Név: RV

1. ZH.
Számítógépes Modellezés (Mathematica)
A csoport
Okt. 15. csütörtök

Oldjuk meg az alábbi problémákat. Ügyeljünk a mukafüzet struktúrájára, használjunk szöveges cellát a megjegyzésekhez, vagy a megoldások összefoglalására! Mentsük el időnként a munkát.

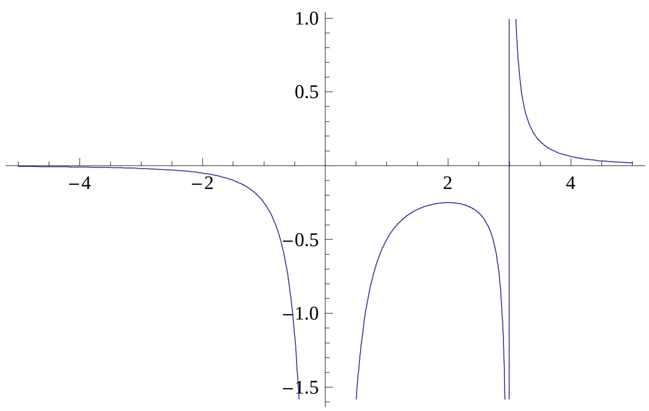
---

1. Probléma (5 pont)

Használjuk a *Mathematica*-t a $h(x) = \frac{1}{x^3 - 3x^2}$ függvény (kritikus) limeszeinek meghatározására.

```
h[x_] := 1 / (x^3 - 3 x^2);
```

```
Plot[h[x], {x, -5, 5}]
```



```
Solve[Denominator[h[x]] == 0]
```

```
{{x → 0}, {x → 0}, {x → 3}}
```

-∞, 0, 3, ∞ a vizsgálandó helyek

```
Limit[h[x], x → -Infinity]
```

```
0
```

```
Limit[h[x], x → Infinity]
```

```
0
```

Baloldali limesz 0-ban

```
Limit[h[x], x -> 0, Direction → 1]
```

$-\infty$

Jobboldali limesz 0-ban

```
Limit[h[x], x -> 0, Direction → -1]
```

$-\infty$

```
Limit[h[x], x -> 3, Direction → 1]
```

$-\infty$

```
Limit[h[x], x -> 3, Direction → -1]
```

∞

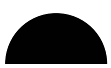
pontok ábra 1, kritikus pontok 1, végtelenben 1, féloldali limeszek 2

---

2. Probléma (5 pont)

Készítsünk táblázatot az $f(x) = \sin(x^2)$ függvényértékekeből, ekvidisztánsan választva az alappontokat a [-2,2] intervallumból az x-tengelyen.
Ábrázoljuk ezeket a pontokat, a különböző pontok legyenek különböző színűek és nagyságúak az x-koordinátától függően, , majd cseréljük ki transzformációs szabály alkalmazásával a pontokat félkörlapokra (Disks).

```
Graphics[Disk[{0, 0}, 1, {0, Pi}]]
```

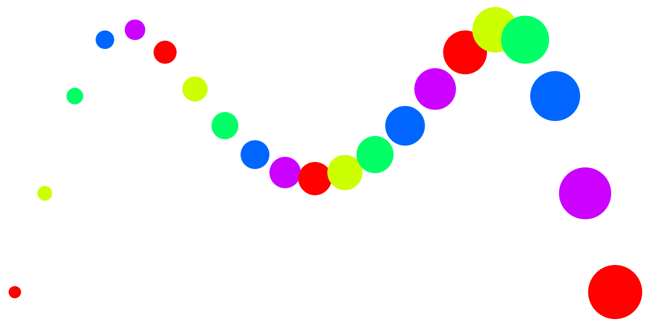


```
t = Table[{x, Sin[x^2]}, {x, -2, 2, .2}]
```

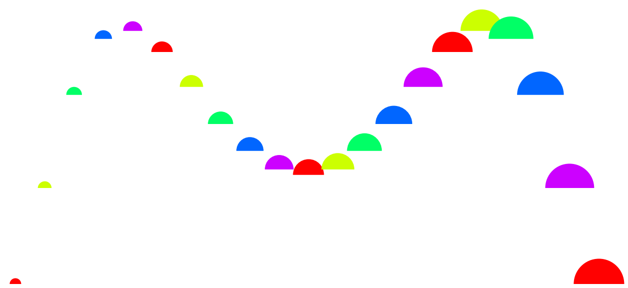
```
{{-2., -0.756802}, {-1.8, -0.0982486}, {-1.6, 0.549355}, {-1.4, 0.925212},
 {-1.2, 0.991458}, {-1., 0.841471}, {-0.8, 0.597195}, {-0.6, 0.352274},
 {-0.4, 0.159318}, {-0.2, 0.0399893}, {1.11022×10^-16, 1.2326×10^-32}, {0.2, 0.0399893},
 {0.4, 0.159318}, {0.6, 0.352274}, {0.8, 0.597195}, {1., 0.841471}, {1.2, 0.991458},
 {1.4, 0.925212}, {1.6, 0.549355}, {1.8, -0.0982486}, {2., -0.756802}}
```

```
t2 = t /. {x_?NumericQ, y_?NumericQ} →
    Graphics[{Hue[x], PointSize[(x + 2) / 60 + .02], Point[{x, y}]}];
```

```
Show[t2]
```



