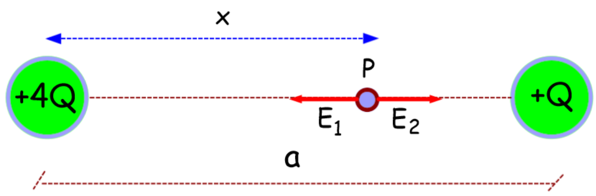
Løsningsforslag øving 6

Oppgave 1



Figuren over angir at punktet P har koordinat x der hvor det elektriske feltet fra hver av de to punktladningene er like store og motsatt rettet. Det vil si: $\sum E = 0$. Velges positiv retning mot venstre gir dette at:

$$E_1 - E_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = E_2$$

Ligningen lengst ute til høyre gir videre at:

$$k_e \frac{4Q}{x^2} = k_e \frac{Q}{(a-x)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{x^2} = \frac{1}{(a-x)^2}$$

Denne siste ligningen kryss-multipliserer vi som gir at:

$$4(a-x)^2 = x^2$$

Denne ligningen ordner vi i form av ei ordinær 2 grads-ligning:

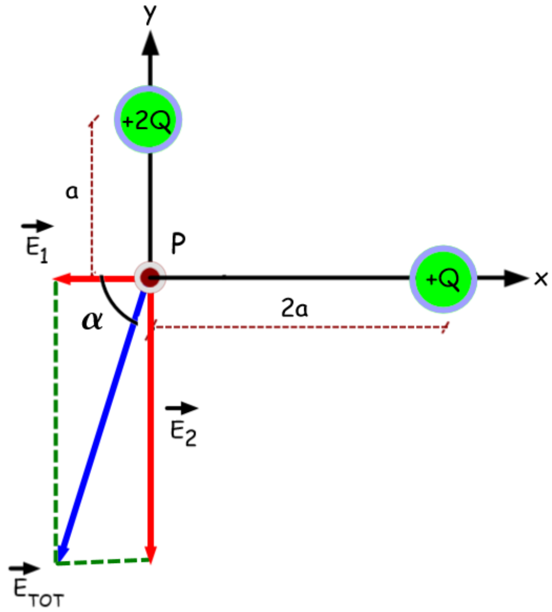
$$4(a^2 - 2ax + x^2) = x^2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 8ax + 4a^2 = 0$$

2 grads-formelen gir oss nå to løsninger for avstanden x der:

$$x = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4a^2}}{2 \cdot 3} = \frac{8a \pm 4a}{6} \quad \Rightarrow \quad x = 2a \quad \text{og} \quad x = \frac{2a}{3}$$

I begge disse punkter er $E_1 = E_2$, men bare i $x = \frac{2a}{3}$ peker E_1 og E_2motsatt hverandre og det totale elektriske feltet er lik null.

Oppgave 2



Det totale elektriske feltet $\vec{E}_{TOT}$fra de to positive ladningene er skissert i form av den blå pila i figuren over. Vi skal bestemme både størrelsen og retningen av denne totale elektriske feltvektoren. Vi bestemmer størrelsen først ved å benytte Pytagoras relatert til den rettvinklede trekanten dannet av $\vec{E}_1$ og $\vec{E}_2$. Dette gir direkte at:

$$\left|\vec{E}_{TOT}\right| = E_{TOT} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{\left(k_e \frac{Q}{(2a)^2}\right)^2 + \left(k_e \frac{2Q}{a^2}\right)^2}$$

Fra uttrykket inne i rota faktoriserer vi ut Coulomb-konstanten k_e, ladningen Q og kvadratet av avstanden a. Da kan vi skrive om uttrykket inne i rota på formen:

$$E_{TOT} = \sqrt{\left(\frac{k_e Q}{a^2}\right)^2 \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2^2\right)}$$

Regner vi ut tallet inne i den siste parentesen gir dette videre at:

$$E_{TOT} = \sqrt{\left(\frac{k_e Q}{a^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{16} + 4\right)} = \sqrt{\left(\frac{k_e Q}{a^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{65}{16}\right)} = \frac{\sqrt{65}}{4} \frac{k_e Q}{a^2}$$

