

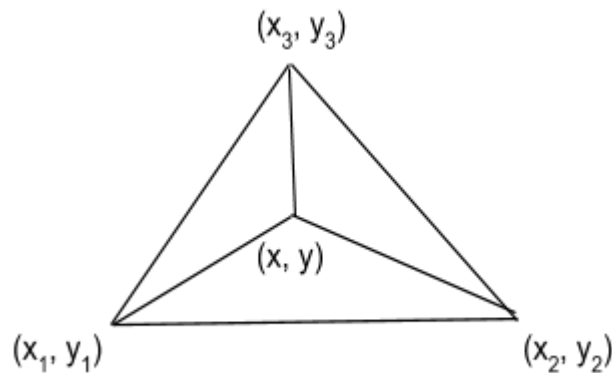
Prosjektoppgave TMM4135: Implementering av skive-elementer i calfem

Av Oscar Petlund, Eskil Riibe og Aksel Madslien
Vår "major"-oppgave

Implementering

Trekantelement

Filen triangles.py inneholder implementasjonen av 3- og 6-noders trekantelement.



For trekantelementene lar vi arealkoordinatene ζ_1 , ζ_2 og ζ_3 være gitt ved $\zeta_i = A_i / A$, der $A_i = 0.5 \cdot ((x_j y_k - x_k y_j) + x \cdot (y_j - y_k) + y \cdot (x_k - x_j))$ og i, j og k er sykliske permutasjoner for $i = 1, 2, 3$ og A er arealet av elementet. Vi kan bruke arealkoordinatene som forskyvningspolynom for 3-noders trekantelementet. Dette gir oss

$$N = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & \zeta_2 & 0 & \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_1 & 0 & \zeta_2 & 0 & \zeta_3 \end{bmatrix}.$$

Det er verdt å merke seg at $\frac{\partial \zeta_i}{\partial x}$ og $\frac{\partial \zeta_i}{\partial y}$ er konstante. Dette medfører at tøyings-forskyvningsmatrisen for 3-noders trekantelementet, som er gitt ved

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} & \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} & \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} \end{bmatrix},$$

også blir konstant.

For 6-noders trekantelementet er vi nødt til å etablere nye forskyvningspolynomer, men vi tar utgangspunkt i arealkoordinatene ζ_1 , ζ_2 og ζ_3 . Vi lar nå

$$N = \begin{bmatrix} 2\zeta_1\zeta_1 - 1 & 0 & 2\zeta_2\zeta_2 - 1 & 0 & 2\zeta_3\zeta_3 - 1 & 0 & 4\zeta_1\zeta_2 & 0 & 4\zeta_2\zeta_3 & 0 & 4\zeta_3\zeta_1 & 0 \\ 0 & 2\zeta_1\zeta_1 - 1 & 0 & 2\zeta_2\zeta_2 - 1 & 0 & 2\zeta_3\zeta_3 - 1 & 0 & 4\zeta_1\zeta_2 & 0 & 4\zeta_2\zeta_3 & 0 & 4\zeta_3\zeta_1 \end{bmatrix}.$$

Dette gir oss forskyvningspolynomer som har de egenskapene vi ønsker og vi får nå tøyings-forskyvningsmatrisen

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{bmatrix}$$

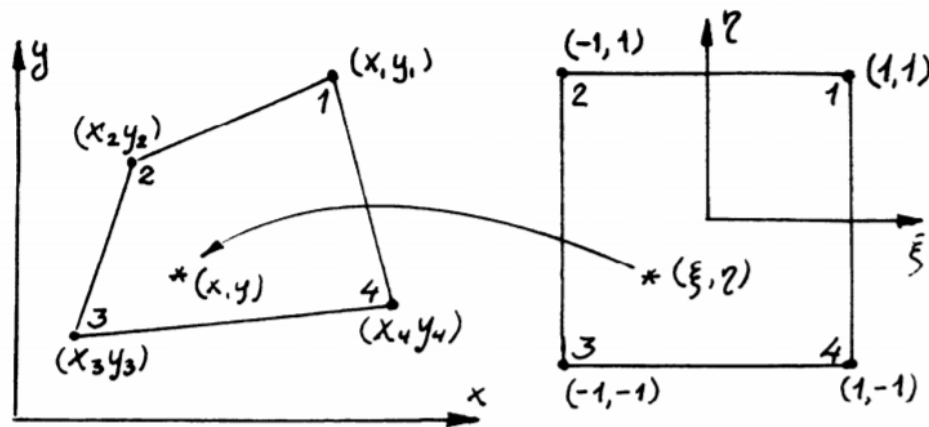
der $N_i = 2\zeta_i\zeta_i - 1$ og $N_{i+3} = 4\zeta_i\zeta_j$ der i og j er sykliske permutasjoner, for $i = 1, 2, 3$. Da blir

