Oppgave 1

a) Den potensielle energien i fjæra når den er sammenpresset $x_0 = 0{,}025\ \mathrm{m}$ er gitt ved:

$$E_p = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 200\ \mathrm{N/m}\cdot(0{,}025\ \mathrm{m})^2 = 0{,}0625\ \mathrm{J}$$

Isklumpen har startfart $v_0 = 0$ før fjæra slippes fri, med andre ord: $E_{K,0} = 0$. Bevaring av den totale mekaniske energien gir dermed at $\Delta E_K = E_{K,1} - E_{K,0} = E_{K,1} = E_p = 0{,}0625\ \mathrm{J}$. Det mekaniske arbeidet W utført på klossen fra fjæra blir dermed ifølge arbeid-energi setningen:

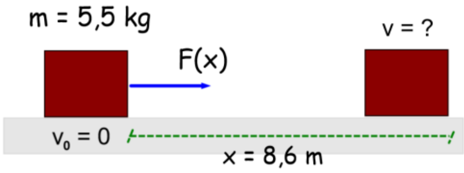
$$W = \Delta E_K = E_p = 0{,}063\ \mathrm{J}$$

b) Isblokkas hastighet v_1 idet den forlater fjæra er:

$$E_{K,1} = \frac{1}{2}mv_1^2 = 0{,}0625\ \mathrm{J}$$

$$\Rightarrow\ v_1 = \sqrt{\frac{2E_{K,1}}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}0625\ \mathrm{J}}{4{,}00\ \mathrm{kg}}} = 0{,}176\ \mathrm{m/s}$$

Oppgave 2



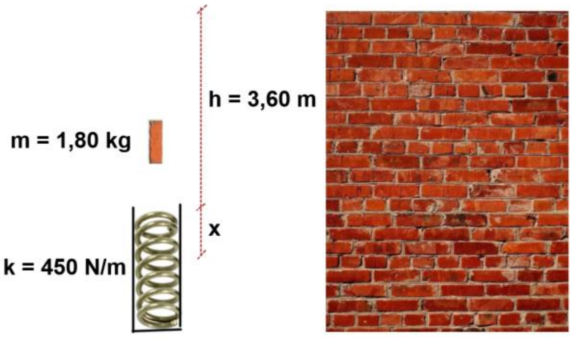
Det mekaniske arbeidet som den variable krafta utfører på legemet når det forflyttes $x = 8{,}6\ \mathrm{m}$ er gitt ved integralet

$$W = \int_0^{8,6} F(x)dx = \int_0^{8,6} 6{,}0 - 2{,}0x + 6{,}0x^2 dx = [6{,}0x - x^2 + 2{,}0x^3]_0^{8,6} = 1249\ \mathrm{J}$$

Arbeid-Energi setningen gir videre at legemets hastighet etter denne forflytningen er:

$$W = \Delta E_K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow\ v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1249\ \mathrm{J}}{5{,}5\ \mathrm{kg}}} = 21\ \mathrm{m/s}$$

Oppgave 3



Ettersom mursteinen forflytter seg oppover bidrar fjærkrafta med et positivt mekanisk arbeid, mens gravitasjonskrafta bidrar med et negativt mekanisk arbeid. Dermed kan vi sette opp at

$$W = W_{fjær} + W_{grav} = \frac{1}{2}kx^2 - mgx$$

Arbeid-Energi setningen gir videre at mursteinens kinetiske energi akkurat idet den forlater fjæra er gitt ved ($\mathrm{v}_0 = 0$).

$$W = \Delta E_K \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}kx^2 - mgx = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2$$

På veien oppover mot toppunktet omdannes all denne kinetiske energien til potensiell energi Det vil si:

$$\frac{1}{2}kx^2 - mgx = mgh$$

Dette gir videre en 2.gradsligning som vi løser med hensyn på lengden x:

$$\frac{1}{2}kx^2 - mgx - mgh = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2mg \pm \sqrt{4m^2g^2 + 8mghk}}{2k}$$