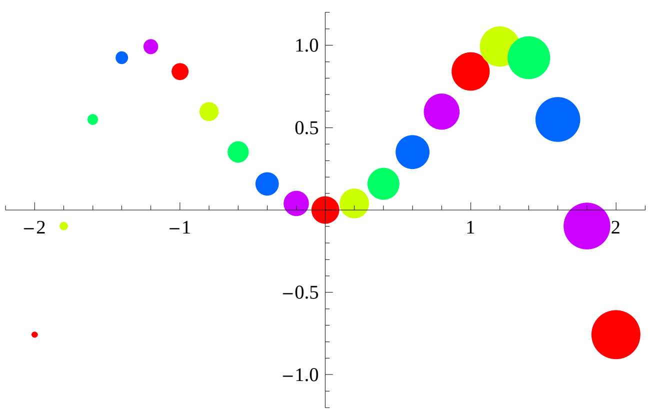
```
t2 /. {Hue[col_], PointSize[s_], Point[{x_, y_}]} → {Hue[col], Disk[{x, y}, 2 s, {0, π}]} // Show
```



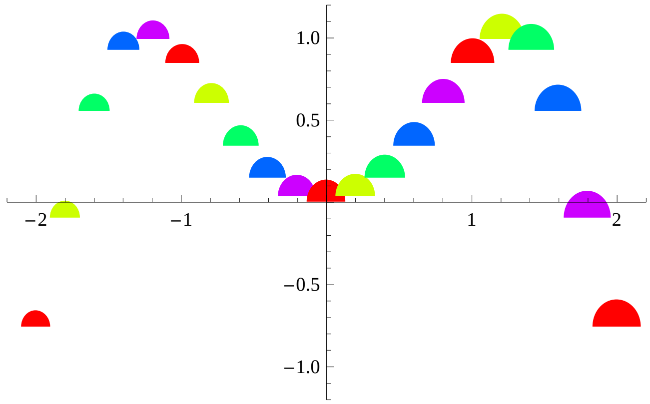
Pontozás táblázat 1, ábrázolás 2, szín+méret 1, félkör transzformáció 1

Megjegyzés másik lehetőség

```
gr = ListPlot[Partition[t, 1],
  PlotStyle → Table[{PointSize[(t[[i, 1]] + 2) / 60 + .01], Hue[t[[i, 1]]]}, {i, Length[t]}],
  PlotRange → {{-2.2, 2.2}, {-1.2, 1.2}}]
```



```
gr /. Point[{{x_, y_}}] -> Disk[{x, y}, (x + 2) / 60 + .1, {0, π}]
```



3. Probléma (10+5 pont)

1a. Adott az y=mx (origón áthaladó) egyenes, tukrözzünk egy P pontot az egyenesre
Manipulate-tel lehessen a P koordinátáit és az m paramétert változtatni

*1b. Adott L={m1,m2, mk} lista. mi az y=mi x (origón áthaladó) egyeneshez tartozó meredekség. Továbbá adott egy P pont.
Ábrázoljuk P tükörképeinek sorozatát (Manipulate; k-adik pozició: elsô k tükörkép, színezés)

Hint: Határozzuk meg a lineáris tr. mátrixát a standard bázisban az m pm. függvényében m=tg α

In[1]:=

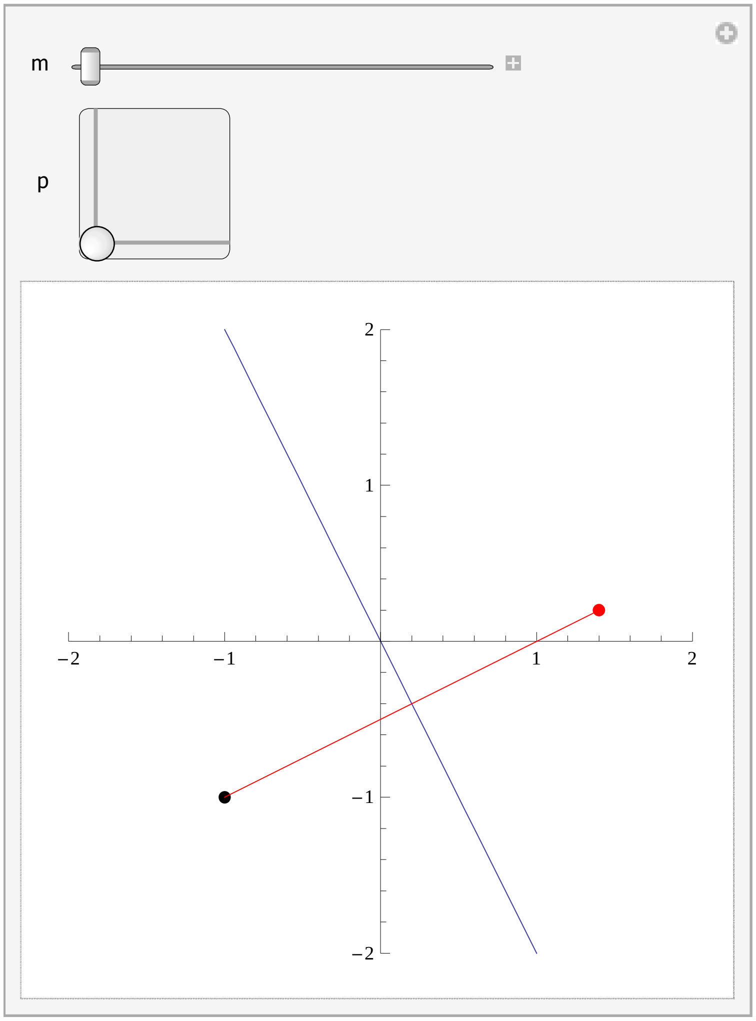
```
TRM[m_] := 1 / (m^2 + 1) ( 1 - m^2    2 m
                            2 m      m^2 - 1 )
```

