Livro Matemática C

Pedro Borges

MARÇO/2015

Sumário

Capítulo 1

Conjuntos Numéricos

1.1 Introdução

A criação dos números, como conhecemos hoje, é produto da evolução de ideias sobre como representar determinadas grandezas, resolver problemas geométricos, problemas aplicados às ciências e resolução de equações.

A noção de número inteiro foi criada pela necessidade de contar objetos, animais e pessoas. Nossos antepassados contavam somente até dois, a partir disto, o conjunto de coisas era dado como "muitos"(BOYER, p.2). Alguns índios, até hoje, têm dificuldades em contar até três (KARLSON, p.5). Inicialmente o homem contava com os dedos, com grãos, com pequenas pedras ou fazendo marcas em bastões, relacionando a eles os objetos de seu interesse: uma pedra, um búfalo; uma família, os dedos de uma mão. É a contagem por correspondência um a um.

Cada cultura desenvolveu uma representação simbólica. Os egípcios, antes de 5.000 a.C. usavam um sistema de numeração com barras e figuras para resolver problemas bem mais complexos do que a simples contagem. Os romanos criaram um sistema de representação com letras, mas com limitações para efetuar operações. Os hindus, por volta de 595 d.C. usavam nove símbolos, e dois séculos depois, incluíram o zero, completando um sistema de numeração posicional, com algoritmos eficientes para operações, que os árabes divu/lgaram pela Europa, mais tarde.

Problemas de comércio e contabilidade motivaram o uso de sinais em números para representar ganhos e perdas. Diofanto já operava com negativos, no século III.

Os povos antigos (egípcios, mesopotâmios, hindus e chineses) enunciaram e resolveram problemas algébricos e geométricos, cujas soluções era não inteira, evidenciando o conhecimento e uso de números fracionários. Os pitagóricos (século V a.C.) não conseguiram explicar a natureza do número que representa a medida da diagonal de um quadrado e com isso geraram a necessidade de criar números não racionais.

Durante o século XIX e século XX o movimento de axiomatização da matemática levou à construção dos conjuntos numéricos, com base na teoria dos conjuntos. Tal construção foi desenvolvida por Giuseppe Peano.

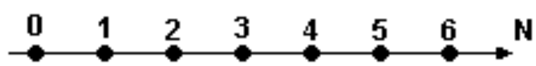
O conhecimento sobre a natureza dos números é importante para as ciências puras e aplicadas, apesar do senso comum reduzir as aplicações a números inteiros ou fracionários (no sentido de não inteiro). O número de funcionários de uma empresa, de carros, de pizzas, de sapatos, de vacas, ..., são quantidades inteiras. Não se pode considerar meio funcionário, meio carro ou meia vaca. O tempo, os valores monetários, o número de toneladas (massa) de arroz, soja, feijão, ..., são variáveis fracionárias. Trabalhamos com meia hora, com meio dólar, etc. Porém, o comprimento da hipotenusa de uma tesoura triangular de telhado pode ser aproximado por um número fracionário finito, mas é um número irracional, para a grande maioria dos casos. Da mesma forma, grandezas da eletricidade requerem a definição de números não reais, chamados de complexos. Assim, para entendermos as expressões matemáticas das variáveis, com clareza e precisão, precisamos conhecer os tipos de números, suas propriedades e operações.

1.2 Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$)

A contagem de quantidades inteiras de animais, pessoas ou coisas, foi provavelmente, o que motivou a criação dos números naturais.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

O conjunto dos números naturais é infinito e pode ser representado em uma reta numerada com pontos cheios:



Os intervalos no conjunto dos números naturais são escritos usando os símbolos

$>$ maior

$<$ menor

$\geq$ maior ou igual e

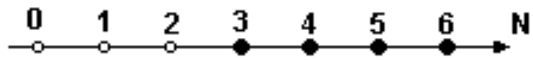
$\leq$ menor ou igual.

Vejamos os exemplos:

Exemplo 1.2.1. Escreva os elementos do conjunto A=$\{x \in \mathbb{N} / x > 2\}$ (Lê-se: x pertence aos Naturais, tal que x é maior do que 2) e represente-os em uma reta.

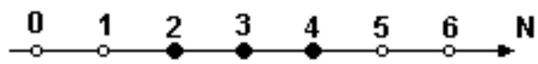
Solução: Escrevendo os elementos de A, temos: A= $\{3, 4, 5, 6, 7, ...\}$.

Mostrando esse conjunto na reta dos números naturais, colocamos pontos cheios pretos para os elementos do conjunto **A e vazios para os elementos que não pertencem ao conjunto A.**

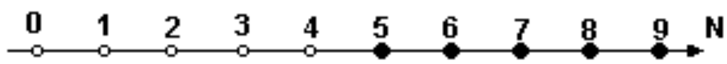


Exemplo 1.2.2. Escreva os elementos do conjunto B=$\{x \in \mathbb{N}/1 < x < 5\}$ (Lê-se: x pertence aos Naturais, tal que x é maior do que 1 e menor do que 5. (ou, x pertence aos Naturais , tal que 1 é menor do que x e x é menor do que 5) e represente-os em uma reta.

Solução: Usando a mesma representação do Exemplo 2.1, temos: B=$\{2,3,4\}$. Mostrando esse conjunto na reta dos números naturais, temos:



Exemplo 1.2.3. Escreva os elementos do conjunto C, representado na reta numerada:



Solução: Podemos escrever os elementos desse conjunto de duas maneiras: por extensão (descrevendo um a um)

$$C = \{5,6,7,8,9,10,\dots\}$$

ou usando os símbolos de desigualdade

$C = \{x \in \mathbb{N}/x5\}$ ou ainda $C = \{x \in \mathbb{N}/x > 4\}$ ■

EXERCÍCIOS 1.2

1.2.1 Escreva por extensão os elementos dos conjuntos:

a) A=$\{x \in \mathbb{N}/x > 5\}$

b) B=$\{x \in \mathbb{N}/1 < x < 10\}$

c) C=$\{x \in \mathbb{N}/x \leq 6\}$

d) D=$\{x \in \mathbb{N}/2 \leq x < 8\}$

e) E=$\{x \in \mathbb{N}/2 < x \leq 5\}$

f) F=$\{x \in \mathbb{N}/2 > x$ ou $x > 5\}$

1.2.2 Represente os conjuntos do Ex.1 graficamente.

1.2.3 Verifique se as quantidades das grandezas abaixo podem ser expressas com números naturais:

a) População de uma cidade.

b) Número de porcos criados em uma granja por ano.

c) A velocidade de uma pessoa em uma corrida de maratona.

d) O número de escovas de dentes produzido mensalmente por uma indústria.

e) A taxa de variação da cesta básica em um estado do Brasil em um determinado mês.

1.2.4 As notas das provas escolares são expressas em números naturais?

1.2.5 Existe um número **natural** X que somado com 5 dê 3? (ou seja: 5 + X = 3)

1.2.6 Verifique se as operações abaixo geram números naturais:

a) 5 + 8 =

b) 3 – 5 =

c) $5 \cdot 8$

d) $8 \div 5 =$

1.3 Conjunto dos Números Inteiros Relativos ($\mathbb{Z}$)

As letras (b) e (d) do Exercício 1.1.6 ilustram problemas de operações com números naturais cuja solução gera números não naturais. Portanto, é necessário admitir a existência de outros tipos de números.

Se as quantidades ou grandezas inteiras mudam seu significado de acordo com um referencial, pode-se representa-las usando um sinal e um número. Vejamos alguns exemplos:

Saldo bancário: se temos dinheiro depositado, dizemos que o saldo é positivo. Se gastamos mais dinheiro do que temos e o banco nos empresta, dizemos que o saldo é negativo. Assim, se o saldo é +3.500,00 reais, significa que temos esse montante na conta. A referência, é o saldo zero. Neste caso, não temos nada, mas também não devemos ao banco.

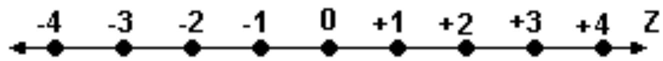
Temperatura: a temperatura é uma grandeza associada ao estado térmico de um corpo: Quanto mais calor o corpo possui, maior será a temperatura e quanto mais frio, menor. Pela escala Celsius, a referência é a temperatura da água congelada: 0 ^{o}C. Assim, na madrugada de um dia de inverno podemos ter temperaturas negativas, como -5^{o}C e ao meio-dia, positivas, como + 15^{o}C.

Taxas de variações: as variações de cotação de moedas, como o dólar, por exemplo, são dadas usando a referência zero, ou seja quando não varia. Assim, +2 significa que o dólar 'caiu'. Essas taxas de variações são muito usadas na economia: na bolsa de valores para indicar a tendência das ações; nas análises de desempenho de empresas (crescimento/decrescimento). Na física, o sinal da velocidade de um corpo indica o sentido do deslocamento.

Os números inteiros relativos podem ser representados da seguinte forma:

$$(\mathbb{Z}) = \{\ldots, -6, -5, -4-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, \ldots\}$$

A representação gráfica do conjunto $\mathbb{Z}$ é:



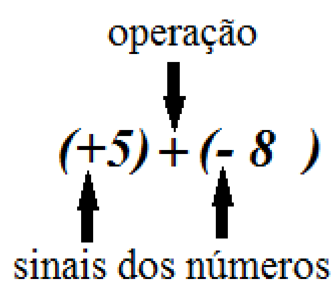
Escrevendo o conjunto $\mathbb{Z}$ usando símbolos, temos:

$\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} / -\infty < x < +\infty\}$.

1.3.1 Operações em $\mathbb{Z}$

Adição e subtração de números inteiros

Ao operar com números inteiros relativos, precisamos identificar inicialmente a operação solicitada e em seguida o sinal dos números.



Regra da adição de dois números inteiros:

sinais iguais $\Rightarrow$ adiciona e usa o mesmo sinal no resultado
sinais diferentes $\Rightarrow$ subtrai e usa o sinal do maior no resultado

Exemplos:

1)$(+5)+(+3) = +5+3 = +8$

2)$(+5)+(-3) = +5-3 = +2$

3)$(-5)+(+3) = -5+3 = -2$

4)$(-5)+(-3) = -5-3 = -8$

Multiplicação e divisão de números inteiros

Regra da Subtração de dois números inteiros

Troca o sinal do segundo número e usa a regra da adição.

Exemplos:

1) $(+5)-(+3)=(+5)+(-3)=+2$

2) $(+5)-(-3)=(+5)+(+3)=+8$

3) $(-5)-(-3)=(-5)+(+3)=-2$

4) $(-5)-(+3)=(-5)+(-3)=-8$

Regra da Multiplicação e Divisão: (para o sinal do resultado)

sinais iguais $\Rightarrow$resultado positivo
sinais diferentes $\Rightarrow$resultado negativo

Exemplos:

1) $(+5)\cdot(+4)=+20$

2) $(+20):(-4)=-5$

3) $(+20):(+4)=+5$

4) $(+5)\cdot(-4)=-20$

Potênciação de números inteiros

Definição 1.3.1. A potência b^n, para o expoente $n \in \mathbb{N}$ e a base $b \in \mathbb{Z}$, é o produto de b, n vezes, por ele mesmo:

expoente

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \quad vezes}$$

base

Exemplos: Calcule (a) 2^4, (b) $(-3)^3$, (c) $(-2)^4$ e (d) -2^4

Solução:

a $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

b $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

c $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

d $-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$

Observemos que:

1. Se a base é positiva ($b > 0$) então $b^n > 0$.
2. Se a base é negativa ($b < 0$) e :

   Se *n é par então* $b^n > 0$

   Se *n é ímpar então* $b^n < 0$.
3. Se a base é 1 ($b = 1$) então $b^n = 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Radiciação de números inteiros

Definição 1.3.2. A raiz *n-ézima,* para $n \in \mathbb{N}$, de um número $b \in \mathbb{Z}$ é $x \in \mathbb{Z}$ se e somente se $x^n = b$.

$$\sqrt[n]{b} = x \Longleftrightarrow x^n = b.$$

Exemplos:

1. $\sqrt[3]{8} = 2 \quad \Longleftrightarrow 2^3 = 8.$
2. $\sqrt[3]{(-8)} = -2 \quad \Longleftrightarrow (-2)^3 = -8.$
3. $\sqrt{10}$ não é um número inteiro, pois $3^2 < 10 < 4^2$.
4. $\sqrt{4} = -2 \quad \Longleftrightarrow (-2)^2 = 4$, mas também$\sqrt{4} = 2 \quad \Longleftrightarrow (2)^2 = 4$.

Então $\sqrt{4} = \pm\, 2$ ■

EXERCÍCIOS 1.3

1.3.1 Resolva as expressões numéricas:

a)$(+15)+(-12)=$

b)$(-15)+(-10)=$

c)$(+8)+(-12)-(+5)=$

d)$(-7)-(-9)-(+3)=$

e)$(+6):(-3)=$

f)$(-7)\cdot(-5)=$

g)$1-(-3)+(-4)=$

h)$-4-[3+5(5-2)]=$

i)$3\cdot(5-8)-(8-3)+6=$

j)$-[-4-3\cdot(7-4)-(2-5)]=$

1.3.2 O saldo bancário de um correntista no dia 1º do mês era de R\$ 3.500,00 e no dia 3, entrou um cheque para ser descontado de R\$ 4.350,00. Qual é o saldo no dia 3 ?

1.3.3 Expresse e resolva as seguintes situações, usando números relativos:

a) Uma pessoa tem 50 reais e **perde** 30 reais.

b) Uma pessoa tem 100 reais e **paga** uma dívida 40.

c) Uma pessoa tem uma **dívida** de 100 reais e **ganha** 50 reais.

d) Uma pessoa tem uma **dívida** de 200 reais e **perde** 70 reais.

1.3.4 Em um dia de inverno a temperatura máxima foi de *18ºC* e a mínima de *-3ºC*. Qual foi a variação de temperatura?

1.3.5 Uma peça de metal estava a 80ºC e foi resfriada variando sua temperatura em 90ºC. Qual é a temperatura final da peça?

1.3.6 Considere o nível do mar como altitude *0 m*, acima positiva e abaixo negativa. Se a cidade **A** está a + *450 m* e a **B** está a +*230 m*, qual é a diferença de altitude entre as cidades?

1.3.7 Existe um número **inteiro** *X* que somado com 5 dê 3? (ou seja: 5 + X = 3)

1.3.8 A divisão 6/2 é número **inteiro** ? e a divisão 6/4 ?

1.3.9 Resolva as potências:

a) 4^2	c) 0^5	e) -5^2	g) -2^4
b) $(-4)^3$	d) 1^100	f) -2^4	h) -2^5

1.3.10 Resolva as raízes:

a)$\sqrt{9}$	d) $\sqrt[4]{16}$	g) $\sqrt[5]{-32}$
b) $\sqrt[3]{27}$	e) $\sqrt[6]{64}$	
c) $\sqrt[3]{-27}$	f) $\sqrt[5]{32}$	h) $\sqrt[3]{-64}$

1.4 Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

Os números racionais são aqueles que podem ser escritos na forma de fração $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros, com b diferente de zero. Simbolizamos o conjunto dos racionais com a letra $\mathbb{Q}$. Escrevendo em linguagem matemática:

$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q}$ se $x = a/b\}$ para a e $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

Assim, qualquer fração é um número racional, por exemplo $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{4}$; $-\frac{3}{5}$; ...

Da mesma forma, qualquer número inteiro é também um número racional, pois podemos escrevê-lo em forma de fração. Por exemplo:

$2 = \frac{4}{2} = \frac{10}{5}$; $\qquad -5 = \frac{-10}{2} = \frac{30}{-6} = -\frac{15}{3}$.

Equivalência de frações: uma fração $\frac{a}{b}$ não se altera se multiplicamos ou dividimos o numerador e o denominador pelo mesmo número m, desde que $m \neq 0$ e $m \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{b} = \frac{\mathrm{a\ :\ m}}{\mathrm{b\ :\ m}}$$

Observe-se que para a divisão, a e b devem ser divisíveis por m. Com essa propriedade podemos transformar uma fração em outra equivalente, porém com denominador diferente. Vejamos os exemplos:

Exemplos:

1. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Nesse caso, a primeira fração foi multiplicada por *m=2*.
2. $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$. Esse caso é conhecido como simplificação de frações. Dividimos o numerador e o denominador por *m=4*.
3. Para transformar $\frac{3}{4}$ em uma fração com denominador igual 16, podemos usar *m=4*. Assim $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$ são equivalentes.

1.4.1 Adição e subtração de frações

O sinal do resultado da adição e subtração de frações segue as regras operatórias dos números inteiros e das operações com frações.

Frações com denominadores iguais

Sejam *a, b* e *c* números inteiros:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, para b $\mathbb{Z} \neq 0$.

Exemplos:

1. $\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3-4}{5} = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}$

Frações com denominadores diferentes

Se os denominadores das frações são diferentes, transformamos as frações de tal forma que os denominadores sejam iguais. Usar o menor múltiplo comum (MMC) dos denominadores das frações dadas como denominador das novas frações é uma estratégia bem eficiente. Ou de modo geral,

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$, para b e d $\mathbb{Z} \neq 0$ ■

Exemplos:

1. $\frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{1+6}{4} = \frac{7}{4}$ 2) $\frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{3-8}{12} = -\frac{5}{12}$

1.4.2 Multiplicação de frações:

Sejam *a, b,c* e *d* números inteiros:

Multiplica-se numerador com numerador e denominador com denominador.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}, \text{ para}$$

b

e $d \in \mathbb{Z} \neq 0$.

Exemplos:

1. $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{8}$ 2)$\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{12}=-\frac{1}{6}$

Propriedade do cancelamento:

Algumas multiplicações podem ser simplificadas, diminuindo os números a serem operados.

Exemplos:

1) Resolva $\frac{12}{5}\cdot\frac{3}{2}$.

Simplificando o *12* com o *2*, por *2,* obtemos $\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{1}=\frac{18}{5}$.

2) Resolva $\frac{18}{15}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{9}{2}$.

A utilização da regra da multiplicação diretamente, neste caso, gera operações com números relativamente grandes. Utilizando o cancelamento, essa dificuldade é remediada.

Simplificando o *18* com *2* e o *15* com o *5*, obtemos $\frac{9}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{9}{2}$.

Simplificando o *3* com o *9*, obtemos $\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{9}{2}=\frac{27}{2}$.

1.4.3 Divisão de frações

Inverte-se a segunda fração e multiplica-se pela primeira. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$, para *b* e $d \in \mathbb{Z} \neq 0$.

A regra dos sinais é idêntica à regra da divisão dos números inteiros.

Demonstração:

Seja $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}=N$, sendo $\mathbb{N}\in\mathbb{Q}$.

Escrevendo $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}=N$ como $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=N$, pode-se multiplicar ambos os membros dessa equação por *d/c*.

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \cdot \frac{c}{d} = N \cdot \frac{c}{d}$

Cancelando o denominador *c/d* com o fator *c/d* do primeiro membro, tem-se:

$\frac{a}{b} = N \cdot \frac{c}{d}$

Para isolar *N*, multiplica-se ambos os membros dessa equação por *d/c*. Tem-se:

$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = N \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c} = N$

O produto das frações do lado direito é 1. Portanto, tem-se:

$N = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ ■

Exemplos:

1. $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{3}{2}$ 2)$\left(-\frac{1}{3}\right) : \left(-\frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = +\frac{5}{6}$

1.4.4 Números decimais e frações

Os *números decimais finitos* podem ser representados na forma de frações decimais, usando a propriedade da equivalência de frações. Portanto, são números racionais. Veja os exemplos:

Exemplos:

1) $0,3 = 0,3 \cdot \frac{10}{10} = \frac{3}{10}$

2) $0,25 = 0,25 \cdot \frac{100}{100} = \frac{25}{100}$

3) $1,302 = 1,302 \cdot \frac{1000}{1000} = \frac{1302}{1000}$

Generalizando a ideia apresentada nestes exemplos, podemos afirmar que para representar um número decimal finito na forma de fração

Escrevemos o número sem a vírgula sobre *10· n*, sendo *n* o número de casas depois da vírgula do número decimal.

Os números *decimais periódicos infinitos* também podem ser representados na forma de frações. Veja os exemplos:

Exemplo 1.4.1. Represente a dízima periódica 0,33333.... na forma de fração.

Solução: Vamos chamar esse número de *r*:

r = 0,333333.... . Multiplicando a equação toda por *10*, porque o período tem somente um algarismo, temos:

10r = 3,33333.... . Re-escrevendo o lado direito da igualdade, temos:

10r = 3 + 0,33333.... = 3 + r . Adicionando (-r) nos dois lados da equação, temos:

10r – r = 3

9r = 3

$r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, portanto 1/3 é um número racional ■

Exemplo 1.4.2. Represente a dízima periódica *r = 0,12121212....* na forma de fração.

Solução: Multiplicando a equação toda por *100*, porque o período tem dois algarismos, temos:

100 r = 12,121212 . . . . Re-escrevendo o lado direito da igualdade, temos:

100 r = 12 + 0,12121212... = 12 + r. Adicionando (-*r*) nos dois lados da equação, temos:

100r – r = 12

99r = 12

$r = \frac{12}{99}$, portanto 12/99 é um número racional■

Regra para escrever dízimas periódicas, menores do que 1, na forma de fração:

1º Escreve-se os algarismos do período no numerador;
2º Escreve-se o denominador com tantos noves, quantos forem os algarismos do período.

Com esta regra, podemos representar qualquer dízima periódica na forma de um número racional. Veja os exemplos e confira com sua calculadora:

Exemplos:

1) $0,2222\ldots = \frac{2}{9}$ 2) $0,252525\ldots = \frac{25}{99}$ 3) $0,245245245\ldots = \frac{245}{999}$

EXERCÍCIOS 1.4

1.4.1 Resolva as adições e subtrações com as frações:

a) $\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) =$ d) $-\frac{2}{7} - \frac{3}{14} + \frac{3}{2} =$

b) $\left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) =$ e) $-\frac{5}{6} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} =$

c) $1 + \frac{3}{10} - \frac{12}{15} =$ f) $\frac{5}{2} - 2 + \frac{2}{4} =$

1.4.2 Resolva as operações com as expressões fracionárias:

a) $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) =$ d) $-3 \cdot \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) =$

b) $-\frac{1}{3} \cdot \left(-2 + \frac{2}{3}\right) =$ e) $-5 : \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) =$

c) $-6 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) =$ f) $-3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4} : \frac{3}{2} =$

1.5 Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$)

Os recursos utilizados para escrever uma dízima periódica na forma de fração, tem por base o fato de existir um período (números que se repetem). Existem muitos números decimais não periódicos. Vejamos alguns exemplos:

$\pi = 3,1415926...$ Conhecido como número pi. Está presente em vários problemas de geometria.

$e = 2,71828182845904523536028 74...$ Conhecido como número de Euler, ou número e.

$\sqrt{2} = 1,414214\ldots$ É uma raiz não exata. As raízes não exatas não são dízimas periódicas.

$\varnothing = 1,6180339887...$ ou $\varnothing = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é conhecido como o número de ouro, amplamente usado por arquitetos gregos para projetar construções e por artistas para determinar proporções em desenhos do corpo humano.

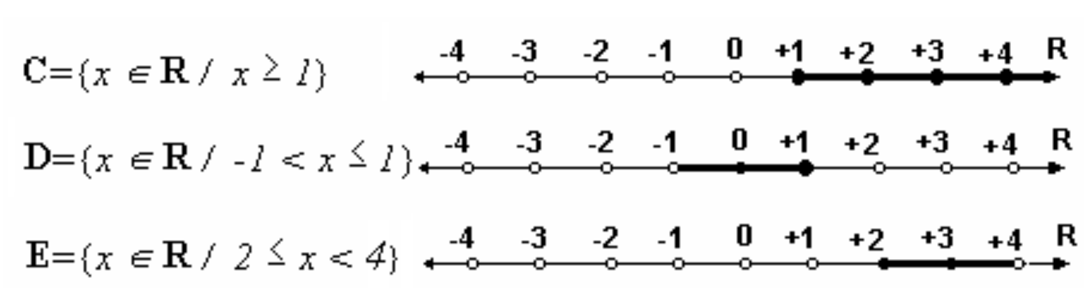
A esses números, que é impossível escreve-los na forma de fração, damos o nome de números irracionais. Além de números especiais como o pi, o número de Euler e o número de ouro, as raízes não exatas são exemplos mais comuns de números irracionais. O uso das propriedades e operações com raízes não exatas (radicais) são frequentes em aplicações na ciência.

Definição 1.5.1. O conjunto dos Números Reais é a união do conjunto dos Racionais e dos Irracionais.

$R = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ ■

A representação do conjunto R na reta numérica é uma reta cheia (reta real).

Veja alguns exemplos de intervalos em $\mathbb{R}$ e suas respectivas representações na reta numerada:



Os conjuntos também podem ser representados usando parêntesis para *intervalos abertos, por exemplo:*

(a,b) significa $\{\ x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$

e com colchetes para *intervalos fechados, por exemplo:*

[a,b] significa =$\{\ x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$.

Definição 1.5.2. Seja *b um número real, m e n números inteiros positivos. Então,*
$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$.

Exemplo: $\sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$ ■

1.5.1 Propriedades dos radicais

Sejam *a e b números reais; m,n e p números inteiros positivos maiores do que 1.*

P1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

P2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ **para $b \neq$ 0.**

P3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[nm]{b}$

P4) $\left(\sqrt[n]{b^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}}$

P5) Para b $\geq$ 0 $\sqrt[n]{b^n} = b.$

P6) Para b < 0 $\sqrt[n]{b^n} = \left\{ \begin{array}{c} |b| \textbf{ se n é par} \\ -b \textbf{ se n é ímpar} \end{array} \right\}$

Exemplos: Simplifique os radicais:

1. $\sqrt[3]{81}$. Para simplificar esse radical vamos utilizar as propriedades P1 e P5.

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = 3 \cdot \sqrt[3]{3}$$

2. $\sqrt{27y^9}$ se y > 0. Para simplificar esse radical vamos utilizar as propriedades P1 e P5.

$\sqrt{27y^9} = \sqrt{3 \cdot 3^2 \cdot y^8 \cdot y} = 3y^4\sqrt{3\ \mathrm{y}}$ ■

1.5.2 Racionalização de denominadores

O denominador de algumas frações podem ter radicais. Nesse caso podemos usar a propriedade P5 para racionalizar (tornar racional) o denominador.

Exemplo 1.5.1. Racionalize o denominador da fração $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Solução: Multiplicando-se a fração dada por 1, escrito na forma $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. **não a alteramos. Então,** $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ■

1.5.3 Operações com radicais

Adição e subtração

Só é possível adicionar ou subtrair radicais semelhantes (*índices e radicandos idênticos).*

Exemplos:

1. $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = -\sqrt{2}$
2. $\sqrt{3} - 2\sqrt{27} - \frac{\sqrt{12}}{2}$. Nesse caso, os radicais não são semelhantes. Porém,
   $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (usando as propriedades **P1 e P5). Substituindo estas igualdades na expressão dada, temos:**
   $\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = -3\sqrt{3}$.

Multiplicação e divisão de radicais

As propriedades **P1 e P2 resolvem as operações de multiplicação e divisão, respectivamente, para radicais de mesmo índice.**

Exemplos:

1. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$. Foi usada a propriedade P1.
2. $\sqrt{6} : \sqrt{2} = \sqrt{3}$ Foi usada a propriedade P2.
3. $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{2} =$

   Como o MMC(2,4)=4, vamos transformar os radicais equivalentes com índice 4 e usar a propriedade P1.

   $$\sqrt[2\cdot 2]{3^{1\cdot 2}} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{18}$$

4. $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{3} =$

   Como o MMC(4,6)=12, vamos transformar os radicais equivalentes com índice 12 e usar a propriedade P1.

   $$\sqrt[4\cdot 3]{2^{1\cdot 3}} \cdot \sqrt[6\cdot 2]{3^{1\cdot 2}} = \sqrt[12]{8} \cdot \sqrt[12]{9} = \sqrt[12]{72}$$

5. $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{2}=$

Como o MMC(4,6)=12, vamos transformar os radicais equivalentes com índice 12 e usar a propriedade P1..

$$\sqrt[4\cdot 3]{2^{1\cdot 3}}\cdot\ \sqrt[6\cdot 2]{2^{1\cdot 2}}=\ \sqrt[12]{2^5}=$$

Nesse caso (bases dos radicandos iguais) poderíamos usar a Def. 1.4.2 e resolver como multiplicação de potências de mesmas bases.

$\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{2}=2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{5}{12}}=\ \sqrt[12]{2^5}$ ■

EXERCÍCIOS 1.5

1.5.1 Calcule as raízes:

a) $\sqrt[3]{27}$ b) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ c) $\sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[5]{32}$ e) $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt[4]{16}}$ f) $\sqrt[4]{\frac{625}{81}}$

1.5.2 Os radicais do Ex.5.1 são números racionais ou irracionais?

1.5.3 Simplifique os radicais:

a)$\sqrt{8}$ b)$\sqrt{12}$ c) $\sqrt[3]{24}$ d) $\sqrt[4]{32}$ e)$\sqrt{\frac{12}{45}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{16}{125}}$

1.5.4 Os radicais do Ex 5.3 são números racionais ou irracionais?

1.5.5 Coloque os coeficientes no radicando:

a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt[3]{2}$ c) $7\sqrt{2}$ d) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ e) $3\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$ f) $5\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}$

1.5.6 Resolva as operações com os radicais:

a) $3\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\sqrt{3}$ c)$\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{2}$ e) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\cdot 3\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ g)$\sqrt{10}\ :\sqrt{2}$

b)$\sqrt{\frac{1}{2}}-\ 3\sqrt{\frac{1}{2}}$ d)$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$ f) $7\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{2}$ h)$\sqrt{10}\ :\sqrt{\frac{1}{2}}$

1.5.7 Resolva os produtos:

a) $2\ \left(\sqrt{5}+3\sqrt{5}\right)$ d) $\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)$

b)$\sqrt{2}\ \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$ e) $\left(3-\sqrt{5}\right)^2$

c)$\sqrt{6}\ (\sqrt{32}-\sqrt{3})$ f) $(\sqrt{7}-2\sqrt{3})\cdot(\sqrt{7}+2\sqrt{3})$

1.5.8 Racionalize os denominadores:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{7}{\sqrt{5}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ f) $\frac{35}{\sqrt{3}-5}$

b) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{3}{2+\sqrt{3}}$

1.5.9 Verifique se $\frac{-3}{2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$.

1.5.10 Escreva o respectivo conjunto numérico a que pertence cada um dos seguintes números: 0; − 1; − 34; $\sqrt[3]{8}$; 0,454545...; 212; − 46; $\sqrt[3]{2}$; 12,1829421; 2,99999... e 3,76.

1.5.11 Explique porque *-5 é um número inteiro e também é um número racional.*

1.5.12 Explique porque − *15 é um número racional e também é um número inteiro.*

1.5.13 Escreva os números abaixo em forma de fração:

a) *0,3=* c) *1,32=* e) *1,3333...=*

b) *0,55555...=* d) *0,212121...=* f) *3,434343...=*

1.5.14 Explique porque *0,77777...* é um número racional.

1.5.15 Explique porque π = 3,1415927... é um número irracional.

1.5.16 Explique porque $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

1.5.17 Indique o conjunto de números adequado para cada variável:

a) Tempo de vida de um pé de milho.
b) Altura de um pé de soja.
c) Número de vacas de uma propriedade.
d) Produção leiteira.
e) Teor de água do solo.
f) Massa de solo.
g) Massa de um suíno.
h) Volume de água de uma amostra de solo.
i) Número de frangos em um aviário.
j) Diagonal de um quadrado.

1.5.18 Escreva os intervalos por compreensão:

a) ***A***={ *1,2,3,4,5*} .
b) ***B***={ *-3,-2,-1,0,1,2*} .
c) os números reais maiores ou iguais a -3.
d) os números reais entre -3 e 5.
e) os números reais menores que 3 e maiores que 5.

1.5.19 Represente os intervalos na reta real:

a) $P = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 3\}$

b) $K = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < 3/4\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} / 0,5 < x \leq 5\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} / \frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}\}$

e) $F = \{x \in \mathbb{R} / -3 > x\}$

f) $H = \{x \in \mathbb{R} / x > 0,5$

g) $B = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < 1\}$

h) $J = \{x \in \mathbb{R} / x < +3\}$

1.5.20 O número $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2$ é racional ou irracional?

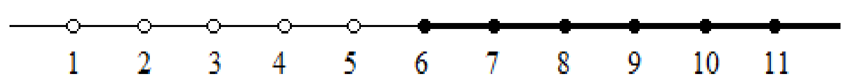
1.6 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESPOSTAS 1.2

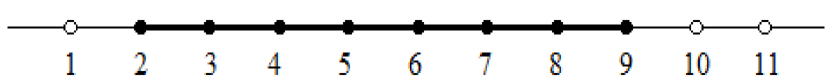
1.2.1 a) A={ 6,7,8,9,10,...} c) C={ 0,1,2,3,4,5,6} e) E={ 3,4,5}

b) B={ 2,3,4,5,6,7,8,9} d) D={ 2,3,4,5,6,7} f) F={ 0,1,6,7,8,9,10,...}

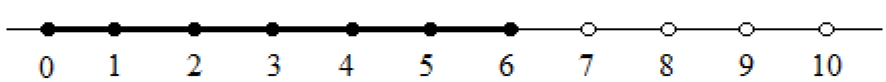
1.2.2 a)



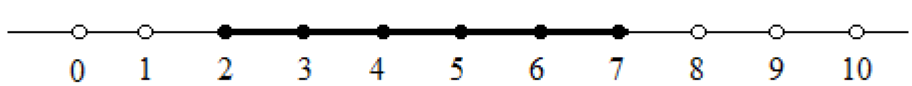
b)



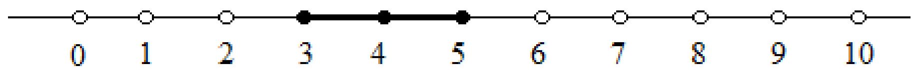
c)



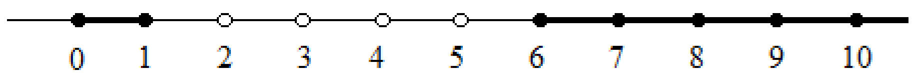
d)



e)



f)



1.2.3 a) Sim, b) Sim, c) Sim, mas em geral, é um número fracionário d) Sim e) Sim, mas em geral, é um número fracionário.

1.2.4 Não.

1.2.5 Não existe.

1.2.6 a)Sim, b) Não, c) Sim, e d) Não.

RESPOSTAS 1.3

1.3.1 a) 3. b) -25. c) -9. d) -1. e) -2. f) 35. g) 0. h) -22. i) -8. j) 10.

1.3.2 R$ -850,00.

1.3.3 a) 50 – 30 = 20. b) 100 – 40 = 60. c) -100 + 50 = -50. d) -200 – 70 = -270.

1.3.4 + 21ºC.

1.3.5 – 10ºC.

1.3.6 220m.

1.3.7 Sim, (–2).

1.3.8 $6/2 = 3 \in \mathbb{Z}; 6/4 \notin \mathbb{Z}$.

1.3.9 a) 16. b) -64. c)0. d) 1. e) +25. f) +16. g)-16. h)-32.

1.3.10 a) $\pm$ 3. b) 3. c) -3. d) $\pm$ 2. e) $\pm$ 2. f)+2. g)-2. h)-4.

RESPOSTAS 1.4

1.4.1 a) -1. b) -11/10. c) $\frac{1}{2}$. d)1. e)1/24. f)1.

1.4.2 a)-1/2. b)4/9. c)-13/2. d)-1/5. e)30. f)3/2.

RESPOSTAS 1.5

1.5.1 a)3. b)2/3. c)4. d)2. e)4. f)5/3.

1.5.2 Racionais.

1.5.3 a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $2\sqrt[3]{3}$ d) $2\sqrt[4]{2}$ e) $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}$ f) $\frac{2\sqrt[3]{2}}{5}$

1.5.4 Irracionais.

1.5.5 a)$\sqrt{12}$ b) $\sqrt[3]{54}$ c)$\sqrt{98}$ d) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ e)$\sqrt{\frac{9}{2}}$ f)$\sqrt{\frac{75}{4}}$

1.5.6 a) $7\sqrt{3}$ b) $-2\sqrt{\frac{1}{2}}$ c) $\sqrt[6]{500}$ d)$\sqrt{\frac{15}{2}}$ e) $3\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$ f) $21\sqrt{10}$ g)$\sqrt{5}$ h)$\sqrt{20}$

1.5.7 a) $8\sqrt{5}$ b)$\sqrt{6}+\sqrt{10}$ c) $8\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ d) 2 e) $14-6\sqrt{5}$ f) -5

1.5.8 a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ d) $6-3\sqrt{3}$ e) $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ f) $\frac{-175-35\sqrt{3}}{22}$

1.5.9 São iguais.

1.5.10 Respectivamente:$\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{I},\mathbb{Q},\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{I},\mathbb{Q},\mathbb{Q},\mathbb{Q}$.

1.5.11 Porque o conjunto dos números Inteiros ($\mathbb{Z}$) está contido no conjunto dos números Racionais ($\mathbb{Q}$).

1.5.12 -15 é um número inteiro, mas também é racional, porque podemos escrevê-lo na forma de fração: -30/2, por exemplo.

1.5.13 a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{5}{9}$ c) $\frac{132}{100}$ d) $\frac{7}{33}$ e) $\frac{4}{3}$ f) $\frac{340}{99}$

1.5.14 Porque é um número decimal periódico infinito.

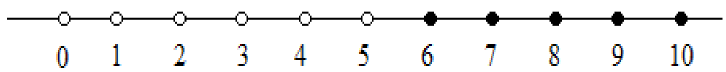
1.5.15 Porque é um número decimal não periódico.

1.5.16 Devido à equivalência de frações, pois $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{4}{6}$.

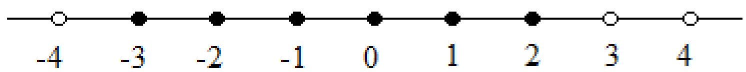
1.5.17 a) $\mathbb{Q}$ b) $\mathbb{Q}$ c) $\mathbb{N}$ d) $\mathbb{Q}$ e) $\mathbb{Q}$ f) $\mathbb{Q}$ g) $\mathbb{Q}$ h) $\mathbb{Q}$ i) $\mathbb{N}$ j) $\mathbb{R}$

1.5.18 a) $A=\{x\in\mathbb{N}/x<6\}$
b) $B=\{x\in\mathbb{Z}/-4<x<3\}$
c) $C=\{x\in\mathbb{R}\, x\geq -3\}$
d) $D=\{x\in\mathbb{R}/-3<x<5\}$
e) $E=\{x\in\mathbb{R}/3>x>5\}$

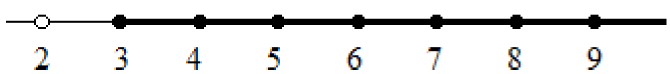
1.5.19 a)


0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

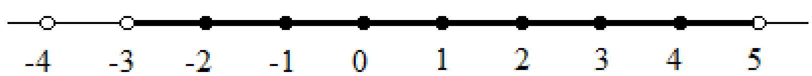
b)


-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

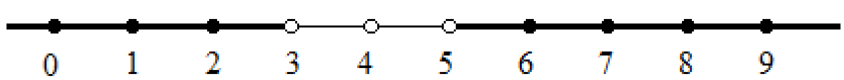
c)


2 3 4 5 6 7 8 9

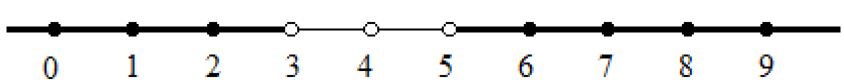
d)


-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

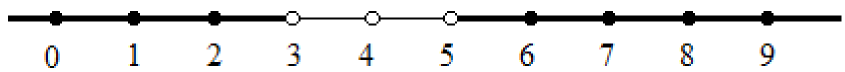
e)


0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

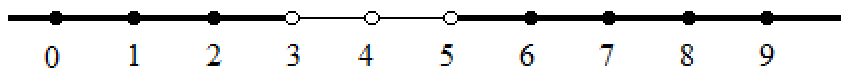
f)


0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

g)



h)



1.5.20 O número representado por este produto notável é racional (16).

Capítulo 2

Grandezas Proporcionais

2.1 Introdução

O conceito de proporção tem uma importância muito grande, não apenas em matemática como também no cotidiano. Frequentemente, empregamos proporções em nosso dia-a-dia, embora sem utilizar símbolos matemáticos.

Quando fazemos uma justa crítica de uma estátua, dizendo que "ela tem uma cabeça muito grande", não estamos nos referindo à medida absoluta da cabeça. Em uma estátua, a cabeça pode ser “muito grande” , mesmo medindo a metade, um quarto ou um décimo da cabeça verdadeira; é “muito grande” **proporcionalmente** ao conjunto da própria estátua.

O conceito de proporções está presente em vários temas da vida cotidiana e da ciência, como por exemplo: porcentagem, juros simples, triângulos semelhantes, espaço e tempo em um deslocamento com velocidade constante, receitas culinárias, relação entre custo e quantidade de produtos produzidos ou consumidos, consumo de combustível, composição de combustíveis, escala de mapas, além de tantos outros temas.

2.2 Razões

Definição 2.2.1. Dados dois números racionais a e b, com $b \neq 0$, chama-se razão entre a e b ao quociente indicado $\frac{a}{b}$ por ou $a : b$, onde a é 1º termo ou *antecedente* e b é o 2º termo ou *consequente*.

Exemplo 2.2.1. Em uma sala de aula existem 25 homens e 20 mulheres.

1 Determine a razão do número de mulheres para o número de homens desta turma.

2 Determine uma razão equivalente à razão do item anterior.

3 Encontre a razão do número de homens para o número de mulheres desta turma.

4 Determine uma razão equivalente à razão do item anterior.

Solução: a) Pela Def. 2.1:

$$r = \frac{20}{25}$$

b) Uma razão equivalente à razão r é $r = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$.

c) A razão do número de homens para o número de mulheres é $p = \frac{25}{20}$.

d) Uma razão equivalente à razão dada é $p = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$ ■

Muitos conceitos importantes são expressos por razões:

Exemplo 2.2.2. Na elaboração de vinhos o rendimento é a razão entre a quantidade de vinho produzida pela massa de uva utilizada. Se *2000 l* de vinho foram produzidos com *2400 kg* de uvas, qual foi o rendimento :

Solução: O rendimento é uma razão: $r = \frac{2000}{2600} = 0,769$ ■

Densidade demográfica: razão entre o número de habitantes de uma região e a área dessa região.

$$\text{Densidade demográfica} = \frac{habitantes}{area}$$

Densidade de um corpo: razão entre a massa de um corpo e o seu volume.

$$\text{Densidade} = \frac{massa}{volume}$$

Velocidade média: razão entre a distância percorrida por um móvel e o tempo gasto para percorrê-la.

$$\text{Velocidade media} = \frac{\text{distância}}{tempo}$$

Escala: razão entre a medida de um comprimento no desenho e a medida correspondente ao comprimento real.

$$\text{Escala} = \frac{medida\,do\,comprimento\,do\,desenho}{medida\,do\,comprimento\,real}$$

Porcentagem: razão entre um número natural e cem.

$$\text{Porcentagem} = \frac{\text{número natural}}{100}$$

Exemplo 2.2.3. No vestibular inscreveram-se 7830 candidatos para disputarem as 90 vagas de um curso. Qual a relação candidato-vaga para esse curso?

Solução: Usando a Def. 1.1, vamos expressar a relação candidato-vaga como uma razão: $\frac{7830}{90} = \frac{87}{1}$. Isto significa que existem 87 candidatos para 1 vaga ■

Exemplo 2.2.4. Uma solução A contém 279 litros de álcool e 1116 litros de água e, a solução B, contém 1155 litros de álcool e 5775 litros de água. Qual das duas soluções tem maior teor alcóolico?

Solução: Escrevendo as razões das duas soluções e efetuando a divisão, temos os teores de álcool

$\frac{279}{1116} = 0,25$ e $\frac{1155}{5775} = 0,2$

Assim, a solução A temo maior teor de álcool ■

Exemplo 2.2.5. A razão entre $\frac{5}{2}$ e $\frac{3}{10}$ é?

Solução: A razão entre os dois números é $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$ ■

EXERCÍCIOS 2.2

2.2.1 Determine a razão entre os números abaixo:

a)3 e $\frac{6}{7}$ b)$\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ c)$1,5$ e 5 d)7 e $3\frac{2}{4}$

2.2.2 A massa A é 10 kg e massa B é 5.000g. Qual a razão entre as massas A e B ?

2.2.3 Numa razão igual a $\frac{2}{5}$ o antecedente é 8. Determine a razão.

2.2.4 O triplo do consequente de uma razão igual a é 63. Determine o antecedente e a razão inversa.

2.2.5 Num jogo de basquete, André fez 60 arremessos, obtendo 50 pontos e Paulo, em 30 arremessos, obteve 20 pontos. Quem obteve a maior razão de acerto?

2.2.6 O perímetro de um triângulo é 28m e o lado de um quadrado mede 9m. Qual é a razão entre os perímetros?

2.3 Proporções e Regra de Três

Em certas situações práticas do cotidiano, somos levados a ter de escolher entre duas ofertas, verificando qual é a mais econômica. Por exemplo, na compra de 2 potes de manteiga da mesma marca, um com 300g custa R$ 1,50 o outro com 1000g custa R$ 4,80. Fazendo as razões das duas opções, obtemos 200 R$ /g e 208,33 R$ /g, respectivamente. Como vemos o primeiro pote é o mais barato. Neste caso, dizemos que as razões de preço por massa não estão *proporcionais*.

Definição 2.3.1. Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ duas razões, com $b \neq 0$ e $c \neq 0$. Uma *proporção* é a igualdade entre duas razões.

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$$

Onde b e d são os meios e a e c são os extremos.

Lê-se: a está para b assim como c está para d e escreve-se, alternativamente, $a : b :: c : d$.

2.3.1 Propriedade fundamental das proporções:

Em toda a proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, ou seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ então } bc = ad \tag{3.1}$$

2.3.2 Outras propriedades das proporções:

P1: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$

P2: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

P3: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

P4: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

P5: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ e $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$

P6: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{a-c}{b+d} = \frac{a}{b}$ e $\frac{a-c}{b+d} = \frac{c}{d}$

P7: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

Exemplo 2.3.1. Calcular o valor de x na proporção:

Solução: Usando a propriedade fundamental das proporções, temos:

$3 \cdot 20 = 5 \cdot (x + 1)$

$60 = 5x + 5$

$x = 11$ ■

Exemplo 2.3.2. Em uma equipe olímpica, 25 atletas são rapazes. Qual é o número de moças, se a razão entre o número de rapazes e moças é cinco terços.

Solução: Sendo *x o número de moças e escrevendo os dados do problema como uma proporção, temos:*

$$\frac{25}{x} = \frac{5}{3}$$

Usando a propriedade fundamental das proporções temos

$5 \cdot x = 3 \cdot 25$

$x = 15$ moças ■

EXERCÍCIOS 2.3

2.3.1 Calcule o valor de x nas proporções:

a) $\frac{2}{5} = \frac{x}{6,25}$ b) $\frac{1-\frac{1}{3}}{0,5} = \frac{4}{x}$ c) $\frac{x}{3-0,75} = \frac{4}{2-\frac{1}{8}}$ d) $\frac{3}{2-\frac{3}{4}} = \frac{2+\frac{3}{4}}{x}$

2.3.2 Uma vara de 12cm fixada verticalmente no solo produz uma sombra de 15cm. Que comprimento deveria ter a vara para projetar uma sombra de 45cm?

2.3.3 Uma foto de dimensões 3cm x 4cm foi ampliada passando o seu comprimento de 4cm para 28cm. Quanto passou a medir a sua largura?

2.3.4 A soma dos perímetros de dois quadrados é 52cm. Determine esses perímetros sabendo que a razão entre eles é de $\frac{3}{10}$.

2.3.5 Dividiu-se 14kg de carne entre duas pessoas, sendo a razão entre as partes igual a $\frac{3}{4}$. Quanto recebeu cada pessoa?

2.3.6 A idade de um pai e a de seu filho estão na razão $\frac{3}{1}$. Qual a idade de cada um, sabendo que a diferença entre elas é de 24 anos?

2.3.7 A diferença entre os comprimentos de duas peças de fazenda é de 15m e estão entre si como 7 está para 4. Calcule a metragem de cada peça.

2.3.8 Um pai tem 36 anos e sua idade é $\frac{4}{5}$ da soma das idades de seus dois filhos. Quais as idades dos filhos, sabendo-se que elas estão entre si como 4 esta para 5?

2.3.9 Calcule x e y na proporção $\frac{x}{4} = \frac{y}{8}$, sabendo que $5x + 3y = 33$

2.3.10 Calcule a e b na proporção $\frac{a}{3} = \frac{b}{6}$, sabendo que $5a - 2b = 2$

2.3.11 Calcule a, b e c em $\frac{a}{7} = \frac{b}{14} = \frac{c}{21}$, sabendo que $2a - b + 2c = 12$

2.3.12 Calcule b nas igualdades $\frac{3}{a} = \frac{6}{b} = \frac{12}{c} = \frac{15}{d}$, sabendo que $3a + c + 2d = 85$

2.3.13 Calcule a e b na proporção $\frac{a}{7} = \frac{b}{14}$, sabendo que $a^2 + b^2 = 20$

2.3.14 Calcule a e b na proporção $\frac{3}{a}\frac{6}{b}$, sabendo que $5a^2 - b^2 = 64$

2.3.15 Dividir o número 570 em três partes tais que a primeira esteja para a segunda como 4 esta para 5 e a segunda esteja para a terceira como 6 esta para 12. Nestas condições, a terceira parte vale...

2.3.16 Divida 305 em três partes tais que a primeira esteja para a segunda como 2 esta para 5 e a segunda esteja para a terceira como 3 esta para 8.

2.3.17 Dois líquidos A e B estão misturados em um volume total de 56 litros, na razão de 9 para 5. Calcular o volume de cada substância.

2.3.18 O salário de duas pessoas estão entre si, assim como 11 está para 14. Calcular esses salários sabendo que o triplo do salário do primeiro menos o dobro do salário do segundo é R$ 150,00.

2.3.19 Dividir o lucro de R$ 2.500,00 entre três pessoas de modo que a 2ª receba dois quintos da 1ª e a 3ª receba três meios da 2ª.

2.3.20 Sabe-se que a razão entre o número de médicos e o número de habitantes de uma cidade é de $\frac{1}{2500}$. Se há 30 médicos nessa cidade, qual é a sua população?

2.3.21 O número de meninos e o número de meninas estão na razão de 3 para 4, quantos são os meninos, se as meninas são em número de 52?

2.4 Regras de sociedade

A regra de sociedade é uma das aplicações da divisão proporcional. Tem por objeto a divisão dos lucros ou dos prejuízos entre as pessoas (sócios) que formam uma sociedade, por ocasião do balanço geral exigido anualmente por lei ou, quando da saída de um dos sócios ou, da admissão de um novo sócio.

Por convenção o lucro ou prejuízo é dividido pelos sócios proporcionalmente aos capitais que empregaram, levando-se em conta as condições estipuladas no contrato social.

Classicamente, há dois tipos a considerar: Regra de sociedade simples e composta.

Regra de Sociedade Simples

1) Quando os capitais são diferentes e os tempos são iguais

2) Quando os capitais são iguais e os tempos são diferentes.

Ambos os casos são resolvidos usando conhecimentos de divisão em partes proporcionais.

Exemplo 2.4.1. Antônio, José e Pedro se associaram para comprar um terreno no valor de R$ 60.000,00. Antônio entrou com R$ 30.000,00, José com R$ 20.000,00 e Pedro com R$ 10.000,00. Algum tempo depois venderam o terreno por R$ 90.000,00. Qual a parte que coube a cada um deles?

Solução: A cada real empregado na compra do terreno deve corresponder a mesma quantia resultante da venda, isto é, uma quota. Essa quota é, na verdade, o quociente do preço de venda pelo preço da compra, ou seja:

$\dfrac{P_{\mathrm{v}}}{P_{\mathrm{c}}} = \dfrac{90.000}{60.000} = 1,5$ (coeficiente de proporcionalidade)

Os três sócios devem receber as seguintes quantias:

Antônio: $R\$30.000,00 \times 1,5 = R\$45.000,00$

José: $R\$20.000,00 \times 1,5 = R\$30.000,00$

Pedro: $R\$10.000,00 \times 1,5 = R\$15.000,00$

Escrevendo as razões entre as quantias recebidas e empregadas individualmente, observamos que as quantias que os sócios receberam na venda são números proporcionais às quantias empregadas na compra do terreno.

$$\frac{45.000}{30.000} = \frac{30.000}{20.000} = \frac{15.000}{10.000} = 1,5 \blacksquare$$

Regra de Sociedade Composta

Neste caso tanto os capitais quanto os períodos de tempo são diferentes para cada sócio. Então os lucros ou prejuízos serão divididos em partes diretamente proporcionais ao produto dos capitais pelos respectivos períodos de tempo.

Exemplo 2.4.2. Numa sociedade, após um ano de atividades o lucro foi de R$ 46.739,34. O segundo sócio entrou na sociedade após 3 meses do funcionamento com o capital de R$ 7.580,00. Se o capital do primeiro sócio é de R$ 6.920,00, determine a parte de cada sócio nesse lucro.

Solução: Participação do 1º sócio (A) – 12 meses – capital - R$ 6.920,00 x 12 meses = R$ 83.040,00

Participação do 2º sócio(B) – 9 meses – capital - R$ 7.580,00 x 9 meses = R$ 68.220,00

$$\frac{A}{83.040} = \frac{B}{68.220} = \frac{A+B}{83.040+68220} = \frac{46.739,34}{151.260} = 0,309$$

$\frac{A}{83.040} = 0,309 \longrightarrow A = 25.659,36$; $\frac{B}{68.220} = 0,309 \longrightarrow B = 21.079,98 \blacksquare$

(P5)

EXERCÍCIOS 2.4

2.4.1 O capital social de uma empresa é formado na razão de dois terços. Determine a parte de cada sócio no lucro líquido de R$ 11.360,00, apurado no último balanço.

2.4.2 Uma empresa com três sócios tem seu capital constituído da seguinte forma: o primeiro sócio tem R$ 2.380,00; o segundo tem 20$ corresponde as despesas. Determine qual a parte de cada sócio no lucro líquido dessa empresa.

2.4.3 Dois sócios montaram uma empresa com 50% do capital social financiado em um banco com taxa de mercado. Após sete meses de funcionamento, com dificuldades financeiras, admitiram um terceiro sócio. No fim de um ano, a empresa apresentou um lucro líquido de R$ 2.407,00, sendo integralizado no capital da empresa. Qual a parte de cada sócio nesse lucro?

2.4.4 A razão entre os capitais de dois sócios numa empresa é de três quintos. Se o sócio A recebeu R$ 3.255,00 de lucro, calcule o lucro do sócio B.

2.4.5 A importância de R$ 1.085,00 foi dividida entre três pessoas. Sabendo-se que a parte da primeira está para a segunda como sete está para nove e que a parte da segunda está para a terceira assim como três está para cinco, determine essas partes.

2.4.6 Numa empresa o prêmio de R$ 1.000,00 será dividido entre os dois funcionários com maior produtividade. Sabendo que os classificados têm 80 e 120 pontos, quanto cada um vai receber?

2.4.7 O lucro de uma indústria foi dividido entre três sócios na proporção de 6, 10 e 18. Sabendo que o segundo sócio recebeu R$ 4.000,00 a mais que o primeiro, pergunta-se:

a) Qual foi o lucro total?

b) Quanto cada sócio recebeu?

2.4.8 Uma empresa teve um lucro de R$ 25.000,00, dos quais, quatro quintos serão divididos entre seus dois sócios, proporcionalmente aos capitais investidos na formação do capital social dessa empresa. Se o primeiro sócio participou com R$ 4.000,00 e o segundo com R$ 6.000,00; quanto cada um vai receber desse lucro?

2.4.9 Em uma empresa 40% do lucro será aplicado na compra de equipamentos e um quarto, também desse lucro, que corresponde à R$ 5.000,00 será destinado para a manutenção das instalações. O restante será dividido entre os sócios de acordo com o capital de cada um nessa sociedade. Se os capitais investidos foram: R$ 3.000,00; R$ 4.000,00 e R$ 7.000,00, calcule quanto cada sócio vai receber e quantos reais foram aplicados em equipamentos?

2.4.10 Ao dividir um número em partes diretamente proporcionais aos números 4, 3 e 5, achou-se que a parte correspondente ao número 3 era 150. Determine esse número.

2.4.11 As cotas de participação no capital social de uma empresa, variam de acordo com o capital de cada sócio na formação desse capital. A razão entre os capitais dos sócios C e D é de dois terços e juntos somam quatro quintos do capital E. Calcule o capital C e D sabendo que o capital E é de R$ 9.000,00.

2.5 Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais

Considere um quadrado de lado l e perímetro P. A razão entre P e l é 4, pois P = 4. Além disso, isto significa que P e l são variáveis diretamente proporcionais pois, quando uma aumenta (ou diminui), a outra também aumenta (ou diminui).

No caso de um retângulo de largura l, altura h e área de $36m^2$, ocorre algo diferente: l e h são variáveis inversamente proporcionais, já que l · h = 36. Neste caso, quando uma aumenta a outra diminui e, vice-versa.

2.5.1 Regra de três

Caso três termos sejam conhecidos na proporção, podemos calcular o quarto. Essa relação é o que conhecemos por *Regra de Três.* Ou ainda, é um modo prático de encontrar um termo desconhecido, dados outros 3.

Regra de Três direta e Regra de Três inversa

Observe as situações:

(i) Um restaurante prepara 500 refeições por dia. Quantas refeições terá preparado no final de um mês, considerando 20 dias úteis de trabalho?

(ii) Para pintar uma casa em nove dias é necessário um pintor. Quantos pintores serão necessários para executar o mesmo serviço em 3 dias?

(iii) Ana tem 2 anos e 90 cm de altura. Qual será a altura de Ana aos 6 anos?

Na situação (i) aumentando-se uma das grandezas a outra também aumenta na mesma razão, ou então, diminuindo-se uma das grandezas a outra também diminui na mesma razão, temos assim *grandezas diretamente proporcionais.*

Na situação (ii), ocorre o inverso, aumentando-se uma das grandezas a outra diminui na razão inversa, ou então, diminuindo-se uma das grandezas a outra aumenta na razão inversa, temos assim *grandezas inversamente proporcionais*.

Veja que na situação (iii) uma grandeza aumenta e a outra também aumenta, mas *não são proporcionais* (nem direta, nem inversamente), pois a razão de variação das grandezas é diferente, não sendo possível calcular por Regra de Três.

Resolução de Regra de Três

Para resolver uma Regra de Três sugere-se seguir os seguintes passos:

1º) montar um proporção com a indicação das grandezas envolvidas e os valores de cada uma;

2º) verificar se as grandezas envolvidas são direta ou inversamente proporcionais;

3º) montar uma proporção envolvendo os valores das grandezas. Se as grandezas forem inversamente proporcionais devemos inverter uma das razões antes de formar a proporção e calcular o termo desconhecido.

Exemplo 2.5.1. Em 50ml de gasolina, 10 ml é álcool. Quantos litros de álcool contém uma amostra de 20*l* de gasolina?

50ml de gasolina 10 ml álcool

20*l* de gasolina x (variável)

Solução: Inicialmente, neste caso, é necessário transformar as unidades: 20*l* = 20000 ml. Escrevendo a regra de três como uma proporção, temos: $\frac{50}{20000} = \frac{10}{x}$

As grandezas são diretamente proporcionais, pois se aumentar o volume da solução aumenta também o volume de álcool. Usando a propriedade fundamental das proporções e resolvendo para x, temos x = 4 000 ml ou 4*l* de álcool ■

Exemplo 2.5.2. Para pintar uma casa em nove dias é necessário um pintor. Quantos pintores serão necessários para executar a mesma casa em 3 dias? **Solução:** Escrevendo a regra de três como uma proporção, temos

$$\uparrow \frac{9}{1} = \frac{3}{x} \downarrow$$

As grandezas são inversamente proporcionais, pois quanto mais pintores trabalharem, menos dias serão necessários. Invertendo a segunda razão, temos:

$$\frac{9}{1} = \frac{x}{3}$$

Usando a propriedade fundamental das proporções e resolvendo para x, temos x = 27 pintores para pintar a casa em 3 dias ■

Regra de Três Composta

Quando queremos calcular um valor desconhecido e são envolvidas mais de duas grandezas podemos utilizar uma Regra de Três Composta.

Para resolvê-la, sugere-se os seguintes passos: 1º) Verificar se as grandezas envolvidas são direta ou inversamente proporcionais, analisando cada grandeza com a que possui o termo desconhecido, desconsiderando as outras. Lembrar que que quando a grandeza for inversamente proporcional, devemos inverter a razão ao formar a proporção.

2º) construir uma proporção entre as grandezas igualando a razão que possui o termo desconhecido com o produto de todas as outras razões envolvidas no problema. 3º) Resolver a proporção usando as propriedades de proporções.

Exemplo 2.5.3. Quatro operários produzem, em 10 dias, 320 peças de certo produto. Quantas peças desse mesmo produto serão produzidas por 10 operários em 16 dias? **Solução:** Seguindo os passos sugeridos, observamos que o termo desconhecido é o número de peças. Este número aumenta na medida em que aumenta o número de operários e o número de dias trabalhados, portanto as três grandezas são diretamente proporcionais.

Operários ↑	dias ↑	peças ↑
4	10	320
10	16	x

Construindo a proporção, temos:

$$\frac{4}{10}\frac{10}{16} = \frac{320}{x}$$

Resolvendo para x, obtemos x = 1280 peças ■

Exemplo 2.5.4. Se 10 trabalhadores constroem uma ponte em 12 dias, em quantos dias 8 trabalhadores construiriam essa mesma ponte? **Solução:** Seguindo os passos sugeridos, observamos que o termo desconhecido é o número de dias necessários para construir a ponte, que é inversamente proporcional ao número de trabalhadores.

dias ↓	trabalhadores ↑
12	10
x	8

Construindo a proporção, temos: $\frac{12}{x} = \frac{8}{10}$ Resolvendo para x, obtemos x = 15 dias ■

Exemplo 2.5.5. Uma firma construtora preparou 20 km de leito da estrada contratada em 200 dias e 8 horas de jornada de trabalho, utilizando-se 9 máquinas e empregando 45 homens. Em quantos dias de trabalho, concluirá a preparação de outros 24 km, da mesma estrada, se utilizar na obra 10 máquinas e 48 homens em jornada diária de 9 horas, sabendo-se que a dificuldade deste trecho é $\frac{4}{5}$do trecho concluído?

Solução: Seguindo os passos sugeridos, observamos que o termo desconhecido é o número de dias trabalhados. Os dias trabalhados são diretamente proporcionais a quilometragem e à dificuldade da obra, porém inversamente proporcional à jornada de trabalho, ao número de máquinas e de operários.

km ↑	dias ↑	jornada ↓	máquinas ↓	operários ↓	dificuldade ↑
20	200	8	9	45	1
24	x	9	10	48	4/5

Construindo a proporção, temos:

$$\frac{200}{x} = \frac{20}{24} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{48}{45} \cdot \frac{1}{4/5}$$

Resolvendo para x, obtemos x = 144 dias ■

EXERCÍCIOS 2.5

2.5.1 Um carro faz, na estrada 8 km com um litro de álcool.

a) quantos litros de álcool são necessários para esse carro percorrer 100 km?

b) quantos km ele percorre com 45 litros de álcool?

2.5.2 A secretária de um empresa preenche 10 fichas de cadastro de clientes em 30 minutos.

a) quanto tempo ele leva para preencher o cadastro de 50 clientes?

b) quantos cadastros ela preenche em 2 horas de trabalho interruptas?

2.5.3 Um relógio atrasa 2 minutos a cada 24 horas.

a) quantos minutos atrasará em 60 horas?

b) quantos minutos atrasará em 15 dias?

c) depois de quantos dias ele ficará 20 minutos atrasados?

2.5.4 Com 3,5 litros de tinta, Antonio pinta uma parede com $14m^2$.

a) que superfície ele pode pintar com 18 litros de tinta?

b) qual o volume de tinta necessário para pintar uma pintar uma parede de $36m^2$?

2.5.5 Numa fazenda, cada boi come a mesma quantidade de ração todos os dias. O fazendeiro, que tinha armazenado ração suficiente para alimentar seus 40 bois durante 25 dias, comprou mais 10 bois. Nesse caso, quantos dias a ração deve durar?

2.5.6 Um corredor de fórmula I dá uma volta na pista em um minuto e 30 segundos, a uma média de 200km/h.

a) em quanto tempo fará a volta na pista, se mantiver a velocidade média de 180km/h?

b) para fazer a volta em 1minuto e 15 segundos, qual deve ser a sua velocidade média?

2.5.7 Uma equipe de 8 pessoas leva 10 dias para pintar um casa. Quanto tempo levaria uma equipe de 20 pessoas?

2.5.8 Para pintar uma parede de 9 metros de comprimento por 3 metros de altura, foi gasto uma lata de tinta. Usando uma lata de tinta igual, quantos metros do comprimento da parede posso pintar, se ele tiver 1,8 metros de altura.

2.5.9 Com 100kg de trigo pode-se fazer 85 kg de farinha. Qual a quantidade de farinha que se obtém com 480 kg de trigo?

2.5.10 A sombra de uma chaminé mede 4,5m e a de uma vara vertical, no mesmo instante, é 0,9m. Calcule a altura da chaminé sabendo-se que a vara tem 2m de comprimento.

2.5.11 Um parafuso avança 33mm em cada 6 voltas. Qual o número de voltas apara avançar 77mm?

2.5.12 Uma torneira despeja em meia hora 600 litros de água. Quantos litros são escoados em 8 minutos?

2.5.13 Em cada 3m^2 de uma fazenda são plantadas 15 sementes. O número de hectares necessários para se plantar 200 mil sementes é...

2.5.14 Uma roda com 50 dentes engrena com outra de 40. Qual o número de voltas da primeira, quando a segunda dá 600 voltas por minuto?

2.5.15 Uma pessoa x pode realizar uma certa tarefa em 12 horas. A outra pessoa y, é 50% mais eficiente que x. Nessas condições, o número de horas necessárias para que y realize essa tarefa é:

2.5.16 Um livro tem 300 páginas com 25 linhas em cada uma. Para reimprimí-lo, empregando os mesmos caracteres, quantas páginas de 30 linhas são necessárias?

2.5.17 Para transportar certo volume de areia para uma construção, foram necessários 20 caminhões de 4m^3 de areia cada um. Se cada caminhão pudesse conter 5m^{3}de areia, quantos caminhões seriam necessários para fazer o mesmo serviço?

2.5.18 Vinte homens podem arar um campo em 6 dias, trabalhando 9 horas por dia. Quanto tempo levarão, para arar o mesmo campo, 12 homens trabalhando 5 horas por dia?

