Livro Matemática C

Pedro Borges

MARÇO/2015

Sumário

Capítulo 1

Conjuntos Numéricos

Capítulo 2

Grandezas Proporcionais

Capítulo 3

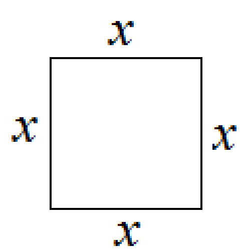
Expressões Algébricas

3.1 Expressões Algébricas

A Matemática é uma linguagem e como tal, expressa alguma coisa. Ao calcular a área de um retângulo com *3 cm* de comprimento e *4 cm* de largura, escrevemos $3 \cdot 4$ (três vezes quatro) e estamos expressando a soma de $4+4+4$. Tanto $3 \cdot 4$ como $4+4+4$ são expressões numéricas, cujo significado particular é o número de cm^2 do retângulo.

Para escrever de modo geral a área de qualquer quadrado de lado x, usamos x^2. Esta expressão com *letras* e *números*, chamamos de *expressão algébrica*.

Exemplo 3.1.1. O lado do quadrado pode ser expresso pela letra x e isso significa que o lado é variável, ou seja, pode assumir diferentes valores positivos.



Se $x = 2$ *cm* o quadrado tem todos os lados iguais a *2 cm* e é aproximadamente do tamanho de um ladrilho de revestimento de paredes.

Se $x = 2,2$ *m*, o quadrado tem todos os lados iguais a $2,2$ *m* e é aproximadamente do tamanho de banheiro.

Se $x = 1$ *hm* (*100m*), o quadrado tem todos os lados iguais a *1 hm* e é aproximadamente do tamanho de uma quadra de cidade.

Devemos observar que o lado do quadrado expresso por x é variável, ou seja, pode assumir diferentes valores.

Para cada valor de x proposto acima, o perímetro (P) de todos os quadrados, pode ser escrito com uma equação algébrica:

$$P = 4x.$$

Dizemos que $4x$ é a expressão algébrica do perímetro de qualquer quadrado de lado x. Nesse caso, o número 4 é uma constante (coeficiente, parte numérica) e x é a variável (parte literal) ■

As expressões algébricas recebem nomes específicos em função do número de termos:

1 termo = **monômios**. Exemplos: $7x^3$; $3m^2n^4$

2 termos = **binômios**. Exemplos: $x+1$; $7x^3-4x$; $4y-3$; x^2-1

3 termos = **trinômios**. Exemplos: x^4-x^3+3; x^2- $2x$ + 3

Mais do que 3 termos = **polinômios**. Exemplo: $2x^4$ - $3x^3$ + $3x^2$ + 2.

Definição 3.1.1. Dois monômios são semelhantes se as partes literais forem idênticas.

Exemplo 3.1.2. (**a**) Os monômios $7x^3$ e $3x^3$ são semelhantes, pois as partes literais são idênticas;

(**b**) Os monômios $2ab^2$ e $2a^3b$ não são semelhantes, pois as partes literais são diferentes ■

Exemplo 3.1.3. Determine o valor numérico do polinômio $3x^2$ - $4x$ - 1, para x = -1.

Solução: O valor numérico de uma expressão algébrica é obtido substituindo o valor da variável na expressão:

$3(-1)^2-4(-1)$ *-1 = 3 + 4 -1 = 6* ■

EXERCÍCIOS 3.1

3.1.1 Use variáveis para expressar o perímetro e a área de:

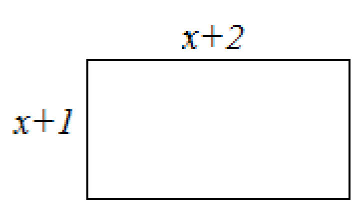
(**a**) Quadrados

(**b**) Retângulos em que um lado é o dobro do outro

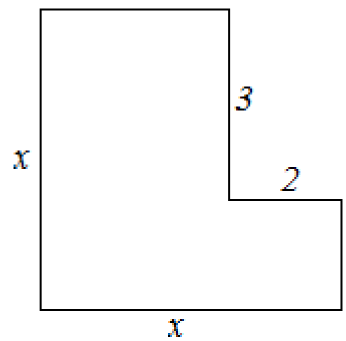
(**c**) Retângulos em que a diferença dos lados é *2 cm*

(**d**) Retângulos em que um lado é *5 cm* maior do outro

3.1.2 Determine a expressão algébrica do perímetro do retângulo



3.1.3 Determine a expressão algébrica do perímetro da figura:



3.1.4 Determine o perímetro da figura do **E**x 3.1.3 para $x = 4$.

3.1.5 O valor de x poderia ser 1 na figura do **E**x 3.1.3 ?

3.1.6 Calcule o valor numérico das expressões com os respectivos valores das variáveis:

a) $7x^3 + x^2 - 3x + 1$ para $x = -2$

b) $-x^4 + 5x - \frac{1}{3}$ para $x = -1$

c) $\frac{x+1}{x^2-2}$ para $x = 2$

d) $\frac{x+1}{x^2-x+1}$ para $x = \frac{1}{2}$

3.2 Operações com monômios e polinômios

Adição e subtração de monômios e polinômios

Só é possível adicionar ou subtrair monômios semelhantes.

Para adicionar ou subtrair monômios, soma-se ou subtrai-se os coeficientes e mantem-se a parte literal.

Para adicionar/subtrair polinômios, soma-se ou subtrai-se os monômios semelhantes.

Exemplo 3.2.1.

(a) $3x^2 + 5x^2 - 2x^2 = (3+5-2)x^2 = 6x^2$

(b) $5y - 7x - 8y + 6x = (5-8)y + (-7+6)x = -3y - x$

(c) $(x^2 + 5x - 3) - (2x^2 + 2x - 8) = -x^2 + 3x + 5$

Multiplicação e divisão de monômios

Multiplica-se ou divide-se os coeficientes e usa-se a propriedade da multiplicação/divisão de potências de mesma base para multiplicar a parte literal.

Exemplo 3.2.2. (a) $(-3x^2)\cdot(7x^2) = -21x^4$

(b) $(25x^4y^2) \div (5x^2y) = 5x^2y$

(c) $(10x^2) \div (2x) = 5x$

(d) $(12x^3+6x^2-5x) \div (-2x) = -6x^2-3x+\frac{5}{2}$.

Exemplo 3.2.3. Multiplique $12\cdot 15$

Solução: Vamos escrever $12 = 10+2$ e $14 = 10+4$. Para multiplicar usamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

$(10+2)\cdot(10+4) = 10\cdot 10+10\cdot 4+2\cdot 10+2\cdot 4 = 100+40+20+8 = 168.$

Ou, na forma de algoritmo:

1d + 4u

10 + 2

———

2d + 8u

1c + 4d

————

1c + 6d + 8u = 168 u ■

Exemplo 3.2.4. Multiplique os polinômios: $(x^3+6x^2-5x)\cdot(x-2)$

Solução: A multiplicação de dois polinômios segue o mesmo algoritmo da multiplicação de dois números decompostos como soma, como no Ex 3.2.3

x^3+6x^2-5x

x – 2

————————

$-2x^3-12x^2+10x$

$x^4+6x^3-5x^2$

————————

$x^4+4x^3-17x^2+10x$ ■

Exemplo 3.2.5. Divida os polinômios: $(x^3+6x^2-5x) \div (x-2)$.

Solução: A divisão de polinômios é semelhante ao algoritmo da divisão de dois números inteiros.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+6x^2-5x & x-2 \\ \cline{2-2}
-x^3+2x^2 \quad\quad & x^2+8x \\
------ & \\
+8x^2-5x & \\
-8x^2+16x & \\
----- & \\
+11x &
\end{array}
$$

A divisão dos polinômios dá x^2+8x e o resto é $+11x$ ■

EXERCÍCIOS 3.2

3.2.1 Explique porque podemos cancelar a em $\frac{a \cdot b}{a}$ e não podemos em $\frac{a+b}{a}$.

3.2.2 Verifique se as igualdades são verdadeiras (justifique sua resposta):

a) $a^2+a^3=a5$

b) $x^3 \cdot x^3=x^6$

c) $y^3 : y^3=1$

d) $2m^2-3m^2=-m^2$

e) $x^3 \cdot x^3=2x^6$

f) $10y^3 : 2y^2=5y$

3.2.3 Resolva as operações com as expressões algébricas:

a) $3x^2+\frac{1}{3}x^2-2x^2$

b) $ab^2-\frac{1}{2}ab^2+\frac{1}{4}ab^2$

c) $y^3-\frac{3}{4}y^3+2y^3$

d) $x(xy+2x+3y)$

e) $(x-3)(x^2-\frac{1}{3}x+3$

f) $a^2b \cdot ab^3 \cdot a^3b$

g) $(y^2-\frac{1}{5}) \cdot (5y-2)$

h) $7a^3b^2x^2 : 14a^2bx$

i) $(2x^3+5x^2+2x) : (x+\frac{1}{2})$

j) $\frac{1}{2}m^3n^2 : \frac{1}{4}m^2n+mn$

3.2.4 Dados os polinômios $A=2x+1$; $B=x-3$ e $C=2x^2+5x+2$, resolva:

a) $A+B$

b) $B+C-A$

c) $A \cdot B$

d) $A \cdot C$

e) $C-x \cdot A$

f) $C : A$

g) $C : B$

h) $A \cdot B-C$

3.2.5 Um lado de um retângulo é expresso por $x+3$ e outro por $2x$:

a) Determine a expressão algébrica do perímetro.

b) Determine a expressão algébrica da área.

c) Para que valor de x o perímetro é $18cm$?

d) Se a área é $56cm^2$, qual é o valor de x?

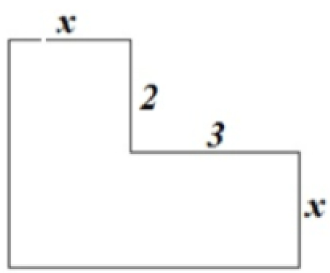
e) Qual é o valor de x para que os lados sejam iguais?

3.2.6 A área de um retângulo é expressa por $x^2 + 2x - 3$ e um dos lados por $x - 1$. Determine a expressão algébrica do outro lado.

3.2.7 O lado de um cubo é expresso por $x + 1$. Determine a expressão algébrica:

a) Do volume
b) Da área de uma face
c) Da área superficial

3.2.8 Com base na figura, determine as expressões algébricas do perímetro e da área.



3.2.9 O lado de um quadrado é expresso por $x + 3$:

a) Determine a expressão algébrica da área.
b) Calcule a área para $x = 1$.
c) x pode ser zero?
d) Qual o valor de x para que a área seja nula.

3.2.10 Calcule os valores da área do quadrado do **Ex 3.2.9** para:

$$x = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

3.3 Produtos Notáveis

Produtos notáveis são produtos especiais de polinômios. São chamados "notáveis" porque aparecem seguidamente em problemas de Matemática.

Quadrado da soma de dois termos: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Quadrado da diferença de dois termos: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Produto da soma pela diferença: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Cubo da soma de dois termos: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Cubo da diferença de dois termos: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

EXERCÍCIOS 3.3

3.3.1 Resolva os produtos notáveis:

a) $(x+5)^2$
b) $(2x-3)^2$
c) $(x+\frac{1}{2})^2$
d) $(3-x)^2$
e) $(\frac{1}{2}x+2)^2$
f) $(x+1)^3$
g) $(2x-5)^3$
h) $(x-3)(x+3)$
i) $(m+3n)(m+3n)$
j) $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$
k) $(x+1)(x+2)$
l) $(x-1)(x+3)$
m) $(2a-b)(2a+b)$
n) $(a+b+1)^2$
o) $(x+\frac{1}{4})(x+2)$

3.4 Fatoração

Fatores *são os termos de uma multiplicação e* ***fatorar*** *é transformar um número ou expressão algébrica em um produto de fatores.*

Exemplos:

a) O número 12 fatorado é $3\cdot 4$, onde 3 e 4 são fatores.

b) Podemos decompor números em fatores primos, por exemplo: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Os números 2 e 3, nesse caso são fatores, onde o fator 2 aparece três vezes.

c) Na expressão $3x^2a^3$, 3, x^2 e a^3 são fatores.

Fatoração com Fator Comum:

Algumas expressões algébricas têm *fatores comuns* (fatores que estão presentes em mais de uma expressão algébrica) que se pode colocar em evidência (colocar em separado, na forma de fatores). Vejamos os exemplos:

a) $3x + 6y = 3x + 2 \cdot 3y = 3 \cdot (x + 2y)$. Observemos que o 3 é fator comum aos dois monômios.

b) $4ab^3 - 2a^3b + 10ab^4 = 2ab \cdot (2b^2 - a^2 + 5b^3)$. Observemos que o 2ab é fator comum aos três monômios

c) $2an + 2bn - am - bm$. **(Fatoração por agrupamento)**

Nos dois primeiros termos o fator comum é $2n$ e nos dois últimos o fator comum é $-m$.

$2an + 2bn - am - bm = 2n(a + b) - m(a + b)$

A expressão resultante tem mais um fator comum: $(a + b)$. Então:

$2an + 2bn - am - bm = (a + b)(2n - m)$.

Fatoração do Trinômio Quadrado Perfeito (TQP):

Um trinômio é *quadrado perfeito (TQP)* se foi originado pelo quadrado da soma ou subtração de dois termos.

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ (*Quadrado da soma de dois termos*)

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ (*Quadrado da diferença de dois termos*)

Observemos que o trinômio foi *transformado (fatorado)* em um produto onde os fatores são $(a \pm b)$. Chamando a de *"primeiro termo do binômio"* e b de *"segundo termo do binômio"*, dizemos que o trinômio $a^2 + 2ab + b^2$ é o quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo mais o quadrado do segundo.

Fatoração da Diferença de dois quadrados:

$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$ (*Produto da soma pela diferença de dois termos*)

Exemplo 3.4.1. Verifique se $x^2 + 2x + 1$ é um TQP.

Solução: Se o trinômio dado é um TQP então o primeiro termo do binômio $(a+b)$ deve ser $a = \sqrt{x^2} = x$; o segundo termo do binômio $(a+b)$ deve ser $b = \sqrt{1} = 1$.

Teste do segundo termo do trinômio: $2\cdot a\cdot b = 2\cdot x\cdot 1 = 2x$ deve ser igual ao *segundo termo do trinômio*. O que de fato ocorre, neste caso. Assim,

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Portanto, o polinômio dado é um TQP ■

Exemplo 3.4.2. Verifique se $x^2 + 2x + 4$ é um TQP.

Solução: Se o trinômio dado é um TQP então o primeiro termo deve ser $a = \sqrt{x^2} = x$ e o segundo termo $b = \sqrt{4} = 2$.

Teste do segundo termo do trinômio: $2\cdot a\cdot b = 2\cdot x\cdot 2 = 4x$, que é diferente de 2x. Portanto, o trinômio dado não é um TQP ■

Exemplo 3.4.3. Complete o trinômio $x^2 - 4x + 1 = 0$, de modo que obtenha-se um TQP.

Solução: Para se obter um TQP na identidade dada, o primeiro termo do binômio $(a+b)$ deve ser $a = \sqrt{x^2} = x$. O segundo termo "b"pode ser obtido, sabendo que

$2\cdot x\cdot b = -4x$ *(duas vezes o primeiro termo, vezes o segundo termo é igual ao segundo termo do trinômio)*

Assim, $b = -2$ e o TQP é $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$.

Para obter o TQP no lado esquerdo da identidade dada, basta adicionar (+3) em ambos os lados:

$$x^2 - 4x + 1 + (+3) = 0 + (+3)$$

$$x^2 - 4x + 4 = 3$$ ■

EXERCÍCIOS 3.4

3.4.1 Fatore as expressões algébricas:

a) $x^2 - x$

b) $a^3b^2 - ab + ab^2$

c) $9x^2 - 12x + 4$

d) $9 + 6x + x^2$

e) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

f) $x^2 - 25$

g) $16x^2 - \frac{4}{9}$

h) $ax + bx + ay + by$

i) $6 + 3x + 2y + xy$

j) $x^3 + 1$

3.4.2 Verifique se os trinômios são quadrados perfeitos:

a) $x^2 + 4x + 16$

b) $x^2 + 6x + 9$

c) $4y^2 - 12y + 9$

d) $9x^2 - 6x + 3$

3.4.3 Adicione constantes nas equações de modo a obter trinômios quadrados perfeitos no lado esquerdo da igualdade:

a) $x^2 + 6x + 10 = 0$

b) $4x^2 + 4x + 3 = 0$

c) $9x^2 - 12x + 5 = 0$

d) $x^2 + 10x + 12 = 0$

3.5 Expressões algébricas fracionárias

Expressões algébricas fracionárias são expressões com variáveis no denominador.

Exemplos:

1) $\frac{a+b}{b}$ 2) $\frac{x^2+3x+5}{x-1}$ 3) $\frac{ab^2-5a+b}{a+b}$

3.5.1 Menor Múltiplo Comum (MMC) com expressões algébricas:

Para encontrar o MMC de números são conhecidos dois métodos:

Encontre o MMC(6,8):

a) Usando conjuntos de múltiplos:

Os múltiplos de 6 são :

$$M(6) = \left\{6, 12, 18, \boxed{24}, 30, 36, 42, \boxed{48}, 54, 60, 66, \boxed{72}, 78, ...\right\}$$

Os múltiplos de 8 são :

$$M(8) = \left\{8, 16, \boxed{24}, 32, 40, \boxed{48}, 56, 64, \boxed{72}, 80, ...\right\}$$

Examinando os conjuntos de múltiplos de 6 e 8, observa-se que existem vários múltiplos comuns, mas o menor deles é 24. Então, MMC(6,8) = 24.

b) Usando decomposição em fatores primos:

1º) decompor os números em fatores primos;

2º) o MMC é o produto de todos os fatores, porém aqueles que se repetirem, escolhe-se apenas os de potência maior.

$6 = 2 \cdot 3$ e $8 = 2^3$

Os fatores são 2, 3 e 2^3 . Como o fator 2 se repetiu, escolhemos apenas 2^3.

Então, MMC(6,8) = $2^3 \cdot 3 = 24$.

O MMC de expressões algébricas é calculado pelo método da decomposição.

Exemplo 3.5.1. Determine o MMC das expressões algébricas:

a) ab^2 e a^3b.

Os fatores são: a; a^3; b e b^2. Então, o MMC(ab^2, a^3b) = a^3b^2

b) x^2+2x+1 e $2(x+1)$:

Fatorando a primeira expressão, temos: x^2+2x+1 = $(x+1)^2$. Os fatores são: $(x+1)^2$; 2 e $(x+1)$. Então o MMC das expressões dadas é $2(x+1)^2$ ■

3.5.2 Operações com frações algébricas

As operações com frações algébricas seguem as mesmas regras das operações com frações numéricas e polinômios.

Exemplo 3.5.2. Resolva as operações com as frações algébricas:

a) $\frac{a}{b} + \frac{2a}{b^2} =$

O MMC(b, b^2) = b^2. Aplicando o algoritmo da adição de frações, temos:

$$\frac{a}{b} + \frac{2a}{b^2} = \frac{ab+2a}{b^2} = \frac{a(b+2)}{b^2}$$

b) $\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+1}{x^2-1} =$

Ao invés de multiplicas diretamente, podemos fazer simplificações reescrevendo o denominador da segunda fração como: (x^2-1) = $(x+1)(x-1)$. Assim,

$$\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} =$$

Cancelando os fatores iguais (propriedade do cancelamento), temos:

$$\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x}{x+2} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{x}{(x+2)(x-1)} \qquad ■$$

EXERCÍCIOS 3.5

3.5.1 Simplifique as frações algébricas usando a propriedade do cancelamento:

a) $\frac{21x^4}{15x}$

b) $\frac{x^2}{x^2-x}$

c) $\frac{a^2-a}{a^2-2a+1}$

d) $\frac{y+2}{4y^2-16}$

e) $\frac{x^3+4x^2-21x}{x^2-9}$

f) $\frac{a^3+3a^2-5a-15}{a^2+3a}$

3.5.2 Resolva as adições e subtrações com frações algébricas:

a) $\frac{1}{3x}+\frac{x+1}{x^2}$

b) $\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{x}{x-1}$

c) $\frac{1}{y^2-1}-\frac{1}{y+1}$

d) $\frac{2}{a}+\frac{a}{a^2+1}$

e) $\frac{x}{x+3}+\frac{1}{x^2+6x+9}$

f) $\frac{x}{x^2-25}-\frac{x-1}{2x-10}$

3.5.3 Multiplique as frações algébricas usando a propriedade do cancelamento:

a) $\frac{4}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{16}$

b) $\frac{x+4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x}{x^2-16}$

c) $\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2-6x+9}{x+1}\cdot\frac{x^2+x}{x-3}$

d) $\frac{4x^2-2}{x^2}\cdot\frac{6x^2-6}{4x^4-4x^2+1}$

e) $\frac{x^3-1}{2x^2}\cdot\frac{4x}{x^2+x+1}$

f) $\frac{y+3}{7}\cdot\frac{21}{2y+6}$

3.5.4 Resolva as operações com frações algébricas:

a) $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x^3}}$

b) $\frac{x}{3x+1}+\frac{x+1}{9x^2-1}$

c) $\frac{a}{a-1}:\frac{a^3}{a^3-a}$

d) $\frac{1}{2y+5}-\frac{y}{4y^2+20y+25}$

e) $\frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{x-2}+\frac{1}{x^2-4}$

f) $\frac{x}{x-3}-\frac{1}{x^2-6x+9}:\frac{6x^2-36x+54}{2x-6}$

3.6 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESPOSTAS 3.1

3.1.1
a) $P = 4x;\ A = x^2$
b) $P = 6x;\ A = 2x^2$
c) $P = 4x - 4;\ A = x^2 - 2x$
d) $P = 4x + 10;\ A = x^2 + 5x$

3.1.2 $P = 4x + 6$

3.1.3 $P = 4x$

3.1.4 $P = 16cm$

3.1.5 Não. Se $x = 1cm$, a figura não seria fechada.

3.1.6
a) -45
b) $\frac{-19}{3}$
c) $\frac{3}{2}$
d) 2

RESPOSTAS 3.2

3.2.1 Só podemos cancelar quando o mesmo número ou variável está sujeito a operações inversas. Neste caso, a multiplicação por a pode ser cancelada com a divisão por a.

3.2.2
a) Falsa. A soma dos expoentes, quando as bases são iguais, só é feita se a operação entre as potências for a multiplicação.
b) Verdadeira. Na multiplicação de potências de mesma base conserva-se a base e soma-se os expoentes.
c) Verdadeira. Na divisão de potências de mesma base, conserva-se a base e subtrai-se os expoentes.
d) Verdadeira.
e) Falsa. Multiplica-se os coeficientes ao invés de somá-los.
f) Verdadeira.

3.2.3
a) $\frac{4}{3}x^2$
b) $\frac{3}{4}ab^2$
c) $\frac{9}{4}y^3$
d) $x^2y + 2x^2 + 3xy$
e) $x^3 - \frac{10}{3}x^2 + 4x - 9$
f) a^6b^5
g) $5y^3 - 2y^2 - y + \frac{2}{5}$
h) $\frac{1}{2}abx$
i) $2x^2 + 4x$
j) $3mn$

3.2.4
a) $3x - 2$
b) $2x^2 + 4x - 2$
c) $2x^2 - 5x - 3$
d) $4x^3 + 12x^2 + 9x + 2$
e) $4x + 2$
f) $x + 2$
g) $2x + 11;\ R = 35$
h) $-10x - 5$

3.2.5 a) $6x+6$ b) $2x^2+6x$ c) $2cm$ d) $4cm$ e) 3

3.2.6 $x+3$

3.2.7 a) x^3+3x^2+3x+1 b) x^2+2x+1 c) $6x^2+12x+6$

3.2.8 $P=4x+10; A=x^2+5x$

3.2.9 a) x^2+6x+9 b) 16 c) Sim d) -3

3.2.10 Respectivamente $0;1;4;9;16;25;36$

RESPOSTAS 3.3

3.3.1
a) $x^2+10x+25$
b) $4x^2-12x+9$
c) $x^2+x+\frac{1}{4}$
d) x^2-6x+9
e) $\frac{1}{4}x^2+2x+4$
f) x^3+3x^2+3x+1
g) $8x^3-60x^2+150x-125$
h) x^2-9
i) $m^2+6mn+9n^2$
j) $x^2-\frac{1}{4}$
k) x^2+3x+2
l) x^2+2x-3
m) $4a^2-b^2$
n) $a^2+b^2+2ab+2a+2b+1$
o) $x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{2}$

RESPOSTAS 3.4

3.4.1
a) $x(x-1)$
b) $ab(a^2b-1+b)$
c) $(3x-2)^2$
d) $(x+3)^2$
e) $(x+\frac{1}{2})^2$
f) $(x+5)(x-5)$
g) $(4x+\frac{2}{3})(4x-\frac{2}{3})$
h) $(x+y)(a+b)$
i) $(3+y)(2+x)$
j) $(x+1)(x^2-x+1)$

3.4.2
a) Não é um TQP.
b) É um TQP: $(x+3)^2$
c) É um TQP: $(2y-3)^2$
d) Não é um TQP.

3.4.3 a) -1 b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{9}$ d) 13

RESPOSTAS 3.5

3.5.1

a) $\frac{7}{5}x^3$ c) $\frac{a}{a-1}$ e) $\frac{x(x+7)}{x+3}$

b) $\frac{x}{x-1}$ d) $\frac{1}{4y-8}$ f) $\frac{a^2-5}{a}$

3.5.2 a) $\frac{4x+3}{3x^2}$ c) $\frac{2-y}{(y+1)(y-1)}$ e) $\frac{x^2+3x+1}{(x+3)^2}$

b) $\frac{-x^3+2x^2-x-2}{x(x+1)(x-1)}$ d) $\frac{3a^2+2}{a(a^2+1)}$ f) $\frac{-x^2-2x+5}{2(x^2-25)}$

3.5.3 a) $\frac{x+1}{4}$ c) $x-3$ e) $\frac{2(x-1)}{x}$

b) $\frac{1}{x^2-3x-4}$ d) $\frac{12(x^2-1)}{x^2(2x^2-1)}$ f) $\frac{3}{2}$

3.5.4 a) $\frac{x^2}{x+1}$ c) $\frac{a+1}{a}$ e) $\frac{x^2(x+2)+1}{(x-2)(x+2)}$

b) $\frac{3x^2+1}{9x^2-1}$ d) $\frac{y+5}{(2y+5)^2}$ f) $\frac{3x(x-3)^2-1}{3(x-3)^3}$

Capítulo 4

Equações de primeiro e segundo grau

4.1 Introdução

Ao escrever problemas em linguagem matemática, geralmente utilizamos equações. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 4.1.1. A renda de uma família é a soma das rendas do pai (P), da mãe (M) e de uma filha (F). Sabe-se que a renda total é *R$ 4.500,00* e somando a renda do pai e da mãe, obtém-se *R$ 3.100,00*. Qual é a renda do filha ?

Solução: Escrevendo a renda como uma equação temos:

$$R = P + M + F \tag{4.1}$$

Sabemos que $P + M$ = *R$ 3.100,00,* e R= *R$ 4.500,00*. Substituindo $P + M$ e R na equação, temos:

$$4500 = 3100 + F \tag{4.2}$$

Para que o lado esquerdo da Eq. (2) seja igual ao lado direito, F = *1.400* ■

Na Eq. (2) temos uma equação com uma letra, cujo valor desconhecemos, mas que desejamos determinar. Chamamos esta letra de *incógnita*.

Exemplo 4.1.2. O perímetro de um quadrado mede *12 cm*. Quanto mede cada lado?

Solução: Chamaremos de x (*incógnita*, a grandeza desconhecida) o lado do quadrado e escrevemos uma equação para o perímetro:

$$P = 4 \cdot x \tag{4.3}$$

Substituindo *12* no lugar de P obtemos uma equação com uma incógnita.

$2 = 4 \cdot x$

Novamente temos uma equação com uma incógnita. É fácil verificar que o lado do quadrado mede $x = 3\ cm$ ■

Exemplo 4.1.3. a) O dobro de um número mais *3* é igual a *5*. Que número é esse?

b) O dobro de um número mais *3* é igual a *6*. Que número é esse?

Solução: a) Chamando esse número de x, podemos escrever:

$$2x + 3 = 5 \qquad (4.4)$$

Novamente temos uma equação com uma incógnita. Para que o lado esquerdo da Eq. (4) seja igual ao lado direito, $x = 1$.

b) Com o mesmo procedimento do item (a), podemos escrever:

$$2x + 3 = 6 \qquad (4.5)$$

A solução nesse caso, não é tão óbvia. Neste capítulo vamos estudar operações algébricas para encontrar o valor da incógnita de equações algébricas. A solução é $x = 3/2$. Substitua esse valor de x na equação dada e verifique se ambos os lados da equação são iguais ■

Podemos elaborar equações de vários tipos:

$3 \cdot (5+8) = 10+ 29$	(Equação numérica)
$2+3x+x^2+5x^3+x^4 = 0$	(Equação polinomial de 4º grau)
$\frac{1}{1+x^2} = 0$	(Equação racional)
$3^{x+1} = 2$	(Equação exponencial)

Neste capítulo vamos estudar as soluções das equações polinomiais de 1º e 2º Grau.

4.2 Solução da equação

O(s) valor(es) da incógnita que torna ambos os lados iguais é a solução de uma equação. Para resolver equações é necessário conhecer suas propriedades.

Propriedade fundamental das equações:

Se em ambos os lados da equação for realizada a mesma operação, a equação permanece verdadeira (é mantida a identidade da equação).

Exemplo 4.2.1. Consideremos uma equação numérica: $5 = 5$.

Evidentemente é uma equação verdadeira pois 5 é igual a 5!

1. Se adicionarmos +10 em ambos os lados, temos
   +10 + 5 = 5 + 10
   +15 = +15. A identidade foi mantida.
2. Se adicionarmos -10 em ambos os lados, temos
   -10 + 5 = 5 + (-10)
   -5 = -5. A identidade foi mantida.
3. Se multiplicarmos por 7 em ambos os lados, temos
   $7 \cdot 5 = 5 \cdot 7$
   (a) = 35. A identidade foi mantida.
4. Se dividirmos por 4 em ambos os lados, temos

$\frac{5}{4} = \frac{5}{4}$. A identidade foi mantida■

Exemplo 4.2.2. Dada a equação *3x = 2x + 5*, determine o valor de *x*.

Solução: Usando a propriedade fundamental, se adicionarmos *-2x* em ambos os lados da equação dada, temos:

-2x +3x = 2x + 5 - 2x

x = 5■

Para resolver uma equação, precisamos isolar a incógnita em um dos lados. Os *princípios aditivo* e *multiplicativo* derivam da propriedade fundamental e a tornam mais prática.

Princípio aditivo
Adicionando constantes ou variáveis em ambos os lados, a solução da equação permanece a mesma.

Exemplo 4.2.3. Dada a equação *2x = x + 12*, determine o valor de *x*.

Solução: Observemos que a solução é *x = 12*. Precisamos reunir as expressões que contem *x* em um lado da equação. Adicionando *-x* em ambos os lados, obtemos:

-x +2x = x - x + 12

x = 12. Observemos que a solução permaneceu a mesma *x = 12* ■

Princípio multiplicativo Multiplicando (ou dividindo) ambos os lados por constantes ou variáveis (diferente de zero), a solução da equação permanece a mesma.