$$\frac{\partial N_i}{\partial \cdot} = 4\zeta_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial \cdot} \text{ og } \frac{\partial N_{i+3}}{\partial \cdot} = 4\zeta_i \frac{\partial \zeta_j}{\partial \cdot} + 4\zeta_j \frac{\partial \zeta_i}{\partial \cdot}$$

der i og j er sykliske permutasjoner, for $i = 1, 2, 3$. Her blir ikke de deriverte av forskyvningspolynomene konstante og vi blir nødt til å benytte numerisk integrasjon når vi skal beregne B og K for 6-noders trekantelementet.

Firkantelement

Filen quads.py inneholder implementasjonen av 4- og 9-noders firkantelement.



Vi starter med å transformere elementet vårt til et kvadrat i $\xi\eta$ -koordinatsystemet der de nye koordinatene er gitt ved $x = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4$ og $y = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4$. Her er N_i interpolasjonsfunksjoner, som er 1 i node i og 0 i resterende noder. Ved å benytte oss av nullinjer i alle andre noder enn i , og tilslutt gange det anskaffede uttrykket med en konstant faktor slik at $N_i = 1$ i node i , vil man få at

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

Tøynings-forskyvningsmatrisen regnes ut på samme måte som for trekantelementene, bortsett fra at vi her får en 3x8-matrise. For å finne de partiellderiverte av N_i med hensyn på x og y må vi først regne ut de partiellderiverte med hensyn på ξ og η som vi kan gjøre direkte. Videre har vi fra kjerneregelen at

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

som gir

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x, \xi & y, \xi \\ x, \eta & y, \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

der J er Jacobimatrisen. Denne kan bli funnet ved å ta de partiellderiverte av N_i med hensyn på ξ og η multiplisert med x - og y -koordinatene til de opprinnelige nodene på følgende måte:

$$\begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{1,\eta} \\ N_{2,\xi} & N_{2,\eta} \\ N_{3,\xi} & N_{3,\eta} \\ N_{4,\xi} & N_{4,\eta} \end{bmatrix}$$

Til slutt kan vi snu på formelen fra tidligere og gange opp med $N = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]^T$ på begge sider slik at vi får

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} N = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} N$$

som er det vi ville fram til. Som på 6-noders trekantelementet er tøynings-forskyvningsmatrisen her heller ikke konstant, og vi må dermed benytte oss av numerisk integrasjon.

For 9-noders firkantelementet vil vi i tillegg til hjørnenodene ha noder på sidekantene (node 5 til 8) og en node i origo i det transformerte koordinatsystemet (node 9). Vi kan likevel ta utgangspunkt i samme metode, og kommer fram til interpolasjonsformlene

$$N_1 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 + \eta)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 - \eta)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2)$$

$$N_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) .$$

Tøynings-forskyvningsmatrisen og de partiellderiverte kan beregnes på samme måte som for 4-noders firkantelementet bortsett fra at vi her vil ende opp med en 3x18-matrise.