2.5.19 Em 3 dias, 72.000 bombons são embalados, usando-se 2 máquinas embaladoras funcionando 8 horas por dia. Se a fábrica usar 3 máquinas iguais às primeiras, funcionando 6 horas por dia, em quantos dias serão embalados 108.000 bombons?

2.5.20 Um ciclista percorreu 150km em 2 dias, pedalando 3 horas por dia. Em quantos dias faria uma viagem a 400 km pedalando 4 horas por dia?

2.5.21 Para construir um canal de 104m de comprimento por 5m de profundidade e 7m de largura, 100 operários, trabalhando 7 horas por dia levaram 2 meses e meio. Aumentando para o quíntuplo o número de operários e fazendo-os trabalhar 10 horas por dia, em quanto tempo os operários construíram um outro canal com o mesmo comprimento, porém de profundidade e largura dupla do primeiro?

2.5.22 Quinze operários, com capacidade 5, abriram uma vala de 300 metros de comprimento,trabalhando 10 horas por dia, num terreno de dificuldade 3. Vinte operários, com capacidade 4, trabalhando 12 horas por dia, num terreno de dificuldade 2, abriram uma vala de quantos metros de comprimento?

2.6 Porcentagem

Em nosso dia-a-dia é comum observarmos expressões como estas: *“Desconto de 40% na grande liquidação de verão”*
“Os jovens perfazem um total de 55% da população brasileira”
“A inflação registrada em dezembro foi de 0,01%”
“O rendimento da caderneta de poupança foi de 1% em janeiro”
Todas estas expressões envolvem uma razão chamada porcentagem.

Taxa percentual

Suponhamos que um aluno tenha acertado, em um exame, 12 das 15 questões apresentadas. A razão entre o número de questões acertadas e o número total de questões é:

$$\frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0,8 = \frac{8}{10} = \frac{80}{10}$$

...

Quando uma razão é apresentada com o conseqüente 100 (neste caso, 80/100), ela é chamada razão centesimal. Outros termos usados para uma razão centesimal são razão porcentual (percentual) e percentil. Outra forma de representarmos as razões centesimais, muito usada principalmente no universo econômico-financeiro, é substituir o conseqüente 100 pelo símbolo % (por cento). Assim: $\frac{80}{100} = 80\%$. Esse numeral (80%) é denominado taxa percentual ou centesimal.

Definição 2.6.1. Dada uma razão qualquer $\frac{p}{v}$, chamamos de porcentagem do valor **v** a todo valor de **p** que estabeleça uma proporção com alguma razão centesimal.

$$\frac{p}{v} = \frac{r}{100} = r\%$$

Na prática, pode-se determinar o valor p da porcentagem de dois modos: 1º modo: multiplicando-se a razão centesimal pelo v $\left[p = \frac{r}{100}v\right]$. Esta expressão justifica dizermos que “p é igual a r% de v”.

2º modo: resolvendo a regra de três que compara v a 100%.

Valores	Taxa
p	r%
v	100%

Exemplo 2.6.1. Um vendedor tem 3% de comissão nos negócios que faz. Qual sua comissão numa venda de R$ 3.600,00? **Solução:** Usando o 1º modo: $p = \frac{3}{100} \cdot 3600$ = R$ 108,00

Usando o 2º modo: valores taxa

p	3
3600	100

Resolvendo a regra de três: $\dfrac{p}{3600} = \dfrac{3}{100}$ obtém-se p = R$ 108,00 ■

Exemplo 2.6.2. Um automóvel foi adquirido por R$ 5.000,00 e vendido com um lucro de R$ 400,00. Qual a porcentagem de lucro ?

Solução: Usando o 2º modo: valores taxa

400 x

5000 100

Resolvendo a regra de três: $\dfrac{400}{5000} = \dfrac{x}{100}$ obtém-se x = 8% de lucro ■

EXERCÍCIOS 2.6

2.6.1 Qual é a taxa unitária correspondente a 3,08% ?

2.6.2 Qual é a taxa percentual correspondente a 0,25?

2.6.3 Um comerciante vendeu um objeto por R$ 540,00 com lucro de 15% sobre esse valor. Quanto ele ganhou?

2.6.4 Um terreno tem 70% de sua área plantada, que corresponde a 154 ha . Qual a área total do terreno?

2.6.5 Em uma turma de 60 alunos, foram reprovados 9. Quantos por cento dos alunos foram aprovados?

2.6.6 Qual é o número cujos 7% valem 28?

2.6.7 Por quanto devo vender um objeto que me custou R$ 70,00 para obter um lucro de 30%?

2.6.8 Uma nota promissória, cujo valor era de R$ 5.000,00 foi paga com um desconto de R$ 250,00. Qual a taxa de desconto?

2.6.9 Em São Paulo colhem-se 1.268.000 sacas de café. Se 25% desta produção destinam-se ao consumo interno, qual a quantidade de sacas para este consumo?

2.6.10 Um jornal recebia por dia R$ 42.000,00 de anúncios. Os preços dos anúncios foram aumentados em 6%. Qual será a nova diária do jornal?

2.6.11 Em quanto por cento aumentou a população de uma cidade que era de 67.200 habitantes e agora é de 92.400 habitantes?

2.6.12 Um terreno foi vendido por R$ 9.600,00 recebendo o intermediário 3% de comissão. Calcule a comissão.

2.6.13 Em uma escola, 40% dos alunos são meninas. O total dos alunos é 750. Quantos são os meninos?

2.6.14 Em uma cidade, 35% da população é constituída de homens e 40% de mulheres. Qual a população da cidade, se o número de crianças é de 8.000?

2.6.15 Vendo uma mercadoria recebendo 25% de entrada e o restante em três prestações de R$ 160,00 e uma de R$ 180,00. Qual o preço da mercadoria?

2.6.16 Um vendedor recebe 3% de comissão sobre as vendas que efetua. Qual a quantia a receber pelas vendas de R$ 8.000,00 R$3.700,00 e R$ 9.500,00?

2.6.17 Em um dos grandes prêmios de Fórmula I largaram 24 carros e terminaram a competição 10 carros. De quanto por cento foi o n.º de carros que não terminaram a prova?

2.6.18 Um comerciante comprou 120 bonés a R$ 8 cada um. Vendeu a metade a R$ 10,00 e o restante a R$ 12,00. De quanto por cento foi o lucro?

2.6.19 Uma casa está alugada por R$ 9.600,00 ao ano, foi comprada por R$ 98.000,00. O proprietário gastou com ela, durante o ano, R$1.180,00 em impostos e reparos. Qual foi a taxa de rendimento do capital empregado?

2.6.20 Uma pessoa deseja adquirir uma televisão catalogada por R$ 460,00. Se o pagamento for à vista, a loja oferece um desconto de 5%. Como a pessoa não pode fazê-lo, paga 2/5 à vista e o restante em três prestações sofrendo um aumento de 25% sobre a parte relativa às prestações. a) Qual o preço à vista da televisão? b) Qual o valor de cada prestação?

2.6.21 Um concurso prestado por certo n.º de candidatos houve 18% de aproveitamento, ou seja, 117 aprovados; num outro, a que concorreram 350 candidatos, houve 22% de aproveitamento. Determine o n.º de candidatos do 1º concurso e quantos foram reprovados no 2º.

2.6.22 Uma dona de casa compra um pedaço de carne com osso e paga R$ 3,00. Ao desossá-lo percebe que os ossos correspondem a 12% do peso total. Sabendo que o preço do quilo dessa carne é de R$ 2,00 e que, durante o cozimento, a carne perde 15% de seu peso, qual o peso do pedaço de carne cozida?

2.6.23 Em um concurso havia 15.000 mulheres e 10.000 homens. Sabe-se que 60% das mulheres e 55% dos homens foram aprovados. Do total de candidatos quanto por cento foram reprovados?

2.6.24 A soma de dois números x e y é 28 e a razão entre eles é 75%. Qual é o maior destes números?

2.6.25 Num grupo de 400 pessoas, 70% são do sexo masculino. Se, nesse grupo, 10% dos homens são casados e 20% das mulheres são casadas. Qual é o número de pessoas casadas?

2.6.26 João, Antônio e Ricardo são operários de um certa empresa. Antônio ganha 30% mais que João, e Ricardo, 10% a menos que Antônio. A soma do salário dos três, neste mês, foi de R$4.858,00. Qual a quantia que coube a Antônio?

2.6.27 Um pequeno criador possui 4 vacas que dão, cada uma, 6 litros de leite por dia. Cada litro de leite produz 60% de seu peso de nata, e esta produz 60% de seu peso de manteiga, que é vendida a R$20,00 o Kg. Supondo que cada litro de leite pese 1.100g, qual o valor total, em reais, da manteiga produzida em 30 dias?

2.6.28 N um laboratório, 32% das cobaias são brancas e as outras 204 são cinzas. Quantas cobaias há neste laboratório?

2.7 Operações Financeiras

As operações financeiras são operações feitas com dinheiro com a finalidade de fazê-lo aumentar ao longo do tempo. Podem ser ativas ou passivas. As operações financeiras ativas são aplicações ou investimentos que visam rendimentos. Exemplos de operações financeiras ativas são aplicações de dinheiro em letras de câmbio, contas bancárias de prazo fixo, cadernetas de poupança, ações. Também se pode investir com a finalidade de renda, quando se compram imóveis, ouro, moeda estrangeira. As operações financeiras passivas são as que visam à captação de recursos como empréstimos ou descontos de títulos.

Juro (j)

A matemática financeira trata, em essência, do estudo do valor do dinheiro ao longo do tempo. O seu objetivo básico é o de efetuar análises e comparações dos vários fluxos de entrada e saída de dinheiro de caixa, verificados em diferentes momentos.

Receber uma quantia hoje ou no futuro não são evidentemente a mesma coisa. Em princípio, uma unidade monetária hoje é preferível à mesma unidade monetária disponível amanhã. Postergar uma entrada de caixa (recebimento) por certo tempo envolve um sacrifício, o qual deve ser pago mediante uma recompensa, definida pelos juros. Desta forma, são os juros que efetivamente induzem o adiamento do consumo, permitindo a formação de poupanças e de novos investimentos na economia.

As taxas de juros devem ser eficientes de maneira a remunerar:

a) o risco envolvido na operação(empréstimo ou aplicação), representado genericamente pela incerteza com relação ao futuro;

b) a perda do poder de compra do capital motivada pela inflação. A inflação é um fenômeno que corrói o capital, determinando um volume cada vez menor de compra com o mesmo montante;

c) o capital emprestado/investido. Os juros devem gerar um lucro (ou ganho) ao proprietário do capital como forma de compensar a sua privação por determinado período de tempo. Este ganho é estabelecido basicamente em função das diversas outras oportunidades de investimentos e definido por custo de oportunidade.

Taxas de Juro (i)

A taxa de juro é o coeficiente que determina o valor do juro, isto é, a remuneração do fator capital utilizado durante certo período de tempo. As taxas de juros se referem sempre a mesma unidade de tempo (mês, semestre, ano, etc.) e podem ser representadas equivalentemente de duas maneiras:

taxa percentual e taxa unitária. A **taxa percentual** refere-se a "centos" do capital, ou seja, o valor dos juros para cada centésima parte do capital. A **taxa unitária** centra-se na unidade de capital. Reflete o rendimento de cada unidade de capital em certo período de tempo. A transformação da taxa percentual em unitária se processa simplesmente pela divisão da notação em percentual por 100. Para a transformação inversa, basta multiplicar a taxa unitária por 100. Nas fórmulas de matemática financeira todos os cálculos são efetuados utilizando-se a taxa unitária de juros.

Capital (C)

Qualquer quantidade de dinheiro, que esteja disponível em certa data, para ser aplicado numa operação financeira, recebe o nome de capital, valor atual , valor principal ou valor presente.

Montante (M)

Quando um investidor aplica um capital por certo tempo a determinada taxa, no final deste período de tempo ele tem a sua disposição não só o valor inicial (valor presente ou capital) aplicado, mas também os juros que lhe são devidos. Esse total, soma de capital e juros, é chamado montante.

$$M = C + j \tag{7.1}$$

Juros simples

A operação financeira a juros simples é aquela em que os juros são calculados apenas sobre o capital inicial, para todo o número de períodos de capitalização. A relação entre Capital, taxa e juros pode ser modelada por uma regra de três:

Capital	juro
C	j
100	i %

Resolvendo-se a regra de três para j, obtém-se uma fórmula genérica para os juros:

$$j = \frac{C \cdot i}{100} \tag{7.2}$$

Resolvendo-se a regra de três para i, obtém-se uma fórmula genérica para a taxa percentual de juros:

$$i(\%) = \frac{100 \cdot j}{C} \tag{7.3}$$

A taxa de juros unitária é a razão entre o juros e o capital:

$$i = \frac{j}{C}$$

(7.4)

Exemplo 2.7.1. Carlos pede emprestado à Maria a quantia de R$ 600,00, para ser paga depois de 3 meses, comprometendo-se a pagar, naquela data, além dos R$ 600,00, a quantia de R$ 150,00. Calcule a taxa de juros (i).

Solução: O juro (j) é a quantia que se paga a título de compensação pelo uso do dinheiro emprestado. No exemplo, j = R$ 15,00 que Carlos pagará à Maria ao final dos três meses. O Capital (C) é o dinheiro sobre o qual recairão os juros. No exemplo, C = R$60,00. A taxa percentual de juros (i) é a razão entre o juro produzido e o capital empregado no tempo do empréstimo.

Capital juro

600 150

100 i

Resolvendo a regra de três, obtém-se i = 25 % . O mesmo resultado pode ser obtido usando a Eq. (7.3) ■

Unidade de tempo (n) – também conhecida como período financeiro ou de período de capitalização, é o intervalo de tempo após o qual aplica-se os juros sobre o capital inicial, somando-se os valores.

Exemplo 2.7.2. Um empréstimo de R$ 5.000,00 rende juros simples de 2% a.m. (ao mês). Calcule o montante depois de 4 meses. **Solução:** O rendimento em juros a cada mês é constante. Usando a Eq.(7.2), temos: j = R$ 100,00.

Tempo	Juros (2% sobre 5000	Cálculo do Montante	Montante (R$)
0 mês	100	5000 + 0	5000
1º mês	100	5000 + 100	5100
2 º mês	100	5000 + 2 · 100	5200
3 º mês	100	5000 + 3 · 100	5300
4 º mês	100	5000 + 4 · 100	5400

A tabela acima apresenta o montante em cada mês ■

Generalizando as operações do Exemplo 7.2 para n meses, temos uma fórmula para o montante: $M(n) = C + C \cdot i \cdot n$ ou $M(n) = C(1 + i \cdot n)$

(7.5)

Onde i é a taxa unitária.

Da Eq. (7.1), obtemos: $j = M\breve{}C$.

(7.6)

Substituindo M da Eq. (7.5) na Eq. (7.6), obtemos:

$$j = C(1 + i \cdot n) - C$$

$$j = C \cdot i \cdot n. \tag{7.7}$$

Observação: A taxa e o tempo devem estar na mesma unidade de tempo.

EXERCÍCIOS 2.7

2.7.1 A importância de R\$1.500,00 emprestada por 3 meses à taxa de 6%a.m., rende quanto de juros simples?

2.7.2 Calcule o capital que produziu R\$ 13,50 de juros simples à uma taxa de 21,6%a.a., durante três meses.

2.7.3 A que taxa foi aplicado o capital de R\$ 1.540,00 para produzir R\$ 64,68 de juros simples, durante três meses e meio?

2.7.4 Em quanto tempo um capital deve ser aplicado, para triplicar de valor, a uma taxa de 25%am.?

2.7.5 Aplicando a importância de R\$ 280,00 à taxa de 30%aa. de juros simples, durante 75 dias, qual será o montante dessa aplicação?

2.7.6 Calcular o capital aplicado que a juros simples de 2,2%am., durante 45 dias, formou o montante de R\$ 475,18.

2.7.7 Qual o tempo necessário para que um montante após um empréstimo à 7,5%am. de juros simples, seja cinco meios do capital emprestado?

2.7.8 A que taxa de juros simples se deve colocar o capital de R\$ 6.000,00 para que em três meses e seis dias produza um montante de R\$ 6.126,00.

2.7.9 Durante quanto tempo o capital de R\$ 4.000,00 deve ser emprestado, à taxa de 24%aa. para produzir o montante de R\$ 5.440,00.

2.7.10 O montante após um empréstimo por 20 meses é três meios do capital emprestado. Qual é a taxa usada nessa operação?

2.7.11 Um capital ficou depositado durante 1,5m à taxa de 408%aa.. Terminado esse período, o montante foi reaplicado à taxa de 1%ad., durante dois meses. Determine o capital inicial, sabendo que o montante final das aplicações foi de R\$ 1.208,00.

2.7.12 Uma pessoa pretende fazer um empréstimo a juros simples de 3% a.m. No final de 4 meses, ela poderá pagar, no máximo R\$ 1.400,00. Nessas condições, essa pessoa poderá tomar emprestado, por 4 meses, o valor máximo de?

2.7.13 A que taxa anual de juros simples deve-se aplicar um capital para que, ao final de 20 meses, o seu valor seja triplicado?

2.7.14 Um capital foi aplicado a juros simples e, ao completar um período de 1 ano e 4 meses, produziu um montante equivalente a 7/5 de seu valor. A taxa mensal dessa aplicação foi de?

2.7.15 Um capital de R$15.000,00 foi aplicado a juros simples à taxa bimestral de 3%. Para que seja obtido um montante de R$ 19.050,00, o prazo dessa aplicação deverá ser de?

2.7.16 Aplicou-se parte de um capital de R$ 600,00 a 3 % a.m. e o restante a 5% a.m. por 6 meses, obtendo-se um total de juros simples igual a R$ 156,00. A parte aplicada a 3% a.m. é igual a?

2.7.17 O capital de R$ 1.200,00 foi dividido em duas partes tais que a primeira, aplicada a juros simples a 8% a.m., em 2 meses, rendeu a mesma quantia que a segunda a 10% a.m., em 3 meses. Calcule as duas partes.

2.7.18 Qual o tempo necessário para que o montante produzido pela aplicação de R$1.050,00, à taxa de juros simples de 8% a.m., se iguale ao montante produzido pela aplicação de R$1.470,00 à taxa de juros simples de 5% a.m., considerando que ambos os capitais foram aplicados na mesma data?

2.7.19 Um indivíduo aplica 3/5 de seu capital à taxa de juros simples de 24% ao ano, e o restante a juros simples de 12% ao trimestre. Decorridos 10 meses, da aplicação, ele ganhou R$5.600,00 de juros. Qual o valor do seu capital inicial?

2.7.20 Uma geladeira é vendida à vista por R$1.000,00 ou em duas parcelas, sendo a primeira como uma entrada de R$ 200,00 e a segunda, dois meses após, no valor de R$ 880,00. Qual a taxa mensal de juros simples utilizada?

2.7.21 Aplicou-se R$ 50.000,00 em uma operação de Open Market pelo prazo de 4 dias, ‘a taxa e 1,8% a.m. Sabendo-se que a alíquota do imposto de renda foi de 45% sobre os juros, calcule o valor líquido resgatado (capital + juros – IR).

2.7.22 Certa importância foi colocada a juros simples. Depois de 8 anos o valor dos juros se tornou igual ao capital. Os juros foram colocados à taxa anual de ?

2.7.23 Por quanto tempo um capital deve ser empregado a 8% ao ano para que os juros simples obtidos sejam iguais a 4/5 do capital inicial?

2.7.24 Um eletrodoméstico é vendido à vista por R$ 5.000,00 ou então por R$ 1.500 de entrada mais uma parcela de R$ 4.200,00 após 4 meses. Qual a taxa mensal de juros?

2.7.25 O capital de R$ 200.000,00, foi investido a juros simples à taxa de 7,5% ao mês. Após certo prazo a taxa foi majorada para 10% a.m.. Quatro meses após a majoração da taxa foi apurado o montante de todo o prazo do investimento, que somou R$ 370.000,00 o prazo da aplicação do capital à taxa de 7,5% a.m. foi de?

2.7.26 A terça parte de um capital foi aplicada a 18% ao ano, a quarta parte a 20% ao ano e o restante a 15% ao ano, a juros simples. No final de 3 anos os juros somaram R$ 5.000,00. Qual o capital aplicado?

2.7.27 Um capital de R$ 5.000,00 é aplicado a juros simples à taxa de 24% ao ano. Calcule: a) o montante após 6 meses; b) após quanto tempo os juros auferidos serão igual ao capital inicialmente aplicado.

2.7.28 Uma letra de câmbio comprada por R$ 4.000,00 teve um valor de resgate R$ 5.200 após 6 meses. calcule a taxa mensal de juros simples da operação.

2.7.29 João fez um depósito a prazo fixo de 2 anos. Decorrido o prazo, o montante que era de R$112.000,00 foi reaplicado por mais um ano a uma taxa de juros simples 15% superior à primeira. Sendo o montante final de R$137.760,00, calcule o capital inicial depositado.

2.7.30 Calcular a taxa que foi aplicada a um capital de R$ 4.000,00, durante 3 anos, sabendo-se que se um capital de R$ 10.000,00 fosse aplicado durante o mesmo tempo, a juros simples de 5% ao ano, renderia mais R$ 600,00 que o primeiro.

2.8 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESPOSTAS 2.2

2.2.1 a) $\frac{7}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{3}{10}$ d) 2

2.2.2 $\frac{2}{1}$

2.2.3 $\frac{8}{20}$

2.2.4 9 e $\frac{21}{9}$

2.2.5 André $\left(\dfrac{5}{6} > \dfrac{2}{3}\right)$

2.2.6 $\frac{7}{9}$

RESPOSTAS 2.3

2.3.1 $x = \frac{5}{2}$

2.3.2 $x = 3$

2.3.3 $x = \frac{24}{5}$

2.3.4 $x = \frac{55}{48}$

2.3.5 6kg e 8kg

2.3.6 36 anos e 12 anos

2.3.7 12m e 40m

2.3.8 20 anos e 25 anos

2.3.9 21cm

2.3.10 35m e 20m

2.3.11 35m e 20m

2.3.12 36 cm

2.3.13 x = 3 e y = 6

2.3.14 a = 2 e b = 4

2.3.15 a = 2; b = 4 e c = 6

2.3.16 b = 10

2.3.17 a = ± 2; b = ± 4

2.3.18 a = ± 8; b = ± 16

2.3.19 300

2.3.20 30; 75 e 200

2.3.21 A= 36 litros e B= 20 litros

2.3.22 A= R$ 330,00 e B= R$ 420,00

2.3.23 A= R$ 1.250,00, B= R$ 500,00 e C= R$ 750,00

RESPOSTAS 2.4

2.4.1 A= R$ 4.544,00 e B= R$ 6.816,00

2.4.2 A= R$ 5.474,00 ; B= R$ 6.568,80 e C= R$ 3.284,40

2.4.3 A= R$ 996,00 ; B= R$ 996,00 e C= R$ 415,00

2.4.4 B= R$ 5.425,00

2.4.5 A= R$ 245,00, B= R$ 315,00 e C= R$ 525,00

2.4.6 A= R$ 400,00 e B= R$ 600,00

2.4.7 a) R$ 34.000,00 b) A= 6.000,00, B= 10.000,00 e C= 18.000,00

2.4.8 A= R$ 8.000,00 e B= R$ 12.000,00

2.4.9 A= R$ 1.500,00, B= R$ 2.000,00,C= R$ 3.500,00 e Equipamentos: R$ 8.000,00

2.4.10 600

2.4.11 C= R$ 2.880,00 e D= R$ 4.320,00

RESPOSTAS 2.5

2.5.1 a) 12,5 litros b) 360km

2.5.2 a) 2h30min b) 40

2.5.3 a) 5 minutos b) 30 minutos c) 10 dias

2.5.4 a) 72m^2 b) 9litros

2.5.5 20 dias

2.5.6 a) 1min40s b) 240km/h

2.5.7 4 dias

2.5.8 15 m

2.5.9 408 kg

2.5.10 10m

2.5.11 14

2.5.12 160

2.5.13 4

2.5.14 480

2.5.15 8h

2.5.16 250

2.5.17 16

2.5.18 18

2.5.19 4

2.5.20 4

2.5.21 42

2.5.22 576m

RESPOSTAS 2.6

2.6.1 i = 0,0308

2.6.2 i = 25%

2.6.3 R$ 81,00

2.6.4 220 ha

2.6.5 85%

2.6.6 400

2.6.7 R$ 91,00

2.6.8 5%

2.6.9 317.000 sacas

2.6.10 R$ 44.520,00

2.6.11 37,5%

2.6.12 R$ 288,00

2.6.13 450

2.6.14 32.000 hab.

2.6.15 R$ 880,00

2.6.16 R$ 636,00

2.6.17 58,33%

2.6.18 37,5%

2.6.19 8,59%

2.6.20 a) R$ 437,00

2.6.21 b) R$ 115,00

2.6.22 1º=650; 2º= 273

2.6.23 1,122 kg

2.6.24 42%

2.6.25 16

2.6.26 52

2.6.27 R$ 1.820,00

2.6.28 R$ 5.702,40

2.6.29 300

RESPOSTAS 2.7

2.7.1 R$ 270,00

2.7.2 R$ 250,00

2.7.3 1,2% a.m.

2.7.4 8 meses

2.7.5 R$ 297,50

2.7.6 R$ 460,00

2.7.7 20 meses

2.7.8 0,656% a.m.

2.7.9 18 meses

2.7.10 2,5% a.m.

2.7.11 R$ 500,00

2.7.12 R$ 1.250,00

2.7.13 120%

2.7.14 2,5%

2.7.15 18 meses

2.7.16 R$ 200,00

2.7.17 R$ 782,61 e R$ 417,39

2.7.18 40 meses

2.7.19 R$20.000,00

2.7.20 5%

2.7.21 R$ 50.066,00

2.7.22 12,5%

2.7.23 10 anos

2.7.24 5%

2.7.25 6 meses

2.7.26 R$ 9.661,84

2.7.27 a) R$ 5.600,00 b) 50 meses

2.7.28 5%

2.7.29 R$ 80.000,00

2.7.30 7,5% ao ano

Capítulo 3

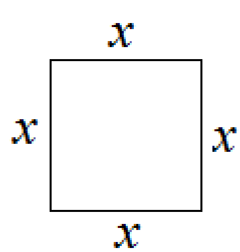
Expressões Algébricas

3.1 Expressões Algébricas

A Matemática é uma linguagem e como tal, expressa alguma coisa. Ao calcular a área de um retângulo com *3 cm* de comprimento e *4 cm* de largura, escrevemos $3 \cdot 4$ (três vezes quatro) e estamos expressando a soma de $4+4+4$. Tanto $3 \cdot 4$ como $4+4+4$ são expressões numéricas, cujo significado particular é o número de cm^2 do retângulo.

Para escrever de modo geral a área de qualquer quadrado de lado x, usamos x^2. Esta expressão com *letras* e *números*, chamamos de *expressão algébrica*.

Exemplo 3.1.1. O lado do quadrado pode ser expresso pela letra x e isso significa que o lado é variável, ou seja, pode assumir diferentes valores positivos.



Se $x = 2$ *cm* o quadrado tem todos os lados iguais a *2 cm* e é aproximadamente do tamanho de um ladrilho de revestimento de paredes.

Se $x = 2,2$ *m*, o quadrado tem todos os lados iguais a $2,2$ *m* e é aproximadamente do tamanho de banheiro.

Se $x = 1$ *hm* (*100m*), o quadrado tem todos os lados iguais a *1 hm* e é aproximadamente do tamanho de uma quadra de cidade.

Devemos observar que o lado do quadrado expresso por x é variável, ou seja, pode assumir diferentes valores.

Para cada valor de x proposto acima, o perímetro (P) de todos os quadrados, pode ser escrito com uma equação algébrica:

$$P = 4x.$$

Dizemos que $4x$ é a expressão algébrica do perímetro de qualquer quadrado de lado x. Nesse caso, o número 4 é uma constante (coeficiente, parte numérica) e x é a variável (parte literal) ■

As expressões algébricas recebem nomes específicos em função do número de termos:

1 termo = **monômios**. Exemplos: $7x^3$; $3m^2n^4$

2 termos = **binômios**. Exemplos: $x+1$; $7x^3-4x$; $4y-3$; x^2-1

3 termos = **trinômios**. Exemplos: x^4-x^3+3; x^2- $2x$ + 3

Mais do que 3 termos = **polinômios**. Exemplo: $2x^4$ - $3x^3$ + $3x^2$ + 2.

Definição 3.1.1. Dois monômios são semelhantes se as partes literais forem idênticas.

Exemplo 3.1.2. **(a)** Os monômios $7x^3$ e $3x^3$ são semelhantes, pois as partes literais são idênticas;

(b) Os monômios $2ab^2$ e $2a^3b$ não são semelhantes, pois as partes literais são diferentes ■

Exemplo 3.1.3. Determine o valor numérico do polinômio $3x^2$ - $4x$ - 1, para x = -1.

Solução: O valor numérico de uma expressão algébrica é obtido substituindo o valor da variável na expressão:

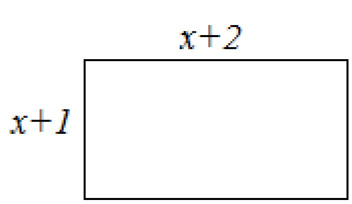
$3(-1)^2 - 4(-1)$ *-1 = 3 + 4 -1 = 6* ■

EXERCÍCIOS 3.1

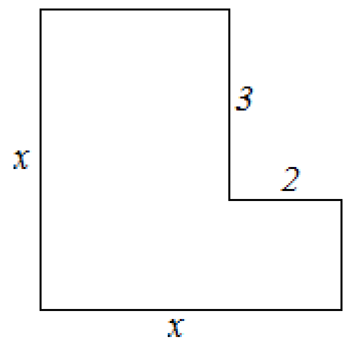
3.1.1 Use variáveis para expressar o perímetro e a área de:

- **(a)** Quadrados
- **(b)** Retângulos em que um lado é o dobro do outro
- **(c)** Retângulos em que a diferença dos lados é *2 cm*
- **(d)** Retângulos em que um lado é *5 cm* maior do outro

3.1.2 Determine a expressão algébrica do perímetro do retângulo



3.1.3 Determine a expressão algébrica do perímetro da figura:



3.1.4 Determine o perímetro da figura do **E**x 3.1.3 para $x = 4$.

3.1.5 O valor de x poderia ser 1 na figura do **E**x 3.1.3 ?

3.1.6 Calcule o valor numérico das expressões com os respectivos valores das variáveis:

a) $7x^3 + x^2 - 3x + 1$ para $x = -2$

b) $-x^4 + 5x - \frac{1}{3}$ para $x = -1$

c) $\frac{x+1}{x^2-2}$ para $x = 2$

d) $\frac{x+1}{x^2-x+1}$ para $x = \frac{1}{2}$

3.2 Operações com monômios e polinômios

Adição e subtração de monômios e polinômios

Só é possível adicionar ou subtrair monômios semelhantes.

Para adicionar ou subtrair monômios, soma-se ou subtrai-se os coeficientes e mantem-se a parte literal.

Para adicionar/subtrair polinômios, soma-se ou subtrai-se os monômios semelhantes.

Exemplo 3.2.1.

(a) $3x^2 + 5x^2 - 2x^2 = (3+5-2)x^2 = 6x^2$

(b) $5y - 7x - 8y + 6x = (5-8)y + (-7+6)x = -3y - x$

(c) $(x^2 + 5x - 3) - (2x^2 + 2x - 8) = -x^2 + 3x + 5$

Multiplicação e divisão de monômios

Multiplica-se ou divide-se os coeficientes e usa-se a propriedade da multiplicação/divisão de potências de mesma base para multiplicar a parte literal.

Exemplo 3.2.2. (a) $(-3x^2)\cdot(7x^2) = -21x^4$

(b) $(25x^4y^2) \div (5x^2y) = 5x^2y$

(c) $(10x^2) \div (2x) = 5x$

(d) $(12x^3 + 6x^2 - 5x) \div (-2x) = -6x^2 - 3x + \frac{5}{2}$.

Exemplo 3.2.3. Multiplique $12 \cdot 15$

Solução: Vamos escrever $12 = 10+2$ e $14 = 10+4$. Para multiplicar usamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

$(10+2)\cdot(10+4) = 10\cdot 10 + 10\cdot 4 + 2\cdot 10 + 2\cdot 4 = 100+40+20+8 = 168.$

Ou, na forma de algoritmo:

1d + 4u

10 + 2

———

2d + 8u

1c + 4d

————

1c + 6d + 8u = 168 u ■

Exemplo 3.2.4. Multiplique os polinômios: $(x^3 + 6x^2 - 5x)\cdot(x-2)$

Solução: A multiplicação de dois polinômios segue o mesmo algoritmo da multiplicação de dois números decompostos como soma, como no Ex 3.2.3

$x^3 + 6x^2 - 5x$

x – 2

————————

$-2x^3 - 12x^2 + 10x$

$x^4 + 6x^3 - 5x^2$

————————

$x^4 + 4x^3 - 17x^2 + 10x$ ■

Exemplo 3.2.5. Divida os polinômios: $(x^3 + 6x^2 - 5x) \div (x-2)$.

Solução: A divisão de polinômios é semelhante ao algoritmo da divisão de dois números inteiros.

$$\begin{array}{rl}
x^3+6x^2-5x & \underline{|\,x-2\quad} \\
-x^3+2x^2 \quad\;\; & \;x^2+8x \\
------ & \\
+8x^2-5x & \\
-8x^2+16x & \\
----- & \\
+11x &
\end{array}$$

A divisão dos polinômios dá x^2+8x e o resto é $+11x$ ■

EXERCÍCIOS 3.2

3.2.1 Explique porque podemos cancelar a em $\frac{a \cdot b}{a}$ e não podemos em $\frac{a+b}{a}$.

3.2.2 Verifique se as igualdades são verdadeiras (justifique sua resposta):

a) $a^2+a^3=a5$

b) $x^3 \cdot x^3 = x^6$

c) $y^3 : y^3 = 1$

d) $2m^2-3m^2=-m^2$

e) $x^3 \cdot x^3 = 2x^6$

f) $10y^3 : 2y^2 = 5y$

3.2.3 Resolva as operações com as expressões algébricas:

a) $3x^2+\frac{1}{3}x^2-2x^2$

b) $ab^2-\frac{1}{2}ab^2+\frac{1}{4}ab^2$

c) $y^3-\frac{3}{4}y^3+2y^3$

d) $x(xy+2x+3y)$

e) $(x-3)(x^2-\frac{1}{3}x+3$

f) $a^2b \cdot ab^3 \cdot a^3b$

g) $(y^2-\frac{1}{5}) \cdot (5y-2)$

h) $7a^3b^2x^2 : 14a^2bx$

i) $(2x^3+5x^2+2x) : (x+\frac{1}{2})$

j) $\frac{1}{2}m^3n^2 : \frac{1}{4}m^2n+mn$

3.2.4 Dados os polinômios $A=2x+1$; $B=x-3$ e $C=2x^2+5x+2$, resolva:

a) $A+B$

b) $B+C-A$

c) $A \cdot B$

d) $A \cdot C$

e) $C-x \cdot A$

f) $C : A$

g) $C : B$

h) $A \cdot B - C$

3.2.5 Um lado de um retângulo é expresso por $x+3$ e outro por $2x$:

a) Determine a expressão algébrica do perímetro.

b) Determine a expressão algébrica da área.

c) Para que valor de x o perímetro é $18cm$?

d) Se a área é $56cm^2$, qual é o valor de x?

e) Qual é o valor de x para que os lados sejam iguais?

3.2.6 A área de um retângulo é expressa por x^2+2x-3 e um dos lados por $x-1$. Determine a expressão algébrica do outro lado.

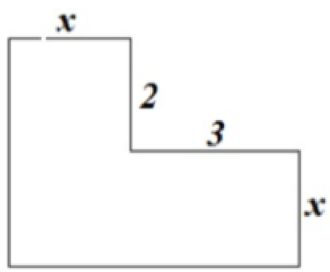
3.2.7 O lado de um cubo é expresso por $x+1$. Determine a expressão algébrica:

a) Do volume

b) Da área de uma face

c) Da área superficial

3.2.8 Com base na figura, determine as expressões algébricas do perímetro e da área.



3.2.9 O lado de um quadrado é expresso por $x+3$:

a) Determine a expressão algébrica da área.

b) Calcule a área para $x=1$.

c) x pode ser zero?

d) Qual o valor de x para que a área seja nula.

3.2.10 Calcule os valores da área do quadrado do **Ex 3.2.9** para:

$$x = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$$

3.3 Produtos Notáveis

Produtos notáveis são produtos especiais de polinômios. São chamados "notáveis" porque aparecem seguidamente em problemas de Matemática.

Quadrado da soma de dois termos: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

Quadrado da diferença de dois termos: $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

Produto da soma pela diferença: $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

Cubo da soma de dois termos: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Cubo da diferença de dois termos: $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

EXERCÍCIOS 3.3

3.3.1 Resolva os produtos notáveis:

a) $(x+5)^2$
b) $(2x-3)^2$
c) $(x+\frac{1}{2})^2$
d) $(3-x)^2$
e) $(\frac{1}{2}x+2)^2$
f) $(x+1)^3$
g) $(2x-5)^3$
h) $(x-3)(x+3)$
i) $(m+3n)(m+3n)$
j) $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$
k) $(x+1)(x+2)$
l) $(x-1)(x+3)$
m) $(2a-b)(2a+b)$
n) $(a+b+1)^2$
o) $(x+\frac{1}{4})(x+2)$

3.4 Fatoração

Fatores *são os termos de uma multiplicação e* ***fatorar*** *é transformar um número ou expressão algébrica em um produto de fatores.*

Exemplos:

a) O número 12 fatorado é $3\cdot 4$, onde 3 e 4 são fatores.

b) Podemos decompor números em fatores primos, por exemplo: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Os números 2 e 3, nesse caso são fatores, onde o fator 2 aparece três vezes.

c) Na expressão $3x^2a^3$, 3, x^2 e a^3 são fatores.

Fatoração com Fator Comum:

Algumas expressões algébricas têm *fatores comuns* (fatores que estão presentes em mais de uma expressão algébrica) que se pode colocar em evidência (colocar em separado, na forma de fatores). Vejamos os exemplos:

a) $3x + 6y = \boxed{3}x + 2 \cdot \boxed{3}y = 3 \cdot (x + 2y)$. Observemos que o 3 é fator comum aos dois monômios.

b) $4ab^3 - 2a^3b + 10ab^4 = 2ab \cdot (2b^2 - a^2 + 5b^3)$. Observemos que o 2ab é fator comum aos três monômios

c) $2an + 2bn - am - bm$. **(Fatoração por agrupamento)**

Nos dois primeiros termos o fator comum é $2n$ e nos dois últimos o fator comum é $-m$.

$2an + 2bn - am - bm = 2n(a + b) - m(a + b)$

A expressão resultante tem mais um fator comum: $(a + b)$. Então:

$2an + 2bn - am - bm = (a + b)(2n - m)$.

Fatoração do Trinômio Quadrado Perfeito (TQP):

Um trinômio é *quadrado perfeito (TQP)* se foi originado pelo quadrado da soma ou subtração de dois termos.

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ (*Quadrado da soma de dois termos*)

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ (*Quadrado da diferença de dois termos*)

Observemos que o trinômio foi *transformado (fatorado)* em um produto onde os fatores são $(a \pm b)$. Chamando a de *"primeiro termo do binômio"* e b de *"segundo termo do binômio"*, dizemos que o trinômio $a^2 + 2ab + b^2$ é o quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo mais o quadrado do segundo.

Fatoração da Diferença de dois quadrados:

$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$ (*Produto da soma pela diferença de dois termos*)

Exemplo 3.4.1. Verifique se $x^2 + 2x + 1$ é um TQP.

Solução: Se o trinômio dado é um TQP então o primeiro termo do binômio $(a+b)$ deve ser $a = \sqrt{x^2} = x$; o segundo termo do binômio $(a+b)$ deve ser $b = \sqrt{1} = 1$.

Teste do segundo termo do trinômio: $2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot x \cdot 1 = 2x$ deve ser igual ao *segundo termo do trinômio*. O que de fato ocorre, neste caso. Assim,

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Portanto, o polinômio dado é um TQP ■

Exemplo 3.4.2. Verifique se $x^2 + 2x + 4$ é um TQP.

Solução: Se o trinômio dado é um TQP então o primeiro termo deve ser $a = \sqrt{x^2} = x$ e o segundo termo $b = \sqrt{4} = 2$.

Teste do segundo termo do trinômio: $2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot x \cdot 2 = 4x$, que é diferente de 2x. Portanto, o trinômio dado não é um TQP ■

Exemplo 3.4.3. Complete o trinômio $x^2 - 4x + 1 = 0$, de modo que obtenha-se um TQP.

Solução: Para se obter um TQP na identidade dada, o primeiro termo do binômio $(a+b)$ deve ser $a = \sqrt{x^2} = x$. O segundo termo "b"pode ser obtido, sabendo que

$2 \cdot x \cdot b = -4x$ *(duas vezes o primeiro termo, vezes o segundo termo é igual ao segundo termo do trinômio)*

Assim, $b = -2$ e o TQP é $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$.

Para obter o TQP no lado esquerdo da identidade dada, basta adicionar (+3) em ambos os lados:

$$x^2 - 4x + 1 + (+3) = 0 + (+3)$$

$$x^2 - 4x + 4 = 3$$ ■

EXERCÍCIOS 3.4

3.4.1 Fatore as expressões algébricas:

a) $x^2 - x$

b) $a^3b^2 - ab + ab^2$

c) $9x^2 - 12x + 4$

d) $9 + 6x + x^2$

e) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

f) $x^2 - 25$

g) $16x^2 - \frac{4}{9}$

h) $ax + bx + ay + by$

i) $6 + 3x + 2y + xy$

j) $x^3 + 1$

3.4.2 Verifique se os trinômios são quadrados perfeitos:

a) $x^2 + 4x + 16$

b) $x^2 + 6x + 9$

c) $4y^2 - 12y + 9$

d) $9x^2 - 6x + 3$

3.4.3 Adicione constantes nas equações de modo a obter trinômios quadrados perfeitos no lado esquerdo da igualdade:

a) $x^2 + 6x + 10 = 0$

b) $4x^2 + 4x + 3 = 0$

c) $9x^2 - 12x + 5 = 0$

d) $x^2 + 10x + 12 = 0$

3.5 Expressões algébricas fracionárias

Expressões algébricas fracionárias são expressões com variáveis no denominador.

Exemplos:

1) $\frac{a+b}{b}$ 2) $\frac{x^2+3x+5}{x-1}$ 3) $\frac{ab^2-5a+b}{a+b}$

3.5.1 Menor Múltiplo Comum (MMC) com expressões algébricas:

Para encontrar o MMC de números são conhecidos dois métodos:

Encontre o MMC(6,8):

a) Usando conjuntos de múltiplos:

Os múltiplos de 6 são :

$$M(6) = \left\{6, 12, 18, \boxed{24}, 30, 36, 42, \boxed{48}, 54, 60, 66, \boxed{72}, 78, ...\right\}$$

Os múltiplos de 8 são :

$$M(8) = \left\{8, 16, \boxed{24}, 32, 40, \boxed{48}, 56, 64, \boxed{72}, 80, ...\right\}$$

Examinando os conjuntos de múltiplos de 6 e 8, observa-se que existem vários múltiplos comuns, mas o menor deles é 24. Então, MMC(6,8) = 24.

b) Usando decomposição em fatores primos:

1º) decompor os números em fatores primos;

2º) o MMC é o produto de todos os fatores, porém aqueles que se repetirem, escolhe-se apenas os de potência maior.

$6 = 2 \cdot 3$ e $8 = 2^3$

Os fatores são 2, 3 e 2^3 . Como o fator 2 se repetiu, escolhemos apenas 2^3.

Então, MMC(6,8) = $2^3 \cdot 3 = 24$.

O MMC de expressões algébricas é calculado pelo método da decomposição.

Exemplo 3.5.1. Determine o MMC das expressões algébricas:

a) ab^2 e a^3b.

Os fatores são: a; a^3; b e b^2. Então, o MMC(ab^2, a^3b) = a^3b^2

b) x^2+2x+1 e $2(x+1)$:

Fatorando a primeira expressão, temos: x^2+2x+1 = $(x+1)^2$. Os fatores são: $(x+1)^2$; 2 e $(x+1)$. Então o MMC das expressões dadas é $2(x+1)^2$ ■

3.5.2 Operações com frações algébricas

As operações com frações algébricas seguem as mesmas regras das operações com frações numéricas e polinômios.

Exemplo 3.5.2. Resolva as operações com as frações algébricas:

a) $\frac{a}{b} + \frac{2a}{b^2} =$

O MMC(b, b^2) = b^2. Aplicando o algoritmo da adição de frações, temos:

$$\frac{a}{b} + \frac{2a}{b^2} = \frac{ab+2a}{b^2} = \frac{a(b+2)}{b^2}$$

b) $\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+1}{x^2-1} =$

Ao invés de multiplicas diretamente, podemos fazer simplificações reescrevendo o denominador da segunda fração como: (x^2-1) = $(x+1)(x-1)$. Assim,

$$\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} =$$

Cancelando os fatores iguais (propriedade do cancelamento), temos:

$$\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x}{x+2} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{x}{(x+2)(x-1)} \qquad ■$$

EXERCÍCIOS 3.5

3.5.1 Simplifique as frações algébricas usando a propriedade do cancelamento:

a) $\frac{21x^4}{15x}$ c) $\frac{a^2-a}{a^2-2a+1}$ e) $\frac{x^3+4x^2-21x}{x^2-9}$

b) $\frac{x^2}{x^2-x}$ d) $\frac{y+2}{4y^2-16}$ f) $\frac{a^3+3a^2-5a-15}{a^2+3a}$

3.5.2 Resolva as adições e subtrações com frações algébricas:

a) $\frac{1}{3x}+\frac{x+1}{x^2}$ c) $\frac{1}{y^2-1}-\frac{1}{y+1}$ e) $\frac{x}{x+3}+\frac{1}{x^2+6x+9}$

b) $\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{x}{x-1}$ d) $\frac{2}{a}+\frac{a}{a^2+1}$ f) $\frac{x}{x^2-25}-\frac{x-1}{2x-10}$

3.5.3 Multiplique as frações algébricas usando a propriedade do cancelamento:

a) $\frac{4}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{16}$ c) $\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2-6x+9}{x+1}\cdot\frac{x^2+x}{x-3}$ e) $\frac{x^3-1}{2x^2}\cdot\frac{4x}{x^2+x+1}$

b) $\frac{x+4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x}{x^2-16}$ d) $\frac{4x^2-2}{x^2}\cdot\frac{6x^2-6}{4x^4-4x^2+1}$ f) $\frac{y+3}{7}\cdot\frac{21}{2y+6}$

3.5.4 Resolva as operações com frações algébricas:

a) $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x^3}}$

b) $\frac{x}{3x+1}+\frac{x+1}{9x^2-1}$

c) $\frac{a}{a-1}:\frac{a^3}{a^3-a}$

d) $\frac{1}{2y+5}-\frac{y}{4y^2+20y+25}$

e) $\frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{x-2}+\frac{1}{x^2-4}$

f) $\frac{x}{x-3}-\frac{1}{x^2-6x+9}:\frac{6x^2-36x+54}{2x-6}$

3.6 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESPOSTAS 3.1

3.1.1 a) $P = 4x; A = x^2$

b) $P = 6x; A = 2x^2$

c) $P = 4x - 4; A = x^2 - 2x$

d) $P = 4x + 10; A = x^2 + 5x$

3.1.2 $P = 4x + 6$

3.1.3 $P = 4x$

3.1.4 $P = 16cm$

3.1.5 Não. Se $x = 1cm$, a figura não seria fechada.

3.1.6 a) -45 b) $\frac{-19}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ d) 2

RESPOSTAS 3.2

3.2.1 Só podemos cancelar quando o mesmo número ou variável está sujeito a operações inversas. Neste caso, a multiplicação por a pode ser cancelada com a divisão por a.

3.2.2 a) Falsa. A soma dos expoentes, quando as bases são iguais, só é feita se a operação entre as potências for a multiplicação.

b) Verdadeira. Na multiplicação de potências de mesma base conserva-se a base e soma-se os expoentes.

c) Verdadeira. Na divisão de potências de mesma base, conserva-se a base e subtrai-se os expoentes.

d) Verdadeira.

e) Falsa. Multiplica-se os coeficientes ao invés de somá-los.

f) Verdadeira.

3.2.3 a) $\frac{4}{3}x^2$

b) $\frac{3}{4}ab^2$

c) $\frac{9}{4}y^3$

d) $x^2y + 2x^2 + 3xy$

e) $x^3 - \frac{10}{3}x^2 + 4x - 9$

f) a^6b^5

g) $5y^3 - 2y^2 - y + \frac{2}{5}$

h) $\frac{1}{2}abx$

i) $2x^2 + 4x$

j) $3mn$

3.2.4 a) $3x - 2$

b) $2x^2 + 4x - 2$

c) $2x^2 - 5x - 3$

d) $4x^3 + 12x^2 + 9x + 2$

e) $4x + 2$

f) $x + 2$

g) $2x + 11; R = 35$

h) $-10x - 5$

3.2.5 a) $6x+6$ b) $2x^2+6x$ c) $2cm$ d) $4cm$ e) 3

3.2.6 $x+3$

3.2.7 a) x^3+3x^2+3x+1 b) x^2+2x+1 c) $6x^2+12x+6$

3.2.8 $P=4x+10; A=x^2+5x$

3.2.9 a) x^2+6x+9 b) 16 c) Sim d) -3

3.2.10 Respectivamente $0;1;4;9;16;25;36$

RESPOSTAS 3.3

3.3.1
a) $x^2+10x+25$
b) $4x^2-12x+9$
c) $x^2+x+\frac{1}{4}$
d) x^2-6x+9
e) $\frac{1}{4}x^2+2x+4$
f) x^3+3x^2+3x+1
g) $8x^3-60x^2+150x-125$
h) x^2-9
i) $m^2+6mn+9n^2$
j) $x^2-\frac{1}{4}$
k) x^2+3x+2
l) x^2+2x-3
m) $4a^2-b^2$
n) $a^2+b^2+2ab+2a+2b+1$
o) $x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{2}$

RESPOSTAS 3.4

3.4.1
a) $x(x-1)$
b) $ab(a^2b-1+b)$
c) $(3x-2)^2$
d) $(x+3)^2$
e) $(x+\frac{1}{2})^2$
f) $(x+5)(x-5)$
g) $(4x+\frac{2}{3})(4x-\frac{2}{3})$
h) $(x+y)(a+b)$
i) $(3+y)(2+x)$
j) $(x+1)(x^2-x+1)$

3.4.2
a) Não é um TQP.
b) É um TQP: $(x+3)^2$
c) É um TQP: $(2y-3)^2$
d) Não é um TQP.

3.4.3 a) -1 b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{9}$ d) 13

RESPOSTAS 3.5

3.5.1

a) $\frac{7}{5}x^3$ c) $\frac{a}{a-1}$ e) $\frac{x(x+7)}{x+3}$

b) $\frac{x}{x-1}$ d) $\frac{1}{4y-8}$ f) $\frac{a^2-5}{a}$

3.5.2 a) $\frac{4x+3}{3x^2}$ c) $\frac{2-y}{(y+1)(y-1)}$ e) $\frac{x^2+3x+1}{(x+3)^2}$

b) $\frac{-x^3+2x^2-x-2}{x(x+1)(x-1)}$ d) $\frac{3a^2+2}{a(a^2+1)}$ f) $\frac{-x^2-2x+5}{2(x^2-25)}$

3.5.3 a) $\frac{x+1}{4}$ c) $x-3$ e) $\frac{2(x-1)}{x}$

b) $\frac{1}{x^2-3x-4}$ d) $\frac{12(x^2-1)}{x^2(2x^2-1)}$ f) $\frac{3}{2}$

3.5.4 a) $\frac{x^2}{x+1}$ c) $\frac{a+1}{a}$ e) $\frac{x^2(x+2)+1}{(x-2)(x+2)}$

b) $\frac{3x^2+1}{9x^2-1}$ d) $\frac{y+5}{(2y+5)^2}$ f) $\frac{3x(x-3)^2-1}{3(x-3)^3}$

Capítulo 4

Equações de primeiro e segundo grau

4.1 Introdução

Ao escrever problemas em linguagem matemática, geralmente utilizamos equações. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 4.1.1. A renda de uma família é a soma das rendas do pai (P), da mãe (M) e de uma filha (F). Sabe-se que a renda total é *R$ 4.500,00* e somando a renda do pai e da mãe, obtém-se *R$ 3.100,00*. Qual é a renda do filha ?

Solução: Escrevendo a renda como uma equação temos:

$$R = P + M + F \tag{4.1}$$

Sabemos que $P + M =$ *R$ 3.100,00,* e R= *R$ 4.500,00*. Substituindo $P + M$ e R na equação, temos:

$$4500 = 3100 + F \tag{4.2}$$

Para que o lado esquerdo da Eq. (2) seja igual ao lado direito, $F = 1.400$ ■

Na Eq. (2) temos uma equação com uma letra, cujo valor desconhecemos, mas que desejamos determinar. Chamamos esta letra de *incógnita*.

Exemplo 4.1.2. O perímetro de um quadrado mede *12 cm.* Quanto mede cada lado?

Solução: Chamaremos de x (*incógnita*, a grandeza desconhecida) o lado do quadrado e escrevemos uma equação para o perímetro:

$$P = 4 \cdot x \tag{4.3}$$

Substituindo *12* no lugar de P obtemos uma equação com uma incógnita.

2 = 4 · x

Novamente temos uma equação com uma incógnita. É fácil verificar que o lado do quadrado mede *x = 3 cm* ■

Exemplo 4.1.3. a) O dobro de um número mais *3* é igual a *5*. Que número é esse?

b) O dobro de um número mais *3* é igual a *6*. Que número é esse?

Solução: a) Chamando esse número de *x*, podemos escrever:

$$2x+3=5 \tag{4.4}$$

Novamente temos uma equação com uma incógnita. Para que o lado esquerdo da Eq. (4) seja igual ao lado direito, *x = 1*.

b) Com o mesmo procedimento do item (a), podemos escrever:

$$2x+3=6 \tag{4.5}$$

A solução nesse caso, não é tão óbvia. Neste capítulo vamos estudar operações algébricas para encontrar o valor da incógnita de equações algébricas. A solução é *x = 3/2*. Substitua esse valor de *x* na equação dada e verifique se ambos os lados da equação são iguais ■

Podemos elaborar equações de vários tipos:

3 · (5+8) = 10+ 29	(Equação numérica)
$2+3x+x^2+5x^3+x^4=0$	(Equação polinomial de 4º grau)
$\frac{1}{1+x^2}=0$	(Equação racional)
$3^{x+1}=2$	(Equação exponencial)

Neste capítulo vamos estudar as soluções das equações polinomiais de 1º e 2º Grau.

4.2 Solução da equação

O(s) valor(es) da incógnita que torna ambos os lados iguais é a solução de uma equação. Para resolver equações é necessário conhecer suas propriedades.

Propriedade fundamental das equações:

Se em ambos os lados da equação for realizada a mesma operação, a equação permanece verdadeira (é mantida a identidade da equação).

Exemplo 4.2.1. Consideremos uma equação numérica: *5 = 5*.

Evidentemente é uma equação verdadeira pois 5 é igual a 5!

1. Se adicionarmos +10 em ambos os lados, temos
   +10 + 5 = 5 + 10
   +15 = +15. A identidade foi mantida.
2. Se adicionarmos -10 em ambos os lados, temos
   -10 + 5 = 5 + (-10)
   -5 = -5. A identidade foi mantida.
3. Se multiplicarmos por 7 em ambos os lados, temos
   $7 \cdot 5 = 5 \cdot 7$
   (a) = 35. A identidade foi mantida.
4. Se dividirmos por 4 em ambos os lados, temos

$\frac{5}{4} = \frac{5}{4}$. A identidade foi mantida■

Exemplo 4.2.2. Dada a equação $3x = 2x + 5$, determine o valor de x.

Solução: Usando a propriedade fundamental, se adicionarmos $-2x$ em ambos os lados da equação dada, temos:

$-2x + 3x = 2x + 5 - 2x$

$x = 5$■

Para resolver uma equação, precisamos isolar a incógnita em um dos lados. Os *princípios aditivo* e *multiplicativo* derivam da propriedade fundamental e a tornam mais prática.

Princípio aditivo
Adicionando constantes ou variáveis em ambos os lados, a solução da equação permanece a mesma.

Exemplo 4.2.3. Dada a equação $2x = x + 12$, determine o valor de x.

Solução: Observemos que a solução é $x = 12$. Precisamos reunir as expressões que contem x em um lado da equação. Adicionando $-x$ em ambos os lados, obtemos:

$-x + 2x = x - x + 12$

$x = 12$. Observemos que a solução permaneceu a mesma $x = 12$ ■

Princípio multiplicativo Multiplicando (ou dividindo) ambos os lados por constantes ou variáveis (diferente de zero), a solução da equação permanece a mesma.

Exemplo 4.2.4. Dada a equação $2x = -12$, determine o valor de x.

Solução: Observemos que a solução é $x = -6$. Multiplicando ambos os lados por $\frac{1}{2}$, obtemos:

$\frac{1}{2} \cdot 2x = -12 \cdot \frac{1}{2}$

$x = -6$. Observemos que a solução permaneceu a mesma, $x = -6$ ■

4.3 Equação do 1º Grau

As equações polinomiais têm a forma de polinômios de uma incógnita igualados a zero:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_nx^n = 0 \qquad (4.6)$$

O grau de uma equação polinomial é o grau do maior expoente da incógnita. Assim,

$2 + 3x = 0$ é uma equação de 1º grau

$4 + 5x + x^2 = 0$ é uma equação do 2º grau

$3 + 2x + x^2 + 5x^3 + 2x^4 = 0$ é uma equação do 4º grau e assim por diante.

Definição 4.3.1. A equação do 1º Grau tem a forma

$$ax + b = 0 \qquad (4.7)$$

Onde a e b são números reais e x é uma incógnita.

Exemplo 4.3.1. Mostre que a equação *x + 3x +3(x-1) = 5* pode ser reduzida à forma

ax + b = 0.

Solução: Multiplicando a constante *3* pelo conteúdo do parêntesis, temos:

x + 3x +3x -3 = 5. Adicionando os termos semelhantes e adicionando +*3* em ambos os lados da equação, temos:

*7x -3+3 = 5+3*ou adicionando *(-8),* temos:

7x - 8 = 0. Portanto, a equação dada é do 1º Grau ■

Exemplo 4.3.2. Mostre que a equação $\frac{x-3}{2} = \frac{x+3}{3} + 3$ pode ser reduzida à forma

ax + b = 0 e resolva a equação.

Solução: Multiplicando toda equação por *6*, temos:

$$6\left(\frac{x-3}{2}\right) = 6\left(\frac{x+3}{3} + 3\right)$$

Efetivando os produtos, temos:

$3x - 9 = 2x + 6 + 18$. Adicionando *-2x* e *-24* em ambos os lados, temos:

x - 33 = 0. Portanto, a equação dada é do 1º Grau.

Para resolver a equação, basta adicionar +*33* em ambos os lados.

x = 33 ■

Observemos que nas equações de 1º Grau existe apenas uma solução.

EXERCÍCIOS 4.3

4.3.1 Uma estratégia para resolver equações fracionárias de apenas um termo em cada lado da igualdade é multiplicando os meios e os extremos (lembrar de proporções):

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então $a \cdot d = b \cdot c$. (a e d são os extremos e b e c são os meios)

a) Use essaestratégia para resolver a equação $\frac{x}{2} = \frac{2}{3}$

b) A estratégia poderia ser usada para resolver $\frac{x}{2} = \frac{2x}{3} + \frac{1}{2}$?

4.3.2 Resolva a equação $\frac{x+1}{4} = x + \frac{1}{2}$:

(a) Multiplicando ambos os lados pelo MMC dos denominadores

(b) Adicionando os termos do lado direito e igualando o produto dos meios e dos extremos.

4.3.3 Determine a solução das equações:

(a) $x + 3 = 1$

(b) $3x - 3 = x + 1$

(c) $3(x+2) = 9$

(d) $2(3x+3) = 3x$

(e) $2(x-2x) = 4(x-1)$

(f) $\frac{x-1}{2} = \frac{x-4}{3}$

(g) $\frac{x+5}{4} = \frac{3x+3}{6}$

(h) $\frac{12}{x} = \frac{3}{x} + \frac{3}{2}$

(i) $3(x+5) = \frac{x-20}{2}$

(j) $\frac{1}{2} = \frac{x-2}{3}$

4.3.4 Resolva a equação $\frac{x}{5} + \frac{x-1}{10} = \frac{1}{2}$:

(a) Adicionando as frações do lado esquerdo e depois resolvendo para x;

(b) Multiplicando toda a equação pelo MMC dos denominadores e depois resolvendo para x.

4.3.5 Resolva as equações:

(a) $\frac{x}{3} + \frac{x-1}{2} = \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2} = \frac{x}{5} + 2x$ c) $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{1}{6}$

$(d)\frac{x+1}{2} + \frac{3x}{4} = \frac{5x}{2}$ e) $\frac{5}{x+1} = \frac{3}{x+2}$ f) $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2}$

4.3.6 Determine:

(a) Um número mais sua metade e mais 5 é 8. Que número é este?

(b) Um número mais sua metade e mais 5 é 3. Que número é este?

(c) A terça parte de um número, mais a metade desse número menos 1 é $\frac{1}{3}$. Que número é este?

4.3.7 O lado de um quadrado mede $x+2cm$, onde x é uma variável real. Qual é o valor de x, sabendo-se que o perímetro é 12 cm?

4.3.8 A largura e o comprimento de um retângulo medem xcm e $(x+3)\,cm$, respectivamente. Qual é o valor de x, para que o perímetro seja:

(a) P = 10 cm

(b) P = 12 cm

4.3.9 A largura de um retângulo é dada pela expressão 3x− 1 e o comprimento por $x+\frac{1}{2}$. Qual é o valor de x, se a largura é a metade do comprimento?

4.3.10 O comprimento de um campo de futebol é 30m maior do que a largura. Quais são as dimensões do campo, se o perímetro é 340m?

4.3.11 Os lados, em sequência, de um triângulo diferem entre si por *2 cm*. Quanto mede cada lado se o perímetro é 12 cm?

4.4 Equação do 2º Grau

Definição 4.4.1. as equações de segundo grau têm a forma

$a_0+a_1x+a_2x^2=0$, para $a_2 \neq 0$■ (4.8)

4.4.1 Solução da equação do 2º Grau incompleta

Se a_0 e/ou a_1 forem iguais a zero, a solução da Eq. (8) pode ser obtida facilmente usando a propriedade fundamental das equações. Vejamos os casos 1, 2 e 3:

Caso 1: Se $a_0 = a_1 = 0$. Nesse caso a Eq. (8) tem a forma:

$$a_2x^2=0$$

e a única solução é $x = 0$■

Caso 2: $a_0 \neq 0$ e $a_1 = 0$. Nesse caso a Eq. (8) tem a forma:

$$a_0+a_2x^2=0. \qquad (4.9)$$

Adicionando (-a_0) em ambos os lados, temos:

$$a_2x^2 = -a_0 \tag{4.10}$$

Dividindo a Eq. (10) por a_2 e em seguida aplicando raiz quadrada em ambos os lados, temos:

$$x = \pm\sqrt{-\tfrac{a_0}{a_2}}. \tag{4.11}$$

Como a raiz quadrada de números negativos não é número real (é número complexo), podemos afirmar que x será real, somente se

$$-\tfrac{a_0}{a_2} \geq 0 \blacksquare \tag{4.12}$$

Caso 3: $a_1 \neq 0$ e $a_0 = 0$. Nesse caso a Eq. (8) tem a forma:

$$a_1x + a_2x^2 = 0. \tag{4.13}$$

Colocando o fator comum x em evidência, temos:

$$x \cdot (a_1 + a_2x) = 0 \tag{4.14}$$

Esse produto de dois termos será zero somente **se um ou os dois termos** forem nulos. Assim, teremos duas soluções possíveis: x_1 e x_2.

1. $x_1 = 0$ ou
2. $a_1 + a_2x_2 = 0$. Resolvendo para x, temos:

$$x = -\frac{a_1}{a_2}$$

A solução da equação de 2º grau, nesse caso, é

$$x_1 = 0$$

e $x_2 = -\frac{a_1}{a_2}$. $\blacksquare$

4.4.2 Solução da Eq. do 2º grau completa

Quando nenhum coeficiente da equação de segundo grau for nulo, a solução pode ser obtida por fatoração do trinômio, completando o quadrado perfeito. Lembremos que

$$\overbrace{(\underset{\substack{\Uparrow \\ \text{primeiro} \\ \text{termo}}}{a} + \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{segundo} \\ \text{termo}}}{b})^2}^{\text{binômio}} = \overbrace{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}^{\text{trinômio}}$$

(quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo)

Vejamos dois exemplos:

Exemplo 4.4.1. Determine as raízes da equação $x^2 + 6x + 9 = 0$.

Solução: Nesse caso, temos um TQP, pois $a = x$ e $b=3$. Portanto,

$2ab = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x$ que é igual ao termo intermediário do trinômio. Assim,

$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2=0$. Aplicando raiz quadrada em ambos os lados, temos:

$x + 3 = 0$. Adicionando (-3) em ambos os lados, temos:

$x = -3$ é a raiz da equação dada ■

Exemplo 4.4.2. Determine as raízes da equação $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Solução: Nesse caso, NÃO temos um TQP, pois se $a = x$ e $b = \sqrt{6}$ não temos uma identidade, comparando com o termo intermediário do trinômio:

$2ab = 2 \cdot x \cdot \sqrt{6} \neq 5x$.

Para obter um trinômio, vamos usar $a = x$ e determinar b, tal que

$5x = 2ab = 2 \cdot x \cdot b$ ou

$5 = 2 \cdot b$

$b = 5/2$.

Adicionando $b^2 = (5/2)^2$ em ambos os lados da equação dada, obtemos:

$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$. Adicionando (-6) em ambos os lados e reescrevendo, temos

$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Fatorando o TQP obtido, temos:

$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Aplicando raiz quadrada em ambos os lados, temos:

$x + \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$. Adicionando (-5/2) em ambos os lados e operando, temos:

$x = \pm\frac{1}{2} - \frac{5}{2}$. Finalmente, as soluções da equação dada são:

$x_1 = -2$ e $x_2 = -3$ ■

O processo desenvolvido no Ex. 5.2 pode ser generalizado da seguinte maneira:

Inicialmente, para evitar o uso de sub-índices, vamos usar $A=a_2$; $B=a_1$ e $C=a_0$ e reescrever a Eq. (7) :

$$Ax^2 + Bx + C = 0. \tag{4.15}$$

Para que o coeficiente de x^2 seja *1*, vamos dividir a Eq. (8) por A.