Exemplo 4.2.4. Dada a equação *2x = - 12*, determine o valor de *x*.

Solução: Observemos que a solução é *x = -6*. Multiplicando ambos os lados por $\frac{1}{2}$, obtemos:

$\frac{1}{2} \cdot 2x = -12 \cdot \frac{1}{2}$

x = -6. Observemos que a solução permaneceu a mesma, *x = -6* ■

4.3 Equação do 1º Grau

As equações polinomiais têm a forma de polinômios de uma incógnita igualados a zero:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_nx^n = 0 \qquad (4.6)$$

O grau de uma equação polinomial é o grau do maior expoente da incógnita. Assim,

$2 + 3x = 0$ é uma equação de 1º grau

$4 + 5x + x^2 = 0$ é uma equação do 2º grau

$3 + 2x + x^2 + 5x^3 + 2x^4 = 0$ é uma equação do 4º grau e assim por diante.

Definição 4.3.1. A equação do 1º Grau tem a forma

$$ax + b = 0 \qquad (4.7)$$

Onde a e b são números reais e x é uma incógnita.

Exemplo 4.3.1. Mostre que a equação *x + 3x +3(x-1) = 5* pode ser reduzida à forma

ax + b = 0.

Solução: Multiplicando a constante *3* pelo conteúdo do parêntesis, temos:

x + 3x +3x -3 = 5. Adicionando os termos semelhantes e adicionando +*3* em ambos os lados da equação, temos:

*7x -3+3 = 5+3*ou adicionando *(-8),* temos:

7x - 8 = 0. Portanto, a equação dada é do 1º Grau ■

Exemplo 4.3.2. Mostre que a equação $\frac{x-3}{2} = \frac{x+3}{3} + 3$ pode ser reduzida à forma

ax + b = 0 e resolva a equação.

Solução: Multiplicando toda equação por *6*, temos:

$$6\left(\frac{x-3}{2}\right) = 6\left(\frac{x+3}{3} + 3\right)$$

Efetivando os produtos, temos:

$3x - 9 = 2x + 6 + 18$. Adicionando *-2x* e *-24* em ambos os lados, temos:

x - 33 = 0. Portanto, a equação dada é do 1º Grau.

Para resolver a equação, basta adicionar +*33* em ambos os lados.

x = 33 ■

Observemos que nas equações de 1º Grau existe apenas uma solução.

EXERCÍCIOS 4.3

4.3.1 Uma estratégia para resolver equações fracionárias de apenas um termo em cada lado da igualdade é multiplicando os meios e os extremos (lembrar de proporções):

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então $a \cdot d = b \cdot c$. (a e d são os extremos e b e c são os meios)

a) Use essaestratégia para resolver a equação $\frac{x}{2} = \frac{2}{3}$

b) A estratégia poderia ser usada para resolver $\frac{x}{2} = \frac{2x}{3} + \frac{1}{2}$?

4.3.2 Resolva a equação $\frac{x+1}{4} = x + \frac{1}{2}$:

(a) Multiplicando ambos os lados pelo MMC dos denominadores

(b) Adicionando os termos do lado direito e igualando o produto dos meios e dos extremos.

4.3.3 Determine a solução das equações:

(a) $x + 3 = 1$

(b) $3x - 3 = x + 1$

(c) $3(x+2) = 9$

(d) $2(3x+3) = 3x$

(e) $2(x-2x) = 4(x-1)$

(f) $\frac{x-1}{2} = \frac{x-4}{3}$

(g) $\frac{x+5}{4} = \frac{3x+3}{6}$

(h) $\frac{12}{x} = \frac{3}{x} + \frac{3}{2}$

(i) $3(x+5) = \frac{x-20}{2}$

(j) $\frac{1}{2} = \frac{x-2}{3}$

4.3.4 Resolva a equação $\frac{x}{5} + \frac{x-1}{10} = \frac{1}{2}$:

(a) Adicionando as frações do lado esquerdo e depois resolvendo para x;

(b) Multiplicando toda a equação pelo MMC dos denominadores e depois resolvendo para x.

4.3.5 Resolva as equações:

(a) $\frac{x}{3} + \frac{x-1}{2} = \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2} = \frac{x}{5} + 2x$ c) $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{1}{6}$

$(d)\frac{x+1}{2} + \frac{3x}{4} = \frac{5x}{2}$ e) $\frac{5}{x+1} = \frac{3}{x+2}$ f) $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2}$

4.3.6 Determine:

(a) Um número mais sua metade e mais 5 é 8. Que número é este?

(b) Um número mais sua metade e mais 5 é 3. Que número é este?

(c) A terça parte de um número, mais a metade desse número menos 1 é $\frac{1}{3}$. Que número é este?

4.3.7 O lado de um quadrado mede $x+2cm$, onde x é uma variável real. Qual é o valor de x, sabendo-se que o perímetro é 12 cm?

4.3.8 A largura e o comprimento de um retângulo medem xcm e $(x+3)\,cm$, respectivamente. Qual é o valor de x, para que o perímetro seja:

(a) P = 10 cm

(b) P = 12 cm

4.3.9 A largura de um retângulo é dada pela expressão 3x− 1 e o comprimento por $x+\frac{1}{2}$. Qual é o valor de x, se a largura é a metade do comprimento?

4.3.10 O comprimento de um campo de futebol é 30m maior do que a largura. Quais são as dimensões do campo, se o perímetro é 340m?

4.3.11 Os lados, em sequência, de um triângulo diferem entre si por *2 cm*. Quanto mede cada lado se o perímetro é 12 cm?

4.4 Equação do 2º Grau

Definição 4.4.1. as equações de segundo grau têm a forma

$a_0+a_1x+a_2x^2=0$, para $a_2\neq 0$■ (4.8)

4.4.1 Solução da equação do 2º Grau incompleta

Se a_0 e/ou a_1 forem iguais a zero, a solução da Eq. (8) pode ser obtida facilmente usando a propriedade fundamental das equações. Vejamos os casos 1, 2 e 3:

Caso 1: Se $a_0 = a_1 = 0$. Nesse caso a Eq. (8) tem a forma:

$$a_2x^2=0$$

e a única solução é $x = 0$■

Caso 2: $a_0 \neq 0$ e $a_1 = 0$. Nesse caso a Eq. (8) tem a forma:

$a_0+a_2x^2=0.$ (4.9)

Adicionando ($-a_0$) em ambos os lados, temos:

$$a_2x^2 = -a_0 \tag{4.10}$$

Dividindo a Eq. (10) por a_2 e em seguida aplicando raiz quadrada em ambos os lados, temos:

$$x = \pm\sqrt{-\tfrac{a_0}{a_2}}. \tag{4.11}$$

Como a raiz quadrada de números negativos não é número real (é número complexo), podemos afirmar que x será real, somente se

$$-\tfrac{a_0}{a_2} \geq 0 \blacksquare \tag{4.12}$$

Caso 3: $a_1 \neq 0$ e $a_0 = 0$. Nesse caso a Eq. (8) tem a forma:

$$a_1x + a_2x^2 = 0. \tag{4.13}$$

Colocando o fator comum x em evidência, temos:

$$x \cdot (a_1 + a_2x) = 0 \tag{4.14}$$

Esse produto de dois termos será zero somente **se um ou os dois termos** forem nulos. Assim, teremos duas soluções possíveis: x_1 e x_2.

1. $x_1 = 0$ ou
2. $a_1 + a_2x_2 = 0$. Resolvendo para x, temos:

$$x = -\frac{a_1}{a_2}$$

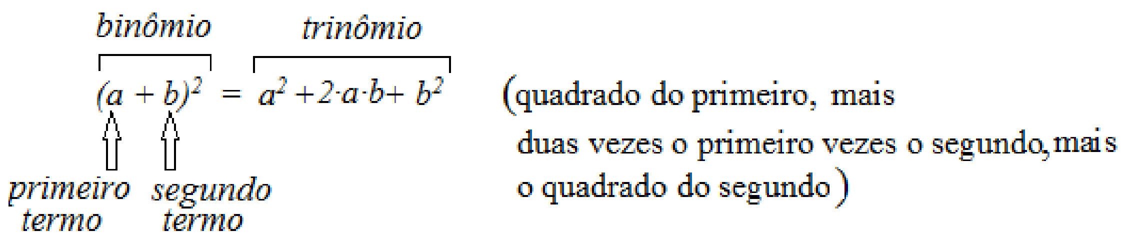
A solução da equação de 2º grau, nesse caso, é

$$x_1 = 0$$

e $x_2 = -\tfrac{a_1}{a_2}$. $\blacksquare$

4.4.2 Solução da Eq. do 2º grau completa

Quando nenhum coeficiente da equação de segundo grau for nulo, a solução pode ser obtida por fatoração do trinômio, completando o quadrado perfeito. Lembremos que



Vejamos dois exemplos:

Exemplo 4.4.1. Determine as raízes da equação $x^2 + 6x + 9 = 0$.

Solução: Nesse caso, temos um TQP, pois $a = x$ e $b=3$. Portanto,

$2ab = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x$ que é igual ao termo intermediário do trinômio. Assim,

$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2=0$. Aplicando raiz quadrada em ambos os lados, temos:

$x + 3 = 0$. Adicionando (-3) em ambos os lados, temos:

$x = -3$ é a raiz da equação dada ■

Exemplo 4.4.2. Determine as raízes da equação $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Solução: Nesse caso, NÃO temos um TQP, pois se $a = x$ e $b = \sqrt{6}$ não temos uma identidade, comparando com o termo intermediário do trinômio:

$2ab = 2 \cdot x \cdot \sqrt{6} \neq 5x$.

Para obter um trinômio, vamos usar $a = x$ e determinar b, tal que

$5x = 2ab = 2 \cdot x \cdot b$ ou

$5 = 2 \cdot b$

$b = 5/2$.

Adicionando $b^2 = (5/2)^2$ em ambos os lados da equação dada, obtemos:

$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$. Adicionando (-6) em ambos os lados e reescrevendo, temos

$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Fatorando o TQP obtido, temos:

$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Aplicando raiz quadrada em ambos os lados, temos:

$x + \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$. Adicionando (-5/2) em ambos os lados e operando, temos:

$x = \pm\frac{1}{2} - \frac{5}{2}$. Finalmente, as soluções da equação dada são:

$x_1 = -2$ e $x_2 = -3$ ■

O processo desenvolvido no Ex. 5.2 pode ser generalizado da seguinte maneira:

Inicialmente, para evitar o uso de sub-índices, vamos usar $A=a_2$; $B=a_1$ e $C=a_0$ e reescrever a Eq. (7) :

$Ax^2 + Bx + C = 0.$ (4.15)

Para que o coeficiente de x^2 seja *1*, vamos dividir a Eq. (8) por A.

$\frac{Ax^2+Bx+C}{A} = \frac{0}{A}$ ou $x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$ (4.16)

Para obter o TQP, vamos usar $a = x$ e determinar b, tal que:

$\frac{B}{A}x = 2ab = 2xb$. Então $b = \frac{B}{2A}$.

Adicionando ($b^2 = \left(\frac{B}{2A}\right)^2$) em ambos os lados da Eq. (16), temos

$x^2 + \frac{B}{A}x + \left(\frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{C}{A} = \left(\frac{B}{2A}\right)^2$. Fatorando o TQP obtido e adicionando (-C/A) em ambos os lados, temos:

$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 = \left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{C}{A}$. Operando o lado direito e aplicando raiz quadrada em ambos os lados, temos:

$x + \frac{B}{2A} = \sqrt{\frac{B^2-4AC}{4A^2}}$. Adicionando $-\frac{B}{2A}$ em ambos os lados, temos:

$x = \pm\sqrt{\frac{B^2-4AC}{4A^2}} - \frac{B}{2A}$ ou

$x = \frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ ou $x = \frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_2a_0}}{2a_2}$ (4.17)

com os coeficientes da Eq. (8)

A Eq. (17) é conhecida como a Fórmula de Baskhara e a expressão no radicando da Eq. (17)

$\Delta = B^2 - 4 \cdot A \cdot C$

chama-se *discriminante* e é simbolizada pela letra grega delta maiúscula (Δ) ■

As equações do 2º grau tem sempre duas soluções, x_1 e x_2. Da fórmula de Baskhara, podemos tirar a seguinte conclusão, sobre o número de soluções das equações do 2º grau:

1. Se $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ as soluções são reais e idênticas: $x_1 = x_2$
2. Se $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ as soluções são reais e distintas: $x_1 \neq x_2$
3. Se $\Delta = B^2 - 4AC < 0$ as soluções não são reais.

4.4.3 Método do produto e soma

A equação

$x^2 + (a+b) \cdot x + a \cdot b = 0$ (4.18)

é gerada pelo produto

$$(x+a)\cdot(x+b)=0. \tag{4.19}$$

Observemos na Eq. (19) que se os termos entre parênteses forem nulos, a equação será uma identidade. Ou seja,

1. Se $x + a = 0$ temos uma solução da Eq. (18) : $x_1 = -a$.
2. Se $x + b = 0$ temos outra solução da Eq. (18) : $x_2 = -b$.

Assim, as soluções da Eq. (18) poder ser determinadas desde que encontremos dois números a e b, tal que

$a + b = B$ **(soma)**

$a \cdot b = C$ **(produto)**

Exemplo 4.4.3. Encontre as soluções de $x^2 + x - 6 = 0$.

Solução: Temos que encontrar números a e b, tal que

$$\mathrm{a + b = 1} \tag{4.20}$$

$a \cdot b = - 6.$

A solução é obtida por tentativas, por isso o método é eficiente quando as soluções são inteiras. Nesse caso, $a = -2$ e $b = 3$ satisfazem as Eq. (20), portanto as soluções são $x_1 = 2$ e $x_2 = -3$.

Observemos que as soluções têm o *sinal oposto* dos números a e b ■

EXERCÍCIOS 4.4

4.4.1 Para que $Ax^2 + Bx + C = 0$ seja uma equação de 2º grau, o coeficiente A pode ser nulo ? e os coeficientes B e C ?

4.4.2 Verifique se o valor de x dado é solução da respectiva equação:

a) $x^2\ 9 = 0$ para $x = -3$ c) $2x^2 + x - 3 = 0$ para $x = 1$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$ para $x = -3$ d) $5x^2 + 3x - 5/2 = 0$ para $x = 1/2$

4.4.3 Resolva as equações usando apenas as propriedades das equações (sem usar a fórmula de Baskhara):

a) $x^2 - 16 = 0$ b) $x^2 + 2x = 0$ c) $-2x^2 + 18 = 0$

d) $-x^2 + 8x = 0$ e) $-3x^2 + 6x = 0$ f) $2x^2 = 0$

4.4.4 Determine B para que as expressões sejam trinômios quadrados perfeitos:

a) $x^2 + Bx + 16 = 0$ b) $x^2 - Bx + 9 = 0$ c) $4t^2 - Bt + 9 = 0$

d) $9x^2 + Bx + 25 = 0$ e) $16s^2 - Bs + 4 = 0$ f) $36x^2 + Bx + 9 = 0$

4.4.5 Resolva as equações usando fatoração do trinômio:

a) $x^2 + 4x - 5 = 0$ b) $x^2 + x - 12 = 0$ c) $x^2 - 14x + 40 = 0$

d) $x^2 - 12x + 36 = 0$ e) $x^2 - 3x - 8 = 0$ f) $3x^2 - 2x - 2 = 0$

4.4.6 Resolva as equações usando o método de produto e soma:

a) $x^2 + 4x + 4 = 0$ b) $x^2 + x - 12 = 0$ c) $x^2 - 3x - 10 = 0$

d) $x^2 - 7x + 10 = 0$ e) $x^2 + 10x + 21 = 0$ f) $x^2 - x - 2 = 0$

4.4.7 Verifique se o método produto e soma é eficiente para a solução de:

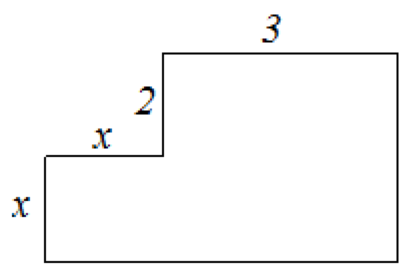
a) $2x^2 - 4x - 30 = 0$ b) $3x^2 + 8x + 12 = 0$

4.4.8 Resolva as equações usando a fórmula de Baskhara:

a) $x^2 - 2x - 8 = 0$ b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ c) $-x^2 + 7x - 6 = 0$

d) $2x^2 - x - 3 = 0$ e) $x^2 + 5/2x + 1 = 0$ f) $x^2 - 8 = 0$

4.4.9 Determine o valor de x para que a área da figura seja $7{,}5\ cm^2$. (medidas do desenho em centímetros)



4.4.10 Invente uma equação de 2º grau tal que o discriminante seja nulo.

4.4.11 Invente uma equação de 2º grau tal que:

a) As soluções sejam reais e idênticas
b) As soluções não sejam reais (complexas)
c) As soluções sejam reais e distintas

4.4.12 Resolva as equações usando qualquer método:

a) $x(x-1)+3(x^2-1) = 0$ c) $(x+1)^2 - (2x + 1)^2 = 0$

b) $2x(x-4)+2(x-1)= 0$ d) $(x+2)^2 - 2(x+1/2)^2 = 0$

4.5 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESPOSTAS 4.3

4.3.1 a) *x = 4/3*

b) Até poderia ser usada a estratégia, porém somente após realizar a adição do lado direito.

4.3.2 $x = -\frac{1}{3}$

4.3.3 a) -2 b) 2 c) 1 d) -2 e) 2/3

f) -5 g) 3 h) 6 i) -10 j) 7/2

4.3.4 *x = 2*.

4.3.5 a) $x = 1$ b) $x = \frac{5}{22}$ c) $x = \frac{1}{7}$ d) $x = 2/5$ e) $x = -\frac{7}{2}$ f) *x = -3*.

4.3.6 a) 2 b) $-\frac{4}{3}$ c) $\frac{8}{5}$

4.3.7 $x = 1cm$

4.3.8 a) $x = 1cm$ b) $x = \frac{3}{2}cm$

4.3.9 $x = \frac{1}{2}$;

4.3.10 Comprimento=*100m* e largura=*70m*;

4.3.11 *2cm, 4cm* e *6 cm*.

RESPOSTAS 4.4

4.4.1 Não pois sem o coeficiente A a equação se torna de 1º grau. Os coeficientes B e C podem ser nulos.

4.4.2 a) sim, b) não, c) o valor de x é solução da equação, d) o valor de x não é solução da equação

4.4.3 a) $x = \pm 4$ d) $x' = 0; x" = 8$

b) $x' = 0; x" = -2$ e) $x' = 0; x" = 2$

c) $x = \pm 3$ f) $x = 0$

4.4.4 a) 8 d) 30

b) 6 e) 16

c) 12 f) 36

4.4.5 a) $x^{'} = 1; x" = -5$ d) $x^{'} = 6; x" = 6$

b) $x^{'} = 3; x" = -4$ e) $x = \pm\sqrt{\frac{41}{4}} + \frac{3}{2}$

c) $x^{'} = 10; x" = 4$ f) $x = \frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$

4.4.6 a) $x^{'} = x" = -2$ d) $x^{'} = 2; x" = 5$

b) $x^{'} = 3; x" = -4$ e) $x^{'} = -3; x" = -7$

c) $x^{'} = -2; x" = 5$ f) $x^{'} = -1; x" = 2$

4.4.7 a) O método é eficiente porque as raízes são inteiras.

b) O método do produto e soma não é eficiente pois as raízes não são inteiras.

4.4.8 a) $x^{'} = 4; x" = -2$ d) $x' = \frac{3}{2}; x" = -1$

b) $x^{'} = -\frac{1}{2}; x" = -\frac{1}{2}$ e) $x^{'} = -\frac{1}{2}; x^{''} = -2$

c) $x^{'} = 1;\ x" = 6$ f) $x' = 2\sqrt{2}; x" = -2\sqrt{2}$

4.4.9 $x \cong 0,4365$

4.4.12 a) $x^{'} = 1; x" = -0,75$

b) $x^{'} \cong 3,302\ldots;\ x" \cong -0,302\ldots$

c) $x' = 0; x" = -\frac{2}{3}$

d) $x' = \frac{2+3\sqrt{2}}{2}; x" = \frac{2-3\sqrt{2}}{2}$

Capítulo 5

Função do primeiro grau

Capítulo 6

Função do segundo grau

6.1 Introdução

No capítulo sobre função de 1º grau foram estudados modelos em que as grandezas eram simplesmente proporcionais entre si. Isto significa que, para o mesmo incremento *(Δ x)* em qualquer *x*, o incremento *(Δ y)* em *y*, será sempre o mesmo. Os gráficos dessas funções são retas. Porém, muitas grandezas se relacionam proporcionalmente ao quadrado de outras: é o caso da área de um quadrado em relação ao lado; a área de um círculo em relação ao raio; o deslocamento de uma pedra em queda livre em relação ao tempo e muitas outras. Estas funções são chamadas de quadráticas e serão estudadas neste capítulo.

6.2 Definição de função do 2º grau

As funções polinomiais tem a forma

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_nx^n$
(2.1)

onde a_i são números reais, para *i = 0,1,2,3,4, ...n*.

O grau de uma função polinomial é dado pelo maior grau do polinômio. Assim,

1. $f(x) = a_0 + a_1x$ é uma função do 1º grau, para $a_1 \neq 0$.
2. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ é uma função do 2º grau, para $a_2 \neq 0$.
3. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ é uma função do 3º grau, para $a_3 \neq 0$
4. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$ é uma função do grau *n*, para $a_n \neq 0$.

Particularmente, as funções de 2º grau (também chamadas de *funções quadráticas*) tem a forma:

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, para $a_2 \neq 0$. (2.2)

Para simplificar a notação (evitar sub-índices), vamos substituir $a_0 = C$, $a_1 = B$ e $a_2 = A$ na Eq. (2.2) e obter :

$f(x) = Ax^2 + Bx + C$, para $A \neq 0$. (2.3)

Exemplo 6.2.1. a) Na função $f(x) = x^2 + 2x - 3$, *A=1; B=2* e *C=-3*.

b) Na função $g(x) = 3x^2 - 1/3$, *A=3; B=0* e *C=-1/3*.

c) Na função $h(x) = -x^2 + 5x$, *A=-1; B=5* e *C=0*.

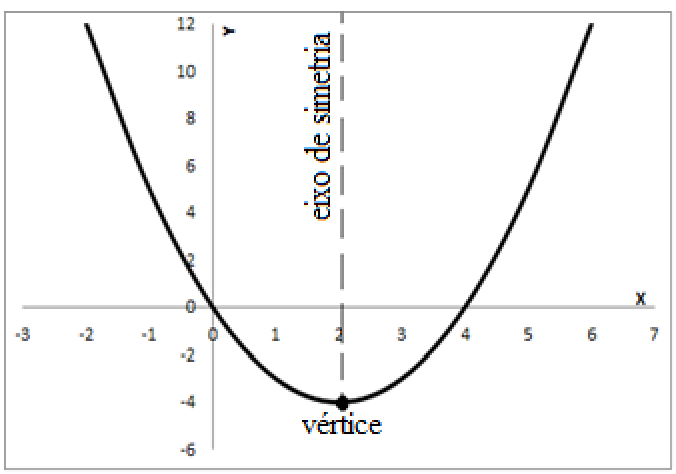
d) Na função $p(x) = -3x^2$, *A=-3; B=0* e *C=0* ■

6.3 Gráfico de uma função de 2º grau

O modo mais elementar de fazer o gráfico de uma função do 2º grau conhecida é localizando vários pontos da função no plano cartesiano. Esse modo é simples e fácil, porém demorado e mecânico. Vejamos um exemplo:

Exemplo 6.3.1. Faça o gráfico da função *f(x)* = x^2 - 4x.

Solução: Podemos fazer uma tabela atribuindo valores para *x* e calculando os correspondentes valores de *f(x)* com a função dada.



Observemos que o gráfico de *f(x)* é uma *curva*. As curvas resultantes de funções de 2º grau são chamadas *PARÁBOLAS*.

Observemos também que as parábolas têm um ***eixo de simetria*** que divide a curva em duas partes iguais, o qual passa pelo ***vértice*** (ponto extremo da curva).

Como sugestão de atividade, incentivamos o leitor a obter o gráfico do presente exemplo em uma planilha eletrônica ■

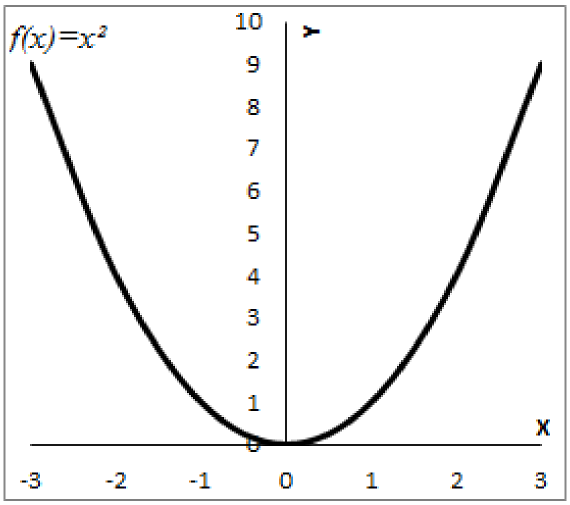
6.3.1 Concavidade da parábola

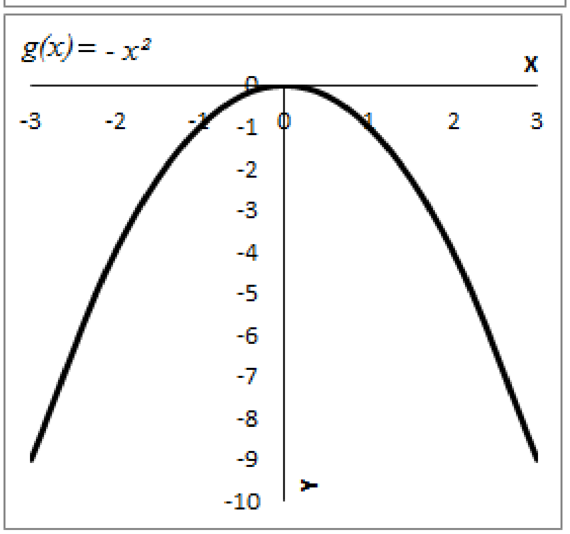
As parábolas com a forma da Eq. (2.3) têm ***concavidade para cima ou para baixo***.

Se $A > 0$ então a concavidade é para cima
Se $A < 0$ então a concavidade é para baixo.

Exemplo 6.3.2. Faça um esboço do gráfico das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$.

Solução: Atribuindo valores para x e calculando os correspondentes valores de $f(x)$ e $g(x)$ obtemos os gráficos das figuras abaixo.





Observemos que para $A > 0$ a concavidade é para cima e para $A < 0$ a concavidade é para baixo■

6.3.2 Intersectação com o eixo Y

Os pontos onde qualquer função intersecta o eixo Y tem abcissa igual a zero ($x=0$). Fazendo $x=0$ na Eq. (2.3) temos:

$y = A0^2 + B0 + C$

$y = C.$ (3.1)

Portanto, a parábola vai intersectar o eixo Y em $(0,C)$.

6.3.3 Raízes das funções de 2º grau (intersectação com o eixo X)

Lembremos que a raiz de uma função é o valor da abcissa (x_r) do ponto em que a função intersecta o eixo X, portanto, nesse ponto temos $y = 0$.

Fazendo $y = f(x) = 0$ na Eq. (2.3) temos uma equação de 2º grau:

$0 = Ax^2 + Bx + C$ (3.2)

A solução da Eq. (3.2) foi demonstrada no capítulo sobre equações, cuja conclusão é a fórmula de Baskhara:

$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ (3.3)

Exemplo 6.3.3. Calcule as raízes e faça um esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 - x - 6$.

Solução:

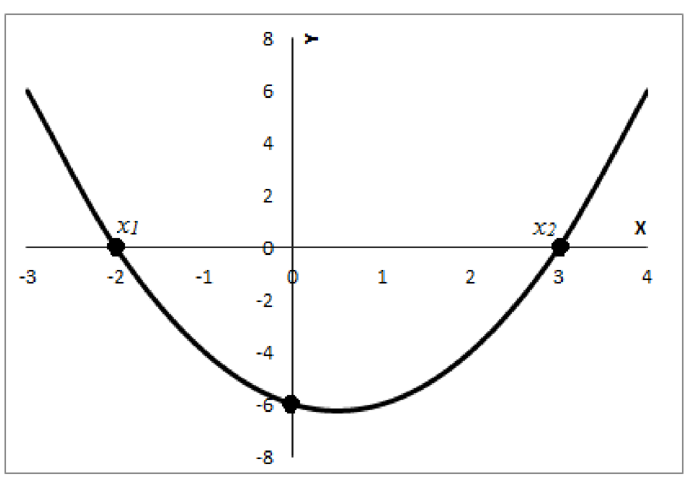
Usaremos três informações para fazer um esboço da função:

1. $A = 1 > 0$. Portanto a concavidade da parábola é para cima;

2. $C = -6$. Portanto a parábola intersecta o eixo Y em $(0,-6)$;

3. Aplicando a Eq. (3.3) com $A=1$; $B=-1$ e $C=-6$ obtemos as raízes $x_1 = -2$ e $x_2=3$. Portanto a parábola passa em $(-2,0)$ e $(3,0)$.

Colocando estas informações no plano cartesiano obtemos a curva da $f(x)$ dada.



Novamente incentivamos o leitor a obter o gráfico do presente exemplo em uma planilha eletrônica ■

Se $x_1 e x_2$ são raízes da equação de 2°grau e $A = 1$, então $0 = x\ x_2 + Bx + C$ pode ser fatorada como

$0 = (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab = x^2 + Bx + C$.
(3.4)

Assim,

$B = a+b$ e $C = a \cdot b$

Para que a Eq. (3.4) seja nula, *(x+a) = (x+b) = 0* e *a* e *b* são as raízes com o sinal oposto desta equação:

$a = -x_1$ e $b = -x_2$.

Re-escrevendo a Eq. 3.4 temos:

$0 = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 + Bx + C$ (3.5)

Exemplo 6.3.4. Escreva três equações do 2º grau cujas raízes sejam $x_1 = 2$ e $x_2 = -1$.

Solução: Usando a Eq. 3.5 podemos escrever:

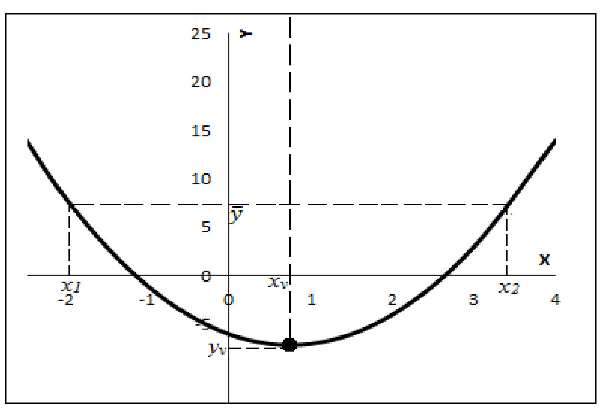
$0 = (x-2)(x+1) = x^2 - x - 2$.

