1. Ítéletlogika

1.1. ÍTÉLETLOGIKAI FORMULA

1. Minden ítéletváltozó ítéletlogikai formula, ezeket a formulákat **atomi** vagy **prímformuláknak** is nevezzük.
2. Ha A ítéletlogikai formula, akkor $\neg A$ (negált A) is az.
3. Ha A és B ítéletlogikai formulák, akkor
   - $(A \wedge B)$ (A konjunkció B)
   - $(A \vee B)$ (A diszjunkció B)
   - $(A \supset B)$ (A implikáció B)

   is ítéletlogikai formulák.
4. Minden ítéletlogikai formula az 1–3. szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Az ítéletlogikai formulák halmaza az ítéletlogika nyelve. Jelölése: $\mathcal{L}_0$.

1.2. A SZERKEZETI INDUKCIÓ ELVE

Ha minden atomi formula $\mathcal{T}$ tulajdonságú, továbbá (indukciós lépések):

1. ha A ítéletlogikai formula $\mathcal{T}$ tulajdonságú, akkor $\neg A$ is $\mathcal{T}$ tulajdonságú.
2. ha A és a B ítéletlogikai formulák $\mathcal{T}$ tulajdonságúak, akkor $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ és $(A \supset B)$ is $\mathcal{T}$ tulajdonságúak.

1.3. EGYÉRTELMŰ ELEMZÉS TÉTELE

Minden ítéletlogikai formulára a következő állítások közül pontosan egy igaz:

1. atomi formula.
2. egy egyértelműen meghatározható ítéletlogikai formula negáltja.
3. egyértelműen meghatározható ítéletlogikai formulák konjunkciója.
4. egyértelműen meghatározható ítéletlogikai formulák diszjunkciója.
5. egyértelműen meghatározható ítéletlogikai formulák implikációja.

1.4. KÖZVETLEN RÉSZFORMULA

1. egyetlen atomi formulának sincs közvetlen részformulája.
2. a $\neg A$ egyetlen közvetlen részformulája az A formula.
3. az $(A \circ B)$ formula (ahol $\circ \in \{\wedge, \vee, \supset\}$) közvetlen részformulái az A és a B formulák. A a bal oldali, B a jobb oldali közvetlen részformulája.

1.5. RÉSZFORMULÁK HALMAZA

Legyen A ítéletlogikai formula. Az A formula **részformuláinak halmaza** a legszűkebb olyan halmaz, melynek

1. eleme A, és
2. ha a C formula eleme, akkor C közvetlen részformulái is elemei.

1.6. A SZERKEZETI REKURZIÓ ELVE

Egy az ítéletlogikai nyelvén értelmezett F függvényt egyértelműen adtunk meg, ha

- értékeit rögzítjük a nyelv atomi formuláin és megmondjuk, hogy F:
  1. $\neg A$-n felvett értéke az A-n felvett értékéből, illetve
  2. $(A \circ B)$-n felvett értéke (ahol $\circ \in \{\wedge, \vee, \supset\}$) az A-n és a B-n felvett értékekből hogyan származtatható.

1.7. LOGIKAI ÖSSZETETTSÉG

Definiáljuk az $l \colon \mathcal{L}_0 \to N_0$ függvényt a következőképpen:

1. ha A atomi formula, $l(A)$ legyen 0,
2. $l(\neg A)$ legyen $l(A) + 1$,
3. $l(A \circ B)$ pedig legyen $l(A) + l(B) + 1$.

Ekkor egy $A \in \mathcal{L}_0$ formulához rendelt $l(A)$ függvényértéket a formula **logikai összetettségének** nevezzük.

1.8. LOGIKAI ÖSSZEKÖTŐJEL HATÁSKÖRE

Egy formulában egy logikai összekötőjel hatásköre a formulának azon részformulái közül a legkisebb logikai összetettségű, amelyekben az adott logikai összekötőjel is előfordul.

