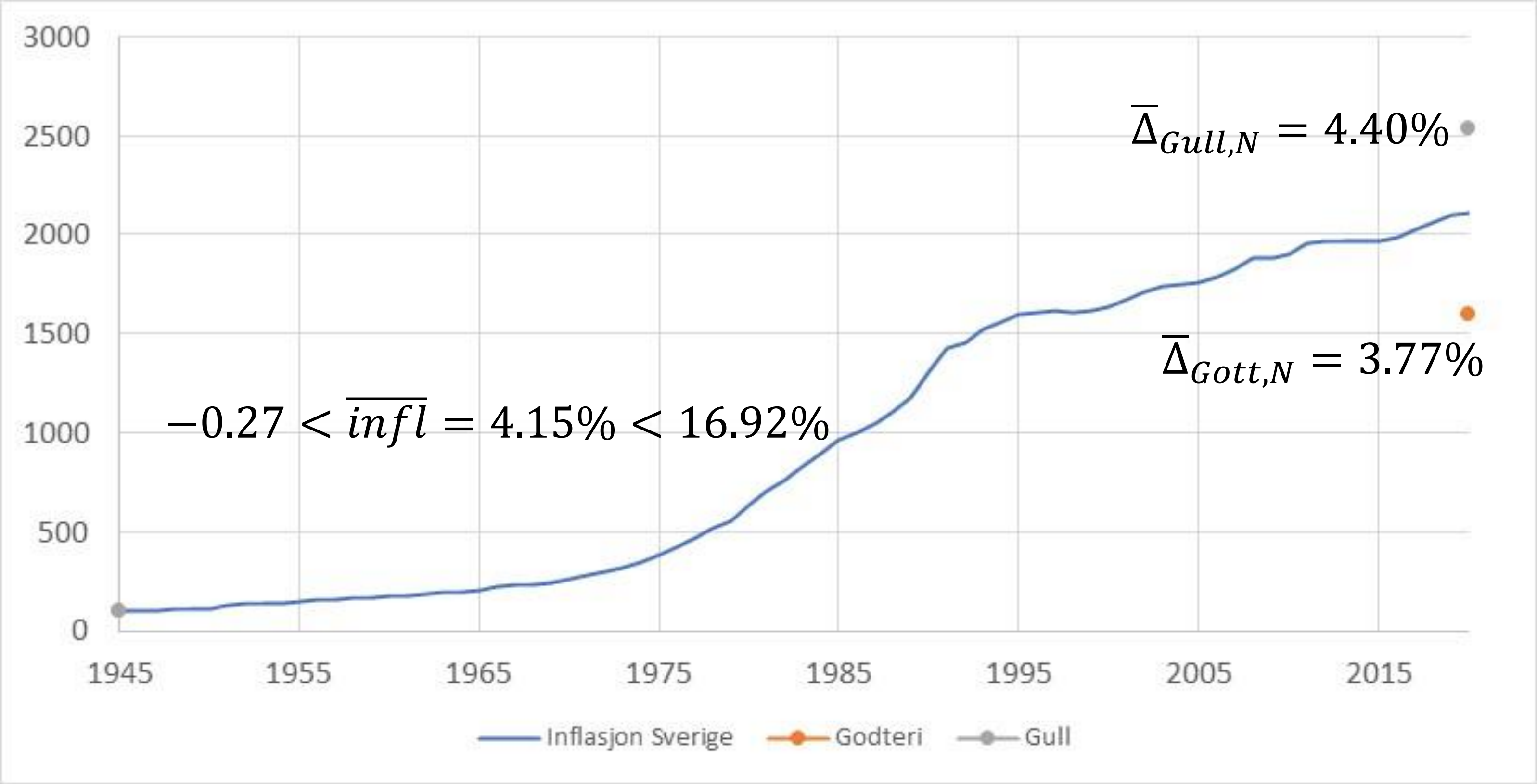
Er det et dårlig kjøp ida??

- I Sverige er kostnaden for godteri ca. 100kr/kg.
- Pippi gjorde et dårlig kjøp, 2500>1800, med dagens priser.

Var det et dårlig kjøp i Pippis tid??