Multiplicando a equação obtida por qualquer número real, obtemos equações cuja solução é $x_1 = 2$ e $x_2 = -1$. Por exemplo:

$0 = 2x^2 - 2x - 4$; $0 = 3x^2 - 3x - 6$ e $0 = 4x^2 - 4x - 8$ ■

6.3.4 Vértice da parábola

O vértice é o ponto $V=(x_v,y_v)$ pelo qual passa o eixo de simetria da parábola.



Consideremos um valor y , tal que $y > y_v$, como indica a figura acima. Devido à simetria das parábolas, devem existir x_1 e x_2 tal que

i) *f(x1) = f(x2) = y* e

ii) $x_v = \frac{x_1+x_2}{2}$.

Assim, de (i) e da Eq. 2.3, temos:

$y = Ax_1^2 + Bx_1 + C$ (3.6)

$y = Ax_2^2 + Bx_2 + C$ (3.7)

Subtraindo as Eqs. (3.6) e (3.7) e colocando A e B em evidência, temos:

$0 = A\left(x_2^2 - x_1^2\right) + B\left(x_2 - x_1\right).$ (3.8)

Fatorando a diferença de dois quadrados no fator que multiplica A, temos:

$0 = A\left(x_2 + x_1\right)\left(x_2 - x_1\right) + B\left(x_2 - x_1\right).$ (3.9)

De (ii) temos $2x_v = x_1 + x_2$, que substituindo na Eq. (3.9)

$0 = A \cdot 2x_v \cdot \left(x_2 - x_1\right) + B\left(x_2 - x_1\right).$ (3.10)

Dividindo a Eq. (3.10) por $\left(x_2 - x_1\right)$, pois $x_1 \neq x_2$, temos:

$$0 = A \cdot 2x_v + B.$$

E, finalmente, resolvendo para x_v, temos:

$x_v = \frac{-B}{2A}.$ (3.11)

A ordenada do vértice pode ser obtida substituindo x_v na Eq. (2.3)

$y_v = f\left(x_v\right) = Ax_v^2 + Bx_v + C$.

Substituindo a expressão de x_v da Eq. (3.11), tem-se:

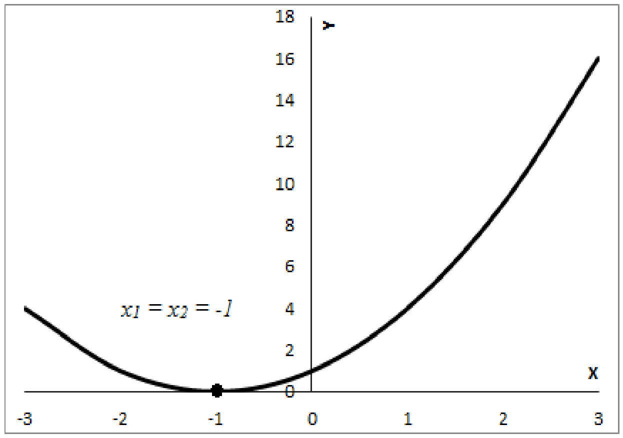
$y_v = f\left(x_v\right) = A\left(\frac{-B}{2A}\right)^2 + B\left(\frac{-B}{2A}\right) + C$ (3.12)

Resolvendo o quadrado, o produto e adicionando as frações, obtém-se:

$y_v = f\left(x_v\right) = -\frac{B^2-4AC}{4A}.$ (3.13)

Exemplo 6.3.5. Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

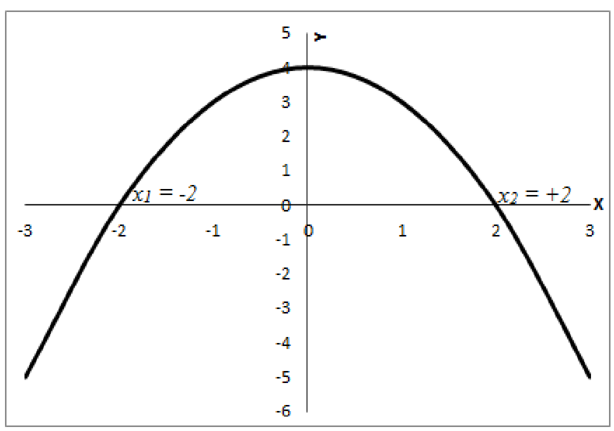
Solução: Aplicando a Eq. (3.3) com $A=1$; $B=2$ e $C=1$ obtemos duas raízes iguais $x_1 = x_2 = -1$. Com isto, já sabemos que a parábola tangencia o eixo X em (-1,0).



Usando as Eqs. (3.11) e (3.13) encontramos o vértice: *V=(-1,0)*. Com isso, sabemos que o eixo de simetria é a reta vertical $x = -1$. Como $A=1 > 0$ a parábola tem concavidade para cima. Com essas informações podemos traçar um esboço da parábola ■

Exemplo 6.3.6. Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = -x^2 + 4$.

Solução: Aplicando a Eq. (3.3) com $A=-1$; $B=0$ e $C=4$ obtemos duas raízes $x_1 = -2$ e $x_2 = +2$. Com isto, já sabemos que a parábola intersecta o eixo *X* em (-2,0) e (2,0).



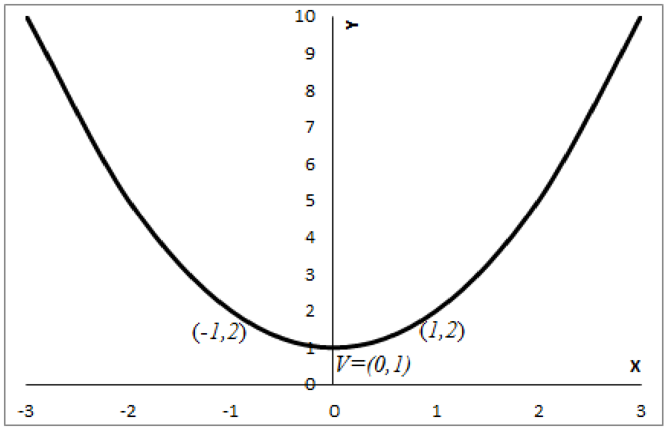
Usando as Eqs. (3.11) e (3.13) encontramos o vértice: *V=(0,4)*. Com isso, sabemos que o eixo de simetria é o próprio eixo *Y*. Como $A=-1 < 0$ a parábola tem concavidade para baixo. Com essas informações podemos traçar um esboço da parábola ■

Exemplo 6.3.7. Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 + 1$.

Solução: Aplicando a Eq. (3.3) com $A=1$; $B=0$ e $C=1$ obtemos discriminante negativo, portanto as raízes não são reais. Temos outras informações para fazer um esboço do gráfico:

Usando as Eqs. (3.11) e (3.13) encontramos o vértice: *V=(0,1)*. Com isso, sabemos que o eixo de simetria é o próprio eixo *Y*. A parábola intersecta *Y* em *(0,1)*.

Como $A=1 > 0$ a parábola tem concavidade para cima. Usaremos os pontos $(1,2)$ e $(-1,2)$ apenas para ter uma ideia da concavidade. Com essas informações podemos traçar um esboço da parábola■



6.3.5 Parábolas com eixo de simetria paralelos a X

As parábolas com eixo de simetria paralelos a X **NÃO SÃO FUNÇÕES**, pois para cada x temos dois valores de y.

As expressões das parábolas com eixo de simetria paralelos a X são obtidas trocando as variáveis x e y na Eq. (2.3):

$$x = Ay^2 + By + C \quad . \qquad (3.14)$$

Se na Eq. (3.14) $B = 0$, a parábola tem o eixo de simetria sobre o eixo X e sua equação é

$$x = Ay^2 + C \text{ ou } y = \pm\sqrt{\frac{x-C}{A}} \qquad (3.15)$$

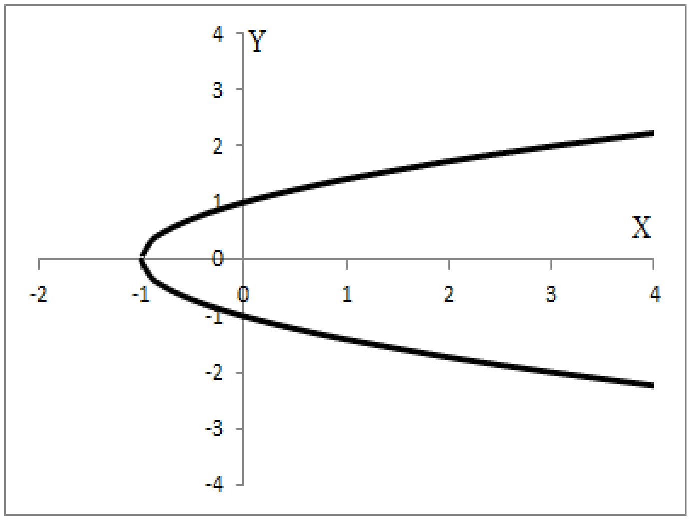
Se na Eq. (3.14) $B = 0$ e $C = 0$ a parábola tem o eixo de simetria sobre o eixo X, o vértice na origem e sua equação é

$$x = Ay^2 \text{ ou } y = \pm\sqrt{\frac{x}{A}} \qquad (3.16)$$

Exemplo 6.3.8. Faça um esboço do gráfico da parábola $x = y^2 - 1$.

Solução: Observe que para $y = \pm\, 2$, obtém-se o mesmo valor de $x = 3$. Portanto esta parábola não é uma função.

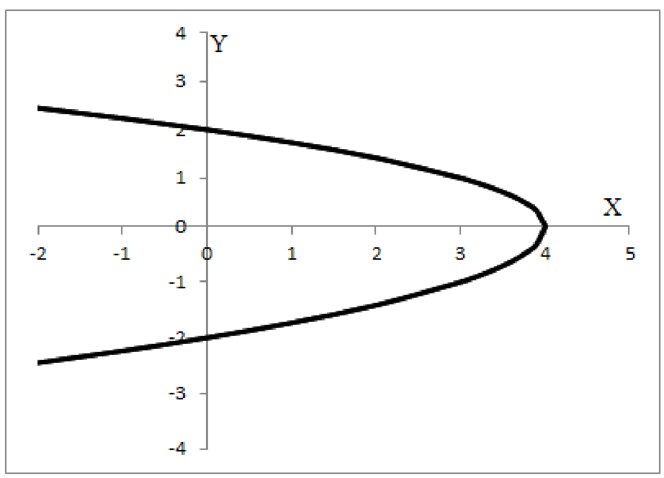
Usando as informações sobre raízes e vértices, temos:



Raízes: $y_1 = 1$ e $y_2 = -1$ e vértice: $V=(0,-1)$. Como $A=1 > 0$ a concavidade é para a direita ■

Exemplo 6.3.9. Faça um esboço do gráfico da parábola $x = - y^2 + 4$.

Solução: Usando as informações sobre raízes e vértices, temos:



Raízes: $y_1 = 2$ e $y_2 = -2$ e vértice: $V=(0,4)$. Como $A=-1 < 0$ a concavidade é para a esquerda ■

6.4 Sinal da função do 2º grau

Lembremos que o sinal da função $y=f(x)$ é o sinal da variável y em cada ponto. As raízes e a concavidade das parábolas são os elementos necessários para determinar o sinal da função.

Seja $f(x) = Ax^2 +Bx +C$, vamos analisar três casos:

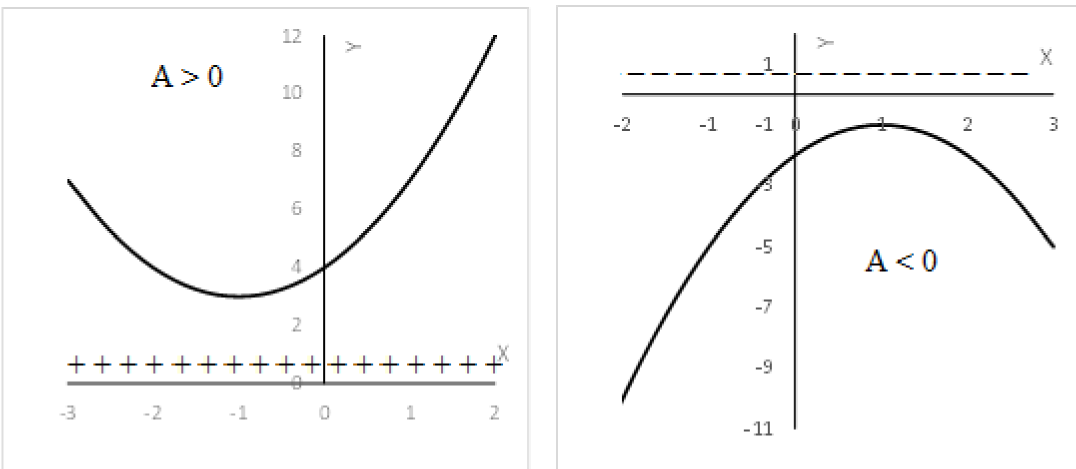
Caso 1: ***f(x)* não tem raízes reais**.

Então *f(x)* não intercepta o eixo *X*.

Nesse caso, $\Delta = B^2 - 4AC < 0$ e:

Se $A > 0$, *f(x)* é POSITIVA para qualquer *x ;*

Se $A < 0$, *f(x)* é NEGATIVA para qualquer *x ;*



Caso 2: ***f(x)* tem raízes reais idênticas**. $(x_1 = x_2)$

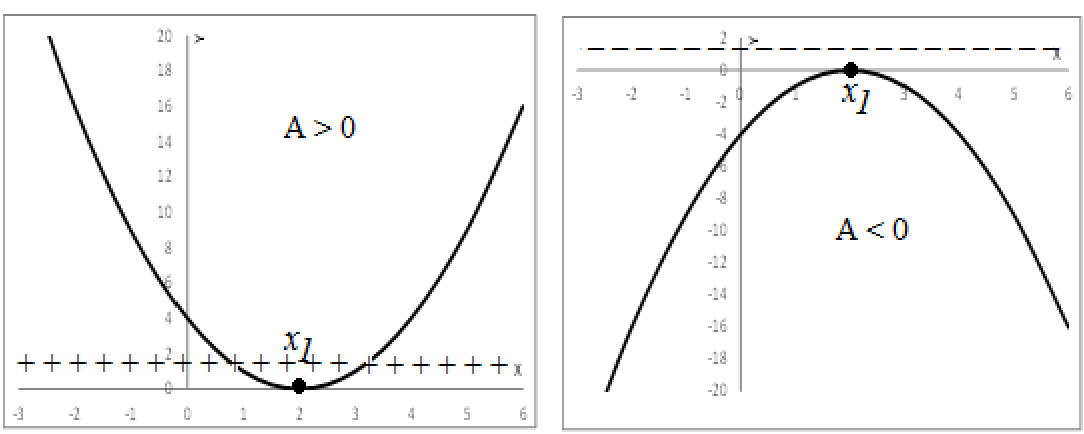
Então *f(x)* tangencia o eixo *X* em um ponto: $(x_1 , 0)$

Nesse caso, $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ e:

Se $A > 0$, *f(x)* é POSITIVA para qualquer x , $/ x \neq x_1$;

Se $A < 0$, *f(x)* é NEGATIVA para qualquer x , $/ x \neq x_1$ e

Para $x \neq x_1$ $f(x) = 0$.



Caso 3: ***f(x)* tem raízes reais distintas**. ($x_1 \neq x_2$)

Então *f(x)* intersecta o eixo *X* em dois pontos: $(x_1 , 0)$ e $(x_2 , 0)$.

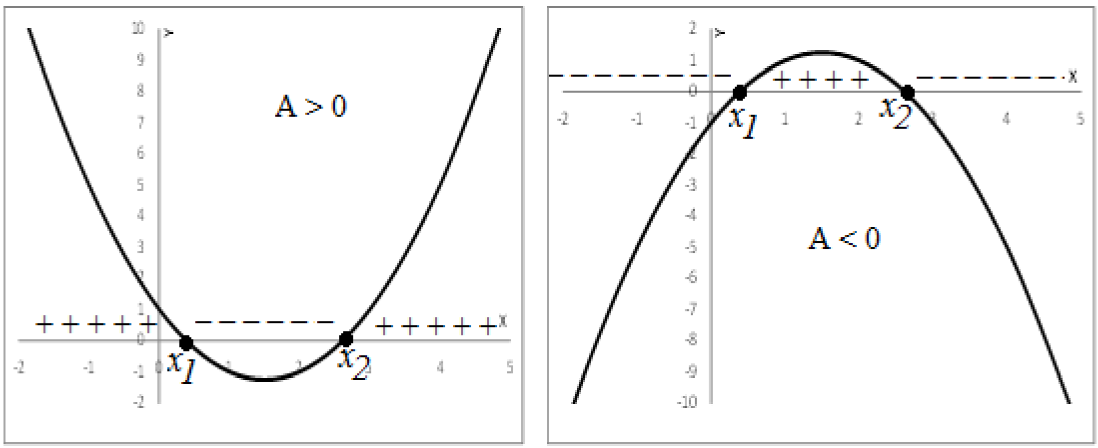
Nesse caso, $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ e:

Se $A > 0$, *f(x)* é POSITIVA para qualquer *x* , / $x < x_1$ ou $x > x_2$ e

f(x) é NEGATIVA para qualquer *x* , / $x_1 < x < x_2$.

Se $A < 0$, *f(x)* é POSITIVA para qualquer *x* , / $x_1 < x < x_2$ e

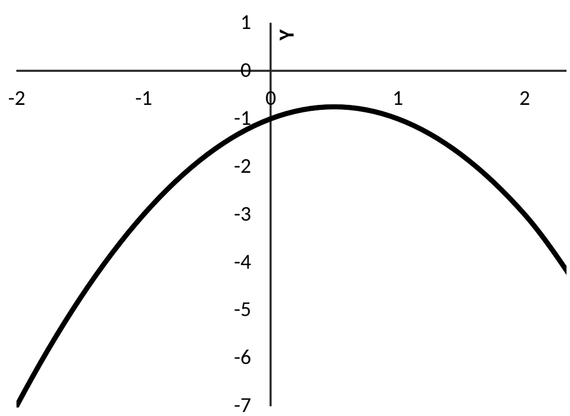
f(x) é NEGATIVA para qualquer *x* , $x < x_1$ ou $x > x_2$.



Exemplo 6.4.1. Determine os sinais e faça um esboço do gráfico da função

$f(x) = -x^2 + x - 1$.

Solução: O discriminante $\Delta = -3 < 0$ e o $A = -1 < 0$. Portanto, trata-se do Caso 1: *f(x)* é NEGATIVA para qualquer *x* real■

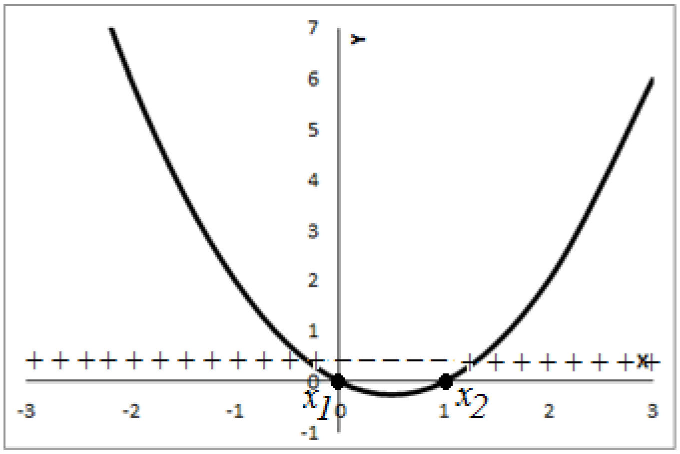


Exemplo 6.4.2. Determine os sinais e faça um esboço do gráfico da função

$f(x) = x^2 - x$.

Solução: O discriminante Δ = *1> 0*. As raízes são x_1 = 0 e x_2 = *1* então trata-se do Caso 3. Como *A = 1 > 0*,, tem-se:

f(x) será POSITIVA se *x < 0* ou *x > 1* e NEGATIVA se *0 < x < 1*■



6.5 Pontos de máximo e de mínimo

O vértice (*V*) é um ponto de máximo ou de mínimo das parábolas.
Se *A > 0* então *V* é de **mínimo**,
Se *A < 0* então *V* é de **máximo**.

Exemplo 6.5.1. Encontre o ponto de máximo da função: *f(x) = -x*^{2} *- 4x +8*.

Solução: Para determinar as coordenadas do vértice usamos as Eqs. 3.11 e 3.13:

$x_v = \frac{-(-4)}{2(-1)} = -2$ e $y_v = -\frac{(-4)^2-4(-1)(8)}{4(-1)} = 12$.

O maior valor (ponto máximo) de *f(x)* ocorre em *x = -2* e é *y = 12* ■

Exemplo 6.5.2. Em um experimento de cultivo de beterraba foram obtidos os dados da tabela para (*x*) número de mudas/m^2 e (*P*) produtividade (kg/m^2).

x, nº de mudas/m^2 *(unid)*	20	50
P, produtividade (kg/ m^2)	0,8	0,6

É razoável considerar que para nenhuma muda plantada (*x=0*) a produtividade é nula (*P=0*).

a) Determine uma função do segundo grau para descrever a relação entre *P* e *x*.

b) Calcule o número de mudas que levaria a produtividade máxima.

Solução: a) O coeficiente *C* de $P(x)= Ax^2 + Bx + C$ é zero, pois a parábola intersecta em *P = 0*.

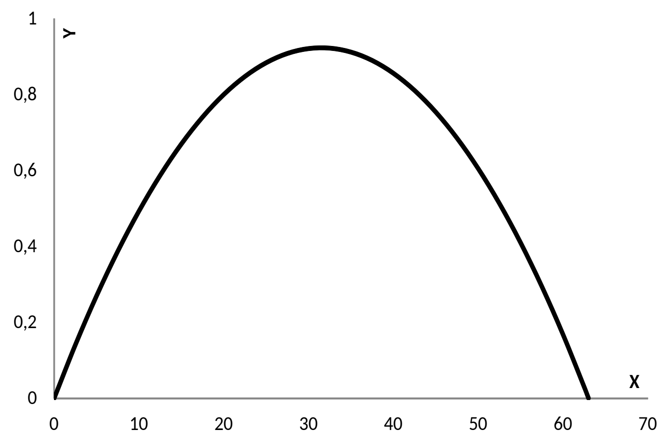
Substituindo os valores de x e P na equação $P(x) = Ax^2 + Bx$ obtemos um sistema de duas equações com duas variáveis, A e B:

$0,8 = 400A + 20B$

$0,6 = 2500A + 50B$

Resolvendo o sistema obtemos: $A = -0,00093$ e $B = 0,0586$.

A função produtividade é: $P(x) = -0,00093\,x^2 + 0,0586x$.



b) A produtividade máxima será no vértice de $P(x)$. Usando as Eqs. (3.11) e (3.13) obtemos : x_v = *31,42 mudas/m*^{2} e P_v =*0.92 kg* ■

6.6 Aplicações das funções quadráticas

As funções quadráticas são utilizadas em alguns fenômenos físicos e em como função de ajuste em problemas de otimização. Vamos analisar alguns desses casos.

6.6.1 Queda livre

O movimento vertical de uma pedra, tanto de subida como de descida, desconsiderando a presença do ar, pode ser modelado por uma função quadrática.

$$y(t) = y_o + v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (6.1)$$

onde *y(t) é a posição no eixo Y vertical, apontando para cima (m),*

y_o *é a posição inicial (m),*

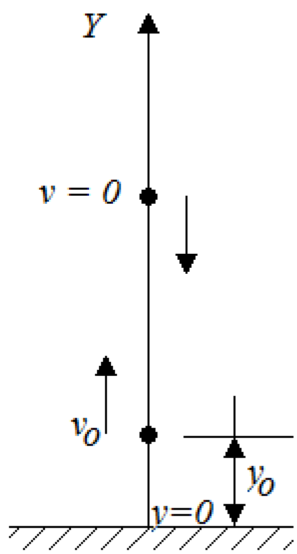
v_o *é a velocidade inicial (m/s),*

g é a aceleração da gravidade (m/s$^{2)}$ *e*

t é o tempo (s).

A velocidade da pedra em cada instante, é dada por uma função de 1º grau:

$v(t) = v_o - gt$ (6.2)

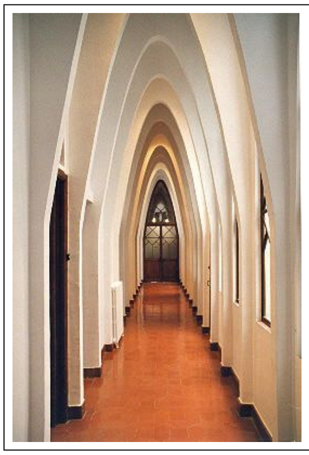


Consideremos que *y = 0 corresponde ao nível do chão. Se uma pedra é jogada para cima por uma pessoa em pé, a posição de saída é* y_o *e como a pedra está recebendo um impulso, a velocidade inicial é vo , diferente de zero, e com sina*

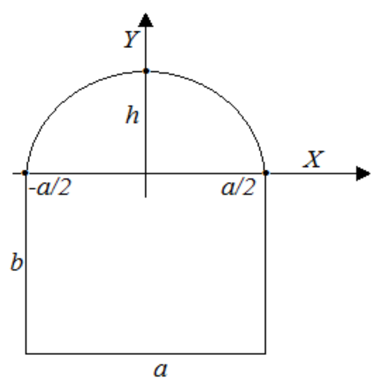
1. Considere y_o *= 1 m;* v_o*=+5 m/s* e *g= 10 m/s*^{2} e faça um gráfico de *y(t)* .
2. Determine a altura máxima que a pedra alcançará e o tempo correspondente a esta posição, usando o que você conhece sobre vértice de parábolas.
3. A velocidade da pedra na posição de altura máxima é zero. Use a Eq. (6.2) para calcular o tempo que a pedra levará para atingir a altura máxima. Compare o resultado com o item (b).
4. Analise o sinal da velocidade em função do tempo.
5. Calcule o tempo que a pedra levará para atingir o chão.
6. Calcule a velocidade da pedra ao atingir o chão.

6.6.2 Arcos parabólicos em construções

Os arcos parabólicos são utilizados em construções, principalmente em portas, janelas, pontes e aquedutos. Consegue-se maior resistência em estruturas na forma de arcos, para grandes vãos, do que com vigas retas.




Consideremos a construção de uma janela composta por um retângulo e uma parábola na parte superior, conforme mostra a figura.



Podemos determinar uma equação de 2º grau para modelar o arco. Sejam x_1= *a/2* e x_2 =-*a/2* as raízes da parábola.

Reescrevendo a Eq. (3.5) multiplicada por A (coeficiente de x^2, na Eq. 2.3), temos:

$F(x) = A(x - x_1)(x - x_2)$ (6.3)

Substituindo as raízes na Eq.(6.3) temos

$F(x) = A\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x + \frac{a}{2}\right) = A\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right)$.
(6.4)

Substituindo as coordenadas do vértice *V=(0,h)* na Eq. (6.4), temos

$h = -A\frac{a^2}{4}$.

Então $A = -\frac{4h}{a^2}$.

Substituindo esta expressão de A na Eq. (6.4), temos

$F(x) = \frac{h}{a^2}\left(a^2 - 4x^2\right)$.

a) Considerando *a = 1,6 m* e *h = 0,6 m*, determine a função *F(x)*.

b) Use a função *F(x)* para determinar ao menos cinco pontos para $0 < x < a/2$, que poderiam ser utilizados para fazer a forma de madeira, sobre a qual são assentados os tijolos.

6.6.3 Problemas de otimização (dados de experimentos)

Em experimentos de cultivos de espécies é comum obter-se dados de (P) produtividade por outra variável (x) tal como o número de mudas, a quantidade de um fertilizante ou de água. Neste tipo de problema, o objetivo é determinar o valor de x que **maximiza** a produtividade.

Se o número de dados disponíveis é de apenas três pontos, existe uma única parábola que passa por eles. Para determinar a parábola, podemos substituir os valores (x_i,P_i) na função de 2º grau

$$P(x) = Ax^2 + Bx + C \,. \qquad (6.5)$$

x	x_1	x_2	x_3
P	P_1	P_2	P_3

Obtemos um sistema linear de três equações e três incógnitas:

$$\left\{\begin{matrix} P_1 = Ax_1^2 + Bx_1 + C \\ P_2 = Ax_2^2 + Bx_2 + C \\ P_3 = Ax_3^2 + Bx_3 + C \end{matrix}\right\} \qquad (6.6)$$

A solução do sistema Eq. (6.6) pode ser obtida pelo Método de Cramer (determinantes). A matriz dos coeficientes e a dos termos independentes são:

$$M = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Por este método, são construídas três matrizes, substituindo o vetor b em cada coluna da matriz A.

$$M_1 = \begin{bmatrix} P_1 & x_1 & 1 \\ P_2 & x_2 & 1 \\ P_3 & x_3 & 1 \end{bmatrix} ; M_2 = \begin{bmatrix} x_1^2 & P_1 & 1 \\ x_2^2 & P_2 & 1 \\ x_3^2 & P_3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } M_3 = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & P_1 \\ x_2^2 & x_2 & P_2 \\ x_3^2 & x_3 & P_3 \end{bmatrix}$$

Os determinantes das matrizes M, M_1, M_2 e M_3 são obtidos pela Regra de Sarrus e a solução pelas razões:

$$A = \frac{det(M_1)}{det(M)}, B = \frac{det(M_2)}{det(M)} \text{ e } C = \frac{det(M_3)}{det(M)} \,.$$

Levando os valores de A, B e C na Eq. (6.5) obtém-se a função que passa nos três pontos dados.

O cálculo de x que corresponde à maior produtividade é o cálculo das coordenadas do vértice da parábola.

Os dados da tabela abaixo são de um experimento com beterraba.

x, nº de mudas/m^2 *(unid)*	20	30	50
P, produtividade (kg/ m^2)	0,8	1,2	0,6

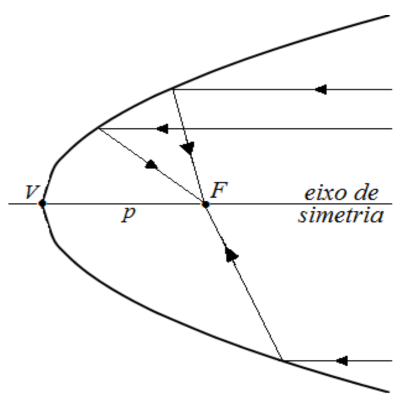
a) Determine uma função do segundo grau para descrever a relação entre P e x.

b) Calcule o número de mudas que levaria a produtividade máxima.

6.6.4 Antena parabólica

Consideremos uma parábola. Se a girarmos em torno de seu eixo, obteremos uma superfície chamada paraboloide de revolução. Uma antena parabólica é um paraboloide de revolução. Porque as antenas têm esta forma geométrica?