1.9. FORMULA FŐ LOGIKAI ÖSSZEKÖTŐJELE

Az az összekötőjel, melynek hatásköre maga a formula.

1.10. AZ ÍTÉLETLOGIKAI NYELV INTERPRETÁCIÓJA

Az $\mathcal{L}_0$ nyelv interpretációján egy $\mathcal{I} \colon V_v \to \{i, h\}$ függvényt értünk.

1.11. AZ ÍTÉLETLOGIKAI FORMULÁK SZEMANTIKÁJA

Egy C ítéletlogikai formulához $\mathcal{I}$-ben az alábbi – $|C|^{\mathcal{I}}$-val jelölt – igazságértéket rendeljük:

1. $|A|^{\mathcal{I}} \rightleftharpoons I(A)$, ahol A atomi formula, azaz ítéletváltozó.
2. $|\neg A|^{\mathcal{I}} \rightleftharpoons \dot{\neg}|A|^{\mathcal{I}}$.
3. $|A \wedge B|^{\mathcal{I}} \rightleftharpoons |A|^{\mathcal{I}} \dot{\wedge} |B|^{\mathcal{I}}$.
4. $|A \vee B|^{\mathcal{I}} \rightleftharpoons |A|^{\mathcal{I}} \dot{\vee} |B|^{\mathcal{I}}$.
5. $|A \supset B|^{\mathcal{I}} \rightleftharpoons |A|^{\mathcal{I}} \dot{\supset} |B|^{\mathcal{I}}$.

1.12. ÍTÉLETLOGIKAI FORMULÁK KIELÉGÍTHETŐSÉGE

Egy A ítéletlogikai formula kielégíthető, ha van a nyelvnek olyan $\mathcal{I}$ interpretációja, hogy $|A|^{\mathcal{I}} = i$. Az ilyen interpretációkat A **modelljeinek** nevezzük. Ha nincs A-nak modellje, az A formula **kielégíthetetlen**.

1.13. ÍTÉLETLOGIKAI TÖRVÉNY

Az A formula ítéletlogikai törvény, vagy másképp **tautológia**, ha a nyelv minden $\mathcal{I}$ interpretációjára $|A|^{\mathcal{I}} = i$. Jelölése: $\models_0 A$.

1.14. TAUTOLOGIKUS EKVIVALENCIA

A és B ítéletlogikai formulák **tautologikusan ekvivalensek**, ha minden $\mathcal{I}$ interpretációban $|A|^{\mathcal{I}} = |B|^{\mathcal{I}}$. Jelölése: $A \sim_0 B$.

2. Elsőrendű logika

2.1. AZ ELSŐRENDŰ NYELV TERMJEI

1. Minden $\pi \in Srt$ fajtájú változó és konstans π fajtájú term.
2. Ha az $f \in Fn$ függvényszimbólum $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, \pi)$ alakú és $t_1, t_2, \ldots, t_k$ – rendre $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ fajtájú – termek, akkor az $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ szó egy π fajtájú term.
3. Minden term az 1–2. szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

2.2. AZ ELSŐRENDŰ NYELV FORMULÁI

1. Ha a $P \in Pr$ predikátumszimbólum $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ alakú és $t_1, t_2, \ldots, t_k$ – rendre $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ fajtájú – termek, akkor a $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ szó egy elsőrendű formula. Az így nyert formulákat **atomi formuláknak** nevezzük.
2. Ha A elsőrendű formula, akkor $\neg A$ is az.
3. Ha A és B elsőrendű formulák, akkor az $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ és az $(A \supset B)$ is elsőrendű formulák.
4. Ha A elsőrendű formula és x tetszőleges változó, akkor $\forall x A$ és $\exists x A$ is elsőrendű formulák. Az így nyert formulákat **kvantált formuláknak** nevezzük.
5. Minden elsőrendű formula a 1–4. szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

2.3. SZERKEZETI INDUKCIÓ ELVE TERMEKRE

Egy elsőrendű logikai nyelv minden termje $\mathcal{T}$ tulajdonságú:

- (alaplépés:) ha minden változója és konstansa $\mathcal{T}$ tulajdonságú, továbbá
- (indukciós lépés:) ha a $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termek $\mathcal{T}$ tulajdonságúak, akkor az f függvényszimbólum felhasználásával előállított $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ term is $\mathcal{T}$ tulajdonságú.