M a g y a r á z a t
$m = \mathrm{Tan}[\alpha] \Longrightarrow \mathrm{Cos}[\alpha]\hat{}2 = 1/(1+\mathrm{Tan}[\alpha]\hat{}2) \Longrightarrow \mathrm{Cos}[2\,\alpha] = 2\,\mathrm{Cos}[\alpha]\hat{}2 - 1 = 2\big/\left(1+m^2\right) - 1 = \left(1-m^2\right)\big/\left(1+m^2\right)$, stb.
$T[e_1] = \mathrm{Cos}[2\,\alpha]\,e_1 + \mathrm{Sin}[2\,\alpha]\,e_2 = \left(1-m^2\right)\big/\left(1+m^2\right)e_1 + 2\,m\big/\left(1+m^2\right)e_2$

In[2]:=

```
Manipulate[Plot[m x, {x, -2, 2}, PlotRange → {{-2, 2}, {-2, 2}}, AspectRatio → 1,
  Epilog → {PointSize[.02], Point[p], Red, Point[TRM[m].p], Line[{p, TRM[m].p}]}],
 {m, -2, 2, .1}, {p, {-1, -1}, {1, 1}, Slider2D}]
```

Out[2]=



4. Probléma (10 pont)

2. Adott az f(x ,y)=(10 x y + x^2+ 3y^2) e^(1-x^2-y^2) kétváltozós függvény.

a. Adjuk meg f'_x és f'_y függvényeket

b. Adjuk meg f'_x és f'_y 0-szintvonalait grafikusan.

c. Határozzuk meg a kritikus pontkainak halmazát és a lokális szélsőértékeket (helyeket)

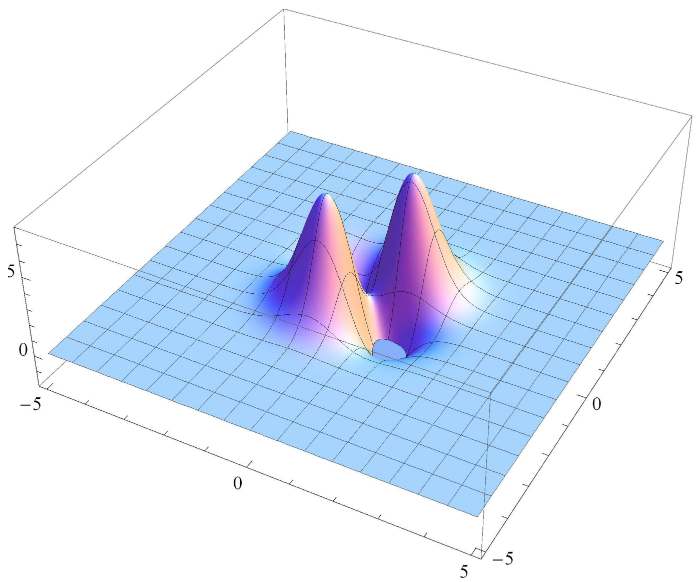
d. Adjuk m eg egy-egy listában a lok. min. és lok. max. köz. értékeit

(Pl. LMIN={{{0,0},1.2},{{1,2},3.4},...})

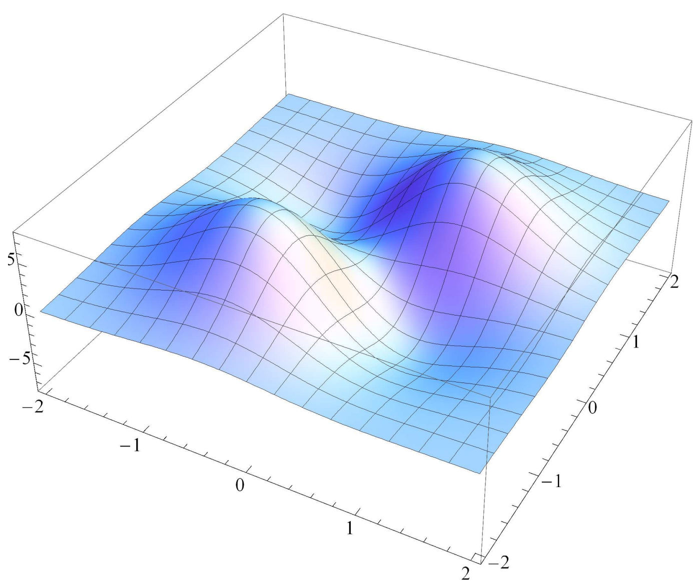
e. Ábrázoljuk kül. színekkel a max. helyeket, ... egy ábrán (CONTOURPLOT)

```
f[x_, y_] := (10 x y + x^2 + 3 y^2) E^(1 - x^2 - y^2)
```