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{A} = \frac{0}{A} \quad \text{ou} \quad x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0 \tag{4.16}$$

Para obter o TQP, vamos usar $a = x$ e determinar b, tal que:

$\frac{B}{A}x = 2ab = 2xb$. Então $b = \frac{B}{2A}$.

Adicionando ($b^2 = \left(\frac{B}{2A}\right)^2$) em ambos os lados da Eq. (16), temos

$x^2 + \frac{B}{A}x + \left(\frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{C}{A} = \left(\frac{B}{2A}\right)^2$. Fatorando o TQP obtido e adicionando (-C/A) em ambos os lados, temos:

$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 = \left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{C}{A}$. Operando o lado direito e aplicando raiz quadrada em ambos os lados, temos:

$x + \frac{B}{2A} = \sqrt{\frac{B^2-4AC}{4A^2}}$. Adicionando $-\frac{B}{2A}$ em ambos os lados, temos:

$x = \pm\sqrt{\frac{B^2-4AC}{4A^2}} - \frac{B}{2A}$ ou

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \tag{4.17}$$

com os coeficientes da Eq. (8)

A Eq. (17) é conhecida como a Fórmula de Baskhara e a expressão no radicando da Eq. (17)

$\Delta = B^2 - 4 \cdot A \cdot C$

chama-se *discriminante* e é simbolizada pela letra grega delta maiúscula (Δ) ■

As equações do 2º grau tem sempre duas soluções, x_1 e x_2. Da fórmula de Baskhara, podemos tirar a seguinte conclusão, sobre o número de soluções das equações do 2º grau:

1. Se $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ as soluções são reais e idênticas: $x_1 = x_2$
2. Se $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ as soluções são reais e distintas: $x_1 \neq x_2$
3. Se $\Delta = B^2 - 4AC < 0$ as soluções não são reais.

4.4.3 Método do produto e soma

A equação

$$x^2 + (a+b) \cdot x + a \cdot b = 0 \tag{4.18}$$

é gerada pelo produto

$$(x+a)\cdot(x+b)=0. \qquad (4.19)$$

Observemos na Eq. (19) que se os termos entre parênteses forem nulos, a equação será uma identidade. Ou seja,

1. Se $x + a = 0$ temos uma solução da Eq. (18) : $x_1 = -a$.
2. Se $x + b = 0$ temos outra solução da Eq. (18) : $x_2 = -b$.

Assim, as soluções da Eq. (18) poder ser determinadas desde que encontremos dois números a e b, tal que

$a + b = B$ **(soma)**

$a \cdot b = C$ **(produto)**

Exemplo 4.4.3. Encontre as soluções de $x^2 + x - 6 = 0$.

Solução: Temos que encontrar números a e b, tal que

$$a + b = 1 \qquad (4.20)$$

$$a \cdot b = -6.$$

A solução é obtida por tentativas, por isso o método é eficiente quando as soluções são inteiras. Nesse caso, $a = -2$ e $b = 3$ satisfazem as Eq. (20), portanto as soluções são $x_1 = 2$ e $x_2 = -3$.

Observemos que as soluções têm o *sinal oposto* dos números a e b ■

EXERCÍCIOS 4.4

4.4.1 Para que $Ax^2 + Bx + C = 0$ seja uma equação de 2º grau, o coeficiente A pode ser nulo ? e os coeficientes B e C ?

4.4.2 Verifique se o valor de x dado é solução da respectiva equação:

a) $x^2\ 9 = 0$ para $x = -3$ c) $2x^2 + x - 3 = 0$ para $x = 1$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$ para $x = -3$ d) $5x^2 + 3x - 5/2 = 0$ para $x = 1/2$

4.4.3 Resolva as equações usando apenas as propriedades das equações (sem usar a fórmula de Baskhara):

a) $x^2 - 16 = 0$ b) $x^2 + 2x = 0$ c) $-2x^2 + 18 = 0$

d) $-x^2 + 8x = 0$ e) $-3x^2 + 6x = 0$ f) $2x^2 = 0$

4.4.4 Determine B para que as expressões sejam trinômios quadrados perfeitos:

a) $x^2 + Bx + 16 = 0$ b) $x^2 - Bx + 9 = 0$ c) $4t^2 - Bt + 9 = 0$

d) $9x^2 + Bx + 25 = 0$ e) $16s^2 - Bs + 4 = 0$ f) $36x^2 + Bx + 9 = 0$

4.4.5 Resolva as equações usando fatoração do trinômio:

a) $x^2 + 4x - 5 = 0$ b) $x^2 + x - 12 = 0$ c) $x^2 - 14x + 40 = 0$

d) $x^2 - 12x + 36 = 0$ e) $x^2 - 3x - 8 = 0$ f) $3x^2 - 2x - 2 = 0$

4.4.6 Resolva as equações usando o método de produto e soma:

a) $x^2 + 4x + 4 = 0$ b) $x^2 + x - 12 = 0$ c) $x^2 - 3x - 10 = 0$

d) $x^2 - 7x + 10 = 0$ e) $x^2 + 10x + 21 = 0$ f) $x^2 - x - 2 = 0$

4.4.7 Verifique se o método produto e soma é eficiente para a solução de:

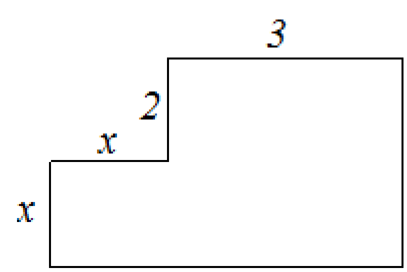
a) $2x^2 - 4x - 30 = 0$ b) $3x^2 + 8x + 12 = 0$

4.4.8 Resolva as equações usando a fórmula de Baskhara:

a) $x^2 - 2x - 8 = 0$ b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ c) $-x^2 + 7x - 6 = 0$

d) $2x^2 - x - 3 = 0$ e) $x^2 + 5/2x + 1 = 0$ f) $x^2 - 8 = 0$

4.4.9 Determine o valor de x para que a área da figura seja $7{,}5\ cm^2$. (medidas do desenho em centímetros)



4.4.10 Invente uma equação de 2º grau tal que o discriminante seja nulo.

4.4.11 Invente uma equação de 2º grau tal que:

a) As soluções sejam reais e idênticas
b) As soluções não sejam reais (complexas)
c) As soluções sejam reais e distintas

4.4.12 Resolva as equações usando qualquer método:

a) $x(x-1)+3(x^2-1) = 0$ c) $(x+1)^2 - (2x+1)^2 = 0$

b) $2x(x-4)+2(x-1) = 0$ d) $(x+2)^2 - 2(x+1/2)^2 = 0$

4.5 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESPOSTAS 4.3

4.3.1 a) x = *4/3*

b) Até poderia ser usada a estratégia, porém somente após realizar a adição do lado direito.

4.3.2 $x = -\frac{1}{3}$

4.3.3 a) -2 b) 2 c) 1 d) -2 e) 2/3

f) -5 g) 3 h) 6 i) -10 j) 7/2

4.3.4 x = *2*.

4.3.5 a) $x = 1$ b) $x = \frac{5}{22}$ c) $x = \frac{1}{7}$ d) $x = 2/5$ e) $x = -\frac{7}{2}$ f) x = *-3*.

4.3.6 a) 2 b) $-\frac{4}{3}$ c) $\frac{8}{5}$

4.3.7 $x = 1cm$

4.3.8 a) $x = 1cm$ b) $x = \frac{3}{2}cm$

4.3.9 $x = \frac{1}{2}$;

4.3.10 Comprimento=*100m* e largura=*70m*;

4.3.11 *2cm, 4cm* e *6 cm*.

RESPOSTAS 4.4

4.4.1 Não pois sem o coeficiente A a equação se torna de 1º grau. Os coeficientes B e C podem ser nulos.

4.4.2 a) sim, b) não, c) o valor de x é solução da equação, d) o valor de x não é solução da equação

4.4.3 a) $x = \pm 4$ d) $x' = 0; x'' = 8$

b) $x' = 0; x'' = -2$ e) $x' = 0; x'' = 2$

c) $x = \pm 3$ f) $x = 0$

4.4.4 a) 8 d) 30

b) 6 e) 16

c) 12 f) 36

4.4.5 a) $x' = 1; x" = -5$ d) $x' = 6; x" = 6$

b) $x' = 3; x" = -4$ e) $x = \pm\sqrt{\frac{41}{4}} + \frac{3}{2}$

c) $x' = 10; x" = 4$ f) $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$

4.4.6 a) $x' = x" = -2$ d) $x' = 2; x" = 5$

b) $x' = 3; x" = -4$ e) $x' = -3; x" = -7$

c) $x' = -2; x" = 5$ f) $x' = -1; x" = 2$

4.4.7 a) O método é eficiente porque as raízes são inteiras.

b) O método do produto e soma não é eficiente pois as raízes não são inteiras.

4.4.8 a) $x' = 4; x" = -2$ d) $x' = \frac{3}{2}; x" = -1$

b) $x' = -\frac{1}{2}; x" = -\frac{1}{2}$ e) $x' = -\frac{1}{2}; x'' = -2$

c) $x' = 1;\ x" = 6$ f) $x' = 2\sqrt{2}; x" = -2\sqrt{2}$

4.4.9 $x \cong 0,4365$

4.4.12 a) $x' = 1; x" = -0,75$

b) $x' \cong 3,302\ldots;\ x" \cong -0,302\ldots$

c) $x' = 0; x" = -\frac{2}{3}$

d) $x' = \frac{2+3\sqrt{2}}{2}; x" = \frac{2-3\sqrt{2}}{2}$

Capítulo 5

Função do primeiro grau

5.1 Introdução

A ideia de descrever o comportamento de uma grandeza relacionada com outra não é muito antiga. Os povos antigos, Árabes e Gregos não chegaram a investigar a velocidade. Foi com Galileo (1564-1642) ao estudar o movimento que o conceito de função começou a se configurar. Porém, não sem dificuldades. A geometria de Descartes (1637) já usava a representação gráfica de uma expressão algébrica, mas essa ideia só foi aceita na comunidade de matemáticos com os trabalhos de Euler (1707-1783) e da família dos Bernoillis, ao desenvolver o cálculo aplicado a problemas físicos. A definição atribuída a Euler diz que função *é uma expressão analítica que representa a relação entre duas variáveis*.

Um conceito de função, muito semelhante ao usado atualmente, foi introduzido por Dirichlet (1805-1859), motivado pela necessidade de uma definição mais restritiva que a de Euler, ao estudar o problema de convergência de séries, na época, aplicado à investigação de problemas de condução do calor, propostos por Fourier. A definição de Dirichlet é a seguinte: *y é uma função de x, se para qualquer valor de x, existe uma regra que o associa a um único valor de y*. Em 1939, Bourbaki definiu função como *regra de correspondência entre dois conjuntos e que isto era um subconjunto do produto cartesiano entre aqueles conjuntos*.

A definição de Euler é muito usada até hoje nas ciências, devido a sua simplicidade e eficiência para descrever a relação entre duas variáveis. De fato, muitas aplicações de funções na Física, Química e Economia requerem apenas uma expressão algébrica e uma representação gráfica.

Na base do desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral está o conceito de função e daí sua importância, já que praticamente toda a ciência e a tecnologia moderna utilizam o Cálculo. Mas porque as funções são tão importantes para as ciências? Porque elas descrevem qualitativamente o comportamento de partes da realidade com precisão suficiente para que decisões possam ser tomadas. Saber o tempo de resfriamento de uma peça fundida é importante para decidir quando manuseá-la; saber o tempo em que a receita e a despesa de um empreendimento serão iguais, significa saber quando o lucro se inicia; o planejamento econômico de um reflorestamento depende da função de como as árvores crescem; a variação da concentração de um medicamento no organismo humano é fundamental para determinar a dose e o intervalo de ingestão; a deformação em vigas depende das cargas aplicadas e do material;... Todos esses e tantos outros fenômenos são expressos na forma de funções, cujo conhecimento básico vamos desenvolver neste capítulo.

5.2 Definição de funções

Analisemos o seguinte exemplo:

Exemplo 5.2.1. O preço de *1 kg* de carne é *R\$ 15,00*. Determine uma fórmula para calcular qualquer o custo de quantidade de carne.

Solução: Vamos usar a ideia de variável. Seja x a quantidade, em *kg* e y o custo da carne. Então

$$y = 15 \cdot x \qquad (2.1)$$

é a expressão que dá o custo de carne para qualquer valor de x.

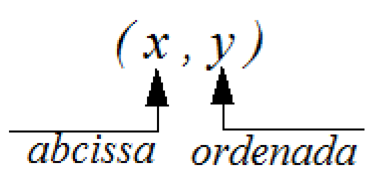
Se as massas são $x = \{ 0, 0.5, 1, 2, 3 \}$, usando a Eq. (2.1) calculamos os correspondentes valores dos custos $y = \{ 0, 7.5, 15, 30, 45 \}$. Evidentemente, podemos calcular y para qualquer x real maior ou igual a zero.

Exemplo 5.2.2. Se x é o lado de um quadrado, encontre uma expressão para a área.

Solução: Sabe-se que a área do quadrado é $A = x^2$. Para quadrados de lado $x = \{ 0, 1, 2,3,4 \}$, usando a expressão da área temos os correspondentes valores de $A=\{ 0,1,4,9,16 \}$. Evidentemente, podemos calcular A para qualquer x real maior ou igual a zero.

Definição 5.2.1. Sejam dois conjuntos $X=\{ x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ x_n \}$ e $Y=\{ y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots, y_n \}$. Seja f uma regra matemática que associa os elementos de X e Y, formando um conjunto de pares ordenados (x_i, y_i) com $i = 1,2,3,4, \ldots, n$. $Y = f(x_i)$ é uma função de X, se para qualquer x_i, f associa um, e somente um valor de y_i.

Nos pares ordenados (x,y), os elementos do conjunto X são chamados de *abcissas* e os do conjunto Y de *ordenadas*.

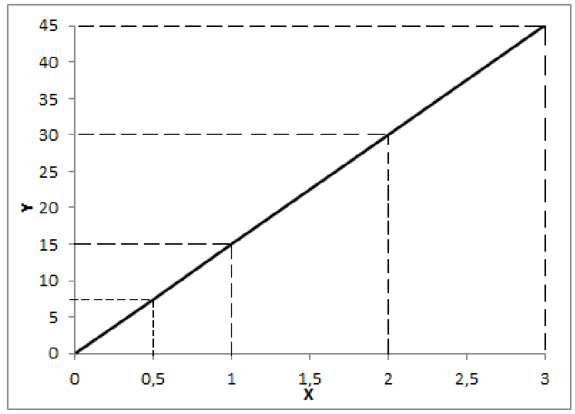


As expressões dos Exemplos 2.1 e 2.2 são funções de acordo com a Def. 2.1, pois para cada valor de x, existe um e somente um y.

Exemplo 5.2.3. Represente a função do Exemplo 2.1 em um gráfico cartesiano.

Solução: Dispondo alguns valores de x e y em uma tabela, temos:

X	Y
0	0
0,5	7,5
1	15
2	30
3	45



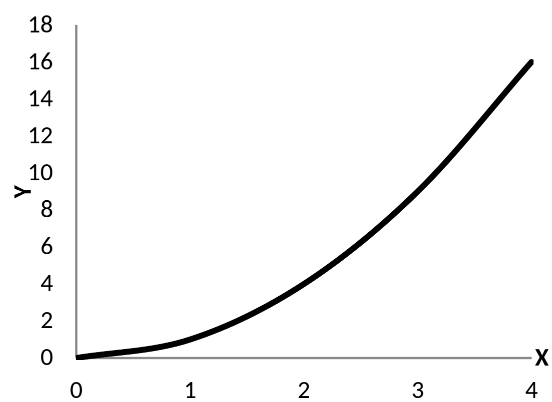
Os valores de x e y formam pares ordenados (x,y) que localizados no Plano Cartesiano, neste caso, formam uma **reta**. Como podemos usar qualquer $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, a reta será contínua.

Nesse exemplo, na medida que a massa x cresce, o custo y também cresce, proporcionalmente. Ou seja, para cada incremento de *1 kg*, o custo cresce *15 reais* ■

Exemplo 5.2.4. Represente a função do Exemplo 2.2 em um gráfico cartesiano.

Solução: Dispondo alguns valores de x e A em uma tabela, temos:

X	A
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16



Os valores de x e A formam pares ordenados (x,y) que localizados no Plano Cartesiano, neste caso, formam uma **curva**. Como podemos usar qualquer $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, a curva será contínua.

Nesse exemplo, na medida que o lado x cresce, a área A também cresce, porém diferentemente do Exemplo 1, que tinha um crescimento constante. No primeiro incremento, a área cresceu *1* cm^2, no segundo *3* cm^2, no terceiro *5* cm^2. ■

Exemplo 5.2.5. Verifique se $-3x + y^2 = 1$ é uma função, de acordo com a Def. 2.1. Considere $x \in \mathbb{R}$.

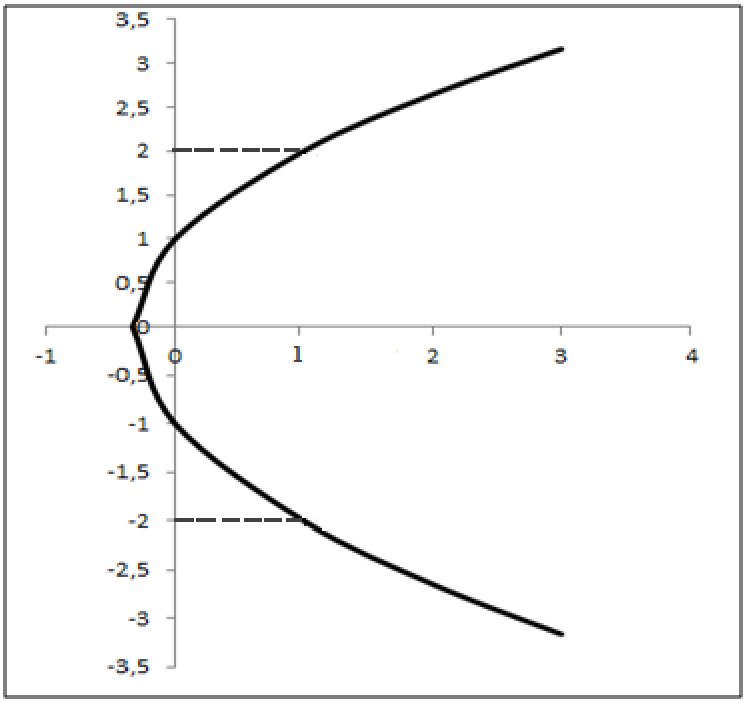
Solução: A equação dada está na forma implícita (x e y estão no mesmo lado da igualdade). Para explicitar y, adicionamos $(+3x)$ em ambos os lados da equação, obtendo:

$y^2 = 1 + 3x.$

Aplicando raiz quadrada em ambos os lados da equação, temos:

$y = \pm\sqrt{1+3x}$.

Esta equação só terá valores reais para *y*, se o radicando for um número nulo ou positivo. Então, $1+3x \geq 0$ ou $x \geq -1/3$.



Observemos que para qualquer valor de $x > -1/3$, teremos dois valores de *y*. Por exemplo:

Se $x = 1$, teremos $y = \pm 2$;

Se $x = 2$, teremos $y = \pm\sqrt{7}$;

Se $x = 5$, teremos $y = \pm 4$ e assim por diante.

Portanto, a equação dada não é uma função. ■

Notação:

Usa-se a notação $y = f(x)$ para referir-se à função *f* de *x*, onde *x* é a variável independente e $y = f(x)$ é a variável dependente de *x*.

Por exemplo: $f(x) = x^2$ ou $f(x) = 3x - 2$.

Definição 5.2.2. O *domínio* de uma função $y = f(x)$ é o conjunto dos valores de *x* nos quais a função é definida e denota-se: $D\,f(x)$.

Definição 5.2.3. A *imagem* de uma função $y = f(x)$ é o conjunto dos valores de *y* para os quais existem valores de *x* correspondentes e denota-se : $I_m\,f(x)$.

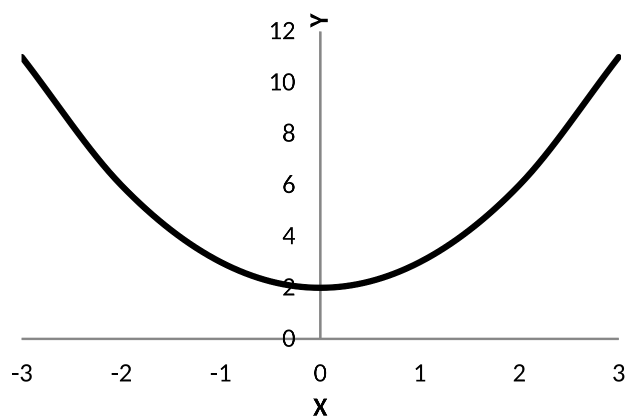
Exemplo 5.2.6. Determine o domínio e a imagem da função $f(x) = x^2 + 2$.

Solução: Observemos que qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$ gera um valor de $f(x)$. Então,

$$Df(x)=\{\ x \in \mathbb{R}\ \}.$$

Analisando a expressão da função, observamos que ela tem a soma de dois termos positivos (lembremos que para x^2, teremos sempre $x^2 > 0$). Portanto, o menor valor possível de $x^2 + 2$ será 2, quando $x = 0$. Então,

$I_m\, f(x) = \{\ y\ \varepsilon\ \boldsymbol{R},\ y \geq 2\}$.



No gráfico de $f(x)$, traçando *retas verticais*, para qualquer x teremos sempre um y correspondente, o que indica que $f(x)$ é uma função.

A imagem de $f(x)$ pode ser obtida traçando retas horizontais. Os valores de y, pelos quais estas retas passarão, pertencem a imagem de $f(x)$. Assim, a imagem desta função será o conjunto de números reais y tal que $y \geq 2$ ■

EXERCÍCIOS 5.2

5.2.1 Localize os pontos no plano cartesiano:

a) $A = (2,3)$ c) $C = (-3,3)$ e) $E = (2,0)$

b) $B = (-2,-3)$ d) $D = (0,3)$ f) $F = (0,-3)$

5.2.2 Qual é o valor de x (abcissa) dos pontos sobre o eixo Y?

5.2.3 Qual é o valor de y (ordenada) dos pontos sobre o eixo X ?

5.2.4 Dada a função $f(x) = 3x - 1$, calcule:

a) $f(0)$ c) $f(c+1)$ e) $f(1/3)$

b) $f(-2)$ d) $f(1)$ f) $f(3-c)$

5.2.5 Dada a função $f(x) = -2x + 1/2$, calcule x sendo:

a) $f(x)=1/2$
b) $f(x)=1$
c) $f(x)=-3/4$
d) $f(x)=4$

5.2.6 Faça o gráfico das funções com variáveis reais:

a) $y = 3x$
b) $f(x) = -3x + 1$
c) $y = x^2$
d) $y = x^2 + 1$
e) $g(x) = \frac{1}{x}$
f) $y = \frac{1}{x-1}$

5.2.7 Faça o gráfico dos dados das tabelas:

a)

X	Y
-3	-6
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4
3	6

b)

X	Y
-3	-5
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5
3	7

c)

X	Y
-3	12
-2	9
-1	3
0	1
1	3
2	9
3	12

d)

X	Y
-3	5
-2	2
-1	1
0	2
1	5
2	9
3	14

5.2.8 Todas as funções do Ex.6 são funções, de acordo com a Def. 2.1?

5.2.9 A expressão $y = \pm\sqrt{x}$ é uma função, de acordo com a Def. 2.1?

5.2.10 Faça o gráfico das funções usando uma tabela eletrônica ou um editor de gráficos computacional.

a) $y = -2x + 5$
b) $y = x^2 - 2x + 1$
c) $y = x^4 - x^2 + 4$
d) $y = x^3 + 1$
e) $y = \frac{x+1}{x-1}$
f) $y^2 + x^2 = 4$

5.2.11 Todas as expressões do Ex. 10 são funções, de acordo com a Def. 2.1?

5.2.12 Determine o domínio e a imagem das funções:

a) $y = x$
b) $f(x) = \frac{1}{x}$
c) $y = 4 - x^2$
d) $f(x) = \sqrt{x}$
e) $g(x) = -\sqrt{x}$
f) $q(x) = \sqrt{x-4}$

5.2.13 Faça os gráficos das funções do Ex. 12 usando uma ferramenta computacional.

5.3 Função do 1º grau

Os exercícios da Seção 2 mostram que existem funções cujo gráfico é uma reta e outras apresentam curvas de diferentes formatos. Nessa seção, serão estudadas as funções cujos gráficos são retas.

Uma das características das retas é a *taxa de variação (crescimento ou decrescimento) constante*. Isto significa que, para o mesmo incremento (Δx) em qualquer x, o incremento (Δy) em y, será o mesmo.

Exemplo 5.3.1. Dada a reta $f(x) = x + 1$ use o incremento $\Delta x = 1$ em

(i) $x_0 = 0$; (ii) $x_1 = 2$; (iii) $x_2 = 5$ e calcule os respectivos incrementos em y.

Solução: i) Usando o incremento em $x_0 = 0$:

$x_0 + \Delta x = 0+1 = 1$.

Calculando $f(x_0)=f(0)=0+1=1$. Calculando a $f(x_0 + \Delta x)=f(1)=1+1=2$.

O incremento em y será: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x)- f(x_0) = 2 - 1 = 1$.

ii) Usando o incremento em $x_1 = 2$:

$x_1 + \Delta x = 2 + 1 = 3$.

Calculando $f(x_1)=f(2)=2+1=3$. Calculando a $f(x_1 + \Delta x)=f(3)=3+1=4$.

O incremento em y será: $\Delta y = f(x_1 + \Delta x)- f(x_1) = 4 - 3 = 1$.

iii) Usando o incremento em $x_2 = 5$

$x_2 + \Delta x = 5+1 = 6$.

Calculando $f(x_2)=f(5)=5+1=6$. Calculando a $f(x_2 + \Delta x)=f(6)=6+1=7$.

O incremento em y será: $\Delta y = f(x_2 + \Delta x)- f(x_2) = 7 - 6 = 1$.

Como podemos observar, o incremento Δy foi o mesmo, nos três casos analisados: $\Delta y=1$

Faça um gráfico mostrando os incrementos Δx e nos valores de x dados.■

Definição 5.3.1. Uma função polinomial do primeiro grau tem a forma

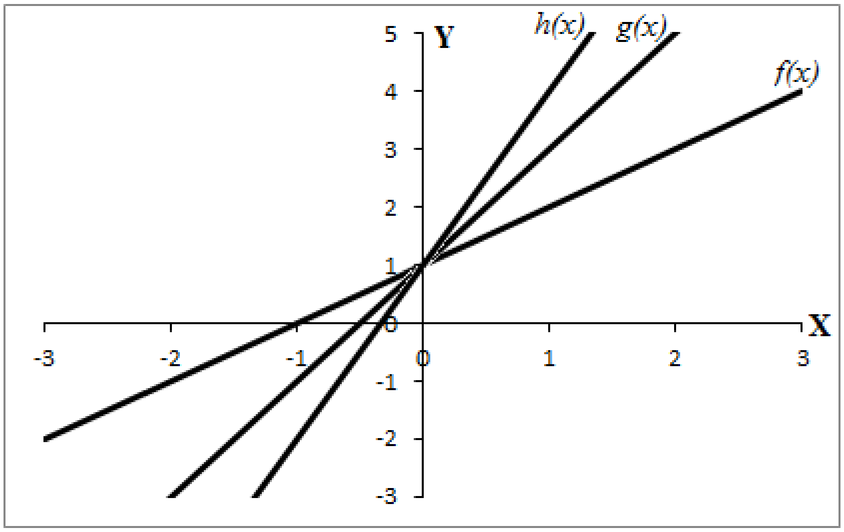
$$y = f(x) = ax + b \qquad (3.1)$$

onde a e b são números reais, x e y são variáveis reais.

O coeficiente a é chamado **coeficiente angular (inclinação)** e o b **coeficiente linear**.

Exemplo 5.3.2. Faça os gráficos das funções: (i) $f(x) = x + 1$; (ii) $g(x) = 2x + 1$; (iii) $h(x) = 3x + 1$.

Solução: Elaborando tabelas para as três funções e localizando os pares ordenados no Plano Cartesiano, obtemos três retas.

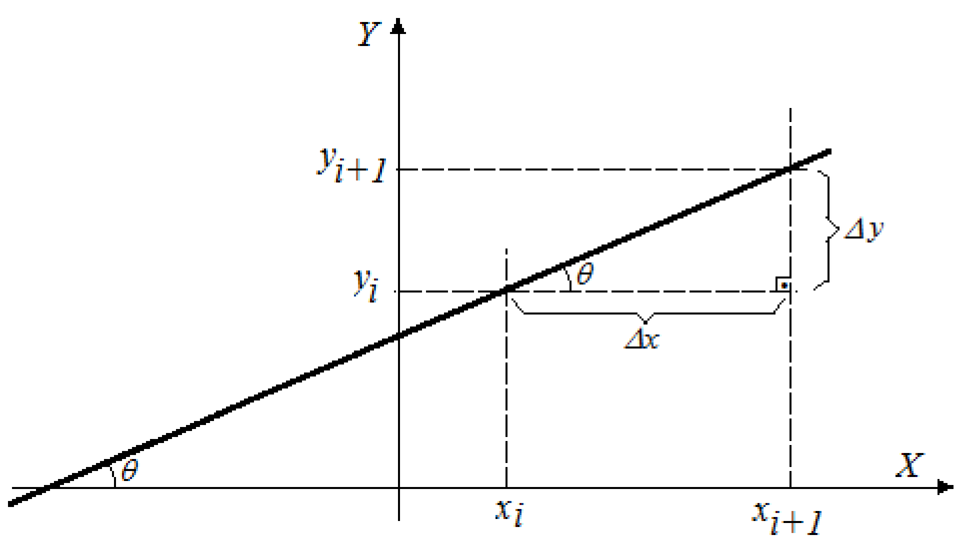


Observemos que as inclinações são diferentes, sendo que a diferença entre as três funções é o *coeficiente angular*. Observemos que quanto maior o *a* mais inclinada está a reta ■

O coeficiente angular é a *inclinação (ou taxa de crescimento)* da reta, dado pela expressão:

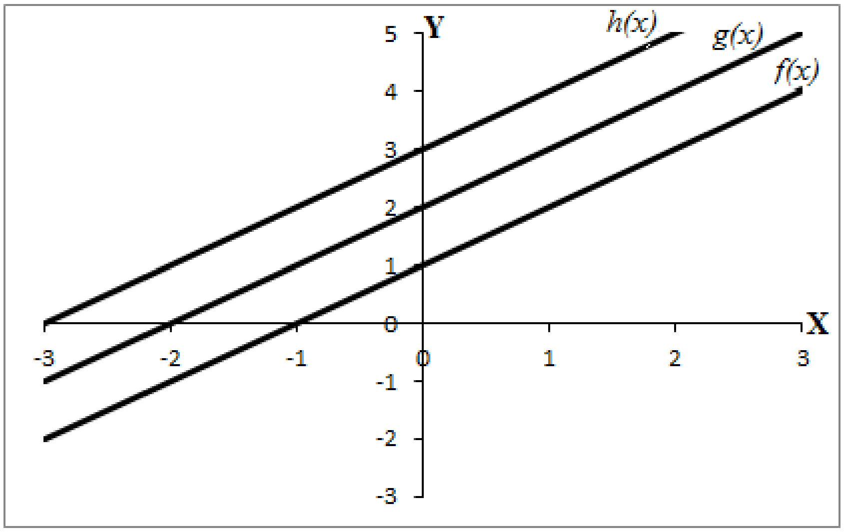
$$a = tg(\theta) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \tag{3.2}$$

Onde $i = 0,1,2,3,...$ refere-se aos pontos de $f(x)$ e é o ângulo que a reta faz com o eixo X.



Exemplo 5.3.3. Faça os gráficos das funções: (i) $f(x) = x + 1$; (ii) $g(x) = x + 2$; (iii) $h(x) = x + 3$.

Solução: Elaborando tabelas para as três funções e localizando os pares ordenados no Plano Cartesiano, obtemos três retas.



Observemos que todas têm a mesma inclinação, pois os coeficientes angulares são iguais: *a* = *1*.

Observemos também que quando calculamos as funções para *x* = *0* (pontos sobre o eixo *Y*) o valor obtido é o coeficiente linear: *f(0) = 1; g(0) = 2* e *h(0) = 3*. Podemos concluir que o *coeficiente linear* é o valor do *y*, nos pontos onde a reta corta o eixo *Y* ■

O *coeficiente linear* é o valor do *y* (ordenada), no ponto (*0,b*) onde a reta corta o eixo *Y*

Exemplo 5.3.4. Uma reta passa pelos pontos: P_1 = *(1,2)* e P_2 = *(3,5)*:

i) Calcule o coeficiente angular

ii) Calcule o coeficiente linear.

Solução: (i) Usando a Eq. (3.2) temos:

$$a = \frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}$$

(ii) Substituindo o valor de *a* na Eq. (3.2), temos:

$y = \frac{3}{2}x + b$ (3.3)

Como a reta passa pelos pontos P_1 e P_2, as coordenadas desses pontos devem satisfazer a Eq. (3.3). Usando as coordenadas de P_1 = *(1,2)* na Eq. (3.3), temos:

$2 = \frac{3}{2} \cdot 1 + b$. Resolvendo para *b,* temos:

$b = \frac{1}{2}$

Observemos que se fosse utilizado o ponto P_2 = *(3,5)* , obteríamos o mesmo valor de *b* ■

5.3.1 Crescimento e decrescimento das funções do 1º grau

O quadro abaixo define o que são funções crescentes e decrescentes:

Seja $y = f(x)$ uma função definida no intervalo (x_0,x_n).
Se $f(x_{i+1}) > f(x_i)$ para qualquer $x_i \in (x_0,x_n)$ então f é *crescente* em (x_0,x_n).
Se $f(x_{i+1}) < f(x_i)$ para qualquer $x_i \in (x_0,x_n)$ então f é de*crescente* em (a,b).

O quadro abaixo apresenta a relação entre coeficiente angular e crescimento da função do 1º grau:

Se o *coeficiente angular* é *positivo* a reta é crescente.
Se o *coeficiente angular* é *negativo* a reta é decrescente.

Exemplo 5.3.5. Verifique se as retas são crescentes ou decrescentes.

i) $f(x) = 3x - 5$

ii) $f(x) = - x + 2$

iii) $4 = 3x -2y$

Solução:

(i) O coeficiente angular da reta é $+3$. Portanto a reta é crescente para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(ii) O coeficiente angular da reta é -1. Portanto a reta é decrescente para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(iii) A equação está na forma implícita. Adicionando ($+2y$) e (-4) em ambos os lados, obtemos: $2y = 3x - 4$. Dividindo a equação por 2, obtemos: $y = \frac{3}{2}x - 2$.

O coeficiente angular da reta é $+3/2$. Portanto a reta é crescente para qualquer $x \in \mathbb{R}$.■

5.3.2 Domínio e imagem da função de 1º grau

As funções de 1º grau têm a expressão de um polinômio, cujas operações são possíveis para qualquer x real. Assim, o domínio destas funções é:
$Df(x)= \{ x \in \mathbb{R} \}$.
Como as funções de 1º grau são estritamente crescentes ou decrescentes e não tem descontinuidades, sua imagem é
$Imf(x)= \{ y \in \mathbb{R} \}$.

5.3.3 Raiz da função de 1º grau

Definição 5.3.2. A raiz de uma função é o valor do *x*, do ponto onde a função intercepta o eixo *X*.

A raiz das funções de 1º grau é determinada fazendo *y=f(x)=0* na Eq. (3.1), de acordo com a Def. 3.2, pois os pontos sobre o eixo *X*, tem *y = 0*. Assim,

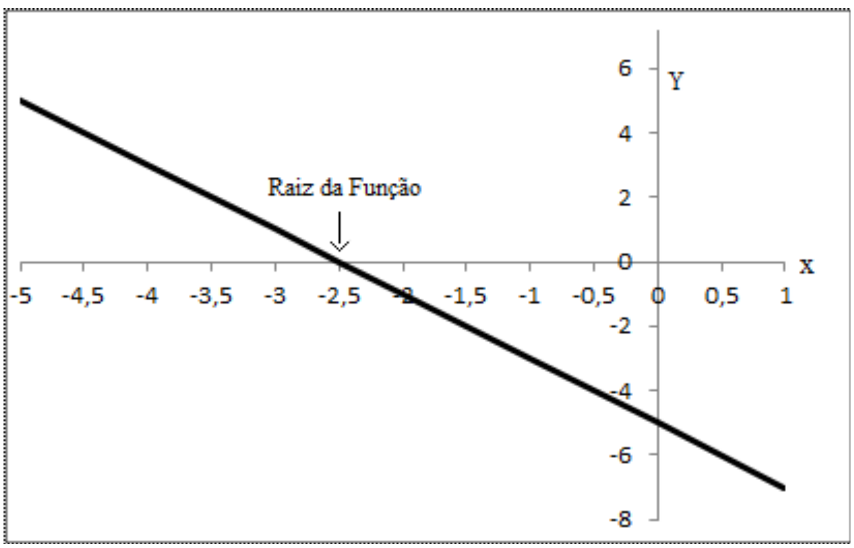
$0 = ax + b$. Resolvendo para *x*, temos:

$x = -\frac{b}{a}$	(raiz da função de 1º grau)

Exemplo 5.3.6. Determine a raiz da função $5 = -2x - y$ e mostre-a no gráfico da função.

Solução: Mesmo com a equação na forma implícita, colocamos a exigência da Def. 3.1 $y = 0$ na função dada e obtemos:

$5 = -2x - 0$. Resolvendo para *x*, temos $x = -5/2$, que é a raiz da função.



A Fig. 3.5 mostra a raiz da função no ponto (*-5/2,0*) de interceptação do eixo *X* ■

5.3.4 Sinal da função de 1º grau

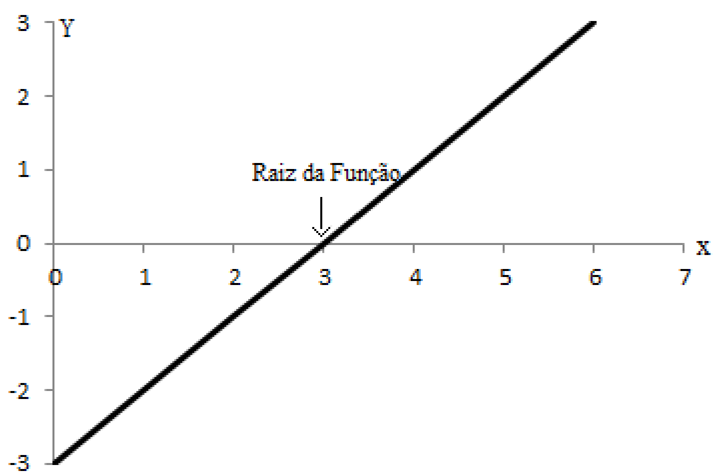
Lembremos que os valores de *y* são os valores da função. Portanto, o sinal da função em algum ponto é o sinal das ordenadas, nos pontos da função.

Exemplo 5.3.7. Dada a função $y = f(x) = x - 3$, determine o sinal da função para os seguintes valores de *x: -1, 0, 1,2,3,4,5*.

Solução: Substituindo os valores de *x* dados em *f(x)*, obtemos os respectivos valores de *y*, apresentados na tabela.

X	-1	0	1	2	3	4	5
Y	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2
Sinal de Y	-	-	-	-	Sem sinal	+	+

Observemos que o sinal dos valores da função (y) são negativos para $x < 3$ e positivos para $x > 3$. A mudança do sinal ocorreu em $x = 3$, que é a raiz da função.



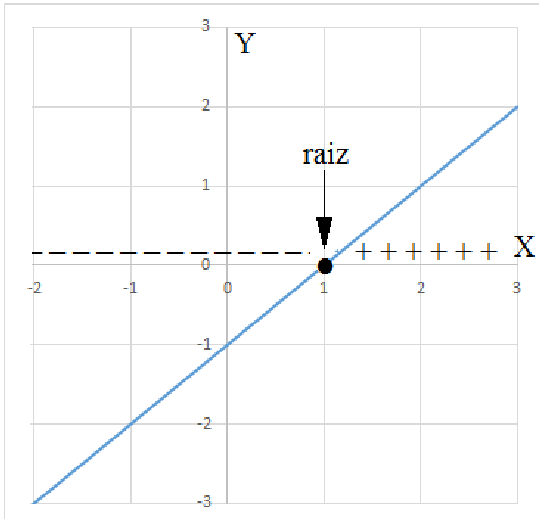
A visualização do sinal é evidente no gráfico, assim como a mudança do sinal a partir da raiz da função ■

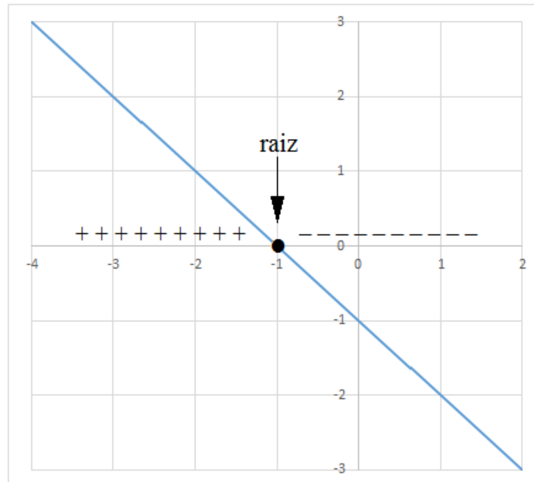
Exemplo 5.3.8. Determine o sinal das funções: (i) $f(x) = x - 1$ e (ii) $g(x) = -x - 1$.

Solução: No Exemplo 3.7 observamos que o sinal da função muda quando a função intercepta o eixo X (raiz da função). Então, vamos calcular as raízes das funções e ver a inclinação das mesmas.

(i) Raiz de $f(x)$: $x = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{1} = 1$.

Como $f(x)$ é inclinada para a direita (crescente, pois $a = 1 > 0$) , $f(x)$ é negativa se $x < 1$ e positiva se $x > 1$.





(ii) Raiz de $g(x)$: $x = -\frac{a}{b} = -\frac{-1}{-1} = -1$.

Como *f(x)* é inclinada para a esquerda (decrescente, pois *a* = *-1* < *0*) , *f(x)* é positiva se *x* < *-1* e negativa se *x* > *-1* ■

SINAL DA FUNÇÃO DO 1º GRAU
Seja $y = f(x) = ax + b$, cuja raiz é $x_r = -\frac{b}{a}$.
Se $a > 0$ então: $f(x)$ é **negativa** para $x < x_r$ e $f(x)$ é **positiva** para $x > x_r$.
Se $a < 0$ então: $f(x)$ é **positiva** para $x < x_r$ e $f(x)$ é **negativa** para $x > x_r$.

5.3.5 Tipos especiais de retas

Função constante

As *retas horizontais* são chamadas funções constantes, pois não crescem nem decrescem. Seu coeficiente angular, pela Eq. (3.2) será nulo, portanto sua equação será:

$$y = b, \text{ para } b \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

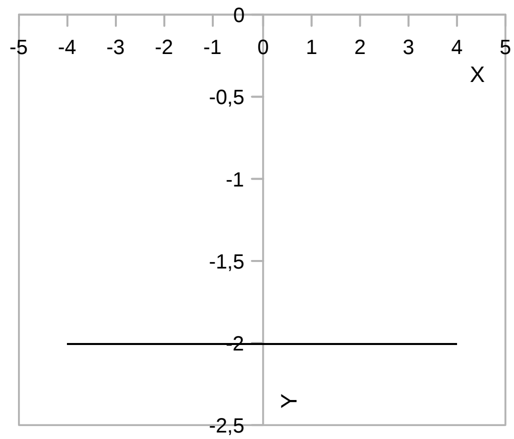
Observemos que para $b = 0$, temos $y = 0$, que é o próprio eixo X.

Se $f(x)=c$ o $Df(x)=\{\ x \in \mathbb{R}\ \}$ e a imagem é $I_m f(x) = \{\ y \in \mathbb{R} \ / \ y = b\ \}$.

Exemplo 5.3.9. Faça o gráfico das funções:

i) $y = 3$ (ii) $y = -2$

Solução:



(i)

(ii)

Todas as funções dadas são funções constantes (retas paralelas a *X*, ou retas horizontais). Mesmo variando os valores de *x*, os valores de *y* permanecem constantes. ■

Retas verticais

Estas retas, de acordo com a definição de função (Def. 2.1) NÃO SÃO FUNÇÕES, pois para o mesmo *x*, correspondem vários valores de *y*. Tão pouco, são funções do 1º grau. Observemos que, não existe coeficiente angular, porque a Eq. (3.2) teria denominador nulo. Assim, a expressão para as retas verticais não deriva da forma da Eq.(3.1).

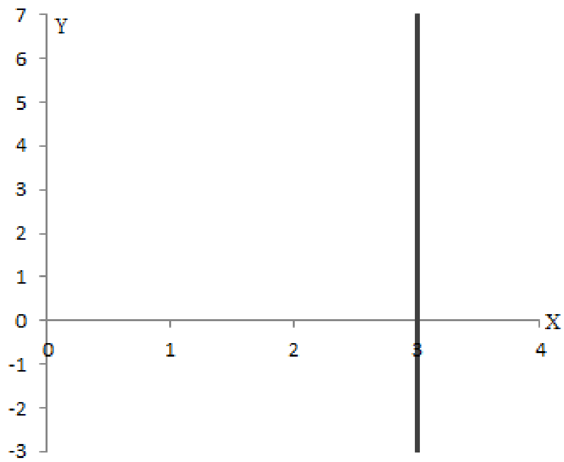
A expressão para as retas verticais é construída com base no fato da abcissa ser constante para qualquer valor da ordenada, *y*. Então:

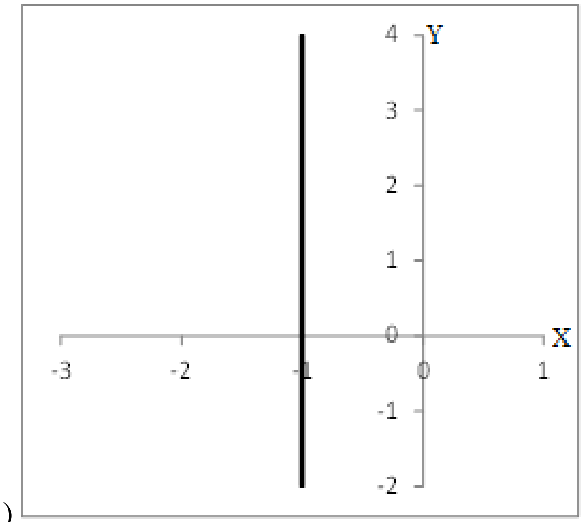
$x = c$, onde c é uma constante. (3.5)

Exemplo 5.3.10. Faça o gráfico das retas:

i) $x = 3$ (ii) $x = -1$

Solução:

i) 

ii) 

Função identidade

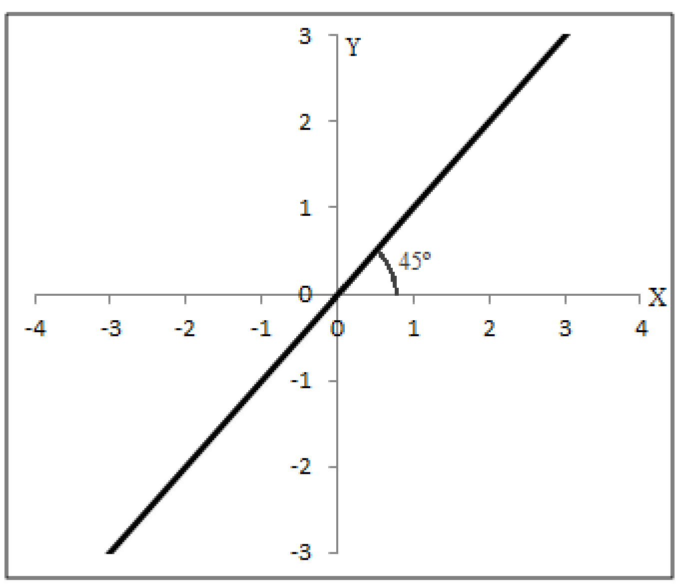
Esta função tem esse nome porque os valores de x e y são iguais. Sua expressão é:

$$y = x. \tag{3.6}$$

Se $f(x) = x$ o domínio $Df(x)=\{\ x \in \mathbb{R}\ \}$ e a imagem é $I_m f(x) = \{\ y \in \mathbb{R}\ \}$ ■

Exemplo 5.3.11. Faça o gráfico da função $y = x$.

Solução: A função identidade divide na metade o 1º e o 3º quadrantes do Plano Cartesiano. O ângulo que esta reta faz com o eixo X é 45^o ■



Função linear

As funções do 1º grau, com $a \neq 0$ e $b = 0$ são chamadas funções lineares e têm a forma:

$$y = ax. \tag{3.7}$$

Se $f(x) = ax$ o $Df(x)=\{ \ x \in \mathbb{R} \ \}$ e a imagem é $I_m f(x) = \{ \ y \in \mathbb{R} \ \}$.

Função afim

As funções do 1º grau, com $a \neq 0$ são chamadas **função afim** e têm a forma:

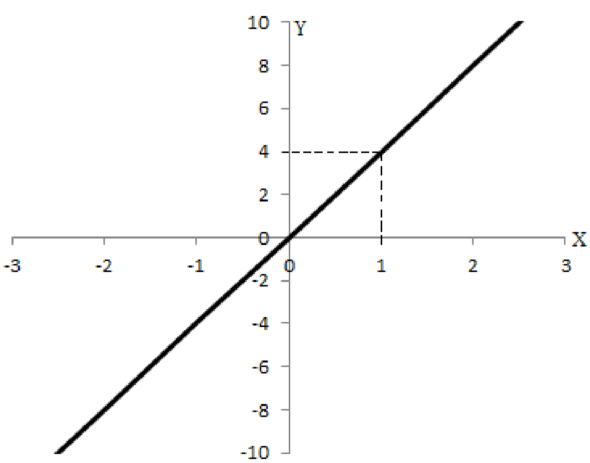
$$y = ax + b. \tag{3.8}$$

Se $f(x) = ax + b$ o $Df(x)=\{ \ x \in \mathbb{R} \ \}$ e a imagem é $I_m f(x) = \{ \ y \in \mathbb{R} \ \}$.

Observemos que as funções lineares são também funções afim.

Exemplo 5.3.12. Faça o gráfico da função $y = 4x$.

Solução: Como as funções lineares têm $b = 0$, então interceptam os eixos na origem $(0,0)$. O coeficiente angular igual a $+4$ indica que a função é crescente (inclinada para a direita), com inclinação $+4$, portanto passará pelo ponto $(1,4)$. Colocando estes dados no Plano Cartesiano, obtemos o gráfico indicado na Fig. 3.14.



■

5.3.6 Retas paralelas e perpendiculares

Sejam as retas $(r) : y = mx + b$ e $(s) : y = px + c$.
Se r é **paralela** a s então $m = p$.
Se r é **perpendicular** a s então $p = -\frac{1}{m}$.

EXERCÍCIOS 5.3

5.3.1 Verifique se a dependência entre as grandezas mencionadas é de 1º grau:

a) Considere que a distribuição de adubo em uma lavoura é homogênea. A quantidade de adubo distribuída é proporcional a área de lavoura?

b) A circunferência de um círculo é proporcional ao seu raio? E a área?

c) O lixo produzido por uma cidade é proporcional ao número de habitantes?

d) Uma caixa d'água é enchida por uma torneira, sempre com a mesma abertura. O volume de água da caixa é proporcional ao tempo?

e) No planejamento de uma festa, a quantidade de comida é proporcional à quantidade de pessoas?

5.3.2 A tabela abaixo apresenta a deformação y (cm) de uma mola que está sendo distendida por massas m, (g) penduradas. Verifique se m é proporcional a y.

y, (cm)	0	3	6	9	12
m (g)	0	50	100	150	200

5.3.3 Considerando que o custo de uma corrida de taxi (y) depende de um valor fixo (b), referente à hora do dia, do preço por quilômetro percorrido (p) e da quilometragem percorrida (x). Fazendo $b = 5{,}00$ reais e $p = 1{,}5$ reais, determine uma função para o custo $y(x)$ de uma corrida.

5.3.4 Determine uma função que relacione o custo dos azulejos para revestir uma parede com x m^2, sendo que o preço de 1 m^2 de azulejo é p.

5.3.5 O custo (C) da carne usada para um churrasco depende do preço da carne (p), da quantidade de carne comprada (x) e da gasolina gasta para ir ao supermercado (b). Faça uma função $C(x)$.

5.3.6 O custo (C) para produzir uma certa mercadoria é a soma dos custos fixos (CF) e dos variáveis (a) , aqueles que dependem da quantidade produzida (x). Faça uma função $C(x)$.

5.3.7 Determine os coeficientes angular e linear das retas que passam pelos pontos dados e construa a função do 1º grau:

a) $P_1 = (-1{,}0)$ e $P_2 = (3{,}2)$

b) $P_1 = (0{,}3)$ e $P_2 = (-3{,}0)$

c) $P_1 = (2{,}-2)$ e $P_2 = (-2{,}2)$

d) $P_1 = (3{,}3)$ e $P_2 = (5{,}3)$

5.3.8 Para produzir 5 peças de uma certa mercadoria foram gastos R$ 15,00. Para produzir 12 peças foram gastos R$ 35,00. Supondo que os custos são proporcionais ao número de peças:

a) Determine uma função de 1º grau que relacione custos e número de peças

b) Determine o custo para 30 peças.

5.3.9 Determine o coeficiente angular das funções e verifique se são crescentes ou decrescentes:

a) $3x + y = 3$

b) $\frac{1}{2}x + y = 4$

c) $\frac{3}{2}y + x = \frac{2}{3}$

d) $\frac{x-y}{2} = 3$

5.3.10 Dados os pontos da tabela, verifique se eles estão alinhados. Se estiverem, determine a equação da função linear e faça o gráfico.

X	0	1	3	6
Y	1	3/2	5/2	4

X	0	1	2	3
Y	1,5	2,5	3,5	4,6

5.3.11 Considere um quadrado cujos vértices estão nos pontos $V_1 = (0,0)$; $V_2 = (0,4)$; $V_3 = (4,4)$ e $V_4 = (4,0)$. Determine equações para as retas correspondentes a cada lado do quadrado.

5.3.12 Considere um triângulo cujos vértices estão nos pontos $V_1 = (1,1)$; $V_2 = (4,1)$ e $V_3 = (1,4)$. Determine equações para as retas correspondentes a cada lado do triângulo.

5.3.13 Dadas as equações de retas, faça o gráfico usando somente as informações fornecidas pelos coeficientes angular e linear (não use tabela):

a) $y = -x + 1$

b) $y = 4x$

c) $y = -x$

d) $y = 2x - 3$

e) $y = 1$

f) $x = 1$

5.3.14 Construa a equação e faça um esboço do gráfico das retas $y = ax + b$, com as informações dadas:

a) $a = 2$ e $b = 1$

b) $a = -1$ e passa em $(1,0)$

c) passa em $(0,0)$ e tem inclinação -2

d) é constante e passa em $(2,3)$

e) $\theta = 45^\circ$ e $b = -1$

f) $\theta = 120^\circ$ e passa em $(0,3)$

5.3.15 a) Um motoqueiro cobra R$ 3,00 por viagem, para entregar até cinco pizzas. Sabendo que o custo de uma pizza é R$ 40,00, faça uma função que dê o custo de 1 a 5 pizzas. Faça o gráfico da função.

b) Refaça a função para o custo de uma pizza é R$ 50,00. Faça o gráfico e compare com a reta da letra (a).

5.3.16 Analise os coeficientes angular e linear das retas. Determine se as retas crescem ou decrescem e o ponto de intersecção com o eixo Y. Faça um esboço do gráfico com base nessa análise.

a) $y = 3x + 5$

b) $y = -2{,}3x - 1$

c) $y = 2x - 1, 3$

d) $y = -5{,}2x + 2{,}3$

e) $y = -1, 3x + 2$

f) $y = -4, 1x - 5$

5.3.17 Nas retas que passam pelos pontos P_1 e P_2, determine se a reta cresce ou decresce e o ponto em que a reta intercepta o eixo Y:

a) $P_1 = (1,1)$ e $P_2 = (2,4)$

b) $P_1 = (1,6)$ e $P_2 = (5,3)$

c) $P_1 = (2,8)$ e $P_2 = (7,1)$

d) $P_1 = (6,1)$ e $P_2 = (1,3)$

5.3.18 A fabricação de um produto implica em custos de materiais, energia, mão de obra, encargos sociais e impostos comerciais. Para uma determinada quantidade do produto, vamos considerar os custos de mão de obra como custo fixo, no valor de R$ 20,00. Considerando que os custos de materiais, energia e impostos são de R$ 150,00, para produzir uma unidade do produto:

a) Construa uma tabela relacionando o número de unidades do produto e o custo total.

b) Faça um gráfico com os dados da tabela.

c) Determine uma equação para relacionar o número de unidades do produto e o custo total.

d) Determine o coeficiente angular e o linear. Qual é o significado destes coeficientes no problema?

5.3.19 Uma agência de pesquisa estatística encontrou os percentuais de voto (V) mostrados na tabela abaixo para os candidatos A e B.

Data	Tempo(dias)	V (%) Candidato (A)	Candidato (B)
01/07	1	35	30
01/08	32	37	32
01/09	63	46	40

a) Faça um gráfico do percentual de voto (V) pelo tempo (t) para os dois candidatos, considerando o período 1/07 a 1/09.

b) Considere o percentual de voto uma função linear em cada mês e determine a função da reta do mês de julho. Com esta função, calcule o percentual para o dia 20 de julho.

c) Se a variável V mantiver em setembro a mesma tendência de agosto, para os dois candidatos, quais serão os percentuais de voto no dia 16 de setembro?

5.4 Aplicações de funções do 1º grau

5.4.1 Produção de bens: custo fixo + custo variável

A produção de bens, seja na indústria ou na agricultura, apresenta custos variáveis e fixos. Os primeiros dependem da quantidade de bens produzidos e os últimos não dependem. Por exemplo, na produção de vinho, o custo das garrafas, matéria prima (uva), impostos, energia, água e produtos de limpeza são **variáveis**, ou seja, dependem da quantidade produzida. Quanto mais litros de vinhos forem produzidos, estes custos aumentarão proporcionalmente. Enquanto que o custo do aluguel, mão-de-obra, o equipamento (pipas, bomba, baldes, máquina de colocar rolhas,...) são **constantes** até uma certa quantidade de litros produzidos.

Um modelo linear pode ser usado para modelar a produção de bens:

$$C(x) = p\,x + CF \tag{4.1}$$

Onde *C(x)* é o custo total *(R\$), x* é a quantidade produzida (*unidades*)*, p* é o custo variável por unidade produzida *(R\$ /unidade)* e *CF* é o custo fixo *(R\$).*

Observemos que a Eq. 4.1 é uma função afim, onde *p* e *CF* são os coeficientes angular e linear, respectivamente.

A Receita (ou ganhos com a venda do bem produzido) é proporcional à quantidade produzida e vendida. Assim, a função receita é uma função linear:

$$R(x) = PV\ x \tag{4.2}$$

Onde *R(x)* é a receita (*R\$*) e *PV* é o preço de venda de cada bem (*R\$ /unidade*).

Para determinar o Lucro da atividade, fazemos a diferença entre a receita e o custo de produção.

$$L(x)= R(x) - C(x) = PVx -(p\,x + CF) \text{ ou}$$

$$L(x)= (PV - p)x - CF. \tag{4.3}$$

Observemos que a Eq. 4.3 também é uma função afim.

Considere que para produzir um litro de vinho o custo variável por unidade é *p = R\$ 4,50*, o custo fixo é *CF = R\$ 2.000,00* e o preço de venda é *PV = R\$ 10,00*.

1. Substitua os valores de *p*, *CF* e *PV* nas Eqs. 4.1, 4.2 e 4.3 e faça os gráficos das funções *C*, *R* e *L*, no mesmo plano cartesiano.

2. Calcule quantos litros de vinho deverão ser produzidos para que a receita seja equivalente aos custos ■

5.4.2 Produção de Lixo

A Tabela abaixo apresenta dados sobre a produção de lixo doméstico em Chapecó em 2004, 2007 e 2012.

Tempo, *t* (anos)	2004	2007	2012
População, *h* (habitantes)	165.220	168.113	180.000
Resíduos domésticos, *R* (kg/hab./dia)	0,405	0,630	0,855

Fonte: Abrelpe; MMA (Dados citados pelas alunas Ana C. Maccari e Cristiane L. da Silva no trabalho de Cálculo Numérico, Curso de Engenharia Ambiental, 2º/2014)

1. Verifique se a população cresce linearmente com o tempo.
2. Verifique se a produção de resíduos domésticos/habitante/dia cresce linearmente com o tempo.
3. Considerando que *R(h)* é linear entre 2007 e 2016, faça a previsão da *R(2016)* ■

5.4.3 Modelo Mola-massa

Um sistema mola-massa é ilustrado na figura abaixo uma mola é distendida por massas m, (g) que causam deformações y (cm). A posição $y_o = 0$ corresponde ao estado da mola sem massa. A cada massa m_i colocada corresponde uma posição y_i (deformação da mola), sendo $i = 0,1,2,3,..\ n$, o número de massas. Para o regime elástico (valores de m, para os quais a mola ainda volta na posição y_o) as posições y são proporcionais às massas m. Considerando o conceito de força peso, que é a força com que a terra atrai as massas, temos

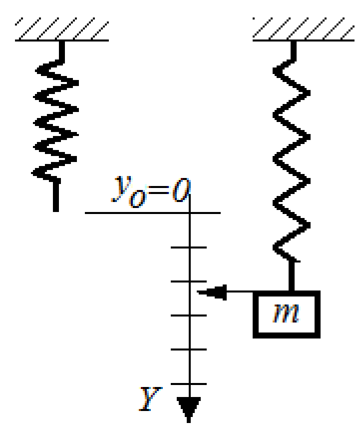
$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{g}$

Onde m é a massa (g) $\mathbf{g}$ a aceleração da gravidade (m/s^2).

A relação entre F e y é uma função de 1º grau, conhecida como Lei de Hooke

$$F(y) = k\, y\ ,$$

onde k é uma constante característica da mola. Observemos que k é o coeficiente angular da função e neste caso, tem um significado físico: a "dureza" da mola.



1. Considere molas com $k = 1,2\ e\ 3$. Calcule as deformações y para as massas $m = 0,50,100,150$ e $200\ g$. (considere $\mathbf{g} = 10\ m/s^2$)
2. Faça um gráfico e compare as retas.
3. Qual é a mola mais "dura" ■

5.4.4 Locação de carros

A consulta a um site de locação de carros resultou nos dados da tabela abaixo.

Nº de diárias	Valor cobrado (R$)
1	83
2	166
3	249
4	332
5	415

1. Verifique se o valor cobrado (V) é proporcional ao número de diárias (d). Faça um modelo matemático que relacione V e d. Calcule V para um aluguel de sete dias.

2. Como ficaria este modelo se a locadora cobrasse uma taxa de lavagem de R$ 25,00.

3. Outro sistema de aluguel considera uma taxa fixa de R$ 40,00, mais R$ 1,30 por quilômetro rodado. Faça um modelo matemático para este sistema de locação.

4. Considerando a locação por quilômetro rodado (letra (d)), se um locador pretende ficar 3 dias com o carro, quanto quilômetros ele teria que rodar para que o custo seja equivalente ao do modelo da letra (c) ?

5. Verifique qual é o sistema de locação mais vantajoso para uma semana de locação, com 400 km rodados.

5.4.5 Orçamento de Churrasco

Consideremos as seguintes hipóteses de consumo para um churrasco:

- 450 g de carne por pessoa,

- preço médio da carne: PM,

- custo da salada: 20% do custo da carne.

O custo médio de carne e salada por pessoa (p) pode ser calculado fazendo:

p = custo da carne + custo salada

$p = 0{,}450 \cdot PM + 0{,}450 \cdot PM \cdot 0{,}2 = 1{,}2 \cdot 0{,}450 \cdot PM$ ou

$p = 0{,}54\ PM$

O custo de um churrasco (C) para um grupo de pessoas depende do número de pessoas (x), do custo da carne e salada por pessoa (p) e da taxa de limpeza (b) do local do churrasco.

$$C(x) = p\,x + b. \qquad (4.4)$$

1. Qual é o custo de um churrasco para *10* pessoas, considerando o preço médio da carne *PM* = *R$ 18,00*.

2. Que modificação na Eq. 4.4 deve ser implementada para incluir o custo da gasolina (g) usada para buscar os mantimentos?

3. Que modificação na Eq. 4.4 deve ser implementada para incluir o custo da sobremesa (SM)?

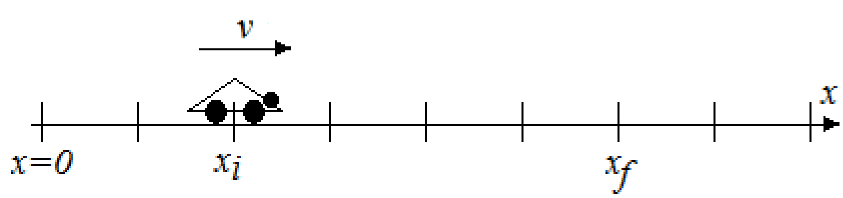
5.4.6 Deslocamento com velocidade constante

As funções de 1º grau são úteis para modelar vários problemas de Física, como por exemplo o deslocamento de um carro em uma estrada retilínea, com velocidade constante. A velocidade (v) é definida como a razão entre a variação da distância percorrida (x) pela variação de tempo (t):

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{4.5}$$

Se x_f e x_i são as posições final e inicial do carro (ver Fig. 4.6.1), substituindo $\Delta x = x_f - x_i$, na Eq. (4.5), temos

$$x_f = v \cdot \Delta x + x_i \tag{4.6}$$



Se o tempo inicial for zero $\Delta x = t$, onde t é o tempo de deslocamento e x_f é a posição final, ou seja, uma função de $x(t)$. Então,

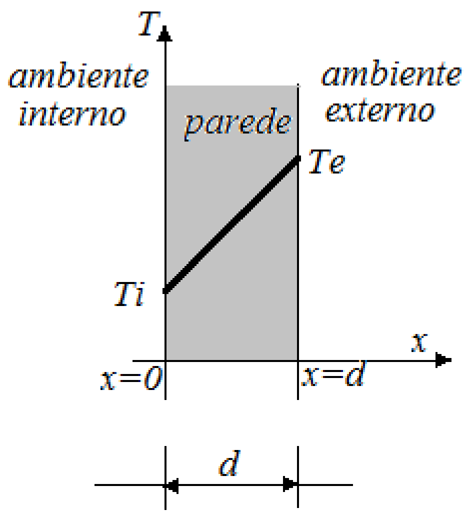
$$X(t) = v \cdot t + x_i \tag{4.7}$$

1. Determine a posição de um carro que partiu do quilômetro *10* com velocidade constante *80 km/h* e andou durante *3 h*.