2.4. SZERKEZETI INDUKCIÓ ELVE FORMULÁKRA

Egy elsőrendű logikai nyelv minden formulája $\mathcal{T}$ tulajdonságú:

- (alaplépés:) ha minden atomi formulája $\mathcal{T}$ tulajdonságú, és
- (indukciós lépés:)
  1. ha az A formula $\mathcal{T}$ tulajdonságú, akkor $\neg A$ is $\mathcal{T}$ tulajdonságú.
  2. ha A és B formulák $\mathcal{T}$ tulajdonságúak, akkor $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ és $(A \supset B)$ is $\mathcal{T}$ tulajdonságúak.
  3. ha A formula $\mathcal{T}$ tulajdonságú és x individuumváltozó, akkor $\forall x A$ és $\exists x A$ is $\mathcal{T}$ tulajdonságúak.

2.5. AZ EGYÉRTELMŰ ELEMZÉS TÉTELE TERMEKRE

Egy elsőrendű logikai nyelv minden termjére a következő állítások közül pontosan egy igaz:

1. A term a nyelv egy változója.
2. A term a nyelv egy konstansa.

3. A term a nyelv egyértelműen meghatározható termjei és az $f \in Fn$ függvényszimbólum felhasználásával előállított $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ alakú term.

2.6. AZ EGYÉRTELMŰ ELEMZÉS TÉTELE FORMULÁKRA

Egy elsőrendű logikai nyelv minden formulájára a következő állítások közül pontosan egy igaz:

1. a nyelv egyértelműen meghatározható termjei és predikátumszimbóluma felhasználásával előállított $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ alakú atomi formula.
2. a nyelv egyértelműen meghatározható formulájának negáltja.
3. a nyelv egyértelműen meghatározható formuláinak konjunkciója.
4. a nyelv egyértelműen meghatározható formuláinak diszjunkciója.
5. a nyelv egyértelműen meghatározható formuláinak implikációja.
6. a nyelv egy egyértelműen meghatározható A formulája és x változója felhasználásával előállított $\forall x A$ alakú formula.
7. a nyelv egy egyértelműen meghatározható A formulája és x változója felhasználásával előállított $\exists x A$ alakú formula.

2.7. KÖZVETLEN RÉSZTERMEK

1. egyetlen konstansnak és változónak sincs közvetlen résztermje.
2. az $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ term közvetlen résztermjei a $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termek.

2.8. RÉSZTERMEK HALMAZA

Egy term résztermjeinek halmaza a legszűkebb olyan halmaz, melynek

1. eleme maga a term,
2. ha egy term eleme, akkor eleme a term összes közvetlen résztermje is.

2.9. KÖZVETLEN RÉSZFORMULÁK

1. egy atomi formulának nincs közvetlen részformulája.
2. a $\neg A$ egyetlen közvetlen részformulája az A formula.
3. az $(A \wedge B), (A \vee B)$ és $(A \supset B)$ formulák közvetlen részformulái az A és B formulák.
4. a $\forall x A$, illetve $\exists x A$ közvetlen részformulája az A formula.

2.10. RÉSZFORMULÁK HALMAZA

Egy formula részformuláinak halmaza a legszűkebb olyan halmaz, melynek

1. eleme maga a formula.
2. ha egy formula eleme, akkor eleme a formula összes közvetlen részformulája is.