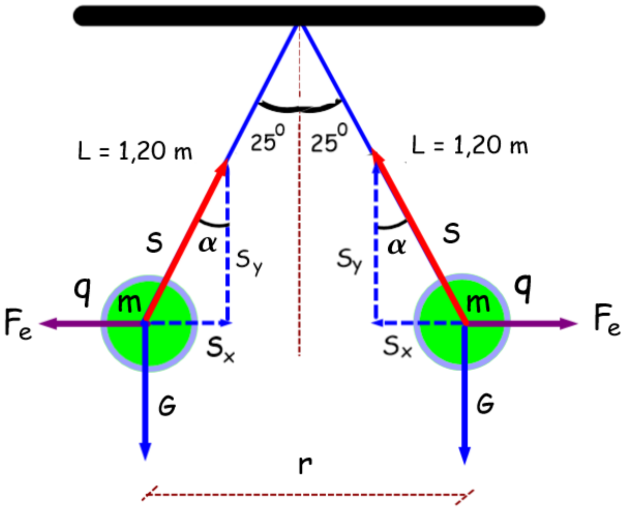
Retningen er angitt med vinkelen α i figuren som angir retningen i forhold til horisontalretningen. Velger å bruke $\tan \alpha$ som gir at:

$$\tan \alpha = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{k_e(2Q)}{a^2}}{\frac{k_e Q}{(2a)^2}} = \frac{2k_e Q}{a^2} \cdot \frac{4a^2}{k_e Q} = 8 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 82{,}9^0$$

Oppgave 3

a)

Figuren nedenfor inkluderer alle relevante krefter som virker på de to ladede kulene. Disse er henholdsvis snordragene $\vec{S}$, tyngdekreftene $\vec{G}$ og de elektriske kreftene $\vec{F}_e$.



For å finne ladningen q til de to kulene benytter vi først Newtons 2.lov i henholdsvis horisontalretningen og vertikalretningen. Ettersom systemet er i en tilstand av ro gir dette at:

$$F_e - S_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_e = S_x = S \sin\alpha \qquad \text{(x-retningen)}$$

$$S_y - G = 0 \quad \Rightarrow \quad S_y = S\cos\alpha = G = mg \qquad \text{(y-retningen)}$$

Fra ligningen i y-retningen finner vi at:

$$S = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

Setter vi dette uttrykket for snordraget inn i ligningen relatert til x-retningen finner vi at de elektriske kreftene F_e kan uttrykkes ved vinkelen α på følgende måte:

$$F_e = \frac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha} = mg\tan\alpha$$

De elektriske kreftene er samtidig gitt ved Coulombs lov. Denne loven hjelper oss å inkludere kulenes ladning q i ligningen over på følgende måte:

$$k_e\frac{q^2}{r^2} = mg\tan\alpha \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{mgr^2\tan\alpha}{k_e}}$$

Avstanden r mellom de to ladningene kan vi uttrykke ved snoras lengde L og vinkelen α ved å utnytte geometrien i figuren over. Den rettvinklede trekanten til høyre (eller venstre) gir direkte at:

$$\frac{r}{2} = L\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad r = 2L\sin\alpha$$

Dermed ender vi opp med følgende uttrykk for ladningen q uttrykt ved kulenes masse m, snorlengden L og vinkelen α:

$$q = \sqrt{\frac{mg(2L\sin\alpha)^2\tan\alpha}{k_e}} = \sqrt{\frac{4mgL^2\sin^2\alpha\tan\alpha}{k_e}}$$

$$q = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}015\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot (1{,}2\ \mathrm{m})^2 \cdot \sin^2 25^0 \cdot \tan 25^0}{8{,}99 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}}} = 2{,}8 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$$

b)

I dette problemet er snorlengden L redusert ned til $0{,}60\ \mathrm{m}$ mens kulenes ladning q holdes uendret. For å finne den nye vinkelen α for dette nye tilfellet utnytter vi ligningen

$$q^2 = \frac{4mgL^2\sin^2\alpha\tan\alpha}{k_e}$$

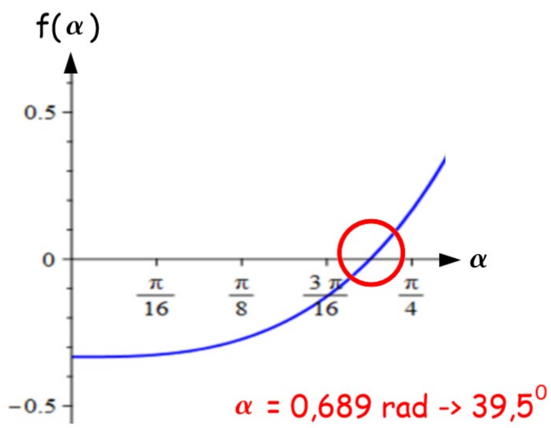
som vi kan finne fra utregningen i oppgave a). Ved å snu denne ligningen med hensyn på de to vinkel-funksjonene finner vi direkte at:

$$\sin^2\alpha\tan\alpha = \frac{q^2k_e}{4mgL^2} = \frac{(2{,}80 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C})^2 \cdot 8{,}99 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}}{4 \cdot 0{,}015\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot (0{,}60\ \mathrm{m})^2} = 0{,}3331$$