2. Quanto tempo esse carro precisará rodar nessa velocidade para chegar no quilômetro 270 ?

5.4.7 Temperatura no interior de uma parede

Consideremos que a parede de uma casa está sujeita a temperaturas diferentes e constantes, na superfície interna e externa da casa, durante um período de tempo. Se as temperaturas forem mantidas, a distribuição de temperatura no interior da parede será linear.



Seja d a espessura da parede. Com base no sistema de coordenadas mostrado na figura acima, dois pontos da reta *T(x)* são conhecidos. Então, podemos calcular o coeficiente angular:

$$a = \frac{T_e - T_i}{\Delta x} = \frac{\Delta T}{d} \tag{4.8}$$

Como a reta intercepta o eixo das ordenadas em $T = T_i$ temos:

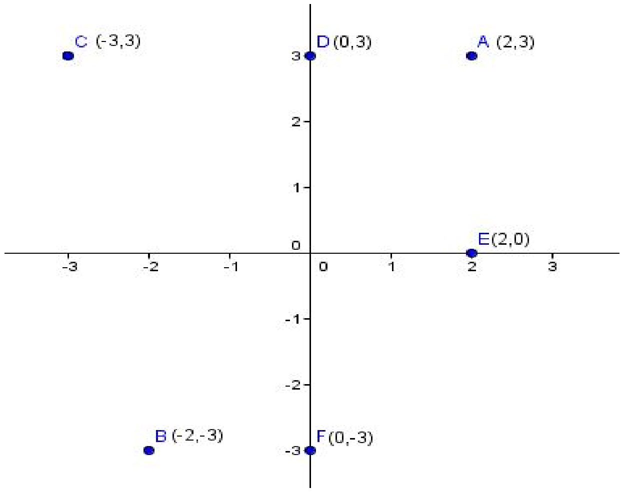
$$T\left(x\right) = \frac{\Delta T}{d} x + T_i \tag{4.9}$$

1. Determine uma função *T(x)* em uma parede, sabendo que *45ºC* e *25ºC* são as temperaturas externa interna da casa, respectivamente e a espessura da parede é de *15 cm*.

2. Usando a função do item (a), calcule a temperatura em *5 cm*, *7,5 cm* e *10 cm*.

5.5 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESPOSTAS 5.2

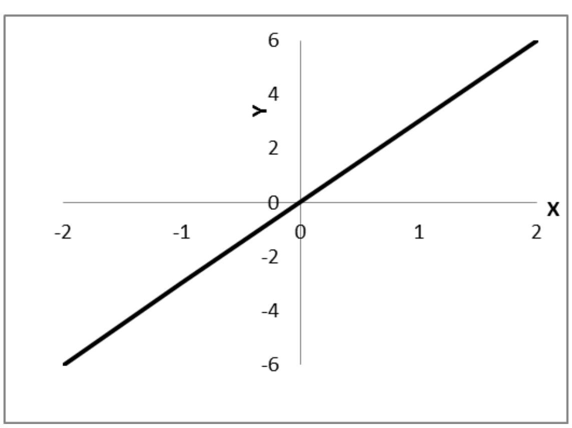
5.2.1 

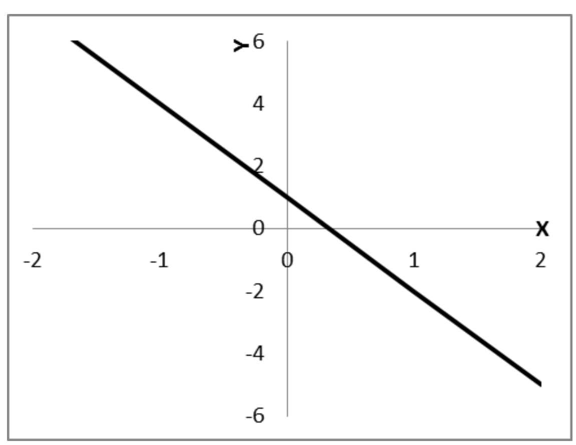
5.2.2 $x = 0$

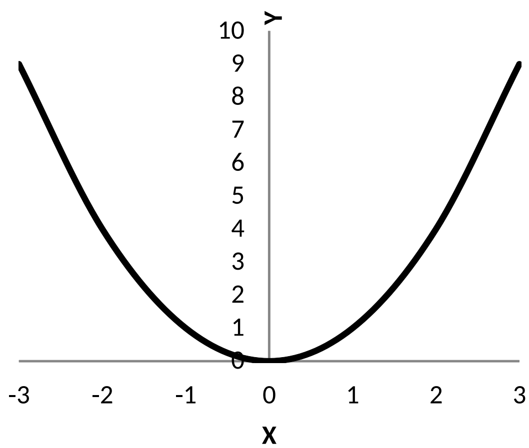
5.2.3 $y = 0$

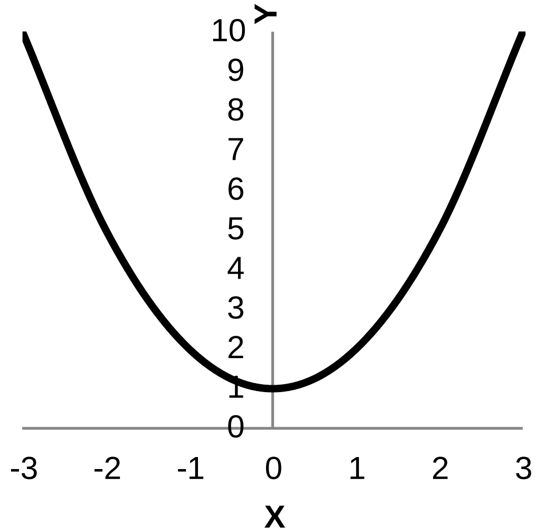
5.2.4 a) $f(0) = -1$
b) $f(-2) = -7$
c) $f(c+1) = 3c+2$
d) $f(1) = 2$
e) $f(1/3) = 0$
f) $f(3-c) = -3c+8$

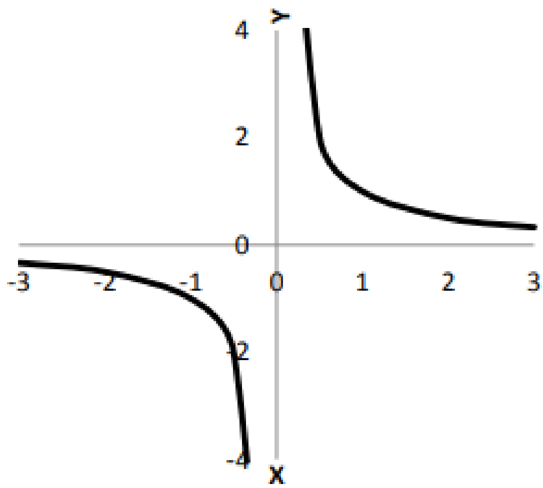
5.2.5 a) $x = 0$
b) $x = -1/4$
c) $x = 5/8$
d) $x = -7/4$

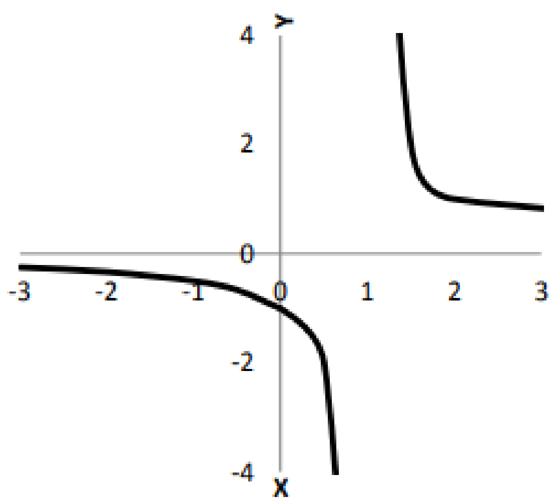
5.2.6 a) 

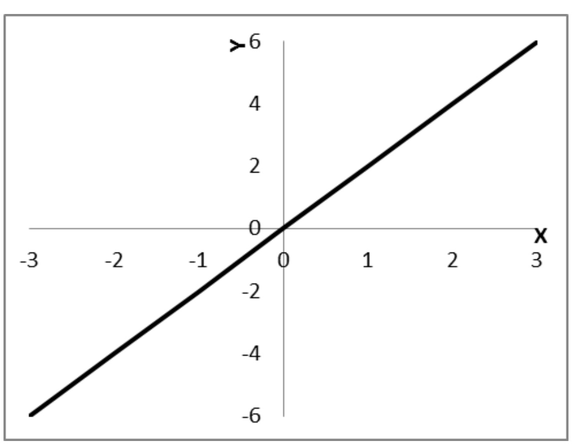
b) 

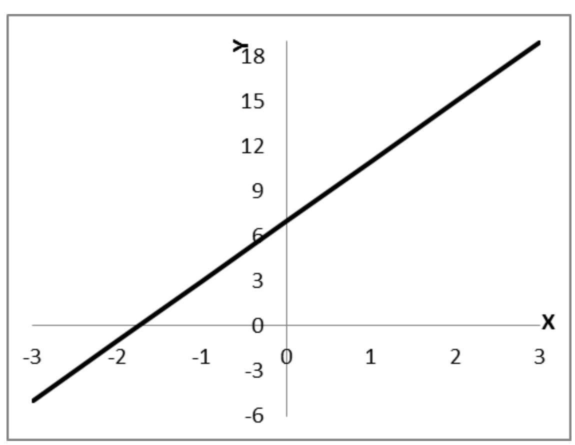
c) 
Y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-3 -2 -1 0 1 2 3
X

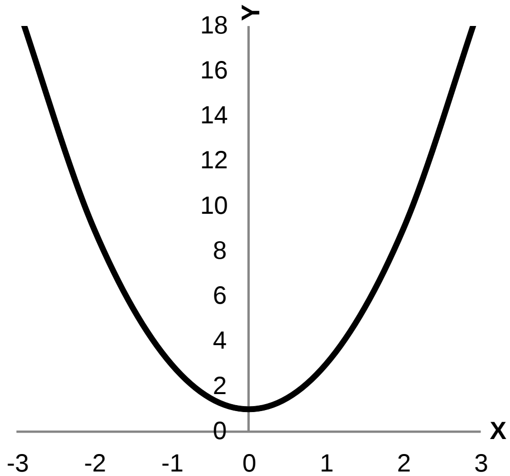
d) 
Y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-3 -2 -1 0 1 2 3
X

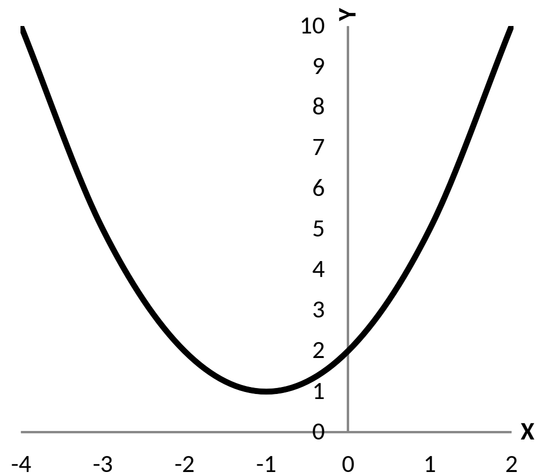
e) 
Y
4
2
0
-3 -2 -1 0 1 2 3
-2
-4
X

f) 
Y
4
2
0
-3 -2 -1 0 1 2 3
-2
-4
X

5.2.7 a) 
Y
6
4
2
0
X
-3 -2 -1 0 1 2 3
-2
-4
-6

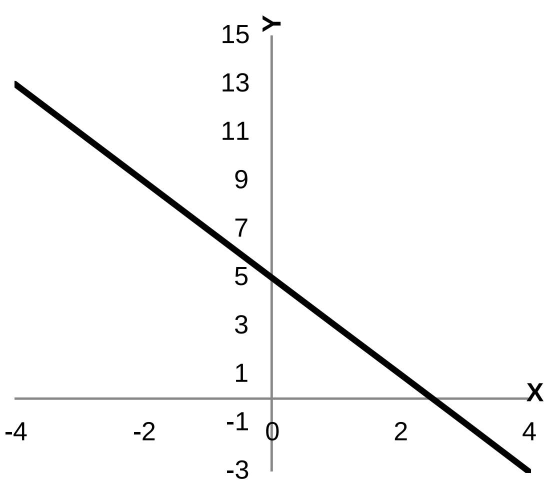
b) 
Y
18
15
12
9
6
3
0
X
-3 -2 -1 0 1 2 3
-3
-6

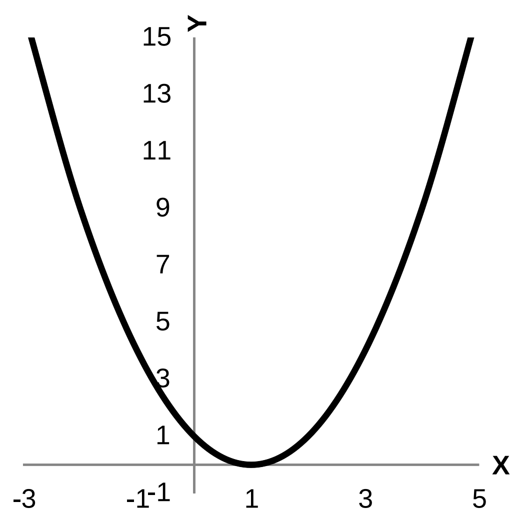
c) 

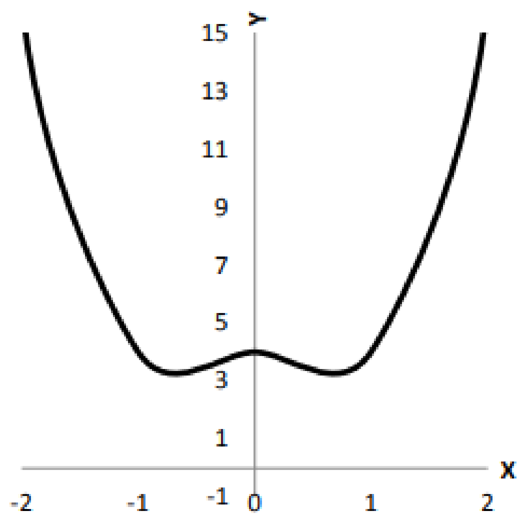
d) 

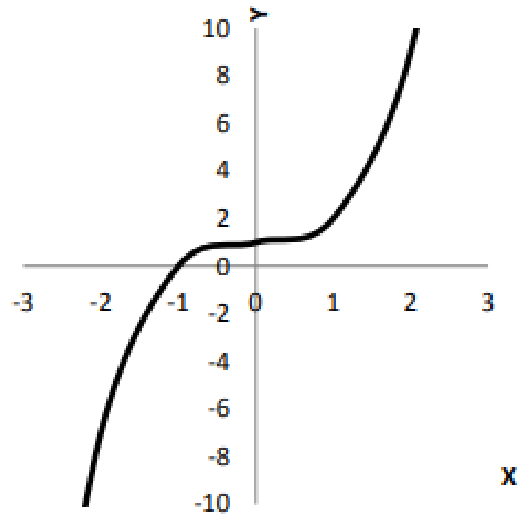
5.2.8 Sim.

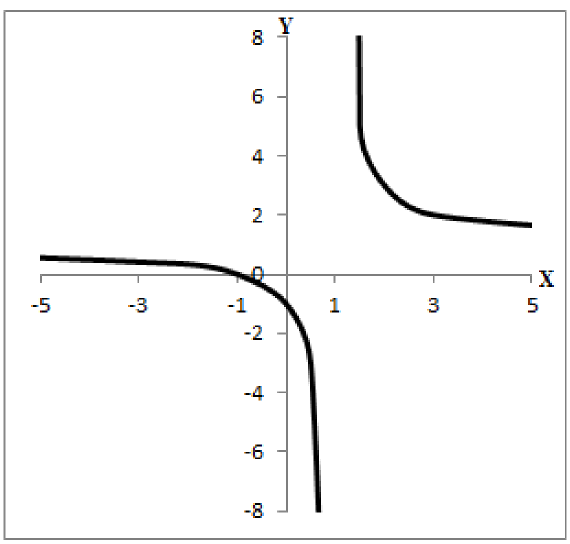
5.2.9 Não, pois para um mesmo valor de x há dois valores de y correspondentes.

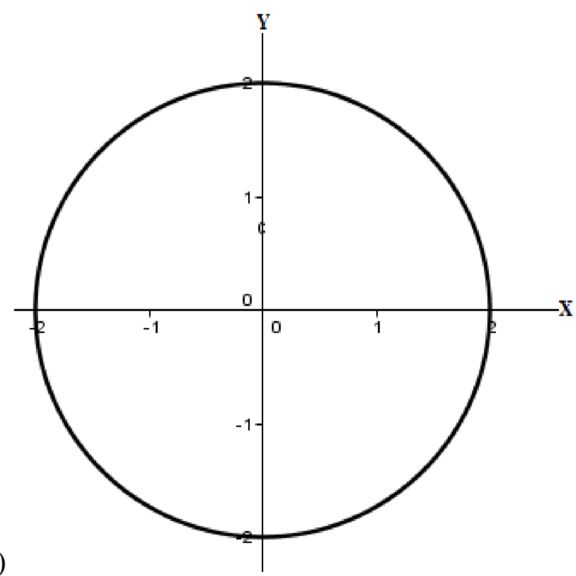
5.2.10 a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

5.2.11 Não, a alternativa f) não está de acordo, pois há dois valores de y para mesmo x.

5.2.12 a) $D = \{x \in R\}$; $Im = \{y \in R\}$

b) $D = \{x \in R \neq 0\}$; $Im = \{y \in R/y \neq 1\}$

c) $D = \{x \in R\}; Im = \{y \in R/y \leq 4\}$

d) $D = \{x \in R/x \geq 0\}; Im = \{y \in R/y \geq 0\}$

e) $D = \{x \in R/x \geq 0\}; Im = \{y \in R/y \leq 0\}$

f) $D = \{x \in R/x \geq 4\}; Im = \{y \in R/y \geq 0\}$

RESPOSTAS 5.3

5.3.1 a) Sim. A dependência é de 1º Grau.

b) A proporção da circunferência em relação ao raio é de 1º Grau. A da área é de 2º Grau.

c) Sim. A dependência é de 1º Grau.

d) Sim. A dependência é de 1º Grau.

e) Sim. A dependência é de 1º Grau.

5.3.2 m é proporcional a y. $\Delta y/\Delta x = 50/3$

5.3.3 $y(x) = 1,5x + 5$

5.3.4 $C(x) = p \cdot x$;

5.3.5 $C(x) = px + b$

5.3.6 $C(x) = ax + CF$

5.3.7 a) $a = 1/2; b = 1/2$; $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

b) $a = 1; b = 3$; $f(x) = x + 3$

c) $a = -1; b = 0$; $f(x) = -x$

d) $a = 0; b = 3; f(x) = 3$

5.3.8 a) C=20/7x +5/7 b) C(30)=605/7= 86,43

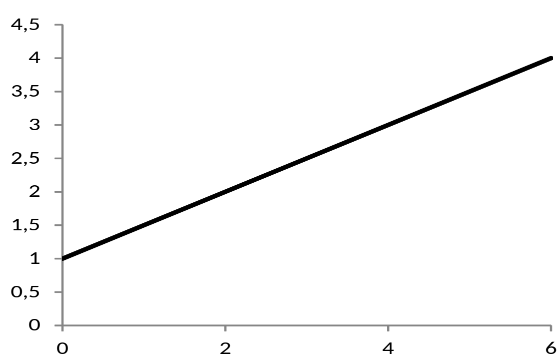
5.3.9 a) $a = -3; Decrescente$

b) $a = -1/2; Decrescente$

c) $a = -2/3; Decrescente$

d) $a = 1; Crescente$

5.3.10 a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

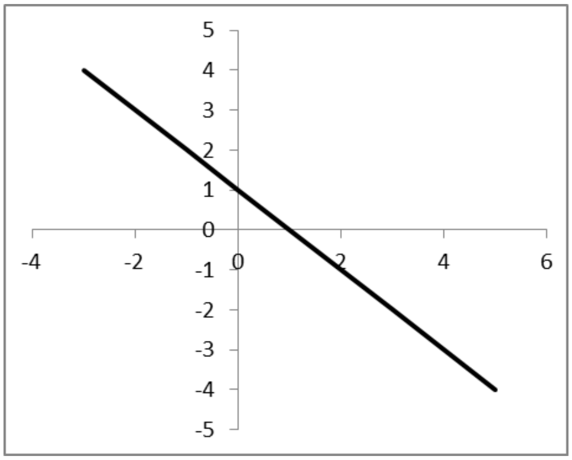


b) Os pontos não estão alinhados

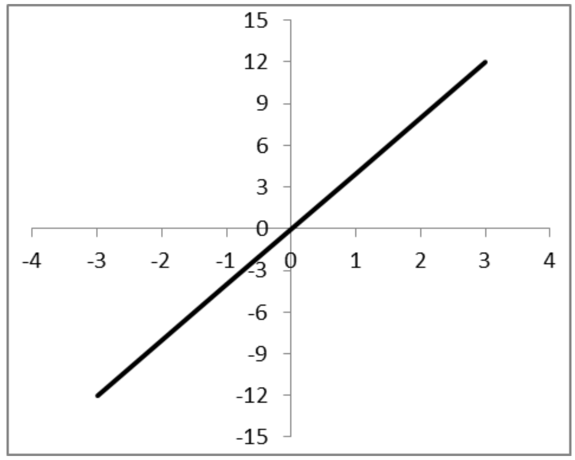
5.3.11 V_1V_2:$x=0$; V_1V_4:$y=0$; V_2V_3:$y=4$; V_3V_4:$x=4$

5.3.12 V_1V_2:$y=1$; V_1V_3:$x=1$; V_2V_3:$y=-x+5$

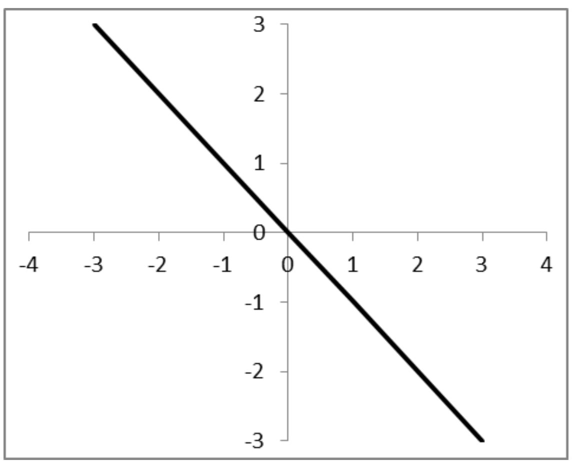
5.3.13 a)



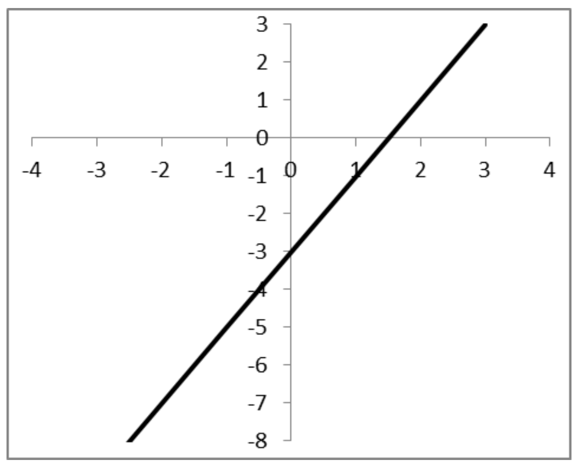
b)



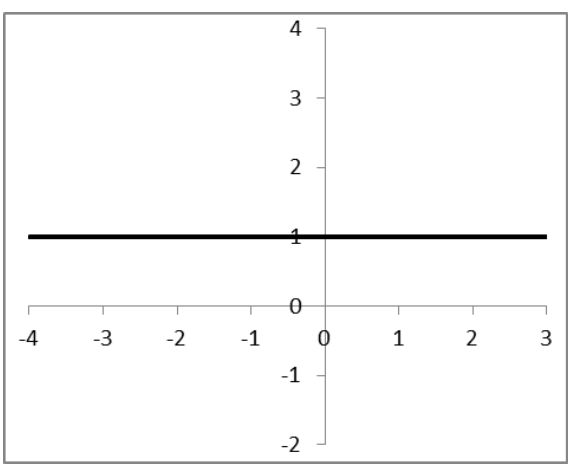
c)



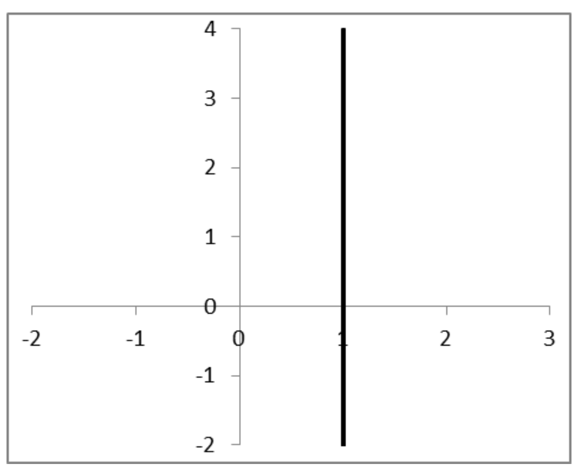
d)

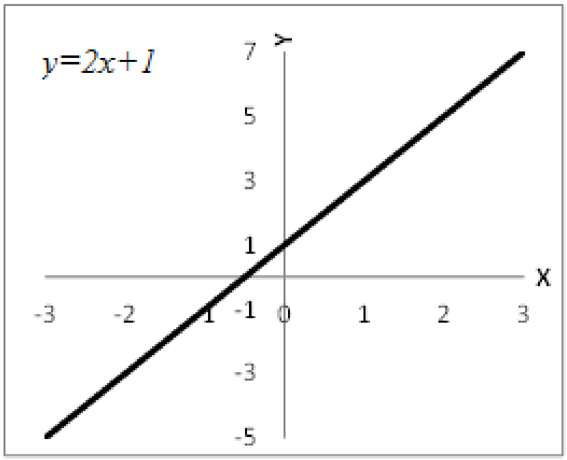


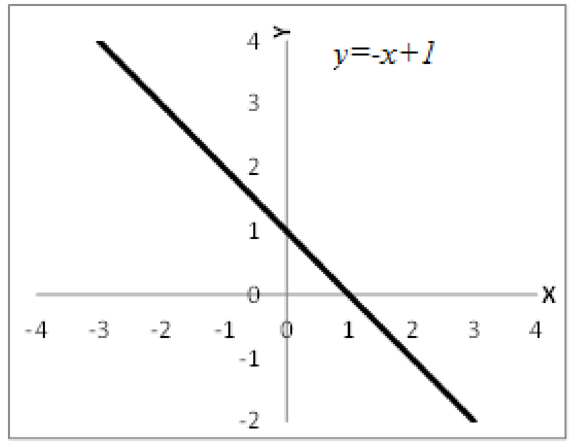
e)

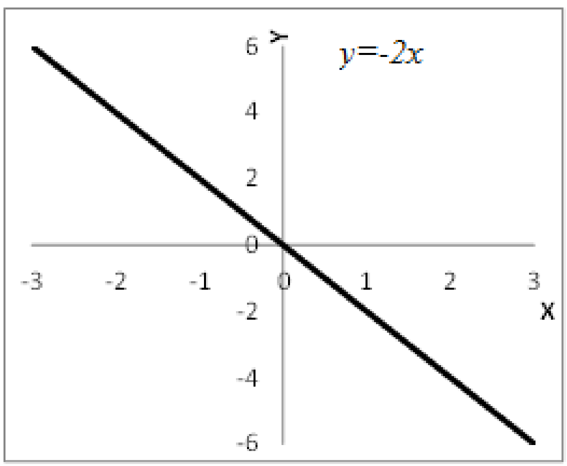


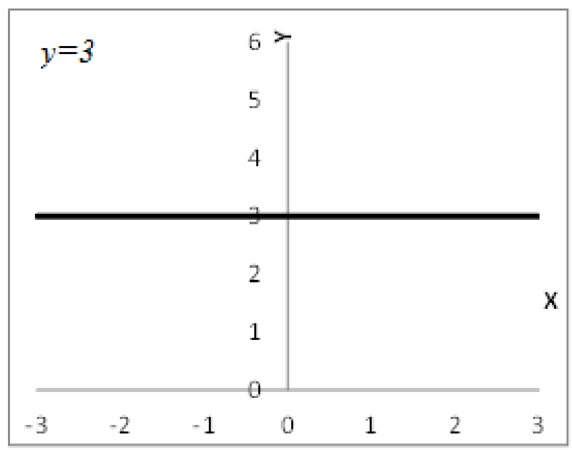
f)

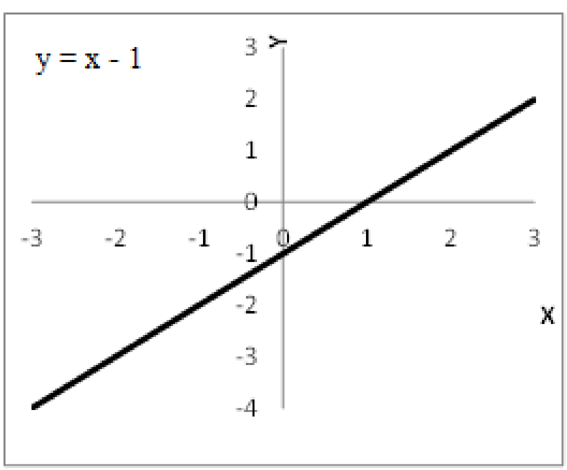


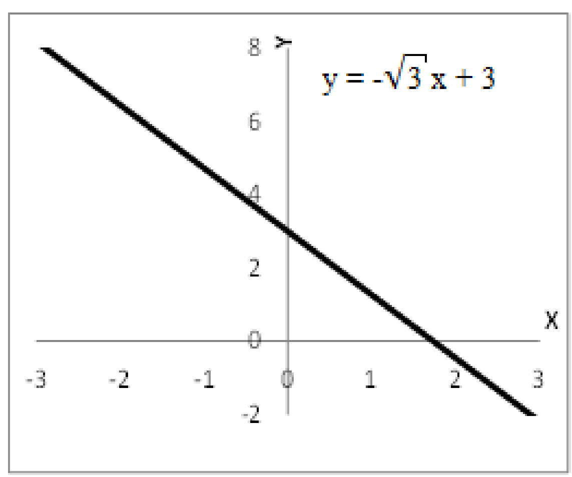
5.3.14 a) 

b) 

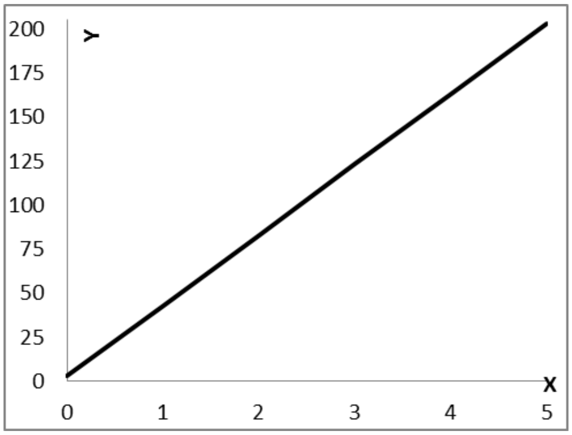
c) 

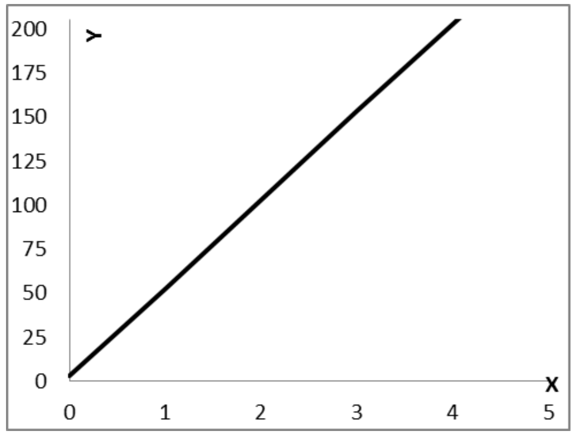
d) 

e) 

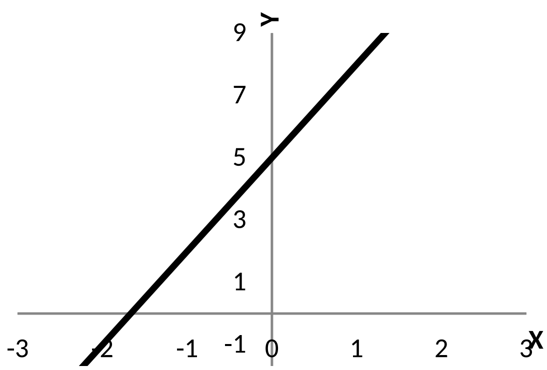
f) 

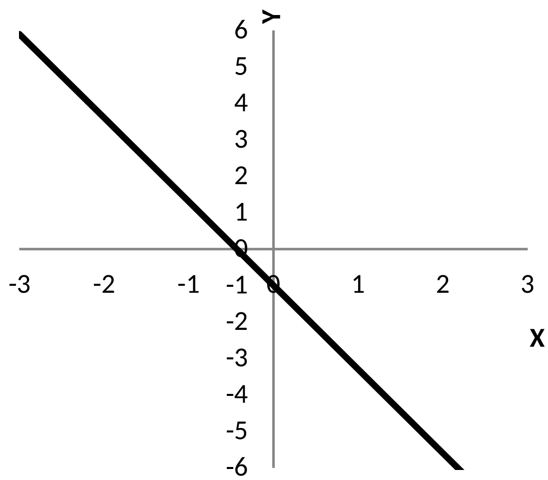
5.3.15 a) $f(x) = 40x + 3$ b) $g(x) = 50x + 3$



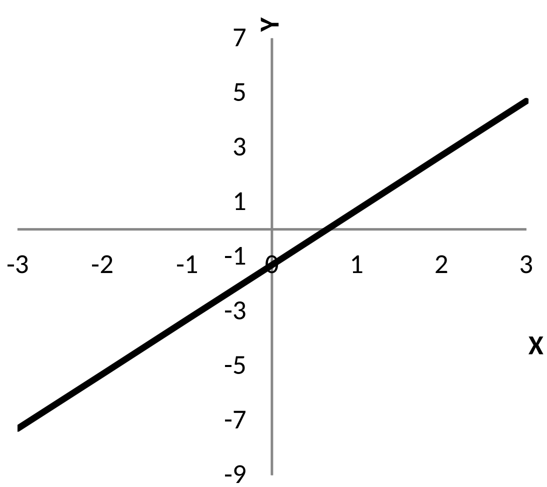


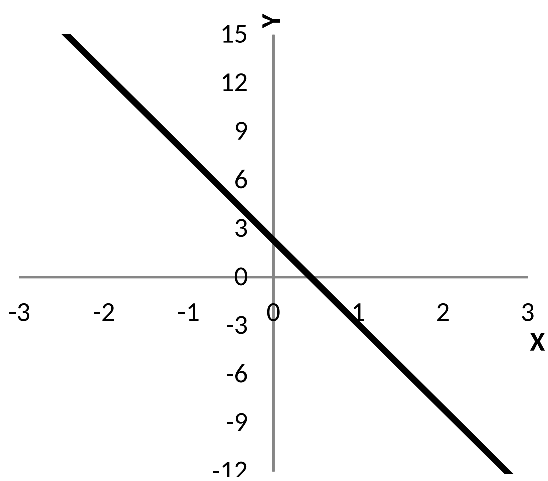
5.3.16 a) Crescente; Intersecção em Y: (0,5) b) Decrescente; Intersecção em Y: (0,-1)



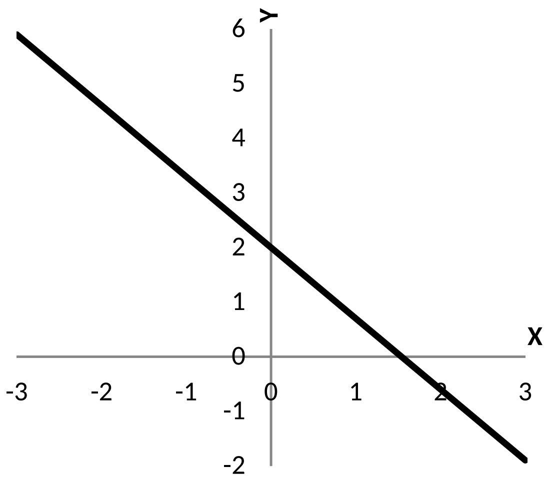


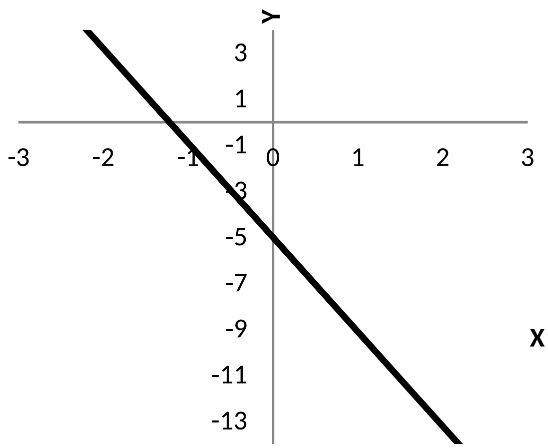
c) Crescente; Intersecção em Y: (0,-1.3) d) Decrescente; Intersecção em Y:(0,2.3)





e) Decrescente; Intersecção em Y:(0,2) f) Decrescente; Intersecção em Y:(0,-5)





5.3.17 a) Crescente; Ponto de Intersecção em Y= -2

b) Decrescente; Ponto de Intersecção em Y=27/4

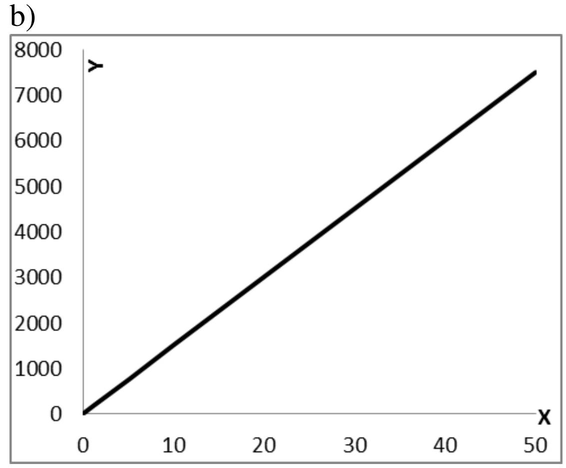
c) Decrescente; Ponto de Intersecção em Y=54/5

d) Decrescente; Ponto de Intersecção em Y=17/5

a)

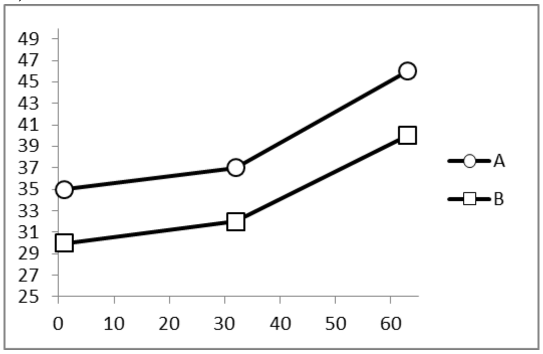
X	Y
0	20
1	170
5	770
10	1520
50	7520

b)



5.3.18 c) $C(x) = 150x + 20$ d)150 é o custo de produção de uma peça e 20 é o custo unitário.

a)



5.3.19 b) Candidato (A): $y = \frac{2}{31}x + \frac{1083}{31}$, Percentual para 20/07: 36,22%

Candidato (B): $y = \frac{2}{31}x + \frac{928}{31}$, Percentual para 20/07: 31,22%

c) Candidato (A): 51,8%

Candidato (B): 45,1%

5.6 ANEXO

5.6.1 Tangente de ângulos suplementares

Sejam o ângulo *0 < < 90º*. O suplementar de é (*180º -*). Pela definição de tangente, $tg\,(\theta) = MT$ e $tg\,(180^\circ - \theta) = MT'$, como mostra a Fig. 1. Os ângulos dos triângulos OMT e OMT' são iguais e o segmento OM é comum aos triângulos (portanto são iguais) então os outros lados também serão. Portanto, os triângulos OMT e OMT' são idênticos e

$$tg\,(\theta) = -tg\,(180^\circ - \theta)$$

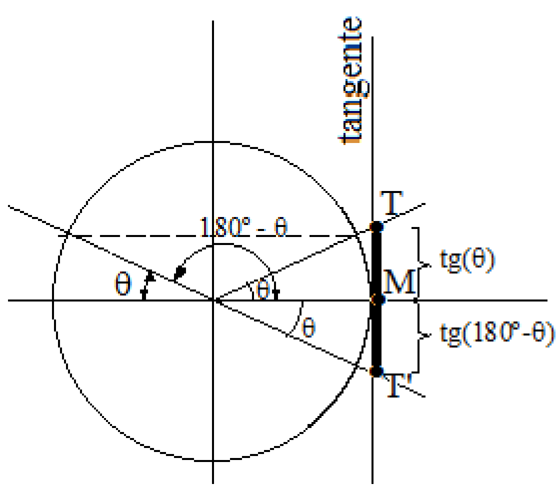


Figura 1 - Tangente de ângulos suplementares

5.6.2 Tangente de ângulos complementares

Pela definição de tangente, temos:

$tg\,(\theta) = \frac{QR}{PR}$ e $tg\,(90^o - \theta) = \frac{PR}{QR}$. Comparando as expressões, temos:

$$tg\,(\theta) = \frac{1}{tg\,(90^o - \theta)}$$

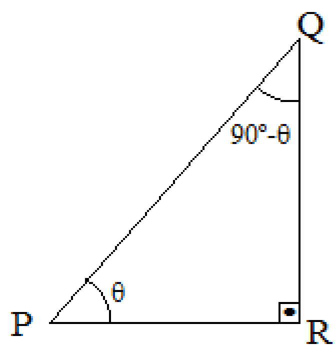


Figura 2 - Tangente de ângulos complementares

5.6.3 Retas paralelas

Teorema: Sejam as retas $(r) : y = mx + b$ e $(s) : y = px + c$. Se r é paralela a s então $m = p$.

Demonstração: Sejam e os ângulos que as retas r e s, fazem com o eixo X, respectivamente. Se r é paralela a s então = e $tg = tg$. Como $m = tg$ e $p = tg$, tem-se $m = p$.

5.6.4 Retas perpendiculares

Teorema: Sejam as retas $(r) : y = mx + b$ e $(s) : y = px + c$. Se r é perpendicular a s então $p = -\frac{1}{m}$.

Demonstração: Sejam e os ângulos que as retas r e s, fazem com o eixo X, respectivamente. Da Fig. 3, temos:

$p = tg\,(\alpha) = \frac{RP}{PT}$; $tg\,(180^o - \theta) = \frac{PT}{RP}$ e $m = tg\,(\theta)$
(3.1)

Da trigonometria sabemos que as tangentes de ângulos suplementares são iguais em módulo e de sinais contrários:

$$tg\,(180^\circ - \theta) = -tg\,(\theta). \tag{3.2}$$

Substituindo a Eq. (3.2) na Eq. (3.1), temos:

$$tg\,(\theta) = -\frac{PT}{RP} \tag{3.3}$$

Comparando as razões das Eqs. (3.1) e (3.3) temos:

$p = tg\,(\alpha) = \frac{RP}{PT} = -\frac{1}{tg(\theta)} = -\frac{1}{m}$

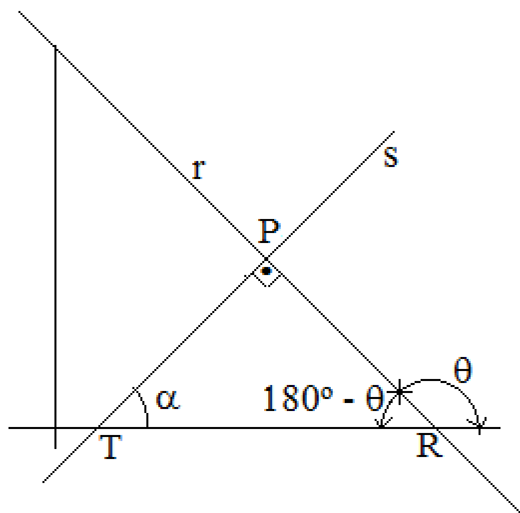


Figura 3 - Retas perpendiculares

Capítulo 6

Função do segundo grau

6.1 Introdução

No capítulo sobre função de 1º grau foram estudados modelos em que as grandezas eram simplesmente proporcionais entre si. Isto significa que, para o mesmo incremento *(Δx)* em qualquer x, o incremento *(Δy)* em y, será sempre o mesmo. Os gráficos dessas funções são retas. Porém, muitas grandezas se relacionam proporcionalmente ao quadrado de outras: é o caso da área de um quadrado em relação ao lado; a área de um círculo em relação ao raio; o deslocamento de uma pedra em queda livre em relação ao tempo e muitas outras. Estas funções são chamadas de quadráticas e serão estudadas neste capítulo.

6.2 Definição de função do 2º grau

As funções polinomiais tem a forma

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_nx^n$ (2.1)

onde a_i são números reais, para $i = 0,1,2,3,4, ...n$.

O grau de uma função polinomial é dado pelo maior grau do polinômio. Assim,

1. $f(x) = a_0 + a_1x$ é uma função do 1º grau, para $a_1 \neq 0$.
2. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ é uma função do 2º grau, para $a_2 \neq 0$.
3. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ é uma função do 3º grau, para $a_3 \neq 0$
4. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$ é uma função do grau n, para $a_n \neq 0$.

Particularmente, as funções de 2º grau (também chamadas de *funções quadráticas*) tem a forma:

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, para $a_2 \neq 0$. (2.2)

Para simplificar a notação (evitar sub-índices), vamos substituir $a_0 = C$, $a_1 = B$ e $a_2 = A$ na Eq. (2.2) e obter :

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C \text{ , para } A \neq 0 . \qquad (2.3)$$

Exemplo 6.2.1. a) Na função $f(x) = x^2 + 2x - 3$, *A=1; B=2* e *C=-3*.

b) Na função $g(x) = 3x^2 - 1/3$, *A=3; B=0* e *C=-1/3*.

c) Na função $h(x) = -x^2 + 5x$, *A=-1; B=5* e *C=0*.

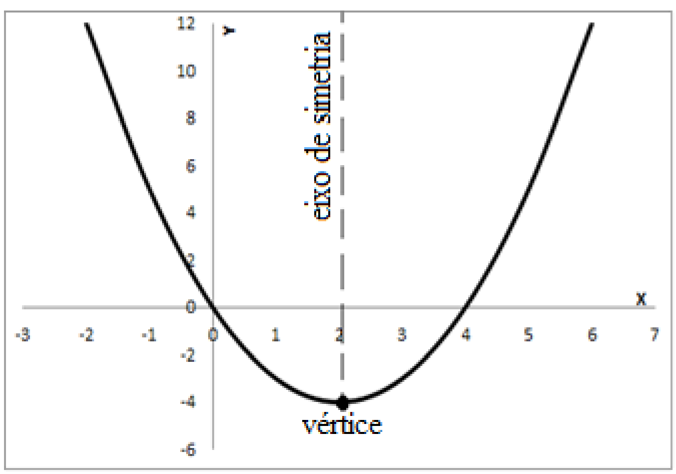
d) Na função $p(x) = -3x^2$, *A=-3; B=0* e *C=0* ■

6.3 Gráfico de uma função de 2º grau

O modo mais elementar de fazer o gráfico de uma função do 2º grau conhecida é localizando vários pontos da função no plano cartesiano. Esse modo é simples e fácil, porém demorado e mecânico. Vejamos um exemplo:

Exemplo 6.3.1. Faça o gráfico da função *f(x)* = x^2 - *4*x.

Solução: Podemos fazer uma tabela atribuindo valores para *x* e calculando os correspondentes valores de *f(x)* com a função dada.



Observemos que o gráfico de *f(x)* é uma *curva*. As curvas resultantes de funções de 2º grau são chamadas *PARÁBOLAS*.

Observemos também que as parábolas têm um ***eixo de simetria*** que divide a curva em duas partes iguais, o qual passa pelo ***vértice*** (ponto extremo da curva).

Como sugestão de atividade, incentivamos o leitor a obter o gráfico do presente exemplo em uma planilha eletrônica ■

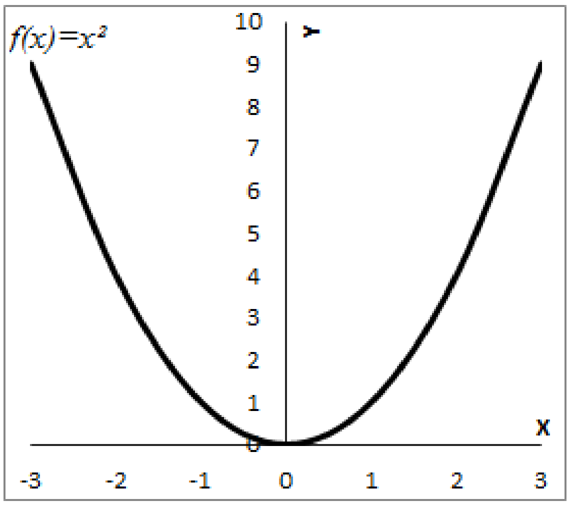
6.3.1 Concavidade da parábola

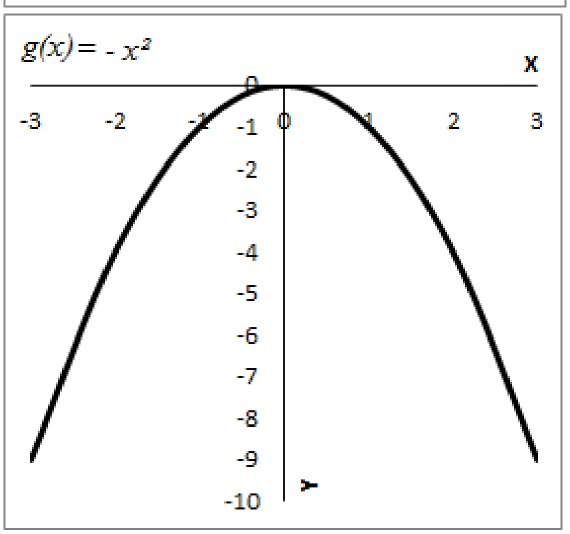
As parábolas com a forma da Eq. (2.3) têm ***concavidade para cima ou para baixo***.

Se $A > 0$ então a concavidade é para cima
Se $A < 0$ então a concavidade é para baixo.

Exemplo 6.3.2. Faça um esboço do gráfico das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = - x^2$.

Solução: Atribuindo valores para x e calculando os correspondentes valores de $f(x)$ e $g(x)$ obtemos os gráficos das figuras abaixo.





Observemos que para $A > 0$ a concavidade é para cima e para $A < 0$ a concavidade é para baixo■

6.3.2 Intersectação com o eixo Y

Os pontos onde qualquer função intersecta o eixo Y tem abcissa igual a zero ($x=0$). Fazendo $x=0$ na Eq. (2.3) temos:

$y = A0^2 + B0 + C$

$y = C. \qquad (3.1)$

Portanto, a parábola vai intersectar o eixo Y em $(0,C)$.

6.3.3 Raízes das funções de 2º grau (intersectação com o eixo X)

Lembremos que a raiz de uma função é o valor da abcissa (x_r) do ponto em que a função intersecta o eixo X, portanto, nesse ponto temos $y = 0$.

Fazendo $y = f(x) = 0$ na Eq. (2.3) temos uma equação de 2º grau:

$0 = Ax^2 + Bx + C \qquad (3.2)$

A solução da Eq. (3.2) foi demonstrada no capítulo sobre equações, cuja conclusão é a fórmula de Baskhara:

$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \qquad (3.3)$

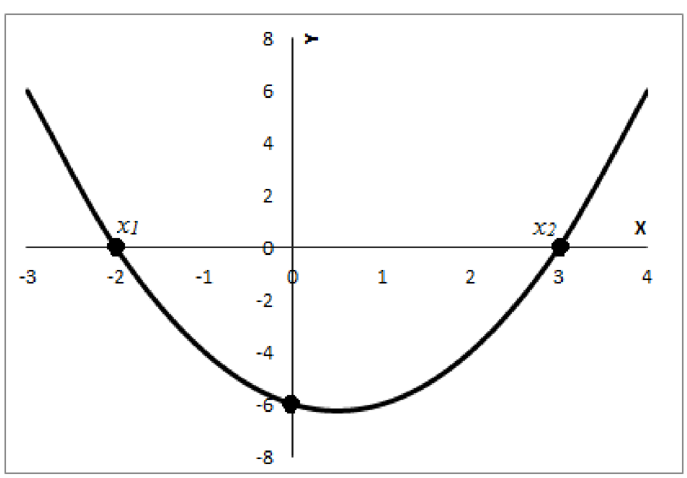
Exemplo 6.3.3. Calcule as raízes e faça um esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 - x - 6$.

Solução:

Usaremos três informações para fazer um esboço da função:

1. $A = 1 > 0$. Portanto a concavidade da parábola é para cima;
2. $C = -6$. Portanto a parábola intersecta o eixo Y em $(0,-6)$;
3. Aplicando a Eq. (3.3) com $A=1$; $B=-1$ e $C=-6$ obtemos as raízes $x_1 = -2$ e $x_2=3$. Portanto a parábola passa em $(-2,0)$ e $(3,0)$.

Colocando estas informações no plano cartesiano obtemos a curva da $f(x)$ dada.



Novamente incentivamos o leitor a obter o gráfico do presente exemplo em uma planilha eletrônica ■

Se x_1 e x_2 são raízes da equação de 2°grau e $A=1$, então $0=x\,x_2+Bx+C$ pode ser fatorada como

$0=(x+a)\,(x+b)=x^2+(a+b)x+ab=x^2+Bx+C$.
(3.4)

Assim,

$B=a+b$ e $C=\ a\cdot b$

Para que a Eq. (3.4) seja nula, $(x+a)=(x+b)=0$ e a e b são as raízes com o sinal oposto desta equação:

$a = -x_1$ e $b = -x_2$.

Re-escrevendo a Eq. 3.4 temos:

$0=(x-x_1)\,(x-x_2)=x^2+Bx+C$ (3.5)

Exemplo 6.3.4. Escreva três equações do 2º grau cujas raízes sejam $x_1 = 2$ *e* $x_2 = -1$.

Solução: Usando a Eq. 3.5 podemos escrever:

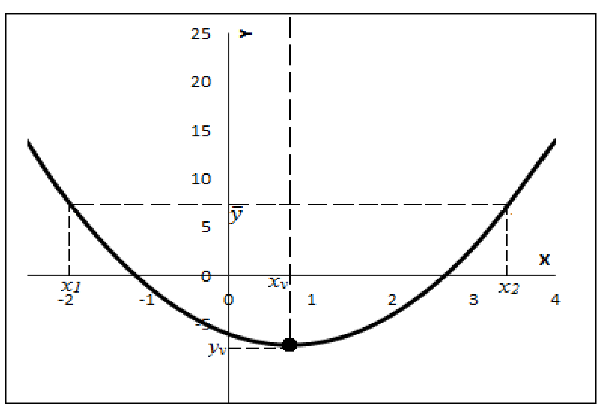
$0=(x-2)\,(x+1)=x^2-x-2$.

Multiplicando a equação obtida por qualquer número real, obtemos equações cuja solução é $x_1 = 2$ *e* $x_2 = -1$. Por exemplo:

$0=2x^2-2x-4$; $0=3x^2-3x-6$ e $0=4x^2-4x-8$ ■

6.3.4 Vértice da parábola

O vértice é o ponto $V=(x_v,y_v)$ pelo qual passa o eixo de simetria da parábola.



Consideremos um valor y , tal que $y > y_v$, como indica a figura acima. Devido à simetria das parábolas, devem existir x_1 e x_2 tal que

i) $f(x_1) = f(x_2) = y$ e

ii) $x_v = \frac{x_1+x_2}{2}$.

Assim, de (i) e da Eq. 2.3, temos:

$y = Ax_1^2 + Bx_1 + C$ (3.6)

$y = Ax_2^2 + Bx_2 + C$ (3.7)

Subtraindo as Eqs. (3.6) e (3.7) e colocando A e B em evidência, temos:

$0 = A\left(x_2^2 - x_1^2\right) + B\left(x_2 - x_1\right).$ (3.8)

Fatorando a diferença de dois quadrados no fator que multiplica A, temos:

$0 = A\left(x_2 + x_1\right)\left(x_2 - x_1\right) + B\left(x_2 - x_1\right).$ (3.9)

De (ii) temos $2x_v = x_1 + x_2$, que substituindo na Eq. (3.9)

$0 = A \cdot 2x_v \cdot \left(x_2 - x_1\right) + B\left(x_2 - x_1\right).$ (3.10)

Dividindo a Eq. (3.10) por $\left(x_2 - x_1\right)$, pois $x_1 \neq x_2$, temos:

$$0 = A \cdot 2x_v + B.$$

E, finalmente, resolvendo para x_v, temos:

$x_v = \frac{-B}{2A}.$ (3.11)

A ordenada do vértice pode ser obtida substituindo x_v na Eq. (2.3)

$y_v = f\left(x_v\right) = Ax_v^2 + Bx_v + C$.

Substituindo a expressão de x_v da Eq. (3.11), tem-se:

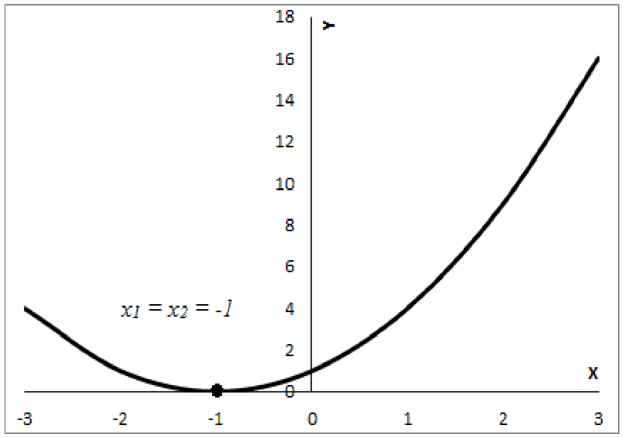
$y_v = f\left(x_v\right) = A\left(\frac{-B}{2A}\right)^2 + B\left(\frac{-B}{2A}\right) + C$ (3.12)

Resolvendo o quadrado, o produto e adicionando as frações, obtém-se:

$y_v = f\left(x_v\right) = -\frac{B^2-4AC}{4A}.$ (3.13)

Exemplo 6.3.5. Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

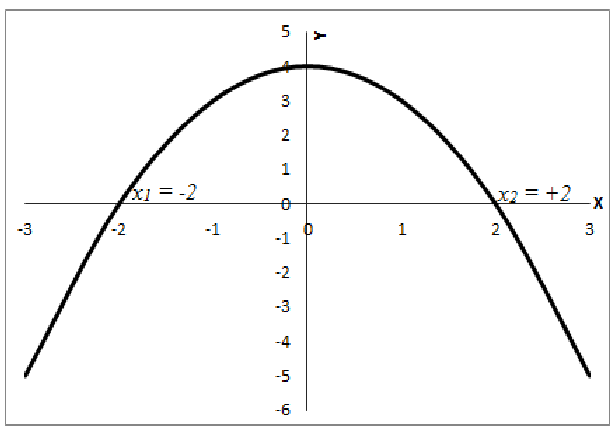
Solução: Aplicando a Eq. (3.3) com $A=1$; $B=2$ e $C=1$ obtemos duas raízes iguais $x_1 = x_2 = -1$. Com isto, já sabemos que a parábola tangencia o eixo X em (-1,0).



Usando as Eqs. (3.11) e (3.13) encontramos o vértice: *V=(-1,0)*. Com isso, sabemos que o eixo de simetria é a reta vertical $x = -1$. Como $A=1 > 0$ a parábola tem concavidade para cima. Com essas informações podemos traçar um esboço da parábola ■

Exemplo 6.3.6. Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = -x^2 + 4$.

Solução: Aplicando a Eq. (3.3) com $A=-1;\ B=0$ e $C=4$ obtemos duas raízes $x_1 = -2$ e $x_2 = +2$. Com isto, já sabemos que a parábola intersecta o eixo *X* em (-2,0) e (2,0).



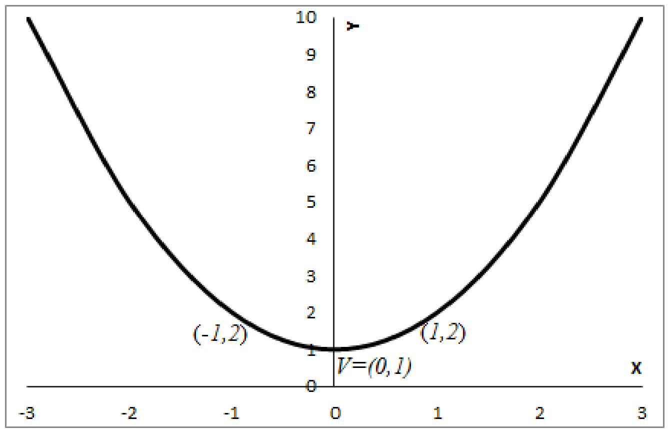
Usando as Eqs. (3.11) e (3.13) encontramos o vértice: *V=(0,4)*. Com isso, sabemos que o eixo de simetria é o próprio eixo *Y*. Como $A=-1 < 0$ a parábola tem concavidade para baixo. Com essas informações podemos traçar um esboço da parábola ■

Exemplo 6.3.7. Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 + 1$.

Solução: Aplicando a Eq. (3.3) com $A=1;\ B=0$ e $C=1$ obtemos discriminante negativo, portanto as raízes não são reais. Temos outras informações para fazer um esboço do gráfico:

Usando as Eqs. (3.11) e (3.13) encontramos o vértice: *V=(0,1)*. Com isso, sabemos que o eixo de simetria é o próprio eixo *Y*. A parábola intersecta *Y* em (*0,1*).

Como $A=1 > 0$ a parábola tem concavidade para cima. Usaremos os pontos $(1{,}2)$ e $(-1{,}2)$ apenas para ter uma ideia da concavidade. Com essas informações podemos traçar um esboço da parábola■



6.3.5 Parábolas com eixo de simetria paralelos a X

As parábolas com eixo de simetria paralelos a X **NÃO SÃO FUNÇÕES**, pois para cada x temos dois valores de y.

As expressões das parábolas com eixo de simetria paralelos a X são obtidas trocando as variáveis x e y na Eq. (2.3):

$$x = Ay^2 + By + C \quad . \qquad (3.14)$$

Se na Eq. (3.14) $B = 0$, a parábola tem o eixo de simetria sobre o eixo X e sua equação é

$$x = Ay^2 + C \ \text{ ou } y = \pm\sqrt{\frac{x-C}{A}} \qquad (3.15)$$

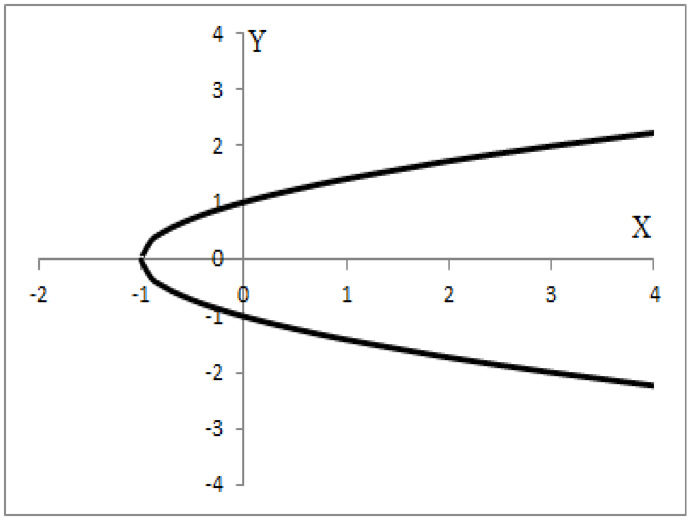
Se na Eq. (3.14) $B = 0$ e $C = 0$ a parábola tem o eixo de simetria sobre o eixo X, o vértice na origem e sua equação é

$$x = Ay^2 \text{ ou } y = \pm\sqrt{\frac{x}{A}} \qquad (3.16)$$

Exemplo 6.3.8. Faça um esboço do gráfico da parábola $x = y^2 - 1$.

Solução: Observe que para $y = \pm 2$, obtém-se o mesmo valor de $x = 3$. Portanto esta parábola não é uma função.

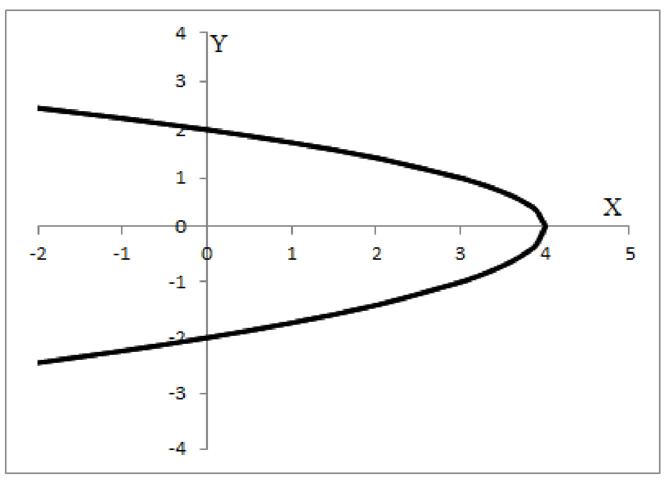
Usando as informações sobre raízes e vértices, temos:



Raízes: $y_1 = 1$ e $y_2 = -1$ e vértice: $V=(0,-1)$. Como $A=1 > 0$ a concavidade é para a direita ■

Exemplo 6.3.9. Faça um esboço do gráfico da parábola $x = - y^2 + 4$.

Solução: Usando as informações sobre raízes e vértices, temos:



Raízes: $y_1 = 2$ e $y_2 = -2$ e vértice: $V=(0,4)$. Como $A=-1 < 0$ a concavidade é para a esquerda ■

6.4 Sinal da função do 2º grau

Lembremos que o sinal da função $y=f(x)$ é o sinal da variável y em cada ponto. As raízes e a concavidade das parábolas são os elementos necessários para determinar o sinal da função.

