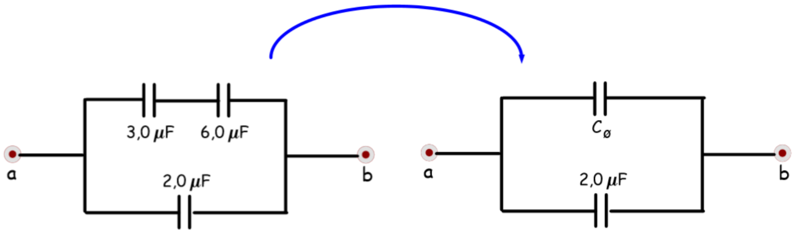
Løsningsforslag øving 7

Oppgave 1

a)



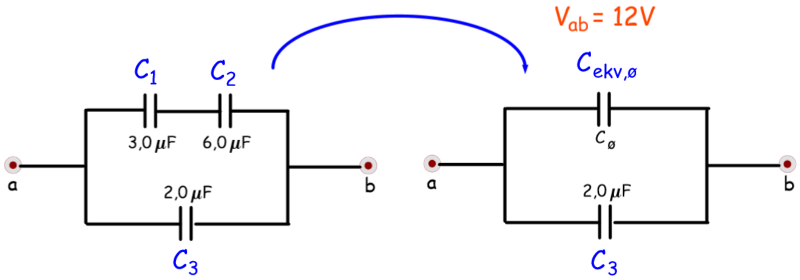
Vi finner først den ekvivalente kapasitansen $C_ø$ for seriekoplingen i den øverste greina:

$$\frac{1}{C_ø} = \frac{1}{3{,}0\ \mu\text{F}} + \frac{1}{6{,}0\ \mu\text{F}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C_ø} = \frac{6{,}0\ \mu\text{F} + 3{,}0\ \mu\text{F}}{3{,}0\ \mu\text{F} \cdot 6{,}0\ \mu\text{F}} = \frac{9{,}0\ \mu\text{F}}{18\ (\mu\text{F})^2} = \frac{1}{2\ \mu\text{F}} \Rightarrow \quad C_ø = 2{,}0\ \mu\text{F}$$

Denne seriekoplingen er videre parallellkoplet med kondensatoren i den nedre greina. Kretsens ekvivalente kapasitans blir dermed:

$$C_{ekv} = C_ø + 2{,}0\ \mu\text{F} = 2{,}0\ \mu\text{F} + 2{,}0\ \mu\text{F} = 4{,}0\ \mu\text{F}$$

b)



Kretstegningen til høyre angir at spenningen over kondensator C_3 er $V_3 = 12$ V. Mengden lagret ladning Q_3 på denne kondensatoren finner vi ved å bruke definisjonen for kapasitansen C_3:

$$C_3 = \frac{Q_3}{V_{ab}} \quad \Rightarrow \quad Q_3 = C_3 \cdot V_{ab} = 2{,}0 \cdot 10^{-6}\ \text{F} \cdot 12\ \text{V} = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \text{C} = 24\ \mu\text{C}$$

Kondensator C_3 er parallellkoplet med den ekvivalente kondensatoren $C_{ekv,ø}$. Kretstegningen til høyre viser, på samme måte som for V_3, at spenningen over $V_{ekv,ø} = 12$ V. Mengden lagret ladning på denne ekvivalente kondensatoren er dermed $Q_{ekv,ø} = Q_3 = 24\ \mu$C. $C_{ekv,ø}$ er en seriekopling av kondensatorene C_1 og C_2. I denne seriekoplingen er $Q_1 = Q_2 = Q_{ekv,ø} = 24\ \mu$C.

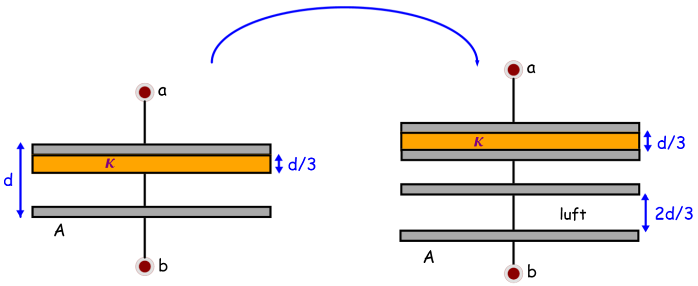
c) Spenningen V_1 og V_2 over disse to kondensatorene er dermed:

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_1} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \text{C}}{3{,}0 \cdot 10^{-6}\ \text{F}} = 8{,}0\ \text{V}$$

og

$$C_2 = \frac{Q_2}{V_2} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \text{C}}{6{,}0 \cdot 10^{-6}\ \text{F}} = 4{,}0\ \text{V}$$