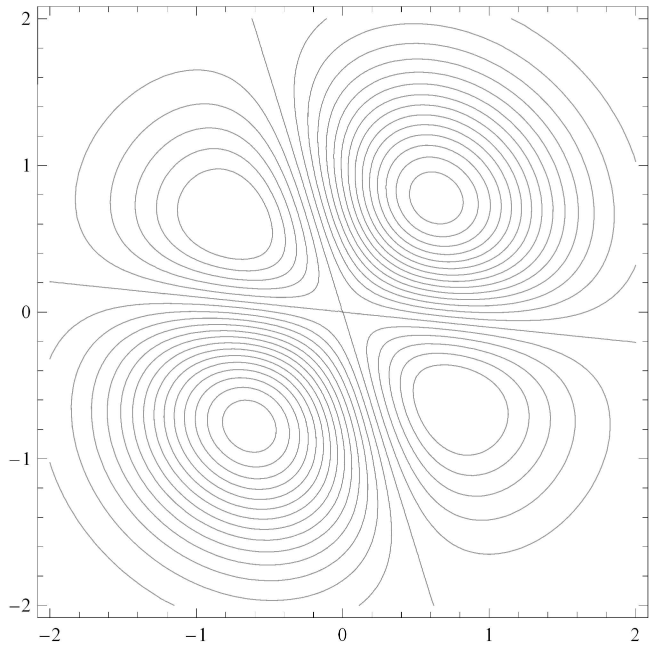
```
Plot3D[f[x, y], {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, PlotPoints → 100, PlotRange → {-2, 8}]
```



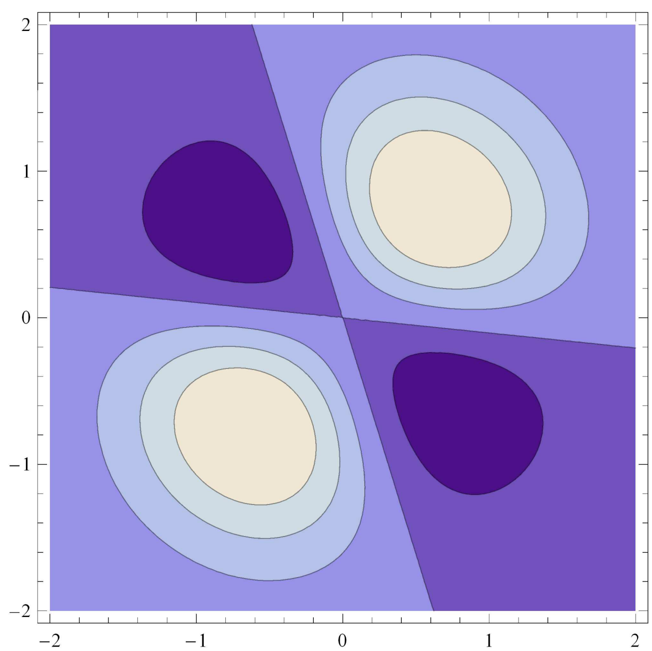

```
Plot3D[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotPoints → 100, PlotRange → {-8, 8}]
```



```
ContourPlot[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, ContourShading -> False, Contours → 20]
```



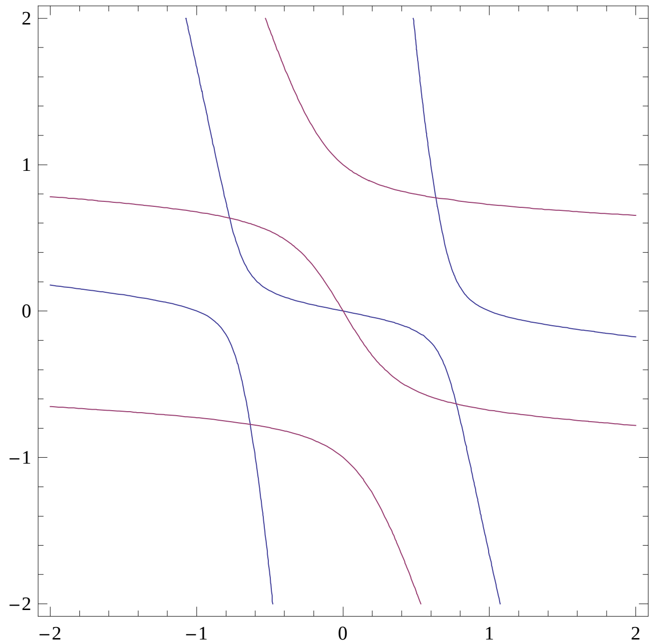

```
ContourPlot[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, ContourShading → True, Contours → 5]
```




```
NSolve[{D[f[x, y], x], D[f[x, y], y]} == {0, 0}, {x, y}]
```

```
{{x → -0.773342, y → 0.633989}, {x → -0.633989, y → -0.773342},
 {x → 0., y → 0.}, {x → 0.633989, y → 0.773342}, {x → 0.773342, y → -0.633989}}
```

```
ContourPlot[Evaluate[{D[f[x, y], x], D[f[x, y], y]}],
 {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, ContourShading -> False, Contours → {0}]
```