2.11. SZERKEZETI REKURZIÓ TERMEKRE

Egy elsőrendű logikai nyelv esetén a nyelv termjein értelmezett $\mathcal{F}$ függvényt egyértelműen adjuk meg, ha

- (alaplépés:) értékeit rögzítjük a nyelv változóin és konstansain, majd megmondjuk, hogy
- (indukciós lépések:) $\mathcal{F}$ értéke az $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ termre az $\mathcal{F}$-nek a $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termeken felvett értékeiből hogyan származtatható.

2.12. SZERKEZETI REKURZIÓ FORMULÁKRA

Egy elsőrendű logikai nyelv esetén a nyelv formuláin értelmezett $\mathcal{F}$ függvényt egyértelműen adjuk meg, ha

- (alaplépés:) értékeit rögzítjük a nyelv atomi formuláin, és megmondjuk, hogy $\mathcal{F}$ értéke
- (indukciós lépések:)
  1. a $\neg A$ formulára az A-n felvett értékéből,
  2. az $(A \wedge B), (A \vee B)$, illetve az $(A \supset B)$ formulára az A-n és B-n felvett értékeiből, illetve
  3. a $\forall x A$, illetve az $\exists x A$ formulára az A-n felvett értékéből hogyan származtatható.

2.13. FUNKCIONÁLIS ÖSSZETETTSÉG

Definiáljuk az $\widetilde{l}\colon \mathcal{L}_t \to N_0$ függvényt a következőképpen:

1. ha t változó vagy konstansszimbólum, $\widetilde{l}(t)$ legyen 0,
2. $\widetilde{l}(f(t_1, t_2, \ldots, t_k))$ legyen $\widetilde{l}(t_1) + \widetilde{l}(t_2) + \cdots + \widetilde{l}(t_k) + 1$.

Ekkor a $t \in \mathcal{L}_t$ formulához rendelt $\widetilde{l}(t)$ függvényértéket a t term **funkcionális összetettségének** nevezzük.

2.14. LOGIKAI ÖSSZETETTSÉG

Definiáljuk az $l\colon \mathcal{L}_f \to N_0$ függvényt a következőképpen:

1. ha A atomi formula, $l(A)$ legyen 0,
2. $l(\neg A)$ legyen $l(A)+1$,
3. $l(A \vee B), l(A \wedge B)$, illetve $l(A \supset B)$ legyen $l(A)+l(B)+1$,
4. $l(\forall x A)$, illetve $l(\exists x A)$, pedig legyen $l(A)+l$,

Ekkor a $A \in \mathcal{L}_f$ formulához rendelt $l(A)$ függvényértéket az A formula **logikai összetettségének** nevezzük.

2.15. VÁLTOZÓELŐFORDULÁS STÁTUSZA

1. A termek és atomi formulák minden változójának minden előfordulása szabad.
2. A $\neg A$ formulában egy változó-előfordulás pontosan akkor kötött, ha ez a változó-előfordulás már A-ban is kötött.
3. Az $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, illetve az $(A \supset B)$ formulában egy változó-előfordulás kötött, ha ez az előfordulás már kötött abban a közvetlen részformulában is, amelyben ez az előfordulás szerepel.
4. A $\forall x A$, illetve a $\exists x A$ formulában x minden előfordulása kötött. Az A formula előtt szereplő kvantor teszi kötötté (köti) x valamely előfordulását, ha ez az előfordulás A-ban még szabad volt. Egy az x-től különböző változó valamely előfordulása kötött, ha A-ban kötött.

Ha egy változónak egy kifejezésben van szabad előfordulása, akkor ezt a változó a kifejezés **paramétere**. Egy K kifejezés paraméterei halmazára $Par(K)$-val fogunk hivatkozni.