Testfiler

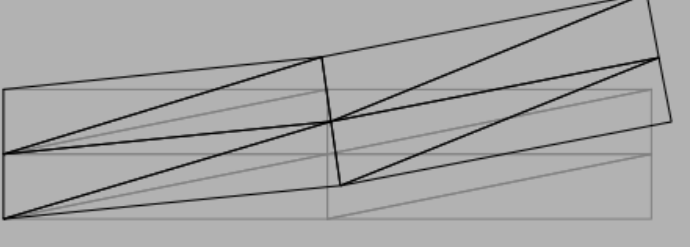
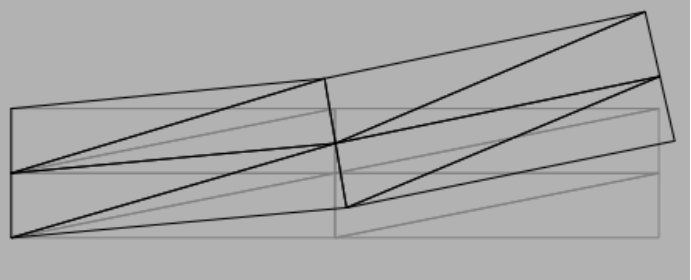
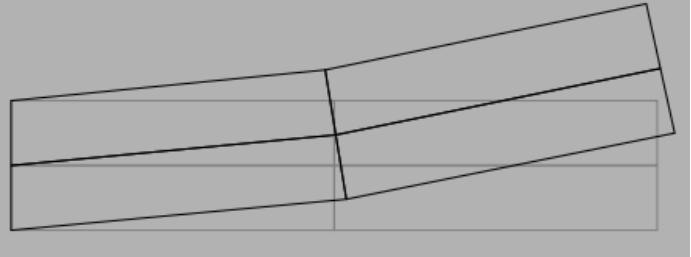
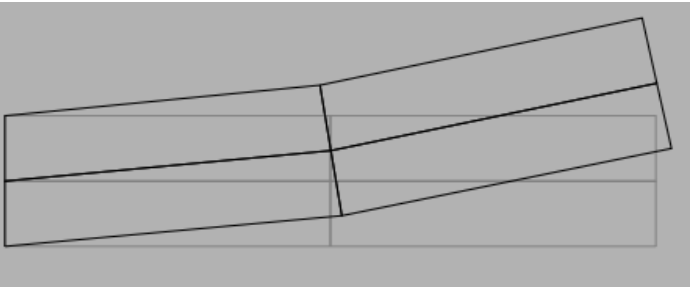
Vi har brukt scriptet Cantilever_FEM_Calculator.py for å beregne forskyvning og reaksjonskrefter i x- og y-retning med gitt belastning, elementtype og antall elementer.

Vi har også laget et script, Cantilever_Modified.py, for å kunne plote forskyvning mot antall elementer. Dermed kan vi sjekke om forskyvningen konvergerer når man øker antall elementer. Scriptet er i stor grad basert på det utdelte scriptet, Cantilever_FEM_Calculator.py.

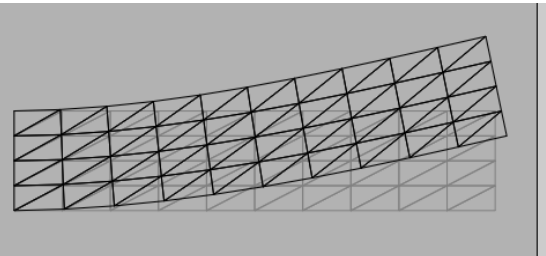
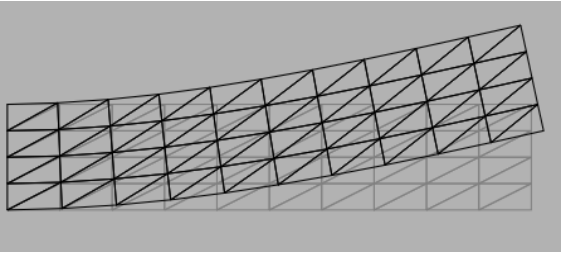
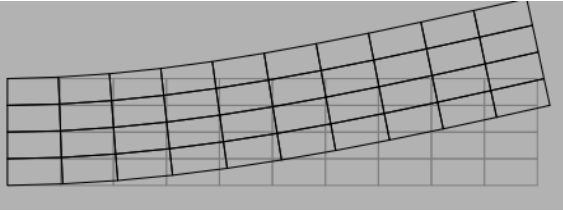
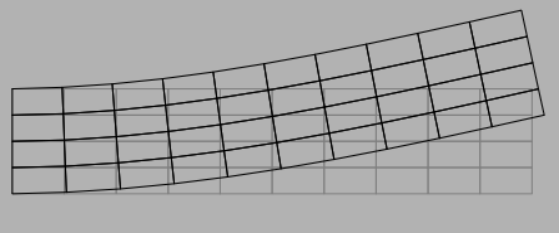
Resultater

Lasttilfellet vi har benyttet er en fordelt last i y-retning med størrelse 10^3 , samt to laster i endepunktet i x- og y-retning med størrelse $3 \cdot 10^3$. Vi brukte det samme lasttilfellet for alle resultatene.