- En "standard" gullmynt kostet ca. 100kr 1945.
- En "5-öreskola" kostet 5øre til slutten av 1940-talet.
- En kola veier ca 8g => en normalpris på $18 \cdot \frac{0.05}{0.008} = 112.5 > 100$

Inflasjon og prisendringer



Inflasjon og prisendringer

- Betalinger uttrykt i nominelle termer skal diskonteres med nominell rente
  - Kontrakt med fast pris
  - Skatteeffekter, eksempel på avskrivninger
  - Betalinger basert på historisk prisutvikling
- Betalinger uttrykt i reale termer skal diskonteres med realrente
  - Betalinger basert på dagens pris, eksempel
    - Dagens lønn
    - Restverdi basert på hva en anvendt maskin koster ida.

Tilbakebetalingstid - Pay-Back

Tilbakebetalingstid - Pay-Back

- Tilbakebetalingstid er tiden det tar før de totale innbetalingsoverskuddene er like store som investeringsutgiften

$$\mathrm{PB}: \sum_{t=1}^{PB-1} a_t < G \leq \sum_{t=1}^{PB} a_t \quad \text{alt.}\ \mathrm{PB} = \frac{G}{a}$$

- Kortere PB er bedre
- Beslutning basert på cut-off tid
- Rudimentell metode tar ikke hensyn til
  - Inn-/utbetalinger etter PB
  - Tidsverdi av penger

Tilbakebetalingstid - Eksempel

	Α	Β	Γ	Δ
G	150	100	150	1
N_e	7	4	7	7
a_1	50	50	60	5
a_2	50	50	60	5
a_3	50	50	40	5
a_4	50	40	40	5
a_5	50		40	5
a_6	50		40	5
a_7	50		40	5
S	0	0	0	-100
r	20%	20%	20%	20%

$$\boxed{\mathrm{PB}: \sum_{t=1}^{\mathrm{PB}-1} a_t < G \leq \sum_{t=1}^{\mathrm{PB}} a_t \quad \text{alt. } \mathrm{PB} = \frac{G}{a}}$$

$$\mathrm{PB}_{\mathrm{A}} = 150/50 = \mathbf{3}$$

$$\mathrm{PB}_{\mathrm{B}} = 100/50 = \mathbf{2}$$

$$\mathrm{PB}_{\Gamma} = 2 + 30/40 = \mathbf{2.75}$$

$$\sum_{t=1}^{2} a_t = 120 < 150 \leq 160 = \sum_{t=1}^{3} a_t$$

$$\mathrm{PB}_{\Delta} = 1/5 \boxed{= \mathbf{0.2}}$$

Nettonåverdi og Nåverdiskvote

Nettonåverdi, NNV

- Teoretisk overlegen metode
- Nettonåverdi er summen av alle nåverdi:

$$NNV = k_0 + \sum_{t=1}^{N_e} \frac{k_t}{(1+r)^t}$$

$$NNV = -G + \sum_{t=1}^{N_e} \frac{a_t}{(1+r)^t} + \frac{S}{(1+r)^{N_e}}$$

- Jo høyere nettonåverdi jo bedre
- Investerer hvis nettonåverdien er positiv

Snarvei - nåverdisum

$$\sum_{k=1}^{N_e} \frac{a}{(1+r)^k} = a\left(\frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \ \dots \ + \frac{1}{(1+r)^{n_e}}\right)$$

Sett x til: $x = 1/(1+r) \Leftrightarrow 1/x = (1+r) \Rightarrow$

$$\frac{1}{(1+r)^1} + \ \dots \ + \frac{1}{(1+r)^{N_e}} = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{N_e}$$

$$\frac{(1-x)\cdot\left(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{N_e}\right)}{1-x} = \frac{x - x^2 + x^2 - x^3 + \cdots - x^{N_e+1}}{1-x} =$$

$$\frac{x - x^{N_e+1}}{1-x} = \frac{x/x - x^{N_e+1}/x}{1/x - x/x} = \frac{1 - x^{N_e}}{1/x - 1} = \frac{1-(1+r)^{-N_e}}{1+r-1} = \frac{1-(1+r)^{-N_e}}{r}$$