Seja $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, vamos analisar três casos:

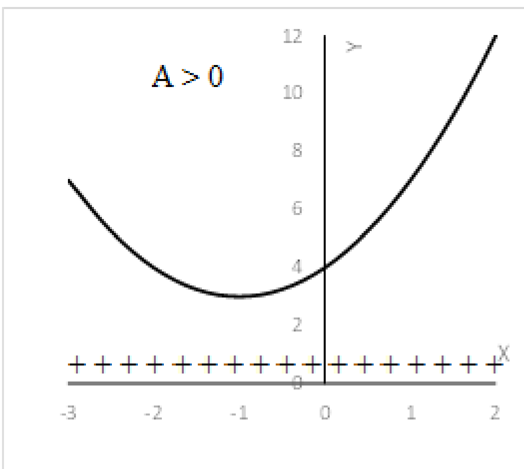
Caso 1: ***f(x)* não tem raízes reais**.

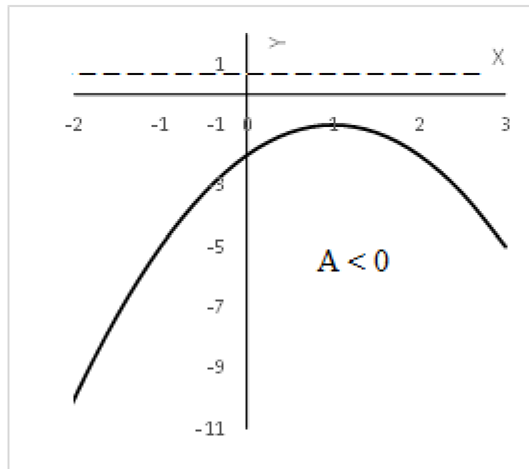
Então $f(x)$ não intercepta o eixo X.

Nesse caso, $\Delta = B^2 - 4AC < 0$ e:

Se $A > 0$, $f(x)$ é POSITIVA para qualquer x ;

Se $A < 0$, $f(x)$ é NEGATIVA para qualquer x ;





Caso 2: ***f(x)* tem raízes reais idênticas**. ($x_1 = x_2$)

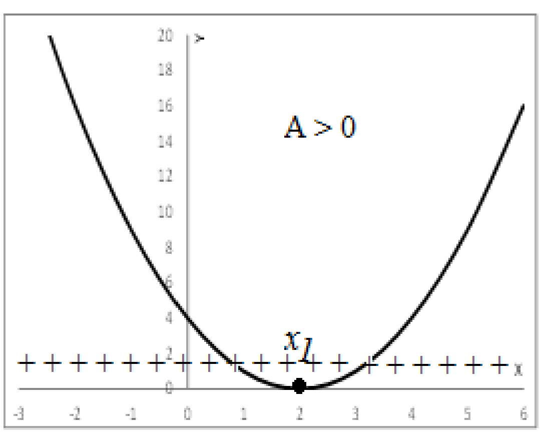
Então $f(x)$ tangencia o eixo X em um ponto: (x_1 , 0)

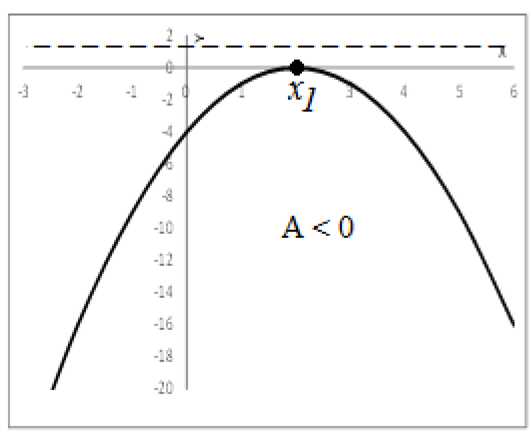
Nesse caso, $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ e:

Se $A > 0$, $f(x)$ é POSITIVA para qualquer x , / $x \neq x_1$;

Se $A < 0$, $f(x)$ é NEGATIVA para qualquer x , / $x \neq x_1$ e

Para $x \neq x_1$ $f(x) = 0$.





Caso 3: ***f(x)* tem raízes reais distintas**. $(x_1 \neq x_2)$

Então *f(x)* intersecta o eixo *X* em dois pontos: $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$.

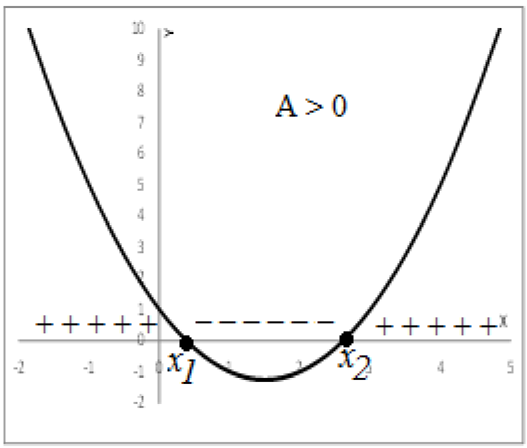
Nesse caso, $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ e:

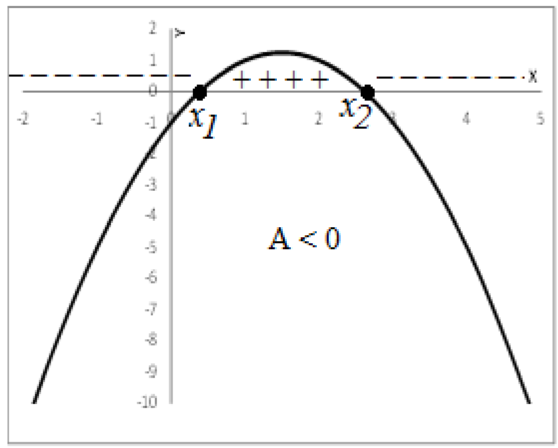
Se $A > 0$, *f(x)* é POSITIVA para qualquer x, / $x < x_1$ ou $x > x_2$ e

f(x) é NEGATIVA para qualquer x, / $x_1 < x < x_2$.

Se $A < 0$, *f(x)* é POSITIVA para qualquer x, / $x_1 < x < x_2$ e

f(x) é NEGATIVA para qualquer x, $x < x_1$ ou $x > x_2$.

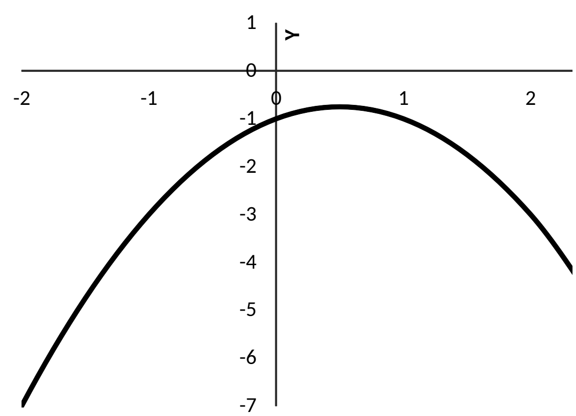




Exemplo 6.4.1. Determine os sinais e faça um esboço do gráfico da função

$f(x) = -x^2 + x - 1$.

Solução: O discriminante $\Delta = -3 < 0$ e o $A = -1 < 0$. Portanto, trata-se do Caso 1: *f(x)* é NEGATIVA para qualquer x real■

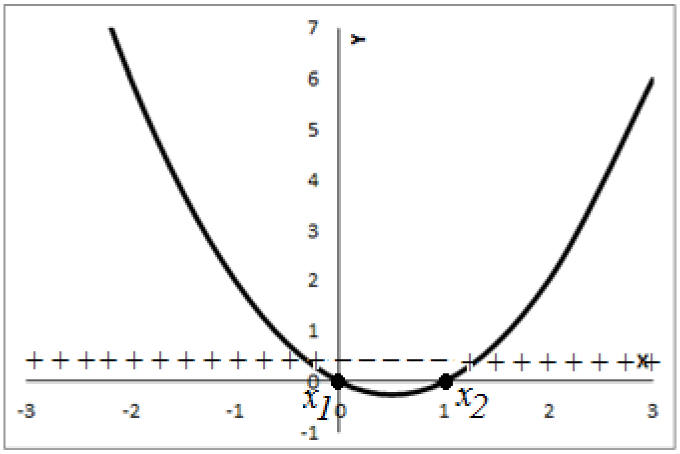


Exemplo 6.4.2. Determine os sinais e faça um esboço do gráfico da função

$f(x) = x^2 - x$.

Solução: O discriminante Δ = *1> 0*. As raízes são $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ então trata-se do Caso 3. Como *A = 1 > 0*,, tem-se:

f(x) será POSITIVA se *x < 0* ou *x > 1* e NEGATIVA se *0 < x < 1*■



6.5 Pontos de máximo e de mínimo

O vértice (*V*) é um ponto de máximo ou de mínimo das parábolas.
Se *A > 0* então *V* é de **mínimo**,
Se *A < 0* então *V* é de **máximo**.

Exemplo 6.5.1. Encontre o ponto de máximo da função: *f(x) = -x² - 4x +8*.

Solução: Para determinar as coordenadas do vértice usamos as Eqs. 3.11 e 3.13:

$x_v = \frac{-(-4)}{2(-1)} = -2$ e $y_v = -\frac{(-4)^2-4(-1)(8)}{4(-1)} = 12.$

O maior valor (ponto máximo) de *f(x)* ocorre em *x = -2* e é *y = 12* ■

Exemplo 6.5.2. Em um experimento de cultivo de beterraba foram obtidos os dados da tabela para (*x*) número de mudas/m^2 e (*P*) produtividade (*kg/m²*).

x, nº de mudas/m^2 *(unid)*	20	50
P, produtividade (kg/ m^2)	0,8	0,6

É razoável considerar que para nenhuma muda plantada (*x=0*) a produtividade é nula (*P=0*).

a) Determine uma função do segundo grau para descrever a relação entre *P* e *x*.

b) Calcule o número de mudas que levaria a produtividade máxima.

Solução: a) O coeficiente *C* de $P(x)= Ax^2 + Bx + C$ é zero, pois a parábola intersecta em *P = 0*.

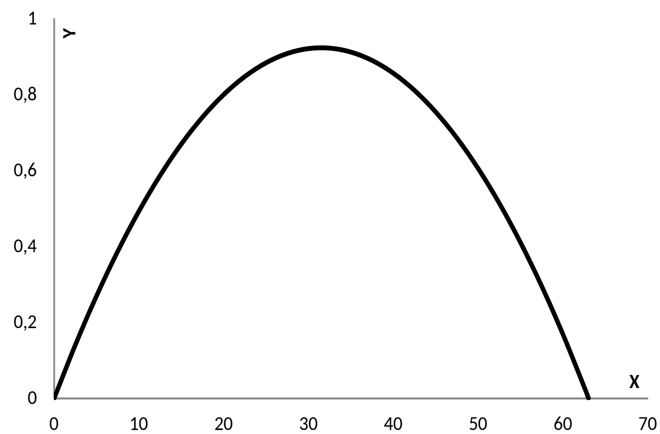
Substituindo os valores de x e P na equação $P(x) = Ax^2 + Bx$ obtemos um sistema de duas equações com duas variáveis, A e B:

$0{,}8 = 400A + 20B$

$0{,}6 = 2500A + 50B$

Resolvendo o sistema obtemos: $A = -0{,}00093$ e $B = 0{,}0586$.

A função produtividade é: $P(x) = -0{,}00093\,x^2 + 0{,}0586x$.



b) A produtividade máxima será no vértice de $P(x)$. Usando as Eqs. (3.11) e (3.13) obtemos : $x_v = 31{,}42$ *mudas/m*^{2} e $P_v = 0.92$ *kg* ■

6.6 Aplicações das funções quadráticas

As funções quadráticas são utilizadas em alguns fenômenos físicos e em como função de ajuste em problemas de otimização. Vamos analisar alguns desses casos.

6.6.1 Queda livre

O movimento vertical de uma pedra, tanto de subida como de descida, desconsiderando a presença do ar, pode ser modelado por uma função quadrática.

$$y(t) = y_o + v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (6.1)$$

onde *y(t) é a posição no eixo Y vertical, apontando para cima (m),*

y_o *é a posição inicial (m),*

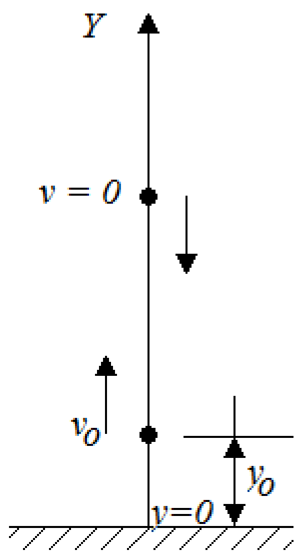
v_o *é a velocidade inicial (m/s),*

g é a aceleração da gravidade (m/s^{2}*) e*

t é o tempo (s).

A velocidade da pedra em cada instante, é dada por uma função de 1º grau:

$$v(t) = v_o - gt \qquad (6.2)$$

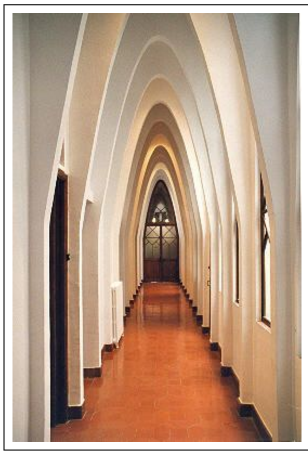


Consideremos que $y = 0$ *corresponde ao nível do chão. Se uma pedra é jogada para cima por uma pessoa em pé, a posição de saída é* y_o *e como a pedra está recebendo um impulso, a velocidade inicial é vo , diferente de zero, e com sina*

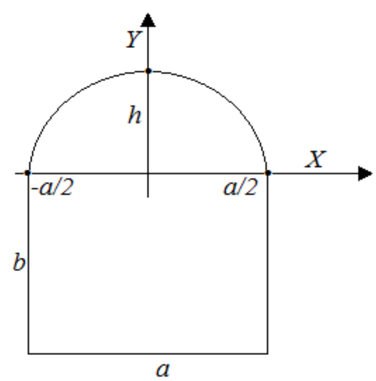
1. Considere y_o = *1 m;* v_o=*+5 m/s* e *g= 10* m/s^2 e faça um gráfico de *y(t)* .
2. Determine a altura máxima que a pedra alcançará e o tempo correspondente a esta posição, usando o que você conhece sobre vértice de parábolas.
3. A velocidade da pedra na posição de altura máxima é zero. Use a Eq. (6.2) para calcular o tempo que a pedra levará para atingir a altura máxima. Compare o resultado com o item (b).
4. Analise o sinal da velocidade em função do tempo.
5. Calcule o tempo que a pedra levará para atingir o chão.
6. Calcule a velocidade da pedra ao atingir o chão.

6.6.2 Arcos parabólicos em construções

Os arcos parabólicos são utilizados em construções, principalmente em portas, janelas, pontes e aquedutos. Consegue-se maior resistência em estruturas na forma de arcos, para grandes vãos, do que com vigas retas.

Consideremos a construção de uma janela composta por um retângulo e uma parábola na parte superior, conforme mostra a figura.



Podemos determinar uma equação de 2º grau para modelar o arco. Sejam $x_1 = a/2$ e $x_2 = -a/2$ as raízes da parábola.

Reescrevendo a Eq. (3.5) multiplicada por A (coeficiente de x^2, na Eq. 2.3), temos:

$$F(x) = A(x - x_1)(x - x_2) \qquad (6.3)$$

Substituindo as raízes na Eq.(6.3) temos

$$F(x) = A\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x + \frac{a}{2}\right) = A\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right) \quad . \qquad (6.4)$$

Substituindo as coordenadas do vértice $V=(0,h)$ na Eq. (6.4), temos

$$h = -A\frac{a^2}{4} \quad .$$

Então $A = -\frac{4h}{a^2} \quad .$

Substituindo esta expressão de A na Eq. (6.4), temos

$$F(x) = \frac{h}{a^2}\left(a^2 - 4x^2\right) \quad .$$

a) Considerando $a = 1{,}6\ m$ e $h = 0{,}6\ m$, determine a função $F(x)$.

b) Use a função $F(x)$ para determinar ao menos cinco pontos para $0 < x < a/2$, que poderiam ser utilizados para fazer a forma de madeira, sobre a qual são assentados os tijolos.

6.6.3 Problemas de otimização (dados de experimentos)

Em experimentos de cultivos de espécies é comum obter-se dados de (P) produtividade por outra variável (x) tal como o número de mudas, a quantidade de um fertilizante ou de água. Neste tipo de problema, o objetivo é determinar o valor de x que **maximiza** a produtividade.

Se o número de dados disponíveis é de apenas três pontos, existe uma única parábola que passa por eles. Para determinar a parábola, podemos substituir os valores (x_i, P_i) na função de 2º grau

$$P(x) = Ax^2 + Bx + C\ . \tag{6.5}$$

x	x_1	x_2	x_3
P	P_1	P_2	P_3

Obtemos um sistema linear de três equações e três incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{l} P_1 = Ax_1^2 + Bx_1 + C \\ P_2 = Ax_2^2 + Bx_2 + C \\ P_3 = Ax_3^2 + Bx_3 + C \end{array}\right\} \tag{6.6}$$

A solução do sistema Eq. (6.6) pode ser obtida pelo Método de Cramer (determinantes). A matriz dos coeficientes e a dos termos independentes são:

$$M = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Por este método, são construídas três matrizes, substituindo o vetor b em cada coluna da matriz A.

$$M_1 = \begin{bmatrix} P_1 & x_1 & 1 \\ P_2 & x_2 & 1 \\ P_3 & x_3 & 1 \end{bmatrix} ;\ M_2 = \begin{bmatrix} x_1^2 & P_1 & 1 \\ x_2^2 & P_2 & 1 \\ x_3^2 & P_3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } M_3 = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & P_1 \\ x_2^2 & x_2 & P_2 \\ x_3^2 & x_3 & P_3 \end{bmatrix}$$

Os determinantes das matrizes M, M_1, M_2 e M_3 são obtidos pela Regra de Sarrus e a solução pelas razões:

$$A = \frac{det(M_1)}{det(M)},\ B = \frac{det(M_2)}{det(M)} \text{ e } C = \frac{det(M_3)}{det(M)}\ .$$

Levando os valores de A, B e C na Eq. (6.5) obtém-se a função que passa nos três pontos dados.

O cálculo de x que corresponde à maior produtividade é o cálculo das coordenadas do vértice da parábola.

Os dados da tabela abaixo são de um experimento com beterraba.

x, nº de mudas/m^2 *(unid)*	20	30	50
P, produtividade (kg/ m^2)	0,8	1,2	0,6

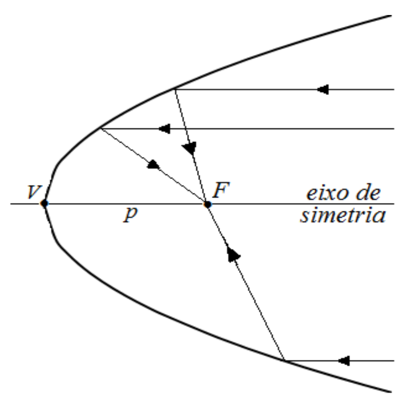
a) Determine uma função do segundo grau para descrever a relação entre P e x.

b) Calcule o número de mudas que levaria a produtividade máxima.

6.6.4 Antena parabólica

Consideremos uma parábola. Se a girarmos em torno de seu eixo, obteremos uma superfície chamada paraboloide de revolução. Uma antena parabólica é um paraboloide de revolução. Porque as antenas têm esta forma geométrica?

As parábolas têm um ponto característico chamado *foco com a seguinte propriedade: toda reta paralela ao eixo, reflete passando pelo foco. No caso das antenas, as radiações eletromagnéticas vindas do espaço em múltiplas direções. Aquelas que são paralelas ao eixo de simetria da antena, são concentradas no foco, onde está o captador e assim o sinal é concentrado, melhorando a qualidade da recepção.*



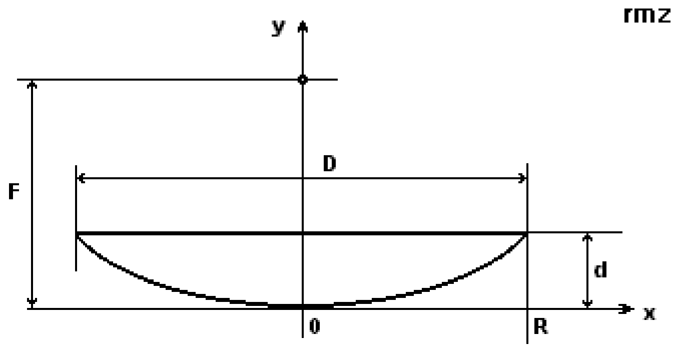
A equação canônica de uma parábola com eixo de simetria horizontal é

$$y^2 = 4Fx, \qquad (6.7)$$

onde *F é a distância do vértice ao foco. Com essas informações, podemos construir parábolas com o foco conhecido. Por exemplo, se F = 0,5 m, podemos encontrar os pontos da parábola, atribuindo valores de x e calculando os de y, através da Eq. (6.7).*

$$y = \pm\sqrt{2x}. \qquad (6.8)$$

Assim, para *x = 0,6 cm (diâmetro de 1,2 m) teremos y = 1,095m (altura* ***d* na figura).**



a) Calcule a posição F do foco, se $d = 0{,}8m$ e o diâmetro da antena é $1\ m$.

b) Meça o diâmetro e a altura **d** de uma antena parabólica real e calcule o foco F. Verifique se esta localização coincide com a posição do coletor de radiação eletromagnética do equipamento.

6.7 Exercícios

6.1 Considere que o lado de um quadrado é expresso pela variável x.

a) Escreva a função que expressa a área *A do quadrado em função do lado x.*

b) Faça uma tabela com valores de *x e A*.

c) Faça um gráfico da função $A(x)$.

d) A dependência entre *A e x é linear ?*

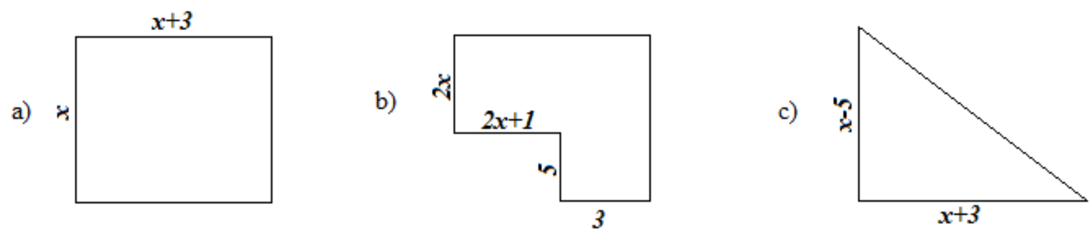
6.2 Considere que o lado de um quadrado é expresso pela função $x+1$.

a) Escreva a função que expressa a área *A do quadrado em função da variável x.*

b) Faça um gráfico da função *A(x) e compare com o gráfico do Ex. 1.*

6.3 Nos Exs. 1 e 2 a função área $A(x)$ tem sentido para $x \leq 0$?

6.4 Determine a função que expressa a área de cada figura.



6.5 Nas funções abaixo: calcule as raízes, identifique os pontos de intersecção com os eixos coordenados, calcule o vértice e faça o gráfico:

a) $f(x) = x^2 - 1$

b) f(x) = $x^2 - 2x - 3$

c) $f(x) = -x^2 - x + 6$

d) $f(x) = x^2 + 2x - 8$

6.6 Identifique os intervalos em que cada função do Ex. 5, é positiva ou negativa. (Faça um desenho do eixo X indicando o sinal da função).

6.7 A área de um círculo é dada pela fórmula: $A = \pi\ r^2$, onde r é o raio. Faça um gráfico da função $A(r)$, para $r < 4\ cm$.

6.8 O deslocamento de uma pedra em queda livre (sem o atrito do ar e influência do vento) é dato pela fórmula: $y(t) = y_o + v_o t - 0{,}5gt^2$, onde y é a posição no eixo Y vertical, apontando para baixo, y_o é a posição inicial (m), v_o é a velocidade inicial (m/s), g é a aceleração da gravidade (m/s^2) e t é o tempo (s).

6.a) Escreva a função $y(t)$ sabendo que: $y_o = 1\ m;\ v_o = 10\ m/s$ e $g = 9{,}8\ m/s^2$.

6.b) Faça um gráfico de $y(t)$

6.c) Calcule o tempo para que a pedra atinja a altura máxima

6.d) Calcule a altura máxima

6.e) Calcule o tempo para que a pedra atinja o chão.

6.9 Escreva uma função de 2º grau cujas raízes são:

a) $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$

c) $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$

b) $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$

d) $x_1 = -3$ e $x_2 = 2$

6.10 Faça um esboço do gráfico das funções do 2o grau usando as informações disponíveis.

a) As raízes são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$; o vértice é $V = (2, -2)$

b) As raízes são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$; o vértice é $V = (2, 2)$

c) As raízes são $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$; e a função intersecta Y em $(0, 1)$

d) A função intercecta X em $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$; e o vértice é $V = (1, -2)$

6.11 Escreva a função de 2º grau usando as seguintes informações:

a) O x do vértice é 1; a função intercecta Y na origem; $A = -1$

b) As raízes são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$ e a função intersecta Y em $(0, 3)$

c) As raízes são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$ e a função intersecta Y em $(0, 6)$

d) As raízes são $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$ e a função intersecta Y em $(0, 5)$

6.12 Faça um esboço do gráfico das parábolas:

a) $y^2 = x+5$ c) $y^2 = -x+2$ e) $y = \sqrt{x-2}$ g) $x = y^2 - y - 2$

b) $y^2 = 3x-1$ d) $y = \pm\sqrt{x-3}$ f) $y = -\sqrt{x-2}$ h) $x = -y^2 + y + 2$

6.13 Uma porta de casa colonial tem a forma de uma parábola com a concavidade para baixo. A altura máxima, no eixo central da porta, tem *2,50 m* e a base *2 m*. Para marcar o contorno da porta os pedreiros precisam alguns pontos (*x,y*) para fazer a forma e assentar os tijolos, formando o arco parabólico.

a) Determine a equação da parábola que satisfaz as medidas da porta.

b) Faça uma tabela com valores de *x e y para, ao menos, cinco pontos da parábola.*

c) Faça o gráfico da parábola e indique a posição dos pontos do item (b).

6.14 Considere uma janela na forma de um quadrado com um semicírculo sobre ele. Encontre as dimensões da janela se a área total do quadrado e do semicírculo é *60,96*m^2.

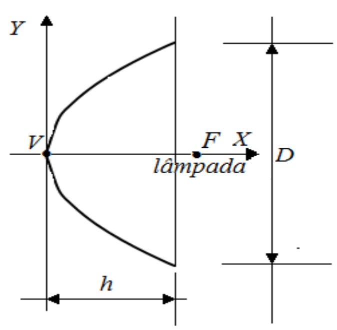
6.15 Em um experimento de cultivo de cenouras foi obtida uma função que relaciona a quantidade de adubo orgânico de galinha (*x, kg*) com a produtividade (*P*, *kg/*m^2):

P(x) = -2,13 x^2 *+ 5,2 x -0,066.*

a) Determine a quantidade de adubo para a maior produtividade

b) Faça o gráfico de *P(x)* indicando o ponto de maior produtividade.

6.16 Um refletor parabólico (paraboloide de revolução) tem uma lâmpada localizada no foco *F = 5 cm*, com a luz direcionada para o arco parabólico, como indica a figura. Qual deve ser o diâmetro *D* para que a profundidade do arco seja *h = 5 cm* ? (Veja a aplicação 6.4)



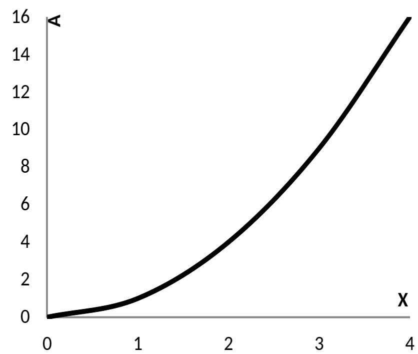
6.8 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

6.1 a) $A = x^2$

b)

X	A
0	0
1	1
2	4
3	9

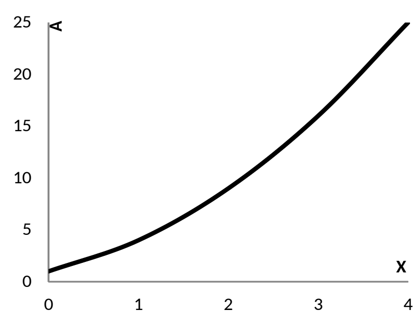
c)



d) Não, a dependência entre A e x é de 2º Grau.

6.2 a) $A = x^2 + 2x + 1$

b)



6.3 No Ex. 1.1 $A(x) = x^2 > 0$ para qualquer x, se $x < 0$ não existe quadrado. Analogamente, no Ex1.2. para x > -1.

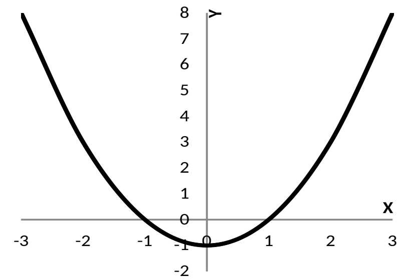
6.4 a) $A = x^2 + 3x$

b) $A = 4x^2 + 8x + 15$

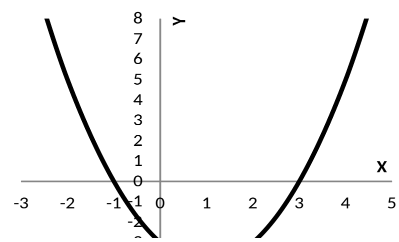
c) $A = \frac{x^2 - 2x - 15}{2}$

6.5

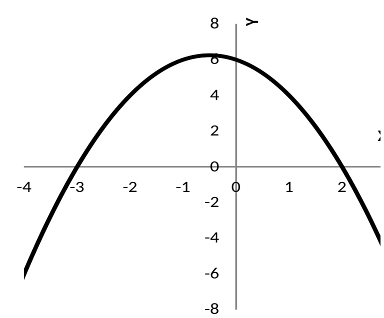
a) Raízes: x_1=-1; x_2=1. Intersecção com Y em (0,-1); Intersecção com X em (-1,0) e (1,0); V=(0,-1)



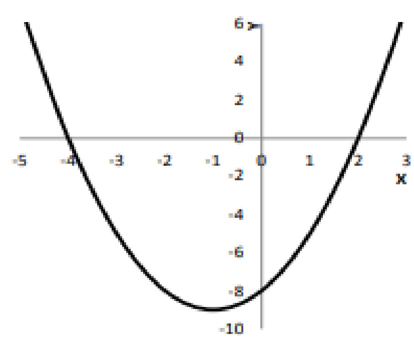
b) Raízes: x_1=-1; x_2=3. Intersecção com Y em (0,-3); Intersecção com X em (-1,0) e (3,0); V=(1,-4)



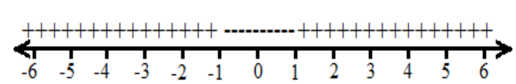
c) Raízes: x_1=-3; x_2=2. Intersecção com Y em (0,6); Intersecção com X em (-3,0) e (2,0); V=(-1/2,25/4)



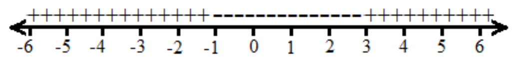
d) Raízes: x_1=-4; x_2=2. Intersecção com Y em (0,-8); Intersecção com X em (-4,0) e (2,0); V=(-1,-9).



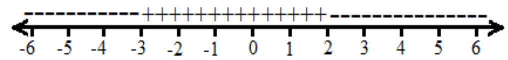
6.6 a) Positiva $x < -1$ ou $x > 1$; Negativa $-1 < x < 1$



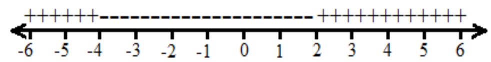
b) Positiva *x<-1* ou *x>3;* Negativa -1 < *x<3*



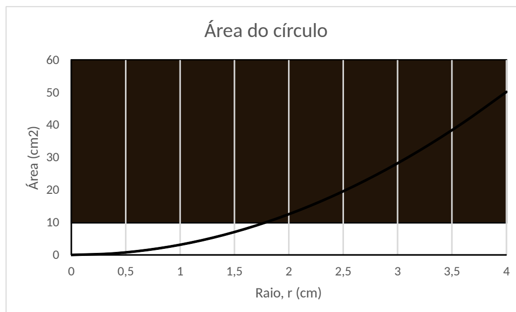
c) Positiva *-3 < x<2;* Negativa *x<-3* ou *x>2*



d) Positiva *x<-4* ou *x>2*; Negativa *-4 < x <2*

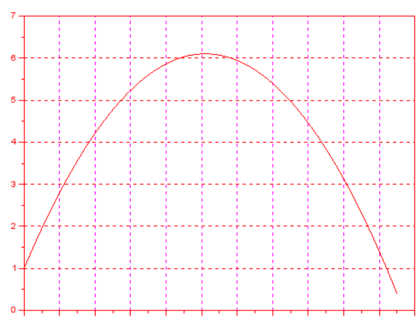


6.7



6.8 a) 1+10t-4.9t^2

b)



c) t=1,02 s

d) ymáx = 6,102 m

e) t = 2,14 s.

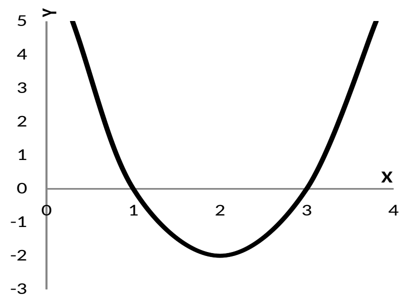
6.9 a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

b) $g(x) = x^2 - 7x + 12$

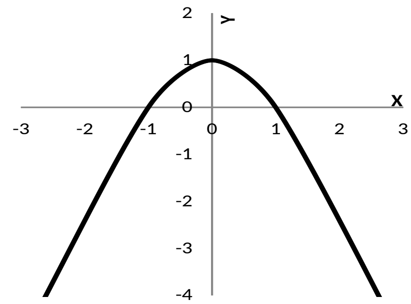
c $h(x) = x^2 + x - 2$

d) $i(x) = x^2 + x - 6$

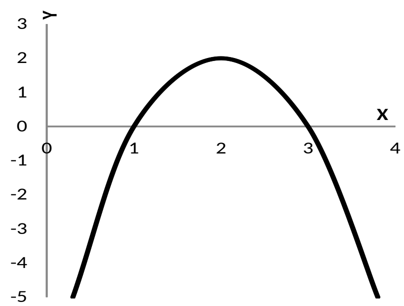
6.10



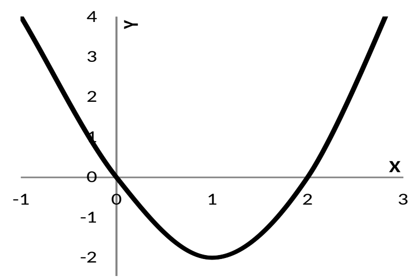
(a)



(c)



(b)



(d)

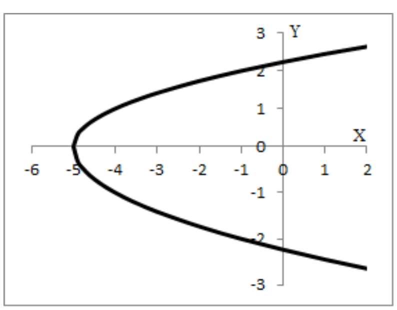
6.11 a) $f(x) = -x^2 + 2x$

b) $g(x) = x^2 - 4x + 3$

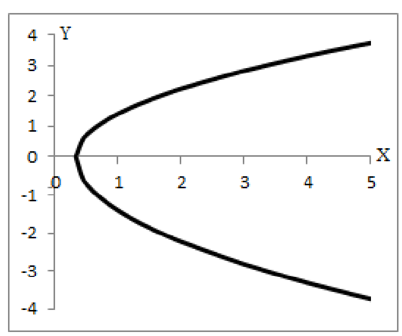
b) $h(x) = 2x^2 - 8x + 6$

c) $i(x) = -\frac{5}{4}x^2 + 5$

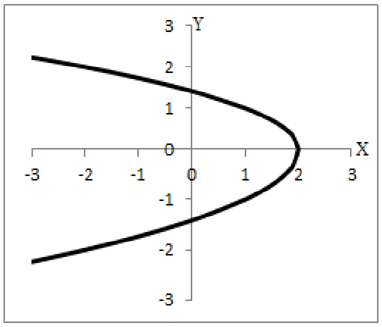
6.12



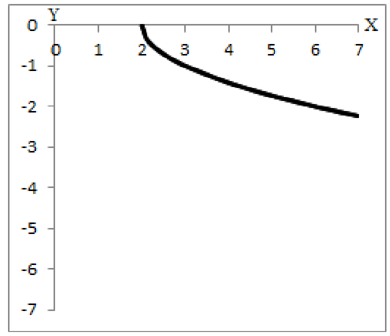
(a)



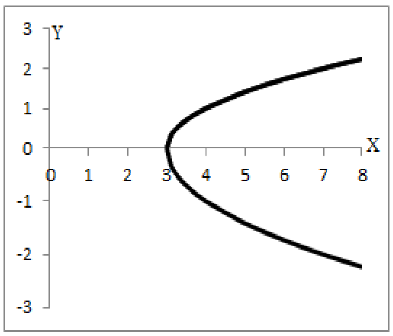
(b)



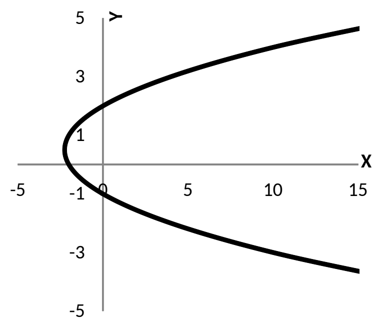
(c)



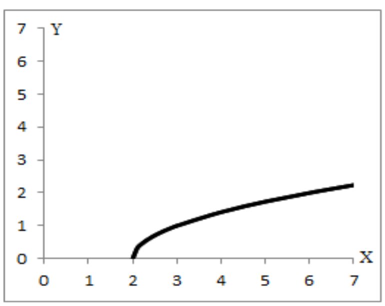
(f)



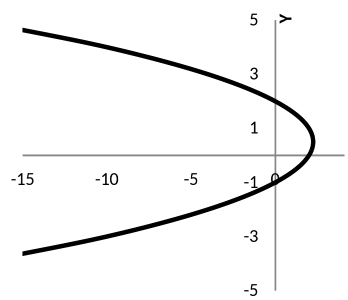
(d)



(g)



(e)



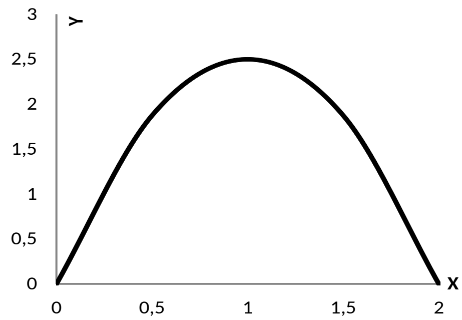
(h)

6.13 a) $f(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 5x$

b)

x	y
0	0
1/2	1,875
1	2,5
3/2	1,875
1	0

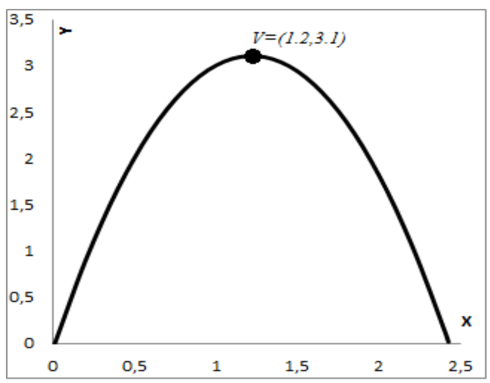
c)



6.14 Lado do quadrado = 6,6159 m e raio do semicírculo = 3,3079 m.

6.15 a) x = *1,22* e $P_{máx}$ = *3,107*.

b)



6.16 $D = 20cm$.

Capítulo 7

Inequações

7.1 Introdução

As soluções de equações polinomiais têm um número finito de soluções. As de 1º Grau têm uma, as de 2º Grau podem ter até duas, e assim por diante. Outros problemas podem ter infinitas soluções:

Observe os seguintes exemplos:

Exemplo 7.1.1. Quantos alunos na sua turma têm mais de *20 anos?*

Solução: evidentemente a solução depende da idade dos alunos da turma. Porém, podemos afirmar que podem ocorrer diferentes tipos de soluções:

1. Nenhum aluno tem mais de 20 anos. Se x é o número de alunos com mais de *20* anos, a solução é $S = \{\ \}$.

2. Existe um número finito de alunos com mais de 20 anos. Nesse caso, S = { x/ x > 0} ■

Exemplo 7.1.2. Existe algum número real cujo dobro mais cinco seja maior do que zero? Quantos? Quais ?

Solução: Seja *x o número procurado. Podemos escrever* "*dobro de x mais cinco seja maior do que zero*" *em linguagem matemática:*

$2x + 5 > 0.$

Não é difícil verificar que existem infinitos *x reais que satisfazem esta desigualdade: -1, 0 ,* $\frac{1}{2}$*, 1 , 2, 3, ...*

Observe (fazendo testes particulares) que se $x = -5/2$, *temos* $2x + 5 = 0$ *e que*

se $x < -5/2$ *temos* $2x + 5 < 0$ *e que*

se $x > -5/2$ *temos* $2x + 5 > 0$.

Assim, podemos concluir que $S = \{ x / x > -5/2\}$ ■

Neste capítulo vamos aprender operar com desigualdades e resolver com segurança problemas semelhantes ao Ex.1.2.

7.2 Inequações: definição e propriedades

Definição 7.2.1. Uma inequação é uma desigualdade de duas expressões matemáticas.

Exemplos:

a) $-x+5 > x-\frac{1}{3}$

b) $x^2+2 \leq 1$

c) $\frac{x}{2}+\frac{x-1}{3} \geq 3$ ■

A desigualdade numérica $2 < 3$ é verdadeira. Observe as seguintes operações:

1. Adicionando 10 em ambos os lados da desigualdade, temos:
   2 + 10 < 3 + 10
   12 < 13. A nova desigualdade permanece verdadeira.
2. Adicionando -10 em ambos os lados da desigualdade, temos:
   2 + (-10) < 3 +(-10)
   -8 < -7. A nova desigualdade permanece verdadeira.
3. Multiplicando 10 em ambos os lados da desigualdade, temos:
   2 · 10 < 3 · 10
   20 < 30. A nova desigualdade permanece verdadeira.
4. Multiplicando -10 em ambos os lados da desigualdade, temos:

2 · (-10) < 3 · (-10)

-20 < -30. A nova desigualdade NÃO PERMANECE VERDADEIRA!

Observe que, com exceção do produto por número negativo, opera-se com as inequações de forma semelhante às equações. Veja a seguir as propriedades das inequações.

Propriedades das inequações:

Sejam *u, v e w números reais ou variáveis e c um número real.*

1. **Transitiva:** Se $u < v$ e $v < w$ então $u < w$. Ou Se $u > v$ *e* $v > w$ *então* $u > w$.
2. **Adição:** Se $u < v$, então $u \pm w < v \pm w$. Ou Se $u > v$, *então* $u \pm w > v \pm w$.
3. **Multiplicação**: Se $u < v$ e $c > 0$ então $u \cdot c < v \cdot c$. Se $u < v$ e $\boldsymbol{c < 0}$ ***então*** $\boldsymbol{u \cdot c > v \cdot c}$.

Exemplo 7.2.1. Dada a desigualdade *5 > 3, verifique se as desigualdades permanecem verdadeiras após a operação proposta:*

1. Adicionar +4 em ambos os lados.
2. Adicionar - 4 em ambos os lados.
3. Multiplicar por (+2) em ambos os lados.
4. Multiplicar por (-2) em ambos os lados.

Solução:

1. *5+4 > 3+4*

   9 > 7 . A desigualdade permanece verdadeira. (Propriedade da adição)
2. *5 - 4 > 3 - 4*

   1 > -1 . A desigualdade permanece verdadeira. (Propriedade da adição)
3. *5 · (+2) > 3 · (+2)*

   10 > 6 . A desigualdade permanece verdadeira. (Propriedade da Multiplicação por um número positivo)
4. *5 · (-2) > 3 · (-2)*

-10 > -6 . A desigualdade NÃO permanece verdadeira.

Nesse caso, para que a igualdade fique verdadeira é necessário **INVERTER A DESIGUALDADE: (Propriedade da Multiplicação por um número NEGATIVO):**

-10 < -6 ■

As propriedades das desigualdades são usadas para resolver inequações, como veremos nos próximos itens.

EXERCÍCIOS 7.2

7.2.1 Dada a desigualdade 1 < 2 (que é verdadeira):

(a) Adicionando -5 em ambos os lados, a desigualdade permanece verdadeira?

(b) Multiplicando ambos os lados por (+5), a desigualdade permanece verdadeira?

(c) Multiplicando ambos os lados por (-5), a desigualdade permanece verdadeira?

7.2.2 Sejam M, N e P três números reais.

(a) Se M > N e N > P , o que se pode afirmar sobre M e P ?

(b) Se M < N e N < P , o que se pode afirmar sobre M e P ?

7.2.3 Compare as propriedades das equações com as das inequações. Em que operação elas se diferenciam?

7.2.4 Dada a inequação $3x + 4 < 0$. A inequação é verdadeira para:

a) $x = 1$?

b) $x = -2$?

c) $x = -4/3$?

d) $x = -3$?

7.2.5 Dada a inequação $-x+2 \geq 0$. A inequação é verdadeira para:

a) $x = 1$?

b) $x = 2$?

c) $x = 3$?

d) $x = -3$?

7.2.6 Use as propriedades da adição e multiplicação para que o lado direito das inequações torne-se nulo:

a) $x + 2 > -x +3$

b) $2 + 3x < 4x +1$

c) $\frac{1}{2} + 2x \geq \frac{4}{3}$

d) $\frac{3}{4}x - \frac{2}{3} \leq 2$

7.2.7 Use as propriedades da adição e multiplicação para isolar x do lado esquerdo da inequação:

a) $3x - 8 < x + 4$

b) $2x - 12 < 4x + 6$

c) $3 + \frac{1}{2}x \geq 5x$

d) $\frac{x+1}{4} \leq \frac{x-1}{2}$

7.2.8 Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras. Justifique sua resposta. Considere *a um número real.*

a) $a^2 > 0 => a > 0$

b) $a > 3 => a \geq 3$

c) $a3 > 0 => a > 0$

d) $a \geq 3 => a > 3$

7.3 Inequações de 1º Grau

Definição 7.3.1. Uma inequação do primeiro grau é uma desigualdade de expressões algébricas que pode ser reduzida à forma *ax + b < 0* , *para a* $\neq$ *0.*

OBSERVAÇÃO: Onde foi usado "<" ***pode ser também*** **">" , "$\leq$ "** ***ou*** **"$\geq$ " .**

Exemplo 7.3.1. Resolva a inequação *- x +5 < 3x - 4 para x R.*

Solução: Resolver uma inequação significa determinar os possíveis valores da incógnita (nesse caso *x) que satisfazem a desigualdade. Faremos isso de forma semelhante às equações, porém usando as propriedades das inequações.*

Para termos *x apenas do lado esquerdo, podemos adicionar (-3x) em ambos os lados da desigualdade (Propriedade da Adição):*

(-3x)- x +5 < (-3x)+3x - 4

-4x +5 < - 4.

Para termos apenas números no lado esquerdo, podemos adicionar (*-5) em ambos os lados da desigualdade (Propriedade da Adição):*

-4x +5 + (-5) < - 4+(-5).

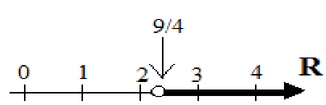
-4x < - 9.

Finalmente, para termos apenas *x no lado esquerdo, multiplicamos a inequação por (-1/4) e invertemos a desigualdade, pois -1/4 < 0. (Propriedade da multiplicação)*

$$-4x\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) > -9\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$$

x > 9/4 . Portanto, S=$\{$ *x* $\in$ ***R / x > 9/4*** $\}$ **.**

Representando a solução na reta real, temos:



Exemplo 7.3.2. Resolva a inequação $\frac{x}{2} \geq \frac{3x+1}{3}$ *para x R.*

Solução: Para evitar trabalhar com denominadores, multiplicamos a inequação por (*6). (Propriedade da multiplicação)*

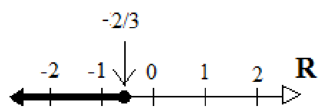
$$6\cdot\frac{x}{2} \geq \frac{3x+1}{3}\cdot 6$$

3x ≥ 6x + 2 . Adicionamos (-6x) (Propriedade da Adição)

-3x ≥ 2 . Dividimos por (-3) (Propriedade da Multiplicação por número negativ2o)

$x \leq -\frac{2}{3}$. Portanto, $S=\{ x \in \boldsymbol{R} / \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{-2/3} \}$ **.**

Representando a solução na reta real, temos:



■

Solução da inequação de primeiro grau com o lado direito nulo

A resolução de uma inequação do 1º Grau também pode ser obtida utilizando a redução à forma *ax + b < 0 , para a ≠ 0. O sinal da desigualdade pode ser também* “>” , “≤ ” *ou* “≥ ” *. Observemos que sempre é possível escrever essa forma com a > 0. Por exemplo,*

Se temos *-2x + 5 > 0 podemos multiplicar por (-1) obtendo, 2x - 5 < 0.*

Os seguintes passos levam à solução da inequação de 1º Grau:

1º) Passo: Encontrar a solução da equação correspondente *ax + b = 0 que é x = -b/a.*

2º) Passo: Verificar o sinal da desigualdade :

1. Se for “>” então a solução da inequação é: $S=\{ x \in \ \boldsymbol{R} / x > \ -b/a \}$
2. Se for “<” então a solução da inequação é: $S=\{ x \in \ \boldsymbol{R} / x < \ -b/a \}$
3. Se for “≤ ” então a solução da inequação é: $S=\{ x \in \ \boldsymbol{R} / x \leq \ -b/a \}$
4. Se for “≥ ” então a solução da inequação é: $S=\{ x \in \ \boldsymbol{R} / x \geq \ -b/a \}$

Exemplo 7.3.3. Resolva a inequação $\frac{x}{2} \geq \frac{3x+1}{3}$ *para x R reduzindo a inequação à forma ax + b ≤ 0.*

Solução: Multiplicando a inequação por (*6) e adicionado (-6x), obtemos (ver Ex. 3.2):*

3x ≥ 6x + 2 . Adicionando (-6x -2), obtemos

-3x -2 ≥ 0. Multiplicnado por (-1), obtemos

3x +2 ≤ 0. A inequação está na forma ax + b ≤ 0 com a > 0 .

1º) Passo: A solução da equação correspondente é *x = -2/3.*

2º) Passo: o sinal da inequação com *a > 0 é* “≤ ” *. Então a solução é (iii):*

$S=\{ x \in \boldsymbol{R} / \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{-2/3} \}$ ■

Exemplo 7.3.4. Resolva a dupla inequação $-\frac{3}{2} \leq \frac{x+1}{2} < 2$ *para x R.*

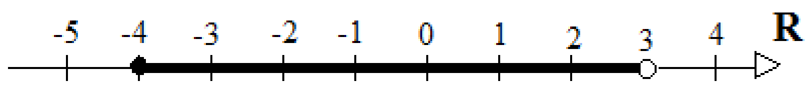
Solução: Usaremos as propriedades das inequações para isolar *x entre as desigualdades. Para evitar os denominadores, multiplicamos a dupla inequação por 2.*

- 3 $\leq$ x+1 < 4. Adicionando (-1) em cada membro, temos:

- 3 +(-1) $\leq$ x+1 +(-1) < 4+(-1)

*- 4 $\leq$ x < 3. Portanto, S=$\{$ x $\in$ **R / -4** $\leq$ **x < 3**$\}$.*

Representando a solução na reta real, temos:



EXERCÍCIOS 7.3

7.3.1 Resolva as inequações do primeiro grau usando as propriedades:

a) *2x - 1* $\leq$ *3x +3*

b) *2(5 - x) + 2(3x-1)* $\geq$ *2x + 1*

c) $\frac{5x+7}{4} \leq -2$

d) $\frac{2-x}{3} + \frac{3x-1}{2} < -1$

7.3.2 Represente as soluções do Exercício anterior na reta real.

7.3.3 Resolva as inequações de primeiro grau anulando o lado direito:

a) $\frac{x-2}{3} + \frac{x+2}{3} < 2$

b) $\frac{2x-1}{5} \leq \frac{x+3}{2} + 3x$

c) $\frac{1}{6} + \frac{x+1}{3} > \frac{2}{3}$

d) $\frac{3x+1}{3} \geq \frac{x-3}{4} - \frac{3x+1}{6}$

7.3.4 Resolva as inequações duplas de primeiro grau:

a) 2 $\leq$ *x + 6 < 9*

b) $4 \geq \frac{y-3}{5} \geq -1$

c) -1 $\leq$ *-3x + 2 < 5*

d) $-2 \leq \frac{2t+3}{3} \leq \frac{5}{4}$

7.3.5 Represente as soluções do Exercício anterior na reta real.

7.4 Inequações do 2º Grau

Definição 7.4.1. Uma inequação do segundo grau é uma desigualdade de expressões algébricas que pode ser reduzida à forma

$ax^2 + bx + c < 0$ para a $\neq 0$.

OBSERVAÇÃO: Onde foi usado "<" ***pode ser também*** **">" , "≤ "** ***ou*** **"≥ " .**

A resolução de uma inequação do 2º Grau pode ser obtida utilizando a redução à forma

$x^2 + bx + c < 0$. (Onde foi usado "<" pode ser também ">" , "≤ " ou "≥ ")

seguindo os seguintes passos:

1º) Passo: Encontrar as soluções reais (se existirem) da equação $ax^2 + bx + c = 0$, que chamaremos $x_1 e x_2$ e consideraremos x1 < x2.

2º) Passo: classificar as raízes:

1º) Caso: raízes não reais (nesse caso o discriminante b^2 ***- 4ac < 0)***

1. Se o sinal da desigualdade for "<" ou "≤ " , então S={ }
2. Se o sinal da desigualdade for ">" ou "≥ " , então S={ $x \in$ ***R***} .

2º) Caso: raízes reais idênticas: $x_1 = x_2$ ***(nesse caso o discriminante*** $b^2 - 4ac = 0$***)***

1. Se o sinal da desigualdade for "<" , então S={ }
2. Se o sinal da desigualdade for "≤ " , então S={ $x \in$ ***R*** / x = x_1 } .
3. Se o sinal da desigualdade for ">" , então S={ $x \in$ ***R*** / $x \neq x_1$ }
4. Se o sinal da desigualdade for "≥ " , então S={ $x \in$ ***R***}

3º) Caso: raízes reais distintas: $x_1 \neq x_2$ ***(nesse caso o discriminante*** $b^2 - 4ac > 0$***)***

1. Se o sinal da desigualdade for "<" , então S={ $x \in$ ***R*** / $x_1 < x < x_2$}
2. Se o sinal da desigualdade for "≤ " , então S={ $x \in$ ***R*** / $x_1 \leq x \leq x_2$}
3. Se o sinal da desigualdade for ">" , então S={ $x \in$ ***R*** / $x < x_1$ ou $x > x_2$ }
4. Se o sinal da desigualdade for "≥ " , então S={ $x \in$ ***R*** / $x \leq x_1$ ou $x \geq x_2$}

Exemplo 7.4.1. Resolva a inequação $x^2 + 2x \leq 2x2 + 3 parax \in R$.

Solução: Precisamos reduzir a inequação dada à forma $ax^2 + bx + c \leq$ ou ≥ 0. Para isso, adicionamos (-2x2 - 3) em ambos os lados e obtemos:

$-x^2 + 2x - 3 \leq 0$ **. Multiplicando por (-1), para que a > 0, temos:**

$x^2 - 2x + 3 \geq 0$. **(Observe que o sinal da desigualdade ficou** "$\geq$")

1º) Passo: A equação $x^2 - 2x + 3 = 0$ não tem raízes reais.

2º) Passo: como as raízes não são reais, temos o 1º Caso. Como o sinal da desigualdade é "$\geq$" , *temos a situação (ii). Então, a solução será:*

S=$\{ \in x$ ***R***$\}$. ***Ou seja, qualquer número real satisfas a inequação dada*** ■

Exemplo 7.4.2. Resolva a inequação $x^2 - x < x + 3$ para $x \in R$.

Solução: Precisamos reduzir a inequação dada à forma $ax^2 + bx + c <$ ou > 0. Para isso, adicionamos $(-x - 3)$ em ambos os lados e obtemos:

$x^2 - 2x - 3 < 0$.

1º) Passo: As raízes da equação $x^2 - 2x - 3 = 0$ são $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$.

2º) Passo: como as raízes são reais e distintas, temos o 3º Caso. Como o sinal da desigualdade é "<" , *temos a situação (i). Então, a solução está entre as raízes:*

S=$\{x \in R / -1 < x < 3\}$ ■

EXERCÍCIOS 7.4

7.4.1 Resolva as inequações de segundo grau para $x \in R$:

a) $x^2 - 4x < 0$

b) $x^2 - 4x + 3 > 0$

c) $x^2 + 6x + 9 < 0$

d) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$

e) $x^2 + 2x + 1 \geq 0$

f) $x^2 - 9 < 0$

g) $x^2 - 9 > 0$

h) $x^2 + 9 \leq 0$

i) $x^2 - 9 \geq 0$

7.4.2 Represente as soluções do Exercício anterior na reta real.

7.5 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESPOSTAS 7.2

7.2.1 a) Sim; b) Sim; c) Não

7.2.2 a) M > P; b) M < P

7.2.3 Na multiplicação de um número negativo por uma inequação deve-se inverter o sentido da desigualdade.

7.2.4 a) Não; b) Sim; c) Não; d) Sim

7.2.5 a) Sim; b) Sim; c) Não; d) Sim

7.2.6 a) 2x -1 > 0

b) -x +1 < 0

c) 2x - 5/6 $\geq$ 0

d) 9x -32 $\leq$ 0

7.2.7 a) $x < 6$

b) $x > -9$

c) $x \leq \frac{2}{3}$

d) $x \geq 3$

RESPOSTAS 7.3

7.3.1 a) S=$\{x \in R/x \geq -4\}$

b) S=$\{x \in R/x \geq -7/2\}$

c) S=$\{x \in R/x \leq 3\}$

d) S=$\{x \in R/x < -1\}$

7.3.3 a) $2x - 6 < 0$ e S=$\{x \in R/x < 3\}$

b) $31x + 17 \geq 0$ e S=$\{x \in R/x \geq -17/31\}$

c) $2x - 1 > 0$ e S=$\{x \in R/x > 1/2\}$

d) $x + 1 \geq 0$ e S=$\{x \in R/x \geq -1\}$

7.3.4 a) S=$\{x \in R/ -4 \leq x < 3\}$

b) S=$\{y \in R/17 \geq y \geq -2\}$

c) S=$\{x \in R/1 \geq x > -1\}$

d) S=$\{t \in R/ -9/2 \leq t \leq 3/8\}$

RESPOSTAS 7.4

7.4.1 a) S=$\{x \in R/0 < x < 4\}$

b) S=$\{x \in R/x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

c) S= $\emptyset$

d) S=$\{-2\}$

e) S=$\{x \in R\}$

f) S=$\{x \in R/ - 3 < x < 3\}$

g) S=$\{x \in R/x < -3$ ou $x > 3\}$

h) S=$\{x \in R/x \leq -3$ ou x $\geq 3\}$

i) S=$\{x \in R/x \leq -3$ ou x $\geq 3\}$

Capítulo 8

Potências e funções exponenciais

8.1 Introdução

As funções exponenciais modelam uma série de problemas de interesse científico tais como aplicações financeiras a juros compostos, crescimento populacional, reações químicas, secagem de produtos agrícolas, entre outras.

8.2 Potências

Definição 2.1: A potência $n \; \varepsilon \; Z$, $n > 0$, de um número $b \; \varepsilon$ é o produto de b, n vezes, por ele mesmo:

expoente

$$b^{n} = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \quad vezes}$$

base

Exemplo 8.2.1. Calcule (a) 2^3 , (b) $(-3)^4$, (c) -3^4 e (d) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

Solução:

(a) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

(b) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

(c) $-3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$

(d) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Propriedade das potências

P1: $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$ (**Produto de potências de mesma base**)

Demonstração: Expandindo as potências, temos o produto de n bases b por m bases b. Como todas as bases são iguais, pela Def. 2.1, o expoente será $n + m$.

$$b^n \cdot b^m = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \;\; vezes} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{m \;\; vezes} = b^{n+m}$$

■

Exemplo 8.2.2. Resolva os produtos de potências:

(a) $2^3 \cdot 2^5$ e (b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$.

Solução:

(a) $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$

(b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$ ■

P2: $\frac{b^m}{b^n} = b^m : b^n = b^{m-n}$. (**Divisão de potências de mesma base**)

Demonstração: Escrevendo a divisão como fração e expandindo as potências, podemos cancelar as bases b do numerador e denominador. O número de bases restantes será n - m.

$$b^n : b^m = \frac{b^n}{b^m} = \frac{\overbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}^{n \;\; vezes}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{m \;\; vezes}} = b^{n \, - \, m}$$

■

Exemplo 8.2.3. Resolva as divisões de potências:

(a) $3^4 : 3^2$ e (b) $\left(\frac{5}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3$.

Solução:

(a) $3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2$

(b) $\left(\frac{5}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 = . \left(\frac{5}{2}\right)^{5-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$ ■

P3: $b^0 = 1$. (**Expoente zero**)

Demonstração: Seja $\frac{b^n}{b^n} = 1$ .Pela P2, tem-se $\frac{b^n}{b^n} = b^{n-n} = b^0 = 1$ ■

Exemplo 8.2.4. (a)Mostre que : $3^4 : 3^4 = 1$.

(b) Resolva a expressão numérica: $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^0 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$.

Solução:

(a) $3^4 : 3^4 = 3^{4-4} = 3^0 = 1$

(b) $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^0 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^3$ ■

P4: $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$. (**Expoente negativo**)

Demonstração: Sejam b^p e b^q , tal que $n = q - p > 0$. Usando a P2, tem-se:

$b^{-n} = b^{p-q} = \frac{b^p}{b^q}$. Expandindo as potências e cancelando as bases b, o numerador será *1* e o denominador terá $n = q - p$ bases b. Então,

$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$. ■

Exemplo 8.2.5. (a)Mostre que : $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

(b) Resolva a expressão n umérica: $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + 2\right)^{-2}$.

Solução:

(a)Usando a P4: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = 1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$.

(b)Resolvendoinicialmente dentro do parênteses da potência maior, aplicando a P4:

$\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + 2\right)^{-2} = (3+2)^{-2} = 5^{-2}$. Aplicando a P4, novamente:

$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ ■

P5: $b^{m^n} = b^{\overbrace{m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}^{n \ \ vezes}}$ (**Potência de expoente**)

Demonstração: Expandindo a potência m^n obtém-se o expoente de b^{m^n} ■

Exemplo 8.2.6. Resolva: (a) 2^{2^3} (b) $2^{(-3)^2}$.

Solução:

(a) Usando a P5: $2^{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^8 = 256$. .

(b) Usandoa P5: $2^{(-3) \cdot (-3)} = 2^9$ ■

P6: $(b^m)^n = b^{m \cdot n}$ (**Potência de potência**)

Demonstração: Expandindo a potência $(b^m)^n$ obtém-se um produto de n fatores, cuja base é b. Usando a propriedade do produto (P1), conserva-se a base e soma-se os n expoentes m. Então,

$$\left(b^m\right)^n = \overbrace{b^m \cdot b^m \cdot b^m \cdot b^m \cdot \ldots \cdot b^m}^{n \quad vezes} = b^{m \cdot n}$$

■

Exemplo 8.2.7. Resolva: (a) $\left((-2)^2\right)^3$ (b) $\left(2^{(-3)}\right)^2$.

Solução:

(a) Usandoa P6: $\left((-2)^2\right)^3 = (-2)^{2 \cdot 3} = (-2)^6 = 64$

ou usando a Def. 2.1:

$\left((-2)^2\right)^3 = (-2)^2 \cdot (-2)^2 \cdot (-2)^2 = (-2)^6 = 64$.

(b)Usando a P6: $\left(2^{(-3)}\right)^2 = 2^{-6} = \frac{1}{2^6}$ ■

P7: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (**Potência de fração**)

A demonstração desta propriedade é obtida diretamente com a Def. 2.1.

Exemplo 8.2.8. Resolva:(a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ (b) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$.

Solução:

(a)Usando a P7: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$.

(b)Usandoa P4: $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2$. Usando a P7: $\left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$. ■

P8: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (**Potência do produto**)

Demonstração: Expandindo a base (a b) n vezes e usando a Def. 2.1 para os fatores a e b, obtem-se o produto de a^n . b^n.

$$(a \cdot b)^n = \overbrace{a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot \ldots \cdot a \cdot b}^{n \quad vezes} = a^n \cdot b^n$$

■

Exemplo 8.2.9. Resolva:(a) $(2\cdot 3)^3$ (b) $(2+3)^3$.

Solução:

(a) Usando a P8: $2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216.$.

(b) Nessecaso não é possível aplicar a P8, mas pode-se adicionar dentro do parênteses e aplicar a definição: $(2+3)^3 = 5^3 = 125$ ■

P9. Se $b^m = b^n$ então $m = n$. (**Igualdade de duas potências: bases iguais**)

Demonstração: Dividindo $b^m = b^n$ *por* b^m , obtem-se

$1 = \frac{b^n}{b^m} = b^{m-n}$ .Portanto,pela propriedade do expoente zero (P3) tem-se m - n = *0* ou $m = n$ ■

Exemplo 8.2.10. Resolva as equações exponenciais:

(a) $2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ (b) $7^{2x+1} = \frac{1}{49}$.

Solução:

(a) Para usar a P9, é necessário que as bases das potências sejam iguais. Usando a P4 no lado direito: $2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$. Usando a P9: x = *1*.

(b) Para usar a P9, é necessário que as bases das potências sejam iguais. Decompondo o 49 e usando a P4 no lado direito: $7^{2x+1} = 7^{-2}$. Usando a P9: $2x+1 = -2$. resolvendo para $x$tem-se: x = *-3/2* ■

P10. (**Igualdade de duas potências: expoentes iguais**)

Se $a^m = b^m$, para $m \neq 0$, *a, b* e m ε , então $a = b$.

Demonstração: Dividindo $a^m = b^m$ por a^m e usando as propriedades P3 e P7, obtém-se

$1 = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$. Como $m \neq 0$, para que essa igualdade seja verdadeira $\frac{b}{a} = 1$ ou $a = b$ ■

Exemplo 8.2.11. Resolva a equação exponencial: $16 = (3x-2)^4$.