Oppgave 2



Vi modellerer den reelle kondensatoren til venstre som to kondensatorer koplet i parallell som vist i figuren til høyre. I den øverste kondensatoren fyller dielektrikumet hele volumet mellom de to kondensatorplatene. Plateavstanden i den øverste kondensatoren er av denne grunn lik $d/3$. Plateavstanden i den nedre kondensatoren er dermed $2d/3$. Den ekvivalente kapasitansen for kondensatoren i figuren til venstre kan dermed bestemmes ut fra at

$$\frac{1}{C_{ekv}} = \frac{1}{C_ø} + \frac{1}{C_n}$$

Med

$$C_n = \frac{\epsilon_0 A}{\left(\frac{2d}{3}\right)} = \frac{3\epsilon_0 A}{2d} \qquad \text{og} \qquad C_ø = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{\left(\frac{d}{3}\right)} = \frac{3\kappa\epsilon_0 A}{d}$$

er

$$\frac{1}{C_ø} = \frac{2d}{3\epsilon_0 A} \qquad \text{og} \qquad \frac{1}{C_n} = \frac{d}{3\kappa\epsilon_0 A}$$

Innsatt gir dette at:

$$\frac{1}{C_{ekv}} = \frac{2d}{3\epsilon_0 A} + \frac{d}{3\kappa\epsilon_0 A} = \frac{d}{3\epsilon_0 A}\left(2 + \frac{1}{\kappa}\right) = \frac{d}{3\epsilon_0 A}\left(\frac{2\kappa + 1}{\kappa}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad C_{ekv} = \left(\frac{3\kappa}{2\kappa + 1}\right)\frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Oppgave 3

Det er gitt at en elektrisk strøm av størrelsesorden 50 mA kan være dødelig. Dersom vi antar at resistansen R i kroppen følger Ohms lov, kan denne loven benyttes til å finne den korresponderende spenningen som skal til for å produsere denne strømmen.

a) Når huden er tørr er $R = 200\ \text{k}\Omega$. Spenningen V_{ab} blir dermed:

$$V_{ab} = I \cdot R = 5{,}0 \cdot 10^{-2}\text{A} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{5}\ \Omega = 1{,}0 \cdot 10^{4}\ \text{V} = 10\ \text{kV}$$

b) Når huden er fuktig er $R = 2{,}0\ \text{k}\Omega$. Spenningen V_{ab} i dette tilfellet er:

$$V_{ab} = I \cdot R = 5{,}0 \cdot 10^{-2}\text{A} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{3}\ \Omega = 1{,}0 \cdot 10^{2}\ \text{V} = 100\ \text{V}$$

Nettspenningen hjemme hos deg er $V_{ab} = 230\ \text{V}$, mer enn høy nok til å kunne gi deg et dødelig strømstøt rett etter at du har vasket hendene.

Oppgave 4


Kobberet har resistivitet $\rho_{cu} = 1{,}68 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$ og aluminiumet har resistivitet $\rho_{al} = 2{,}65 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$. Vi finner forholdet mellom de to kabeldiameterne d_{al} og d_{cu} ved å ta utgangspunkt i at

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

som angir resistansen R ved materialenes resistivitet ρ, kabellengden l og kablenes tversnitsareal $A = \pi r^2$. Å bestemme kablenes resistans pr. lengdeenhet (vi sammenligner dermed to kabler med nøyaktig samme lengde l) er dermed gitt ved:

$$\frac{R}{l} = \frac{\rho}{A} = \frac{\rho}{\pi r^2} = \frac{4\rho}{\pi d^2} \qquad \text{ettersom radien} \qquad r = \frac{d}{2}$$

For aluminiumet og kobberet gir dette spesifikt at:

$$\frac{R}{l} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\rho_{al}}{d_{al}^2} \quad \text{og} \quad \frac{R}{l} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\rho_{cu}}{d_{cu}^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{R}{l} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\rho_{al}}{d_{al}^2} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\rho_{cu}}{d_{cu}^2}$$

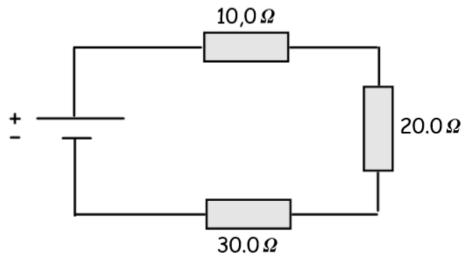
$$\Rightarrow \qquad \frac{\rho_{al}}{d_{al}^2} = \frac{\rho_{cu}}{d_{cu}^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d_{al}}{d_{cu}} = \sqrt{\frac{\rho_{al}}{\rho_{cu}}} = \sqrt{\frac{2{,}65 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}}{1{,}68 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}}} = 1{,}256 = 1{,}26$$

Lederen laget av aluminium må altså være omtrent 26% tykkere enn lederen laget av kobber. Dette antyder samtidig at kobber er en bedre elektrisk leder enn aluminium.

