Nåverdi/slutverdi

1. Hvis diskonteringsrenten er 8% p.a., hva er nåverdien av en kontantstrøm på 1 000 som kommer om ti år?

   a. Hvis betalingen diskonteres årevis?

   $$NV = \frac{k_t}{(1+r)^t} = \frac{1000}{1.08^{10}} = \mathbf{463.2}$$

   b. Hvis betalingen diskonteres kvartalsvis?

   $$NV = \frac{k_t}{(1+r)^t} = \frac{1000}{(1+8\%/4)^{10\cdot 4}} = \mathbf{452.9}$$

   c. Hvis betalingen diskonteres på to års basis?

   $$NV = \frac{k_t}{(1+r)^t} = \frac{1000}{(1+8\%\cdot 2)^{10/2}} = \mathbf{476.1}$$

2. Hvis du investerer 1000kr nå til en rente på 7% per år hvor mye penger har du etter

   a. 1 år?

   $$Slutverdi = NV \cdot (1+r)^t = 1000 \cdot 1.07 = \mathbf{1070.0}$$

   b. 5 år

   $$Slutverdi = 1000 \cdot 1.07^5 = \mathbf{1402.6}$$

   c. 50 åt

   $$Slutverdi = 1000 \cdot 1.07^{50} = \mathbf{29457}$$

Real/nominell renta

3. Produkt A koster 100kr og prisen forventes å følge inflasjonen som er 2% per år. Man kan velge å enten kjøpe en enhet av produkt A i dag eller investere 100kr til en nominell rente på 10% per år.

   a. Hvis man velger å investere hvor mye penger man har etter 10 år?

   $$Slutverdi\ i\ kr = NV \cdot (1+r_N)^t = 100 \cdot 1.10^{10} = \mathbf{259.37}$$

   b. Hvor mange produkter A kan man kjøpe for disse pengene?

   $$Pris\ i\ kr\ \text{år}\ t = pris_0 \cdot (1+infl)^t = 100 \cdot 1.02^{10} = 121.90$$

   $$Antal\ som\ kan\ köpes = \frac{259.37}{121.90} = \mathbf{2.13}$$

   c. Hva var den reale avkastningen per år?

   $$Alt\ 1.\ (1+r_R)^{10} = 2.13 \Rightarrow (1+r_R) = 2.13^{1/10} = 1.078 \Rightarrow r_R = \mathbf{7.84}\%$$

   $$Alt\ 2.\ r_N = r_R + infl + r_R \cdot infl \ \Rightarrow r_R = \frac{r_N - infl}{1+infl} = \frac{10\% - 2\%}{1.02} = \mathbf{7.84}\%$$

Nettonåverdi endelig serie med betalinger

4. Et investeringsprosjekt innebærer en investering nå på 100 000 000. Om ett år er forventet positiv kontantstrøm 40 000 000, om to år er forventet positiv kontantstrøm på 50 000 000 og, til slutt, om tre år forventes en positiv kontantstrøm på 60 000 000. Dersom avkastningskravet er 8 %, hva blir forventet nettonåverdi for prosjektet?

$$NNV = \sum_{t=0}^{N_e} \frac{k_t}{(1+r)^t} = -100 + \frac{40}{1.08} + \frac{50}{1.08^2} + \frac{60}{1.08^3} = \mathbf{27.53}\ (millioner)$$

5. Et investeringsprosjekt gir en kontantstrøm på 600 000 i periode 1 til og med periode 14 etter investeringen. Dersom avkastningskravet er 9 %, hva er nåverdien av disse kontantstrømmene?

$$NNV = \sum_{t=0}^{N_e} \frac{k_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{14} \frac{600\,000}{(1+9\%)^t} = 600\,000 \cdot \frac{1-1.09^{-14}}{0.09} = \mathbf{4671690}$$