2.16. KÖTÖTT VÁLTOZÓK ÁTNEVEZÉSE

A $\forall x A$, illetve a $\exists x A$ formulában az A előtt szereplő kvantor által kötött x változó átnevezéséről beszélünk, amikor

1. a $\forall x$, illetve a $\exists x$ kvantoros előtagban x helyett egy vele megegyező fajtájú y változót nevezünk meg ($\forall y$, illetve $\exists y$), majd
2. A-ban az x változó minden szabad előfordulását y-ra cseréljük ki (a kapott formulát jelöljük $[A_y^x]$-nal),

és így a $\forall y [A_y^x]$, illetve a $\exists y [A_y^x]$ formulát kapjuk.

2.17. SZABÁLYOSAN VÉGREHAJTOTT VÁLTOZÓÁTNEVEZÉS

Ha a $\forall x A$, illetve a $\exists x A$ formulában

1. y nem paraméter és
2. x egyetlen előfordulása sem esik y-t megelőző kvantor hatáskörébe,

akkor szabályosan végrehajtott változó-átnevezéssel nyertük a $\forall x A$, illetve a $\exists x A$ formulából a $\forall y [A_y^x]$, illetve a $\exists y [A_y^x]$ formulát.

2.18. FORMULÁK KONGRUENCIÁJA

1. Egy atomi formula csak önmagával kongruens.
2. $\neg A \approx \neg A'$, ha $A \approx A'$.
3. $(A \wedge B) \approx (A' \wedge B')$, $(A \vee B) \approx (A' \vee B')$, illetve $(A \supset B) \approx (A' \supset B')$, ha $A \approx A'$ és $B \approx B'$.
4. $\forall x A \approx \forall y A'$, illetve $\exists x A \approx \exists y A'$, ha $[A_z^x] \approx [A'^y_z]$ minden olyan z változóra, amely különbözik a kérdéses formulákban előforduló összes változótól.

2.19. VÁLTOZÓIBAN TISZTA ALAK

Egy formulát változóiban tisztának nevezünk, ha benne minden kvantoros előtagban a formula

1. paramétereitől és
2. bármely másik kvantoros előtagban megnevezett változótól különböző változó van megnevezve.

3. Elsőrendű logika - szemantika

3.1. ELSŐRENDŰ LOGIKAI NYELV INTERPRETÁCIÓJA

Egy $\mathcal{I}$-vel jelölt

$$\langle \mathcal{I}_{Srt},\ \mathcal{I}_{Pr},\ \mathcal{I}_{Fn},\ \mathcal{I}_{Cnst} \rangle$$

függvénynégyes, ahol

1. az $\mathcal{I}_{Srt}\colon \pi \to \mathcal{U}_\pi$ függvény megad minden egyes $\pi \in Srt$ fajtához egy $\mathcal{U}_\pi$ nemüres halmazt, a π fajtájú individuumok halmazát (a különböző fajtájú individuumok halmazainak uniója az interpretáció individuumtartománya vagy univerzuma),
2. az $\mathcal{I}_{Pr}\colon P \to P^{\mathcal{I}}$ függvény megad minden $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ alakú $P \in Pr$ predikátumszimbólumhoz egy

   $$P^{\mathcal{I}}\colon \mathcal{U}_{\pi 1} \times \mathcal{U}_{\pi 2} \times \ldots \times \mathcal{U}_{\pi k} \to \{i, h\}$$

   logikai függvényt (relációt),
3. az $\mathcal{I}_{Fn}\colon f \to f^{\mathcal{I}}$ függvény hozzárendel minden $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$ alakú $f \in Fn$ függvényszimbólumhoz egy

   $$f^{\mathcal{I}}\colon \mathcal{U}_{\pi 1} \times \mathcal{U}_{\pi 2} \times \ldots \times \mathcal{U}_{\pi k} \to \mathcal{U}_\pi$$

   matematikai függvényt (műveletet),
4. az $\mathcal{I}_{Cnst}\colon c \to c^{\mathcal{I}}$ függvény pedig minden π fajtájú $c \in Cnst$ konstansszimbólumhoz az $\mathcal{U}_\pi$ individuumtartománynak egy individuumát rendeli, azaz $c^{\mathcal{I}} \in \mathcal{U}_\pi$.