Nettonåverdi - Eksempel

	A	B	Γ	Δ
G	150	100	150	1
N_e	7	4	7	7
a_1	50	50	60	5
a_2	50	50	60	5
a_3	50	50	40	5
a_4	50	40	40	5
a_5	50		40	5
a_6	50		40	5
a_7	50		40	5
S	0	0	0	-100
r	20%	20%	20%	20%

$$\mathrm{NNV} = k_0 + \sum_{t=1}^{N_e} \frac{k_t}{(1+r)^t} = -G + \sum_{t=1}^{N_e} \frac{a_t}{(1+r)^t} + \frac{S}{(1+r)^{N_e}}$$

$$\mathrm{NNV}_A = -150 + 50 \cdot \frac{1 - 1.2^{-7}}{0.2} \boxed{= \mathbf{30.23}}$$

$$\mathrm{NNV}_B = -100 + \frac{50}{1.2} + \frac{50}{1.2^2} + \frac{50}{1.2^3} + \frac{40}{1.2^4} = \mathbf{24.61}$$

$$\mathrm{NNV}_\Gamma = -150 + \frac{60}{1.2} + \frac{60}{1.2^2} + \frac{40}{1.2^2} \cdot \frac{1 - 1.2^{-5}}{0.2} = \mathbf{24.74}$$

$$\mathrm{NNV}_\Delta = -1 + 5 \cdot \frac{1 - 1.2^{-7}}{0.2} + \frac{-100}{1.2^7} = \mathbf{-10.89}$$

Nåverdiskvoten

- Nåverdiskvoten = $\frac{NNV}{G}$
- Brukes ved kapitalmangel
- Tilnærmet ”Most bang for the buck”

$$\frac{\mathrm{NNV_A}}{\mathrm{G_A}} = \frac{30.23}{150} = \mathbf{0.21}$$

$$\frac{\mathrm{NNV}_\Gamma}{G_\Gamma} = \frac{24.74}{150} = \mathbf{0.16}$$

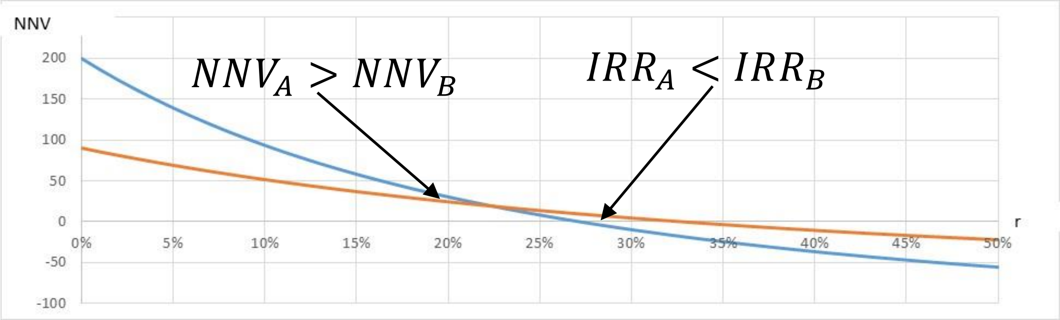
$$\frac{\mathrm{NNV_B}}{G_B} = \frac{24.61}{100} \boxed{= \mathbf{0.25}}$$

$$\frac{\mathrm{NNV}_\Delta}{G_\Delta} = -\frac{10.89}{1} = \mathbf{-10.89}$$

Internrente

Internrente, IRR

- Nettonåverdien synker vanligvis med renten



- Internrente er per definisjon renten som gir $NNV = 0$

$$0 = k_0 + \sum_{t=1}^{N_e} \frac{k_t}{(1 + IRR)^t} = -G + \sum_{t=1}^{N_e} \frac{a_t}{(1 + IRR)^t} + \frac{S}{(1 + IRR)^{N_e}}$$

- Høyere IRR regnes som bedre og $IRR > r$ regnes som lønnsom
- Merk att dette ikke alltid er riktig
- IRR er en *sensitivitetsanalyse* av renten