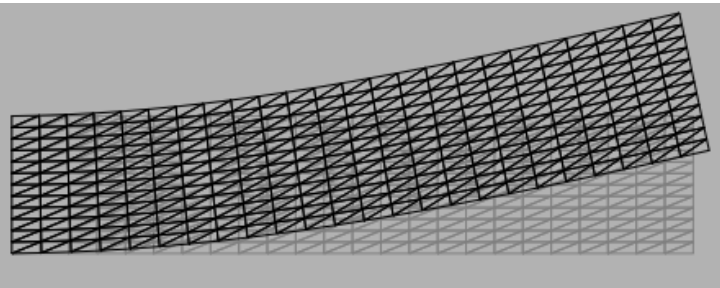
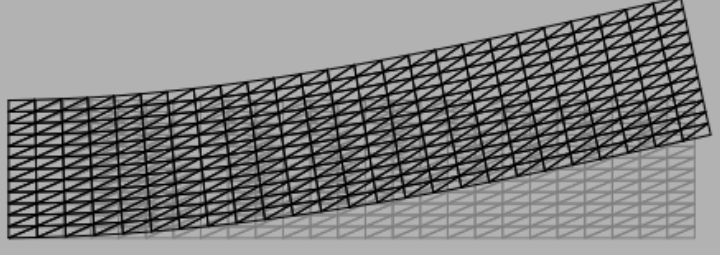
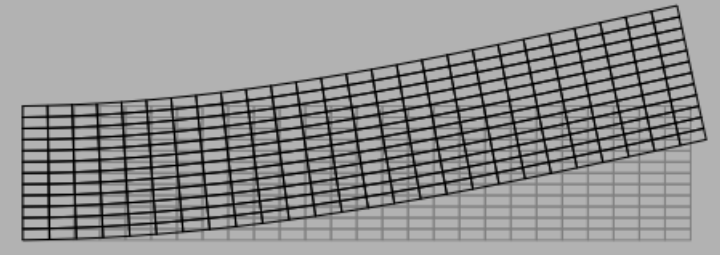
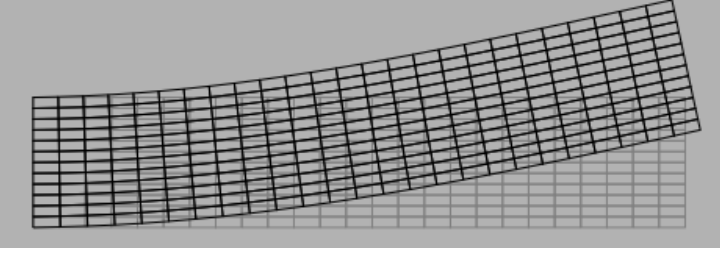
2 element i y-retning og 2 element i x-retning

Elementtype	Forskyvning i x-retning	Forskyvning i y-retning	Reaksjonskraft x-retning	Reaksjonskraft y-retning	Figur
3-node element	7.400e-04	9.539e-03	-3.000e+06	-3.003e+06	
6-node element	7.163e-04	6.969e-02	-3.000e+06	-3.003e+06	
4-node element	6.948e-04	2.123e-02	-3.000e+06	-3.003e+06	
9-node element	7.059e-04	7.116e-02	-3.000e+06	-3.003e+06	