6. I et investeringsprosjekt er det stor usikkerhet om etterspørselen etter produktet som skal produseres ettersom det er stor sannsynlighet for at andre produkter vil komme på markedet som er klart bedre. Etter ett år forventes en kontantstrøm på 20 000 000. Året etter regner bedriften med 50% sannsynlighet for at det er kommet et nytt og mye bedre produkt på markedet slik at kontantstrømmen blir null og prosjektet vil da bli avsluttet. Dersom det ikke kommer et slikt nytt produkt videreføres prosjektet og forventet kontantstrøm er i så fall 15 000 000. Dersom prosjektet videreføres er det igjen 50 % sannsynlighet for at et nytt og bedre produkt gir null i kontantstrøm i år tre. Det er samtidig 50 % sannsynlighet for en kontantstrøm på 10 000 000. Hva er total forventet nåverdi av investeringsprosjektet gitt at avkastningskravet er 12 %?

$$k_1 = 20\,000\,000 = 20\ (miljoner)$$

$$k_2 = 50\% \cdot 0 + 50\% \cdot 15 = 7.5\ (miljoner)$$

$$k_3 = 50\% \cdot 0 + 50\% \cdot (50 \cdot 0 + 50\% \cdot 10) = 2.5\ (millioner)$$

$$NNV = \sum_{t=0}^{N_e} \frac{k_t}{(1+r)^t} = \frac{20}{1.12} + \frac{7.5}{1.12^2} + \frac{2.5}{1.1^3} = \mathbf{25.62}\ (millioner)$$

Annuitet

7. Et investeringsprosjekt innebærer en investering nå på 100 000 000. Om ett år er forventet positiv kontantstrøm 40 000 000, om to år er forventet positiv kontantstrøm på 50 000 000 og, til slutt, om tre år forventes en positiv kontantstrøm på 60 000 000. Dersom avkastningskravet er 8 %, hva blir forventet annuitet for prosjektet? Notere samme data som i øving 4.

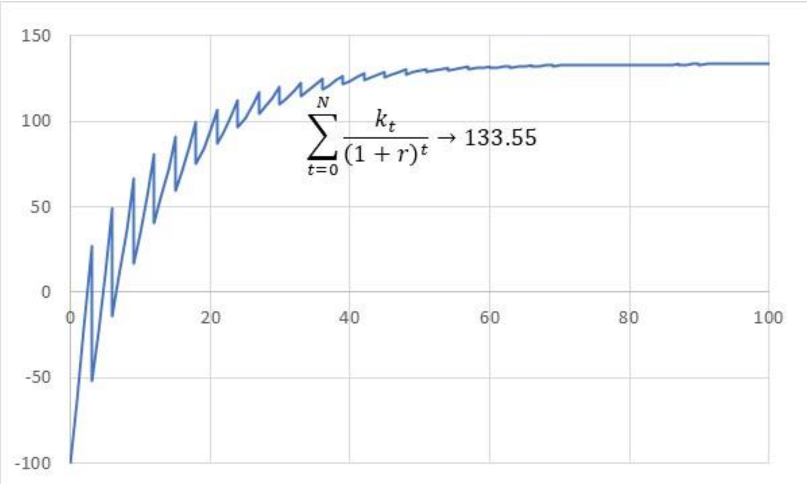
$$Annu = NNV \cdot \frac{r}{1+(1+r)^{-N_e}} = 27.53 \cdot \frac{0.08}{1-1.08^{-3}} = \mathbf{10.68}\ (millioner)$$

Nettonåverdi uendelig serie med betalinger

8. Et investeringsprosjekt innebærer en investering nå på 100 000 000. Om ett år er forventet positiv kontantstrøm 40 000 000, om to år er forventet positiv kontantstrøm på 50 000 000 og, til slutt, om tre år forventes en positiv kontantstrøm på 60 000 000. Dersom avkastningskravet er 8 %. Denne investeringen kan gjentas et uendelig antall ganger år 0, 3, 6, … Hva blir forventet blir forventet nettonåverdi for denne uendelige kontantstrøm. Notere samme data som i øving 4 og 7.