Solução:

Para usar a P10, é necessário que os expoentes das potências sejam iguais. Decompondo 16, tem-se : $2^4 = (3x-2)^4$. Usando a P10:

$2 = 3x - 2$. Resolvendo para x, tem-se x = *4/3* ■

EXERCÍCIOS 8.2

8.2.1 Calcule as potências:

a) 4^2 =	c) 0^5 =	e) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 =$	g) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$
b) $(-4)^3$=	d) 1^{100} =	f) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 =$	h) $-5^4 =$

8.2.2 Resolva as operações com as potências usando as propriedades P1 e P2:

a) $2^2 \cdot 2^4 =$ c) $3^4 : 3^2 =$ e) $\left(\frac{5}{4}\right)^3 : \left(\frac{5}{4}\right)^2 =$ g) $\left(\frac{7}{4}\right)^3 : \left(\frac{7}{4}\right)^5 =$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 =$ d) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 =$ f) $5^2 : 5^5 =$ h) $8^{-2} \cdot 8^5 =$

8.2.3 Resolva as potências usando a propriedade do expoente negativo:

a) $2^{-3} =$ b) $3^{-5} =$ c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} =$ d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} =$

8.2.4 Mostre que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

8.2.5 Verifique se $2^{3^2} = \left(2^3\right)^2$.

8.2.6 Resolva as expressões numéricas usando as propriedades:

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} =$ c) $\left[2^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 =$ e) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} =$

b) $(-2)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} =$ d) $\left[\left(\frac{7}{3}\right)^2 \cdot 14^{-3}\right]^{-1} =$ f) $\left(-\frac{6}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{25}\right)^{-2} =$

8.2.7 Calcule o valor das expressões:

a) $\dfrac{2-\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)}{\left(\frac{5}{2}^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}} =$ c) $1,333\ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} =$

b) $\left(7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{-\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{4}{3}}\right)^{-2} =$ d) $\left(\frac{7}{5} \cdot \left(\frac{49}{25}\right)^{-1} \cdot 5^{-1} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\right)^{100} =$

8.2.8 Resolva as equações exponenciais usando as propriedades P9 e P10:

a) $7^x = 343$ c) $\left(\frac{1}{25}\right)^x = 125$ e) $\left(\frac{4}{25}\right)^{3x+1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-x}$

b) $4^{x-2} = \frac{1}{2}$ d) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = 0,75$ f) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} = 1$

8.2.9 Resolva a equação exponencial: $(243)^{2x+8/5} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]^{x-1}$.

8.3 Funções exponenciais

Definição: Uma função exponencial tem a forma

$f(x) = A \cdot b^{\,m \cdot x}$ (3.1)

onde os parâmetros A e $m \in \mathbb{R}$ e a base $b \in \mathbb{R}^+$, com $b \neq 1$.

Exemplo 8.3.1. Dadas asfunções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2^{-x}$:

1. Construa uma tabela com valores de x, $f(x)$ e $g(x)$.

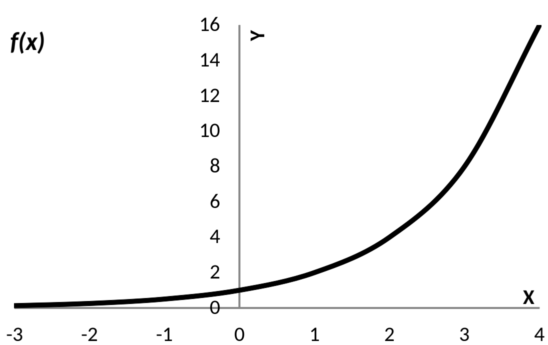
2. Faça o gráfico das funções *f(x)* e *g(x)*.

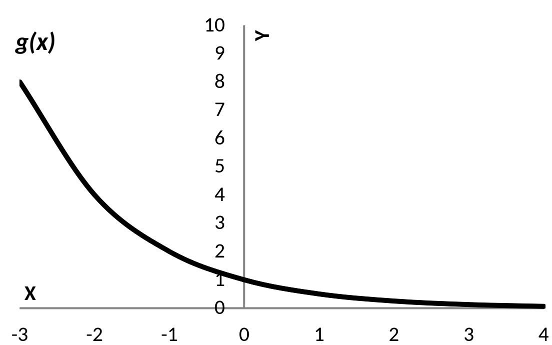
3. Verifique se são crescentes ou decrescentes.

4. Determine o domínio e a imagem das funções.

Solução: Os parâmetros da função *f(x)* são: *A = 1* e *m = 1*. Da função g(x) são *A = 1* e *m = -1*. (a) atribuindo valores para *x*, calcula-se os valores de *f(x)* e *g(x)*, mostrados na tabela.

x	f(x)	g(x)
-3	0,125	8
-2	0,25	4
-1	0,5	2
0	1	1
1	2	0,5
2	4	0,25
3	8	0,125
4	16	0,0625





A função *f(x)* é crescente (sinal do expoente *m* é positivo) e a *g(x)* é decrescente (sinal do expoente *m* é negativo).

$D_m f(x) = \{x \in \mathbb{R}\}$ e $I_m f(x) = \{x \in \mathbb{R}^+\}$

$D_(m) g(x) = \{x \in \mathbb{R}\}$ e $I_(m) g(x) = \{x \in \mathbb{R}^+\}$

Deve-se observar que a função exponencial é uma função *monótona*: ou cresce, ou decresce, sem apresentar pontos de máximo ou de mínimo como as parábolas, por exemplo. ■

Exemplo 8.3.2. As bactérias se reproduzem de forma assexuada, por bipartição. Isto significa que cada indivíduo se parte em dois geneticamente iguais. Em condições favoráveis, se reproduzem rapidamente. Consideremos que uma bactéria se divide a cada *1 h*. Qual será a população de bactérias em 24 h?

Solução: As duas primeiras colunas da tabela abaixo mostram valores das variáveis tempo (t) e número de indivíduos (N). A terceira coluna mostra expressões numéricas que geram os valores da função *N(t)*.

Tempo (t)	N(t)	Expressão
0	1	2^0
1	2	2^1
2	4	2^2
3	8	2^3
4	16	2^4
5	32	2^5
...	...	...
t		2^t

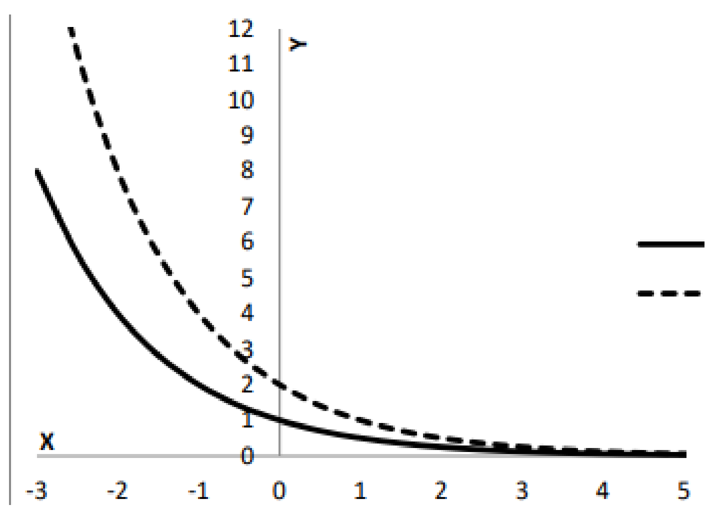
Com base na sequência de terceira coluna, as variáveis N e t se relacionam de acordo com a função $N(t) = 2^t$. Assim, para $t = 24$, tem-se $N(24) = 2^{24}$, ou seja $N(24) = 16.777.216$ de bactérias ■

Exemplo 8.3.3. Faça os gráficos das funções $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $g(x) = 2^{-x+1}$.

Solução: Usando as propriedades das potências, a *f(x)* pode ser escrita como

$f(x) = \left(2^{-1}\right)^x = 2^{-x}$.

Da mesma forma, *g(x)* pode ser escrita como $g(x) = 2^{-x} \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^{-x}$.



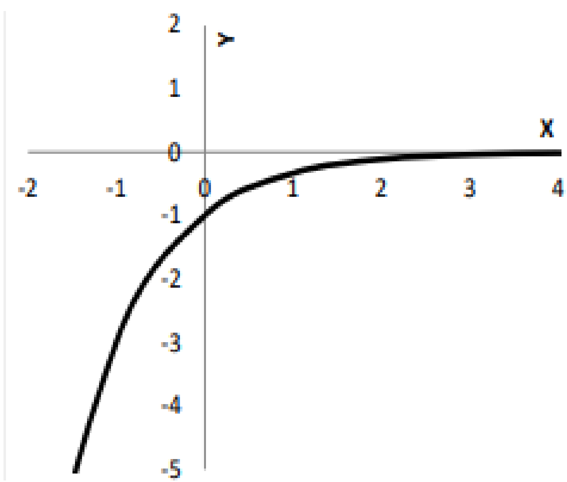
■

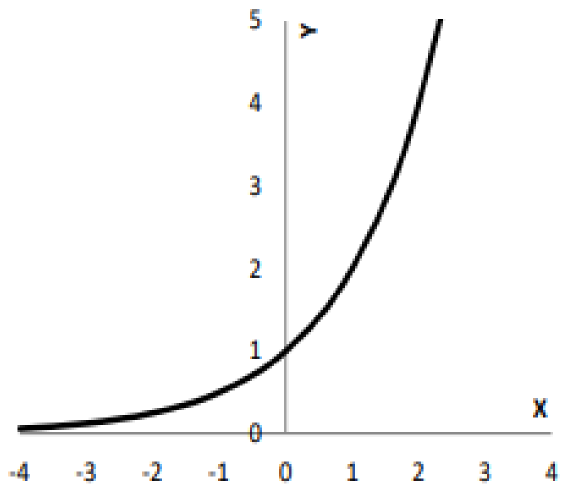
Exemplo 8.3.4. Associe as funções

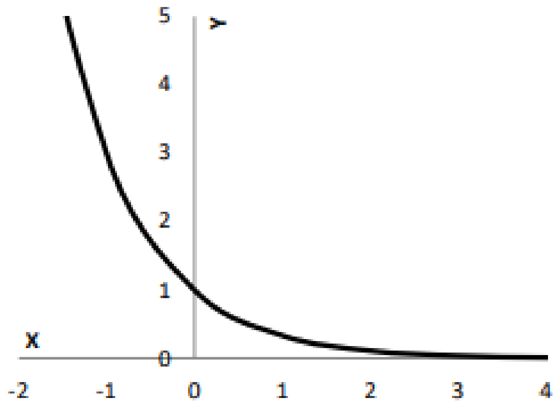
a) $f(x) = 2^x$
b) $g(x) = 3^{-x}$

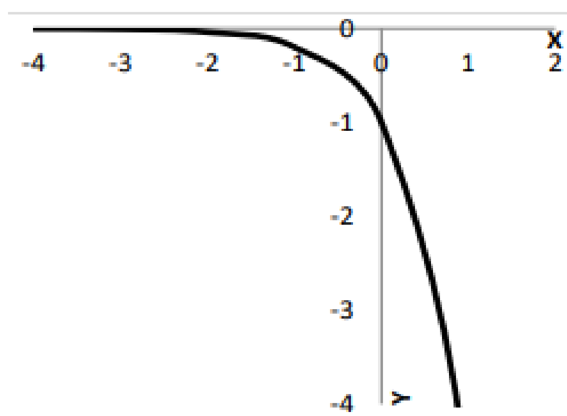
c)$h(x) = -3^{-x}$
d)$p(x) = -5^{x}$

aos respectivos gráficos. (Justifique sua resposta)









Solução:

1º gráfico: letra (c): o sinal de menos na frente de *h(x)* indica que o parâmetro $A = -1$, portanto esta função corta y em $(0,-1)$; é negativa para qualquer $x$eé o rebatimento da função $y = 3^{-x}$, que é uma exponencial decrescente (Veja letra (b)).

2º gráfico: letra (a): $A = 1$ indica que *f(x)* é positiva. O expoente $m = 1$ (positivo), indicaque *f(x)* é crescente.

3º gráfico: letra (b): $A = 1$ indica que *g(x)* é positiva. O expoente $m = -1$ (negativo), indicaque *g(x)* é decrescente.

4º gráfico: letra (d): $A = -1$ indicaque *p(x)* corta y em $(0,-1)$; é negativa para qualquer $x$eé o rebatimento da função $y = 5^{x}$, que é uma exponencial crescente (semelhante a função da letra (a))
■

8.3.1 Função exponencial com base e (função exponencial natural)

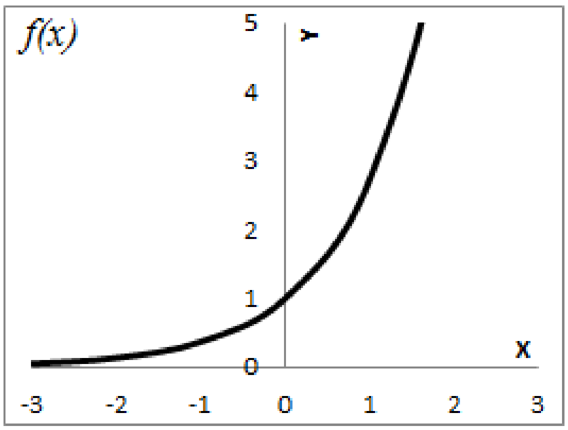
Definição: A função exponencial natural tem a forma

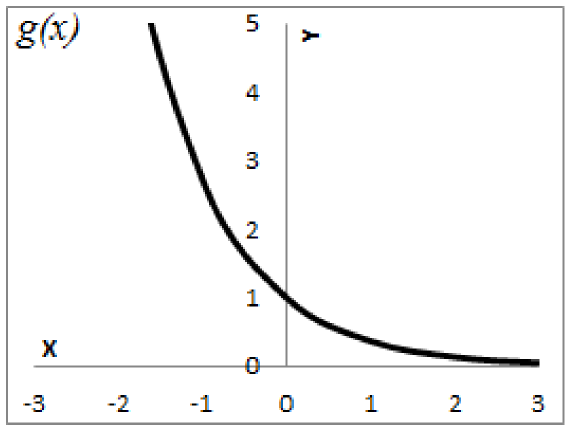
$$f(x) = A\cdot e^{m\cdot x} \quad (3.1)$$

onde osparâmetros A e $m \in \mathbb{R}$ e a base e é um número irracional, chamado número de Euler: 2.7182818...

Exemplo 8.3.5. Faça os gráficos das funções $f(x) = e^{x}$ e $g(x) = e^{-x}$:

Solução: Atribuindo valores para x, obtém-se os valores de f e g. A figura abaixo mostras estas funções, que são semelhantes às exponenciais de base qualquer.





EXERCÍCIOS 8.3

8.3.1 I) Faça e compare os gráficos das funções.

a) $f(x) = 3^{x}$ e $f(x) = -3^{x}$

b) $f(x) = 4^{x}$ e $f(x) = -4^{x}$

II) Qual é o efeito do sinal do parâmetro A no gráfico das funções $f(x)= Ab^{mx}$?

8.3.2 I) Faça e compare os gráficos das funções.

a) $f(x) = 3^{x}$ e $f(x) = 3^{-x}$

b) $f(x) = -3^{x}$ e $f(x) = -3^{-x}$

II) Qual é o efeito do sinal do parâmetro m no gráfico das funções $f(x)= Ab^{mx}$?

8.3.3 Faça um esboço do gráfico das funções, com base nas conclusões dos Exercícios 1 e 2.

a) $f(x) = 5^{x}$

b) $f(x) = -5^{x}$

c) $f(x) = -2^{-x}$

d) $f(x) = -7^{x}$

8.3.4 Faça um esboço do gráfico das funções:

a) $f(x) = 2 \cdot 5^x$

b) $f(x) = 3 \cdot 5^x$

c) $f(x) = -2 \cdot 2^{-x}$

d) $f(x) = -3 \cdot 7^x$

8.3.5 Faça um esboço do gráfico das funções:

a) $f(x) = 2 \cdot 2^x$

b) $f(x) = 5^{x+1}$

c) $f(x) = 2^{-x+2}$

d) $f(x) = 7^{x-1}$

8.3.6 Faça os gráficos do exercício anterior usando um aplicativo computacional.

8.3.7 Faça os gráficos das funções:

a) $f(x) = e^{2x}$

b) $f(x) = -e^{-2x}$

c) $f(x) = 3e^x$

d) $f(x) = -2e^{-3x}$

8.3.8 Faça os gráficos do exercício anterior usando um aplicativo computacional.

8.3.9 Associe as funções

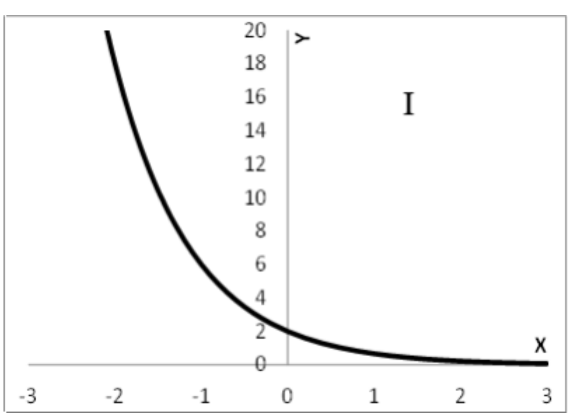
a) $f(x) = 2 \cdot e^x$;

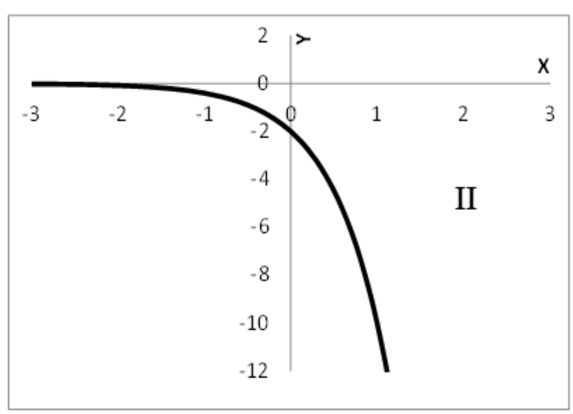
(b) $g(x) = 2 \cdot 3^{-x}$;

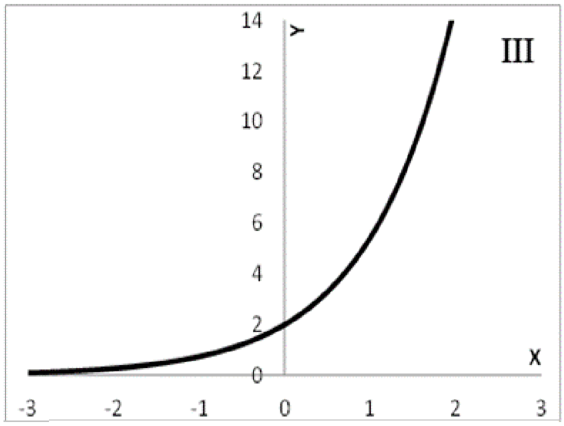
(c) $h(x) = -2 \cdot 3^{-x}$;

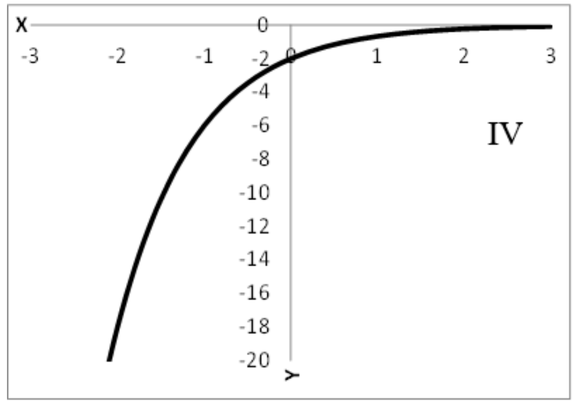
(d) $p(x) = -2 \cdot 5^{x}$

aos respectivos gráficos. (Justifique sua resposta)









8.3.10 Uma aplicação a juros compostos (juro sobre juro) evolui com taxa mensal de 10% ao mês, de acordo com a tabela abaixo. Elabore uma função exponencial para calcular o montante depois de 25 meses.

Tempo (meses)	Capital (R$)
0	1.000,00
1	1.100,00
2	1.210,00
3	1.331,00
...	...

8.4 Juros compostos

Em uma aplicação financeira do tipo poupança, o capital inicial C_o é depositado no mês $t = 0$ e é corrigido mensalmente com uma taxa de juros constante de i % do capital presente. O capital a cada mês pode ser calculado da seguinte maneira:

Capital = Capital do mês anterior + rendimento

Onde o rendimento é : Capital do mês anterior $\cdot$ taxa de juros.

Tempo (meses)	Capital (R$)	Montante (R$)
0	C_o	C_o
1	$C_o + C_o \cdot i/100$	$C_o \cdot (1+i/100)$
2	$C_o \cdot (1+i/100) \cdot (1+i/100)$	$C_o \cdot (1+i/100)^2$
3	$C_o \cdot (1+i/100)^2 \cdot (1+i/100)$	$C_o \cdot (1+i/100)^3$
4	$C_o \cdot (1+i/100)^3 \cdot (1+i/100)$	$C_o \cdot (1+i/100)^4$
...	...	....
t	$C_o \cdot (1+i/100)^{t-1} \cdot (1+i/100)$	$C_o \cdot (1+i/100)^t$

Generalizando, para t meses, o montante será

$C(t) = C_0 \left(1 + \frac{i}{100}\right)^t$ (4.1)

Exemplo 8.4.1. Uma poupança foi iniciada com R$ 5.000,00 e corrigida com uma taxa constante de 0,6 % ao mês. Calcule o montante depois de (a) 15 meses (b) 10 anos.

Solução: (a) aplicando $t = 15$ meses e $C_o = 5.000,00$ na Eq. 4.1, tem-se:

$$C(15) = 5000\left(1 + \frac{0,6}{100}\right)^{15}$$

$C(15) = 5.469,40$ reais.

(b) Fazendo $t = 10 \cdot 12 = 120$ meses e substituindo na Eq. 4.1, tem-se:

$$C(120) = 5000\left(1 + \frac{0,6}{100}\right)^{120}$$

$C(120) = 10.250,09$ reais ■

EXERCÍCIOS 8.4

8.4.1 Dados o capital inicial, a taxa de juros e o tempo, calcule o montante de aplicações a juros compostos:

a) C_o = *R$ 1.500,00* , i = *0,5 %* ao mês e t = *20* meses

b) C_o = *R$ 10.000,00* , i = *1 %* ao mês e t = *50* meses.

c) C_o = *R$ 10.500,00* , i = *1 %* ao mês e t = *5* anos.

d) C_o = *R$ 1.000,00* , i = *0,8 %* ao mês e t = *10* anos e *5* meses.

e) C_o = *R$ 20.000,00* , i = *0,65 %* ao mês e t = *3* anos e 10 meses.

8.4.2 Qual é o capital inicial de uma aplicação com taxa i = *0,5 %* ao mês, cujo montante depois de 10 anos é de R$ 8.500,00.

8.4.3 Faça os gráficos das seguintes aplicações com C_o = *R$ 10.000,00*, i = *2 %* ao mês para tempo de 0 a *12* meses:

a) Corrigidos com juros simples

b) Corrigidos com juros compostos.

8.4.4 Verifique quando as aplicações abaixo terão o mesmo montante:

a) C_o = *R$ 12.000,00*, i = *1 %* ao mês, corrigidos com juros simples.

b) C_o = *R$ 10.000,00*, i = *1 %* ao mês, corrigidos com juros compostos.

8.4.5 Qual é o capital inicial para que o montante de uma aplicação seja R$ 20.000,00, depois de 3 anos, com taxa de 1 % ao mês?

8.4.6 Um pai emprestou R$ 5.000,00 ao filho, a 1% ao mês, a juros compostos. Qual é a dívida depois de 1 ano.

8.4.7 Um investidor tem R$ 250.000,00 para comprar um apartamento, que deverá ser entregue em 1 ano. Foram-lhe oferecidas três formas de pagamento. Verifique qual delas é a mais vantajosa para ele, considerando que o capital pode ser aplicado (se não for usado para pagar) com taxa de 0,6 % ao mês:

a) À vista R$ 240.000,00.

b) Entrada R$ 100.000,00 e R$ 150.000,00 na entrega do apartamento.

c) R$ 260.000,00 na entrega do apartamento.

8.4.8 Calcule a taxa de juros na venda de uma máquina agrícola, cujo preço à vista é R$ 20.000,00 e para pagar em 6 meses é R$ 22.000,00.

8.5 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESPOSTAS 8.2

8.2.1 a) 16
b) -64
c) 0
d) 1
e) 1/8
f) 9/16
g) 16/81
h) -625

8.2.2 a) 64
b) 1/1024
c) 9
d) 729/64
e) 5/4
f) 1/125
g) 16/49
h) 512

8.2.3 a) 1/8
b) 1/243
c) 64/27
d) 16/9

8.2.6 a) 32/25
b) -16/3
c) 8
d) 504
e) 9/32
f) -78125/1944

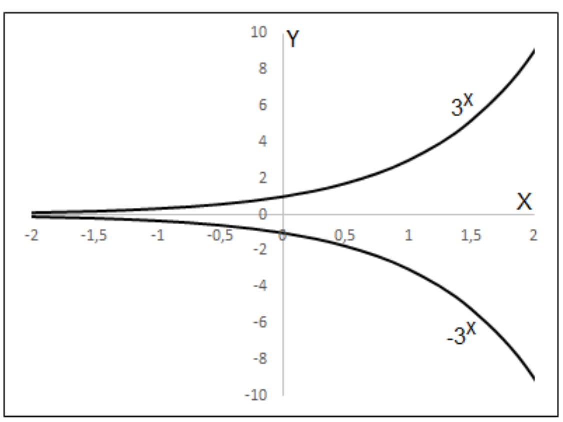
8.2.7 a) 3/5
b) 1/49
c) 2
d) 1

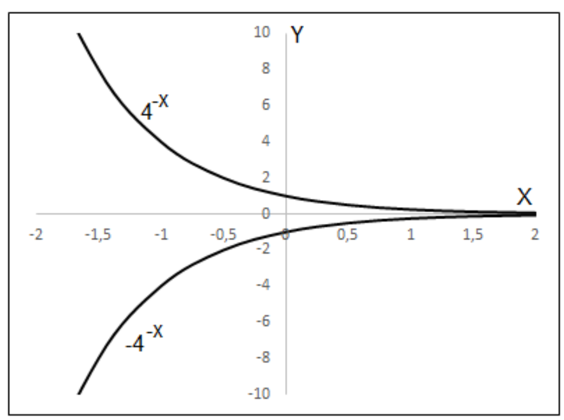
8.2.8 a) x = 3
b) x = 3/2
c)x = -3/2
d) x = 1
e) x = -2/5
f) x = 1.

8.2.9 x_1 = -1 e x_2 = -8.

RESPOSTAS 8.3

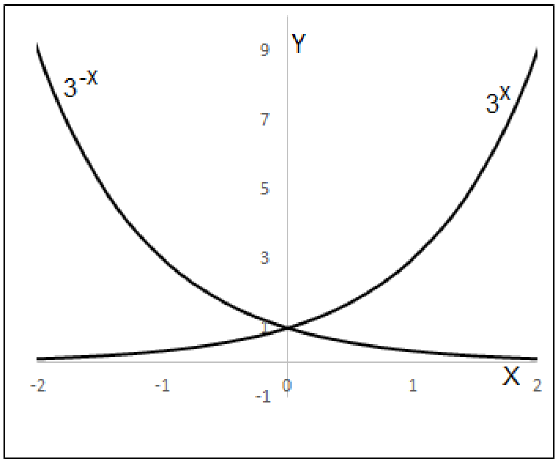
8.3.1 (I) a) b)

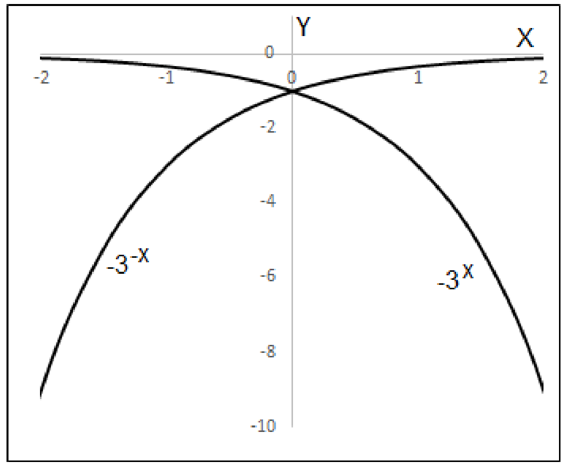




II- Se *A* for positivo a função é positiva e se *A* for negativo a função é negativa. As funções *f(x)=Ab*^{x} e *g(x)=-Ab*^{x} são simétricas em relação ao eixo X.

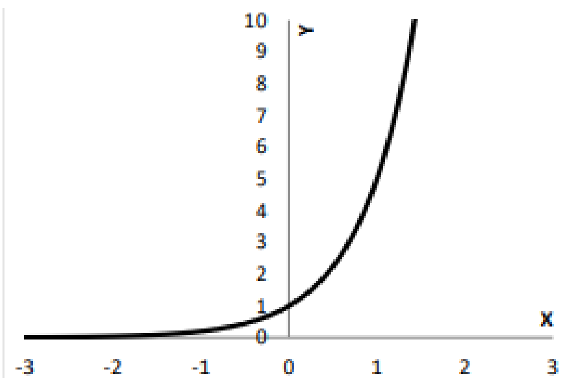
8.3.2 (I)a b

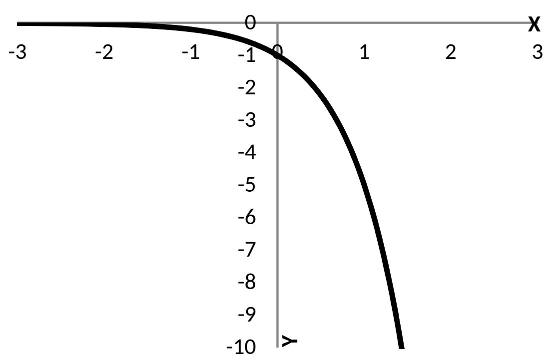




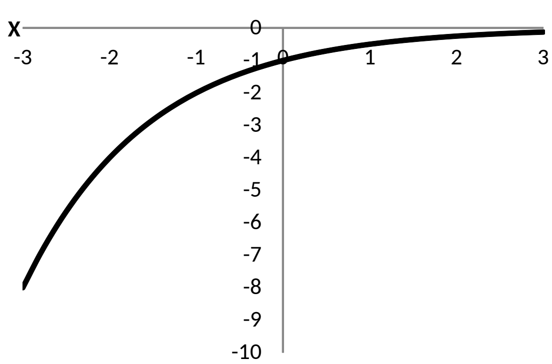
II- Se *f(x)=Ae*^{mx} e *g(x)=Ae*$^{-mx}$ então *f* e *g* são simétricas em relação ao eixo Y.

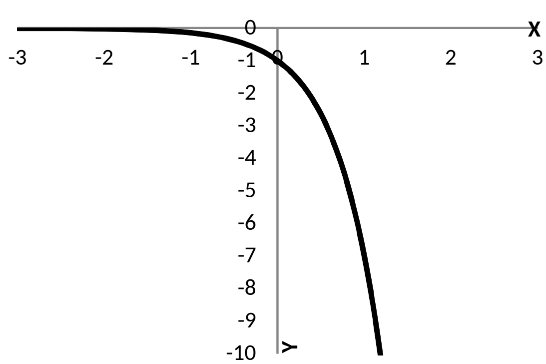
8.3.3 a) b)



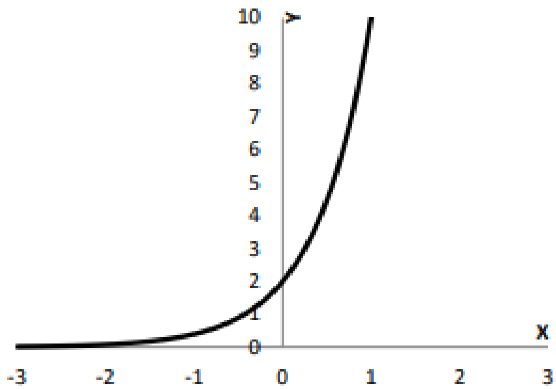


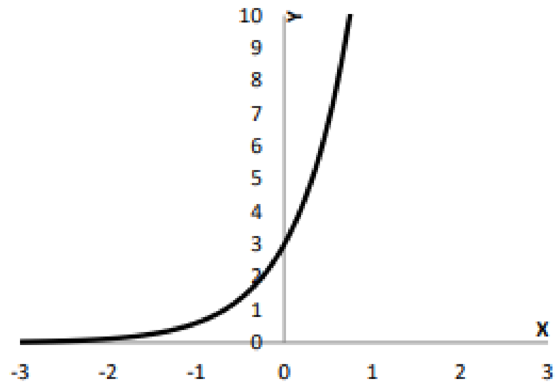
c) d)



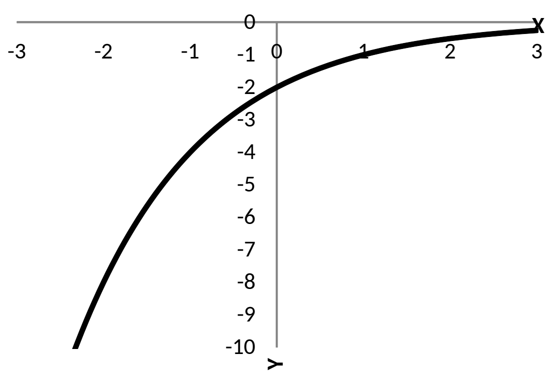


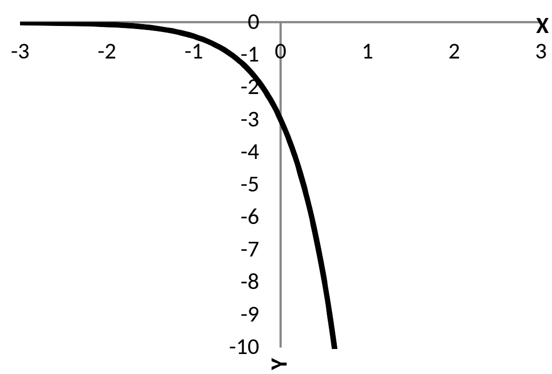
8.3.4 a) b)


10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
Y
X
-3 -2 -1 0 1 2 3

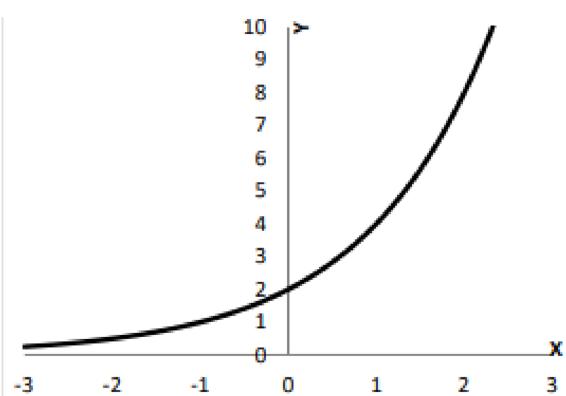

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
Y
X
-3 -2 -1 0 1 2 3

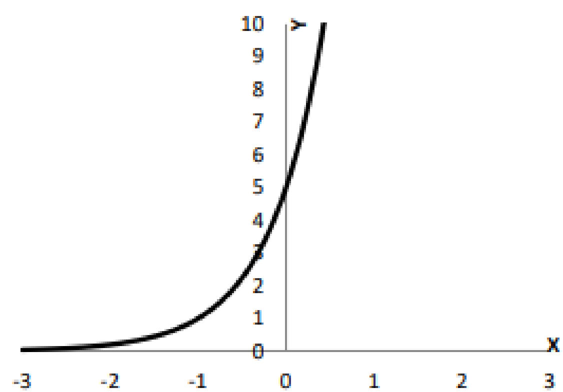
c) d)


0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10
Y
X
-3 -2 -1 0 1 2 3

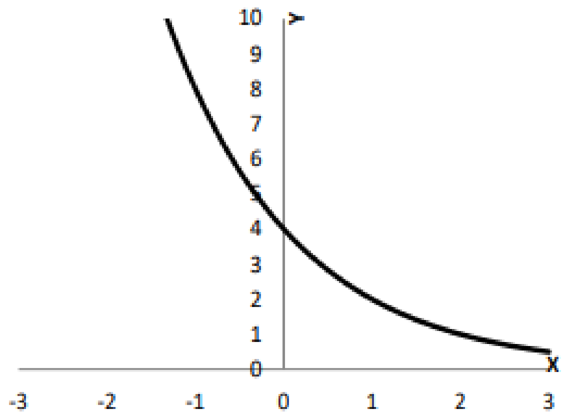

0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10
Y
X
-3 -2 -1 0 1 2 3

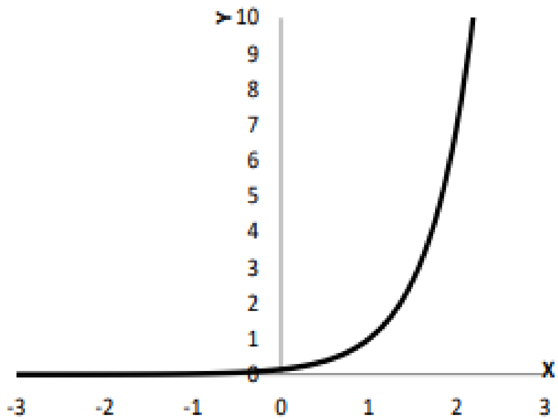
8.3.5 a) b)


10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
Y
X
-3 -2 -1 0 1 2 3

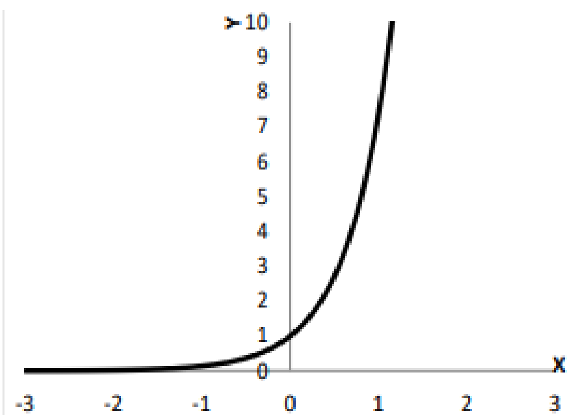

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
Y
X
-3 -2 -1 0 1 2 3

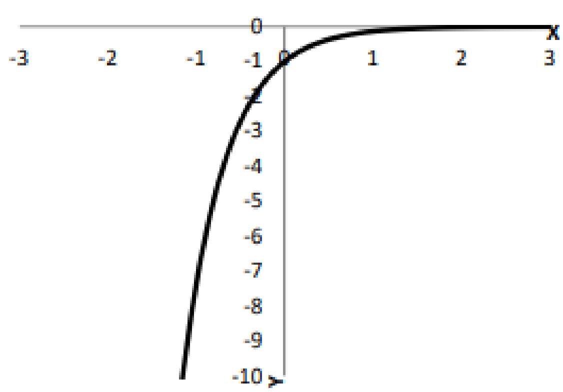
c) d)



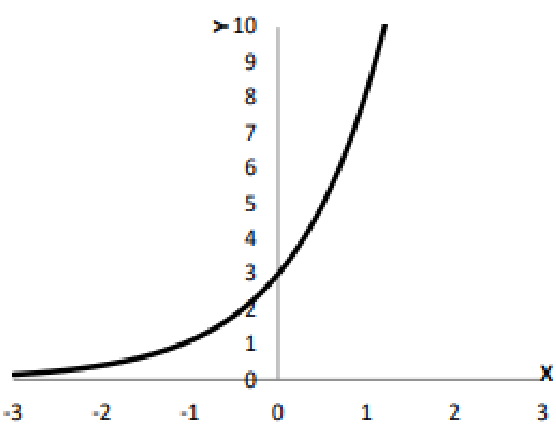


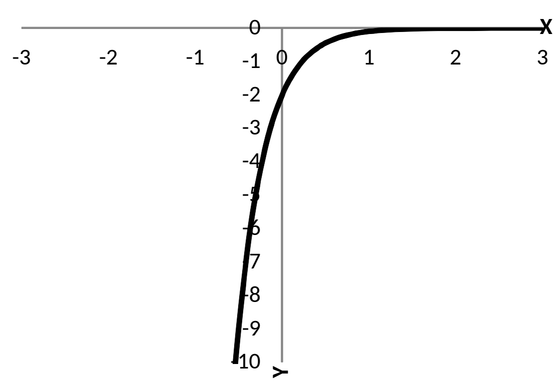
8.3.7 a) b)





c) d)





8.3.9 a-III ; b-I;c-IV; d-II .

8.3.10 $C(t) = C_0\left(1+\frac{i}{100}\right)^t$

RESPOSTAS 8.4

8.4.1 a) *R$ 1 657,34*

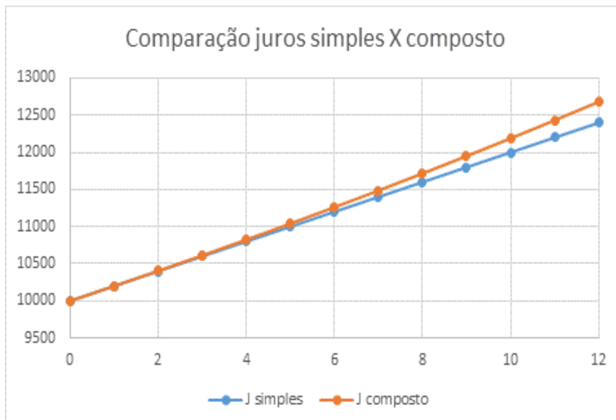
b) *R$ 16 446,32*

c) *R$ 19 075,32*

d) *R$ 2 707,49*

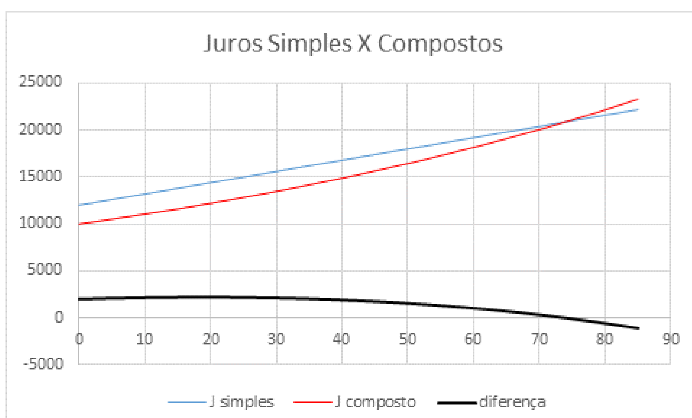
e) *R$ 26 944,11*

8.4.2 $C_o \cong R\$4671,88$

8.4.3 

8.4.4 Tempo no qual as duas aplicações são iguais = 74º mês.

Sugestão: desenvolva as duas aplicações em uma tabela eletrônica.



8.4.5 $C_o \cong R\$13978,50$

8.4.6 *R$ 5 634,13*

8.4.7 Alternativa b.

8.4.8 $i \cong 1,6\,01$

Capítulo 9

Logaritmos e função logaritmica

9.1 Introdução

Um dos grandes desafios da matemática no fim do século XVI e início do XVII era o desenvolvimento de meios para facilitar os cálculos aritméticos, evitando erros grosseiros e objetivando o auxílio a outras ciências. Nesse período em especial, as ciências que impulsionaram esses desenvolvimentos foram, a astronomia, que estava em alta na época e a navegação, influenciada pelo comércio mundial. Foram criados diversos métodos para facilitar os cálculos na época, porém a maioria deles fracassou por serem praticamente inviáveis ou de pouca precisão. Os logaritmos, na sua origem, foram criados como um meio de simplificar complexas operações de multiplicação e divisão, transformando-as em simples adições e subtrações.

John Napier (1550-1617) e Jobst Bürgi (1552-1632) são considerados pais da ideia de logaritmos conhecida hoje. Os trabalhos de Napier e Bürgi foram desenvolvidos independentes e quase que simultaneamente e tiveram focos diferentes no decorrer de seus trabalhos. Enquanto Napier desenvolveu seu trabalho a partir de noções geométricas, Bürgi trabalhou baseando-se em noções algébricas.

É importante salientar também a importância de Michael Stifel (1487-1567), considerado um dos principais precursores dos logaritmos. Stifel publicou em 1544 o livro *Arithmetica integra*, publicação de extrema importância para a álgebra da Alemanha no século XVI. É nessa obra que aparece uma origem para a ideia de logaritmo. Stifel descobre as vantagens de se fazer a associação entre uma progressão geométrica e uma progressão aritmética, um século antes da invenção dos logaritmos. Ele observou que o produto (quociente) de dois termos quaisquer da progressão geométrica está associado à soma (diferença) dos correspondentes na progressão aritmética.

Napier não era matemático profissional. Além de cuidar da administração de suas propriedades, se dedicou a escrever sobre vários assuntos. O termo logaritmo foi criado por ele e vem do latim, *logos* = razão e *arithmos* = número. Esse método, era para Napier, uma tentativa de expressar o cálculo a partir da razão ou da proporção numérica. Foi no ano de 1614, três anos antes de sua morte e seis anos antes da publicação de Bürgi, que John Napier publicou sua descoberta na obra intitulada de *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (ou seja, *Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos*). Nesse livro, Napier explica através de sua concepção, os logaritmos, e junto disso fornece uma tábua dos logaritmos dos senos de 0º a 90º, de minuto em minuto. O motivo de Napier ter aplicado sua ideia à trigonometria foi devido ao fato que a intenção da criação dessa tabua de logaritmos era facilitar os extensos e complicados cálculos realizados pelos astrônomos e navegadores. Baseado nas publicações de Stifel, Napier deparou-se com a evidência de que as somas ou diferenças dos índices das potências eram na verdade produtos ou quocientes das potências dadas.

Observando a tabela a seguir é possível compreender a conclusão a qual Napier chegou:

1	2	3	4	**5**	6	7	8	**9**	10	11	12	13	**14**	15
2	4	8	16	**32**	64	128	256	**512**	1024	2048	4096	8192	16384	32788

Os números da primeira linha são os expoentes, enquanto a segunda linha contém as potências de 2 correspondentes a esses expoentes. Segundo a tabela, podemos calcular produtos complicados, como **32 x 512**, operando com uma simples operação de adição dos expoentes correspondentes. O expoente que corresponde ao 32 é o 5, e o expoente que corresponde ao 512 é o 9, dessa forma, o produto de 32 x 512 é igual a potência $2^{5+9} = 2^{14} = 16384$.

Um ano após a publicação de seu livro, Napier foi a Edimburgo para encontrar Henry Briggs (1556-1630), matemático profissional de Londres. Durante o mês em que passaram juntos na cidade de Edimburgo, o assunto principal entre os dois, foi sem dúvidas os logaritmos. Após longas conversas, Napier e Briggs concluíram que uma tábua de logaritmos de base 10 seria mais útil, porém Napier não viveu o suficiente para o desenvolvimento dessa ideia. Briggs foi quem adaptou os valores de forma que fossem mais fáceis de serem utilizados por meio dos logaritmos decimais, como hoje os conhecemos.

Jobst Bürgi se dedicava à fabricação de relógios, mas tinha também talento para a matemática e para a astronomia, tendo realizado trabalhos em ambas as áreas. Assim como Napier, foi estimulado pelas ideias de Stifel, porém Bürgi partiu de uma progressão aritmética, com inicio no termo 0, com razão 10, e com último termo 32 000. A progressão geométrica correspondente inicia no 10^8 e sua razão é $1 + 10^{-4}$. A partir disso ele construiu uma tábua de antilogaritmos. Provavelmente Bürgi criou seus logaritmos por volta de 1600, mas só publicou uma obra sobre o assunto no ano de 1620, ficando assim atrás de Napier que publicou sua obra no de 1614.

Atualmente é possível encontrar diversas aplicações dos logaritmos na ciência e na engenharia. Seguem alguns exemplos: A definição do pH de uma solução química é na verdade um logaritmo, o logaritmo da quantidade de íons de H^+; a linearização de gráficos de funções exponenciais é feita utilizando escala logarítmicas; o cálculo da meia-vida (tempo para decompor a metade da massa) de uma substância radioativa; o cálculo do tempo de permanência de uma substância no corpo humano é útil para determinar a dosagem de medicamentos e usa logaritmos; o cálculo da depreciação de bens como carros e imóveis é feito usando funções exponenciais e logaritmos; a escala Richter, usada desde 1935, é uma escala logarítmica, por meio dela é possível calcular a magnitude (quantidade de energia liberada), epicentro e a amplitude de um terremoto; o crescimento ou decrescimento de populações é feito usando funções exponenciais e logaritmos, assim como o cálculo de aplicações financeiras como poupança, financiamentos e previdência.

9.2 Definição de logaritmo

Os logaritmos estão associados aos expoentes de potências. Analisemos os seguintes exemplos:

Exemplo 9.2.1. Que expoente N deve ter 2 , para que $2^N = 8$?

Solução: Decompondo 8 em fatores primos, temos: $8 = 2^3$.

$2^N = 8 = 2^3$ e $N = 3$.

Portanto, $N = 3$ é o expoente de 2, para que $2^N = 8$■

Exemplo 9.2.2. Que expoente N deve ter 10, para que $10^N = 10000$?

Solução: Decompondo 10000 em potencias de 10, temos: $10000 = 10^4$.

$10^N = 10^4$ e $N = 4$.

Portanto, $N = 4$ é o expoente de 10, es

Exemplo 9.2.3. Que expoente N deve ter 4, para que $4^N = 2$?

Solução: Decompondo 4 em fatores primos, temos: $4 = 2^2$

$\left(2^2\right)^N = 2$

$2^{2N} = 2^1$

$2N = 1$ e $N = 1/2$.

Portanto, $N = 1/2$ é o expoente de 4, para que $4^N = 2$■

Chamando o expoente N de "**logaritmo**" , dizemos que determinar o logaritmo de um número x em uma base b é encontrar um expoente N de b, tal que $b^N = x$.

No Ex. 2.1 o logaritmo de 8 na base 2 é $N = 3$ pois $2^3 = 8$.

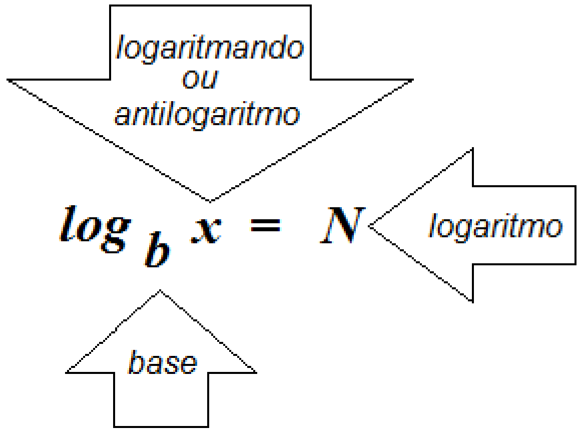
No Ex. 2.2 o logaritmo de 10000 na base 10 é $N = 4$ pois $10^4 = 10000$.

No Ex. 2.3 o logaritmo de 4 na base 2 é $N = 1/2$ pois $4^{1/2} = 2$.

Definição 9.2.1. $log_b x = N b^N = x$

(2.1)

Onde N, x e b são números reais, sendo $x > 0$; $b > 0$ e $b \neq 1$■



Na expressão $log_b x = N$, como indica a figura:

x é o **logaritmando**, ou seja, o número que será calculado o logaritmo (também chamado de **antilogaritmo**),

b é a **base** do logaritmo e

N é o **logaritmo**.

Exemplo 9.2.4. Qual é o $log_{10}100$? ou qual deve ser o valor de N para que $10^N = 100$?

Solução: Utilizando a definição do logaritmo, temos:

$$log_{10}100 = N 10^N = 100$$

$$10^N = 10^2$$

$$N = 2$$

Assim,dizemos que $log_{10}100 = 2$ pois $10^2 = 100$ ■

Exemplo 9.2.5. Qual é o logaritmo de *81* na base *3* ? **Solução:** Usando a definição de logaritmo:

$$log_3 81 = N 3^N = 81$$

Decompondo o $81 = 3^4$ temos: $3^N = 3^4$ e $N = 4$.

Dizemos então que $log_3 81 = 4$ pois $3^4 = 81$■

Exemplo 9.2.6. Determine os valores de x para que exista logaritmo N:

$$log\,(2x-1) = N$$

Solução: Da definição de logaritmo (2.1), o antilogaritmo deve ser maior do que zero. Então, $2x - 1 > 0$. Resolvendo para x, temos: $x > \frac{1}{2}$.

Assim, para qualquer $x > \frac{1}{2}$, o antilogaritmo será positivo e o logaritmo dado existirá.

EXERCÍCIOS 9.2

9.2.1 Determine o valor do expoente N para que as equações exponenciais sejam verdadeiras:

(a) $5^N = 125$ c) $25^N = 125$ e) $9^N = 81$

(b) $2^N = 64$ d) $5^N = 1/125$ f) $4^N = 1/32$

9.2.2 Calcule os seguintes logaritmos usando a definição:

(a) $log_{10} 100000$ d) $log_5 125$ g) $log_2 \left(\frac{1}{32}\right)$

(b) $log_2 \left(\frac{1}{16}\right)$ e) $log_3 243$ h) $log_{1/2} \sqrt[3]{4}$

(c) $log_2 0,25$ f) $log_{81} 3$ i) $log_{0,01} 10$

9.2.3 Determine o valor da letra (use a definição de logaritmo).

(a) $log_9 x = 2$ c) $log_b 5 = 125$ e) $log_{7/6} 36/49 = N$

(b) $log_b 8 = 3$ d) $log_{(x-2)} 8 = 2$ f) $log_{6/7} 36/49 = x$

9.2.4 Verifique se tem sentido a base do logaritmo ser igual a 1. (Justifique sua resposta)

9.2.5 Verifique se tem sentido a base do logaritmo ser um número negativo. (Justifique sua resposta)

9.2.6 Verifique se tem sentido calcular o logaritmo de um número negativo. (Justifique sua resposta)

9.2.7 Dê 5 exemplos de logaritmos negativos. Para que valores de x, tem-se $log_b x$ negativo?

9.2.8 Determine os valores de x para que exista logaritmo:

(a) $log\,(x-2)$ b) $log_3\,(4x-1)$ c) $log_{(2x-1)} 5$ d) $log_{(4-x)}\,(x-2)$

9.3 Propriedades dos logaritmos

As propriedades dos logaritmos são muito utilizadas para resolver problemas com equações e de aplicação de funções exponenciais. Todas elas decorrem diretamente ou são demonstradas usando a **Definição 2.1**.

P1: $log_b\, 1 = 0$ pois $b^0 = 1$. (3.1)

P2: $log_b\, b = 1$ pois pela Def. 2.1, tem-se: $b^1 = b$. (3.2)

P3: $log_b\, b^n = n$ pois pela Def. 2.1, tem-se: $b^n = b^n$. (3.3)

P4: $b^{\,logb\, x} = x$

Demonstração:

Se $log_b\, x = N$ tem-se pela Def. 2.1 que $b^N = x$. (3.4)

Então, $b^{\,logb\, x} = b^N = x$.

P5: $log_b\,(x \cdot y) = log_b x + log_b y$ (Logaritmo do produto) (3.5)

Demonstração:

Seja $u = log_b x$ e $v = log_b y$. (3.6)

Pela Def. (1.1) , temos $b^u = x$ e $b^v = y$ (3.7)

Substituindo (2.7) em (2.5) tem-se

$$log_b\,(b^u \cdot b^v) = log_b b^{u+v}$$

Da Propriedade **P3** tem-se

$$u + v = log_b x + log_b y\ .$$

P6: $log_b \left(\frac{x}{y}\right) = log_b x - log_b y$ (Logaritmo do quociente)

A demonstração desta propriedade é semelhante a da **P5.**

P7: $log_b x^n = n log_b x$ (Logaritmo da potência)

Demonstração:

$$log_b x^n = log_b\,(x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)$$

Aplicando a propriedade P5 do produto, temos

$$log_b x^n = log_b x + log_b x + \ldots + log_b x$$

$$log_b x^n = n log_b x\ .$$

P8: $log_b \sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n} log_b x$ (Logaritmo da raiz)

Demonstração:

Escrevendo a raiz como potência de expoente fracionário e usando em seguida a propriedade da potência (**P7**), temos:

$$log_b x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} log_b x\ .$$

Exemplo 9.3.1. A Propriedade **P5** (produto) transforma o logaritmo da multiplicação de dois números, na soma dos logaritmos desses números. Como somar é mais fácil do que multiplicar, está aí uma aplicação de logaritmo.

Consideremos um retângulo de lados $a = 3{,}57\ m$ e $b = 7{,}478\ m$. Calcule a área do retângulo, usando logaritmos.

Solução: Seja $A = a \cdot b$. Aplicando logaritmo natural na equação, temos:

$ln\ A = ln\ (a \cdot b)$. Usando a propriedade P5, temos:

$ln\ A = ln\ a + ln\ b = ln\ 3{,}57 + ln\ 7{,}478 = 1{,}272565 + 2{,}0119653 = 3{,}28453$

Assim, $A = e^{\ 3{,}28453} = 26{,}9664\ m^2$.

Evidentemente, estas operações só são práticas se dispomos de uma calculadora.

Exemplo 9.3.2. A Propriedade **P7** (Potência) ajuda a resolver o cálculo de raízes, como $2^{\frac{1}{2}}$.

Solução: Seja $N = 2^{\frac{1}{2}}$. Aplicando logaritmo natural em ambos os lados da equação, temos:

$ln\ N = ln\ 2^{\frac{1}{2}}$. Aplicando a propriedade **P7**, temos:

$ln\ N = \frac{1}{2} ln 2 = \frac{1}{2} \cdot 0,693147 = 0,346573$

$N = e^{0,346573} = 1{,}414213...$

EXERCÍCIOS 9.3

9.3.1 Use a definição e as propriedades para calcular os logaritmos:

(a) $log_2\left(\frac{1}{8}\right)$ b) $log_3\left(\frac{1}{81}\right)$ c) $log_2\,(32 \cdot 64)$ d) $log_3 \sqrt[4]{3}$

9.3.2 Calcule o valor de cada expressão:

(a) $3^{log_3 16}$ c) $6^{1-log_6 2}$ e) $5^{-log_5 1/3}$

(b) $2^{3+log_2 5}$ d) $3^{-2+log_3 18}$ f) $4^{-\frac{1}{2}+2log_2 5}$

9.3.3 Explique porque $a^{-log_a y} = 1/y$.

9.3.4 Calcule o valor da variável:

(a) $9 = 3 \cdot e^x$ b) $1000 = 10^{5t+1}$ c) $300 = 0,5 \cdot e^{t^2}$ d) $\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot e^{t^2-1}$

9.3.5 Determine o valor de x na equação

$$\frac{1}{2} ln x + ln 3 = ln 5$$

9.3.6 Sabendo que o raio do sol é 695800 km, calcule o volume:

(a) Usando diretamente a fórmula do volume da esfera: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

(b) Aplicando as propriedades de logaritmo na fórmula da esfera, transformando os produtos em somas.

9.4 Logaritmos na base "10" , base "e" e mudança de base

Os logaritmos podem ser obtidos em calculadoras científicas nas bases *10* (logaritmos decimais) e base "*e*" (logaritmos naturais). Lembre que *e = 2,71828182845...* é um número irracional.

Para simplificar a notação escrevemos:

$$log_{10}x \;=\; logx \quad \text{(logaritmos decimais)}$$

e

$$log_e x \;=\; ln\text{x} \;. \qquad \text{(logaritmos naturais)}$$

Exemplo 9.4.1. Qual é o logaritmo natural de 1,5, ou $log_e\ 1{,}5 = ln\ 1{,}5 = N$?

Solução: Nesse caso, não temos um número inteiro N tal que $e^N = 1,5$.

Porém, sabemos que $0 < N < 1$, pois $e^0 = 1 < 1{,}5$ e $e^1 = 2.71.... > 1{,}5$.

Existem várias maneiras de calcular esses logaritmos não inteiros. Uma delas é executando a seguinte soma:

$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \ldots$ (4.1)

Esta soma dá resultados coerentes se $-1 < x < 1$. Então, substituindo $x = 0{,}5$ na soma acima e executando até a potência 10 de x, obtemos

$ln\ 1{,}5 = 0{,}4054643681720...$

sendo que o valor correto é 0,4054651081082...

Pode-se observar que há coincidência até a quinta casa decimal após a vírgula. Para melhorar esse resultado, basta calcular a soma (4.1) com mais termos. ■

Os logaritmos podem ser calculados diretamente usando a tecla "log" de uma calculadora científica. Essa tecla dá o logaritmo na base *10* de números positivos. Assim,

$$log_{10}0,5 = -0.3010299956640\,.$$

Observe que este é um número irracional, portanto o resultado obtido é aproximado. Mesmo assim, fazendo

$$10^{-0.3010299956640} = 0,5.$$

Para calcular logaritmos naturais (base *e*) na calculadora usa-se a tecla "*ln*" .

Mudança de base

Consideremos o seguinte problema: Precisamos calcular o logaritmo de um número *x* na base "*b*" e para isso temos como calcular logaritmos na base "*a*" (como por exemplo na base 10, disponível nas calculadoras).

A chamada propriedade da mudança de base resolve esse problema:

$$log_b x \quad = \quad \frac{log_a x}{log_a b} \tag{4.2}$$

Demonstração:

Se $log_b x = N$ então $b^N = x$ e (4.3)

$log_a x = M$ então $a^M = x$. (4.4)

Substituindo x de (4.3) no logaritmo de (4.4), temos

$$log_a x = log_a b^N$$

Usando a propriedade P7 (logaritmo da potência), temos

$log_a x = N log_a b$ (4.5)

Mas de (4.3), $log_b x = N$, então substituindo N em (4.5)

$log_a x = log_b x \cdot log_a b$ e finalmente,

$log_b x = \frac{log_a x}{log_a b}$ ■

Exemplo 9.4.2. Qual é o logaritmo de *5* na base *e* ?

Solução: Fazendo os mesmos procedimentos do Ex. 4.1, porém usando a tecla "ln" obtemos *ln 5 = 1,6094379124...* . ■

EXERCÍCIOS 9.4

9.4.1 Calcule os logaritmos usando a definição e confira o resultado na calculadora:

(a) *log 10* c) log 1000 e) log 0,00001

(b) *log 100000* d) log 10^{10} f) log 0,001

9.4.2 Calcule os logaritmos nas bases indicadas usando a calculadora:

(a) log 2 c) log 20 e) ln 18 g) ln *e*

(b) ln 7 d) log 70 f) log 10000 h) log 1

9.4.3 Calcule os logaritmos nas bases indicadas, a partir da base 10, obtida na calculadora.

(a) $log_2 3$ b) $log_5 2$ c) $log_5 10$ d) $ln 5$

9.4.4 Calcule os logaritmos nas bases indicadas, a partir da base "*e*" , obtida na calculadora.

(a) $log_2 3$ b) $log_5 2$ c) $log_5 10$ d) $log 5$

9.4.5 Escreva os logaritmos na base 10.

(a) ln 2 b) ln 20 c) ln 18 d) ln *e*

9.4.6 Escreva os logaritmos na base "*e*" .

(a) log 25 b) log 7 c) log 1/5 d) log $\frac{3}{4}$

9.4.7 Verifique se $log\frac{3}{4} = log3 - log4$ usando valores obtidos na calculadora.

9.5 Equações logarítmicas

Equações que apresentam variáveis na base, no logaritmo ou no antilogaritmo são chamadas equações logarítmicas. A resolução destas equações consiste em aplicar a definição e/ou as propriedades dos logaritmos, de modo a obter identidades nas quais seja possível isolar a variável.

Exemplo 9.5.1. Resolva $log_2(3-4x) = 0$.

Solução: Usando a definição de logaritmo, tem-se:

$2^0 = 3 - 4x$. Isolando x obtém-se $x = 1/2$.

Este mesmo resultado pode ser obtido usando a propriedade **P1**. O leitor pode observar que substituindo $x = 1/2$ na equação dada obtém-se uma identidade.

Para que o logaritmo dado exista é necessário que

$3-4x \geq 0$ ou, isolando x,

$x \leq 3/4$. (intervalo de existência do logaritmo dado)

Como $1/2 \leq 3/4$ pode-se dizer que a solução da equação **existe e é compatível** com o intervalo de valores de x em que existe o logaritmo dado ■

Exemplo 9.5.2. Resolva $log_x(2x+3) = 2$.

Solução: Usando a definição de logaritmo, tem-se:

$x^2 = 2x + 3$ ou $x^2 - 2x - 3 = 0$.

As soluções desta equação de 2º grau são $x_1 = -2$ e $x_2 = 3$.

Para que o logaritmo dado exista é necessário que $2x+3 \geq 0$ ou, isolando x,

$x \geq -3/2$. (intervalo de existência do logaritmo dado)

Nesse caso, $x_1 = -2$ **não é compatível** com a definição de logaritmo, porém $x_2 = 3$ é. Então, a solução da equação dada é apenas $x = 3$ ■

Exemplo 9.5.3. Resolva $log_x(-x+2) = 2$.

Solução: Usando a definição de logaritmo, tem-se:

$x^2 = -x + 2$ ou $x^2 + x - 2 = 0$.

As soluções desta equação de 2º grau são $x_1 = 1$ e $x_2 = -2$.

Porém, a base do logaritmo tem que ser positiva e diferente de 1. Como a base é x, e as soluções são $x_1 = 1$ ou $x_2 = -2$, a equação logarítmica não tem solução, ou dizemos que a solução da equação logarítmica não é compatível com a definição de logaritmo■

Exemplo 9.5.4. *5 log x = 3 log x + 2*

Solução: Agrupando os logaritmos no lado esquerdo da equação dada, tem-se:

5 log x - 3 log x = 2 e

2 log x = 2. Aplicando a propriedade da potência (**P7**) tem-se:

$log x^2 = 2$. Aplicando a definição tem-se: (este logaritmo tem base 10)

$10^2 = x^2$, portanto *x = 10* é a solução da equação dada ■

Exemplo 9.5.5. As propriedades **P3** e **P4** podem ser entendidas como propriedades das operações inversas. Observe que na **P3** o logaritmo anula a exponencial e na **P4** a exponencial anula o logaritmo. Podemos usar estas propriedades para resolver equações exponenciais e logarítmicas.

a) Resolva $e^{2x} = 5$.