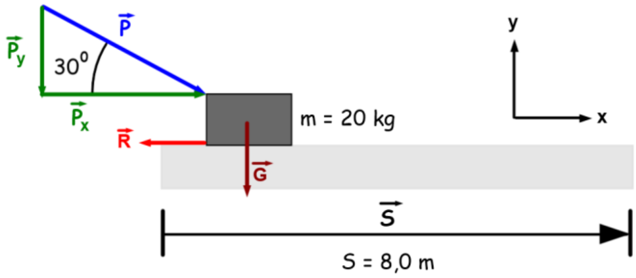
$$x = \frac{2 \cdot 1{,}80\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \pm \sqrt{4 \cdot (1{,}80\text{ kg})^2 \cdot (9{,}81\text{ m/s}^2)^2 + 8 \cdot 1{,}80\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot 3{,}60\text{ m} \cdot 450\text{ N}}}{2 \cdot 450\text{ N}}$$

$$\Rightarrow \qquad x = 0{,}57\text{ m} \qquad \text{og} \qquad x = -0{,}49\text{ m}$$

Den negative løsningen er ikke fysisk interessant hvilket innebærer at fjæra må presses sammen en distanse

$$x = 0{,}57\text{ m}$$

Oppgave 4



a) Det totale mekaniske arbeidet W knyttet til både krafta $\vec{P}$ og friksjonskrafta $\vec{R}$ er gitt ved

$$W = \sum F \cdot S = (P_x + R) \cdot S = (P\cos 30^0 + R) \cdot S = ma \cdot S$$

Leddet på høyre side viser at vi trenger klossens akselerasjon a og den finner vi ut fra bevegelsesligningene for konstant akselerasjon:

$$\mathrm{v}_1^2 - \mathrm{v}_0^2 = 2aS \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\mathrm{v}_1^2 - \mathrm{v}_0^2}{2S} = \frac{(1{,}92\ \mathrm{m/s})^2 - (0{,}459\ \mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 8{,}0\ \mathrm{m}} = 0{,}217\ \mathrm{m/s^2}$$

Benyttes dette i uttrykket for det mekaniske arbeidet W øverst finner vi at:

$$W = \sum F \cdot S = (P\cos 30^0 + R) \cdot S = ma \cdot S$$

$$\Rightarrow \qquad P\cos 30^0 \cdot S + R \cdot S = ma \cdot S$$

$$\Rightarrow \qquad R \cdot S = W_R = ma \cdot S - P\cos 30^0 \cdot S$$

$$= 20{,}0\ \mathrm{kg} \cdot 0{,}217\ \mathrm{m/s^2} \cdot 8{,}0\ \mathrm{m} - 150\ \mathrm{N} \cdot \cos 30^0 \cdot 8{,}0\ \mathrm{m} = -1{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{J}$$

Merk deg at friksjonsarbeidet $W_R < 0$ som dette mekaniske arbeidet må være ettersom friksjonskrafta $\vec{R}$ peker motsatt av forflytningen $\vec{S}$.

b) Friksjonskoeffisienten μ finner vi fra det mekaniske arbeidet W_R beregnet i oppgave a):

$$|W_R| = |R \cdot S| = \mu(mg + P\sin 30^0) \cdot S$$

$$\Rightarrow \qquad \mu = \frac{|W_R|}{(mg + P\sin 30^0) \cdot S} = \frac{1004{,}5\ \mathrm{J}}{(20{,}0\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} + 150\ \mathrm{N} \cdot \sin 30^0) \cdot 8{,}0\ \mathrm{m}}$$

$$= 0{,}463 = 0{,}46$$

c) Effekten som friksjonskrafta utøver under forflytningen S er:

$$P = \frac{|W_R|}{t} = \frac{|W_R| \cdot a}{\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_0} = \frac{1004{,}5\ \mathrm{J} \cdot 0{,}217\ \mathrm{m/s^2}}{1{,}92\ \mathrm{m/s} - 0{,}459\ \mathrm{m/s}} = 149{,}4\ \mathrm{W} = 149\ \mathrm{W}$$

Oppgave 5

Den elektriske effekten produsert av generatorene er:

$$P_{el} = \frac{W_{el}}{t} = 2{,}0 \cdot 10^9 \text{ W}$$

Velger nullhøyde der hvor generatorene befinner seg. Det mekaniske arbeidet W_{gr} utført av gravitasjonskrafta er dermed (Arbeidet $W_{gr} > 0$ da gravitasjonskrafta $\vec{G}$ peker i samme retning som vannets vertikale forflytning $\vec{S}$).