Alt 1. – virkelig kontantstrøm

$$NNV = \sum_{t=0}^{N_e \to infty} \frac{k_t}{(1+r)^t} = -100 + \frac{40}{1.08} + \frac{50}{1.08^2} + \frac{60}{1.08^3} - \frac{100}{1.08^3} + \frac{40}{1.08^4} + \cdots$$



Alt 2. – annuitet

$$NNV = \sum_{t=0}^{N_e \to infty} \frac{annu}{(1+r)^t} = annu \cdot \frac{1-(1+r)^{-\infty}}{r} = \frac{10.68}{0.08} = \mathbf{133.55}$$

9. Et prosjekt innebærer en investering på 2 000 000 kroner nå og så ingen kontantstrøm før etter tre år. Etter tre år kommer en positiv kontantstrøm på 100 000 kroner, etter fire år kommer en kontantstrøm på 105 000 kroner, det vil si 5 % mer enn etter tre år, og slik fortsetter kontantstrømmen å vokse med 5 % for hvert år for all overskuelig framtid. Avkastningskravet er 9 %. Hva bli forventet nettonåverdi for prosjektet?

$$NNV = k_0 + \sum_{t=3}^{N_e \to infty} \frac{k_t}{(1+r)^t} = k_0 + \frac{1}{(1+r)^2} \sum_{t=1}^{N_e \to infty} \frac{k_{t+2}}{(1+r)^t} =$$

$$-2000 + \frac{1}{(1+9\%)^2} \sum_{t=1}^{N_e \to infty} \frac{100 \cdot (1+5\%)^{t-1}}{(1+9\%)^t} =$$

$$-2000 + \frac{1}{(1+9\%)^2} \cdot \frac{100}{9\% - 5\%} = \mathbf{104.2}\ (\boldsymbol{tusen\ kronor})$$

Internrente

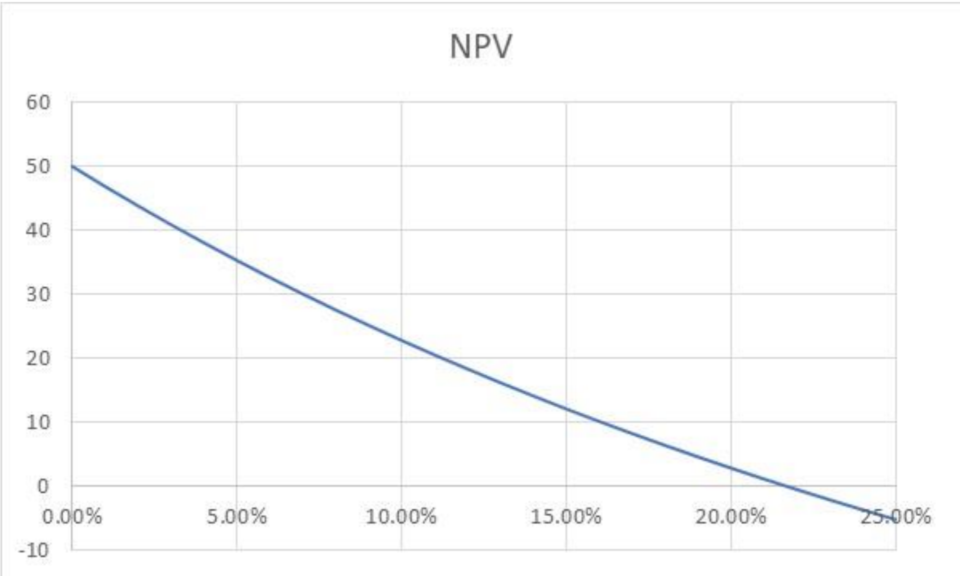
10. Du får tilbud om en investering der du skal betale 950 000 nå mot en forventet kontantstrøm på 1 000 000 om ett år. Hva er internrenten til prosjektet?