Internrente

	A	B	Γ	Δ
G	150	100	150	1
N_e	7	4	7	7
a_1	50	50	60	5
a_2	50	50	60	5
a_3	50	50	40	5
a_4	50	40	40	5
a_5	50		40	5
a_6	50		40	5
a_7	50		40	5
S	0	0	0	-100
r	20%	20%	20%	20%

r	$NNV_B(r)$
20%	24.61
40%	-10.14
30%	4.81
35%	-3.16
32.5%	0.69
33.75%	-1.27
33.125%	-0.30
32.813%	0.19
32.969%	-0.05
32.891%	0.07
32.930%	0.01
32.949%	-0.02

$\mathrm{IRR}_A = \mathbf{27.12\%}$

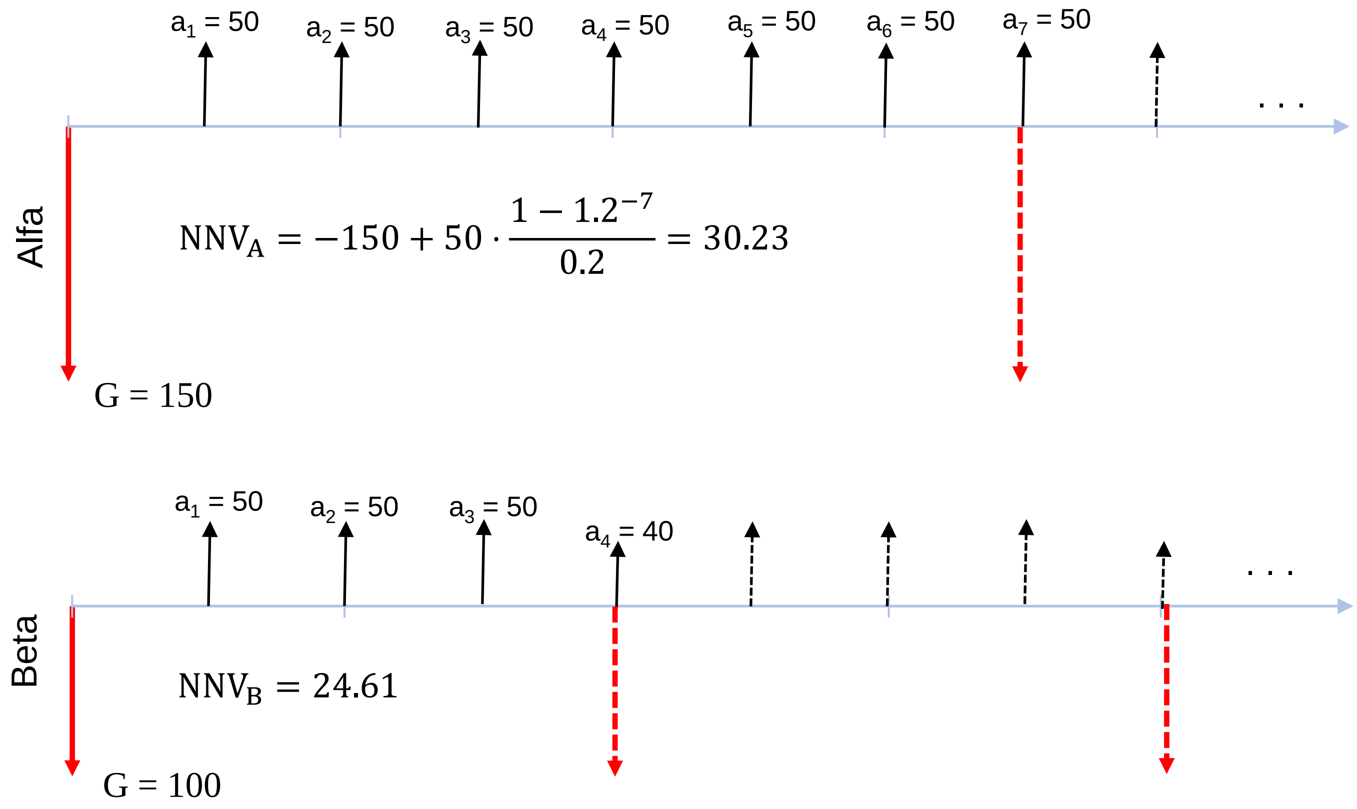
$\mathrm{IRR}_B = \mathbf{32.93\%}$

$\mathrm{IRR}_\Gamma = \mathbf{26.54\%}$

$\mathrm{IRR}_\Delta = \boxed{\mathbf{37.06\%}}$

Annuitet (rak)