3.2. VÁLTOZÓKIÉRTÉKELÉS

Legyen az $\mathcal{L}$ elsőrendű logikai nyelvnek $\mathcal{I}$ egy interpretációja, az interpretáció univerzuma legyen $\mathcal{U}$. Jelölje V a nyelv változóinak halmazát. Egy olyan $\kappa\colon V \to \mathcal{U}$ leképezést, ahol ha x π fajtájú változó, akkor $\kappa(x)$ $\mathcal{U}_\pi$-beli individuum, az $\mathcal{I}$ interpretáció egy **változókiértékelésének** nevezzük.

3.3. VÁLTOZÓKIÉRTÉKELÉS VARIÁNSA

Legyen x egy változó. A κ^* változókiértékelés a κ x-variánsa, ha $\kappa^*(y) = \kappa(y)$ minden x-től különböző y változó esetén.

3.4. FORMULÁK KIELÉGÍTHETŐSÉGE

Az elsőrendű logikai nyelv egy A formulája **kielégíthető**, ha van a nyelvnek olyan $\mathcal{I}$ interpretációja és $\mathcal{I}$-ben van olyan κ változókiértékelés, amelyre $|A|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, egyébként **kielégíthetetlen**. Ha az $\mathcal{I}$ interpretáció és a κ változókiértékelés olyanok, hogy $|A|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, azt mondjuk, hogy $\mathcal{I}$ a κ változókiértékelés mellett kielégíti A-t.

Amennyiben az A formula zárt, igazságértékét egyedül az interpretáció határozza meg. Ha $|A|^{\mathcal{I}} = i$, azt mondjuk, hogy az $\mathcal{I}$ interpretáció **kielégíti** A-t vagy másképp, a $\mathcal{I}$ interpretáció az A formula **modellje**.

3.5. LOGIKAI TÖRVÉNY

Az elsőrendű logikai nyelv egy A formulája **logikai törvény**, ha a nyelv minden $\mathcal{I}$ interpretációjában és $\mathcal{I}$ minden κ változókiértékelése mellett $|A|^{\mathcal{I},\kappa} = i$.
Jelölése: $\models A$.

3.6. PRÍMFORMULÁK

Az elsőrendű logikai nyelv prímformulái az **atomi** és **kvantált** formulák. Ezekből a formulákból az ítéletlogikai összekötőjelek ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$) segítségével minden elsőrendű formulát fel tudunk építeni.

3.7. PRÍMKOMPONENSEK

Egy formula azon részformuláit, amelyek prímformulák, és amelyekből a formula csupán az ítéletlogikai összekötőjelek ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$) segítségével felépíthető, a formula **prímkomponenseinek** nevezzük.

3.8. ELSŐRENDŰ TAUTOLÓGIA

Az elsőrendű logikai nyelv egy A formulája tautologikusan igaz (tautológia), ha a formula Quine-táblázatában A oszlopában csupa i igazságérték található.
Jelölése: $\models_0 A$.

3.9. LOGIKAI EKVIVALENCIA

Legyenek A és B az $\mathcal{L}$ nyelv tetszőleges formulái. Azt mondjuk, hogy az A és a B elsőrendű formulák logikailag ekvivalensek, ha minden $\mathcal{I}$ interpretációban és κ változókiértékelés mellett $|A|^{\mathcal{I},\kappa} = |B|^{\mathcal{I},\kappa}$.
Jelölése: $A \sim B$.