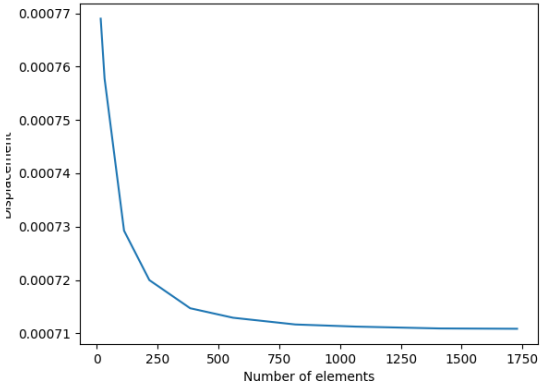
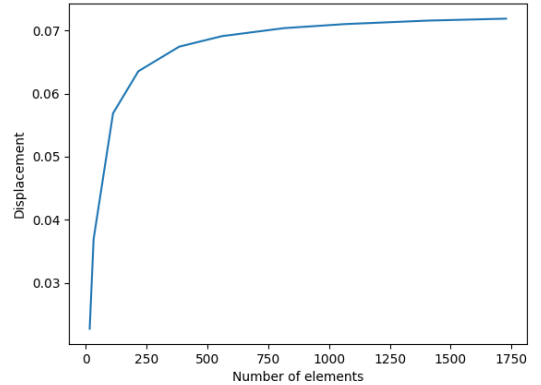
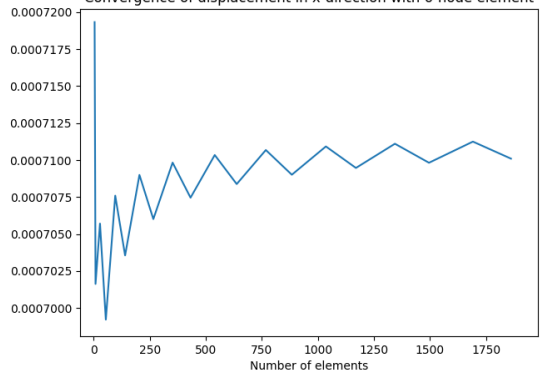
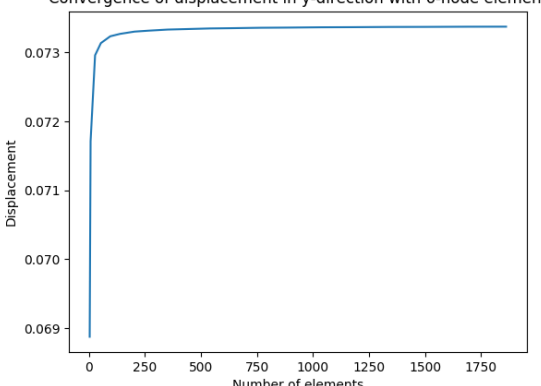
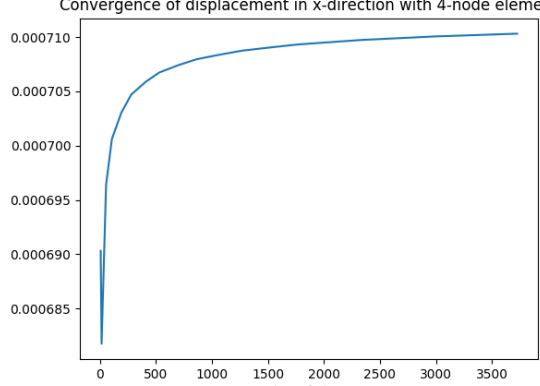
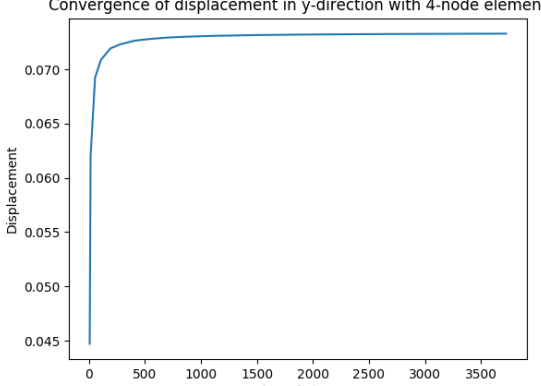
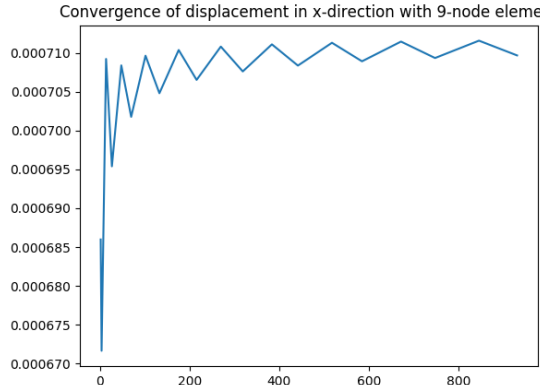
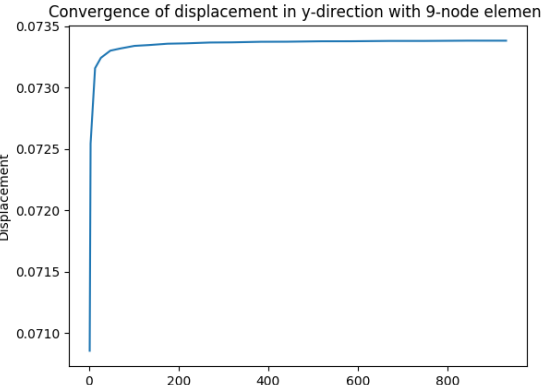
4 elementer i y-retning og 10 elementer i x-retning