Investeringer med ulika N_e



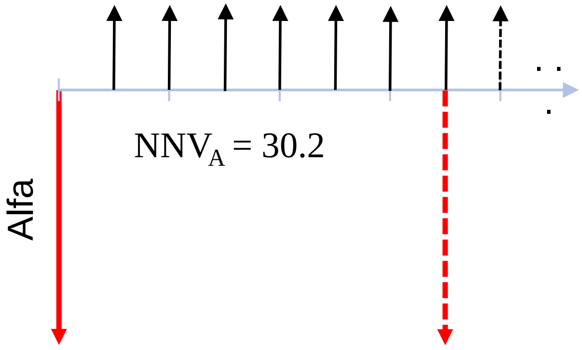
Annuitet (rak)

- Sammenlign investeringer med forskjellige levetider som kan gjentas
- Annuitet er en alternativ kontantstrøm med samme Nettonåverdi

$$\mathrm{NNV} = k_0 + \sum_{t=1}^{N_e} \frac{k_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^{N_e} \frac{\mathrm{annu}}{(1+r)^t}$$

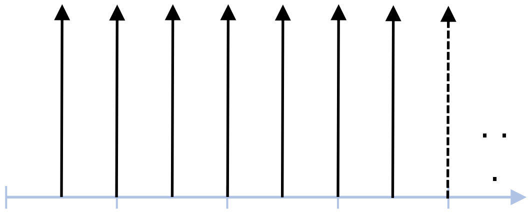
$$\mathrm{annu} = \mathrm{NNV} \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-N_e}}$$

- Vid samme r - jo høyere annuitet jo bedre
- Invester hvis annuiteten er positiv



$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathrm{annu_A} = \frac{0.2}{1-1.2^{-7}} \cdot 30.23 = \mathbf{8.39}$$



Nettonåverdi – Uendelig serie

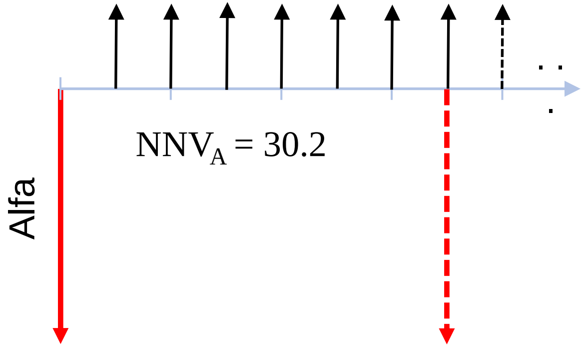
- Konstant kontantstrøm, eks. rak annuitet :

$$\mathrm{NNV} = \lim_{N\to\infty} k \sum_{t=1}^{N} \frac{1}{(1+r)^t} = \lim_{N\to\infty} k \cdot \frac{1-(1+r)^{-N}}{r} = \frac{k}{r}$$

- Eksponentielt økende, proporsjonal (%) tilvekst, eks. inflasjon, gotteri og gull

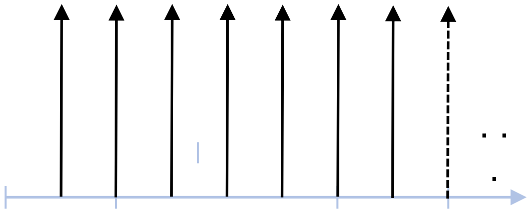
$$\mathrm{NNV} = \lim_{N\to\infty} k \sum_{t=1}^{N} \frac{(1+g)^{t-1}}{(1+r)^t} = \frac{k}{r-g}$$