$$W_{gr} = -\Delta E_p = -(mgh_0 - mgh_1) = mgh_1 > 0$$

Ved å benytte sammenhengen $\rho = m/V$ kan uttrykket lengst ut til høyre i ligningen over skrives om på formen

$$W_{gr} = mgh_1 = \rho V g h_1$$

som med kjente verdier for ρ, g og h_1 gir:

$$W_{gr} = (10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 170 \text{ m}) \cdot V = (1{,}67 \cdot 10^6 \text{ kg/ms}^2) \cdot V$$

Så tar vi hensyn til at dette mekaniske arbeidet omdannes til 92% elektrisk energi W_{el} reltatert til den elektriske effekten P_{el} angitt foran. Dette gir at effekten P_{gr} produsert av gravitasjonskrafta er

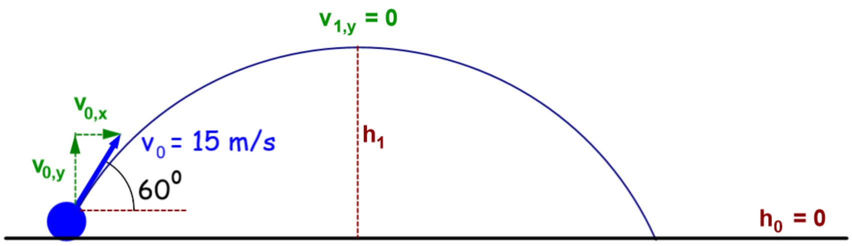
$$P_{gr} = \frac{W_{gr}}{t} = \frac{W_{el}}{0{,}92 \cdot t} = \frac{2{,}0 \cdot 10^9 \text{ W} \cdot t}{0{,}92 \cdot t} = 2{,}17 \cdot 10^9 \text{ W}$$

Volumet vann pr sekund som må strømme ned fra dammen er dermed av størrelsesorden

$$P_{gr} = \frac{W_{gr}}{t} = \frac{(1{,}67 \cdot 10^6 \text{kg/ms}^2) \cdot V}{t} = 2{,}17 \cdot 10^9 \text{ W}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{V}{t} = \frac{2{,}17 \cdot 10^9 \text{ W}}{1{,}67 \cdot 10^6 \text{ kg/ms}^2} = 1303{,}5 \text{ m}^3/\text{s} = 1304 \text{ m}^3/\text{s}$$

Oppgave 6



Vi ser på ballens bevegelse i den vertikale retningen. Ligningen for bevaring av den totale mekaniske energien i gravitasjonsfeltet er da på formen:

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_{0,y}^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_{1,y}^2 + mgh_1$$

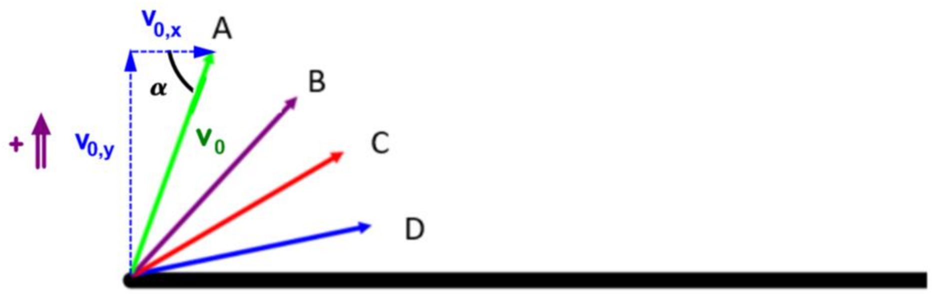
Hastighetskomponenten $\mathrm{v}_{0,y}$ i y-retningen i utskytspunktet er:

$$\mathrm{v}_{0,y} = \sin 60^0 \cdot \mathrm{v}_0 = \sin 60^0 \cdot 15\ \mathrm{m/s} = 13\ \mathrm{m/s}$$

Med $h_0 = 0$ (valgt nullhøyde) og $\mathrm{v}_{1,y} = 0$ på toppen av banen, så vil ballens maksimale høyde dermed være:

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_{o,y}^2 = mgh_1 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{\mathrm{v}_{0,y}^2}{2g} = \frac{(13\ \mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s}^2} = 8{,}6\ \mathrm{m}$$

Oppgave 7



Ser på kanonkulas vertikale bevegelse. Kulas bevegelse kan da beskrives ut fra bevegelses-ligningen (positiv retning valgt oppover):

$$s_y = \mathrm{v}_{o,y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Når kula lander er $s_y = 0$. Samtidig gjelder at:

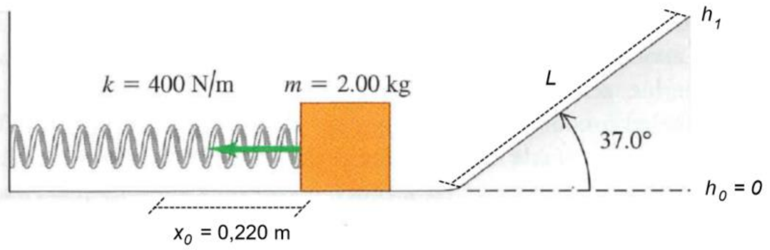
$$\mathrm{v}_{0,y} = \mathrm{v}_0 \sin\alpha$$

der α angir kulas utskytningsvinkel i forhold til horisontalplanet. Ligningen øverst kan dermed skrives på formen:

$$\frac{1}{2}gt^2 - \mathrm{v}_{0,y}t = 0 \quad \Rightarrow \quad t\left(\frac{1}{2}gt - \mathrm{v}_0\sin\alpha\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \quad \text{eller} \quad t = \frac{2\mathrm{v}_0\sin\alpha}{g}$$

Ut fra uttrykket lengst ut til høyre kan vi se at tiden t er minst mulig når utskytningsvinkelen α er minst mulig ($\sin\alpha \to 0$ når $\alpha \to 0$). Alternativ D er det korrekte alternativet.

Oppgave 8



a) Loven om bevaring av den totale mekaniske energien for dette fjær-kloss systemet er gitt ved:

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$$

Med starthastighet $\mathrm{v}_0 = 0$ og $x_1 = 0$ ved likevektspunktet blir hastigheten v_1 langs det horisontale planet:

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_1 = \sqrt{\frac{kx_0^2}{m}} = \sqrt{\frac{400\ \mathrm{N/m} \cdot (0{,}220\ \mathrm{m})^2}{2{,}00\ \mathrm{kg}}} = 3{,}11\ \mathrm{m/s}$$

b) Den vertikale høyden over det horisontale planet bestemmer vi ved å bruke loven om bevaring av den totale mekaniske energien i gravitasjonsfeltet:

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_2^2 + mgh_2$$

Med $h_1 = 0$ (valgt nullhøyde) og $\mathrm{v}_2 = 0$ ved den maksimale høyden over horisontal-planet blir den maksimale høyden over horisontalplanet:

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2 = mgh_2 \quad \Rightarrow \quad h_2 = \frac{\mathrm{v}_1^2}{2g} = \frac{(3{,}11\ \mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}} = 0{,}493\ \mathrm{m}$$

Dette tilsvarer en lengde opp skråplanet:

$$L = \frac{0{,}493\ \mathrm{m}}{\sin 37{,}0} = 0{,}8198\ \mathrm{m} = 0{,}820\ \mathrm{m}$$

c) Her er det viktig å huske på at klossen beveger seg friksjonsfritt både nedover skråplanet og langs det horisontale planet før den treffer fjæra. Idet klossen snur oppe på skråplanet har all den kinetiske energien den har i bunnen av skråplanet blitt omdannet til potensiell energi. Denne mengden potensiell energi omdannes tilbake til kinetisk energi på veien tilbake nedover langs skråplanet. Dette betyr at klossen på nytt har hastigheten $\mathrm{v}_1 = 3{,}11\ \mathrm{m/s}$ idet den når det horisontale planet og beveger seg mot fjæra. Idet klossen treffer fjæra vil all denne kinetiske energien omdannes til potensiell energi i fjæra. Klossen stopper dermed når fjæra er sammenpresset en distanse $x_0 = 0{,}220\ \mathrm{m}$ fra likevektspunktet.