4 l. szé, 2 lok max, 2 lok min

```
L1 = {FindMaximum[f[x, y], {x, -1}, {y, -1}], FindMaximum[f[x, y], {x, 1}, {y, 1}]}
```

```
{{7.09902, {x → -0.633989, y → -0.773342}}, {7.09902, {x → 0.633989, y → 0.773342}}}
```

```
L1b = {x, y} /. L1[[All, 2]] /. {x_?NumericQ, y_?NumericQ} → Point[{x, y}]
```

```
{Point[{-0.633989, -0.773342}], Point[{0.633989, 0.773342}]}
```

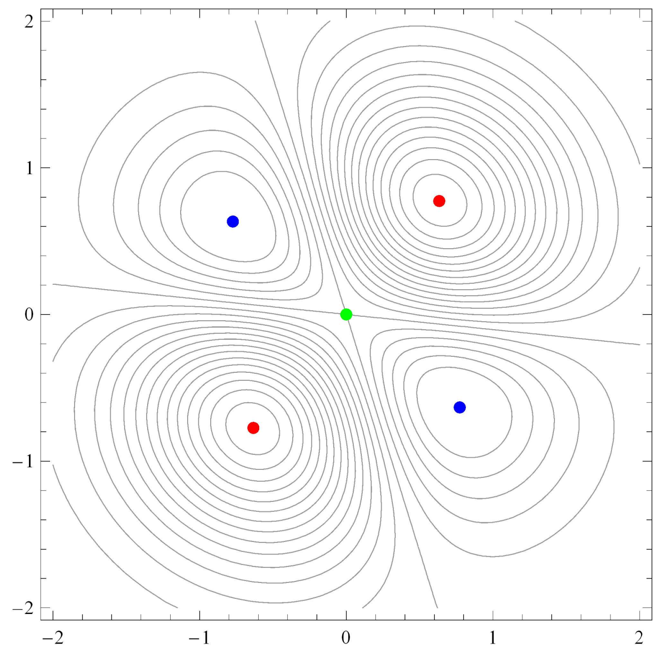
```
L2 = {FindMinimum[f[x, y], {x, -1}, {y, 1}], FindMinimum[f[x, y], {x, 1}, {y, -1}]}
```

```
{{-3.09902, {x → -0.773342, y → 0.633989}}, {-3.09902, {x → 0.773342, y → -0.633989}}}
```

```
L2b = {x, y} /. L2[[All, 2]] /. {x_?NumericQ, y_?NumericQ} → Point[{x, y}]
```

```
{Point[{-0.773342, 0.633989}], Point[{0.773342, -0.633989}]}
```

```
ContourPlot[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, ContourShading -> False,
 Contours → 20, Epilog → {PointSize[.02], Green, Point[{0, 0}], Red, L1b, Blue, L2b}]
```



0 nem lszé

```
Table[N[f[i, j]], {i, -.1, .1, .1}, {j, -.1, .1, .1}] // TableForm
```

0.373024	0.0269123	-0.159867
0.080737	0.	0.080737
-0.159867	0.0269123	0.373024

5. Probléma (10 pont)

3a. Az alábbi Lissajous görbéket ábrázoljuk a pm-ek függvényében (Manipulate) és alkalmas Snapshottal mutassuk meg, hogy megfelelô pm. értékek esetén elôállnak a másodfokú és harmadfokú Chebyshev polinomok is ($x \in [-1,1]$)

LCurves(t)=(x(t),y(t))=(sin(a t+δ), sin(b t))   ($a,b,\delta \in \mathbb{R}$)

Hogyan lehetne ezt bizonyítani (*Mathematica*-val)? Milyen egyéb, 'ismert' görbék kaphatók meg?

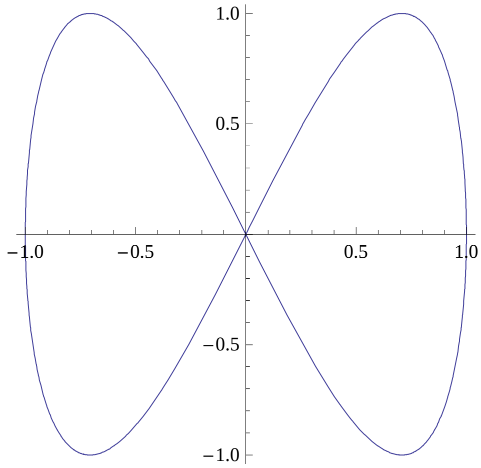
3b. Egy általunk választott speciális esetben a pm. függvényében illusztráljunk pontmozgást a görbén (színezés)