    Internrenten er diskonteringsrenten som gir nettonåverdi lik null:

$$-950 + \frac{1000}{1 + IRR} = 0 \Rightarrow 1 + IRR = \frac{1000}{950} = 1.0526 \Rightarrow IRR = \mathbf{5.26}\%$$

11. Et investeringsprosjekt innebærer en investering nå på 100 000 000. Om ett år er forventet positiv kontantstrøm 40 000 000, om to år er forventet positiv kontantstrøm på 50 000 000 og, til slutt, om tre år forventes en positiv kontantstrøm på 60 000 000. Hva er internrenten til prosjektet?

$$-100 + \frac{40}{1 + IRR} + \frac{50}{(1 + IRR)^2} + \frac{60}{(1 + IRR)^3} = 0 \Rightarrow IRR = \mathbf{21.64}\%$$



Valg mellom prosjekter

12. Hvilket er det beste prosjektet av de tre som er beskrevet i tabellen

Prosjekt	**I**	**II**	**III**
Investeringsutgift (G)	100	150	150
Årlig innbetalingsoverskudd (a)	50	60	50
Restverdi (S)	20	0	20
Økonomisk levetid (N_e)	3	4	5
Rente (r)	8%	6%	8%

hvis

a) investeringene kan bare gjøres én gang?

b) investeringene kan gjentas et uendelig antall ganger?

c) investeringene kan bare gjøres én gang, og det er mangel på kapital?

Prosjekt I	N_e =	3	r=	8%
t	0	1	2	3
G	100			
a		50	50	50
S				20
k_t	-100	50	50	70
NV	-100.00	46.30	42.87	55.57

$$NNV = -100 + 46.30 + 42.87 + 55.57 = -100 + 50 \cdot \frac{1 - 1.08^{-3}}{0.08} + \frac{20}{1.08^3} = 44.73$$

$$Annu = 44.73 \cdot \frac{0.08}{1 - 1.08^{-3}} = 17.36 \quad ; \frac{Annu}{r} = \frac{17.36}{0.08} = 216.97$$

$$\frac{NNV}{G} = \frac{44.73}{100} = \mathbf{0.4473}$$

Prosjekt II	N_e =	4	r=	6%	
t	0	1	2	3	4
G	150				
a		60	60	60	60
S					0
k_t	-150	60	60	60	60
NV	-150	56.60	53.40	50.38	47.53

$$NNV = -150 + 56.60 + 53.40 + 50.38 + 47.53 = -150 + 60 \cdot \frac{1 - 1.06^{-4}}{0.06} = 57.91$$

$$Annu = 55.91 \cdot \frac{0.06}{1 - 1.06^{-4}} = 16.71 \quad ; \frac{Annu}{r} = \frac{16.71}{0.06} = \mathbf{278.52}$$

$$\frac{NNV}{G} = \frac{57.91}{150} = 0.3860$$

Prosjekt III	N_e =	5	r=	8%		
t	0	1	2	3	4	5
G	150					
a		50	50	50	50	50
S						20
k_t	-150	50	50	50	50	70
NV	-150	46.30	42.87	39.69	36.75	47.64

$$NNV = -150 + 46.30 + \cdots = -150 + 50 \cdot \frac{1 - 1.06^{-5}}{0.06} + \frac{20}{1.08^5} = \mathbf{63.25}$$

$$Annu = 63.25 \cdot \frac{0.08}{1 - 1.06^{-5}} = 15.84 \quad ; \frac{Annu}{r} = \frac{15.84}{0.08} = 198.00$$

$$\frac{NNV}{G} = \frac{63.25}{150} = 0.4217$$

a) Hvis investeringene bare kan gjøres én gang er den beste investeringen den med høyest NNV, dvs. **prosjekt III**?
b) Hvis investeringene kan gjentas er den beste investeringen den med høyest annu/r, dvs. **Prosjekt II**?
c) Hvis investeringene bare kan gjøres én gang og det er mangel på kapital er den beste investeringen den med NNV/G, dvs. **Prosjekt I**?