Nettonåverdi – uendelig serie



$\Leftrightarrow$

annu = 8.39



$$NNV_{tot} = \sum_{Gen=0}^{\infty} \frac{k_0}{(1+r)^{Gen \cdot N_e}} + \sum_{t=1}^{N_e} \frac{k_{Gen \cdot N_e + t}}{(1+r)^{Gen \cdot N_e + t}}$$

$$NNV_{tot} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{annu}{(1+r)^t} = annu \frac{1-(1+r)^{-\infty}}{r} = \frac{8.39}{0.2} = 41.9$$

Avledning av NNV = k/(r-g)

$$NNV = \lim_{N\to\infty} k \sum_{t=1}^{N} \frac{(1+g)^{t-1}}{(1+r)^t} = \lim_{N\to\infty} \frac{k}{1+g} \sum_{t=1}^{N} \frac{1}{((1+r)/(1+g))^t}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{k}{1+g} \sum_{t=1}^{N} \frac{1}{((1+g-g+r)/(1+g))^t}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{k}{1+g} \sum_{t=1}^{N} \frac{1}{(1+(r-g)/(1+g))^t}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{k}{1+g} \frac{1-(1+(r-g)/(1+g))^{-\infty}}{(r-g)/(1+g)}$$

(r-g)/(1+g) er den fiktive renten r_f

Annuitet (rak)

	A	B	Γ	Δ
G	150	100	150	1
n_e	7	4	7	7
a_1	50	50	60	5
a_2	50	50	60	5
a_3	50	50	40	5
a_4	50	40	40	5
a_5	50		40	5
a_6	50		40	5
a_7	50		40	5
S	0	0	0	-100
r	20%	20%	20%	20%

$$\boxed{annu = NNV \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-N_e}}}$$

$$annu_A = \mathbf{30.23} \cdot \frac{\mathbf{0.2}}{\mathbf{1-1.2^{-7}}} = \mathbf{8.39} \quad \Rightarrow \frac{\mathbf{8.39}}{\mathbf{0.2}} = \mathbf{41.93}$$

$$annu_B = \mathbf{24.61} \cdot \frac{\mathbf{0.2}}{\mathbf{1-1.2^{-4}}} \boxed{= \mathbf{9.51}} \quad \Rightarrow \frac{\mathbf{9.51}}{\mathbf{0.2}} \boxed{= \mathbf{47.54}}$$

$$annu_\Gamma = \mathbf{24.74} \cdot \frac{\mathbf{0.2}}{\mathbf{1-1.2^{-7}}} = \mathbf{6.86} \quad \Rightarrow \frac{\mathbf{6.86}}{\mathbf{0.2}} = \mathbf{34.32}$$

$$annu_\Delta = \mathbf{-10.89} \cdot \frac{\mathbf{0.2}}{\mathbf{1-1.2^{-7}}} = \mathbf{-3.02} \quad \Rightarrow \frac{\mathbf{-3.02}}{\mathbf{0.2}} = \mathbf{-15.10}$$

Summering Investeringsanalyse

Summering metoder

Metode	Beregning	
Nettonåverdi	$NNV = k_0 + \sum_{t=1}^{N_e} \frac{k_t}{(1+r)^t}$	• **Teoretisk overlegen** • NNV > 0 => investere • Høyere NNV er bedre
Annuitet (rak)	$Annu = NNV \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-N_e}}$	• **Tillater sammenligning av investeringer med ulike N_e** • Høyere Annu/r er bedre
Nåverdis kvoten	$\frac{NNV}{G}$	• **Nyttig når det er mangel på midler** • Høyere NNV / G er bedre
Internrente	$k_0 + \sum_{t=1}^{N_e} \frac{k_t}{(1+IRR)^t}$	• **Sensitivitetsanalyse** av renten • Regler ikke er entydige
Pay-Back	$PB = G/a$	• **For rudimentær for et godt beslutningsgrunnlag**

Summering Eksempel

Metode	Alfa	Beta	Gamma	Delta
Nettonåverdi	**30.23**	24.61	24.74	**-10.89**
Annuitet (rak)	8.39 41.93	**9.51** **47.54**	6.86 34.32	**-3.02** **-15.10**
Nåverdis kvoten	0.21	**0.25**	0.16	**-10.89**
Internrente	27.12%	32.93%	26.54%	**37.06%**
Pay-Back	3	2	2.75	**0.2**