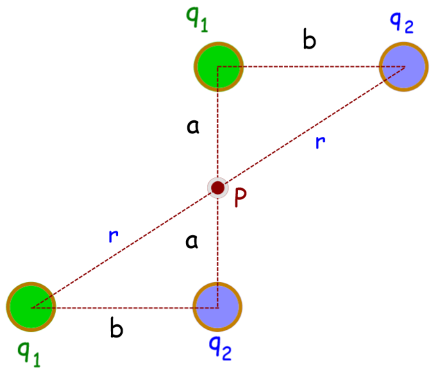
Denne ligningen lar seg ikke enkelt løse eksakt med hensyn på α. Vi utnytter derfor isteden kalkulatoren og plotter opp grafen til funksjonen

$$\mathrm{f}(\alpha) = \sin^2\alpha\tan\alpha - 0{,}3331 = 0$$

over intervallet $\alpha \in [0, \pi/3]$. Ved å lese av skjæringspunktet med den horisontale aksen (α-aksen) finner vi at $\alpha = 39{,}5^0 = 40^0$ (etter å ha regnet om verdien 0,689 rad til grader, se figuren under).



Oppgave 4



Det elektriske potensialet $V(r)$ er en skalar-størrelse. For å finne det totale potensialet V_{TOT} i posisjon P er det dermed tilstrekkelig å bestemme potensialet V fra hver av de fire punktladningene og deretter summere verdiene av alle disse enkeltbidragene. Med $q_1 = 5{,}0\ \mu\text{C},\ q_2 = -10\ \mu\text{C}, a = 0{,}30\ mm$ og $b = 0{,}40\ mm$ gir dette at:

Potensialet fra punktladning q_1 i øverste ladningspar:

$$V_{q_{1ø}} = k_e \frac{q_1}{a} = 8{,}99 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{5{,}0 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{0{,}30\ mm} = 1{,}50 \cdot 10^8\ \text{V}$$

Potensialet fra punktladning q_2 i øverste ladningspar:

$$V_{q_{2ø}} = k_e \frac{q_2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 8{,}99 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{-1{,}0 \cdot 10^{-5}\ \text{C}}{\sqrt{(0{,}30\ mm)^2 + (0{,}40\ mm)^2}} = -1{,}80 \cdot 10^8\ \text{V}$$

Potensialet fra punktladning q_1 i nederste ladningspar:

$$V_{q_{1n}} = k_e \frac{q_1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 8{,}99 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{5{,}0 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{\sqrt{(0{,}30\ mm)^2 + (0{,}40\ mm)^2}} = 8{,}99 \cdot 10^7\ \text{V}$$

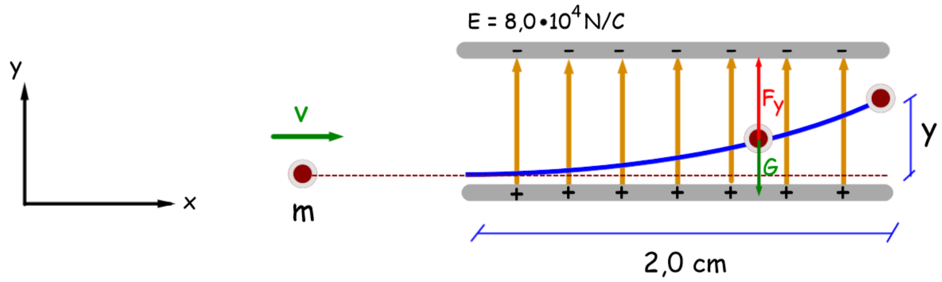
Potensialet fra punktladning q_2 i øverste ladningspar:

$$V_{q_{1n}} = k_e \frac{q_2}{a} = 8{,}99 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{-1{,}0 \cdot 10^{-5}\ \text{C}}{0{,}30\ mm} = -3{,}00 \cdot 10^8\ \text{V}$$