As parábolas têm um ponto característico chamado *foco com a seguinte propriedade: toda reta paralela ao eixo, reflete passando pelo foco. No caso das antenas, as radiações eletromagnéticas vindas do espaço em múltiplas direções. Aquelas que são paralelas ao eixo de simetria da antena, são concentradas no foco, onde está o captador e assim o sinal é concentrado, melhorando a qualidade da recepção.*



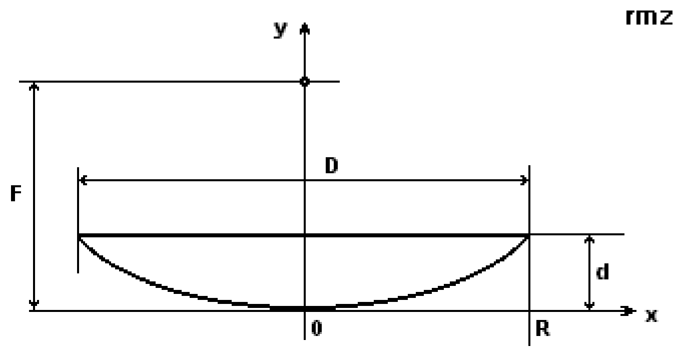
A equação canônica de uma parábola com eixo de simetria horizontal é

$$y^2 = 4Fx, \qquad (6.7)$$

onde *F é a distância do vértice ao foco. Com essas informações, podemos construir parábolas com o foco conhecido. Por exemplo, se F = 0,5 m, podemos encontrar os pontos da parábola, atribuindo valores de x e calculando os de y, através da Eq. (6.7).*

$$y = \pm\sqrt{2x}. \qquad (6.8)$$

Assim, para *x = 0,6 cm (diâmetro de 1,2 m) teremos y = 1,095m (altura* ***d na figura).***



a) Calcule a posição F do foco, se $d = 0{,}8m$ e o diâmetro da antena é $1\ m$.

b) Meça o diâmetro e a altura **d** de uma antena parabólica real e calcule o foco F. Verifique se esta localização coincide com a posição do coletor de radiação eletromagnética do equipamento.

6.7 Exercícios

6.1 Considere que o lado de um quadrado é expresso pela variável x.

a) Escreva a função que expressa a área *A do quadrado em função do lado x.*

b) Faça uma tabela com valores de *x e A.*

c) Faça um gráfico da função $A(x)$.

d) A dependência entre *A e x é linear ?*

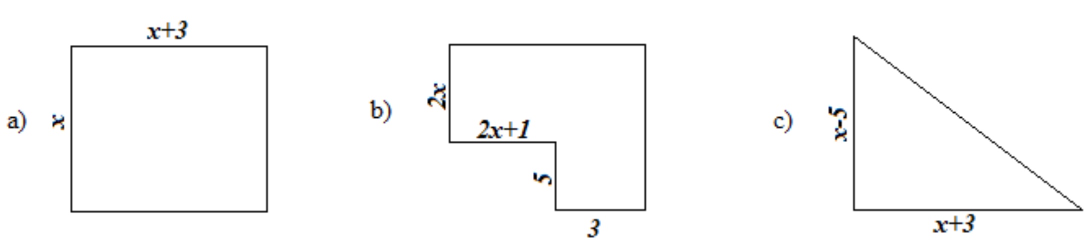
6.2 Considere que o lado de um quadrado é expresso pela função $x+1$.

a) Escreva a função que expressa a área *A do quadrado em função da variável x.*

b) Faça um gráfico da função *A(x) e compare com o gráfico do Ex. 1.*

6.3 Nos Exs. 1 e 2 a função área $A(x)$ tem sentido para $x \leq 0$?

6.4 Determine a função que expressa a área de cada figura.



6.5 Nas funções abaixo: calcule as raízes, identifique os pontos de intersecção com os eixos coordenados, calcule o vértice e faça o gráfico:

a) $f(x) = x^2 - 1$

b) f(x) = $x^2 - 2x - 3$

c) $f(x) = -x^2 - x + 6$

d) $f(x) = x^2 + 2x - 8$

6.6 Identifique os intervalos em que cada função do Ex. 5, é positiva ou negativa. (Faça um desenho do eixo X indicando o sinal da função).

6.7 A área de um círculo é dada pela fórmula: $A = \pi\ r^2$, onde r é o raio. Faça um gráfico da função *A(r),* para $r < 4$ *cm*.

6.8 O deslocamento de uma pedra em queda livre (sem o atrito do ar e influência do vento) é dato pela fórmula: $y(t) = y_o + v_o t - 0{,}5gt^2$, onde y é a posição no eixo Y vertical, apontando para baixo, y_o é a posição inicial (m), v_o é a velocidade inicial (m/s), g é a aceleração da gravidade (m/s^2) e t é o tempo (s).

6.a) Escreva a função *y(t)* sabendo que: $y_o = 1\ m$; $v_o = 10\ m/s$ e $g = 9{,}8\ m/s^2$.

6.b) Faça um gráfico de *y(t)*

6.c) Calcule o tempo para que a pedra atinja a altura máxima

6.d) Calcule a altura máxima

6.e) Calcule o tempo para que a pedra atinja o chão.

6.9 Escreva uma função de 2º grau cujas raízes são:

a) $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$

c) $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$

b) $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$

d) $x_1 = -3$ e $x_2 = 2$

6.10 Faça um esboço do gráfico das funções do 2o grau usando as informações disponíveis.

a) As raízes são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$; o vértice é $V = (2, -2)$

b) As raízes são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$; o vértice é $V = (2, 2)$

c) As raízes são $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$; e a função intersecta Y em $(0, 1)$

d) A função intercecta X em $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$; e o vértice é $V = (1, -2)$

6.11 Escreva a função de 2º grau usando as seguintes informações:

a) O x do vértice é 1; a função intercecta Y na origem; $A = -1$

b) As raízes são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$ e a função intersecta Y em $(0, 3)$

c) As raízes são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$ e a função intersecta Y em $(0, 6)$

d) As raízes são $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$ e a função intersecta Y em $(0, 5)$

6.12 Faça um esboço do gráfico das parábolas:

a) $y^2 = x+5$ c) $y^2 = -x+2$ e) $y = \sqrt{x-2}$ g) $x = y^2 - y - 2$

b) $y^2 = 3x-1$ d) $y = \pm\sqrt{x-3}$ f) $y = -\sqrt{x-2}$ h) $x = -y^2 + y + 2$

6.13 Uma porta de casa colonial tem a forma de uma parábola com a concavidade para baixo. A altura máxima, no eixo central da porta, tem *2,50 m* e a base *2 m*. Para marcar o contorno da porta os pedreiros precisam alguns pontos (*x,y*) para fazer a forma e assentar os tijolos, formando o arco parabólico.

a) Determine a equação da parábola que satisfaz as medidas da porta.

b) Faça uma tabela com valores de *x e y para, ao menos, cinco pontos da parábola.*

c) Faça o gráfico da parábola e indique a posição dos pontos do item (b).

6.14 Considere uma janela na forma de um quadrado com um semicírculo sobre ele. Encontre as dimensões da janela se a área total do quadrado e do semicírculo é *60,96*m^2.

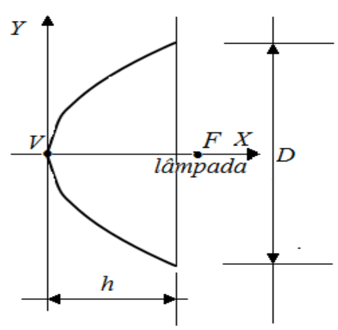
6.15 Em um experimento de cultivo de cenouras foi obtida uma função que relaciona a quantidade de adubo orgânico de galinha (*x, kg*) com a produtividade (*P*, *kg/*m^2):

P(x) = -2,13 x^2 *+ 5,2 x -0,066.*

a) Determine a quantidade de adubo para a maior produtividade

b) Faça o gráfico de *P(x)* indicando o ponto de maior produtividade.

6.16 Um refletor parabólico (paraboloide de revolução) tem uma lâmpada localizada no foco *F = 5 cm*, com a luz direcionada para o arco parabólico, como indica a figura. Qual deve ser o diâmetro *D* para que a profundidade do arco seja *h = 5 cm* ? (Veja a aplicação 6.4)



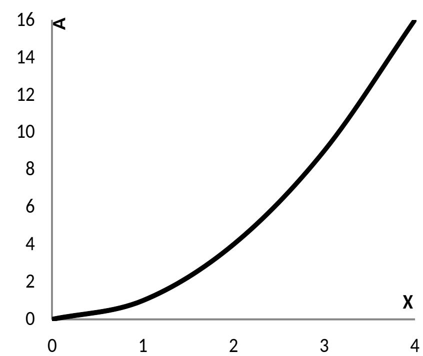
6.8 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

6.1 a) $A = x^2$

b)

X	A
0	0
1	1
2	4
3	9

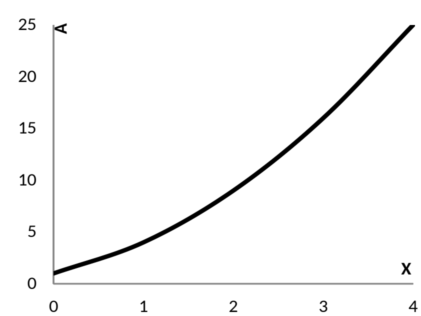
c)



d) Não, a dependência entre A e x é de 2º Grau.

6.2 a) $A = x^2 + 2x + 1$

b)



6.3 No Ex. 1.1 $A(x) = x^2 > 0$ para qualquer x, se $x < 0$ não existe quadrado. Analogamente, no Ex1.2. para x > -1.

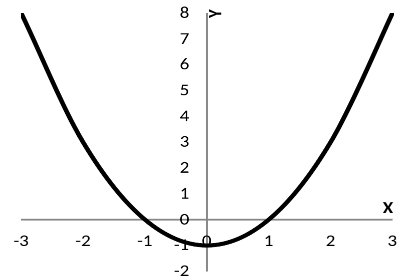
6.4 a) A=x^2+$3x$

b) A=x^2+$8x$+15

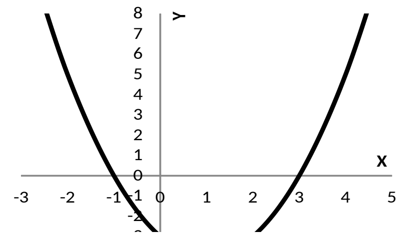
c) $A = \frac{x^2-2x-15}{2}$

6.5

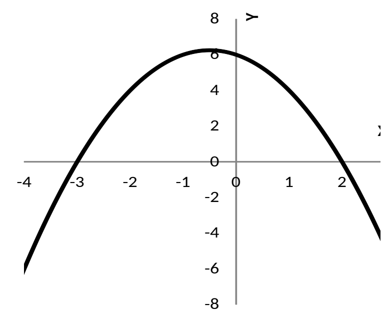
a) Raízes: x_1=-1; x_2=1. Intersecção com Y em (0,-1); Intersecção com X em (-1,0) e (1,0); V=(0,-1)



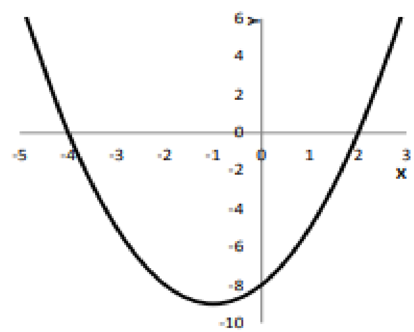
b) Raízes: x_1=-1; x_2=3. Intersecção com Y em (0,-3); Intersecção com X em (-1,0) e (3,0); V=(1,-4)



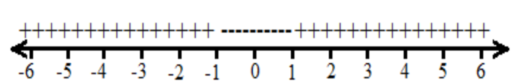
c) Raízes: x_1=-3; x_2=2. Intersecção com Y em (0,6); Intersecção com X em (-3,0) e (2,0); V=(-1/2,25/4)



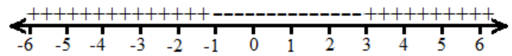
d) Raízes: x_1=-4; x_2=2. Intersecção com Y em (0,-8); Intersecção com X em (-4,0) e (2,0); V=(-1,-9).



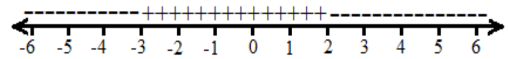
6.6 a) Positiva $x < -1$ ou $x > 1$; Negativa $-1 < x < 1$



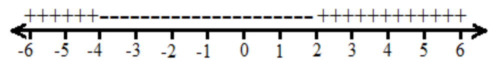
b) Positiva x<*-1* ou x>*3;* Negativa -1 < x<*3*



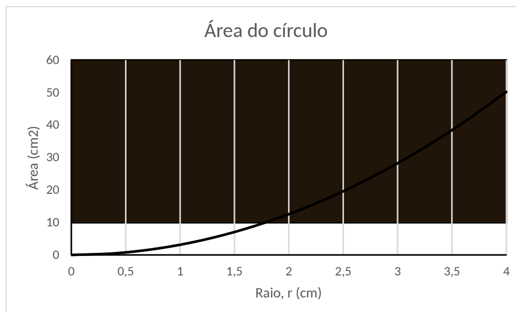
c) Positiva *-3* < x<*2;* Negativa x<*-3* ou x>*2*



d) Positiva x<*-4* ou x>*2*; Negativa *-4* < x <*2*

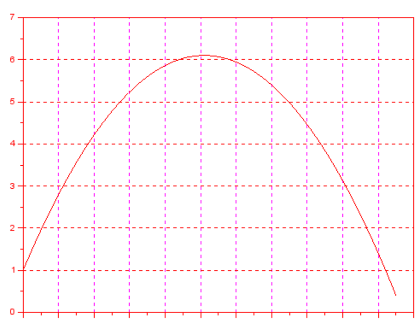


6.7



6.8 a) 1+10t-4.9t^2

b)



c) t=1,02 s

d) ymáx = 6,102 m

e) t = 2,13 s.

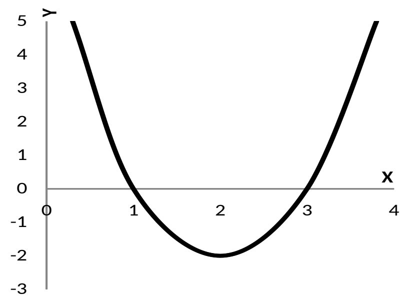
6.9 a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

b) $g(x) = x^2 - 7x + 12$

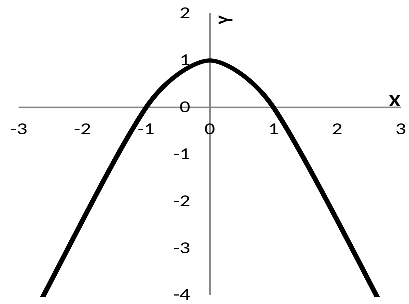
c $h(x) = x^2 + x - 2$

d) $i(x) = x^2 + x - 6$

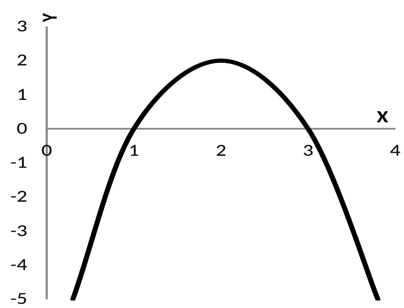
6.10



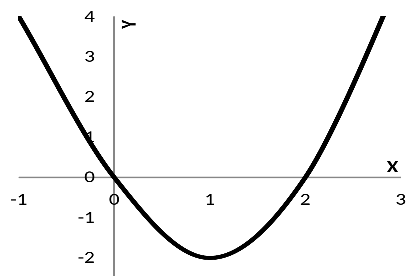
(a)



(c)



(b)



(d)

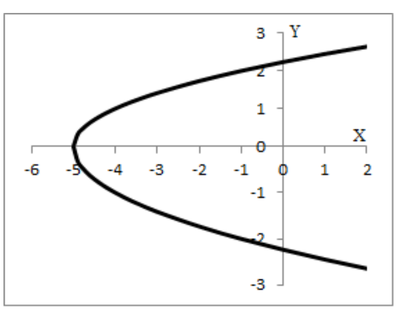
6.11 a) $f(x) = -x^2 + 2x$

b) $g(x) = x^2 - 4x + 3$

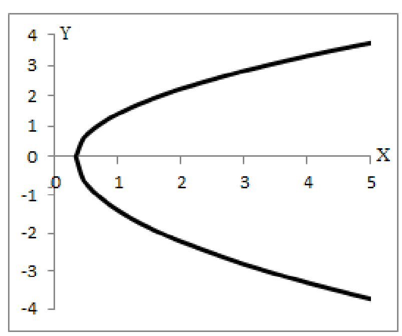
b) $h(x) = 2x^2 - 8x + 6$

c) $i(x) = -\frac{5}{4}x^2 + 5$

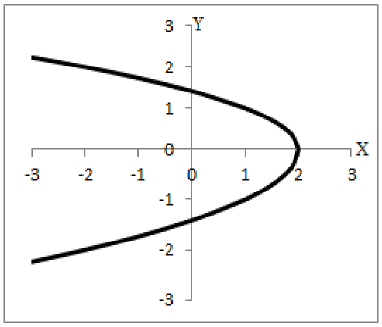
6.12



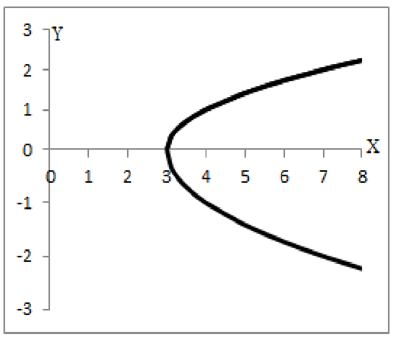
(a)



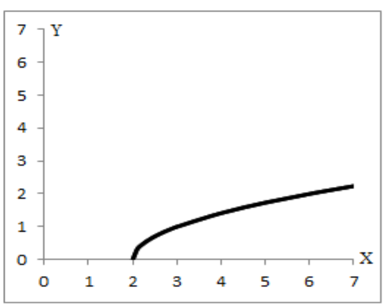
(b)



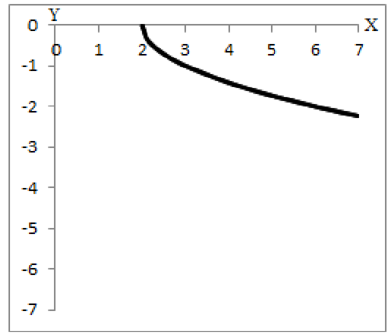
(c)



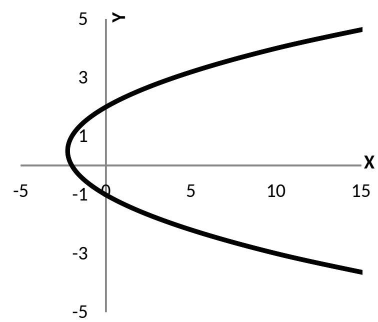
(d)



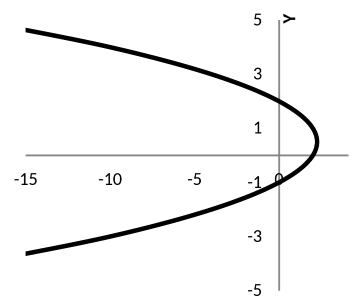
(e)



(f)



(g)



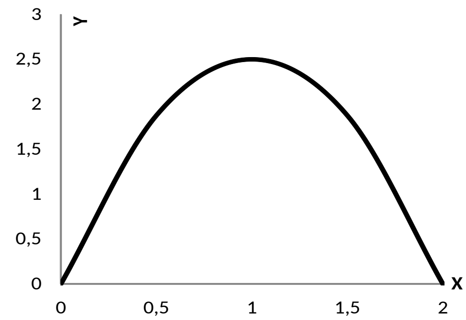
(h)

6.13 a) $f(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 5x$

b)

x	y
0	0
1/2	1,875
1	2,5
3/2	1,875
1	0

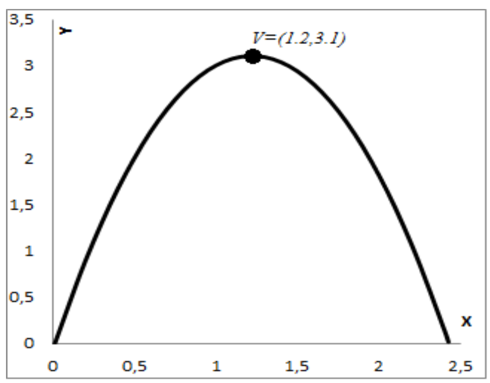
c)



6.14 Lado do quadrado = 6,6159 m e raio do semicírculo = 3,3079 m.

6.15 a) $x = 1,22$ e $P_{máx} = 3,107$.

b)



6.16 $D = 20cm$.

Capítulo 7

Inequações

7.1 Introdução

As soluções de equações polinomiais têm um número finito de soluções. As de 1^o Grau têm uma, as de 2^o Grau podem ter até duas, e assim por diante. Outros problemas podem ter infinitas soluções:

Observe os seguintes exemplos:

Exemplo 7.1.1. Quantos alunos na sua turma têm mais de *20 anos?*

Solução: evidentemente a solução depende da idade dos alunos da turma. Porém, podemos afirmar que podem ocorrer diferentes tipos de soluções:

1. Nenhum aluno tem mais de 20 anos. Se x é o número de alunos com mais de *20* anos, a solução é $S = \{\ \}$.
2. Existe um número finito de alunos com mais de 20 anos. Nesse caso, S = $\{$ x/ x > 0$\}$ ■

Exemplo 7.1.2. Existe algum número real cujo dobro mais cinco seja maior do que zero? Quantos? Quais ?

Solução: Seja *x o número procurado. Podemos escrever* "*dobro de x mais cinco seja maior do que zero*" *em linguagem matemática:*

$2x + 5 > 0.$

Não é difícil verificar que existem infinitos *x reais que satisfazem esta desigualdade: -1, 0 ,* $\frac{1}{2}$*, 1 , 2, 3, ...*

Observe (fazendo testes particulares) que se $x = -5/2$, *temos* $2x + 5 = 0$ *e que*

se $x < -5/2$ *temos* $2x + 5 < 0$ *e que*

se $x > -5/2$ *temos* $2x + 5 > 0$.

Assim, podemos concluir que $S = \{\, x \,/\, x > -5/2\}$ ■

Neste capítulo vamos aprender operar com desigualdades e resolver com segurança problemas semelhantes ao Ex.1.2.

7.2 Inequações: definição e propriedades

Definição 7.2.1. Uma inequação é uma desigualdade de duas expressões matemáticas.

Exemplos:

a) $-x+5 > x-\frac{1}{3}$

b) $x^2+2 \leq 1$

c) $\frac{x}{2}+\frac{x-1}{3} \geq 3$ ■

A desigualdade numérica $2 < 3$ é verdadeira. Observe as seguintes operações:

1. Adicionando 10 em ambos os lados da desigualdade, temos:
   2 + 10 < 3 + 10
   12 < 13. A nova desigualdade permanece verdadeira.
2. Adicionando -10 em ambos os lados da desigualdade, temos:
   2 + (-10) < 3 +(-10)
   -8 < -7. A nova desigualdade permanece verdadeira.
3. Multiplicando 10 em ambos os lados da desigualdade, temos:
   2 · 10 < 3 · 10
   20 < 30. A nova desigualdade permanece verdadeira.
4. Multiplicando -10 em ambos os lados da desigualdade, temos:

2 · (-10) < 3 · (-10)

-20 < -30. A nova desigualdade NÃO PERMANECE VERDADEIRA!

Observe que, com exceção do produto por número negativo, opera-se com as inequações de forma semelhante às equações. Veja a seguir as propriedades das inequações.

Propriedades das inequações:

Sejam *u, v e w números reais ou variáveis e c um número real.*

1. **Transitiva:** Se $u < v$ e $v < w$ então $u < w$. Ou Se $u > v$ *e* $v > w$ *então* $u > w$.
2. **Adição:** Se $u < v$, então $u \pm w < v \pm w$. Ou Se $u > v$, *então* $u \pm w > v \pm w$.
3. **Multiplicação**: Se $u < v$ e $c > 0$ então $u \cdot c < v \cdot c$. Se $u < v$ e $\boldsymbol{c < 0}$ ***então*** $\boldsymbol{u \cdot c > v \cdot c}$.

Exemplo 7.2.1. Dada a desigualdade *5 > 3, verifique se as desigualdades permanecem verdadeiras após a operação proposta:*

1. Adicionar +4 em ambos os lados.

2. Adicionar - 4 em ambos os lados.

3. Multiplicar por (+2) em ambos os lados.

4. Multiplicar por (-2) em ambos os lados.

Solução:

1. *5+4 > 3+4*

   9 > 7 . A desigualdade permanece verdadeira. (Propriedade da adição)

2. *5 - 4 > 3 - 4*

   1 > -1 . A desigualdade permanece verdadeira. (Propriedade da adição)

3. *5 · (+2) > 3 · (+2)*

   10 > 6 . A desigualdade permanece verdadeira. (Propriedade da Multiplicação por um número positivo)

4. *5 · (-2) > 3 · (-2)*

-10 > -6 . A desigualdade NÃO permanece verdadeira.

Nesse caso, para que a igualdade fique verdadeira é necessário **INVERTER A DESIGUALDADE: (Propriedade da Multiplicação por um número NEGATIVO):**

-10 < -6 ■

As propriedades das desigualdades são usadas para resolver inequações, como veremos nos próximos itens.

EXERCÍCIOS 7.2

7.2.1 Dada a desigualdade 1 < 2 (que é verdadeira):

(a) Adicionando -5 em ambos os lados, a desigualdade permanece verdadeira?

(b) Multiplicando ambos os lados por (+5), a desigualdade permanece verdadeira?

(c) Multiplicando ambos os lados por (-5), a desigualdade permanece verdadeira?

7.2.2 Sejam M, N e P três números reais.

(a) Se M > N e N > P , o que se pode afirmar sobre M e P ?

(b) Se M < N e N < P , o que se pode afirmar sobre M e P ?

7.2.3 Compare as propriedades das equações com as das inequações. Em que operação elas se diferenciam?

7.2.4 Dada a inequação $3x + 4 < 0$. A inequação é verdadeira para:

a) $x = 1$?

b) $x = -2$?

c) $x = -4/3$?

d) $x = -3$?

7.2.5 Dada a inequação $-x+2 \geq 0$. A inequação é verdadeira para:

a) $x = 1$?

b) $x = 2$?

c) $x = 3$?

d) $x = -3$?

7.2.6 Use as propriedades da adição e multiplicação para que o lado direito das inequações torne-se nulo:

a) $x + 2 > -x +3$

b) $2 + 3x < 4x +1$

c) $\frac{1}{2}+2x \geq \frac{4}{3}$

d) $\frac{3}{4}x - \frac{2}{3} \leq 2$

7.2.7 Use as propriedades da adição e multiplicação para isolar x do lado esquerdo da inequação:

a) $3x - 8 < x + 4$

b) $2x - 12 < 4x + 6$

c) $3+\frac{1}{2}x \geq 5x$

d) $\frac{x+1}{4} \leq \frac{x-1}{2}$

7.2.8 Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras. Justifique sua resposta. Considere *a um número real.*

a) $a^2 > 0 => a > 0$

b) $a > 3 => a \geq 3$

c) $a3 > 0 => a > 0$

d) $a \geq 3 => a > 3$

7.3 Inequações de 1º Grau

Definição 7.3.1. Uma inequação do primeiro grau é uma desigualdade de expressões algébricas que pode ser reduzida à forma *ax + b < 0 , para a ≠ 0.*

OBSERVAÇÃO: Onde foi usado "<" ***pode ser também*** **">" , "≤ "** ***ou*** **"≥ " .**

Exemplo 7.3.1. Resolva a inequação *- x +5 < 3x - 4 para x R.*

Solução: Resolver uma inequação significa determinar os possíveis valores da incógnita (nesse caso *x) que satisfazem a desigualdade. Faremos isso de forma semelhante às equações, porém usando as propriedades das inequações.*

Para termos *x apenas do lado esquerdo, podemos adicionar (-3x) em ambos os lados da desigualdade (Propriedade da Adição):*

(-3x)- x +5 < (-3x)+3x - 4

-4x +5 < - 4.

Para termos apenas números no lado esquerdo, podemos adicionar (*-5) em ambos os lados da desigualdade (Propriedade da Adição):*

-4x +5 + (-5) < - 4+(-5).

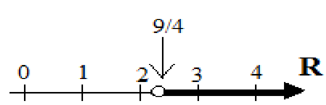
-4x < - 9.

Finalmente, para termos apenas *x no lado esquerdo, multiplicamos a inequação por (-1/4) e invertemos a desigualdade, pois -1/4 < 0. (Propriedade da multiplicação)*

$$-4x \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) > -9 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

x > 9/4 . Portanto, S={ $x \in$ ***R / x > 9/4*** } **.**

Representando a solução na reta real, temos:



∎

Exemplo 7.3.2. Resolva a inequação $\frac{x}{2} \geq \frac{3x+1}{3}$ *para x R.*

Solução: Para evitar trabalhar com denominadores, multiplicamos a inequação por (*6). (Propriedade da multiplicação)*

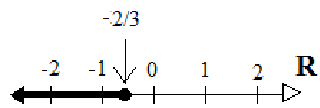
$$6 \cdot \frac{x}{2} \geq \frac{3x+1}{3} \cdot 6$$

3x $\geq$ *6x + 2 . Adicionamos (-6x) (Propriedade da Adição)*

-3x $\geq$ *2 . Dividimos por (-3) (Propriedade da Multiplicação por número negativ2o)*

$x \leq -\frac{2}{3}$. Portanto, *S*={ $x \in$ ***R*** / ***x*** $\leq$ ***-2/3*** } **.**

Representando a solução na reta real, temos:



■

Solução da inequação de primeiro grau com o lado direito nulo

A resolução de uma inequação do 1º Grau também pode ser obtida utilizando a redução à forma *ax + b < 0 , para a* $\neq$ *0. O sinal da desigualdade pode ser também* "$>$" , "$\leq$ " *ou* "$\geq$ " *. Observemos que sempre é possível escrever essa forma com a > 0. Por exemplo,*

Se temos *-2x + 5 > 0 podemos multiplicar por (-1) obtendo, 2x - 5 < 0.*

Os seguintes passos levam à solução da inequação de 1º Grau:
1º) Passo: Encontrar a solução da equação correspondente *ax + b = 0 que é x = -b/a.*
2º) Passo: Verificar o sinal da desigualdade :
1. Se for ">" então a solução da inequação é: *S*={ $x \in$ ***R*** / *x >* *-b/a* }
2. Se for "<" então a solução da inequação é: *S*={ $x \in$ ***R*** / *x <* *-b/a* }
3. Se for "$\leq$ " então a solução da inequação é: *S*={ $x \in$ ***R*** / *x* $\leq$ *-b/a* }
4. Se for "$\geq$ " então a solução da inequação é: *S*={ $x \in$ ***R*** / *x* $\geq$ *-b/a* }

Exemplo 7.3.3. Resolva a inequação $\frac{x}{2} \geq \frac{3x+1}{3}$ *para x R reduzindo a inequação à forma ax + b* $\leq$ *0.*

Solução: Multiplicando a inequação por (*6) e adicionado (-6x), obtemos (ver Ex. 3.2):*

3x $\geq$ *6x + 2 . Adicionando (-6x -2), obtemos*

-3x -2 $\geq$ *0. Multiplicnado por (-1), obtemos*

3x +2 $\leq$ *0. A inequação está na forma ax + b* $\leq$ *0 com a > 0 .*

1º) Passo: A solução da equação correspondente é *x = -2/3.*

2º) Passo: o sinal da inequação com *a > 0 é* "$\leq$ " *. Então a solução é (iii):*

S={ $x \in$ ***R*** / ***x*** $\leq$ ***-2/3*** } ■

Exemplo 7.3.4. Resolva a dupla inequação $-\frac{3}{2} \leq \frac{x+1}{2} < 2$ *para x R.*

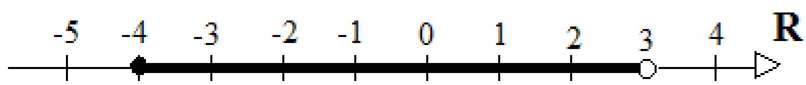
Solução: Usaremos as propriedades das inequações para isolar *x entre as desigualdades. Para evitar os denominadores, multiplicamos a dupla inequação por 2.*

- 3 $\leq$ x+1 < 4. Adicionando (-1) em cada membro, temos:

- 3 +(-1) $\leq$ x+1 +(-1) < 4+(-1)

- 4 $\leq$ x < 3. Portanto, S=$\{$ *x* $\in$ ***R / -4*** $\leq$ ***x < 3***$\}$ **.**

Representando a solução na reta real, temos:



EXERCÍCIOS 7.3

7.3.1 Resolva as inequações do primeiro grau usando as propriedades:

a) *2x - 1* $\leq$ *3x +3*

b) *2(5 - x) + 2(3x-1)* $\geq$ *2x + 1*

c) $\frac{5x+7}{4} \leq -2$

d) $\frac{2-x}{3} + \frac{3x-1}{2} < -1$

7.3.2 Represente as soluções do Exercício anterior na reta real.

7.3.3 Resolva as inequações de primeiro grau anulando o lado direito:

a) $\frac{x-2}{3} + \frac{x+2}{3} < 2$

b) $\frac{2x-1}{5} \leq \frac{x+3}{2} + 3x$

c) $\frac{1}{6} + \frac{x+1}{3} > \frac{2}{3}$

d) $\frac{3x+1}{3} \geq \frac{x-3}{4} - \frac{3x+1}{6}$

7.3.4 Resolva as inequações duplas de primeiro grau:

a) 2 $\leq$ *x + 6 < 9*

b) $4 \geq \frac{y-3}{5} \geq -1$

c) -1 $\leq$ *-3x + 2 < 5*

d) $-2 \leq \frac{2t+3}{3} \leq \frac{5}{4}$

7.3.5 Represente as soluções do Exercício anterior na reta real.

7.4 Inequações do 2º Grau

Definição 7.4.1. Uma inequação do segundo grau é uma desigualdade de expressões algébricas que pode ser reduzida à forma

$ax^2 + bx + c < 0$ para a $\neq 0$.