Hint: ?ChebyshevT[n,x]

```
Clear[t];
```

```
LC[var_, le_, ri_, a_, b_, δ_] := ParametricPlot[{Sin[a var + δ], Sin[b var]}, {var, le, ri}]
```

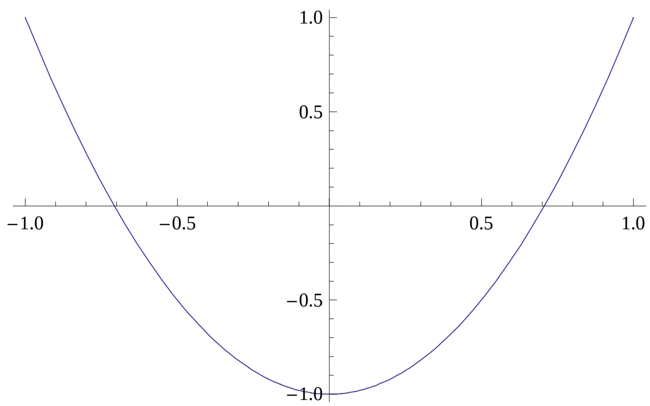
```
LC[t, 0, 2 Pi, 1, 2, 0]
```



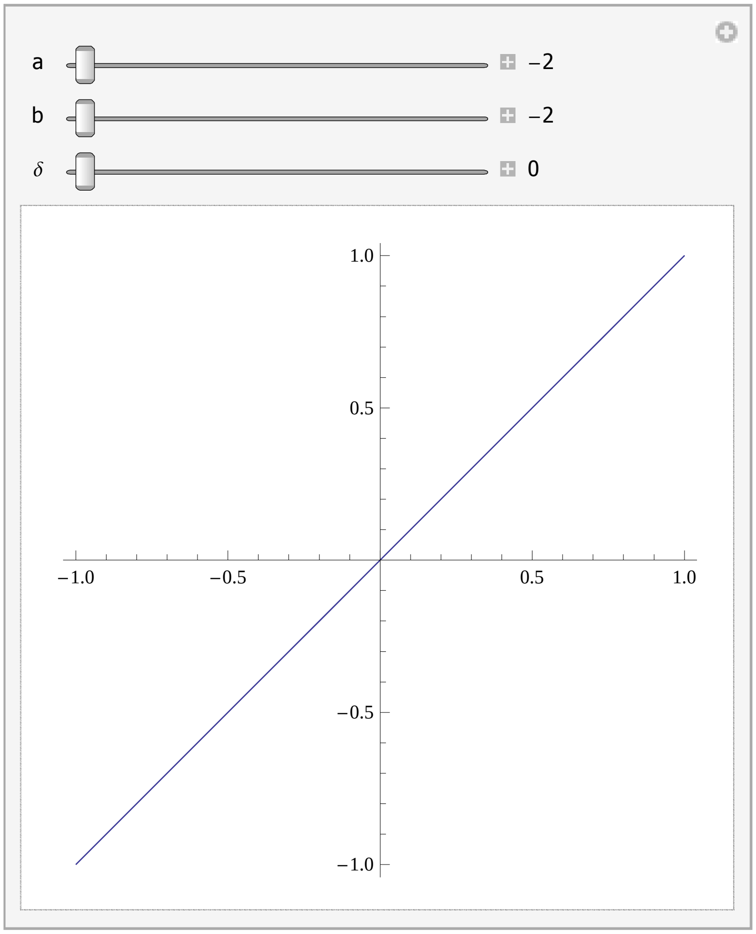
```
p1 = ChebyshevT[2, x]
```

$-1 + 2\,x^2$

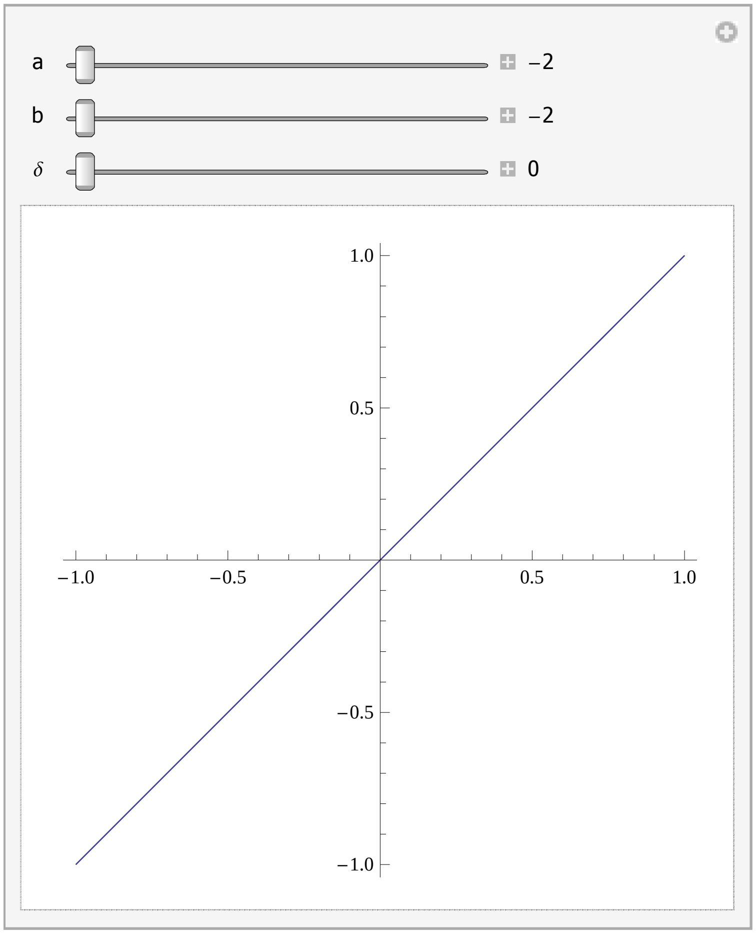
```
Plot[p1, {x, -1, 1}]
```

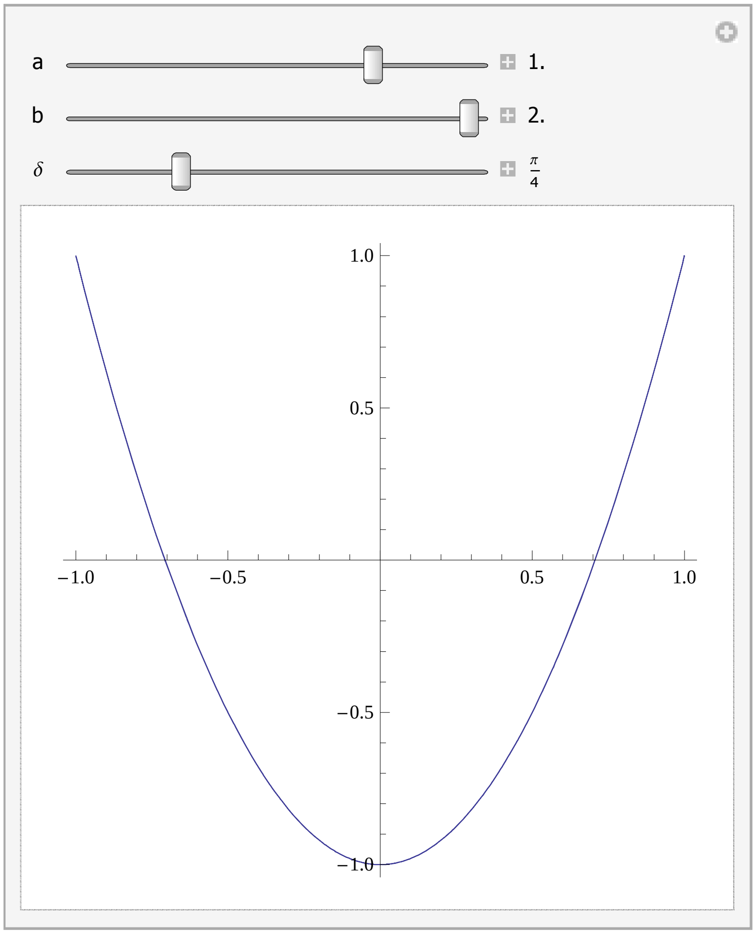