Solução: Aplicando *ln* nos dois lados da equação, temos:

$ln\,(e^{2x}) = ln\,5$. Usando a Propriedade **P3** no lado esquerdo, temos:

$2x = ln\,5$ e

$x = \frac{1}{2} ln 5$ ■

b) Resolva *log 3x = 2 .*

Solução: Aplicando exponencial de base 10 em ambos os lados da equação, temos:

$10^{log(x)(3x)} = 10^2$. Pela Propriedade **P4,** temos:

3x = 100 e *x = 100/3.*

É claro que nesse caso, poderíamos ter usado a definição de logaritmo■

EXERCÍCIOS 9.5

9.5.1 Resolva as equações logarítmicas:

(a) $log_{2x} 16 = 2$ c) $log_{\sqrt{2}}(3x-1) + log_{\sqrt{2}} x = 2$

(b) $log_2(2x-1) = log_2 x^2$ d) $2log^2 x - 5log x + 2 = 0$

9.5.2 Resolva as equações exponenciais usando logaritmo:

(a) $10 = 2^{3x}$ d) $2 = 10^x \cdot 10^{3x}$

b) $500 = 5 \cdot e^{2t^2}$ e) $e^{x^2+3} = e^{4x}$

c) $e^{3x+2} = 1$ f) $2 = 10^{x-4}$

9.5.3 Resolva as equações usando a Propriedade P1.

a) $log_{\sqrt{2}}(x+3) = 0$ c) $log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+2x+1\right) = 0$

b) $ln(2x-3) = 0$ d) $log_2\left(\frac{4}{3}x + \frac{1}{2}\right) = 0$

9.5.4 Verifique se é possível resolver o Exercício 5.3 de outro modo.

9.5.5 Resolva as equações usando a Propriedade P3. a) $log_2 2^{x+3} = 3x-1$ c) $log_{\frac{1}{2}}(1/2)^{x^2} = 1/4$

b) $log_3 3^{2x+1} = x^2-2$ d) $log_5\left(5^2\right)^{2x} = 8$

9.5.6 Verifique se é possível resolver o Exercício 5.5 de outro modo.

9.5.7 Resolva as equações usando as propriedades do produto, quociente e potência de logaritmo (P5, P6 e P7). a) $log3x = 2$ d) $log3x = 2logx+5$

b) $logx^2 = 10$ e) $log_2(x+3) = 2+log_2(x-5)$

c) $log3x-2 = 3logx$ f) $log\left(3x^2+7\right) - log(3x-2) = 1$

9.5.8 Resolva as equações usando as propriedades que achar conveniente. a) $log_3(log_2 x) = 1$ c) $ln\frac{x^3}{3} = 0$

b) $ln2^{2x} = 10$ d) $e^{x^{1/2}} = 4$

9.5.9 A equação $C = C_o\left(1+\frac{i}{100}\right)^t$ relaciona o capital (C, em reais) com o tempo (t, em meses) de uma aplicação do tipo poupança. Determine o tempo necessário para atingir o capital C=*5000* reais, sabendo que o capital inicial C_o = *750* reais e a taxa percentual de rendimento é i = *0,5%* ao mês.

9.5.10 Faça uma fórmula para calcular o tempo t de investimento de uma aplicação financeira. (Utilize a equação do exercício anterior)

9.5.11 A concentração C do reagente de uma reação química de 1ª ordem é dada pela função $C = C_o e^{-kt}$ onde C_o é a concentração inicial (moles), k é uma constante e t o tempo (segundos). Determine uma fórmula para calcular o tempo em que a concentração do reagente é a metade da concentração inicial ($C = C_o/2$).

9.5.12 Resolva as equações e indique as propriedades utilizadas:

(a) $x^{logx} = 100x$ c) $log_{\frac{1}{2}}(log_2 x) = 1$

(b) $log[3-2log(1+x)] = 0$ d) $\frac{2-logx}{1-logx} - 3 = 0$

9.6 Funções compostas e inversas

Os conceitos de função composta e funções inversas são importantes para entender a relação entre as funções exponenciais e logarítmicas.

9.6.1 Funções compostas

A notação *f(x)* indica que o nome da função é f e que a variável independentes é x.

Assim, se temos $f(x) = x^3+1$ e queremos $f(2)$, colocamos **2 no lugar de *x*** na expressão da função:

$f(2) = 2^3 + 1 = 9.$

Se queremos $f(-5)$, colocamos **-5 no lugar de *x*** na expressão da função:

$f(-5) = (-5)^3 + 1 = -124.$

Definição 9.6.1. Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$. A função composta $f(g(x))$ é obtida substituindo $x = g(x)$ na expressão de $f(x)$.

Da mesma forma, a função composta $g(f(x))$ é obtida substituindo $x = f(x)$ na expressão de $g(x)$. ■

Exemplo 9.6.1. Dadas as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x+1$, determine $f(g(x))$ e $g(f(x))$.

Solução:

$f(g(x)) = (x+1)^2 = x^2+2x + 1.$

$g(f(x)) = (x^2) + 1 = x^2 + 1.$

9.6.2 Funções inversas

Na matemática existem operações inversas. A adição e a subtração são operações inversas:

$5 + (+3)–(+ 3) = 5.$

Observemos que adicionar e depois subtrair (+3) em 5, não alterou o 5.

Da mesma forma a multiplicação e a divisão são operações inversas:

$$\frac{5 \cdot 3}{3} = 5$$

Observemos que multiplicar o 5 por 3 e em seguida dividir por 3, não alterou o 5.

Se temos um número a, e aplicamos uma operação e a sua inversa sobre este número, estas operações se anulam, e o número a não é alterado. Esta ideia é semelhante para funções inversas.

Definição 9.6.2. Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$.

$f(x)$ é inversa de $g(x)$ se $f(g(x)) = x$. Então $g(x) = f^{-1}(x)$ ■

Exemplo 9.6.2. Dadas as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$ verifique se f e g são inversas.

Solução: Usando a definição, compomos f e g:

$f(g(x)) = \sqrt{(x^2)} = x$.

Aplicamos g no lugar de x em f e o resultado foi x, como pede a definição. Portanto f e g são inversas ■

Para encontrar a inversa f^{-1} de uma função f fazemos o seguinte procedimento:

Passo 1: Escrevemos a equação $y = f(x)$.

Passo 2: Se possível, resolvemos essa equação para x, escrevendo x em função de y.

Passo 3: Trocamos x por y na equação obtida. Essa função é f^{-1} .

Exemplo 9.6.3. Encontre a função inversa de $f(x) = x^3$.

Solução:

Passo 1: $y = x^3$.

Passo 2: Aplicando raiz cúbica em ambos os lados da equação, temos:

$$\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

Passo 3: Trocando x por y temos: $y = \sqrt[3]{x}$.

Então, a inversa de f é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ■

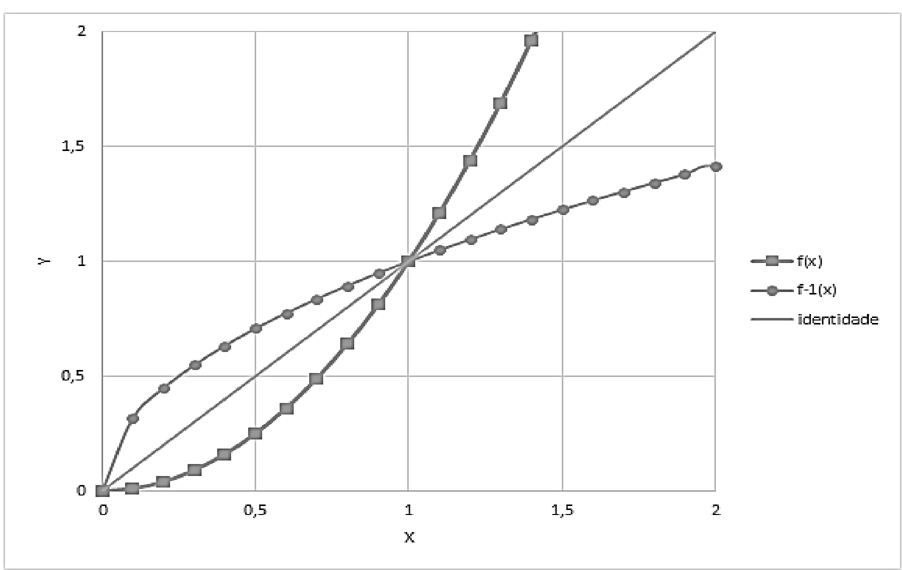
As funções inversas apresentam duas propriedades importantes:
1ª) O domínio de f é a imagem de f^{-1} e o domínio de f^{-1} é a imagem de f .
2ª) Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à função identidade $y = x$.

Exemplo 9.6.4. Observemos os gráficos das funções

$f(x) = x^2$, para $x > 0$ e a sua inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

O domínio de f é igual a imagem de f^{-1} . O domínio de f^{-1} é igual a imagem de f .

As funções f e f^{-1} são simétricas em relação à função identidade $y = x$. ■



Exemplo 9.6.5. Verifique se a função $f(x) = x^2$ tem inversa para $x \in R$.

Solução: aplicando os passos para inversão obtemos $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$. Porém, esta inversa não satisfaz o conceito de função (para o mesmo x, deve existir um e somente um y). Nesse caso, dizemos que *f* não tem inversa para qualquer *x* real. No entanto, se considerarmos somente $x > 0$, *f* terá inversa, como concluímos no Ex. 7.4. ■

A questão discutida no Ex. 7.5 leva a considerar a seguinte restrição para existência de função inversa:

Para que uma função *f(x)* tenha inversa em um intervalo *(a,b)* é necessário que esta função seja estritamente crescente ou decrescente para $x \in (a,b)$.

Exemplo 9.6.6. Mostre que as funções exponenciais $f(x) = e^{ax}$ são inversas das funções logarítmicas $g(x) = \frac{1}{a} lnx$, para $x \in R$, onde $a \neq 0$ é uma constante real.

Solução: Pela definição de função inversa, se *f(x)* e *g(x)* são inversas, então $f(g(x)) = x$.

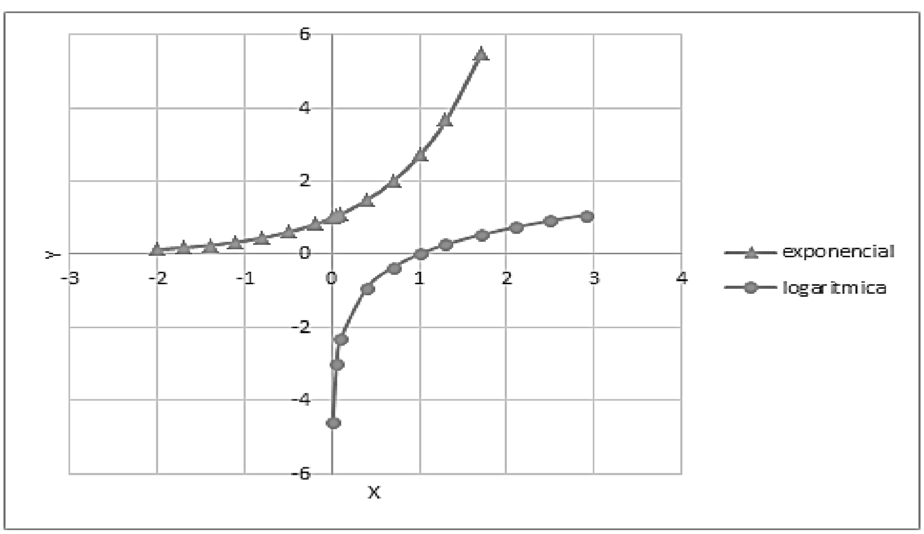
Fazendo a composição *f(g(x)), temos:*

$f(g(x)) = e^{a \cdot \frac{1}{a} lnx} = e^{lnx}$. Usando a **P3** dos logaritmos, temos que $e^{lnx} = x$. Portanto,

$f(g(x)) = x$ e $g(x) = f^{-1}(x)$.

Na Figura 7.2 podemos verificar que :

1. Os gráficos de *f(x)* e *g(x)* são simétricos em relação à função identidade e
2. O domínio de *f(x)* é igual à imagem de *g(x)* , assim como domínio de *g(x)* é igual à imagem de *f(x)*. ■



EXERCÍCIOS 9.6

9.6.1 Dadas as funções f e g, faça as composições $f(g(x))$ e $g(f(x))$.

a) $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x - 1$ c) $f(x) = e^x$ e $g(x) = lnx$

b) $f(x) = x^4$ e $g(x) = \sqrt[4]{x}$ d) $f(x) = 10^x$ e $g(x) = logx$

9.6.2 Verifique se as funções são inversas, aplicando as composições $f(g(x))$ e $g(f(x))$.

a) $f(x) = 3x+1$ e $g(x) = \frac{1}{3}(x-1)$ c) $f(x) = e^{2x}$ e $g(x) = \frac{1}{2}lnx$

b) $f(x) = 3x^4$ e $g(x) = \frac{1}{3}\sqrt[4]{x}$ d) $f(x) = x+1$ e $g(x) = x-1$

9.6.3 Faça o gráfico das funções do Ex. 2 e verifique se são simétricas em relação à função identidade.

9.6.4 Determine a função inversa das funções dadas:

a) $f(x) = x^2 + 3$ b) $g(x) = \sqrt[4]{x+2}$ c) $H(x) = 5e^{x+2}$ d) $K(x) = log^2 x$

9.6.5 Faça o gráfico das funções do Ex. 4 e verifique se são simétricas em relação à função identidade.

9.6.6 Verifique se para as funções do Ex. 4, a composição da direta sobre sua inversa, resulta apenas x.

9.6.7 Verifique se as funções do Ex. 4 são estritamente crescentes ou decrescentes para $x \in R$.

9.7 Função logarítmica

Definição 9.7.1. Uma função logarítmica de base b associa a cada valor x, um valor y igual ao logaritmo na base b de x. Ou,

$y = f(x) = log_b x$. (6.1)

Pela definição de logaritmo, $x > 0$ e $0 < b \neq 1$. Assim, o domínio da função (5.1) será o conjunto de todos os números reais maiores do que zero e a imagem qualquer número real. Ou,

$Df(x) = \{x \in R/x > 0\}$ e $Imf(x) = \{y \in R\}$ ■

Exemplo 9.7.1. Faça o gráfico e analise o comportamento da função $f(x) = y = log(x)$.

Solução: O gráfico das funções logarítmicas pode ser feito atribuindo valores a x e calculando os correspondentes valores de y. Para gerar o gráfico da Fig. 1 foram tomados os seguintes valores de x = { 0.01, 0.1, 0.5, 0.8, 1, 2, 3, 5, 8, 10, 20, 50, 100 } . (Use a calculadora para conferir os valores de y).

O domínio da função logarítmica é: $Df(x) = \{x \in R/x > 0\}$

A Imagem da função logarítmica é: $Imf(x) = \{y \in R\}$.

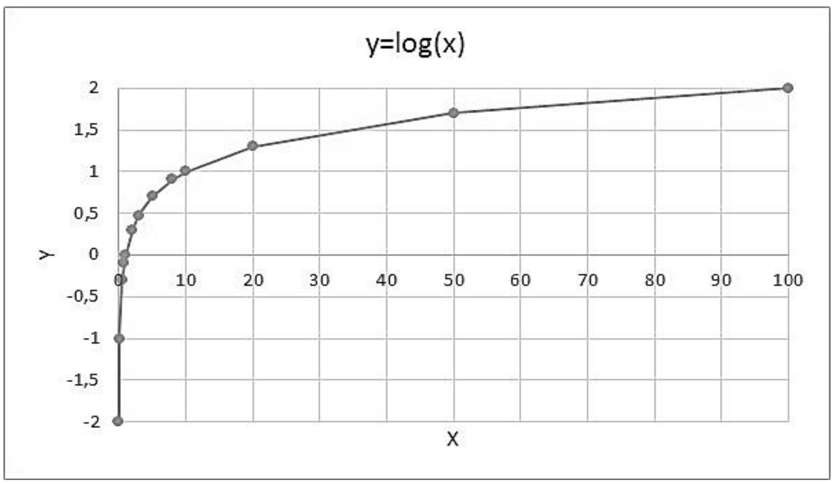
A função $y = log(x)$ tem algumas características importantes:

1. É crescente para todo seu domínio.

2. Cresce rapidamente para 0 < x < 1 e lentamente para x > 1.

3. Na medida que *x* tende a *zero* pela direita, a função (*y*) tende a menos infinito (- ∞).

4. Na medida que *x* tende a + ∞ , a função (*y*) tende a menos infinito ($-\infty$), mesmo que lentamente■



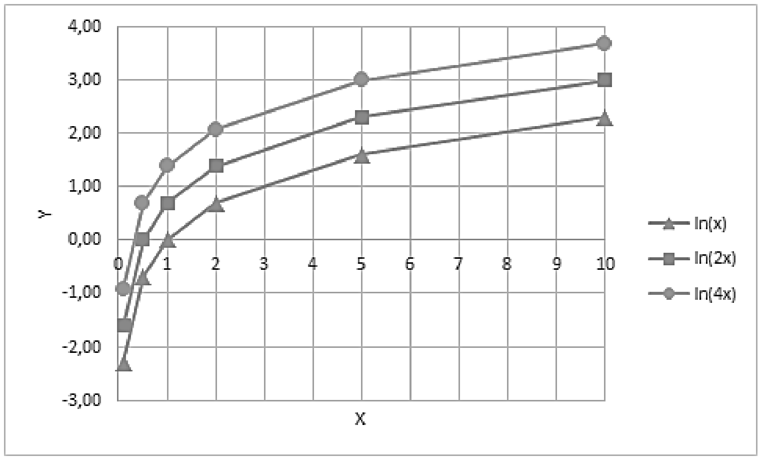
Exemplo 9.7.2. Faça e compare os gráficos das funções:

1. *y = ln x* ; (b) *y = ln (2x)* e (c) *y = ln (4x).*

Solução: Nesse exemplo, temos a função logarítmica natural (base *e*). A Tab. 1 apresenta os valores das funções dadas para alguns valores de *x*.

x	ln(x)	ln(2x)	ln(4x)
0,1	-2,30	-1,61	-0,92
0,5	-0,69	0,00	0,69
1	0,00	0,69	1,39
2	0,69	1,39	2,08
5	1,61	2,30	3,00
10	2,30	3,00	3,69

A Figura 7.2 apresenta os gráficos das funções dadas.



O leitor deve observar que a variação do coeficiente do x, no antilogaritmo (1, 2 e 4):

1. Alterou a posição da curva.

2. Modificou o ponto onde as curvas cortam o eixo X (raízes das funções).

Para encontrar a raiz, faz-se $y = 0$ em cada função e resolve-se a equação logarítmica. Por exemplo, na função $y = ln(2x)$, tem-se:

$0 = ln(2x)$. Aplicando a função exponencial e^x em ambos os lados, tem-se:

$e^0 = e^{ln(2x)}$. Pela Propriedade P4 dos logaritmos, tem-se:

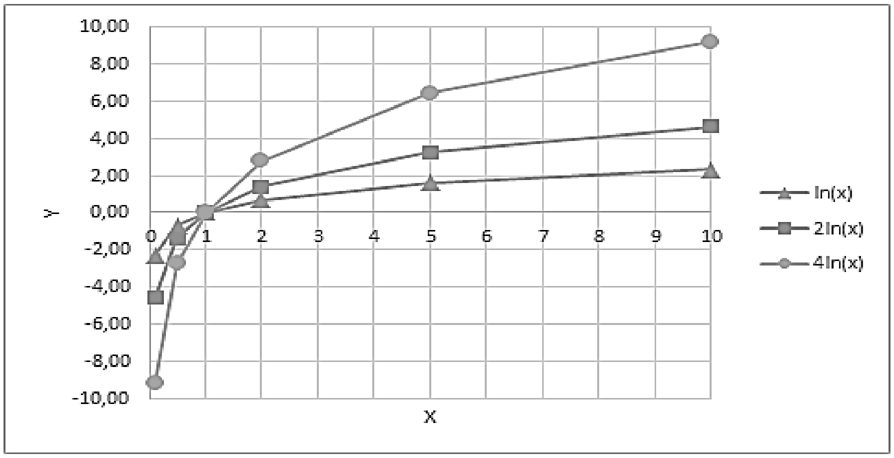
$1 = 2x$

$x=1/2$ é a raiz da função $y = ln(2x)$ ■

Exemplo 9.7.3. Faça e compare os gráficos das funções:

1. $y = ln\ x$; (b) $y = 2\ ln\ (x)$ e (c) $y = 4ln\ (x)$.

Solução: Com procedimento análogo ao Exemplo 7.2, obtém-se os pontos de cada função. A Figura 2 apresenta os gráficos das funções dadas.



O leitor deve observar que a variação do coeficiente do logaritmo (1, 2 e 4):

1. Alterou a posição da curva.

2. Todas as curvas interceptam o eixo *X* em *(1,0)*.

Exemplo 9.7.4. Faça e compare os gráficos das funções:

1. *y = ln x* ; (b) *y = -ln (x)* (c) *y = ln (-x)* e (c) *y = -ln (-x)*.

Solução: Com procedimento análogo ao Exemplo 7.1, obtém-se os pontos de cada função. As Figuras 7.4 e 7.5 apresentam os gráficos das funções dadas.

O leitor deve observar que:

1. A troca do sinal do logaritmo 'gira' a função em torno do eixo X:

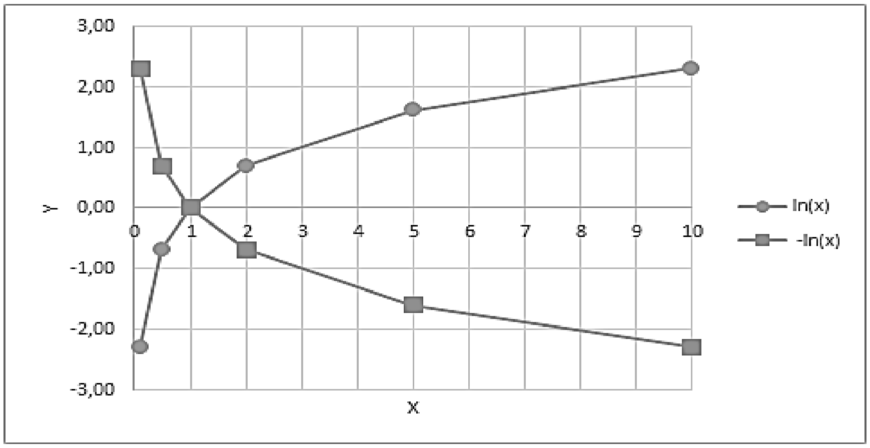
   Veja os gráficos de *y = ln x* e *y = -ln (x);*

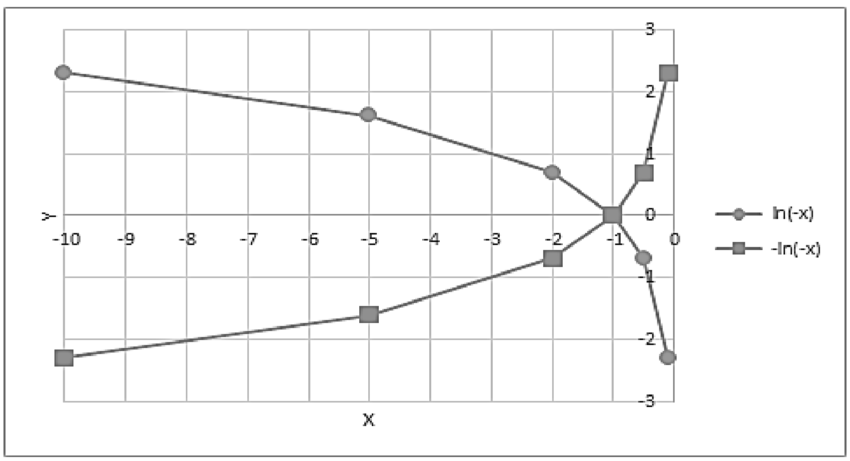
   e também de *y = ln (-x)* e *y = -ln (-x).*

2. A troca do sinal do antilogaritmo 'gira' a função em torno do eixo Y:

Compare os gráficos de *y = ln x* e *y = ln (-x)*

e também *y = -ln (x)* e *y = -ln (-x).*





EXERCÍCIOS 9.7

9.7.1 Faça os gráficos das funções usando uma tabela de valores de x e y. (use a calculadora para encontrar os logaritmos)

(a) $F(x) = log\ x$ c) $G(x) = log\ (2x)$

(b) $H(x) = 2\ log\ x$ d) $J(x) = log\ (x^2)$

9.7.2 a) Faça o gráfico das funções $y = ln\ x$ e $y = e^x$.

b) Faça o gráfico da função $y = x$.

9.7.3 Verifique se existe simetria entre as funções $y = ln\ x$ e $y = e^x$, em relação à função identidade $y = x$.

9.7.4 Faça um esboço do gráfico das funções logarítmicas sem usar a tabela.

(a) $F(x) = ln\ (2x)$ c) $Y(x) = -ln\ (3x)$

(b) $P(x) = -log\ (-5x)$ d) $Q(x) = 2\ log\ (2x)$

9.7.5 Faça um esboço do gráfico e determine o domínio e a imagem das funções:

(a) $F(x) = ln\ (x - 2)$ c) $Y(x) = -ln\ (3+x)$

(b) $P(x) = -ln\ (3- x)$ d) $Q(x) = 2\ log\ (x + 1)$

9.7.6 Utilize um aplicativo computacional para fazer o gráfico das funções. Determine o domínio e a imagem.

(a) $F(x) = ln\ (x^2)$ c) $Y(x) = ln\ (1\text{-}3x)$

(b) $P(x) = log^{\ 2}(x)$ d) $Q(x) = log\ (x^2 - 1)$

9.7.7 Calcule as raízes das funções: a) $F(x) = log\ (2x - 1)$ c) $Y(x) = -log\ (5 - x^2)$

b) $P(x) = -ln\ (3- 6x)$ d) $Q(x) = 2\ log\ (-x + 1)$

9.7.8 Faça um esboço do gráfico das funções manualmente e sem fazer tabela. Interprete as informações contidas nos coeficientes.

(a) $F(x) = ln\ x +2$ c) $Y(x) = ln\ x - 3$ e) $R(x) = ln(-x) +1$

(b) $P(x) = -log\ x +3$ d) $Q(x) = 2ln\ x + 1$ f) $T(x) = ln(-2x)\ -2$

9.8 Aplicações de funções exponenciais e logarítmicas

Os logaritmos, atualmente, são mais utilizados para resolução de equações exponenciais e como funções, do que para sua função original, dos tempos de Napier e Bürgi, de facilitar multiplicações e divisões de números muito pequenos ou muito grandes. Problemas de decaimento ou crescimento exponencial envolvem necessariamente o uso dos logaritmos.

9.8.1 Aplicações financeiras

Considere-se uma aplicação financeira do tipo poupança, em que um capital inicial $C_o =$ *R$ 1.000,00* é depositado no mês t = 0 e é corrigido mensalmente com uma taxa de juros constante de $i = 0,5\ \%$ do capital presente. O capital a cada mês pode ser calculado da seguinte maneira:

$C(1) = 1000 + 1000 \cdot (0,5/100) = 1000 \cdot (1+0,5/100) = 1000 \cdot 1,005$

$C(2) = 1000 \cdot 1,005 \cdot 1,005 = 1000 \cdot 1,005^2$

$C(3) = 1000 \cdot 1,005^2 \cdot 1,005 = 1000 \cdot 1,005^3$

Ou para este caso, $C(t) = 1000 \cdot 1,005^t$ onde t é o tempo em meses. (8.1)

Com a função (8.1) pode-se calcular o capital (montante) da poupança para qualquer tempo t. Com essa função também pode-se calcular o tempo necessário para que a poupança atinja determinado capital C, simplesmente resolvendo (8.1) para t:

$C = 1000 \cdot 1{,}005^t$. Dividindo por *1000*, tem-se

$\frac{C}{1000} = 1{,}005^t$. Aplicando logaritmo natural em ambos os lados da equação, tem-se

$ln\frac{C}{1000} = ln 1{,}005^t$. Usando a propriedade da potência, tem-se

$ln\frac{C}{1000} = t \cdot ln 1{,}005$. Isolando t, tem-se

$t = \frac{ln\frac{C}{1000}}{ln 1{,}005}$. ■

EXERCÍCIOS 9.8

9.8.1 Escreva a Eq. 8.1 na forma generalizada. Utilize C_o para expressar o capital inicial e j para a taxa de juros, sendo

$j = 1 + \frac{i}{100}$.

9.8.2 Calcule o capital de uma poupança sendo C_o= *R\$ 500,00* , *i=0,45* ao mês, depois de *3* anos.

9.8.3 Calcule o tempo necessário de uma poupança, para que o capital atinja o valor de *C = R\$ 20.000,00*, sendo C_o=*R\$ 1.500,00* e *i=0,6* ao mês.

9.8.4 Calcule a taxa de juros j e a taxa de rendimento mensal i de uma aplicação tipo poupança em que C_o=*R\$ 500,00*, sendo que o capital inicial ficou aplicado durante 5 anos e chegou ao montante de R\$ 2.500,00.

9.8.5 Um pai emprestou *R\$ 5.500,00* a seu filho, que demorou *3* anos para pagar. Considerando a taxa de *i=0,6* ao mês, qual é a dívida do filho?

9.8.2 Desvalorização de bens

Alguns bens, tais como carros, apartamentos, casas, barcos e outros sofrem desvalorização com o passar do tempo. Se a cada ano o bem desvalorizasse sempre o mesmo valor teríamos uma taxa constante de desvalorização. Porém, não é o que ocorre na realidade. Na maioria dos casos essa desvalorização não é proporcional ao tempo, ou seja, a taxa de desvalorização não é constante. A Tabela 8.2.1 dá o preço de mercado de dois modelos de carro.

Tabela 8.2.1 – Preços (em reais x 1000) de dois modelos de carro em função do tempo (em anos).

	0	1	2	3	4	5	6
Modelo 1 (R\$ x1000)	49	43	35	32	30	28	27
Modelo 2 (R\$ x1000)	30	25	23	22	20,8	20	19,5

Podemos associar a desvalorização de cada modelo a um número e com ele tomar a decisão de compra. Consideremos a função exponencial como o modelo matemático da desvalorização dos carros.

$P(t) = P_o \cdot e^{-kt}$ (8.2.1)

Onde P é o preço (em R\$ x1000), P_o é o preço do carro novo, t é o tempo (anos) e k é a constante característica da depreciação, de cada modelo de carro. A depreciação será maior, quanto maior for o valor de k.

Para calcular o valor de k, precisamos resolver a Eq. (8.2.1) para k. Dividindo esta equação por P_o, temos:

$\frac{P(t)}{P_0} = e^{-kt}$.

Aplicando logaritmo natural em ambos os lados da equação e usando a propriedade P3 dos logaritmos, temos:

$ln\left(\frac{P(t)}{P_0}\right) = -kt$. dividindo por $(-t)$ (para $t \neq 0$), temos:

$k = -\frac{1}{t} ln\left(\frac{P(t)}{P_0}\right)$ (8.2.2)

Se aplicamos a Eq.(8.2.2) para cada ano, obteremos, para esse exemplo, seis valores de k, cuja média chamaremos de k médio (k_m). Para os dados da Tab. 8.2.1 obtivemos os seguinte valores:

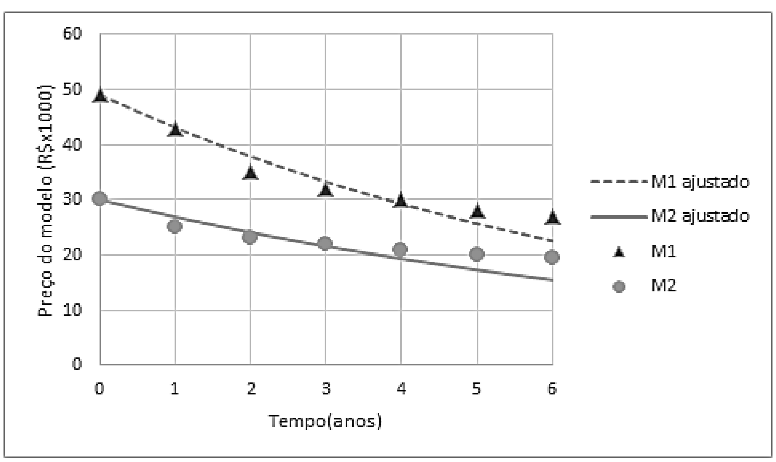
Modelo 1: $k_m = 0{,}12913$

Modelo 2: $k_m = 0{,}1105$.

Portanto, o Modelo 2 tem depreciação menor que o Modelo 1.

Levando k_m na Eq.(8.2.1) no lugar de k, obtemos uma função que descreve a desvalorização do modelo em função do tempo (Eq. 7.2.3).

$P(t) = P_0 e^{-k_m t}$. (8.2.3)



A Figura 8.2.1 apresenta os dados da Tab. 8.2.1 (pontos) e as curvas de depreciação (curvas ajustadas) obtidas com a Eq. 8.2.3 e os respectivos valores de k_m para os modelos 1 e 2.■

9.8.3 Linearização de gráficos de funções exponenciais

Em algumas aplicações de funções exponenciais do tipo

$y = f(x) = Ae^{kx}$,

podemos escrever *f(x)* com uma reta, aplicando logaritmo natural nos dois lados da equação e usando a propriedade do produto, temos:

$ln\, y = ln\, A \;+\; ln\, e^{kx}$. Usando a propriedade P3 dos logaritmos, temos:

$ln\, y = ln\, A \;+ kx$. Fazendo $Y = ln\, y$ e $b = ln\, a$, temos:

$Y = b + kx.$ (8.3.1)

A Eq. (8.31) é uma equação de reta, onde b é o coeficiente linear e k o angular. Com esta equação, o cálculo de k ou de x fica elementar:

$k = \frac{1}{x}(Y - b)$ e $x = \frac{1}{k}(Y - b)$.

9.8.4 Crescimento ou decrescimento populacional

8.4.1 – Crescimento de bactérias

A quantidade de bactérias que se reproduzem por mitose (cada ser se divide em dois seres idênticos), considerando que não haja morte de indivíduos, pode ser modelada da seguinte maneira:

Geração zero : 1 bactéria

1ª geração : 2 bactéria ; $P = 2^1$

2ª geração : 4 bactéria ; $P = 2^2$

3ª geração : 8 bactéria ; $P = 2^3$

4ª geração : 16 bactéria; $P = 2^4$

5ª geração : 32 bactéria; $P = 2^5$

A função $P(n) = 2^n$ (8.4.1)

onde P é o número de bactérias e n é a geração, permite calcular a população para qualquer tempo, desde que se saiba o tempo t necessário para a reprodução de uma geração. Por exemplo, se $n = 5$ e $t = 2\ h$, em *10* horas a população é *32* bactérias.

Se precisamos saber em quanto tempo a população atingirá 5000 indivíduos, aplicamos logaritmo de base *2* na Eq. 8.4.1 e temos :

$log_2 P = log_2 2^n$. Utilizando a propriedade P3 dos logaritmos, temos:

$n = log_2 P$. Usando $P = 5000$, temos:

$n = log_2 5000$. Escrevendo este logaritmo na base e, temos:

$n = \frac{ln 5000}{ln 2} = 12,28$ gerações. Ou, aproximadamente *12* gerações, o que significa *24 h*.

8.4.2 – Decaimento bacteriano

As bactérias que vivem no organismo humano, quando colocadas na água ou no solo, não sobrevivem por muito tempo. Assim, a população de bactérias presentes nos esgotos tende a diminuir. O fenômeno é conhecido como "decaimento bacteriano" e é modelado pela função

$$P(t) = P_o \cdot e^{-kt} \qquad (8.4.2)$$

Onde P é a população (número de indivíduos), P_o é a população inicial, t é o tempo (horas) e k é a constante ou taxa característica do decaimento, a qual depende de vários fatores, dentre eles o tipo de bactéria, a temperatura e a acidez do ambiente. O decaimento será maior, quanto maior for o valor de k.

Geralmente, o interesse de um pesquisador é determinar o tempo necessário para que metade da população seja exterminada. Esse tempo é conhecido como *meia vida*. Na meia vida a população é $P = P_o/2$. Substituindo esse valor de P na Eq. 8.4.2, temos:

$P_o/2 = P_o \cdot e^{-kt}$. Cancelando P_o .

$\frac{1}{2} = e^{-kt}$. Aplicando logaritmo natural nos dois lados da equação e isolando t, temos

$t = -\frac{1}{k}\ ln\left(\frac{1}{2}\right)$ que é a meia vida.

9.8.5 Concentração de medicamentos no organismo humano

Quando um medicamento é ingerido a corrente sanguínea o distribui por todo o organismo. Consideremos que a concentração (massa, em gramas, por unidade de volume de sangue) é a mesma em cada parte do corpo. A eliminação do medicamento ocorre na medida que o sangue vai passando pelos rins. Portanto, uma função concentração (C(t)) é decrescente, e tem um valor máximo inicial C_o. Supondo que a variação da concentração seja uma função da massa medicamento presente no organismo, podemos propor um modelo exponencial, com a seguinte função:

$$C(t) = C_o e^{at} \qquad (8.5.1)$$

Onde C é a concentração do medicamento (g), C_o é a dose inicial, t é o tempo e a uma constante real, sendo $a < 0$.

O tempo de meia-vida, ou simplesmente a meia-vida (τ) é o tempo necessário para que metade da quantidade inicial C_o seja eliminada. É comum usar a ideia de meia-vida para investigar a variação da concentração de medicamentos no sangue. Assim, fazendo $C(\tau) = C_o/2$ e substituindo em (8.5.1), temos:

$$\frac{C_o}{2} = C_o e^{a\tau} \qquad (8.5.2)$$

Cancelando C_o , aplicando logaritmo natural em ambos os membros de (8.5.2) e resolvendo para τ , temos uma expressão para o tempo de meia-vida:

$$\tau = -\frac{1}{a}ln2 \qquad (8.5.3)$$

Se a meia-vida do medicamento é conhecida, podemos resolver a Eq. (8.5.3) para a.

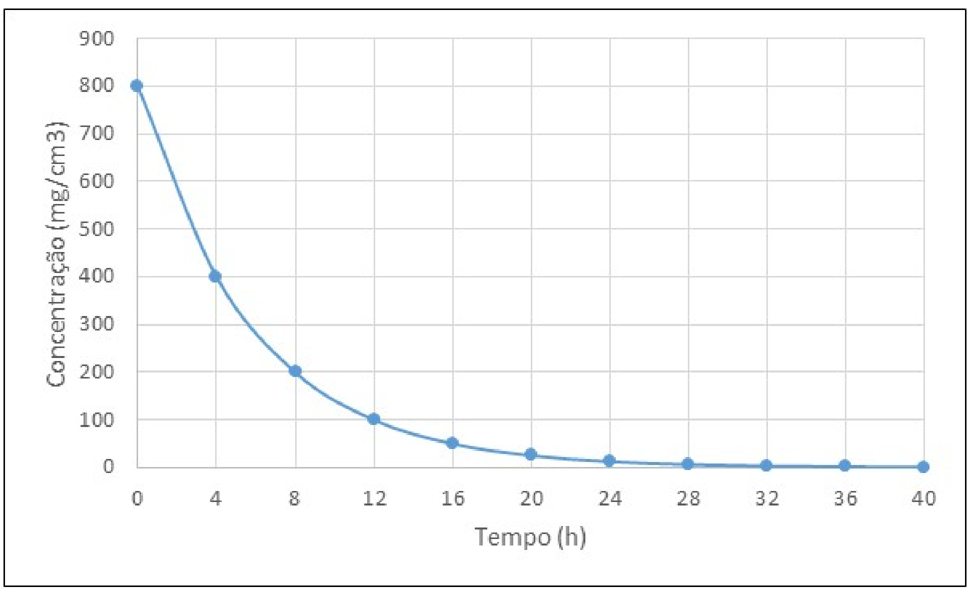
$$a = -\frac{1}{\tau}ln2 \qquad (8.5.4)$$

8.5.1 – Concentração do medicamento: dose única

Consideremos um medicamento cuja meia-vida é τ = *4 h* e a dose C_o = *800 mg*. Com a Eq.(4) podemos calcular a, obtendo a = *-0,17329*. Substituindo estes dados na Eq. (8.5.1), temos uma função que dá valores da concentração para cada instante de tempo, da dose inicial.

$$C(t) = 800e^{-0,17329t} \qquad (8.5.5)$$

A Fig. 1 apresenta os valores da concentração obtidos com a função da Eq.(5), onde pode-se verificar que o tempo para a eliminação da metade da dose inicial (meia-vida) é *4 h* e que em torno de *40h* a concentração é mínima, para estes dados. É importante observar que a posição da curva depende da meia-vida do medicamento, que é, em resumo, um ponto da curva onde $C = C_o/2$ e que caracteriza o comportamento do medicamento no organismo.



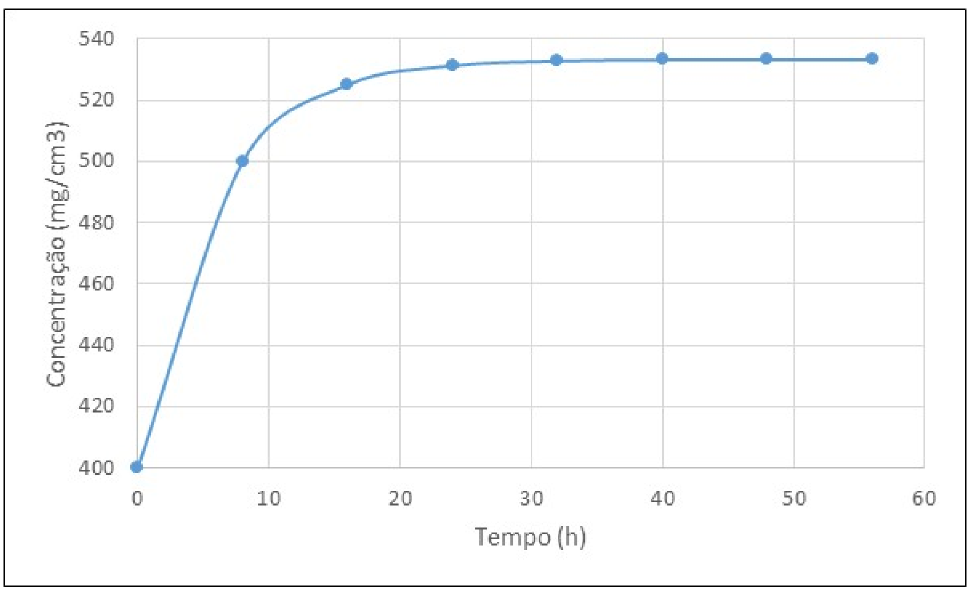
8.5.2 – Concentração do medicamento: doses múltiplas

Consideremos que um paciente tenha ingerido o medicamento de 8 em 8h (intervalo de tempo de ingestão) e que cada dose seja eliminada com a mesma meia-vida. Para calcular a concentração total em função do tempo, devemos calcular a concentração de cada dose independentemente, utilizando a Eq.(8.5.1). Somando as concentrações em tempo de ingestão, obtemos a concentração de todas as doses em função do tempo. A Tab. 1 apresenta este método e foi obtida com os mesmos dados do item **8.5.1** (dose única).

Observando as somas (Total) em função do tempo, percebemos elas tendem a um valor específico, que é o limite da concentração do medicamento no organismo. Esse efeito pode ser observado claramente na Fig.8.5.2.

Tabela 8.5.1 – Concentração do medicamento para múltiplas doses

Doses	Tempo (h)							
	0	8	16	24	32	40	48	56
1	400	100	25	6,25	1,5625	0,390625	0,097656	0,024414
2		400	100	25	6,25	1,5625	0,390625	0,097656
3			400	100	25	6,25	1,5625	0,390625
4				400	100	25	6,25	1,5625
5					400	100	25	6,25
6						400	100	25
7							400	100
8								400
TOTAL	400	500	525	531,25	532,8125	533,2031	533,3008	533,3252



EXERCÍCIOS 9.8

9.8.1 Utilize a Eq. 8.2.3 para calcular o valor do carro Modelo 1 depois de 10 anos.

9.8.2 Pesquise dados de preços médios de carro de seu interesse na Tabela Fipe, para ao menos, 5 anos. Repita os procedimentos do Exemplo 8.2 e calcule k_m. Faça um gráfico de Preço por tempo, para visualizar a curva de depreciação do carro.

9.8.3 Um apartamento custava R$ 500.000,00 em 2000, R$ 450.000,00 em 2010 e R$ 400.000,00 em 2014. Determine o coeficiente de desvalorização k_m .

9.8.4 Utilize a ideia de linearização das funções exponenciais para calcular k_m na equação de desvalorização de bens (Eq. 8.2.1).

9.8.5 Utilize a ideia de linearização das funções exponenciais para calcular t na equação de desvalorização de bens (Eq. 8.2.1).

9.8.6 Se uma população de bactérias decresce, em um determinado período, de acordo com a função $P(t) = 100e^{-0,5t}$, onde P é o número de indivíduos e t é o tempo em minutos:

9.8.7 Aplique logaritmo na expressão da função, para escrevê-la na forma da Eq. 8.3.1. Determine os coeficientes angular e linear.

9.8.8 Calcule o tempo em que a população será 1/3 da população inicial (100 indivíduos).

9.8.9 Faça o gráfico das funções $P(t)$ e da função linearizada obtida no ítem (a).

9.8.10 Uma população de bactérias se reproduz em função do tempo de acordo com a função $P(t) = 2^t$:

9.8.11 Calcule o número de bactérias depois de *100s*.

9.8.12 Em quanto tempo a população será de *500* indivíduos.

9.8.13 Calcule a taxa k de decaimento (Eq. 8.4.2), sendo que em *80* s a população se reduziu à metade da população inicial.

9.8.14 Em um tempo $t = 0\ h$ a população de bactérias era de *1000000* de indivíduos. Passadas *6 h* a população se reduziu à metade da população inicial. Qual será a população quando $t = 9\ h$?

9.8.15 Sabendo que a meia vida de uma população é de *3 h*:

9.8.16 Qual é o valor da taxa de decaimento k ?

9.8.17 Em quanto tempo a população se reduzirá a $P_o/4$?

9.8.18 Utilizando as Eqs. (8.5.1) a (8.5.3) e uma tabela eletrônica, calcule as concentrações de um medicamento ingerido em dose única para um período de *48 h*, com $C_o = 500mg/cm^3$ com os seguintes tempos de meia-vida: (apresente os resultados em um mesmo gráfico)

a) $\tau = 5\ h$ b) $\tau = 8\ h$ c) $\tau = 10\ h$ d) $\tau = 12\ h$

9.8.19 Desenvolva uma tabela eletrônica semelhante à Tab. 8.5.1, de maneira que a meia-vida, a dose inicial e o tempo de ingestão sejam manipuláveis pelo usuário. Calcule a concentração de medicamentos para os seguintes dados:

a) Dados $\tau = 4\ h$ e $C_o = 800mg/cm^3$, determine o intervalo de ingestão para que a concentração máxima seja próxima de $1000\ mg/cm^3$.

b) Dados $\tau = 4\ h$ e $C_o = 800mg/cm^3$, determine o intervalo de ingestão para a concentração máxima fique próxima de $915\ mg/cm^3$.

9.9 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESPOSTAS 9.2

9.2.1 a) 3 b) 6 c) 3/2 d) -3 e) 2 f) -5/2

9.2.2 a) 5 b) -4 c) -2 d) 3 e) 5 f) $\frac{1}{4}$
g) -5 h) -2/3 i) -1/2

9.2.3 a) 81 b) 2 c) $\sqrt[125]{5}$ d) $2+2\sqrt{2}$ e) -2 f) 2

9.2.4 Não faz sentido calcular um logaritmo de base 1, pois ao aplicar a definição teremos 1^n= x, e independente de *n* será encontrado x = 1, devido a uma propriedade das potências onde 1^n = 1.

9.2.5 Não faz sentido calcular um logaritmo com base negativa pois em determinadas equações não será possível encontrar um número que satisfaça a identidade.

9.2.6 Não faz sentido calcular o logaritmo de um número negativo, pois nem sempre será possível encontrar uma solução que pertença aos números reais.

9.2.7 0 < x < 1

9.2.8 a) x > 2 b) x > $\frac{1}{4}$ c) x > $\frac{1}{2}$ e x $\neq$ 1 d) x > 4

RESPOSTAS 9.3

9.3.1 a) -3 b) -4 c) 11 d) $\frac{1}{4}$

9.3.2 a) 16 b) 40 c) 3 d) 2 e) 3 f) 625/2

9.3.3 Pela propriedade P7 temos que $(-1)\,log_a y = log_a y^{-1}$. Usando P4, temos $a^{log_a (y)^{-1}} = y^{-1} = \frac{1}{y}$.

9.3.4 a) ln 3 = 1,0986... b) 2/5 c)$\sqrt{ln600}$ = 2,5292.... d) $\sqrt{1+ln\frac{2}{3}}$

9.3.5 $\frac{25}{9}$

9.3.6 a) V = 1,411 x 10^{18} b) V = 1,411 x 10^{18}

RESPOSTAS 9.4

9.4.1 a) 1 b) 5 c) 3 d) 10 e) -5 f) -3

9.4.2 a) 0,3010... b) 1,9459... c) 1,3010... d) 1,8450... e) 2,8903... f) 4
g) 1 h) 0

9.4.3 a) 1,5849... b) 0,4306... c) 1,4306... d) 1,6094...

9.4.4 a) 1,5849... b) 0,4306... c) 1,4306... d) 0,6989...

9.4.5 a) $\frac{log2}{loge}$ b) $\frac{log20}{loge}$ c) $\frac{log18}{loge}$ d) $\frac{loge}{loge} = 1$

9.4.6 a) $\frac{ln25}{ln10}$ b) $\frac{ln7}{ln10}$ c) $\frac{-ln5}{ln10}$ d) $\frac{ln3-ln4}{ln10}$

9.4.7 - 0,1249... = (0,4771...) – (0,6020) = - 0,1249...

RESPOSTAS 9.5

9.5.1 a) 2 b) 1 c) 1 d) S={$\sqrt{10}, 100$ }

9.5.2 a) $\frac{log10}{log2}$ b)$\sqrt{\frac{ln100}{2}}$ c) $-\frac{2}{3}$ d) $\frac{log2}{4}$ e) S={ 1,3} f) 4 + log 2

9.5.3 a) -2 b) 2 c) S={ -2,0} d) $\frac{3}{8}$

9.5.4 É possível resolver usando a definição de logaritmo.

9.5.5 a) 2 b) S={ -1,3} c) $\frac{1}{2}$

9.5.6 É possível resolver usando a definição de logaritmo.

9.5.7 a) 100 b) 10^5 c)$\sqrt{\frac{3}{100}}$ d) $\frac{3}{10^5}$ e) $\frac{23}{3}$ f) S={ 1,9}

9.5.8 a) 8 b) 10/ln4 c) $\sqrt[3]{3}$ d) $\ln^2 4$

9.5.9 Aproximadamente 381 meses.

9.5.10 $t = \frac{log\frac{C}{C0}}{log(x)\left(1+\frac{i}{100}\right)}$

9.5.11 $t = -\frac{1}{k}ln\left(\frac{1}{2}\right)$

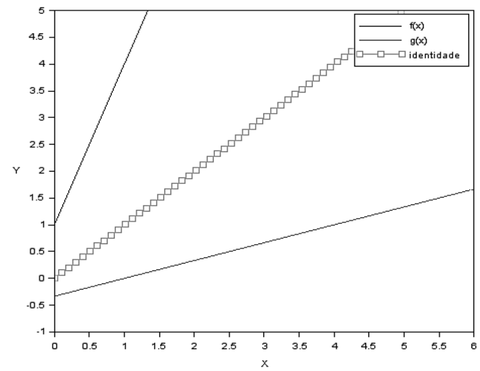
9.5.12 a) (usar $u = log\ x$); $x_1 = 100$ e $x_2 = 0{,}1$ b) 9 c)$\sqrt{2}$ d)$\sqrt{10}$

RESPOSTAS 9.6

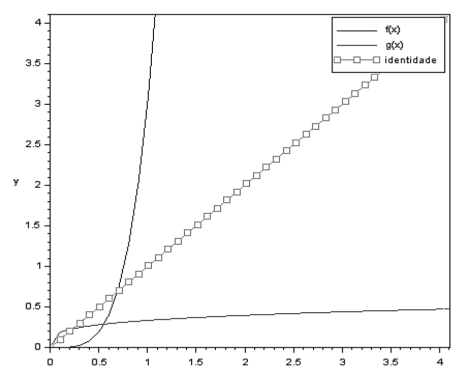
9.6.1 a) f(g(x)) = $9x^2$-6x+1 ; g(f(x)) = $3x^2$-1 b) f(g(x)) = x ; g(f(x)) = x
c) f(g(x)) = x ; g(f(x)) = x d) f(g(x)) = x ; g(f(x)) = x

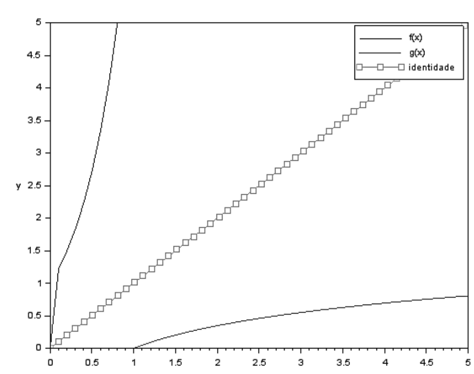
9.6.2 a,b,d são funções inversas; c não é inversa

9.6.3 a)

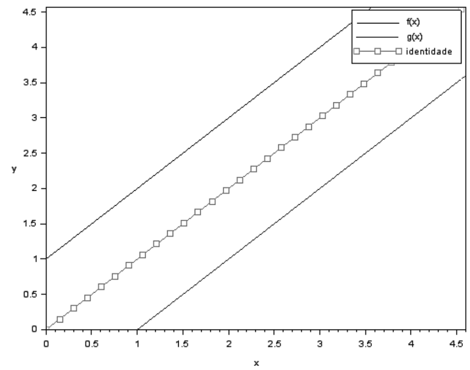


b)





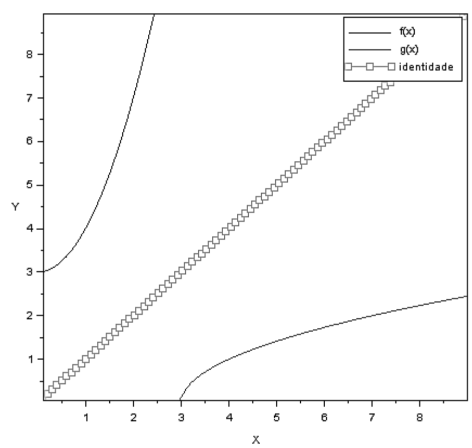
9.6.4



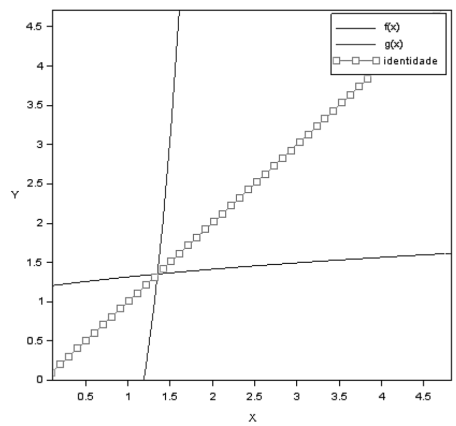
9.6.5

9.6.6 a)$\sqrt{x-3}$ b) x^4-2 c) ln (x/5) – 2 d) 10

9.6.7 a)



b)



9.6.8 c)

9.6.9 d)

9.6.10 A composição da direta de todas as funções sobre suas inversas resultam em x.

9.6.11 a) Crescente para x > 0

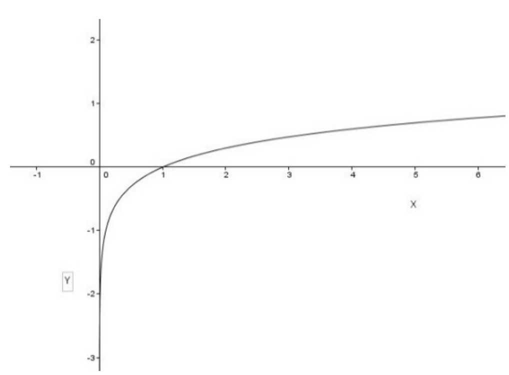
9.6.12 b) Crescente para x > -2

9.6.13 c) Decrescente para x < 0

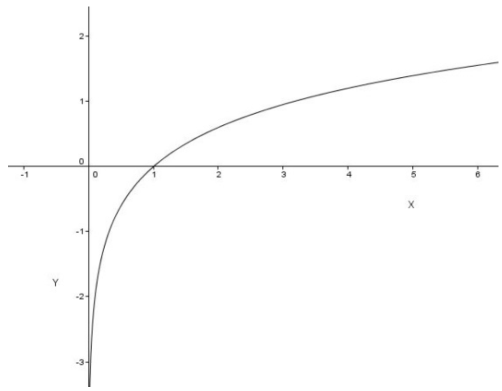
9.6.14 d) Crescente para x < 1

RESPOSTAS 9.7

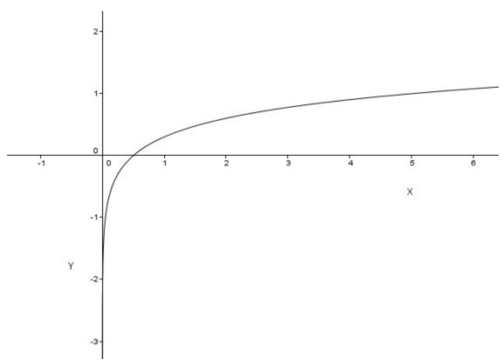
9.7.1 a)



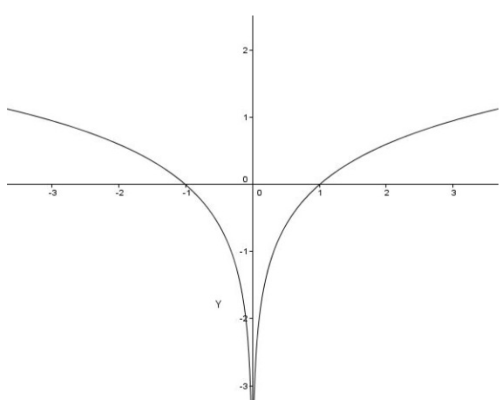
b)



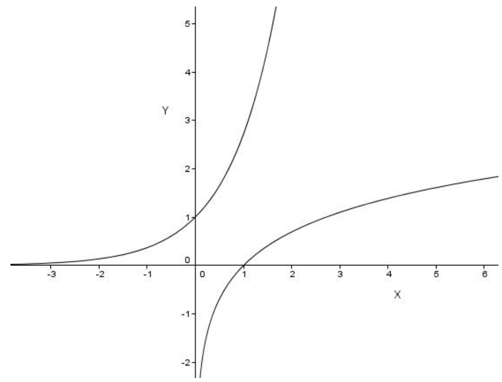
c)

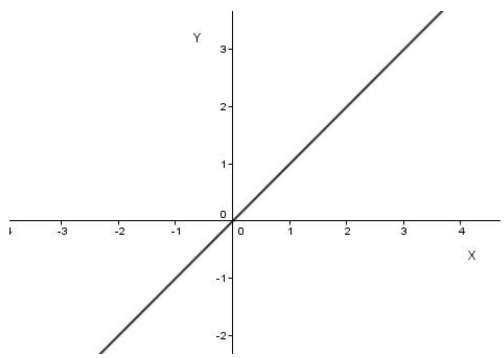


d)

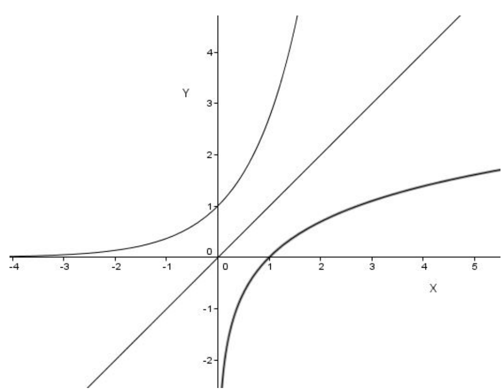


9.7.2 a)



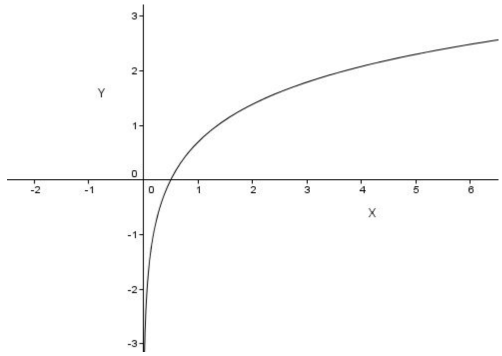


b)

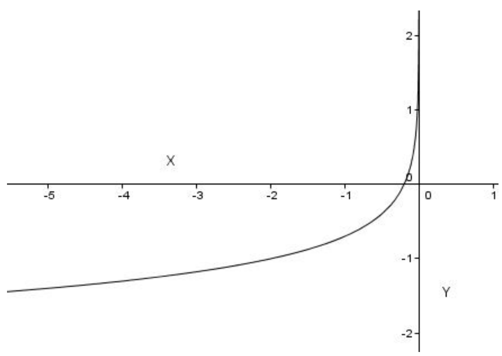


c) Em relação a reta y = x é possível notar que a função *ln x* é simétrica a e^x.

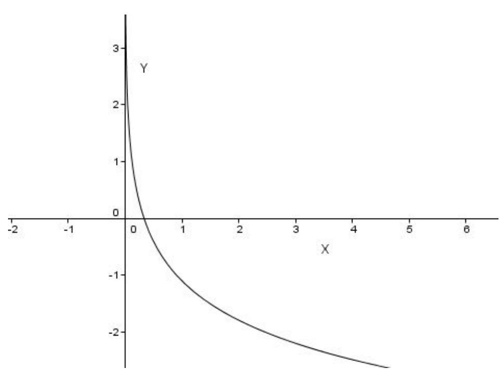
9.7.3 a)



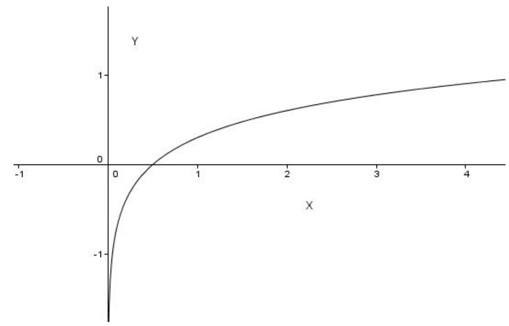
b)



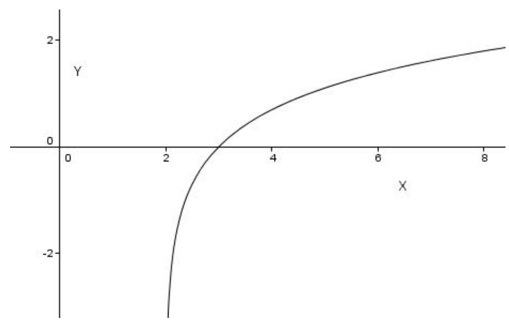
c)



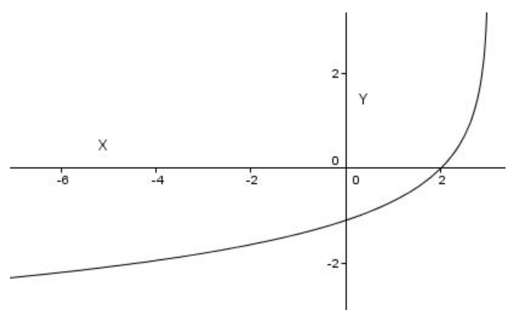
d)



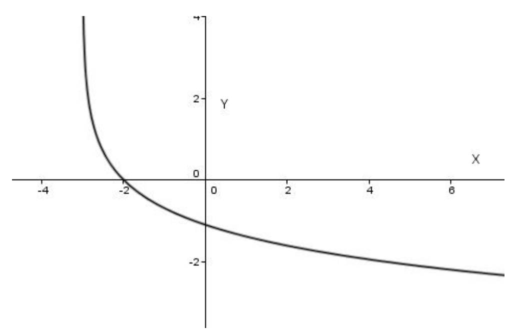
9.7.4 a)



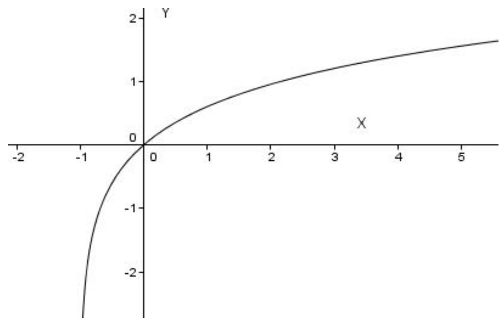
b)



c)



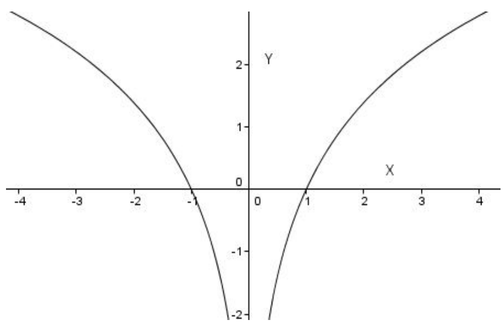
d)



9.7.5 a)

D = { x ∈ R }

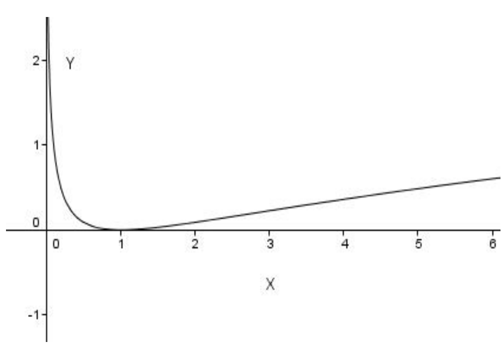
Im = { y ∈ R}



b)

D = { x ∈ R / x > 0}

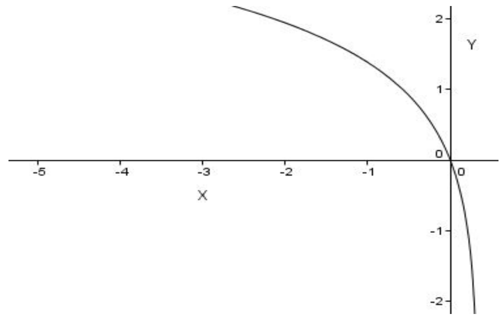
Im = { y ∈ R / y ≥ 0}



c)

D = { x ∈ R / x < 1/3}

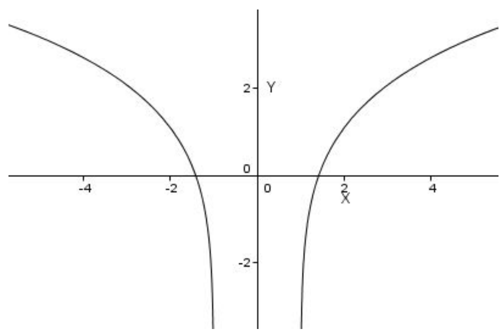
Im = { y ∈ R }



d)

D = { x ∈ R / -1 > x > 1}

Im = { y ∈ R}



9.7.6 a) 1 b) 1/3 c) 0 d) 0

RESPOSTAS 9.8

9.8.1 $C(t)=C_0.j^t$

9.8.2 587,71 reais

9.8.3 36,08 meses

9.8.4 2,7 % ao mês

9.8.5 6 821, 65 reais

9.8.6 13,47 (xR$ 1000)

9.8.7 k_m=0,013234...