3.10. TERMEK ÉRTÉKE

Legyen az $\mathcal{L}$ nyelvnek $\mathcal{I}$ egy interpretációja és κ egy $\mathcal{I}$-beli változókiértékelés. Az $\mathcal{L}$ nyelv egy π fajtájú t termjének értéke $\mathcal{I}$-ben a κ változókiértékelés mellett az alábbi – $|t|^{\mathcal{I},\kappa}$-val jelölt – $\mathcal{U}_\pi$-beli individuum:

1. ha $c \in Cnst$ π fajtájú konstansszimbólum, akkor $|c|^{\mathcal{I},\kappa}$ az $\mathcal{U}_\pi$-beli $c^{\mathcal{I}}$ individuum,
2. ha x π fajtájú változó, akkor $|x|^{\mathcal{I},\kappa}$ az $\mathcal{U}_\pi$-beli $\kappa(x)$ individuum,
3. ha $t_1, t_2, \ldots, t_k$ rendre $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ fajtájú termek és ezek értékei a κ változókiértékelés mellett $\mathcal{I}$-ben rendre az $\mathcal{U}_{\pi 1}$-beli $|t_1|^{\mathcal{I},\kappa}$, az $\mathcal{U}_{\pi 2}$-beli $|t_2|^{\mathcal{I},\kappa}$,... és az $\mathcal{U}_{\pi k}$-beli $|t_k|^{\mathcal{I},\kappa}$ individuumok, akkor egy $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k, \pi)$ alakú $f \in Fn$ függvényszimbólum esetén $|f(t_1, t_2, ..., t_k)|^{\mathcal{I},\kappa}$ az $\mathcal{U}_\pi$-beli $f^{\mathcal{I}}(|t_1|^{\mathcal{I},\kappa}, |t_2|^{\mathcal{I},\kappa}, \ldots, |t_k|^{\mathcal{I},\kappa})$ individuum.

3.11. FORMULÁK ÉRTÉKE

Legyen az $\mathcal{L}$ nyelvnek $\mathcal{I}$ egy interpretációja és κ egy $\mathcal{I}$-beli változókiértékelés. Egy C formulához $\mathcal{I}$-ben a κ változókiértékelés mellett az alábbi – $|C|^{\mathcal{I},\kappa}$-val jelölt – igazságértéket rendeljük:

1. $|P(t_1, t_2, \ldots, t_k)|^{\mathcal{I},\kappa} \rightleftharpoons \begin{cases} i \text{ ha } P(|t_1|^{\mathcal{I},\kappa}, |t_2|^{\mathcal{I},\kappa}, \ldots, |t_k|^{\mathcal{I},\kappa}) = i, \\ h \text{ egyébként.} \end{cases}$
2. $|\neg A|^{\mathcal{I},\kappa} \rightleftharpoons \dot{\neg}|A|^{\mathcal{I},\kappa}$,
3. $|A \wedge B|^{\mathcal{I},\kappa} \rightleftharpoons |A|^{\mathcal{I},\kappa} \dot{\wedge} |B|^{\mathcal{I},\kappa}$,
4. $|A \vee B|^{\mathcal{I},\kappa} \rightleftharpoons |A|^{\mathcal{I},\kappa} \dot{\vee} |B|^{\mathcal{I},\kappa}$,
5. $|A \supset B|^{\mathcal{I},\kappa} \rightleftharpoons |A|^{\mathcal{I},\kappa} \dot{\supset} |B|^{\mathcal{I},\kappa}$,
6. $|\forall x A|^{\mathcal{I},\kappa} \rightleftharpoons \begin{cases} i \text{ ha } |A|^{\mathcal{I},\kappa^*} = i \ \kappa \text{ minden } \kappa^* \ x\text{-variánsára,} \\ h \text{ egyébként.} \end{cases}$
7. $|\exists x A|^{\mathcal{I},\kappa} \rightleftharpoons \begin{cases} i \text{ ha } |A|^{\mathcal{I},\kappa^*} = i \ \kappa \text{ valamely } \kappa^* \ x\text{-variánsára,} \\ h \text{ egyébként.} \end{cases}$