```
Manipulate[LC[t, -Pi, Pi, a, b, δ],
 {a, -2, 2, .1, Appearance → "Labeled"}, {b, -2, 2, .1, Appearance → "Labeled"},
 {δ, 0, Pi, Pi / 24, Appearance → "Labeled"}, SaveDefinitions -> True]
```



a
−2
b
−2
δ
0
1.0
0.5
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.5
1.0

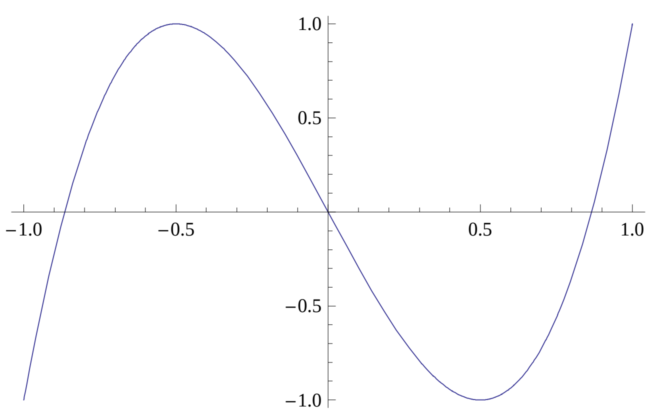

a
−2
b
−2
δ
0
1.0
0.5
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.5
1.0