Oppgave 5

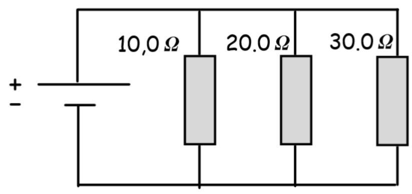
a) For å oppnå størst mulig resistans R i den kretsen du kopler opp så plasserer du alle tre motstandene i parallell slik figuren under viser.



Den ekvivalente resistansen for denne kretsen er nemlig gitt ved summen:

$$R_{ekv} = R_1 + R_2 + R_3 = 10{,}0\ \Omega + 20{,}0\ \Omega + 30{,}0\ \Omega = 60{,}0\ \Omega$$

b) For å oppnå minst mulig resistans i den kretsen du kopler opp så plasserer du alle tre motstandene i parallell som figuren under viser.



Den ekvivalente resistansen for en slik kopling er nemlig gitt ved summen:

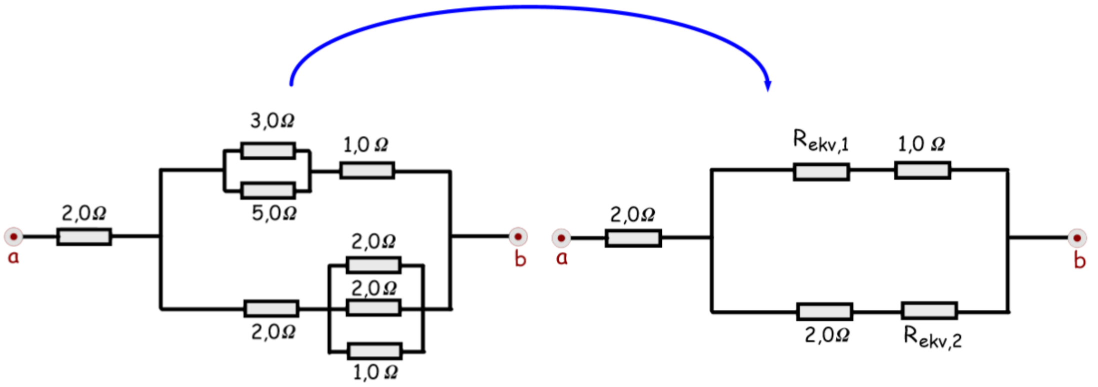
$$\frac{1}{R_{ekv}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \qquad \Rightarrow \quad R_{ekv} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Ved å sette inn verdiene for henholdsvis R_1, R_2 og R_3 gir dette direkte at:

$$R_{ekv} = \frac{1}{\frac{1}{10\ \Omega} + \frac{1}{20\ \Omega} + \frac{1}{30\ \Omega}} = 5{,}454\ \Omega = 5{,}45\ \Omega$$

Oppgave 6

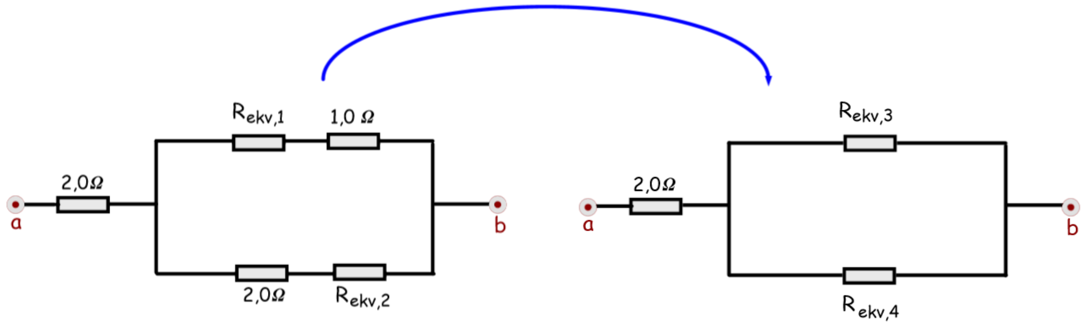
a) Vi regner først ut de ekvivalente resistansene til parallellkoplingene angitt som henholdsvis $R_{ekv,1}$ og $R_{ekv,2}$ i kretsen til høyre i figuren under:



$$\frac{1}{R_{ekv,1}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \Rightarrow \quad R_{ekv,1} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{3{,}0\ \Omega} + \frac{1}{5{,}0\ \Omega}} = 1{,}88\ \Omega$$

$$\frac{1}{R_{ekv,2}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \quad \Rightarrow \quad R_{ekv,1} = \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} = \frac{1}{\frac{1}{2{,}0\ \Omega} + \frac{1}{2{,}0\ \Omega} + \frac{1}{1{,}0\ \Omega}} = 0{,}500\ \Omega$$