Dette gir at det totale potensialet V_{TOT} i posisjon P av størrelsesorden er gitt ved:

$$\begin{aligned} V_{TOT} &= V_{q_{1ø}} + V_{q_{2ø}} + V_{q_{1n}} + V_{q_{2}n} \\ &= 1{,}50 \cdot 10^8\ \text{V} - 1{,}80 \cdot 10^8\ \text{V} + 8{,}99 \cdot 10^7\ \text{V} - 3{,}00 \cdot 10^8\ \text{V} \\ &= -2{,}40 \cdot 10^8\ \text{V} = -2{,}4 \cdot 10^8\ \text{V} \end{aligned}$$

Oppgave 5



Den elektriske krafta F_y som virker på dråpen inne i det elektriske feltet er gitt ved

$$F_y = qE \qquad (1)$$

Figuren antyder at denne krafta virker i vertikalretningen og mot den negativt ladede plata. Basert på denne observasjonen kan vi allerede nå fastslå at dråpens ladning q er positiv. Dråpens akselerasjon a_y inne i det elektriske feltet er bestemt av den elektriske krafta F_y og gravitasjonskrafta G. Newtons 2.lov gir her direkte at

$$\sum F_y = F_y - G = qE - mg = ma_y \qquad (2)$$

Dråpens ladning q er dermed bestemt ved uttrykket:

$$q = \frac{m(a_y + g)}{E} \qquad (3)$$

Ettersom det elektriske feltet er homogent er den elektriske krafta F_y konstant overalt i området mellom de to metallplatene. Dette betyr videre at dråpens akselerasjon a_y er konstant og bestemt ved bevegelsesligningen:

$$y = \mathrm{v}_{oy}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = \frac{1}{2}a_y t^2 \qquad (4)$$

Tida t som dråpen bruker på å bevege seg gjennom det elektriske feltet er bestemt ved horisontalbevegelsen der hastigheten $\mathrm{v}_x = 20\ \mathrm{m/s} =$ konstant. Det vil si:

$$x = \mathrm{v}_x \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{\mathrm{v}_x}$$

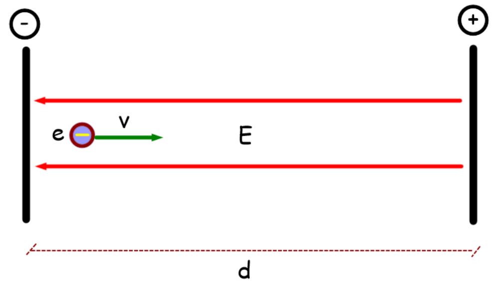
Settes dette inn I ligning (4) får vi at:

$$y = \frac{1}{2}a_y\left(\frac{x}{\mathrm{v}_x}\right)^2 \;\Rightarrow\; a_y = \frac{2y\mathrm{v}_x^2}{x^2} = \frac{2 \cdot 3{,}0 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m} \cdot (20\ \mathrm{m/s})^2}{(2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m})^2} = 600\ \mathrm{m/s^2}$$

Denne verdien for a_y gir videre gir at dråpens ladning q er:

$$q = \frac{m(a_y + g)}{E} = \frac{1{,}4 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{kg} \cdot (600\ \mathrm{m/s^2} + 9{,}81\ \mathrm{m/s^2})}{8{,}0 \cdot 10^4\ \mathrm{N/C}} = 1{,}1 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{C}$$

Oppgave 6



Vi skal bestemmer hvor lang en partikkelakselerator må være for å kunne akselerere et elektron fra null hastighet ved den negative plata til 10% av lyshastigheten ved den positive plata.

Energiregnskapet for elektronet:

Den elektriske potensielle energien ved den negative plata i en avstand d fra den positive plata er gitt ved:

$$E_p = U = F_e \cdot d = qE \cdot d$$

Denne elektriske potensielle energien skal i sin helhet omdannes til kinetiske energi ved den positive plata. Bevaring av den totale energien gir her direkte at:

$$qE \cdot d = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{m\mathrm{v}^2}{2qE} = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} \cdot (3{,}0 \cdot 10^7\ \mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 1{,}0 \cdot 10^8\ \mathrm{V/m}} = 2{,}6 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}$$

En slik lineær akselerator kan altså lages svært kompakt – og det er nettopp det som er poenget med en lineær akselerator (framfor en sirkulær akselerator).