OBSERVAÇÃO: Onde foi usado "<" ***pode ser também*** **">" , "$\leq$" *ou* "$\geq$" .**

A resolução de uma inequação do 2º Grau pode ser obtida utilizando a redução à forma

$x^2 + bx + c < 0$. (Onde foi usado "<" pode ser também ">" , "$\leq$" ou "$\geq$")

seguindo os seguintes passos:

1º) Passo: Encontrar as soluções reais (se existirem) da equação $ax^2 + bx + c = 0$, que chamaremos $x_1 e x_2$ e consideraremos x1 < x2.

2º) Passo: classificar as raízes:

1º) Caso: raízes não reais (nesse caso o discriminante b^2 ***- 4ac < 0)***

1. Se o sinal da desigualdade for "<" ou "$\leq$" , então S={ }
2. Se o sinal da desigualdade for ">" ou "$\geq$" , então S={ $x \in$ ***R***} .

2º) Caso: raízes reais idênticas: $x_1 = x_2$ ***(nesse caso o discriminante*** $b^2 - 4ac = 0$***)***

1. Se o sinal da desigualdade for "<" , então S={ }
2. Se o sinal da desigualdade for "$\leq$" , então S={ $x \in$ ***R*** / x **=** x_1 } .
3. Se o sinal da desigualdade for ">" , então S={ $x \in$ ***R*** / $x \neq x_1$ }
4. Se o sinal da desigualdade for "$\geq$" , então S={ $x \in$ ***R***}

3º) Caso: raízes reais distintas: $x_1 \neq x_2$ ***(nesse caso o discriminante*** $b^2 - 4ac > 0$***)***

1. Se o sinal da desigualdade for "<" , então S={ $x \in$ ***R*** / x_1 < x < x_2}
2. Se o sinal da desigualdade for "$\leq$" , então S={ $x \in$ ***R*** / $x_1 \leq x \leq x_2$}
3. Se o sinal da desigualdade for ">" , então S={ $x \in$ ***R*** / x < x_1 ou x > x_2 }
4. Se o sinal da desigualdade for "$\geq$" , então S={ $x \in$ ***R*** / $x \leq x_1$ ou $x \geq x_2$}

Exemplo 7.4.1. Resolva a inequação $x^2 + 2x \leq 2x2 + 3 parax \in R$.

Solução: Precisamos reduzir a inequação dada à forma $ax^2 + bx + c \leq$ ou ≥ 0. Para isso, adicionamos (-2x2 - 3) em ambos os lados e obtemos:

$-x^2 + 2x - 3 \leq 0$ **. Multiplicando por (-1), para que a > 0, temos:**

$x^2-2x+3\geq 0$. **(Observe que o sinal da desigualdade ficou** "$\geq$ ")

1º) Passo: A equação $x^2-2x+3=0$ não tem raízes reais.

2º) Passo: como as raízes não são reais, temos o 1º Caso. Como o sinal da desigualdade é "$\geq$ " *, temos a situação (ii). Então, a solução será:*

S=$\{\in x\, \boldsymbol{R}\}$ ***. Ou seja, qualquer número real satisfas a inequação dada*** ■

Exemplo 7.4.2. Resolva a inequação $x^2-x<x+3$ para $x\in R$.

Solução: Precisamos reduzir a inequação dada à forma $ax^2+bx+c<$ ou >0. Para isso, adicionamos $(-x-3)$ em ambos os lados e obtemos:

$x^2-2x-3<0$.

1º) Passo: As raízes da equação $x^2-2x-3=0$ são $x_1=-1$ e $x_2=3$.

2º) Passo: como as raízes são reais e distintas, temos o 3º Caso. Como o sinal da desigualdade é "<" *, temos a situação (i). Então, a solução está entre as raízes:*

S=$\{x\in R/-1<x<3\}$ ■

EXERCÍCIOS 7.4

7.4.1 Resolva as inequações de segundo grau para $x\in R$:

a) $x^2 - 4x < 0$

b) $x^2 - 4x + 3 > 0$

c) $x^2 + 6x + 9 < 0$

d) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$

e) $x^2 + 2x + 1 \geq 0$

f) $x^2 - 9 < 0$

g) $x^2 - 9 > 0$

h) $x^2 + 9 \leq 0$

i) $x^2 - 9 \geq 0$

7.4.2 Represente as soluções do Exercício anterior na reta real.

7.5 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESPOSTAS 7.2

7.2.1 a) Sim; b) Sim; c) Não

7.2.2 a) M > P; b) M < P

7.2.3 Na multiplicação de um número negativo por uma inequação deve-se inverter o sentido da desigualdade.

7.2.4 a) Não; b) Sim; c) Não; d) Sim

7.2.5 a) Sim; b) Sim; c) Não; d) Sim

7.2.6 a) 2x -1 > 0

b) -x +1 < 0

c) 2x - 5/6 $\geq$ 0

d) 9x -32 $\leq$ 0

7.2.7 a) $x < 6$

b) $x > -9$

c) $x \leq \frac{2}{3}$

d) $x \geq 3$

RESPOSTAS 7.3

7.3.1 a) S=$\{x \in R/x \geq -4\}$

b) S=$\{x \in R/x \geq -7/2\}$

c) S=$\{x \in R/x \leq 3\}$

d) S=$\{x \in R/x < -1\}$

7.3.3 a) $2x - 6 < 0$ e S=$\{x \in R/x < 3\}$

b) $31x + 17 \geq 0$ e S=$\{x \in R/x \geq -17/31\}$

c) $2x - 1 > 0$ e S=$\{x \in R/x > 1/2\}$

d) $x + 1 \geq 0$ e S=$\{x \in R/x \geq -1\}$

7.3.4 a) S=$\{x \in R/-4 \leq x < 3\}$

b) S=$\{y \in R/17 \geq y \geq -2\}$

c) S=$\{x \in R/1 \geq x > -1\}$

d) S=$\{t \in R/-9/2 \leq t \leq 3/8\}$

RESPOSTAS 7.4

7.4.1 a) S=$\{x \in R/0 < x < 4\}$

b) S=$\{x \in R/x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

c) S= $\emptyset$

d) S=$\{-2\}$

e) S=$\{x \in R\}$

f) S=$\{x \in R/ -3 < x < 3\}$

g) S=$\{x \in R/x < -3$ ou $x > 3\}$

h) S=$\{x \in R/x \leq -3$ ou x $\geq 3\}$

i) S=$\{x \in R/x \leq -3$ ou x $\geq 3\}$

Capítulo 8

Potências e funções exponenciais

Capítulo 9

Logarítmos e função logarítmica

Capítulo 10

Trigonometria e funções trigonométricas

10.1 Introdução

A trigonometria é a área da Matemática em que são estudadas as relações entre as medidas do triângulo retângulo. O interesse nesse assunto, provavelmente foi motivado pela necessidade de calcular distâncias e ângulos em problemas de Astronomia, Agrimensura e Navegações, há mais de 2.000 anos a.C, com os egípcios e babilônios. Na Grécia, Hiparco de Nicéia e Ptolomeu deram imensa contribuição, construindo tabelas de valores das razões trigonométricas, na segunda metade do século II a.C. O triângulo retângulo com lados inteiros já era conhecido dos egípcios, mas atribui-se o enunciado à Pitágoras ($\sim$ 570 a 496 a.C.).

Muitas soluções de problemas de geometria plana ou espacial são elaboradas com o uso das propriedades do triângulo retângulo. São exemplos a medição de distâncias, inclinações, áreas e volumes na topografia (medição de terras), nas engenharias (volume de madeira, peças, centros de massa) e na Física (módulo de vetores, decomposição de forças, etc.).

As funções trigonométricas são usadas como modelo matemático para descrever o comportamento de variáveis cíclicas como ondas mecânicas, corrente e tensão elétrica, oscilações de pêndulo, etc.

10.2 Ângulos, arcos e circunferência

Definição 10.2.1. Sejam duas retas r e s em um plano, com um ponto de interseção V (vértice). O ângulo entre r e s é a abertura entre estas retas.

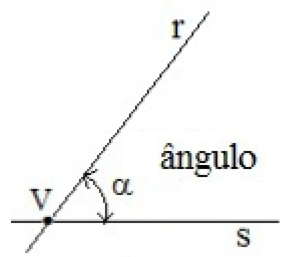


Figura 10.2.1: ângulo

A unidade de medida de ângulos, o grau, é obtida dividindo a volta inteira em 360 partes. O transferidor (Fig. 10.2.2) é um instrumento para medição de ângulos.

1 volta corresponde a 360^o;
1/360 da volta inteira = 1 grau = 1°

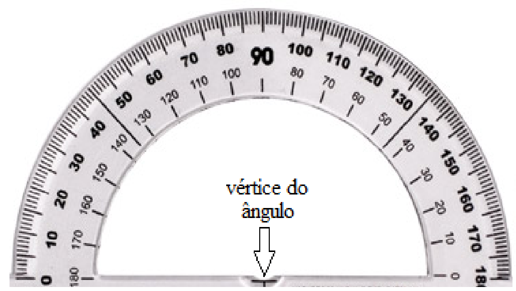


Figura 10.2.2: Transferidor

O ângulo de 90°é chamado de *ângulo reto* (ver Fig. 10.2.3)

O ângulo de 180°é chamado de *ângulo raso*. (ver Fig. 10.2.3)

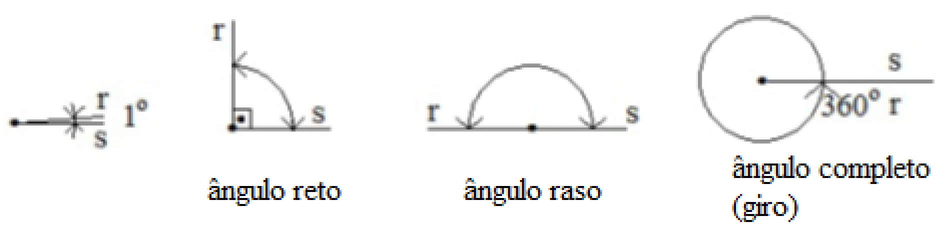


Figura 10.2.3: Grau e ângulos especiais

Para medições mais precisas, são usadas subunidades do grau:

1°= 60' (60 minutos)
1' = 60" (60 segundos) 1°= 60' · 60 = 3600"

Exemplo 10.2.1. (a) Quantos graus tem em 7270” ?

(b) Quantos segundos tem em 1°2’ 30” ?

Solução:

(a) Com base na relação entre graus, minutos e segundos, tem-se:

Dividindo 7270” /60 = 121’ e resta **10**” .

Dividindo 121’/60 = **2**° e resta **1’**.

Então: 7270” = 2°1’ 10” .

(b) Com base na relação entre graus, minutos e segundos, tem-se:

1°· 3600 = **3600**”

2’ · 60 = **120**”

Então, 1°2’ 30” = 3600” + 120” + 30” = 3750” ■

A *circunferência* é um arco, cujos pontos estão a mesma distância *r* (raio) de um ponto central. Na Fig. 2.4(a), os pontos A e A’ estão sobrepostos. Abrindo a circunferência no ponto A e estendendo-a, tem-se o comprimento da circunferência:

$$C = 2\,\pi\,r \qquad (10.1)$$

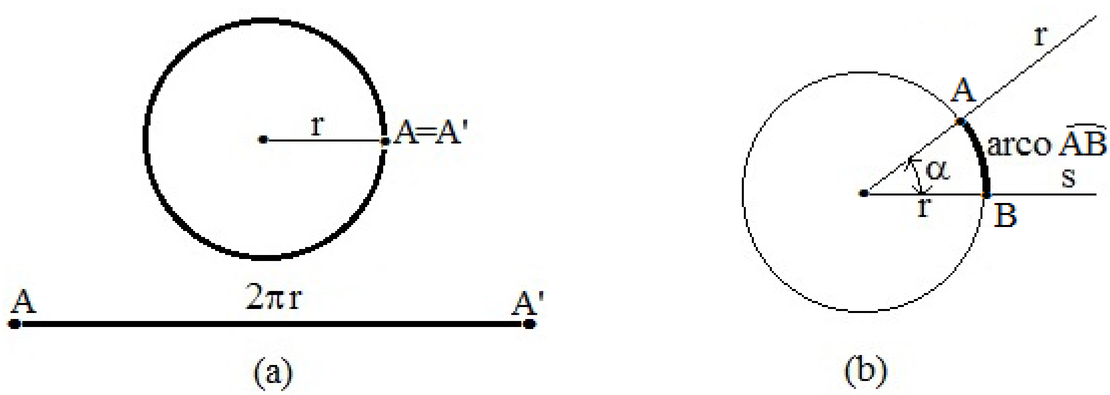


Figura 10.2.4: (a) circunferência (b) arco e ângulo

O *arco AB* de um *ângulo* é o comprimento sobre a circunferência de raio *r*, limitado pelas retas *r* e *s* que definem o ângulo, como mostra a figura 2.4(b).

A relação entre *ângulos* e *arcos* é dada pela proporção:

Arco		Angulo
C = 2πr	$\rightarrow$	360^o
Arco	$\rightarrow$	α

Resolvendo a proporção para o arco, tem-se:

$Arco = \frac{\alpha\pi r}{180}$ ou $Arco = \frac{\alpha\pi}{180}$, se *r = 1* (10.2)
u.c. (unidade de comprimento).

Resolvendo a proporção para o *ângulo* , com *r = 1* u.c., tem-se:

$\alpha = \frac{arco180}{\pi}$ (10.3)

Exemplo 10.2.2. Calcule o comprimento da circunferência de uma lata cilíndrica, cujo raio mede *8 cm*.

Solução: Substituindo *r = 8 cm.* na Eq. 2.1, tem-se *C = 2 π 8 = 16 π cm*, o que dá

C = 50,26 cm ■

Exemplo 10.2.3. Determine os arcos correspondentes aos seguintes ângulos: 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°e 360°, considerando o raio igual a *1 u.c.*

Solução: Utilizando a Eq. 2.3, substitui-se o ângulo dado no lugar de e obtem-se as correspondências de ângulos e arcos, apresentadas na tabela abaixo.

Ângulos	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Arcos	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Exemplo 10.2.4. Determine o arco de um ângulo de *120*° sobre:

(a) uma circunferência cujo raio é 1 cm

(b) uma circunferência cujo raio é 2 cm.

Solução: Substituindo = 120°na Eq. 2.1, tem-se:

1. $Arco = \frac{120\cdot\pi\cdot 1}{180} = \frac{2\pi}{3} \sim 2,0943cm.$
2. $Arco = \frac{120\cdot\pi\cdot 2}{180} = \frac{4\pi}{3} \sim 4,1886cm$ ■

Definição 10.2.2. Dois ângulos e são *complementares* quando sua soma é 90°.

+ = *90°*

Definição 10.2.3. Dois ângulos e são *suplementares* quando sua soma é 180°.

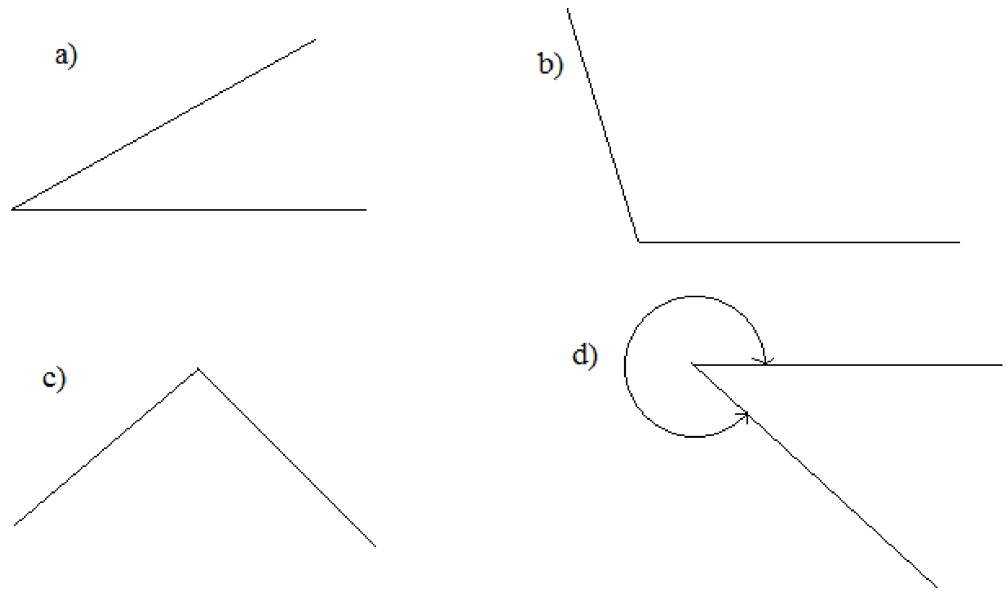
+ = *180°*

Definição 10.2.4. Dois ângulos e são *replementares* quando sua soma é 360°.

+ = *360°*

EXERCÍCIOS 10.2

10.2.1 Use o transferidor para medir os seguintes ângulos:



10.2.2 Calcule o comprimento da circunferência, cujo raio mede:

a) $r = 4\ cm$

b) $r = 0{,}5\ m$

c) $r = 10\ m$

d) $r = 2{,}5\ km$

10.2.3 Calcule o raio cuja circunferência mede:

a) $c = 6{,}28\ cm$

b) $c = 10\ m$

c) $c = 2{,}5\ cm$

d) $c = 100\ mm$

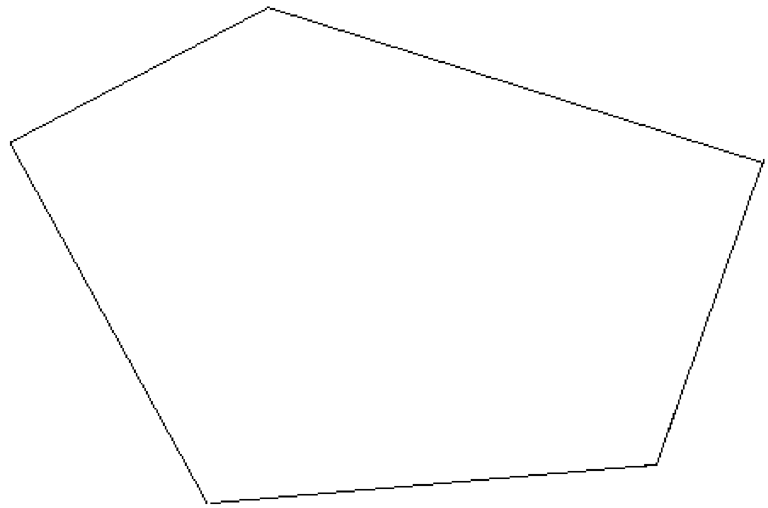
10.2.4 O raio oficial de uma bola de futebol deve estar entre 10,83 cm e 11,15 cm. Quanto mede a circunferência para estes raios?

10.2.5 Calcule a densidade de uma esfera cuja circunferência é *0,32 m* e a massa é *3 kg*.

10.2.6 a) Meça os ângulos internos do polígono e adicione-os.

b) Verifique se a soma dos ângulos internos desse polígono satisfaz a fórmula

$S_n = 180\ (n\text{-}2)$ onde S_n é a soma dos ângulos internos e n é o número de ângulos.



10.2.7 Determine os arcos correspondentes aos seguintes ângulos, considerando o raio da circunferência igual a *1 u.c*.

a) 12°

b) 150°

c) 120°

d) 330°

e) 180°

f) 300°

g) 210°

10.2.8 Determine os ângulos correspondentes aos seguintes arcos, considerando o raio da circunferência igual a *1 u.c*.

a) $\pi/4$

b) $2\pi/3$

c) $3\pi/4$

d) $5\pi/4$

e) $5\pi/6$

f) $4\pi/3$

g) $7\pi/3$

10.2.9 Um cano de esgoto tem o diâmetro interno de 100mm e espessura 1,5 mm. Determine a circunferência externa.

10.2.10 Três ângulos internos de um quadrilátero medem: $\hat{A}_1$ = 80°30' 12" ; $\hat{A}_2$ = 95°35' 23" e $\hat{A}_3$ = 84°46' 18" . Calcule o quarto ângulo, sabendo que a soma de todos os ângulos internos do quadrilátero deve ser *360°*.

10.2.11 Um triângulo tem dois ângulos iguais e um diferente, que mede 59°3' 10" . Determine a medidas dos ângulos iguais.

10.2.12 Dados os ângulos, determine o ângulo complementar, suplementar e replementar:

a) 50°

b) 15°

c) 75°

d) 80°

e) 20°

10.2.13 Qual é o ângulo complementar de 34°35' 20" .

10.3 Triângulo retângulo

Definição 3.1 - Um triângulo é *retângulo* se um dos ângulos internos é reto.

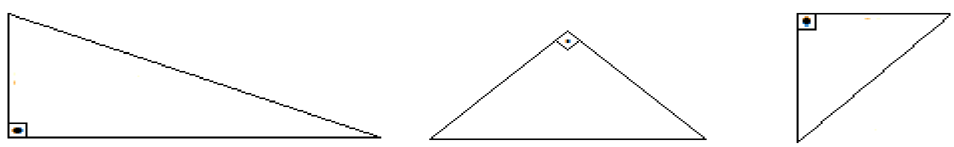
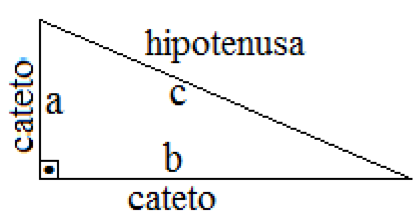


Figura 3.1 - Triângulos retângulos

No triângulo retângulo:

- o lado maior chama-se *hipotenusa*.

- os demais lados chamam-se *catetos*.

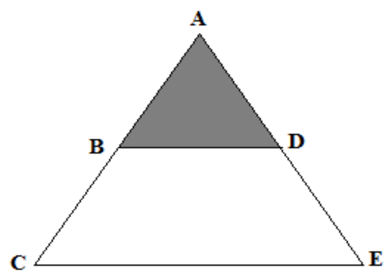


Definição 3.2 - Dois triângulos são semelhantes quando os ângulos correspondentes são congruentes (tiverem a mesma medida).

Propriedade dos triângulos semelhantes:

Se dois triângulos são semelhantes então as razões entre seus lados correspondentes são iguais.

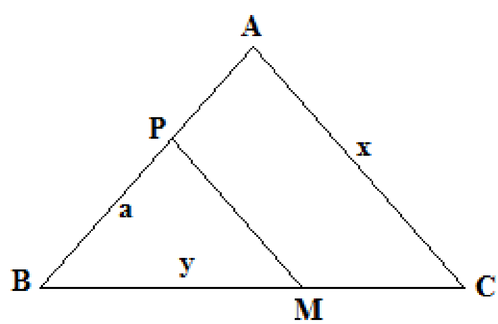
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$$



Exemplo 10.3.1. Dado os triângulos ABC e PQM, determine a medida dos lados indicados com letras *a* e *x*, sabendo que:

$AB = 6cm$; $PM = 5cm$; .

$BC = 9cm$ e $BM = 3cm$.



Solução: Usando a proporção entre os lados dos triângulos semelhantes, tem-se:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PM} = \frac{BC}{BM}$$

Substituindo os dados disponíveis, tem-se:

$$\frac{6}{a} = \frac{x}{5} = \frac{9}{3}$$

Resolvendo a segunda igualdade para x, tem-se: *x = 15 cm*.

Substituindo *x = 15 cm* na segunda razão e resolvendo a primeira igualdade para *a*, tem-se: a = *2 cm* ■

Propriedades dos triângulos retângulos

Propriedade 1: Sejam e os dois ângulos internos não retos de um triângulo retângulo. Então e são complementares.

Demonstração: Pela fórmula da soma dos ângulos internos dos polígonos, para $n = 3$, tem-se:

$$S_3 = 180\,(3\text{-}2) = 180°.$$

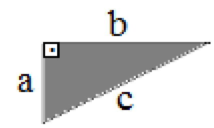
Somando os ângulos internos do triângulo retângulo, tem-se:

$+ + 90° = 180°$ ou

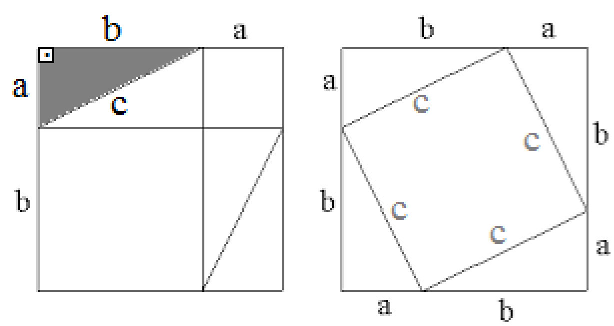
$+ = 90°$. Portanto, e são complementares ■ (3.1)

Propriedade 2 (Teorema de Pitágoras): Se a e b são os catetos e c é a hipotenusa de um triângulo retângulo. Então, $a^2 + b^2 = c^2$.

Demonstração: Seja o triângulo retângulo da figura ao lado.



Com este triângulo, pode-se construir dois quadrados, cujos lados medem $(a + b)$, portanto de áreas equivalentes, cada um dividido como ilustram as figuras abaixo.



A área do primeiro quadrado é: $a^2 + b^2 + 2ab$.

A área do segundo quadrado é: $c^2 + 2ab$.

Igualando as áreas dos quadrados, tem-se:

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab\ .$$

Adicionando $-2ab$ em ambos os lados da equação, tem-se:

$a^2 + b^2 = c^2$ ■ (3.2)

Exemplo 10.3.2. Calcule a medida do terceiro lado dos triângulos retângulos:

1. Hipotenusa = *10 cm* e um dos catetos de *8 cm*.

2. Dois catetos iguais = *5 cm*.

Solução: (a) Sejam $c = 10$ e $a = 8$ as medidas da hipotenusa e do cateto conhecido, respectivamente. Para calcular o outro cateto, substitui-se a e c na Eq. 3.2:

$8^2 + b^2 = 10^2$

$b^2 = 100 - 64 = 36$

$b = \pm\sqrt{36} = \pm 6$.

Como os lados do triângulo são medidas positivas, serão usadas apenas os valores positivos das raízes. Então, $b = 6\ cm$. Nesse caso, a medida do cateto desconhecido é *6 cm* e é um número inteiro.

(b) Sejam $a = b = 5\ cm$ as medidas dos catetos. Para calcular a hipotenusa, substitui-se a e b na Eq. 3.2:

$5^2 + 5^2 = a^2$

$a^2 = 50$

$a = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \cong 7,071$. Nesse caso, a medida da hipotenusa é $5\sqrt{2} \cong 7,071 cm$ e é um número irracional ■

Exemplo 10.3.3. (a) Verifique se o triângulo de lados *3, 4 e 5 u.c.* é triângulo retângulo.

(b) Mostre que para n ε , $3n$, $4n$ e $5n$, também são triângulos retângulos.

Solução: (a) Substituindo $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$ na Eq. 3.2, tem-se:.

$3^2 + 4^2 = 5^2$

$25 = 25$.

Como o Teorema de Pitágoras foi satisfeito, o triângulo com lados $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$ é retângulo.

(b) Substituindo $a = 3n$, $b = 4n$ e $c = 5n$ na Eq. 3.2, tem-se:.

$(3n)^2 + (4n)^2 = (5n)^2$

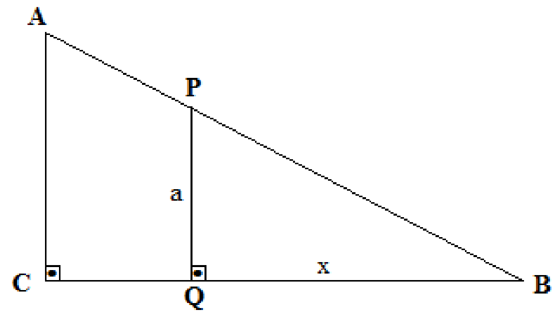
$25n^2 = 25n^2$.

Como o Teorema de Pitágoras foi satisfeito, os triângulos com lados $a = 3n$, $b = 4n$ e $c = 5n$ são retângulos ■

EXERCÍCIOS 10.3

10.3.1 Dado os triângulos ABC e PQM, determine a medida dos lados indicados com letras a e x, sabendo que: $AC = 10cm$; $CQ = 12cm$; $CB = 15cm$

e $AB = 5\sqrt{13}cm$.