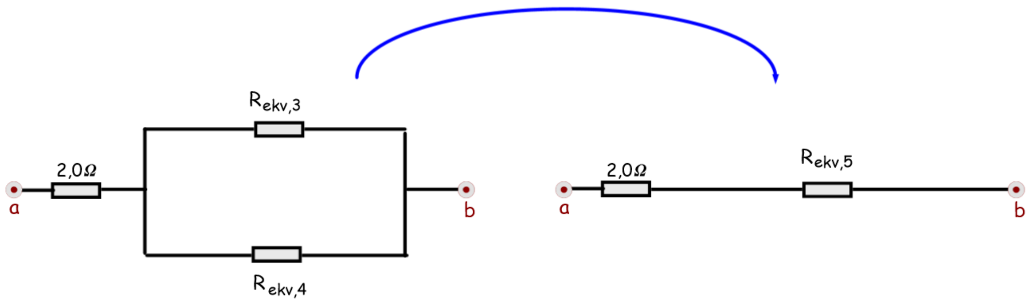
Vi regner deretter ut de ekvivalente resistansene til de to seriekoplingene i den øvre og nedre greina angitt som henholdsvis $R_{ekv,3}$ og $R_{ekv,4}$ i kretsen til høyre nedenfor:



$$R_{ekv,3} = R_{ekv,1} + 1{,}0\ \Omega = 1{,}88\ \Omega + 1{,}0\ \Omega = 2{,}88\ \Omega$$

$$R_{ekv,4} = 2{,}00\ \Omega + R_{ekv,2} = 2{,}00\ \Omega + 0{,}500\ \Omega = 2{,}50\ \Omega$$

Da gjenstår det å regne ut den ekvivalente resistansen basert på kretsen til venstre i figuren under:



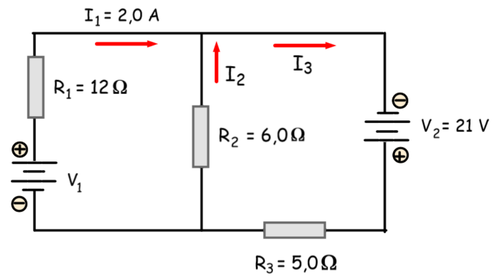
Her er aller først:

$$\frac{1}{R_{ekv,5}} = \frac{1}{R_{ekv,3}} + \frac{1}{R_{ekv,4}} \quad \Rightarrow \quad R_{ekv,5} = \frac{1}{\frac{1}{R_{ekv,3}} + \frac{1}{R_{ekv,4}}} = \frac{1}{\frac{1}{2{,}88\ \Omega} + \frac{1}{2{,}50\ \Omega}} = 1{,}34\ \Omega$$

Innsatt i den siste seriekoplingen til høyre gir dette at:

$$R_{ekv} = R_{ekv,5} + 2{,}0\ \Omega = 1{,}34\ \Omega + 2{,}0\ \Omega = 3{,}34\ \Omega = 3{,}3\ \Omega$$

Oppgave 7



Vi skal bestemme tre ukjente størrelser, henholdsvis de to strømmene I_2 og I_3, samt spenningen V_1. Vi benytter Kirchoffs 1. lov samt Kirchoffs 2.lov på to utvalgte greiner i kretsen til å sette opp tre ligninger som inneholder disse tre ukjente størrelsene:

Greina til venstre gir: $\quad V_1 - I_1R_1 + I_2R_2 = 0 \qquad (1)$

Greina til høyre gir: $\quad V_2 - I_3R_3 - I_2R_2 = 0 \qquad (2)$

Kirchoffs 1.lov: $\quad I_1 + I_2 = I_3 \qquad (3)$

Den klassiske måten å løse dette ligningssystemet på er å anvende innsettingsmetoden (gjerne benytt denne metoden som et alternativ). Vi velger her å bruke matrisemetoden. For å få satt opp matriseproduktet $AX = B$ reorganiser vi først ligningssystemet til følgende form:

$$V_1 + I_2R_2 = I_1R_1 \qquad (1)$$

$$I_2R_2 + I_3R_3 = V_2 \qquad (2)$$

$$-I_2 + I_3 = I_1 \qquad (3)$$

Vi forenkler matriseregningen ytterligere ved å sette vi inn alle kjente størrelser slik at kun de ukjente størrelsene inngår som bokstavstørrelser (vi dropper enhetene i dette tilfelle). Dette gir:

$$V_1 + 6{,}0\, I_2 \qquad = 24 \qquad (1)$$

$$6{,}0\, I_2 + 5{,}0\, I_3 = 21 \qquad (2)$$

$$-I_2 + I_3 = 2{,}0 \qquad (3)$$

Dette siste ligningssystemet setter vi opp som et matriseprodukt på følgende form:

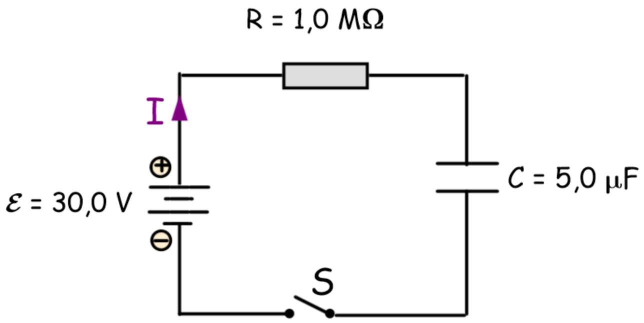
$$AX = B \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 6{,}0 & 0 \\ 0 & 6{,}0 & 5{,}0 \\ 0 & -1{,}0 & 1{,}0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 2{,}0 \end{pmatrix}$$

Benytter du så kalkulatoren på denne matriseligningen finner du at:

$$V_1 = 18\ \text{V}, \quad I_2 = 1{,}0\ \text{A} \ \text{ og } \ I_3 = 3{,}0\ \text{A}$$

Oppgave 8

Kretstegningen av de fire komponentene er vist under.



a) Tidskonstanten τ for denne kretsen er

$$\tau = R \cdot C = 1{,}0 \cdot 10^6\ \Omega \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{F} = 5{,}0\ \mathrm{s}$$

Tidskonstanten er et mål for hvor rask kondensatoren er med hensyn på å lades opp og lades ut.

b) Strømmen I i en RC-krets varierer med tida etter funksjonen:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\epsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Vi skal bestemme strømmen $t = 10{,}0$ s etter at bryteren er lukket. Direkte innsetting i uttrykket for $I(t)$ over gir direkte at:

$$I(10{,}0) = \frac{30{,}0\ \mathrm{V}}{1{,}0 \cdot 10^6\ \Omega} \cdot e^{-\frac{10{,}0\ \mathrm{s}}{5{,}0\mathrm{s}}} = 4{,}06 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{A} = 4{,}06\ \mu\mathrm{A}$$

c) Tiden t det tar å lade opp kondensatoren til 80% av maksimal mengde ladning Q_m finner vi ved å sette opp ligningen:

$$q(t) = Q_m \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = 0{,}80 Q_m$$

$$\Rightarrow \quad 1 - e^{-\frac{t}{RC}} = 0{,}80$$

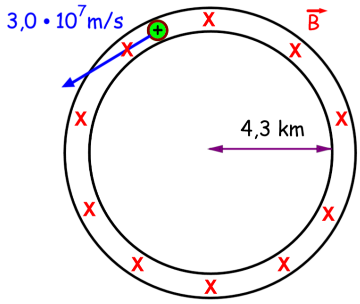
$$\Rightarrow \quad e^{-\frac{t}{RC}} = 0{,}20$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(e^{-\frac{t}{RC}}\right) = \ln 0{,}20$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{t}{RC} = \ln 0{,}20$$

$$\Rightarrow \quad t = -RC \cdot \ln 0{,}20 = -5{,}0\ \mathrm{s} \cdot \ln 0{,}20 = 8{,}05\ \mathrm{s} = 8{,}1\ \mathrm{s}$$

Oppgave 9



Det er den magnetiske krafta F_B som virker på protonene og som sørger for at de beveger seg i en sirkelbane. Høyrehåndsregelen angir at retningen til denne magnetiske krafta er innover mot sirkelbanens sentrum. Newtons 2.lov gir dermed at:

$$F_B = ma = m\frac{\mathrm{v}^2}{R} = q\mathrm{v}B$$

Den magnetiske feltstyrken B er dermed gitt ved:

$$B = \frac{m\mathrm{v}}{qR} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \cdot 3{,}0 \cdot 10^{7}\ \mathrm{m/s}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 4300\ \mathrm{m}} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}$$