Elementtype	Forskyvning i x-retning	Forskyvning i y-retning	Reaksjonskraft x-retning	Reaksjonskraft y-retning	Figur
3-node element	7.379e-04	5.133e-02	-3.000e+06	-3.003e+06	
6-node element	7.074e-04	7.319e-02	-3.000e+06	-3.003e+06	
4-node element	6.975e-04	6.620e-02	-3.000e+06	-3.003e+06	
9-node element	7.078e-04	7.327e-02	-3.000e+06	-3.003e+06	

12 elementer i y-retning og 25 elementer i x-retning

Elementtype	Forskyvning i x-retning	Forskyvning i y-retning	Reaksjonskraft x-retning	Reaksjonskraft y-retning	Figur
3-node element	7.138e-04	6.870e-02	-3.000e+06	-3.003e+06	
6-node element	7.105e-04	7.335e-02	-3.000e+06	-3.003e+06	
4-node element	7.059e-04	7.200e-02	-3.000e+06	-3.003e+06	
9-node element	7.108e-04	7.336e-02	-3.000e+06	-3.003e+06	

Konvergens av forskyvning i endepunkt

Elementtype	Forskyvning i x-retning	Forskyvning i y-retning
3-noder	<div>Convergence of displacement in x-direction with 3-node element</div> 	<div>Convergence of displacement in y-direction with 3-node element</div> 
6-noder	<div>Convergence of displacement in x-direction with 6-node element</div> 	<div>Convergence of displacement in y-direction with 6-node element</div> 
4-noder	<div>Convergence of displacement in x-direction with 4-node element</div> 	<div>Convergence of displacement in y-direction with 4-node element</div> 
9-noder	<div>Convergence of displacement in x-direction with 9-node element</div> 	<div>Convergence of displacement in y-direction with 9-node element</div> 

Konklusjon

Vi ser at alle elementtypene konvergerer mot en riktig forskyvning i både x- og y-retning, men at det er store forskjeller i hvor fort de konvergerer. Spesielt 3-noders trekant-elementet konvergerer mye saktere enn de tre andre. Samtidig legger vi merke til at de mer komplekse elementene med noder på sidekantene, altså 6- og 9-noder-elementene, oscillerer mot konvergens for x-forskyvningen.

Vi merker oss også at reaksjonskreftene er de samme i alle resultatene, og er lik motkraften til den påførte endelasten i x-retning. I y-retning ser vi at vi i tillegg får et lite bidrag på rundt $3 \cdot 10^3$. Dette kan forklares med at vi i tillegg har en fordelt last på 10^3 som ganges med volumet til bjelken som er $12.5 \cdot 2.5 \cdot 0.1 = 3.125$. Ettersom summen av krefter alltid vil være null uavhengig av antall noder og elementer anser vi dette som et rimelig svar.