10.3.2 Use o resultado do Exemplo 3.3 para criar mais 3 triângulos retângulos com lados inteiros.

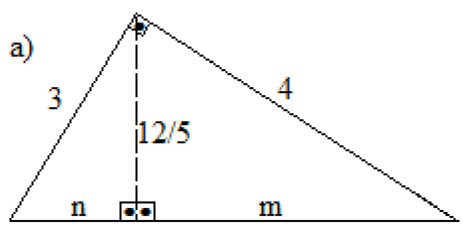
10.3.3 Calcule a medida do terceiro lado dos triângulos retângulos (a e b são catetos e c é a hipotenusa):

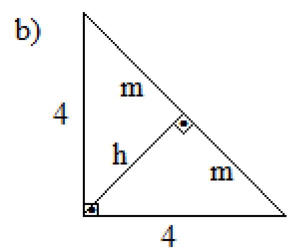
a) $a = 5\ cm$ e $b = 12\ cm$

c) $b = 5\ cm$ e $c = 13\ cm$

b) $c = 10\ cm$ e $a = 5\ cm$
d) $a = 2\ cm$ e $b = 5\ cm$

10.3.4 Calcule a medidas indicadas com letras:





10.3.5 Um triângulo equilátero tem os três lados iguais.

a) Determine a altura, em função da medida dos lados.

b) Deduza a fórmula da área.

10.3.6 Um triângulo retângulo tem dois ângulos de 45°. Cada cateto mede m.

a) Calcule a medida da hipotenusa.

b) Calcule a medida da altura.

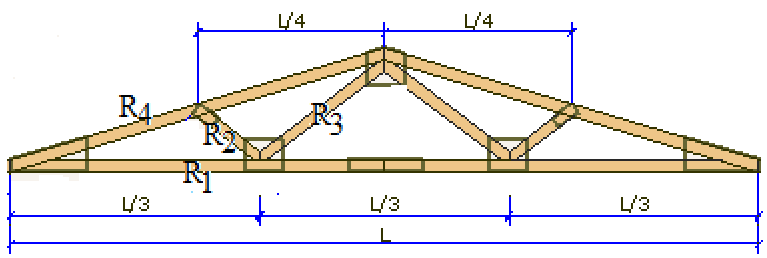
10.3.7 O oitão (parte triangular da fachada da figura) de uma casa é composto por dois triângulos retângulos. A inclinação do telhado é 35% . Sabendo que a largura da casa é 8 m:

a) Calcule a altura central do telhado.

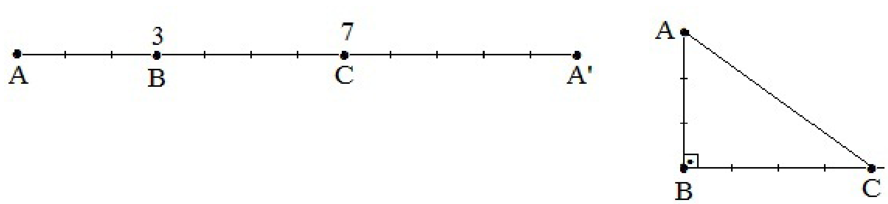
b) Calcule o comprimento do lado inclinado.

10.3.8 A tesoura de um telhado tem a forma da figura abaixo. Sabendo que $L = 6\ m$ e a inclinação é *28 %* , calcule o comprimento das ripas R_1 (considere meia tesoura)

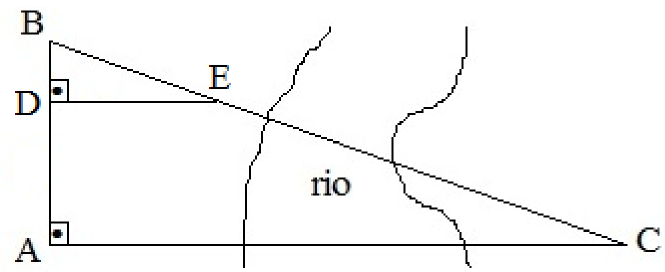
R_2, R_3 e R_4 .



10.3.9 Os triângulos pitagóricos são utilizados para marcar figuras em esquadro no solo. Por exemplo, para marcar um galpão de *10m* de largura por *15m* de comprimento, pode-se usar uma corda de *12m*, com marcas em *3m* e *7m* (ver Figura). Esticando a corda e dobrando-a nas referidas marcas tem-se um triângulo com um ângulo reto no ponto B. Desenvolva uma estratégia, no papel, para marcar o galpão retangular de *8x10 m*.



10.3.10 Considere que os pontos A e B estão do mesmo lado de um rio e o ponto C é inacessível, porém visível de A e B, como ilustra a figura abaixo. Para estimar a distância AC, pode-se usar triângulos semelhantes:



1°) Instala-se um ângulo reto em A, com um esquadro (ver problema 3.9) ou teodolito;

2°) Marca-se um ponto B na direção perpendicular a AC;

3°) Marca-se um ponto D na reta AB;

4°) Instala-se um triângulo retângulo em D (ver problema 3.9);

5°) Marca-se um ponto E sobre a reta BC, deslocando uma baliza sobre a direção DE, até que E esteja sobre BC;

6°) Mede-se as distâncias $AB, DB\ e\ DE$.

Os triângulos ABC e DBE são semelhantes. Portanto:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DE}$$

Considere $AB = 10m,\ DB = 1\ me\ DE = 3m$ e calcule AC .

10.3.11 Calcule:

a) A diagonal de um quadrado de lado 4 cm.

b) A diagonal de um retângulo de lados 4 e 5 cm.

c) A altura de um triângulo isósceles com lados iguais de 4 cm e base 5 cm.

10.3.12 Em um losango de $4\sqrt{5}$ cm de lado, a diagonal maior é o dobro da menor. Calcule as medidas dessas diagonais.

10.4 Razões trigonométricas

É bem provável que as pirâmides do Egito foram construídas utilizando a ideia de *razões trigonométricas*.

Lembre-se que a razão entre dois números a e b, na matemática, tem a forma de uma fração, $\frac{a}{b}$.

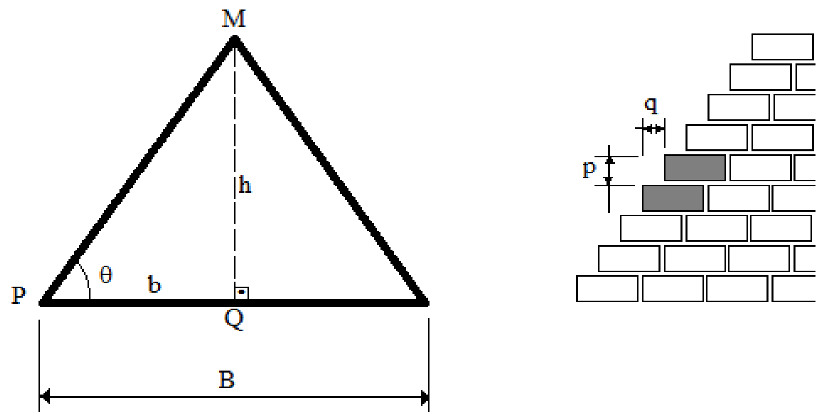


Figura 4.1 - Esquema construtivo das pirâmides

A inclinação de uma pirâmide de base quadrada, depende da largura da base (B) e da altura h. O triângulo PQM ilustra a seção longitudinal de uma pirâmide de base quadrada, onde $b = B/2$ é a metade da base e h é a altura. A inclinação da hipotenusa (lado PM) é a inclinação da face da pirâmide. Ao construir, esta inclinação deve ser mantida em cada pedra colocada na face lateral. É impossível colocar um fio indicando a posição das pedras, devido à enorme altura: a pirâmide de Quéops tinha $b = 115\ m$ por $h = 147\ m$. Uma solução é fazer a proporção entre as razões de altura e base da pirâmide e de cada degrau da face lateral (ver Fig. 4.1).

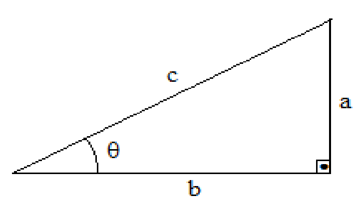
$$\frac{h}{b} = \frac{p}{q}$$

Onde h e b são a altura e a base da pirâmide, respectivamente; p e q são a altura e a base do degrau, respectivamente.

Com essa ideia, na pirâmide de Quéops, a razão p/q deveria ser 147/115 = 1,278. Ou seja, para cada *1 m* na horizontal, a altura deveria ser *1,278 m*. Observe-se que mantida essa razão p/q , mantem-se o ângulo de inclinação (ângulo na Fig. 4.1) constante.

Razões no triângulo retângulo

Sejam a e b os catetos de um triângulo, c a hipotenusa e o ângulo entre b e c.



Definição 10.4.1. As três razões trigonométricas diretas são o *seno*, o *cosseno* e a *tangente*, definidas como:

$$sen\theta = \frac{catetooposto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$cos\theta = \frac{catetoadjacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

$$tg\theta = \frac{catetooposto}{catetoadjacente} = \frac{a}{b}$$

As três razões trigonométricas inversas são a *cossecante*, a *secante* e a *cotangente*, definidas como:

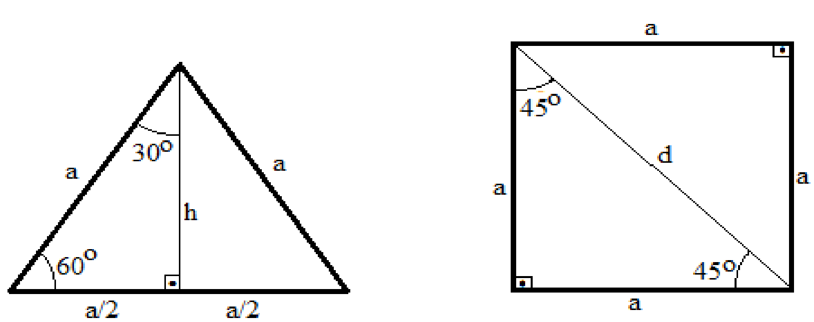
$$cosec\theta = \frac{1}{sen\theta} = \frac{c}{a}$$

$$sec\theta = \frac{1}{cos\theta} = \frac{c}{b}$$

$$cotg\theta = \frac{1}{tg\theta} = \frac{b}{a}$$

Exemplo 10.4.1. As razões trigonométricas de alguns ângulos podem ser calculadas geometricamente. Calcule os valores de seno e cosseno de 30°, 45°e 60°.

Solução: No triângulo equilátero (todos os ângulos e lados iguais) cada ângulo interno é 60°(Fig. (a)).



(a) (b)

Dividindo este triângulo com a linha da altura, obtém-se dois triângulos retângulos em que um dos ângulo é 30°e o outro é 60°. Considerando o comprimento do lado como *a*, pode-se calcular a altura usando o teorema de Pitágoras:

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

Resolvendo para h, obtém-se: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Com esse resultado, pode-se calcular os senos e cossenos de 30°e 60°.

$sen\,(30^o) = \frac{\frac{a}{2}}{A} = \frac{1}{2} = 0.5.$; $COS\,(30^o) = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,86602545...$

$sen\,(60^o) = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,86602545...$ $cos\,(60^o) = \frac{\frac{a}{2}}{A} = \frac{1}{2} = 0.5.$

No quadrado (fig. (b)) cada ângulo interno é 90°. Dividindo o quadrado pela diagonal, obtém-se dois triângulos retângulos com dois ângulos iguais a 45°. Considerando o comprimento do lado como a, pode-se calcular a diagonal do quadrado (hipotenusa dos triângulos) usando o teorema de Pitágoras:

$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.

Aplicando raiz quadrada em ambos os lados da equação, obtém-se: $d = a\sqrt{2}$.

Com esse resultado, pode-se calcular o seno e cosseno de 45°.

$sen\,(45^o) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,7071068$; $cos\,(45^o) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = sen\,(45^o)$.

Observa-se que os valores de seno e cosseno independem do tamanho do lado do triângulo ou do quadrado, mas que referem-se apenas aos ângulos ■

As razões trigonométricas de outros ângulos são calculadas por somas infinitas, chamadas séries de potências:

$$sen\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \tag{4.1}$$

$$cos\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \tag{4.2}$$

Onde x é o arco, escrito em radianos.

Usando as séries das Eqs. (4.1) e (4.2) é possível construir as tabelas de senos e cossenos para qualquer ângulo, como na tabela abaixo. Atualmente, esses valores podem ser obtidos diretamente nas calculadoras científicas.

Ângulos	senos	cossenos
14°	0,24192	0,97029
15°	0,25881	0,96592
16°	0,27563	0,96126
17°	0,292371	0,95630
18°	0,309016	0,95105
19°	0,32556	0,94551

Leitura de senos, cossenos e ângulo

As tabelas de razões trigonométricas podem ser consultadas de duas formas:

1. Dado o ângulo procura-se a razão trigonométrica:

   Exemplo: Qual é o seno de 15°? Resposta: *sen(15°)= 0,650287*.

2. Dada a razão trigonométrica procura-se o ângulo:

Exemplo: Qual é ângulo cujo seno é *0,650287* ? Resposta: *15°*.

Exemplo 10.4.2. Obtenha o valor de *sen(15°)* :

1. Usando a Eq. (4.1) com 3 termos ($n = 0,1,2$)

2. Usando a calculadora científica. Compare os resultados.

Solução:

1. Substituindo $x = \pi /12$ (arco correspondente ao ângulo de 15°) na Eq. (4.1), tem-se:

   $sen\,(15^o) = \frac{\pi}{12} - \frac{\left(\frac{\pi}{12}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{12}\right)^5}{5!} = 0{,}25881906...$

2. Na calculadora, ajusta-se a tecla (DRG) para "D" (graus), digita-se *15* e em seguida a tecla "seno" . A resposta, com 10 dígitos, é:

sen(15°) = 0,25881904 ...

Observa-se que as duas respostas são idênticas até o nono dígito. Quanto mais termos da Eq. (4.1) forem usados, mais exato será o seno calculado pela série de potências ■

Exemplo 10.4.3. Em um triângulo retângulo a hipotenusa mede *6,5 cm* e um dos ângulos *35°*. Calcule a medida dos catetos.

Solução: seja *x* o cateto oposto ao ângulo de *35°*. Da definição de seno, tem-se:

$sen 35^0 = \frac{catetooposto}{hipotenusa} = \frac{x}{6{,}5}$. Resolvendo para *x*:

x = 6,5· sen 35°= 6,5· 0,573576 = 3,728 cm.

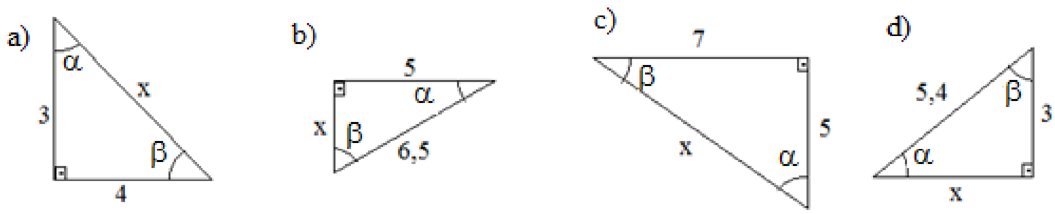
Seja *y* o cateto adjacente ao ângulo de *35°*. Da definição de cosseno, tem-se:

$cos 35^0 = \frac{catetoadjacente}{hipotenusa} = \frac{y}{6{,}5}$. Resolvendo para *y*:

y = 6,5· cos 35°= 6,5· 0,8191520 = 5,324 cm ■

EXERCÍCIOS 10.4

10.4.1 Encontre os valores dos lados x e calcule o seno, cosseno e tangente dos ângulos α e β.



10.4.2 Complete a tabela (use a calculadora ou tabelas de razões trigonométricas):

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
46°			
		$\frac{3}{4}$	
			3
	0,86		

10.4.3 Dados os valores de senos e cossenos, calcule a tangente, cotangente, secante e cossecante dos ângulos:

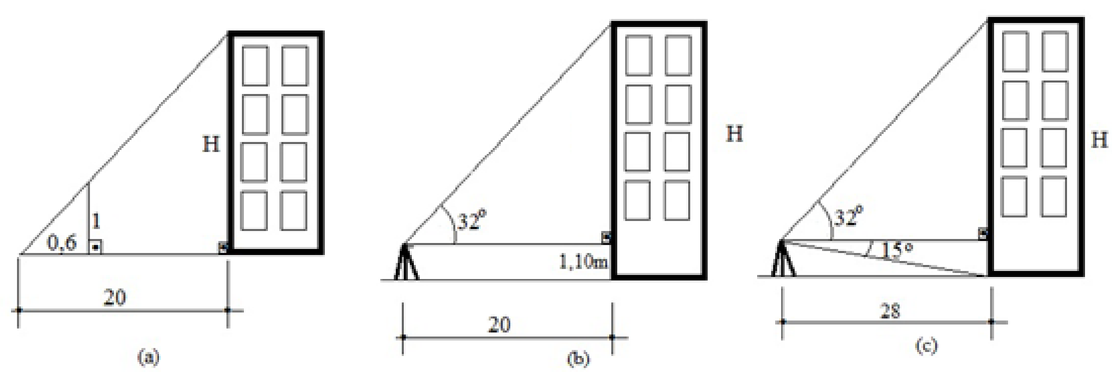
a) $sen\ 14° = 0{,}24192$ e $cos\ 14° = 0{,}97029$

b) $sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $sen\ 30° = 0{,}5$ e $cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $cos\ 60° = 0{,}5$

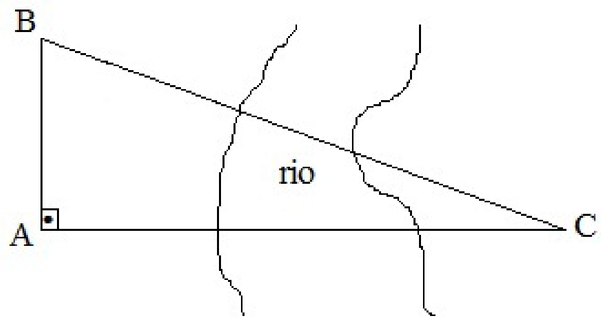
10.4.4 Calcule a altura H dos prédios nas três situações apresentadas.



10.4.5 Considere que os pontos A e B estão do mesmo lado de um rio e o ponto C é inacessível, porém visível de A e B, como ilustra a figura abaixo. Para estimar a distância AC, instala-se um ângulo reto em A, com um esquadro (ver problema 3.9) ou teodolito; marca-se um ponto

B na direção perpendicular a AC e mede-se a distância AB . Visualizando A e C a partir de B, mede-se o ângulo B .

Considerando $AB = 10m$ e B = $60°$calcule a distância AC .

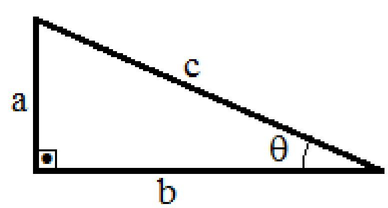


10.5 Identidades trigonométricas

As identidades trigonométricas são equações que relacionam as razões trigonométricas e são empregadas frequentemente em problemas da ciência. Nesse capítulo, será demonstrada a identidade fundamental. Outras identidades serão apenas enunciadas, com o objetivo de disponibilizá-las para conhecimento e uso em aplicações durante outras disciplinas de matemática.

10.5.1 Identidade fundamental da trigonometria

Seja um triângulo retângulo com catetos a e b , hipotenusa c e o ângulo entre b e c. Pela definição de seno e cosseno do ângulo , tem-se:



$sen\theta = \frac{a}{c}$

$cos\theta = \frac{b}{c}$.

Elevando ao quadrado cada membro de ambas as equações, tem-se:

$sen^2\theta = \frac{a^2}{c^2}$ e $cos^2\theta = \frac{b^2}{c^2}$.

Adicionando as duas equações, membro a membro, tem-se:

$$sen^2\theta + cos^2\theta = \frac{a^2+b^2}{c^2}$$

Pelo Teorema de Pitágoras : $a^2 + b^2 = c^2$, então:

$sen^2\theta + cos^2\theta = \frac{c^2}{c^2}$ e

$$\boxed{sen^2\theta + cos^2\theta = 1} \tag{5.1}$$

A Eq. (5.1) é conhecida como *identidade fundamental da trigonometria*.

10.5.2 Identidades com quadrados de tangentes, cotangentes, secantes e co-tangentes

Dividindo a Eq. (5.1) por cos^2x, tem-se:

$$\frac{sen^2\theta + cos^2\theta}{cos^2\theta} = \frac{1}{cos^2\theta}$$

Usando a definição das razões trigonométricas:

$$\boxed{tg^2\theta + 1 = sec^2\theta} \tag{5.2}$$

Dividindo a Eq. (5.1) por sen^2x, tem-se:

$$\frac{sen^2\theta + cos^2\theta}{sen^2\theta} = \frac{1}{sen^2\theta}$$

Usando a definição das razões trigonométricas:

$$\boxed{1 + cotg^2\theta = cosec^2\theta} \tag{5.3}$$

10.5.3 Outras identidades trigonométricas

Em Leithold (1979) encontra-se a demonstração das seguintes identidades trigonométricas:

Para a e b números reais quaisquer, tem-se:

$cos(a+b) = cos(a)\cdot cos(b) - sen(a)\cdot sen(b)$ (5.4)

$cos(a-b) = cos(a)\cdot cos(b) + sen(a)\cdot sen(b)$ (5.5)

$sen(a\pm b) = sen(a)\cdot cos(b) \pm cos(a)\cdot sen(b)$ (5.6)

$sen(2t) = 2sent\cdot cost$ (5.7)

$cos(2t) = cos^2t - sen^2t$ (5.8)

$cos^2\left(\frac{1}{2}t\right) = \frac{1+cost}{2}$ (5.9)

$sen^2\left(\frac{1}{2}t\right) = \frac{1-cost}{2}$ (5.10)

EXERCÍCIOS 10.5

10.5.1 Use a identidade fundamental para calcular o seno dos ângulos, dados os cossenos:

a) *cos* $35°$ *= 0.81915*

b) *cos* $126°$*= - 0.5877*

c) *cos* $(-73°)$ *= 0.2923*

d) *cos* $205°$*= - 0.9063*

10.5.2 Sabendo que *sen() = 0,54030* :

a) Qual é a medida de em graus ? em radianos?

b) Calcule o *cos()* usando a identidade fundamental.

c) Calcule o cos*(2)* usando a Eq. 5.8.

d) Calcule *sen(2)* usando a Eq. 5.7.

10.5.3 Sabendo que *cos(y) = - 0.0348995*:

a) Qual é a medida de *y* em graus ? em radianos?

b) Calcule o *sen(y)* usando a identidade fundamental.

10.5.4 Sabendo que $cos(\pi/8) = 0.9238795$:

a) Calcule o $sen(\pi/8)$

b) Calcule o cosseno de $\pi/4$, usando as identidades trigonométricas.

c) Calcule o cosseno de $\pi/16$,usando as identidades trigonométricas.

10.5.5 Sabe-se que $cos\,(30^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e o *sen(30°) = 0,5*:

a) Calcule o *cos (60°)* usando a Eq. (5.7). Calcule diretamente com a calculadora e compare.

b) Calcule o *cos (60°)* usando a Eq. (5.4). Compare com os resultados anteriores.

10.6 Funções trigonométricas

As funções trigonométricas são definidas com base no significado das razões trigonométricas no círculo trigonométrico.

10.6.1 Círculo trigonométrico

O *círculo trigonométrico* é um círculo com raio unitário (*r = 1 u.c.*) com centro na origem de um sistema de eixos ortogonais, como mostra a Fig. 6.1a.

O sentido da medida positiva dos ângulos é anti-horário, a partir do lado direito do eixo horizontal, como mostra a Fig. 6.1b. As medidas no sentido horário são negativas. Assim, +30°e $-$ 30°são ângulos localizados no I e IV quadrantes, respectivamente.

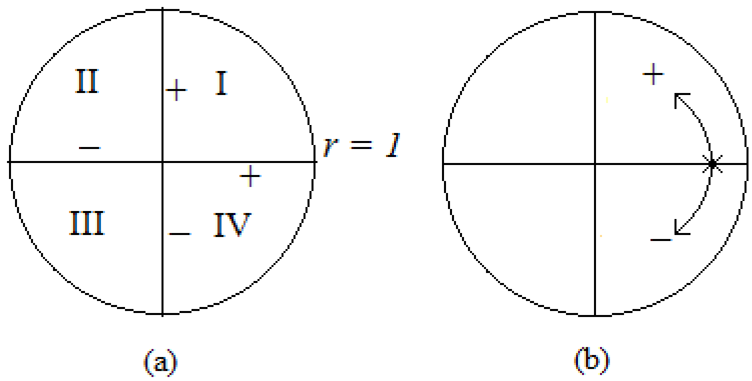


Figura 6.1 - Círculo trigonométrico

Chama-se *radiano* o arco de comprimento unitário (1 rd = 1 raio), como mostra a Fig. 6.2, que corresponde, aproximadamente, ao ângulo de 57, 29578°.

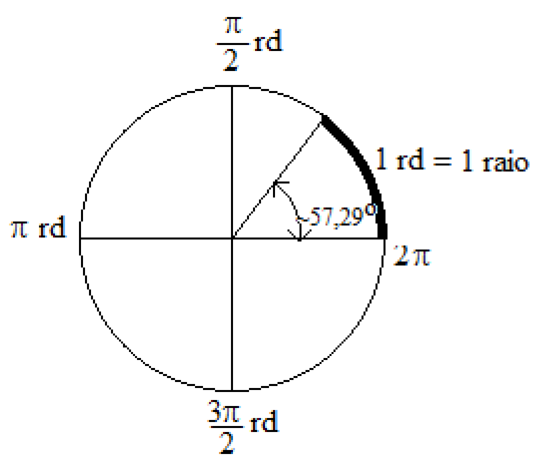


Figura 6.2 - Radianos

Assim, a semicircunferência do círculo trigonométrico mede π rd $\approx$ 3,1415 u.c.

Exemplo 10.6.1. Determine os arcos dados os ângulos, no círculo trigonométrico:

1. *30*°
   b) *150*° c) *210*°
   d) *300*° e) - 45°

Solução: Utilizando a relação entre arcos e ângulos (Eq. 2.3) para **r = 1**: $Arco = \frac{\alpha\pi}{180}$, substitui-se pelo ângulo dado e obtém os arcos correspondentes:

1. π /6
   b) 2π /3
   c) 7π /6
   d) 5π /3
   e) -π /4 ■

Exemplo 10.6.2. Determine os ângulos dados os arcos, no círculo trigonométrico:

1. π /4
   b) 3π /4
   c) 3π /2
   d) 13π /6
   e) -7π /6

Solução: Resolvendo a (Eq. 2.3), para o ângulo , tem-se : $\alpha = \frac{180\cdot \ arco}{\pi}$. Substituindo *arco* pelo valor dado obtém-se os ângulos correspondentes:

1. *45°*
   b) *135°*
   c) *270°*
   d) *390°*
   d) *-210°*■

10.6.2 Função cosseno

O eixo horizontal no círculo trigonométrico é o *eixo dos cossenos*. À direita da origem (ponto O) o eixo é positivo e à esquerda negativo, como ilustra a Fig. 6.3.

Cosseno
Considere-se o círculo trigonométrico com *x* sendo o ângulo, medido no sentido anti-horário, a partir do eixo dos cossenos. A projeção ortogonal do raio (*OP*) sobre o eixo dos cossenos corresponde ao *cos(x)= OQ ,* como ilustra a Fig. 6.3.

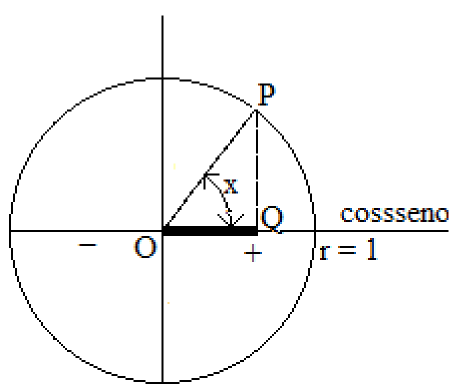


Figura 6.3 - Função Cosseno

Na Fig. 6.3, observa-se que:

1. Nos quadrantes I e IV o cosseno é positivo e nos quadrantes II e III o cosseno é negativo.
2. O cosseno dos ângulos 90°e 270°são nulos: *cos(90°) = 0*; *cos(270°) = 0.*
3. O cosseno do ângulo 0º é 1 e do ângulo 180°é -1: *cos(0°) = 1*; *cos(180°) = -1.*
4. Na medida em que *x* cresce no quadrante I, o cosseno decresce (tende a zero).
5. Na medida em que *x* cresce no quadrante II, o cosseno decresce (tende a -1), mas cresce em módulo.
6. Na medida em que *x* cresce no quadrante III, o cosseno cresce (tende a zero).
7. Na medida em que *x* cresce no quadrante IV, o cosseno cresce (tende a zer1).
8. Para qualquer ângulo *x* o cosseno está entre -1 e 1: $-1 \leq cos(x) \leq 1$.
9. *cos (x) = cos(-x).*

Exemplo 10.6.3. Mostre que a projeção do raio no eixo dos cossenos, quando *x = 60°* é 0,5.

Solução: Pela definição do cosseno, tem-se: (ver Fig. 6.3, se *x = 60°*)

$$cos\,(60^o) = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{1} = OQ$$

Como *cos(60°) = 0,5*, tem-se que $OQ = 0,5$ ■

Exemplo 10.6.4. Considere o conjunto X={ *0º, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°*} .

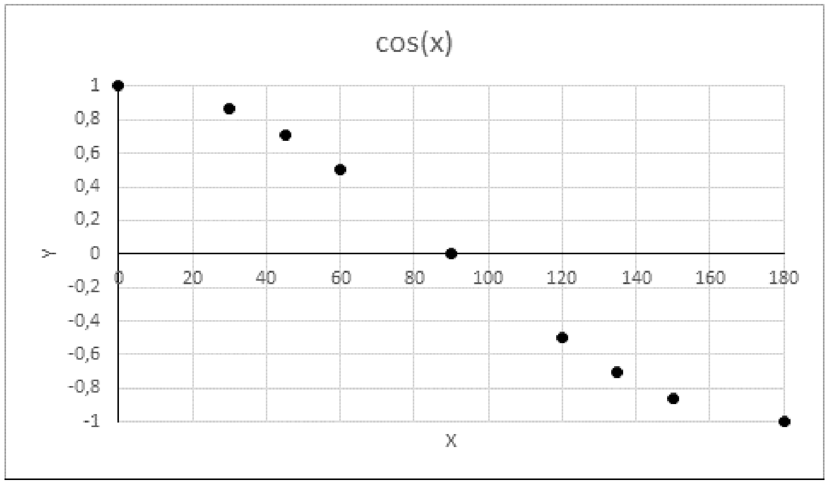
(a) Considere um conjunto Y, formado pelos cossenos de cada elemento do conjunto X. (use a calculadora)

(b) Faça um gráfico cartesiano onde X é a abcissa e Y a ordenada.

Solução: (a) O conjunto Y é obtido fazendo o cosseno de cada elemento do conjunto X.

X	*0º*	*30°*	*45°*	*60°*	*90°*	*120°*	*135°*	*150°*	*180°*
Y	*1*	*0,866*	*0,707*	*0,5*	*0*	*-0,5*	*-0,707*	*-0,866*	*-1*

(b) Cada coluna da tabela é um par ordenado (*x,y*) que colocados no gráfico cartesiano, formam uma curva.



Observe-se que o cosseno é positivo no quadrante I e negativo no II ■

função cosseno associa a cada ângulo (ou arco) x, o valor do cosseno desse ângulo (arco).
f(x) = cos(x). (6.1)

Atribuindo valores a x e calculando os respectivos valores de $y = cos(x)$, analogamente ao Exemplo 6.4, obtém-se os conjuntos X e Y. Os pares ordenados (x,y) formam a curva da função cosseno, como ilustra a Fig. 6.4.