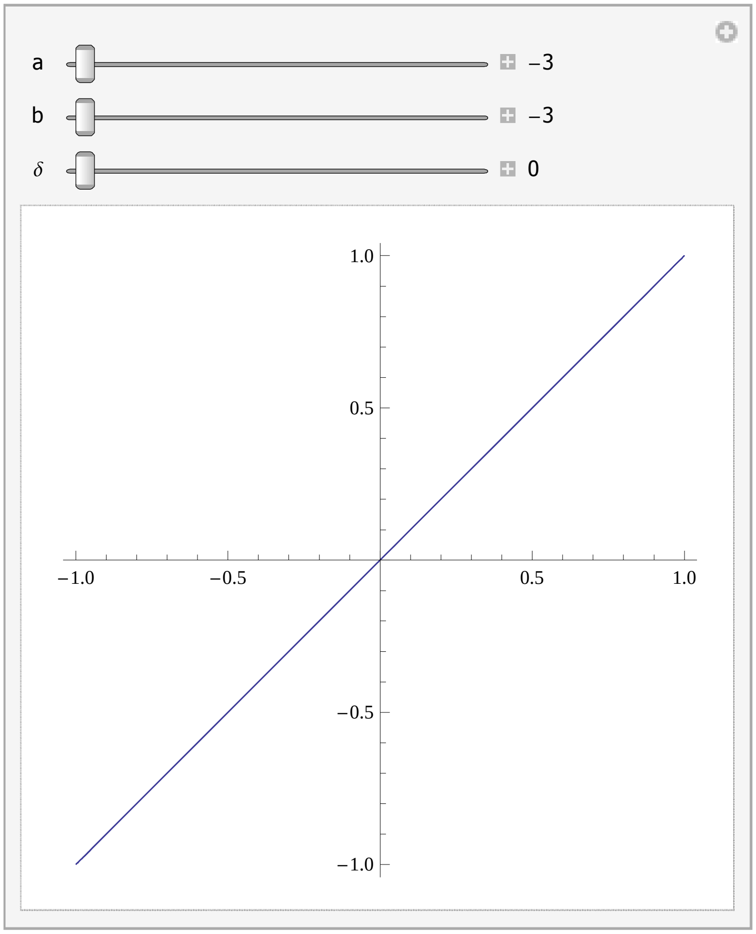

```
p2 = ChebyshevT[3, x]
```

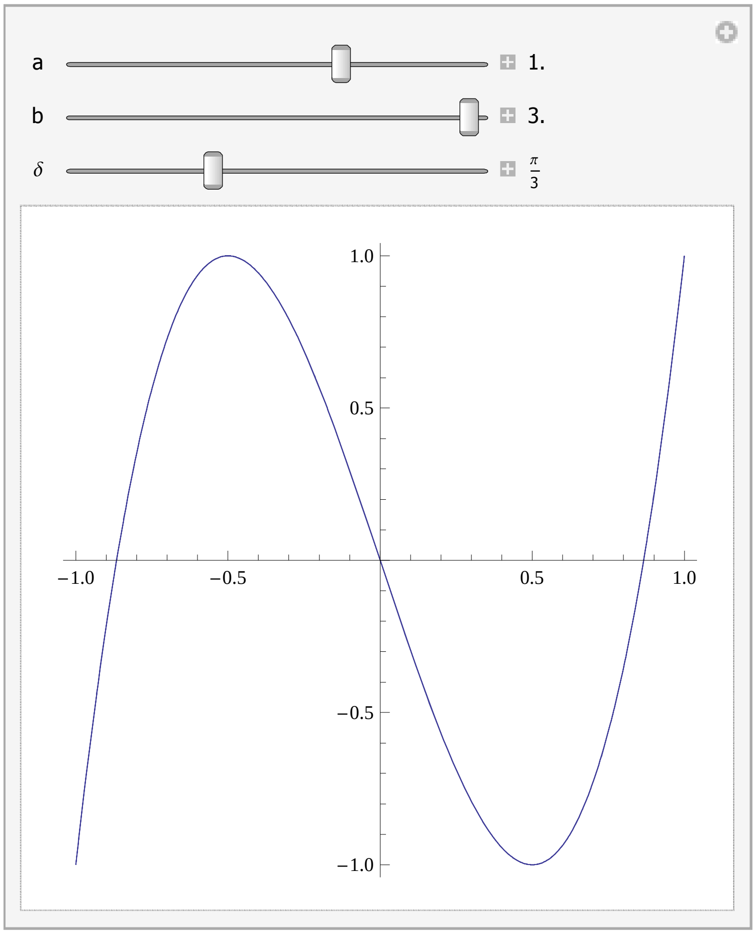
$-3x + 4x^3$

```
Plot[p2, {x, -1, 1}]
```



```
Manipulate[LC[t, -Pi, Pi, a, b, δ],
 {a, -3, 3, .1, Appearance → "Labeled"}, {b, -3, 3, .1, Appearance → "Labeled"},
 {δ, 0, Pi, Pi / 24, Appearance → "Labeled"}, SaveDefinitions -> True]
```






```
Simplify[2 Sin[t + Pi / 4] ^2 - 1]
```

```
Sin[2 t]
```

```
FullSimplify[4 Sin[t + Pi / 3] ^3 - 3 Sin[t + Pi / 3]]
```

```
Sin[3 t]
```

```
Manipulate[
 Show[{LC[t, 0, 2 Pi, 1, 2, 0], Graphics[{PointSize[.02], Point[{Sin[t0], Sin[2 t0]}]}]}],
 {t0, 0, 2 Pi}]
```