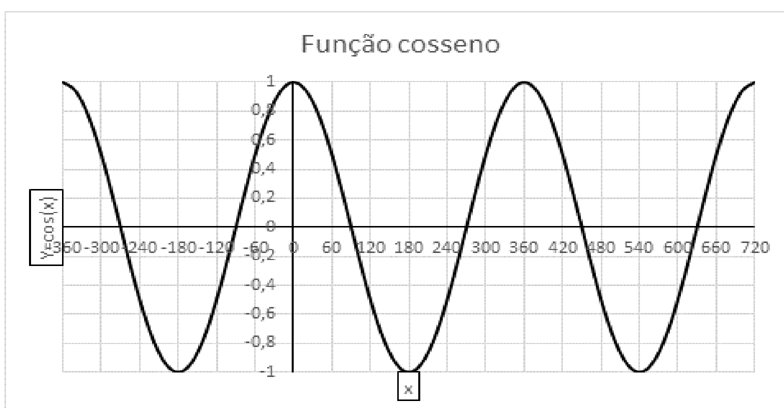


Figura 6.4 - Função cosseno: $Y(x) = cos(x)$

Domínio e imagem da função cosseno

A função cosseno é definida para qualquer valor de x real. Assim, seu domínio é o conjunto dos números reais: $D_m f(x) = \{x \in R\}$. É mais comum expressar os valores de x em radianos (ao invés de ângulos como na Fig. 6.4), nas funções trigonométricas.

O conjunto imagem da função cosseno é formado por todos os números reais entre -1 e 1, incluindo os extremos: $I_m f(x) = \{y \in R / -1 \leq y \leq 1\}$.

Período da função cosseno

O cosseno é uma *função cíclica* (que se repete ao longo do domínio). O *período T* de uma função cíclica é o menor intervalo em que a função não se repete.

Observe-se na Fig. 6.4 que entre 0 e 360°a função cosseno tem um ciclo sem repetições. O mesmo ocorre entre -180°e +180°, dentre outros intervalos em x, cujo comprimento é 2π (ou 360°). Por isso, o *período T* da função cosseno é 2π (ou 360°).

A forma mais geral da função cosseno tem dois parâmetros A e b reais:

$$f(x) = A \cdot \cos(b \cdot x). \quad (6.2)$$

A variação destes parâmetros determina a posição da função no gráfico:

- Coeficiente A: determina a *amplitude* (altura) da curva.

- Coeficiente b: determina o *período T*.

O período é inversamente proporcional a b (quanto maior b, menor o período T. Veja o Exemplo 6.6). Se para $b = 1$, o período é 2π , resolvendo uma regra de três inversa, tem-se:

$T = \frac{2\pi}{b}$.

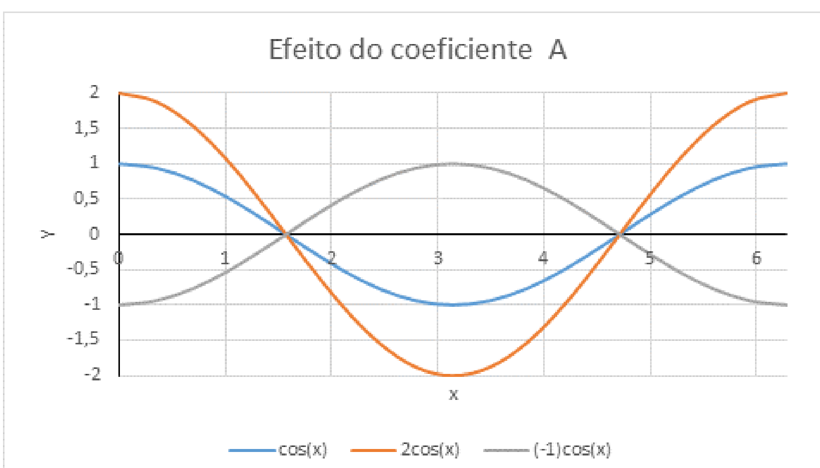
(6.3)

Exemplo 10.6.5. Compare os gráficos das funções

$f_1(x) = \cos(x)$; $f_2(x) = 2\cos(x)$

e $f_3(x) = -\cos(x)$.

Solução: A diferença entre as três funções dadas é o valor do coeficiente A. Em todas o $b = 1$.



Escolhendo como padrão a função $f_1(x)=\cos(x)$, com $A = 1$ e $b = 1$, pode-se observar que :

1. O coeficiente $A = 2$ na função f_2, dobrou a altura (amplitude) da função f_1;

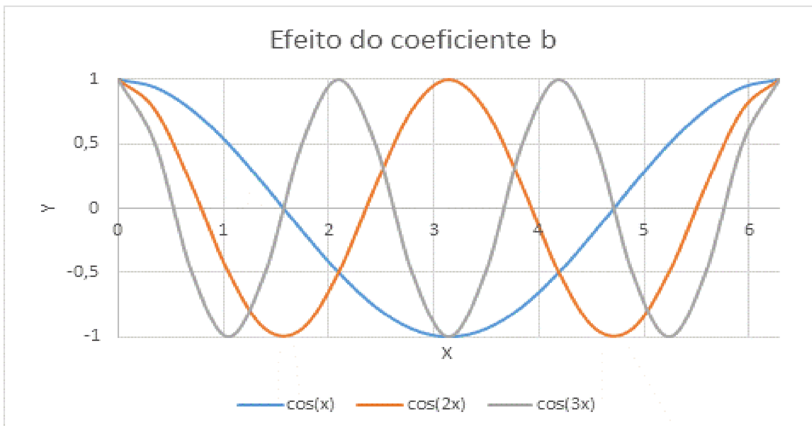
2. O coeficiente $A = -1$ rebateu a função f_1, simetricamente ao eixo X, mas manteve a mesma amplitude, em módulo.

3. O período não se alterou, pois $b=1$ nas três funções ■

Exemplo 10.6.6. Compare os gráficos das funções

$f_1(x) = cos(x)$; $f_2(x) = cos(2x)$
e $f_3(x) = cos(3x)$.

Solução: A diferença entre as três funções dadas é o valor do coeficiente b.



Escolhendo como padrão a função $f_1(x)=cos(x)$, com $A = 1$ e $b = 1$, pode-se observar que :

1. O coeficiente $b = 2$ na f_2 dividiu pela metade o período da função f_1. De acordo com a Eq. (6.3), o período da função f_2 *é* $T = \pi$.

2. O coeficiente $b = 3$ dividiu por 3 o período da função f_1. De acordo com a Eq. (5.3), o período da função f_3 *é* $T = 2\pi /3$.

3. A amplitude não se alterou, pois $A=1$ nas três funções ■

10.6.3 Função seno

O eixo vertical no círculo trigonométrico é o *eixo dos senos*. Acima da origem o eixo é positivo e abaixo é negativo, como ilustra a Fig. 6.5.

Seno
A projeção ortogonal do raio (OP) sobre o eixo dos senos corresponde ao $sen(x)= OR$, como ilustra a Fig. 6.5.

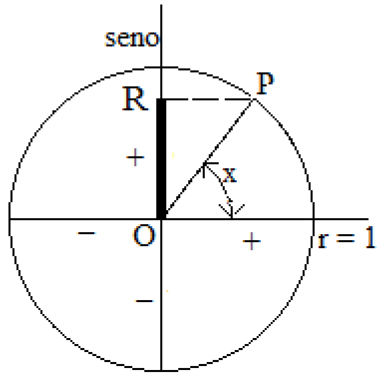


Figura 6.5 - Função seno.

Na Fig. 6.5, observa-se que:

1. Nos quadrantes I e II o seno é positivo e nos quadrantes III e IV o seno é negativo.
2. O seno dos ângulos 0°e 180°são nulos: *sen(0°) = 0*; *cos(180°) = 0.*
3. O seno do ângulo 90º é 1 e do ângulo 270°é -1: *sen(90°) = 1*; *sen(270°) = -1.*
4. Na medida em que *x* cresce no quadrante I, o seno cresce (tende a 1).
5. Na medida em que *x* cresce no quadrante II, o seno decresce (tende a zero).
6. Na medida em que *x* cresce no quadrante III, o seno decresce (tende a -1).
7. Na medida em que *x* cresce no quadrante IV, o seno cresce (tende a zero).
8. Para qualquer ângulo *x* o seno está entre -1 e 1: $-1 \leq sen(x) \leq 1$.
9. *sen (x) = -sen(-x).*

A função seno associa a cada ângulo (ou arco) *x*, o valor do seno desse ângulo (ou arco).

$$f(x) = sen(x). \tag{6.4}$$

Atribuindo valores a *x* e calculando os respectivos valores de *y = sen(x)*, obtém-se os conjuntos *X* e *Y*. Os pares ordenados (*x,y*) formam a curva da função seno, como ilustra a Fig. 6.6, conhecida como *senóide*.

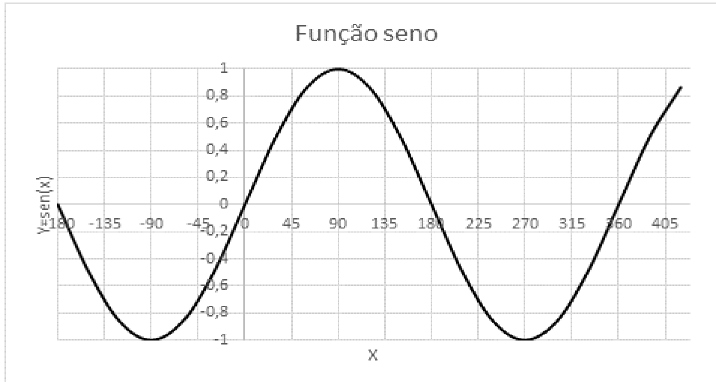


Figura 6.6 - Função seno: *Y(x) = sen(x)*

Domínio e imagem da função seno

A função seno *f(x) = sen(x)* é definida para qualquer valor de *x* real. Assim, seu domínio é o conjunto dos números reais: $D_m f(x) = \{x \in R\}$.

O conjunto imagem da função seno é formado por todos os números reais entre

-1 e 1, incluindo os extremos: $I_m f(x) = \{y \in R / -1 \leq y \leq 1\}$.

Período da função seno

O seno, assim como o cosseno, é uma *função cíclica* (que se repete ao longo do domínio). Observe-se na Fig. 6.6 que entre 0 e 360°a função seno tem um ciclo sem repetições. O mesmo ocorre entre -180°e +180°, dentre outros intervalos em *x*, cujo comprimento é 2π (ou 360°). Por isso, o *período T* da função seno *f(x) = sen(x)* é 2π (ou 360°).

A forma mais geral da função seno tem dois parâmetros *A* e *b* reais:

f(x) = A· sen(b· x).

(6.5)

A variação destes parâmetros determina a *amplitude* e o *período* da função, analogamente à função cosseno.

10.6.4 Função tangente

A reta vertical que encosta no círculo trigonométrico no ponto *T = (1,0)* é o *eixo das tangentes*, como ilustra a Fig. 6.7. Acima do ponto *T* o eixo é positivo e abaixo negativo.

Tangente

A distância (TP) corresponde à *tg(x)*= TP , como ilustra a Fig. 6.7.

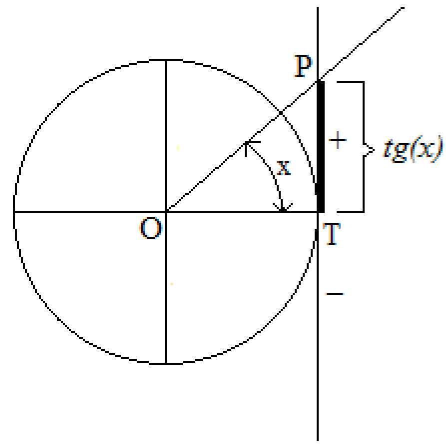


Figura 6.7 - Função Tangente

Na Fig. 6.7, observa-se que:

1. Nos quadrantes I e III a tangente é positiva e nos quadrantes II e IV é negativa.
2. A tangente dos ângulos 0°e 180°são nulas: *tg(0°) = 0*; *tg(180°) = 0.*
3. A tangente dos ângulos 90º e 270°não existem: tg*(90°) =* ∄ ; *tg(270°) =* ∄ .
4. Na medida em que *x* cresce no quadrante I, a tangente cresce (tende a infinito).
5. Na medida em que *x* cresce no quadrante II, a tangente cresce (tende a zero).
6. Na medida em que *x* cresce no quadrante III, a tangente cresce (tende a infinito).
7. Na medida em que *x* cresce no quadrante IV, a tangente cresce (tende a zero).
8. A tangente varia entre menos e mais infinito: $- \leq tg(x) \leq +$.
9. *tg (x) = -tg(-x).*

A função *tangente* associa a cada ângulo (ou arco) *x*, o valor da tangente desse ângulo (arco).

f(x) = tg(x). (6.6)

Atribuindo valores a *x* e calculando os respectivos valores de $y = tg(x)$, obtém-se os conjuntos *X* e *Y*. Os pares ordenados *(x,y)* formam a curva da função tangente, como ilustra a Fig. 6.8.

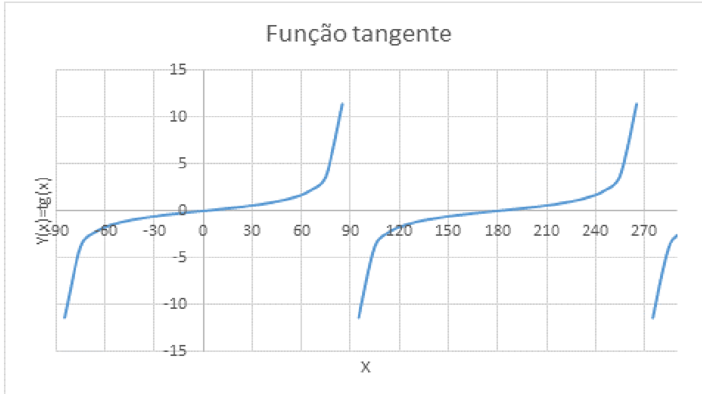


Figura 6.8 - Função tangente: *Y(x) = tg(x)*

Domínio e imagem da função tangente

A função tangente *f(x) = tg(x)* é definida para qualquer valor de x real, **exceto** para ângulos múltiplos ímpares de 90°(ou de arco $\pi/2$). Assim, seu domínio é:

$D_m f = \{x \in R/x \neq \pm(\frac{(2n-1)\pi}{2})\}$, para $n = 1,2,3...$

O conjunto imagem da função tangente é formado por todos os números reais:

$I_m f(x) = \{y \in R\}$.

Período da função tangente

A tangente, assim como as funções seno e cosseno, é uma *função cíclica* (que se repete ao longo do domínio). Observe-se na Fig. 6.8 que entre -90°e +90°a função tangente tem um ciclo sem repetições. O mesmo ocorre entre +90°e +270°, dentre outros intervalos em x, cujo comprimento é 180°(ou π). Por isso, o *período T* da função tangente *f(x) = tg(x)* é 180°(ou π).

A forma mais geral da função tangente tem dois parâmetros A e b reais:

f(x) = A· tg(b· x).

(6.7)

A variação destes parâmetros determina a posição da função no gráfico, analogamente à função cosseno.

10.6.5 Função cotangente

A reta horizontal que encosta no círculo trigonométrico no ponto *T = (0,1)* é o *eixo das cotangentes*, como ilustra a Fig. 6.9. À direita do ponto T o eixo é positivo e abaixo negativo.

Cotangente

A distância (TP) corresponde à *cotg(x)*= TP , como ilustra a Fig. 6.9.

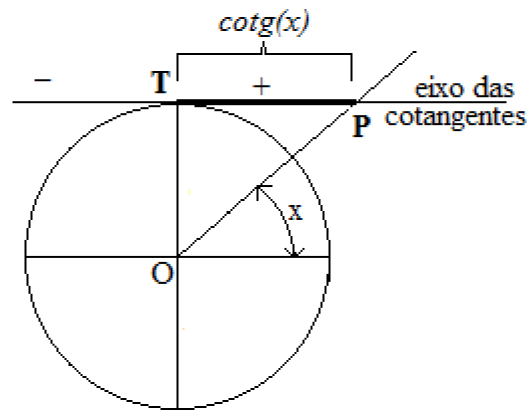


Figura 6.9 - Função Cotangente

Na Fig. 6.9, observa-se que:

1. Nos quadrantes I e III a cotangente é positiva e nos quadrantes II e IV é negativa.
2. A cotangente dos ângulos 90°e 270°são nulas: $tg(90°) = 0$; $tg(270°) = 0$.
3. A cotangente dos ângulos 0º e 180°não existem: tg$(0°) = \nexists$; $tg(180°) = \nexists$.
4. Na medida em que *x* cresce no quadrante I, a cotangente decresce (tende a zero).
5. Na medida em que *x* cresce no quadrante II, a cotangente decresce (tende a menos infinito).
6. Na medida em que *x* cresce no quadrante III, a cotangente decresce (tende a zero).
7. Na medida em que *x* cresce no quadrante IV, a cotangente decresce (tende a menos infinito).
8. A cotangente varia entre menos e mais infinito: $- \leq tg(x) \leq +$.
9. *cotg (x) = -cotg(-x).*

A função *cotangente* associa a cada ângulo (ou arco) *x*, o valor da cotangente desse ângulo (arco).

$$f(x) = cotg(x). \qquad (6.8)$$

Atribuindo valores a *x* e calculando os respectivos valores de $y = cotg(x)$, obtém-se os conjuntos X e Y. Os pares ordenados (x,y) formam a curva da função cotangente, como ilustra a Fig. 6.10.

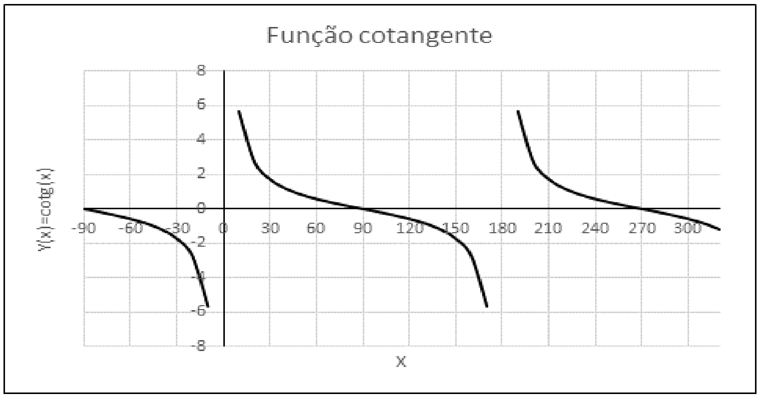


Figura 6.10 - Função cotangente: *Y(x) = cotg(x)*

Domínio e imagem da função cotangente

A função cotangente *f(x) = cotg(x)* é definida para qualquer valor de *x* real, **exceto** para ângulos múltiplos de 180°(ou de arco π). Assim, seu domínio é:

$D_m f(x) = \{x \in R / x \neq \pm n \cdot \pi\}$, para *n=0,1,2,3,...*

O conjunto imagem da função tangente é formado por todos os números reais:

$I_m f(x) = \{y \in R\}$.

Período da função cotangente

A cotangente, assim como as funções seno e cosseno, é uma *função cíclica* (que se repete ao longo do domínio). Observe-se na Fig. 6.10 que entre 0°e 180°a função cotangente tem um ciclo sem repetições. O mesmo ocorre entre 180°e 360°, dentre outros intervalos em *x*, cujo comprimento é 180°(ou π). Por isso, o *período T* da função cotangente *f(x) = cotg(x)* é 180°(ou π).

A forma mais geral da função cotangente tem dois parâmetros *A* e *b* reais:

f(x) = A· cotg(b· x).

(6.9)

A variação destes parâmetros determina a posição da função no gráfico, analogamente à função cosseno.

10.6.6 Função secante

Prolongando a reta que define o ângulo *x* no quadrante I, no círculo trigonométrico, até o eixo das tangentes, obtém-se um segmento de reta, da origem até aquele eixo, como ilustra a Fig. 6.11.

Secante

A distância (*OP*) corresponde à *sec(x)= OP* , como ilustra a Fig. 6.11.

Para ângulos do II e III quadrantes, prolonga-se a reta que define o ângulo *x* até um eixo simétrico ao eixo das tangentes, em relação ao eixo dos senos. Nesses quadrantes a secante é negativa. No quarto quadrante o prolongamento da reta que define o ângulo deve ser feito até o eixo das tangentes, gerando secantes positivas.

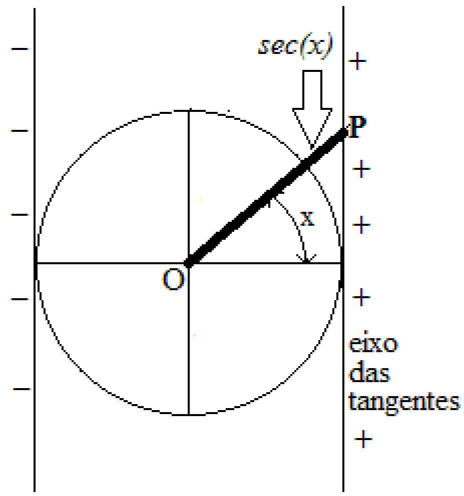


Figura 6.11 - Função secante

O sinal da função secante é o mesmo da função cosseno: positivo nos quadrantes I e IV e negativo nos quadrantes II e III.

Na Fig. 6.11, observa-se que:

1. $sec(0°) = 1$ e $sec(180°) = -1$.
2. A secante dos ângulos 90º e 270°não existem: $sec(90°) = \nexists$; $sec(270°) = \nexists$.
3. Na medida em que *x* cresce no quadrante I, a secante cresce (tende a infinito).
4. Na medida em que *x* cresce no quadrante II, a secante cresce (tende a 1).
5. Na medida em que *x* cresce no quadrante III, a secante decresce (tende a menos infinito).
6. Na medida em que *x* cresce no quadrante IV, a secante decresce (tende a 1).
7. A secante varia entre menos infinito e -1 e entre 1 e mais infinito:
   $- \leq sec(x) \leq -1$ e $1 \leq sec(x) \leq +$.
8. $sec(x) = sec(-x)$.

A função *secante* associa a cada ângulo (ou arco) *x*, o valor da secante desse ângulo (arco).

$$f(x) = sec(x). \quad (6.10)$$

Atribuindo valores a *x* e calculando os respectivos valores de $y = sec(x)$, obtém-se os conjuntos *X* e *Y*. Os pares ordenados (x,y) formam a curva da função secante, como ilustra a Fig. 6.12.

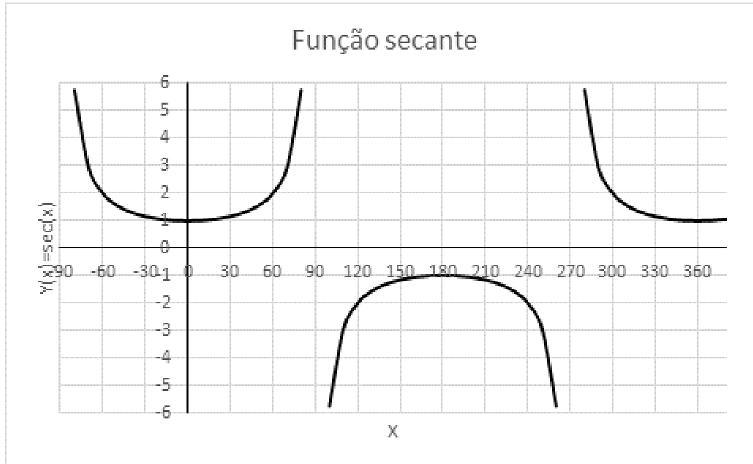


Figura 6.12 - Função secante: *Y(x) = sec(x)*

Domínio e imagem da função secante

A função secante *f(x) = sec(x)* é definida para qualquer valor de *x* real, **exceto** para ângulos múltiplos ímpares de 90°(ou de arco π */2*). Assim, seu domínio é:

$D_m f(x) = \{x \in R/x \neq \pm(\frac{(2n-1)\pi}{2})\}$, para $n = 1, 2, 3...$

O conjunto imagem da função secante é:

$I_m f(x) = \{y \in \ R/- \ \leq y \leq -1 ou \ \ 1 \leq y \leq +\}$.

Período da função secante

A secante, assim como as funções seno e cosseno, é uma *função cíclica* (que se repete ao longo do domínio). Observe-se na Fig. 6.12 que entre -90°e +270°a função secante tem um ciclo sem repetições. O mesmo ocorre entre 0°e +360°, dentre outros intervalos em *x*, cujo comprimento é 360°(ou 2π). Por isso, o *período T* da função tangente *f(x) = sec(x)* é 360°(ou 2π).

A forma mais geral da função secante tem dois parâmetros *A* e *b* reais:

f(x) = A· sec(b· x).

(6.11)

A variação destes parâmetros determina a posição da função no gráfico, analogamente à função cosseno.

10.6.7 Função cossecante

Prolongando a reta que define o ângulo *x* nos quadrantes I e II, no círculo trigonométrico, até o eixo das cotangentes, obtém-se um segmento de reta, da origem até aquele eixo, como ilustra a Fig. 6.13. Nesses quadrantes a cossecante é positiva.

Cossecante

A distância (*OP*) corresponde à *cosec(x)*= *OP* , como ilustra a Fig. 6.13.

Para ângulos do III e IV quadrantes, prolonga-se a reta que define o ângulo *x* até um eixo simétrico ao eixo das cotangentes, em relação ao eixo dos cossenos. Nesses quadrantes a cossecante é negativa.

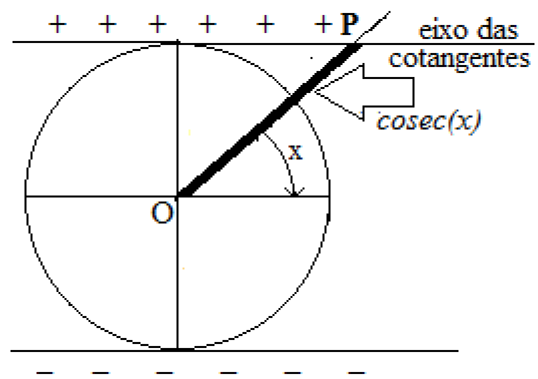


Figura 6.13 - Função cossecante

O sinal da função cossecante é o mesmo da função seno: positivo nos quadrantes I e II e negativo nos quadrantes III e IV.

Na Fig. 6.13, observa-se que:

1. $cosec(90°) = 1$ e $cosec(270°) = -1$.
2. A cossecante dos ângulos 0^o e $180°$ não existem: $cosec(0°) = \nexists$; $cosec(180°) = \nexists$.
3. Na medida em que *x* cresce no quadrante I, a cossecante decresce (tende a 1).
4. Na medida em que *x* cresce no quadrante II, a cossecante cresce (tende a infinito).
5. Na medida em que *x* cresce no quadrante III, a cossecante cresce (tende a 1).
6. Na medida em que *x* cresce no quadrante IV, a cossecante decresce (tende a menos infinito).
7. A cossecante varia entre menos infinito e -1 e entre 1 e mais infinito:
   $- \leq cosec(x) \leq -1$ e $1 \leq cosec(x) \leq +$.
8. $cosec(x) = -cosec(-x)$.

A função *cossecante* associa a cada ângulo (ou arco) *x*, o valor da cossecante desse ângulo (arco).

$$f(x) = cosec(x). \qquad (6.12)$$

Atribuindo valores a *x* e calculando os respectivos valores de $y = cosec(x)$, obtém-se os conjuntos *X* e *Y*. Os pares ordenados (x,y) formam a curva da função cossecante, como ilustra a Fig. 6.14.

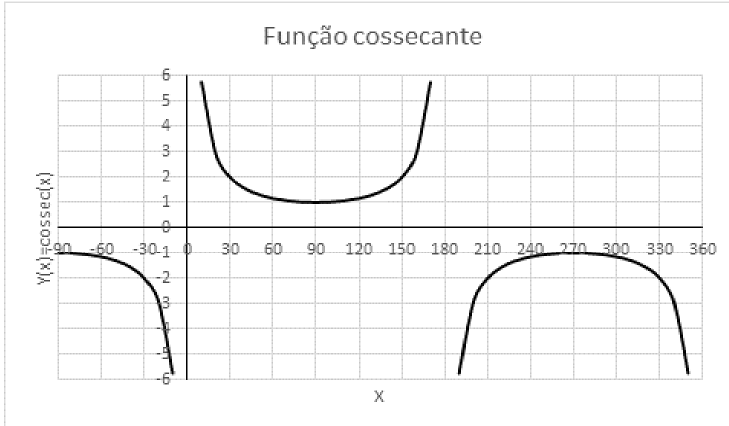


Figura 6.14 - Função cossecante

Domínio e imagem da função cossecante

A função cossecante *f(x) = cosec(x)* é definida para qualquer valor de *x* real, **exceto** para ângulos múltiplos de 180°(ou de arcos π). Assim, seu domínio é:

$D_m f(x) = \{x \in R/x \neq \pm n \cdot \pi\}$, para *n=0,1,2,3,...*

O conjunto imagem da função cossecante é:

$I_m f(x) = \{y \in\ R/-\ \leq y \leq -1 ou\ \ 1 \leq y \leq +\}$.

Período da função cossecante

A cossecante, assim como as funções seno e cosseno, é uma *função cíclica* (que se repete ao longo do domínio). Observe-se na Fig. 6.14 que entre 0°e +360°a função cossecante tem um ciclo sem repetições. O mesmo ocorre entre -90°e +270°, dentre outros intervalos em *x*, cujo comprimento é 360°(ou 2π). Por isso, o *período T* da função cossecante *f(x) = cosec(x)* é 360°(ou 2π).

A forma mais geral da função cosecante tem dois parâmetros *A* e *b* reais:

f(x) = A· cosec(b· x).

(6.13)

A variação destes parâmetros determina a posição da função no gráfico, analogamente ao estudo realizado com as demais funções trigonométricas.

EXERCÍCIOS 10.6

10.6.1 Desenhe os arcos dos seguintes ângulos, no círculo trigonométrico:

a) *225°*

b) *-60°*

c) *-120°*

d) *420°*

e) *-135°*

10.6.2 Desenhe os ângulos dos seguintes arcos, no círculo trigonométrico:

a) $5\pi /4$

b) $-\pi /4$

c) $10\pi /3$

d) $-13\pi /6$

e) $-7\pi /4$

10.6.3 Determine os senos e cossenos dos seguintes arcos usando calculadora:

a) $\pi /4$

b) $-\pi /4$

c) $4\pi /3$

d) $5\pi /6$

e) $-3\pi /4$

10.6.4 Faça um círculo trigonométrico de raio *1 dm*, projete e meça os senos e cossenos dos seguintes arcos. Compare as medidas obtidas com os resultados do exercício anterior.

a) $\pi /4$

b) $-\pi /4$

) $4\pi /3$

d) $5\pi /6$

e) $-3\pi /4$

10.6.5 Projete e meça os senos e cossenos no círculo trigonométrico de raio *1 dm*. Confira os valores medidos com a calculadora.

	30°	70°	120°	210°	-80°	-150°
seno						
cosseno						
tangente						

10.6.6 Usando apenas o círculo trigonométrico (sem usar a calculadora) determine o senos e cossenos dos seguintes ângulos:

a) *0º*

b) 90°

c) 270°

d) 360°

e) -180°

10.6.7 Usando apenas o círculo trigonométrico (sem usar a calculadora) determine o sinal dos senos e cossenos dos seguintes ângulos:

a) 25^o

b) 110°

c) -125°

d) 240°

e) -265°

10.6.8 Usando apenas o círculo trigonométrico, complete o quadro com os sinais de senos, cossenos e tangentes em cada quadrante.

	I	II	III	IV
Senos				
Cossenos				
Tangentes				

10.6.9 Mostre que $cos(x)=cos(-x)$ usando as projeções de cosseno no círculo trigonométrico.

10.6.10 Mostre que $sen\ (x) = -sen(-x)$ usando as projeções de seno no círculo trigonométrico.

10.6.11 Explique, usando as projeções de seno no círculo trigonométrico, porque para qualquer ângulo x, $-1 \leq sen(x) \leq 1$.

10.6.12 Faça o gráfico (manualmente) de um período da função $f(x) = sen(x)$ e a partir deste, faça o gráficos das funções dadas, interpretando o significado gráfico da variação dos coeficientes.

a) $F(x) = 2sen(x)$
c) $Q(x) = -2sen(x)$
e) $J(x) = sen(-x)$

b) $G(x) = sen(2x)$
d) $R(x) = sen(-2x)$
f) $M(x) = -sen(-x)$

10.6.13 Faça o gráfico (manualmente) de um período da função $g(x) = cos(x)$ e a partir deste, faça o gráficos das funções dadas, interpretando o significado gráfico da variação dos coeficientes.

a) $f(x) = 2cos(x)$
b) $K(x) = -2cos(x)$
c) $L(x) = cos(-2x)$
d) $N(x) = cos(2x)$

10.6.14 Faça os gráficos dos dois exercícios anteriores usando uma planilha eletrônica e compare com os gráficos feitos manualmente.

10.6.15 Faça um círculo trigonométrico de raio $1\ dm$, projete e meça as tangentes e cotangentes dos seguintes arcos. (Confira com a calculadora).

a) $\pi /4$

b) $-\pi /4$

c) $4\pi/3$

d) $5\pi/6$

e) $-3\pi/4$

10.6.16 Explique porque *tg (90°)* e *cotg(180°)* não existem:

a) Usando o círculo trigonométrico

b) Usando a definição de tangente e cotangente.

10.6.17 Faça os gráficos (manualmente e com planilha eletrônica) de um período das funções dadas:

a) $f(x) = 2tg(x)$

b) $g(x) = cotg(2x)$

c) $F(x) = 2tg(2x)$

d) $G(x) = 2cotg(x)$

10.6.18 Faça um círculo trigonométrico de raio *1 dm*, projete e meça as secantes e cossecantes dos seguintes arcos. (Confira com a calculadora).

a) $\pi/4$

b) $-\pi/4$

c) $4\pi/3$

d) $5\pi/6$

e) $-3\pi/4$

10.6.19 Explique porque *sec (90°)* e *cosec(0°)* não existem:

a) Usando o círculo trigonométrico

b) Usando a definição de secante e cossecante.

10.6.20 Faça os gráficos (manualmente e com planilha eletrônica) de um período das funções dadas:

a) $f(x) = 2sec(x)$

b) $g(x) = cosec(4x)$

c) $F(x) = 3cosec(2x)$

d) $G(x) = 4sec(3x)$

10.6.21 Faça os gráficos das funções usando uma planilha eletrônica:

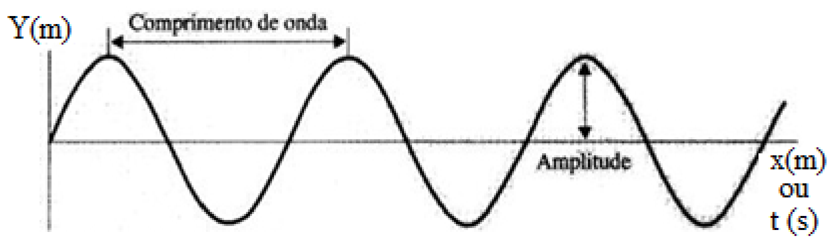
a) $f(x) = sen(x)cos(x)$

b) $G(x) = sen^2(3x)$

c) $g(x) = sen^2(x)$

d) $f(x) = x \cdot sen(x)$

10.6.22 Três conceitos definem uma onda sonora: o *comprimento de onda* (λ , *m*), a *frequência* (*f*, *Hz*) e *intensidade (I, m)*. O comprimento de onda é a distância de um ciclo da onda. A intensidade é a altura da onda e a frequência é o número de oscilações que a onda faz por unidade de tempo. A Figura abaixo ilustra estas variáveis.



Os sons graves (voz masculina, sons do contrabaixo ou cordas grossas do violão) têm frequências baixas. Os sons agudos (voz feminina, cordas finas do violão) têm frequências altas. Cada nota musical tem uma frequência característica, p.ex. *La = 440 Hz*. Isto significa que ao tocar um La ocorrem 440 vibrações em 1 segundo.

O volume do som está associado com a intensidade. Quanto maior o volume, maior a intensidade.

Sabendo que as frequências das notas MI e Do são 330 e 264 Hz, respectivamente, faça o gráfico das ondas para La, Mi e Do. Use a seguinte equação de onda:

$Y(x) = I \cdot sen(f \cdot t)$ onde Y é a altura (m), f é a frequência (Hz) e t é *o* tempo (s).

10.7 Funções arco e equações trigonométricas

As funções arco são as *funções inversas* das funções trigonométricas estudadas nos capítulos anteriores.

Pela definição de função inversa, tem-se que:

f(x) e *g(x)* são inversas se: $f[g(x)] = x$ e $g[f(x)] = x$.

Duas propriedades das funções inversas devem ser lembradas:

1. O domínio de f é a imagem de f^{-1} e vice-versa.
2. Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à função identidade $y = x$.

Exemplo 10.7.1. Determine a função inversa de $y=f(x) = x^2$.

Solução: A inversão de funções $y = f(x)$ é obtida com as seguintes operações (ver capítulo de funções logarítmicas):

1°) Resolver a função para x:

Aplicando raiz quadrada em ambos os lados da equação dada, tem-se:

$$\pm\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = x$$

2°) Trocar as x por y *e* y por x.

$$y = \pm\sqrt{x}$$

A função obtida satisfaz a definição de função inversa, portanto,

$$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$$

Porém, f^{-1} NÃO É FUNÇÃO, pois para cada $x > 0$, tem-se dois valores de y correspondentes, como mostra a Fig. 7.1.

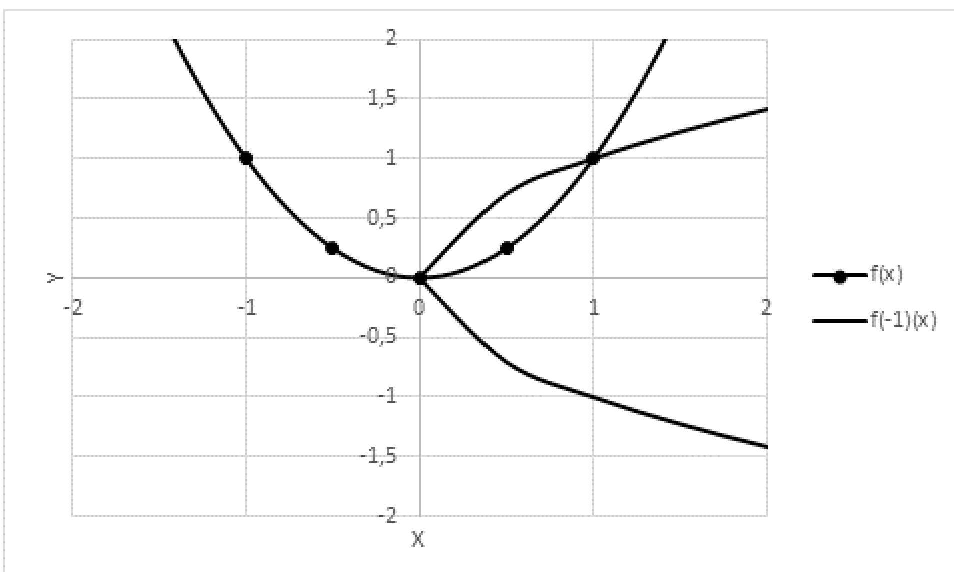


Figura 7.1 - Visualização da restrição do domínio de $y=f(x) = x^2$ para que $f^{-1}(x)$ seja função.

Para que $y=f(x) = x^2$ tenha inversas, é necessário *restringir o domínio de f(x)*: Seja a função $y_1=f_1(x) = x^2$ definida para $x > 0$. Aplicando os passos para inversão em y_1, obtém-se a função $f_1^{-1}(x) = f_2(x) = +\sqrt{x}$.

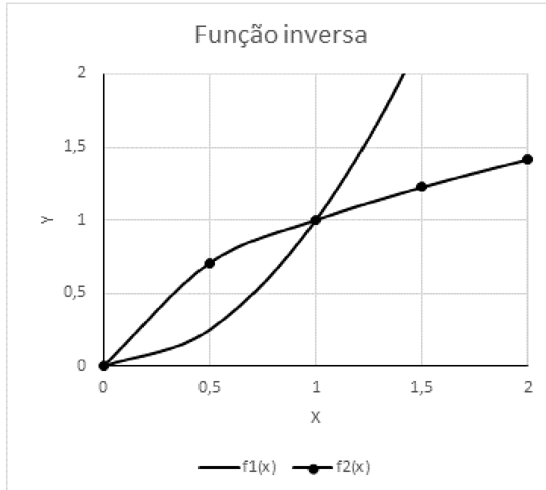


Figura 7.2 - Funções inversas: $f_1(x)$ e $f_1^{-1}(x) = f_2(x)$

As funções $f_1(x)$ e $f_1^{-1}(x)$ satisfazem a definição de função inversa; o domínio de $f_1(x)$ é a imagem de $f_1^{-1}(x)$ e são simétricas em relação à função identidade, como mostra a Fig. 7.2 ■

10.7.1 As funções arco

Para definir a função inversa das funções arco é necessário *restringir domínio* das funções diretas para (analogamente ao Ex. 7.1) apenas um período *[-π /2,π /2],* porque além deste domínio, a inversa não satisfaria o conceito de função.

Definição 10.7.1. A função *arco seno*, denotada por

y = f(x) = arcsen(x)

associa um arco *y* a cada valor de seno de *x*.

Exemplo 10.7.2. Faça o gráfico, determine o domínio e a imagem das funções

f(x) = arcsen(x) .

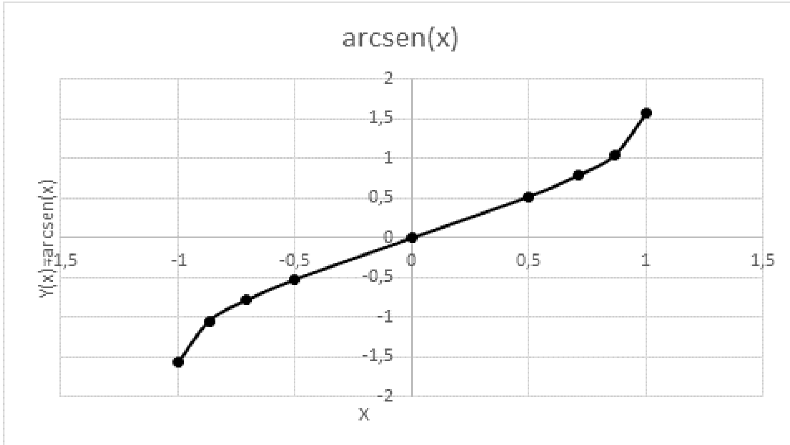
Solução: Seja um conjunto de valores de senos

X={ *-1, -0.86, -0.707, -0.5,0 , 0.5, 0.707, 0.86, 1*} .

O conjunto *Y = f(x)= arcsen(x)* será composto pelos *arcos cujos senos* correspondem aos elementos de X.

Y={ *-π /2, -π /3, -π /4, -π /6, 0, π /6, π /4, π /3, π /2* } .

Pela Def. 7.1, a função *arcsen(x)* associa os elementos dos conjuntos X e Y, como ilustra a figura abaixo.



Como pode-se observar no gráfico, o domínio da função *arcsen(x)* é:

$D_m f(x) = \{x \in R / -1 \leq x \leq 1\}$.

A imagem da função *arcsen(x)* é:

$I_m f(x) = \{y \in \; R / -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ ■

Exemplo 10.7.3. Verifique se as funções *f(x) = arcsen(x)* e *g(x) =sen(x)* são inversas, conferindo:

1. pela definição
2. pela igualdade dos domínios e imagens e
3. pela propriedade de simetria em relação à função identidade.

Solução: (i) Pela definição de função inversa, tem-se:

$g[f(x)] = x$. Então deve ser verdade que a*rcsen(sen(x)) = x* .

Seguem alguns exemplos:

•Seja *x = π /6*. Pergunta-se: a*rcsen(sen(π /6)) = ?.*

Mas*, sen(π /6)=0,5.* Então a*rcsen(sen(π /6))=*a*rcsen(0,5)* .

Qual é o arco cujo seno é 0,5? π /6. Portanto,

a*rcsen(sen(π /6))=*a*rcsen(0,5) = π /6 = x.*

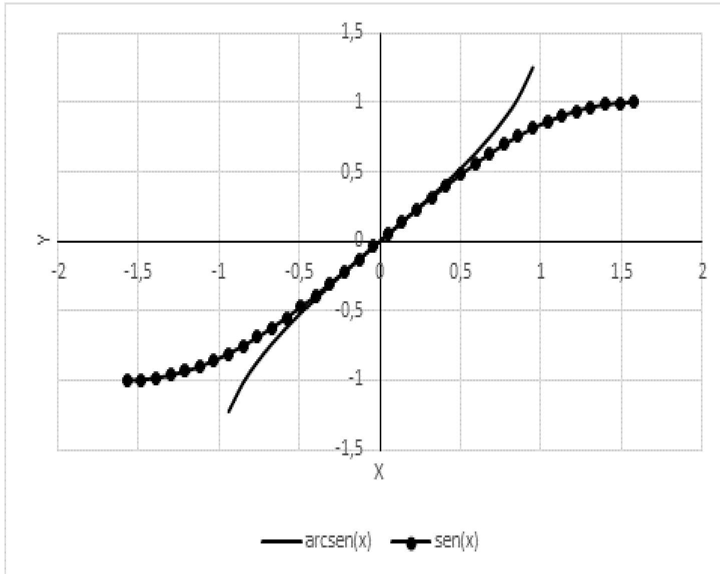
•Se *x = π /4*, tem-se a*rcsen(sen(π /4))=* a*rcsen(0,707) = π /4 = x.*

•Se *x = π /2*, tem-se a*rcsen(sen(π /2))=* a*rcsen(1) = π /2 = x.*

•Se *x = 0*, tem-se a*rcsen(sen(0))=* a*rcsen(0) = 0 = x* .

(ii) Restringindo o domínio da função *g(x) =sen(x)* apenas para *[-π /2,π /2]*, tem-se:

$D_m f(x) = I_m g(x) = [-1, 1]$ e $D_m g(x) = I_m f(x) = [-\pi/2, \pi/2]$.



(iii) A figura acima mostra a simetria de *arcsen(x)* e *sem(x)* em relação à função identidade $y = x$ no domínio *[-1,1]* ■

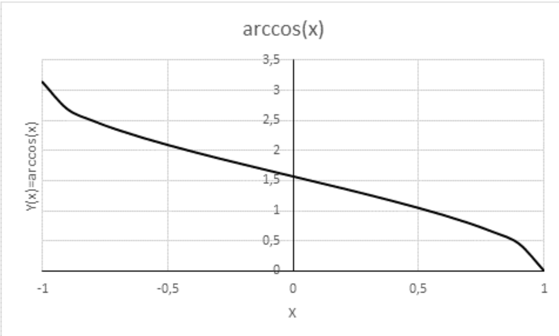
Outras funções arco

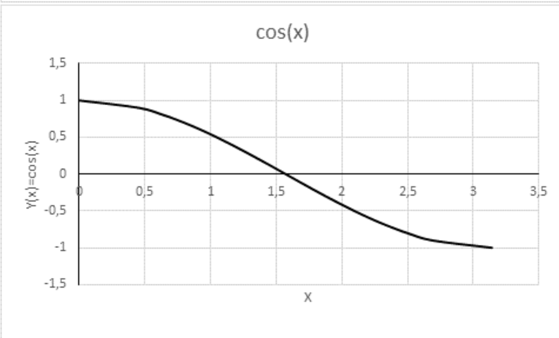
As conclusões apresentadas acima sobre a função *arcsen(x)* podem ser estendidas para as demais funções trigonométricas. Assim, pode-se definir também outras funções arco:
f(x) = arccos(x) *f(x) = arctg(x)*
f(x) = arcsec(x) *f(x) = arccosec(x).*
e *f(x) = arccotg(x)*

Exemplo 10.7.4. Faça o gráfico e defina o domínio e a imagem das funções inversas

f(x) = arccos(x) e *g(x) =cos(x)*.

Solução: Analogamente ao Ex. 7.1, o gráfico das funções dadas é obtido definindo os conjuntos X e Y e plotando os pares ordenados no gráfico cartesiano.





$$f(x) = arccos(x) \qquad \text{(gx =cosx.)}$$

$$D_m f(x) = \{x \in R / -1 \leq x \leq 1\} \qquad ()$$

$$I_m f(x) = \{y \in R / 0 \leq y \leq \pi\} \qquad ()$$

Como pode-se observar na tabela acima, $D_m f(x) = I_m g(x)$ e $I_m f(x) = D_m g(x)$ ■

10.7.2 Equações trigonométricas

Definição 10.7.2. Uma equação é trigonométrica se, em ao menos um dos membros da igualdade, a variável estiver no arco de uma função trigonométrica.

Exemplos:

1) *sen x + cos x = 1* e *sen 2x = cos2 x* são equações trigonométricas.

2) $x + (tg\ 30°).\ x^2 = 0$ e $x + sen\ 60° = 0$ não são equações trigonométricas pois as variáveis não estão nos arcos das funções trigonométricas.

Solução das equações trigonométricas

1. $x = r$ é uma *raiz* ou *solução* da equação trigonométrica $f(x) = g(x)$ se r for elemento do domínio de f e g e se $f(r) = g(r)$.

2. O conjunto solução S é o conjunto de todas as raízes $x = r$ da equação.

Exemplo 10.7.5. Determine o conjunto solução de:

1. *cos(x) = 0.*
2. *sen(x) = 1.*

Solução:

1. Procura-se valores de x reais, tal que *cos(x) = 0.* Examinando no círculo trigonométrico, observa-se que os arcos cujo cosseno é 0, são: $\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},\pm\frac{5\pi}{2},\pm\frac{7\pi}{2},\pm\frac{9\pi}{2},\ldots,\pm\frac{(2n+1)\pi}{2}$, sendo *n = 0,1,2,3,4...*

   Portanto, $S=\{x\in R/x=\pm\frac{(2n-1)\pi}{2}\}$ sendo *n = 0,1,2,3,4...*

2. Procura-se valores de x reais, tal que *sen (x) = 1.* Examinando no círculo trigonométrico, observa-se que os arcos cujo seno é 1, são: os arcos positivos $\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{9\pi}{2},\frac{13\pi}{2},\frac{17\pi}{2},\ldots,\frac{(4n+1)\pi}{2}$ para *n = 0,1,2,3,4...* e os negativos $-\frac{3\pi}{2},-\frac{7\pi}{2},-\frac{11\pi}{2},\ldots,\pm\frac{(4m-1)\pi}{2}$, para *m = 1,2,3,4...*

Portanto, $S=\{x\in R/x=\frac{(4n+1)\pi}{2} oux=\frac{(4m-1)\pi}{2}\}$ *n = 0,1,2,3,4...* e *m=1,2,3,4...* ■

Exemplo 10.7.6. Determine o conjunto solução de *cos(2x+1) = 0,* no domínio R^{+}.

Solução: Usando a função inversa *arcos* em ambos os lados da equação, tem-se: *arcos*(*cos (2x+1)) = arcos(0).* Pela definição das funções inversas, tem-se:

2x+1 = arcos(0).

Quais são os arcos positivos cujo cosseno é zero? $\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2},\ldots,\frac{(2n+1)\pi}{2}$. Então,

$2x+1=\frac{(2n+1)\pi}{2}$ sendo *n = 0,1,2,3,4...* Resolvendo para *x,* tem-se:

$x=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}-1\right]$ ou

$S=\{x\in R/x=\frac{1}{4}\cdot[(2n+1)\pi-2]\}$ sendo *n = 0,1,2,3,4...* ■

Exemplo 10.7.7. Determine o conjunto das soluções no intervalo *[-90°,90°].*

a) *sen(x) = 0,45*
b) *cos(y) = 0,23 .*

Solução: Como esses valores de seno e cosseno não são facilmente verificados através do círculo trigonométrico, ou arcos conhecidos, é necessário utilizar a calculadora (ou uma tabela se senos e cossenos):

1°) Ajuste a calculadora para obter a resposta em ângulo (Tecla “DRG” . Deixe na posição D);

2°) Entre com o valor do seno ou cosseno de x;

3°) Use as teclas de função inversa, geralmente “INV” e a tecla da função trigonométrica (isso corresponde a arcsen, arcos,...). O resultado é o ângulo correspondente no intervalo *[-90°,90°].*

1. *arcsen(sen (0,45)) = 26,74366°* . Esse resultado corresponde a solução no quadrante I: $S = \{x \in R/x = 26,74366^o\}$.

2. Usando procedimento semelhante, obtém-se:

arccos(cos (0,23)) = 76,70292° . Esse resultado corresponde a solução no quadrante I. No quadrante II, a solução é - *76,70292°*, pois *cos(x)=cos(-x)*. Então,

$S = \{y \in R/y = \pm 76,70292^o\}$ ■

Exemplo 10.7.8. Resolva a equação trigonométrica**:** 2*sen(3x) = 0*

Solução: Dividindo a equação dada por *2* (propriedade fundamental das equações), tem-se:

sen(3x) = 0. Aplicando a função inversa do seno: *arc sen(x)* em ambos os lados da equação, tem-se:

arcsen(sen (3x)) = arcsen(0). No lado direito, procura-se arcos cujos senos sejam nulos: 0, $\pm\ \pi$, $\pm\ 2\pi$, . . . , $\pm\ n\ \pi$.

3x = $\pm\ n\pi$, para *n=0,1,2,3,4,...* , pois o seno é nulo para $\pm\ n\pi$. Assim,

$S = \{x \in R/x = \pm\frac{n\pi}{3}\}$ para *n=0,1,2,3,4,...* ■

EXERCÍCIOS 10.7

10.7.1 Encontre um valor positivo ou nulo dos seguintes arcos:

a) *arcsen(0)*

b) *arcsen(-1)*

c) *arcos(1)*

d) *arccos(-1)*

e) *arctg(1)*

f) *arcotg(-1)*

g) *arctg(0)*

h) *arcotg(1)*

i) *arcsec(-1)*

j) *arcosec(-1)*

k) *arcosec(2)*

l) *arcsec(1)*

10.7.2 Determine as raízes positivas de cada equação:

a) *sen(x) = 0*

b) *cos(2x) = 0*

c) *sen(3x) = 0*

d) *cos(5x) = 0*

10.7.3 Escreva todas as raízes de cada função:

a) *y= sen(x)*

b) *y=cos(2x)*

c) *y=sen(3x)*

d) *y=cos(5x)*

10.7.4 Determine todas as soluções da equação: *1= cos(x)* .

a) *cos(x)=1*

b) *tg(x)=1*

10.7.5 Verifique se as funções dadas são inversas:

a) *y= 3x* e *y= 1/3x*

b) $y=x^3$ e $y = \sqrt[3]{x}$

c) $y=x^4$ e $y = \sqrt[4]{x}$

10.7.6 Trace um esboço do gráfico das funções: (confira seus resultados com uma planilha eletrônica)

a) *y= 0,5arcsen(x)*

b) *y=arcos(2x)*

c) *y=2arcsen(x)*

d) *y= 0,5arcsec(x)*

e) *y=2arctg(0,5x)*

f) *y=2arcotg(x)*

10.8 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESPOSTAS 10.2

10.2.1 a) 30°b) 107°c) 95°d) 42°

10.2.2 a) c = 25,13 cm

b) c = 3,14 m
c) c = 62,83 m

d) c = 15,707 km

10.2.3 a) r = 0,9994 $\sim$ 1 cm b) r = 1,59 m

c) r = 0,397 cm

d) r = 15,91 mm

10.2.4 c_1 = 68.05 cm e c_2 = 70,06 cm.

10.2.5 d = 5421,53 m^3.

10.2.6 A soma dos ângulos internos do polígono de 5 lados é S_5 = 540°.

10.2.7 a) π /15

b) 5π /6

c) 2π /3

d) 11π /6

e) π f) 5π /3

g) 7π /6

10.2.8 a) 45°

b) 120°

c) 135°

d) 225°

e) 150°f) 240°

g) 420°

10.2.9 c = 323,58 mm

10.2.10 99°8' 7" .

10.2.11 Cada ângulo igual mede 60°28' 25" .

Questão	a	b	c	d	e
ângulos	50°	15°	75°	80°	20°
complementar	40°	75°	15°	10°	70°
suplementar	130°	165°	105°	100°	160°
replementar	310°	345°	285°	280°	340°

10.2.12

10.2.13 55°24' 40" .

RESPOSTAS 10.3

10.3.1 a = 2 cm e x = 3 cm.

10.3.2 Alguns exemplos: 6,4 e 10 ; 30, 40 e 50; 21, 28 e 35.

10.3.3 a) c = 13 cm
b) b= $5\sqrt{3}$ cm
c) a = 12 cm
d) $\sqrt{29}$ cm

10.3.4 a) m =16/5 n=9/5 b) m = h = $2\sqrt{2}$

10.3.5 a) "a" é o lado. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. b) A $= \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

10.3.6 a) "a" é a hipotenusa: $a = m\sqrt{2}$. b) $h = \frac{m\sqrt{2}}{2}$

10.3.7 a) h = 1,4 m

b) 4,237 m é o lado inclinado.

10.3.8 $R_1 = 3\ m$; $R_2 = 0{,}65\ m$; $R_3 = 1{,}30\ m$ e $R_4 = 3{,}11\ m$.

10.3.10 $AC = 30m$.

10.3.11 a) $d = 4\sqrt{2}$ cm b) $d = \sqrt{41}$ cm
c) h=3,12 cm.

10.3.12 D=16cm e d=8cm.

RESPOSTAS 10.4

10.4.1

Questão	x	seno		cosseno		tangente	
a	5	4/5	3/5	3/5	4/5	4/3	3/4
b	4,15	0,6384	0,7692	0,7692	0,6384	0,83	1,2048
c	8,6	0,8139	0,5813	0,5813	0,8139	1,4	0,7142
d	4,49	0,5555	0,8314	0,8314	0,5555	0,6681	1,4966

10.4.2

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
46°	0,47193	0,6946	1,0355
41,4096	0,6614	$\frac{3}{4}$	0,8819
71,5650	0,9486	0,3162	3
59,3165	0,86	0,5103	1,6853

10.4.3

Questão	ângulo	tangente	cotangente	secante	cossecante
a	14°	0,2493	4,0112	1,0306	4,1336
b	45°	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
c	30°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
d	60°	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

10.4.4 a) H = 33,33 m b) H = 13,60 m c) H = 25 m.

10.4.5 $AC = 173,20m$.

RESPOSTAS 10.5

10.5.2 a) = 32,7040°; = *0,5707* .

b) *cos()=.84147*

c) *cos(2)*=0,41615

d) *sen(2)= 0.90929*

10.5.3 a) y = 92°e y = 1,6057

b) sen(y) = 0,9993

10.5.4 a) *sen(π /8) = 0,3826;*

b) cos(*π /4)= 0,70710.*

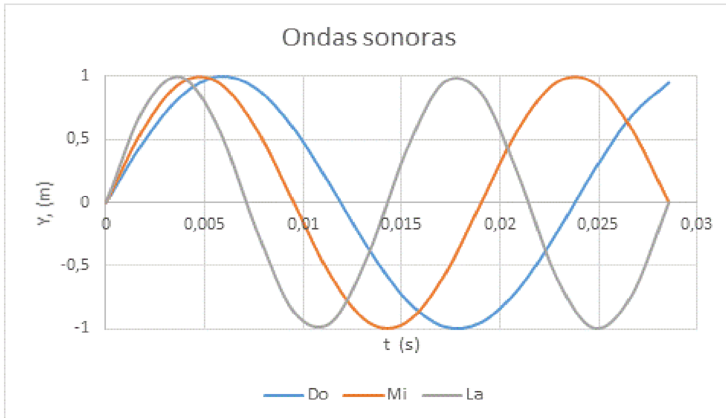
c) cos(*π /16)= 0,98078.*

RESPOSTAS 10.6

10.6.8

	I	II	III	IV
Senos	+	+	-	-
Cossenos	+	-	-	+
Tangentes	+	-	+	-

10.6.22 Quanto *maior* a frequência *maior* o número de oscilações e *menor* o comprimento de onda. Na mesma escala, Do < Mi < La. Do é a mais grave (menor frequência, menos oscilações) e La a mais aguda (maior frequência, mais oscilações).



RESPOSTAS 10.7

10.7.1 a) *arcsen(0)*= 0

b) *arcsen(-1)*= $\frac{3\pi}{2}$

c) *arcos(1)= 0*

d) *arccos(-1)*=π

e) *arctg(1)*= π /4

f) *arcotg(-1)*=- 3π /4

g) *arctg(0)*= π /2

h) *arcotg(1)*= π /4

i) *arcsec(-1)*= π

j) *arcosec(-1)*= 3π /2

k) *arcosec(2)*= π /6

l) *arcsec(1)=0*

10.7.2 a) $S=\{x\in R/x=n\pi\}$ para *n=0,1,2,3,4,...*

b) $S=\{x\in R/x=\frac{(2n+1)\pi}{4}\}$ para *n=0,1,2,3,4,...*

c) $S=\{x\in R/x=\frac{n\pi}{3}\}$ para *n=0,1,2,3,4,...*

d) $S=\{x\in R/x=\frac{(2n+1)\pi}{10}\}$ para *n=0,1,2,3,4,...*

10.7.3 a) $S=\{x\in R/x=\pm n\pi\}$ para *n=0,1,2,3,4,...*

b) $S=\{x\in R/x=\pm\frac{(2n+1)\pi}{4}\}$ para *n=0,1,2,3,4,...*

c) $S=\{x\in R/x=\pm\frac{n\pi}{3}\}$ para *n=0,1,2,3,4,...*

d) $S=\{x\in R/x=\pm\frac{(2n+1)\pi}{10}\}$ para *n=0,1,2,3,4,...*

10.7.4 a) $S=\{x\in R/x=\pm 2n\pi\}$ para *n=0,1,2,3,4,...*

b) $S=\{x\in R/x=\frac{(4n+1)\pi}{4}\}$ para *n=0,1,2,3,4,...*

10.7.5 a) São inversas para qualquer $x\in R$.

b) São inversas para qualquer $x\in R$.

c) Para $x\in R/x\leq 0$ a inversa de y=x^4 é $y=-\sqrt[4]{x}$.

Para $x\in R/x\geq 0$ a inversa de y=x^4 é $y=\sqrt[4]{x}$.

Capítulo 11

Outras Funções