9.8.8 $k_m = -\frac{1}{t}.ln(x)\left(\frac{P}{P(0)}\right)$

9.8.9 $t = -\frac{1}{x}.ln\left(\frac{P}{P(0)}\right)$

Capítulo 10

Trigonometria e funções trigonométricas

10.1 Introdução

A trigonometria é a área da Matemática em que são estudadas as relações entre as medidas do triângulo retângulo. O interesse nesse assunto, provavelmente foi motivado pela necessidade de calcular distâncias e ângulos em problemas de Astronomia, Agrimensura e Navegações, há mais de 2.000 anos a.C, com os egípcios e babilônios. Na Grécia, Hiparco de Nicéia e Ptolomeu deram imensa contribuição, construindo tabelas de valores das razões trigonométricas, na segunda metade do século II a.C. O triângulo retângulo com lados inteiros já era conhecido dos egípcios, mas atribui-se o enunciado à Pitágoras ($\sim$ 570 a 496 a.C.).

Muitas soluções de problemas de geometria plana ou espacial são elaboradas com o uso das propriedades do triângulo retângulo. São exemplos a medição de distâncias, inclinações, áreas e volumes na topografia (medição de terras), nas engenharias (volume de madeira, peças, centros de massa) e na Física (módulo de vetores, decomposição de forças, etc.).

As funções trigonométricas são usadas como modelo matemático para descrever o comportamento de variáveis cíclicas como ondas mecânicas, corrente e tensão elétrica, oscilações de pêndulo, etc.

10.2 Ângulos, arcos e circunferência

Definição 10.2.1. Sejam duas retas r e s em um plano, com um ponto de interseção V (vértice). O ângulo entre r e s é a abertura entre estas retas.

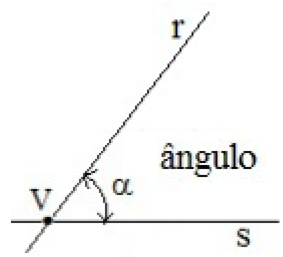


Figura 10.2.1: ângulo

A unidade de medida de ângulos, o grau, é obtida dividindo a volta inteira em 360 partes. O transferidor (Fig. 10.2.2) é um instrumento para medição de ângulos.

1 volta corresponde a 360º;
1/360 da volta inteira = 1 grau = 1°

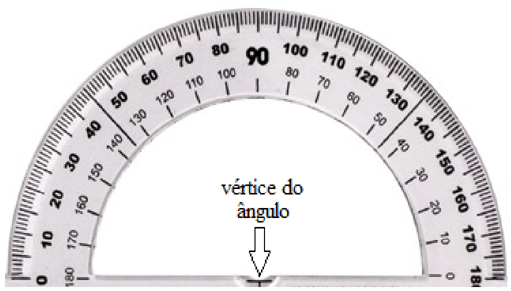


Figura 10.2.2: Transferidor

O ângulo de 90°é chamado de *ângulo reto* (ver Fig. 10.2.3)

O ângulo de 180°é chamado de *ângulo raso*. (ver Fig. 10.2.3)

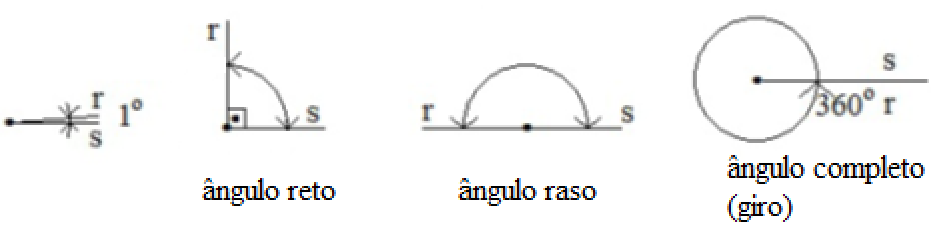


Figura 10.2.3: Grau e ângulos especiais

Para medições mais precisas, são usadas subunidades do grau:

1°= 60' (60 minutos)
1' = 60" (60 segundos) 1°= 60' · 60 = 3600"

Exemplo 10.2.1. (a) Quantos graus tem em 7270” ?

(b) Quantos segundos tem em 1°2’ 30” ?

Solução:

(a) Com base na relação entre graus, minutos e segundos, tem-se:

Dividindo 7270” /60 = 121’ e resta **10”** .

Dividindo 121’/60 = **2°** e resta **1’**.

Então: 7270” = 2°1’ 10” .

(b) Com base na relação entre graus, minutos e segundos, tem-se:

1°· 3600 = **3600”**

2’ · 60 = **120”**

Então, 1°2’ 30” = 3600” + 120” + 30” = 3750” ■

A *circunferência* é um arco, cujos pontos estão a mesma distância *r* (raio) de um ponto central. Na Fig. 2.4(a), os pontos A e A’ estão sobrepostos. Abrindo a circunferência no ponto A e estendendo-a, tem-se o comprimento da circunferência:

$$C = 2\,\pi\, r \qquad (10.1)$$

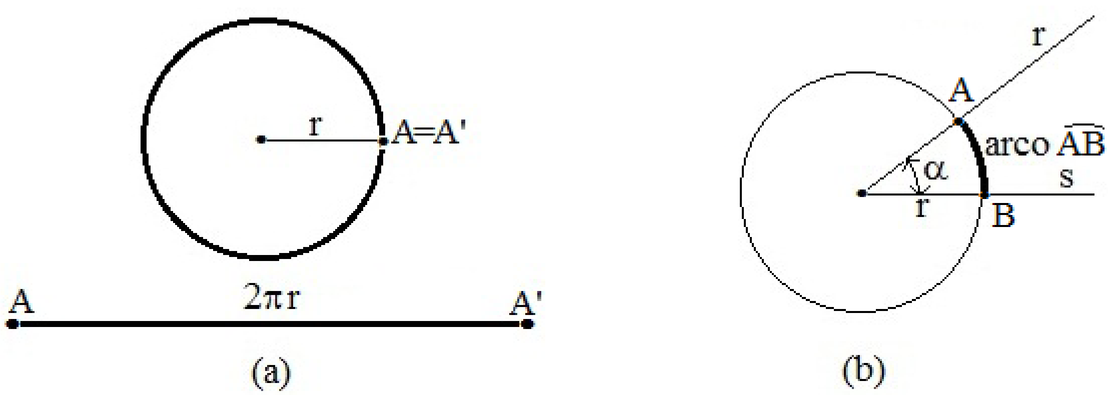


Figura 10.2.4: (a) circunferência (b) arco e ângulo

O *arco AB* de um *ângulo* é o comprimento sobre a circunferência de raio *r*, limitado pelas retas *r* e *s* que definem o ângulo, como mostra a figura 2.4(b).

A relação entre *ângulos* e *arcos* é dada pela proporção:

Arco		Angulo
$C = 2\pi r$	$\rightarrow$	360º
Arco	$\rightarrow$	α

Resolvendo a proporção para o arco, tem-se:

$Arco = \frac{\alpha\pi r}{180}$ ou $Arco = \frac{\alpha\pi}{180}$, se *r = 1* (10.2)
u.c. (unidade de comprimento).

Resolvendo a proporção para o *ângulo* , com *r = 1* u.c., tem-se:

$\alpha = \frac{arco180}{\pi}$ (10.3)

Exemplo 10.2.2. Calcule o comprimento da circunferência de uma lata cilíndrica, cujo raio mede *8 cm*.

Solução: Substituindo *r = 8 cm.* na Eq. 2.1, tem-se *C = 2 π 8 = 16 π cm*, o que dá

C = 50,26 cm ■

Exemplo 10.2.3. Determine os arcos correspondentes aos seguintes ângulos: 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°e 360°, considerando o raio igual a *1 u.c*.

Solução: Utilizando a Eq. 2.3, substitui-se o ângulo dado no lugar de e obtem-se as correspondências de ângulos e arcos, apresentadas na tabela abaixo.

Ângulos	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Arcos	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Exemplo 10.2.4. Determine o arco de um ângulo de *120*° sobre:

(a) uma circunferência cujo raio é 1 cm

(b) uma circunferência cujo raio é 2 cm.

Solução: Substituindo = 120°na Eq. 2.1, tem-se:

1. $Arco = \frac{120\cdot\pi\cdot 1}{180} = \frac{2\pi}{3} \sim 2,0943cm.$
2. $Arco = \frac{120\cdot\pi\cdot 2}{180} = \frac{4\pi}{3} \sim 4,1886cm$ ■

Definição 10.2.2. Dois ângulos e são *complementares* quando sua soma é 90°.

$\alpha + \beta = 90°$

Definição 10.2.3. Dois ângulos e são *suplementares* quando sua soma é 180°.

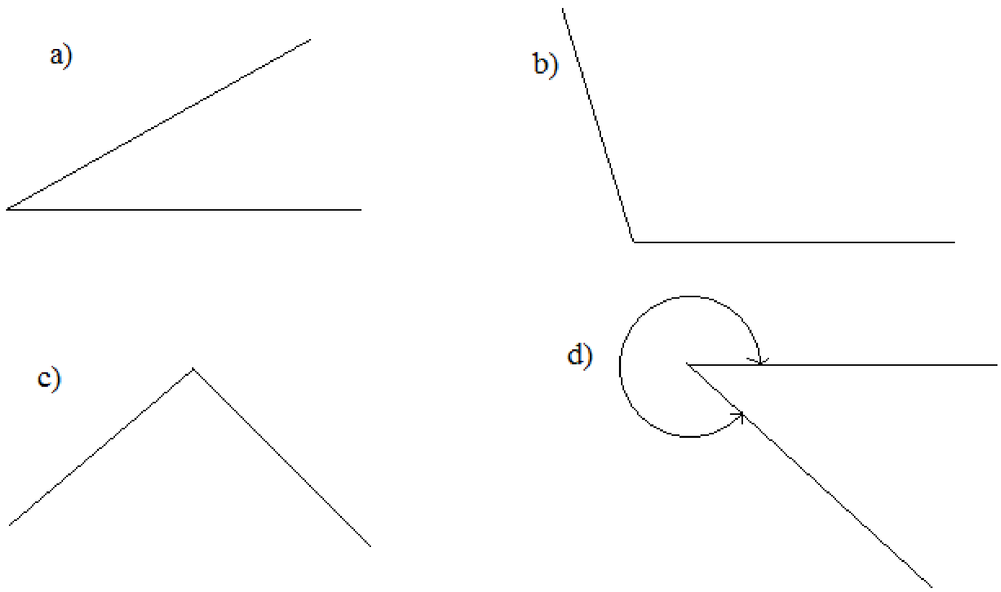
$\alpha + \beta = 180°$

Definição 10.2.4. Dois ângulos e são *replementares* quando sua soma é 360°.

$\alpha + \beta = 360°$

EXERCÍCIOS 10.2

10.2.1 Use o transferidor para medir os seguintes ângulos:



10.2.2 Calcule o comprimento da circunferência, cujo raio mede:

a) $r = 4\ cm$

b) $r = 0{,}5\ m$

c) $r = 10\ m$

d) $r = 2{,}5\ km$

10.2.3 Calcule o raio cuja circunferência mede:

a) $c = 6{,}28\ cm$

b) $c = 10\ m$

c) $c = 2{,}5\ cm$

d) $c = 100\ mm$

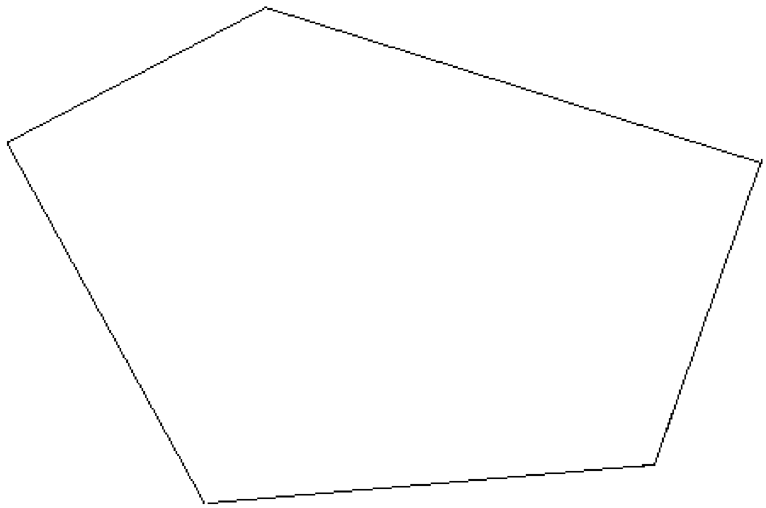
10.2.4 O raio oficial de uma bola de futebol deve estar entre 10,83 cm e 11,15 cm. Quanto mede a circunferência para estes raios?

10.2.5 Calcule a densidade de uma esfera cuja circunferência é $0{,}32\ m$ e a massa é $3\ kg$.

10.2.6 a) Meça os ângulos internos do polígono e adicione-os.

b) Verifique se a soma dos ângulos internos desse polígono satisfaz a fórmula

$S_n = 180\ (n\text{-}2)$ onde S_n é a soma dos ângulos internos e n é o número de ângulos.



10.2.7 Determine os arcos correspondentes aos seguintes ângulos, considerando o raio da circunferência igual a *1 u.c*.

a) $12°$

b) $150°$

c) $120°$

d) $330°$

e) $180°$

f) $300°$

g) $210°$

10.2.8 Determine os ângulos correspondentes aos seguintes arcos, considerando o raio da circunferência igual a *1 u.c*.

a) $\pi/4$

b) $2\pi/3$

c) $3\pi/4$

d) $5\pi/4$

e) $5\pi/6$

f) $4\pi/3$

g) $7\pi/3$

10.2.9 Um cano de esgoto tem o diâmetro interno de 100mm e espessura 1,5 mm. Determine a circunferência externa.

10.2.10 Três ângulos internos de um quadrilátero medem: $\hat{A}_1 = 80°30'\,12''$; $\hat{A}_2 = 95°35'\,23''$ e $\hat{A}_3 = 84°46'\,18''$. Calcule o quarto ângulo, sabendo que a soma de todos os ângulos internos do quadrilátero deve ser *360°*.

10.2.11 Um triângulo tem dois ângulos iguais e um diferente, que mede 59°3' 10" . Determine a medidas dos ângulos iguais.

10.2.12 Dados os ângulos, determine o ângulo complementar, suplementar e replementar:

a) 50°

b) 15°

c) 75°

d) 80°

e) 20°

10.2.13 Qual é o ângulo complementar de 34°35' 20" .

10.3 Triângulo retângulo

Definição 3.1 - Um triângulo é *retângulo* se um dos ângulos internos é reto.

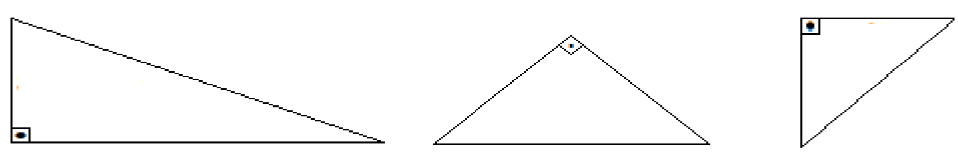
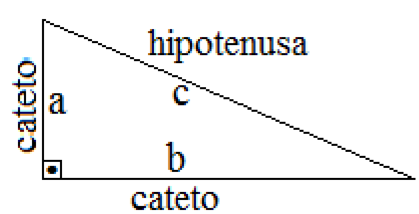


Figura 3.1 - Triângulos retângulos

No triângulo retângulo:

- o lado maior chama-se *hipotenusa*.

- os demais lados chamam-se *catetos*.

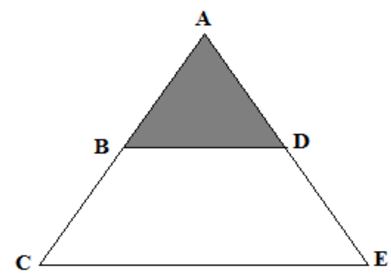


Definição 3.2 - Dois triângulos são semelhantes quando os ângulos correspondentes são congruentes (tiverem a mesma medida).

Propriedade dos triângulos semelhantes:

Se dois triângulos são semelhantes então as razões entre seus lados correspondentes são iguais.

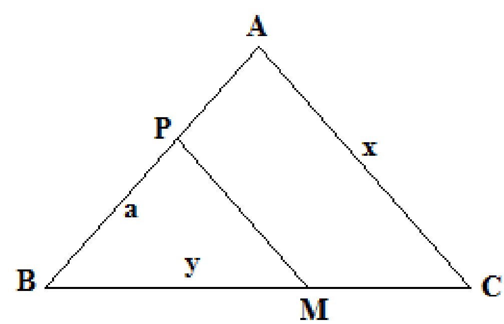
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$$



Exemplo 10.3.1. Dado os triângulos ABC e PQM, determine a medida dos lados indicados com letras *a* e *x*, sabendo que:

$AB = 6cm$; $PM = 5cm$; .

$BC = 9cm$ e $BM = 3cm$.



Solução: Usando a proporção entre os lados dos triângulos semelhantes, tem-se:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PM} = \frac{BC}{BM}$$

Substituindo os dados disponíveis, tem-se:

$$\frac{6}{a} = \frac{x}{5} = \frac{9}{3}$$

Resolvendo a segunda igualdade para x, tem-se: $x = 15\ cm$.

Substituindo $x = 15\ cm$ na segunda razão e resolvendo a primeira igualdade para a, tem-se: a = $2\ cm$ ■

Propriedades dos triângulos retângulos

Propriedade 1: Sejam α e β os dois ângulos internos não retos de um triângulo retângulo. Então α e β são complementares.

Demonstração: Pela fórmula da soma dos ângulos internos dos polígonos, para $n = 3$, tem-se:

$$S_3 = 180\,(3\text{-}2) = 180°.$$

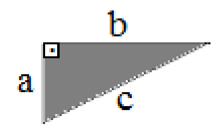
Somando os ângulos internos do triângulo retângulo, tem-se:

$$\alpha + \beta + 90° = 180° \text{ ou}$$

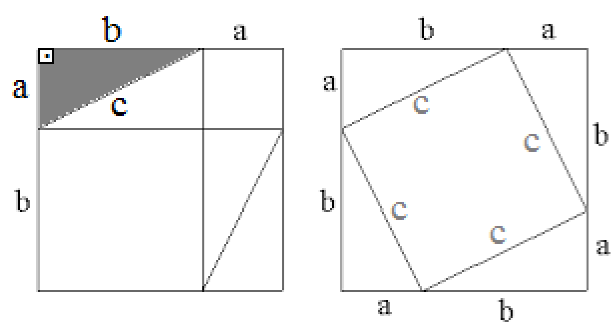
$\alpha + \beta = 90°$. Portanto, e são complementares ■ (3.1)

Propriedade 2 (Teorema de Pitágoras): Se a e b são os catetos e c é a hipotenusa de um triângulo retângulo. Então, $a^2 + b^2 = c^2$.

Demonstração: Seja o triângulo retângulo da figura ao lado.



Com este triângulo, pode-se construir dois quadrados, cujos lados medem $(a + b)$, portanto de áreas equivalentes, cada um dividido como ilustram as figuras abaixo.



A área do primeiro quadrado é: $a^2 + b^2 + 2ab$.

A área do segundo quadrado é: $c^2 + 2ab$.

Igualando as áreas dos quadrados, tem-se:

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab\ .$$

Adicionando $-2ab$ em ambos os lados da equação, tem-se:

$a^2 + b^2 = c^2$ ■ (3.2)

Exemplo 10.3.2. Calcule a medida do terceiro lado dos triângulos retângulos:

1. Hipotenusa = *10 cm* e um dos catetos de *8 cm*.

2. Dois catetos iguais = *5 cm*.

Solução: (a) Sejam $c = 10$ e $a = 8$ as medidas da hipotenusa e do cateto conhecido, respectivamente. Para calcular o outro cateto, substitui-se a e c na Eq. 3.2:

$8^2 + b^2 = 10^2$

$b^2 = 100 - 64 = 36$

$b = \pm\sqrt{36} = \pm 6$.

Como os lados do triângulo são medidas positivas, serão usadas apenas os valores positivos das raízes. Então, $b = 6\ cm$. Nesse caso, a medida do cateto desconhecido é *6 cm* e é um número inteiro.

(b) Sejam $a = b = 5\ cm$ as medidas dos catetos. Para calcular a hipotenusa, substitui-se a e b na Eq. 3.2:

$5^2 + 5^2 = a^2$

$a^2 = 50$

$a = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \cong 7,071$. Nesse caso, a medida da hipotenusa é $5\sqrt{2} \cong 7,071 cm$ e é um número irracional ■

Exemplo 10.3.3. (a) Verifique se o triângulo de lados *3, 4 e 5 u.c.* é triângulo retângulo.

(b) Mostre que para n ε , *3n, 4n* e *5n,* também são triângulos retângulos.

Solução: (a) Substituindo $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$ na Eq. 3.2, tem-se:.

$3^2 + 4^2 = 5^2$

$25 = 25$.

Como o Teorema de Pitágoras foi satisfeito, o triângulo com lados $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$ é retângulo.

(b) Substituindo $a = 3n$, $b = 4n$ e $c = 5n$ na Eq. 3.2, tem-se:.

$(3n)^2 + (4n)^2 = (5n)^2$

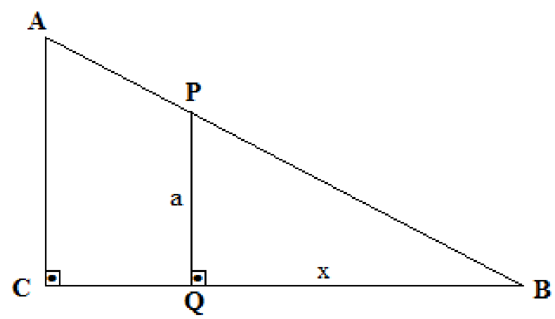
$25n^2 = 25n^2$.

Como o Teorema de Pitágoras foi satisfeito, os triângulos com lados $a = 3n$, $b = 4n$ e $c = 5n$ são retângulos ■

EXERCÍCIOS 10.3

10.3.1 Dado os triângulos ABC e PQM, determine a medida dos lados indicados com letras a e x, sabendo que: $AC = 10cm$; $CQ = 12cm$; $CB = 15cm$

e $AB = 5\sqrt{13}cm$.



10.3.2 Use o resultado do Exemplo 3.3 para criar mais 3 triângulos retângulos com lados inteiros.

10.3.3 Calcule a medida do terceiro lado dos triângulos retângulos (a e b são catetos e c é a hipotenusa):

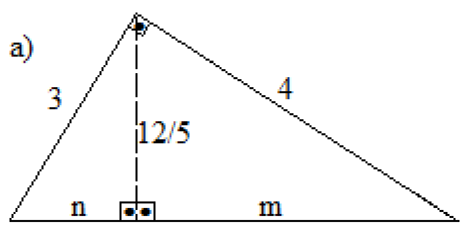
a) $a = 5\ cm$ e $b = 12\ cm$

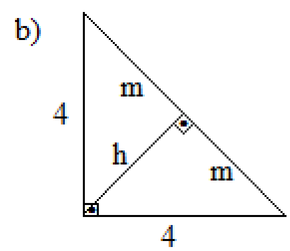
c) $b = 5\ cm$ e $c = 13\ cm$

b) $c = 10\ cm$ e $a = 5\ cm$

d) $a = 2\ cm$ e $b = 5\ cm$

10.3.4 Calcule a medidas indicadas com letras:





10.3.5 Um triângulo equilátero tem os três lados iguais.

a) Determine a altura, em função da medida dos lados.

b) Deduza a fórmula da área.

10.3.6 Um triângulo retângulo tem dois ângulos de 45°. Cada cateto mede m.

a) Calcule a medida da hipotenusa.

b) Calcule a medida da altura.

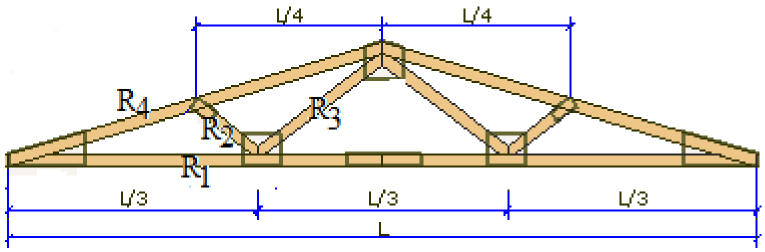
10.3.7 O oitão (parte triangular da fachada da figura) de uma casa é composto por dois triângulos retângulos. A inclinação do telhado é 35% . Sabendo que a largura da casa é 8 m:

a) Calcule a altura central do telhado.

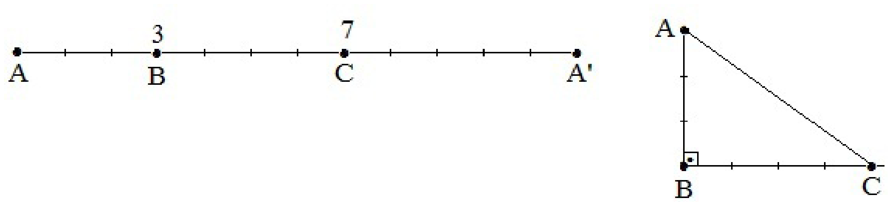
b) Calcule o comprimento do lado inclinado.

10.3.8 A tesoura de um telhado tem a forma da figura abaixo. Sabendo que $L = 6\ m$ e a inclinação é *28 %* , calcule o comprimento das ripas R_1 (considere meia tesoura)

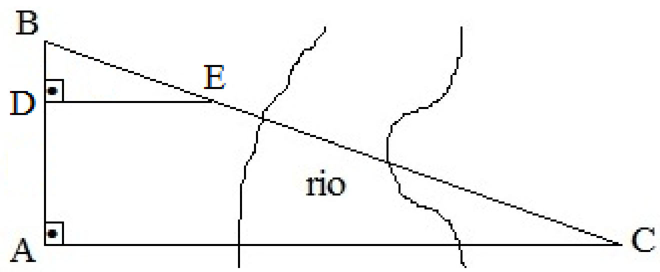
R_2, R_3 e R_4 .



10.3.9 Os triângulos pitagóricos são utilizados para marcar figuras em esquadro no solo. Por exemplo, para marcar um galpão de *10m* de largura por *15m* de comprimento, pode-se usar uma corda de *12m*, com marcas em *3m* e *7m* (ver Figura). Esticando a corda e dobrando-a nas referidas marcas tem-se um triângulo com um ângulo reto no ponto B. Desenvolva uma estratégia, no papel, para marcar o galpão retangular de *8x10 m*.



10.3.10 Considere que os pontos A e B estão do mesmo lado de um rio e o ponto C é inacessível, porém visível de A e B, como ilustra a figura abaixo. Para estimar a distância AC, pode-se usar triângulos semelhantes:



1°) Instala-se um ângulo reto em A, com um esquadro (ver problema 3.9) ou teodolito;

2°) Marca-se um ponto B na direção perpendicular a AC;

3°) Marca-se um ponto D na reta AB;

4°) Instala-se um triângulo retângulo em D (ver problema 3.9);

5°) Marca-se um ponto E sobre a reta BC, deslocando uma baliza sobre a direção DE, até que E esteja sobre BC;

6°) Mede-se as distâncias $AB, DB\ e\ DE$.

Os triângulos ABC e DBE são semelhantes. Portanto:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DE}$$

Considere $AB = 10m,\ DB = 1\ me\ DE = 3m$ e calcule AC .

10.3.11 Calcule:

a) A diagonal de um quadrado de lado 4 cm.

b) A diagonal de um retângulo de lados 4 e 5 cm.

c) A altura de um triângulo isósceles com lados iguais de 4 cm e base 5 cm.

10.3.12 Em um losango de $4\sqrt{5}$ cm de lado, a diagonal maior é o dobro da menor. Calcule as medidas dessas diagonais.

10.4 Razões trigonométricas

É bem provável que as pirâmides do Egito foram construídas utilizando a ideia de *razões trigonométricas*.

Lembre-se que a razão entre dois números a e b, na matemática, tem a forma de uma fração, $\frac{a}{b}$.

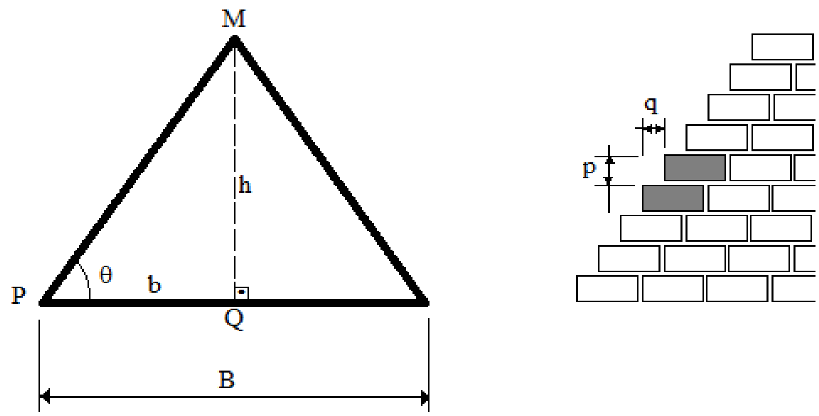


Figura 4.1 - Esquema construtivo das pirâmides

A inclinação de uma pirâmide de base quadrada, depende da largura da base (B) e da altura h. O triângulo PQM ilustra a seção longitudinal de uma pirâmide de base quadrada, onde $b = B/2$ é a metade da base e h é a altura. A inclinação da hipotenusa (lado PM) é a inclinação da face da pirâmide. Ao construir, esta inclinação deve ser mantida em cada pedra colocada na face lateral. É impossível colocar um fio indicando a posição das pedras, devido à enorme altura: a pirâmide de Quéops tinha $b = 115\ m$ por $h = 147\ m$. Uma solução é fazer a proporção entre as razões de altura e base da pirâmide e de cada degrau da face lateral (ver Fig. 4.1).

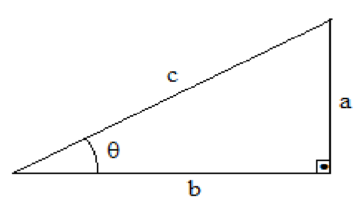
$$\frac{h}{b} = \frac{p}{q}$$

Onde h e b são a altura e a base da pirâmide, respectivamente; p e q são a altura e a base do degrau, respectivamente.

Com essa ideia, na pirâmide de Quéops, a razão p/q deveria ser 147/115 = 1,278. Ou seja, para cada *1 m* na horizontal, a altura deveria ser *1,278 m*. Observe-se que mantida essa razão p/q , mantem-se o ângulo de inclinação (ângulo na Fig. 4.1) constante.

Razões no triângulo retângulo

Sejam a e b os catetos de um triângulo, c a hipotenusa e o ângulo entre b e c.



Definição 10.4.1. As três razões trigonométricas diretas são o *seno*, o *cosseno* e a *tangente*, definidas como:

$$sen\theta = \frac{catetooposto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$cos\theta = \frac{catetoadjacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

$$tg\theta = \frac{catetooposto}{catetoadjacente} = \frac{a}{b}$$

As três razões trigonométricas inversas são a *cossecante*, a *secante* e a *cotangente*, definidas como:

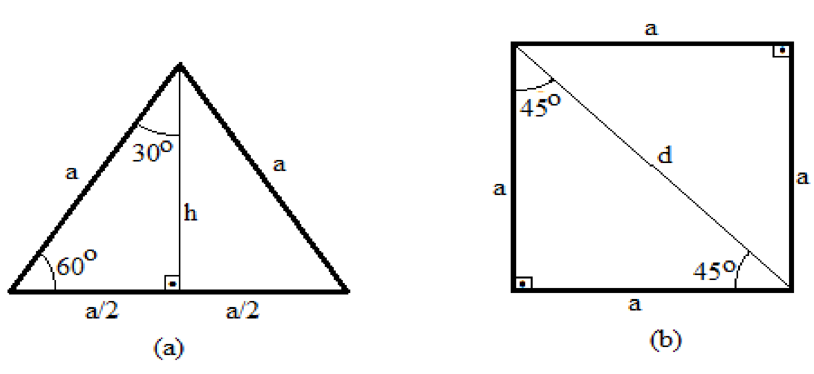
$$cosec\theta = \frac{1}{sen\theta} = \frac{c}{a}$$

$$sec\theta = \frac{1}{cos\theta} = \frac{c}{b}$$

$$cotg\theta = \frac{1}{tg\theta} = \frac{b}{a}$$

Exemplo 10.4.1. As razões trigonométricas de alguns ângulos podem ser calculadas geometricamente. Calcule os valores de seno e cosseno de 30°, 45°e 60°.

Solução: No triângulo equilátero (todos os ângulos e lados iguais) cada ângulo interno é 60°(Fig. (a)).



Dividindo este triângulo com a linha da altura, obtém-se dois triângulos retângulos em que um dos ângulo é 30°e o outro é 60°. Considerando o comprimento do lado como *a*, pode-se calcular a altura usando o teorema de Pitágoras:

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

Resolvendo para h, obtém-se: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Com esse resultado, pode-se calcular os senos e cossenos de 30°e 60°.

$sen\,(30^o) = \frac{\frac{a}{2}}{A} = \frac{1}{2} = 0.5.$; $\qquad COS\,(30^o) = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,86602545...$

$sen\,(60^o) = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,86602545... \qquad cos\,(60^o) = \frac{\frac{a}{2}}{A} = \frac{1}{2} = 0.5.$

No quadrado (fig. (b)) cada ângulo interno é 90°. Dividindo o quadrado pela diagonal, obtém-se dois triângulos retângulos com dois ângulos iguais a 45°. Considerando o comprimento do lado como a, pode-se calcular a diagonal do quadrado (hipotenusa dos triângulos) usando o teorema de Pitágoras:

$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.

Aplicando raiz quadrada em ambos os lados da equação, obtém-se: $d = a\sqrt{2}$.

Com esse resultado, pode-se calcular o seno e cosseno de 45°.

$sen\,(45^o) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,7071068$; $cos\,(45^o) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = sen\,(45^o)$.

Observa-se que os valores de seno e cosseno independem do tamanho do lado do triângulo ou do quadrado, mas que referem-se apenas aos ângulos ■

As razões trigonométricas de outros ângulos são calculadas por somas infinitas, chamadas séries de potências:

$$sen\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad (4.1)$$

$$cos\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad (4.2)$$

Onde x é o arco, escrito em radianos.

Usando as séries das Eqs. (4.1) e (4.2) é possível construir as tabelas de senos e cossenos para qualquer ângulo, como na tabela abaixo. Atualmente, esses valores podem ser obtidos diretamente nas calculadoras científicas.

Ângulos	senos	cossenos
14°	0,24192	0,97029
15°	0,25881	0,96592
16°	0,27563	0,96126
17°	0,292371	0,95630
18°	0,309016	0,95105
19°	0,32556	0,94551

Leitura de senos, cossenos e ângulo

As tabelas de razões trigonométricas podem ser consultadas de duas formas:

1. Dado o ângulo procura-se a razão trigonométrica:

   Exemplo: Qual é o seno de 15°? Resposta: *sen(15°)= 0,650287*.

2. Dada a razão trigonométrica procura-se o ângulo:

Exemplo: Qual é ângulo cujo seno é *0,650287* ? Resposta: *15°*.

Exemplo 10.4.2. Obtenha o valor de *sen(15°)* :

1. Usando a Eq. (4.1) com 3 termos ($n = 0,1,2$)

2. Usando a calculadora científica. Compare os resultados.

Solução:

1. Substituindo $x = \pi /12$ (arco correspondente ao ângulo de 15°) na Eq. (4.1), tem-se:

   $sen\,(15^o) = \frac{\pi}{12} - \frac{\left(\frac{\pi}{12}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{12}\right)^5}{5!} = 0{,}25881906...$

2. Na calculadora, ajusta-se a tecla (DRG) para "D" (graus), digita-se *15* e em seguida a tecla "seno" . A resposta, com 10 dígitos, é:

sen(15°) = 0,25881904 ...

Observa-se que as duas respostas são idênticas até o nono dígito. Quanto mais termos da Eq. (4.1) forem usados, mais exato será o seno calculado pela série de potências ■

Exemplo 10.4.3. Em um triângulo retângulo a hipotenusa mede *6,5 cm* e um dos ângulos *35°*. Calcule a medida dos catetos.

Solução: seja *x* o cateto oposto ao ângulo de *35°*. Da definição de seno, tem-se:

$sen35^0 = \frac{catetooposto}{hipotenusa} = \frac{x}{6{,}5}$. Resolvendo para *x*:

x = 6,5· sen 35°= 6,5· 0,573576 = 3,728 cm.

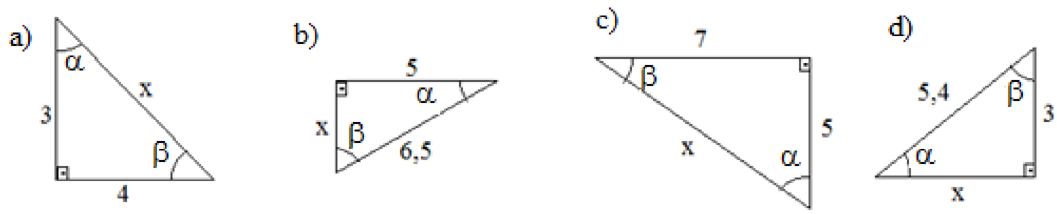
Seja *y* o cateto adjacente ao ângulo de *35°*. Da definição de cosseno, tem-se:

$cos35^0 = \frac{catetoadjacente}{hipotenusa} = \frac{y}{6{,}5}$. Resolvendo para *y*:

y = 6,5· cos 35°= 6,5· 0,8191520 = 5,324 cm ■

EXERCÍCIOS 10.4

10.4.1 Encontre os valores dos lados x e calcule o seno, cosseno e tangente dos ângulos α e β.



10.4.2 Complete a tabela (use a calculadora ou tabelas de razões trigonométricas):

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
46°			
		$\frac{3}{4}$	
			3
	0,86		

10.4.3 Dados os valores de senos e cossenos, calcule a tangente, cotangente, secante e cossecante dos ângulos:

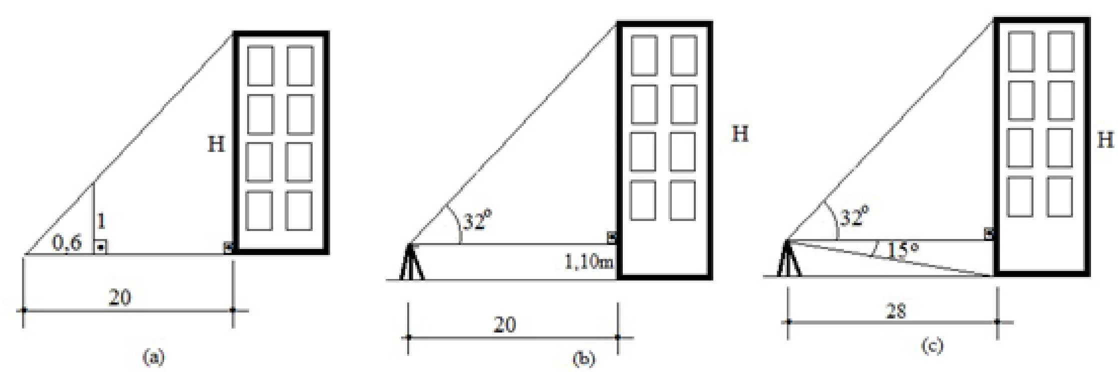
a) $sen\ 14° = 0{,}24192$ e $cos\ 14° = 0{,}97029$

b) $sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $sen\ 30° = 0{,}5$ e $cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $cos\ 60° = 0{,}5$

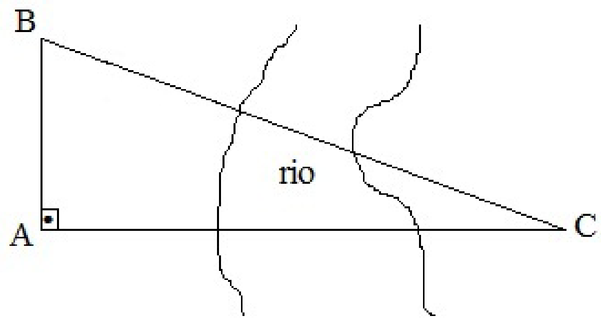
10.4.4 Calcule a altura H dos prédios nas três situações apresentadas.



10.4.5 Considere que os pontos A e B estão do mesmo lado de um rio e o ponto C é inacessível, porém visível de A e B, como ilustra a figura abaixo. Para estimar a distância AC, instala-se um ângulo reto em A, com um esquadro (ver problema 3.9) ou teodolito; marca-se um ponto

B na direção perpendicular a AC e mede-se a distância AB . Visualizando A e C a partir de B, mede-se o ângulo B .

Considerando $AB = 10m$ e B = *60°* calcule a distância AC .

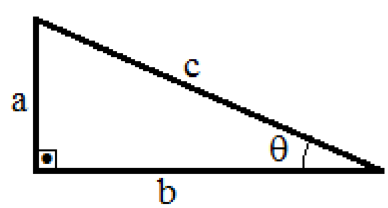


10.5 Identidades trigonométricas

As identidades trigonométricas são equações que relacionam as razões trigonométricas e são empregadas frequentemente em problemas da ciência. Nesse capítulo, será demonstrada a identidade fundamental. Outras identidades serão apenas enunciadas, com o objetivo de disponibilizá-las para conhecimento e uso em aplicações durante outras disciplinas de matemática.

10.5.1 Identidade fundamental da trigonometria

Seja um triângulo retângulo com catetos a e b , hipotenusa c e o ângulo entre b e c. Pela definição de seno e cosseno do ângulo , tem-se:



$sen\theta = \frac{a}{c}$

$cos\theta = \frac{b}{c}$.

Elevando ao quadrado cada membro de ambas as equações, tem-se:

$sen^2\theta = \frac{a^2}{c^2}$ e $cos^2\theta = \frac{b^2}{c^2}$.

Adicionando as duas equações, membro a membro, tem-se:

$$sen^2\theta + cos^2\theta = \frac{a^2+b^2}{c^2}$$

Pelo Teorema de Pitágoras : $a^2 + b^2 = c^2$, então:

$sen^2\theta + cos^2\theta = \frac{c^2}{c^2}$ e

$$\boxed{sen^2\theta + cos^2\theta = 1 \qquad (5.1)}$$

A Eq. (5.1) é conhecida como *identidade fundamental da trigonometria*.

10.5.2 Identidades com quadrados de tangentes, cotangentes, secantes e cotangentes

Dividindo a Eq. (5.1) por cos^2x, tem-se:

$$\frac{sen^2\theta + cos^2\theta}{cos^2\theta} = \frac{1}{cos^2\theta}$$

Usando a definição das razões trigonométricas:

$$\boxed{tg^2\theta + 1 = sec^2\theta \qquad (5.2)}$$

Dividindo a Eq. (5.1) por sen^2x, tem-se:

$$\frac{sen^2\theta + cos^2\theta}{sen^2\theta} = \frac{1}{sen^2\theta}$$

Usando a definição das razões trigonométricas:

$$\boxed{1 + cotg^2\theta = cosec^2\theta \qquad (5.3)}$$

10.5.3 Outras identidades trigonométricas

Em Leithold (1979) encontra-se a demonstração das seguintes identidades trigonométricas:

Para a e b números reais quaisquer, tem-se:

$cos(a+b) = cos(a) \cdot cos(b) - sen(a) \cdot sen(b)$ (5.4)

$cos(a-b) = cos(a) \cdot cos(b) + sen(a) \cdot sen(b)$ (5.5)

$sen(a \pm b) = sen(a) \cdot cos(b) \pm cos(a) \cdot sen(b)$ (5.6)

$sen(2t) = 2sent \cdot cost$ (5.7)

$cos(2t) = cos^2t - sen^2t$ (5.8)

$cos^2\left(\frac{1}{2}t\right) = \frac{1+cost}{2}$ (5.9)

$sen^2\left(\frac{1}{2}t\right) = \frac{1-cost}{2}$ (5.10)

EXERCÍCIOS 10.5

10.5.1 Use a identidade fundamental para calcular o seno dos ângulos, dados os cossenos:

a) $cos\ 35° = 0.81915$

b) $cos\ 126° = -\ 0.5877$

c) $cos\ (-73°) = 0.2923$

d) $cos\ 205° = -\ 0.9063$

10.5.2 Sabendo que $sen(\theta) = 0{,}54030$:

a) Qual é a medida de θ em graus ? em radianos?

b) Calcule o $cos(\theta)$ usando a identidade fundamental.

c) Calcule o $\cos(2\theta)$ usando a Eq. 5.8.

d) Calcule $sen(2\theta)$ usando a Eq. 5.7.

10.5.3 Sabendo que $cos(y) = -\ 0.0348995$:

a) Qual é a medida de y em graus ? em radianos?

b) Calcule o $sen(y)$ usando a identidade fundamental.

10.5.4 Sabendo que $cos(\pi/8) = 0.9238795$:

a) Calcule o $sen(\pi/8)$

b) Calcule o cosseno de $\pi/4$, usando as identidades trigonométricas.

c) Calcule o cosseno de $\pi/16$,usando as identidades trigonométricas.

10.5.5 Sabe-se que $cos\,(30^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e o $sen(30°) = 0{,}5$:

a) Calcule o $cos\ (60°)$ usando a Eq. (5.7). Calcule diretamente com a calculadora e compare.

b) Calcule o $cos\ (60°)$ usando a Eq. (5.4). Compare com os resultados anteriores.

10.6 Funções trigonométricas

As funções trigonométricas são definidas com base no significado das razões trigonométricas no círculo trigonométrico.

10.6.1 Círculo trigonométrico

O *círculo trigonométrico* é um círculo com raio unitário (r = *1 u.c.*) com centro na origem de um sistema de eixos ortogonais, como mostra a Fig. 6.1a.

O sentido da medida positiva dos ângulos é anti-horário, a partir do lado direito do eixo horizontal, como mostra a Fig. 6.1b. As medidas no sentido horário são negativas. Assim, +30°e $-$ 30°são ângulos localizados no I e IV quadrantes, respectivamente.

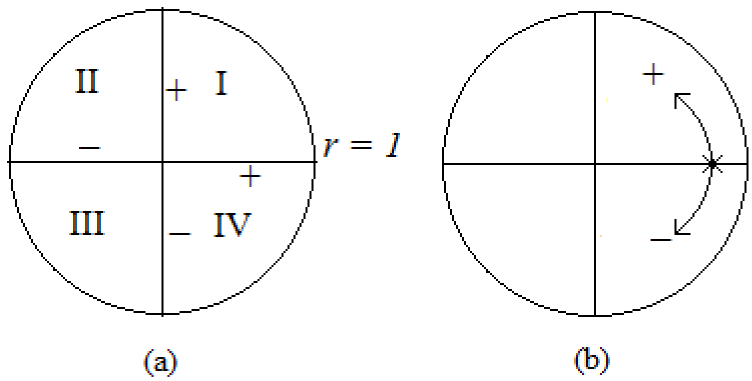


Figura 6.1 - Círculo trigonométrico

Chama-se *radiano* o arco de comprimento unitário (1 rd = 1 raio), como mostra a Fig. 6.2, que corresponde, aproximadamente, ao ângulo de 57, 29578°.

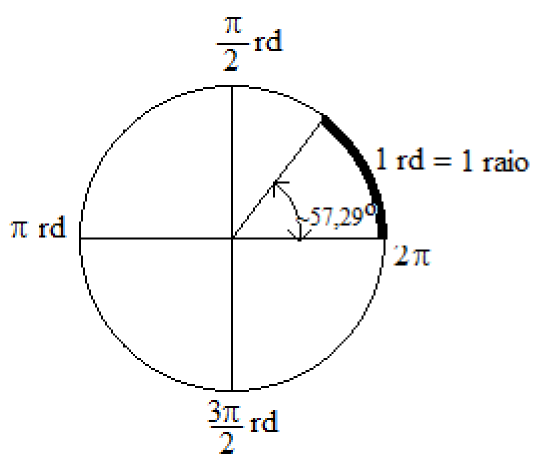


Figura 6.2 - Radianos

Assim, a semicircunferência do círculo trigonométrico mede π rd $\approx$ 3,1415 u.c.

Exemplo 10.6.1. Determine os arcos dados os ângulos, no círculo trigonométrico:

1. *a) 30°*
   b) *150°* c) *210°*
   d) *300°* e) - 45°

Solução: Utilizando a relação entre arcos e ângulos (Eq. 2.3) para **r = 1**: $Arco = \frac{\alpha\pi}{180}$, substitui-se pelo ângulo dado e obtém os arcos correspondentes:

1. a) π /6
   b) 2π /3
   c) 7π /6
   d) 5π /3
   e) -π /4 ■

Exemplo 10.6.2. Determine os ângulos dados os arcos, no círculo trigonométrico:

1. a) π /4
   b) 3π /4
   c) 3π /2
   d) 13π /6
   e) -7π /6

Solução: Resolvendo a (Eq. 2.3), para o ângulo , tem-se : $\alpha = \frac{180 \cdot \ arco}{\pi}$. Substituindo *arco* pelo valor dado obtém-se os ângulos correspondentes:

1. *a) 45°*
   b) *135°*
   c) *270°*
   d) *390°*
   e) *-210°*■

10.6.2 Função cosseno

O eixo horizontal no círculo trigonométrico é o *eixo dos cossenos*. À direita da origem (ponto O) o eixo é positivo e à esquerda negativo, como ilustra a Fig. 6.3.

Cosseno
Considere-se o círculo trigonométrico com *x* sendo o ângulo, medido no sentido anti-horário, a partir do eixo dos cossenos. A projeção ortogonal do raio (*OP*) sobre o eixo dos cossenos corresponde ao *cos(x)= OQ ,* como ilustra a Fig. 6.3.

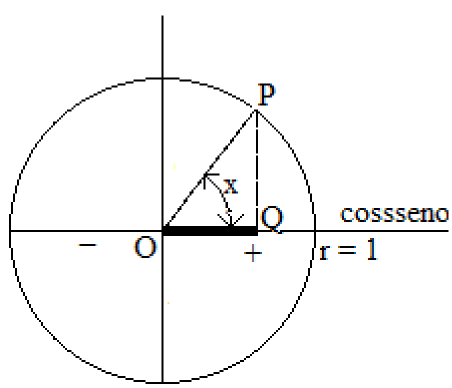


Figura 6.3 - Função Cosseno

Na Fig. 6.3, observa-se que:

1. Nos quadrantes I e IV o cosseno é positivo e nos quadrantes II e III o cosseno é negativo.
2. O cosseno dos ângulos 90°e 270°são nulos: *cos(90°) = 0*; *cos(270°) = 0.*
3. O cosseno do ângulo 0º é 1 e do ângulo 180°é -1: *cos(0°) = 1*; *cos(180°) = -1.*
4. Na medida em que *x* cresce no quadrante I, o cosseno decresce (tende a zero).
5. Na medida em que *x* cresce no quadrante II, o cosseno decresce (tende a -1), mas cresce em módulo.
6. Na medida em que *x* cresce no quadrante III, o cosseno cresce (tende a zero).
7. Na medida em que *x* cresce no quadrante IV, o cosseno cresce (tende a zer1).
8. Para qualquer ângulo *x* o cosseno está entre -1 e 1: $-1 \leq cos(x) \leq 1$.
9. *cos (x) = cos(-x).*

Exemplo 10.6.3. Mostre que a projeção do raio no eixo dos cossenos, quando *x = 60°* é 0,5.

Solução: Pela definição do cosseno, tem-se: (ver Fig. 6.3, se *x = 60°*)

$$cos\,(60^o) = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{1} = OQ$$

Como *cos(60°) = 0,5*, tem-se que $OQ = 0,5$ ■

Exemplo 10.6.4. Considere o conjunto X={ *0º, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°*} .

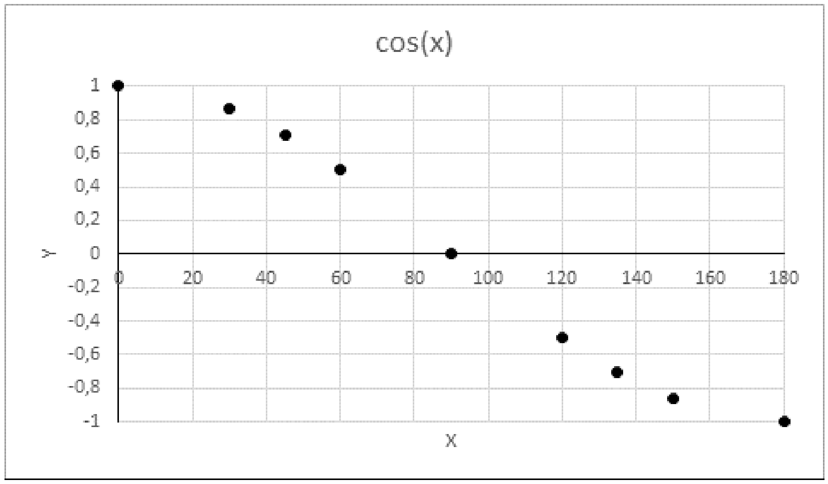
(a) Considere um conjunto Y, formado pelos cossenos de cada elemento do conjunto X. (use a calculadora)

(b) Faça um gráfico cartesiano onde X é a abcissa e Y a ordenada.

Solução: (a) O conjunto Y é obtido fazendo o cosseno de cada elemento do conjunto X.

X	*0º*	*30°*	*45°*	*60°*	*90°*	*120°*	*135°*	*150°*	*180°*
Y	*1*	*0,866*	*0,707*	*0,5*	*0*	*-0,5*	*-0,707*	*-0,866*	*-1*

(b) Cada coluna da tabela é um par ordenado (*x,y*) que colocados no gráfico cartesiano, formam uma curva.



Observe-se que o cosseno é positivo no quadrante I e negativo no II ■

A função cosseno associa a cada ângulo (ou arco) x, o valor do cosseno desse ângulo (arco).
f(x) = cos(x). (6.1)

Atribuindo valores a x e calculando os respectivos valores de $y = cos(x)$, analogamente ao Exemplo 6.4, obtém-se os conjuntos X e Y. Os pares ordenados (x,y) formam a curva da função cosseno, como ilustra a Fig. 6.4.

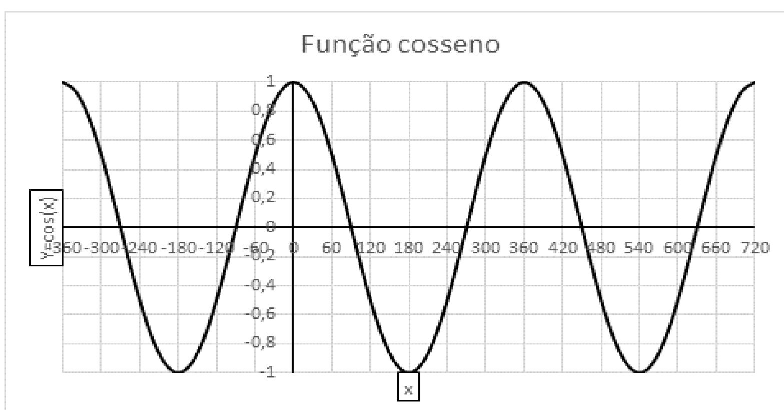


Figura 6.4 - Função cosseno: $Y(x) = cos(x)$

Domínio e imagem da função cosseno

A função cosseno é definida para qualquer valor de x real. Assim, seu domínio é o conjunto dos números reais: $D_m f(x) = \{x \in R\}$. É mais comum expressar os valores de x em radianos (ao invés de ângulos como na Fig. 6.4), nas funções trigonométricas.

O conjunto imagem da função cosseno é formado por todos os números reais entre -1 e 1, incluindo os extremos: $I_m f(x) = \{y \in R / -1 \leq y \leq 1\}$.

Período da função cosseno

O cosseno é uma *função cíclica* (que se repete ao longo do domínio). O *período T* de uma função cíclica é o menor intervalo em que a função não se repete.

Observe-se na Fig. 6.4 que entre 0 e 360°a função cosseno tem um ciclo sem repetições. O mesmo ocorre entre -180°e +180°, dentre outros intervalos em x, cujo comprimento é 2π (ou 360°). Por isso, o *período T* da função cosseno é 2π (ou 360°).

A forma mais geral da função cosseno tem dois parâmetros A e b reais:
$f(x) = A\cdot cos(b\cdot x)$. (6.2)

A variação destes parâmetros determina a posição da função no gráfico:

- Coeficiente A: determina a *amplitude* (altura) da curva.

- Coeficiente b: determina o *período T*.

O período é inversamente proporcional a b (quanto maior b, menor o período T. Veja o Exemplo 6.6). Se para $b = 1$, o período é 2π , resolvendo uma regra de três inversa, tem-se:

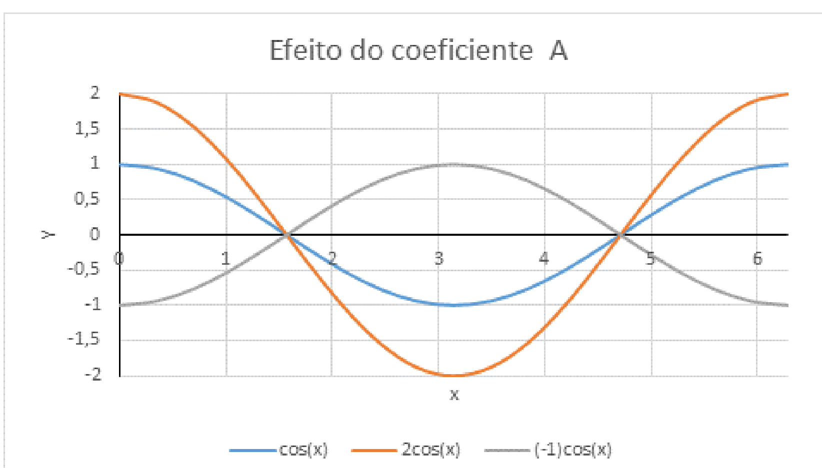
$T = \frac{2\pi}{b}$.

(6.3)

Exemplo 10.6.5. Compare os gráficos das funções

$f_1(x) = cos(x)$; $f_2(x) = 2cos(x)$
e $f_3(x) = -cos(x)$.

Solução: A diferença entre as três funções dadas é o valor do coeficiente A. Em todas o $b = 1$.



Escolhendo como padrão a função $f_1(x)=cos(x)$, com $A = 1$ e $b = 1$, pode-se observar que :

1. O coeficiente $A = 2$ na função f_2, dobrou a altura (amplitude) da função f_1;

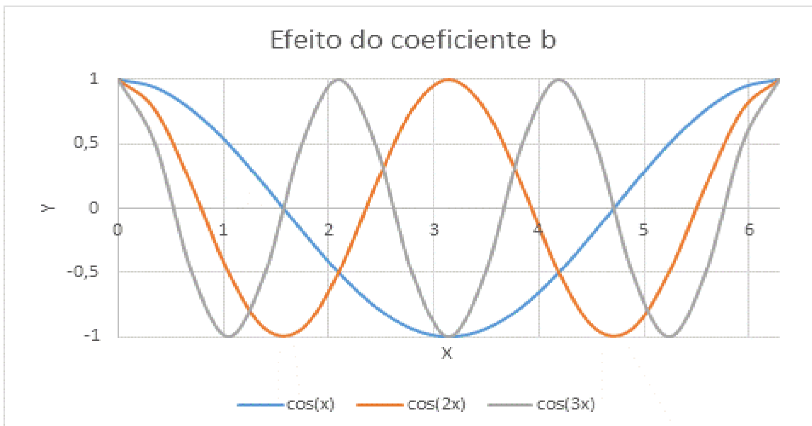
2. O coeficiente A = *-1* rebateu a função f_1, simetricamente ao eixo X, mas manteve a mesma amplitude, em módulo.

3. O período não se alterou, pois b=*1* nas três funções ■

Exemplo 10.6.6. Compare os gráficos das funções

$f_1(x) = cos(x)$; $f_2(x) = cos(2x)$
e $f_3(x) = cos(3x)$.

Solução: A diferença entre as três funções dadas é o valor do coeficiente b.



Escolhendo como padrão a função $f_1(x)=cos(x)$, com A = *1* e b = *1*, pode-se observar que :

1. O coeficiente $b = 2$ na f_2 dividiu pela metade o período da função f_1. De acordo com a Eq. (6.3), o período da função f_2 é $T = \pi$.

2. O coeficiente $b = 3$ dividiu por 3 o período da função f_1. De acordo com a Eq. (5.3), o período da função f_3 é $T = 2\pi /3$.

3. A amplitude não se alterou, pois A=*1* nas três funções ■

10.6.3 Função seno

O eixo vertical no círculo trigonométrico é o *eixo dos senos*. Acima da origem o eixo é positivo e abaixo é negativo, como ilustra a Fig. 6.5.

Seno
A projeção ortogonal do raio (OP) sobre o eixo dos senos corresponde ao $sen(x)= OR$, como ilustra a Fig. 6.5.

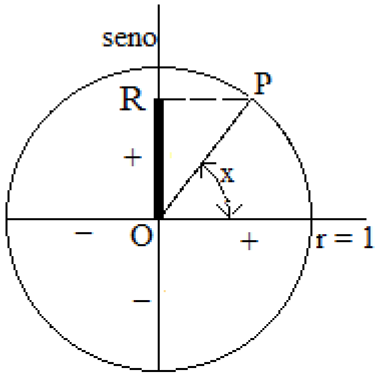


Figura 6.5 - Função seno.

Na Fig. 6.5, observa-se que:

1. Nos quadrantes I e II o seno é positivo e nos quadrantes III e IV o seno é negativo.
2. O seno dos ângulos 0°e 180°são nulos: *sen(0°) = 0*; *cos(180°) = 0.*
3. O seno do ângulo 90º é 1 e do ângulo 270°é -1: *sen(90°) = 1*; *sen(270°) = -1.*
4. Na medida em que *x* cresce no quadrante I, o seno cresce (tende a 1).
5. Na medida em que *x* cresce no quadrante II, o seno decresce (tende a zero).
6. Na medida em que *x* cresce no quadrante III, o seno decresce (tende a -1).
7. Na medida em que *x* cresce no quadrante IV, o seno cresce (tende a zero).
8. Para qualquer ângulo *x* o seno está entre -1 e 1: $-1 \leq sen(x) \leq 1$.
9. *sen (x) = -sen(-x).*

A função seno associa a cada ângulo (ou arco) *x*, o valor do seno desse ângulo (ou arco).

$$f(x) = sen(x). \tag{6.4}$$

Atribuindo valores a *x* e calculando os respectivos valores de *y = sen(x)*, obtém-se os conjuntos *X* e *Y*. Os pares ordenados (*x,y*) formam a curva da função seno, como ilustra a Fig. 6.6, conhecida como *senóide*.

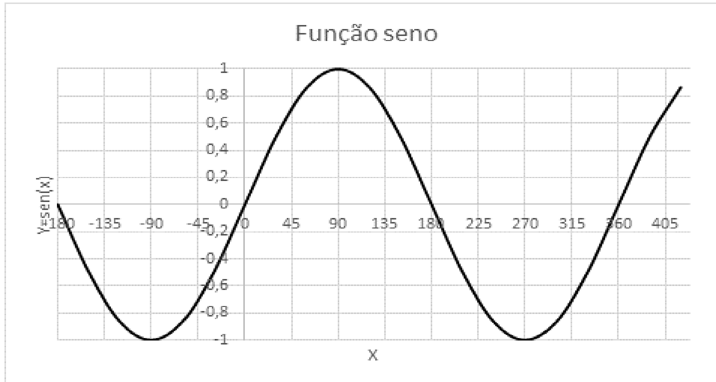


Figura 6.6 - Função seno: *Y(x) = sen(x)*

Domínio e imagem da função seno

A função seno *f(x) = sen(x)* é definida para qualquer valor de *x* real. Assim, seu domínio é o conjunto dos números reais: $D_m f(x) = \{x \in R\}$.

O conjunto imagem da função seno é formado por todos os números reais entre

-1 e 1, incluindo os extremos: $I_m f(x) = \{y \in R / -1 \leq y \leq 1\}$.

Período da função seno

O seno, assim como o cosseno, é uma *função cíclica* (que se repete ao longo do domínio). Observe-se na Fig. 6.6 que entre 0 e 360°a função seno tem um ciclo sem repetições. O mesmo ocorre entre -180°e +180°, dentre outros intervalos em *x*, cujo comprimento é 2π (ou 360°). Por isso, o *período T* da função seno *f(x) = sen(x)* é 2π (ou 360°).

A forma mais geral da função seno tem dois parâmetros *A* e *b* reais:

f(x) = A· sen(b· x).

(6.5)

A variação destes parâmetros determina a *amplitude* e o *período* da função, analogamente à função cosseno.

10.6.4 Função tangente

A reta vertical que encosta no círculo trigonométrico no ponto *T = (1,0)* é o *eixo das tangentes*, como ilustra a Fig. 6.7. Acima do ponto *T* o eixo é positivo e abaixo negativo.

Tangente

A distância (TP) corresponde à $tg(x) = TP$, como ilustra a Fig. 6.7.

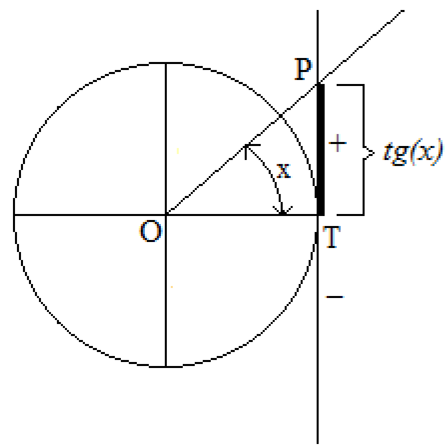


Figura 6.7 - Função Tangente

Na Fig. 6.7, observa-se que:

1. Nos quadrantes I e III a tangente é positiva e nos quadrantes II e IV é negativa.
2. A tangente dos ângulos 0°e 180°são nulas: $tg(0°) = 0$; $tg(180°) = 0$.
3. A tangente dos ângulos 90º e 270°não existem: $tg(90°) = \nexists$; $tg(270°) = \nexists$.
4. Na medida em que x cresce no quadrante I, a tangente cresce (tende a infinito).
5. Na medida em que x cresce no quadrante II, a tangente cresce (tende a zero).
6. Na medida em que x cresce no quadrante III, a tangente cresce (tende a infinito).
7. Na medida em que x cresce no quadrante IV, a tangente cresce (tende a zero).
8. A tangente varia entre menos e mais infinito: $-\infty \leq tg(x) \leq +\infty$.
9. $tg(x) = -tg(-x)$.

A função *tangente* associa a cada ângulo (ou arco) x, o valor da tangente desse ângulo (arco).

$$f(x) = tg(x). \tag{6.6}$$

Atribuindo valores a x e calculando os respectivos valores de $y = tg(x)$, obtém-se os conjuntos X e Y. Os pares ordenados (x,y) formam a curva da função tangente, como ilustra a Fig. 6.8.

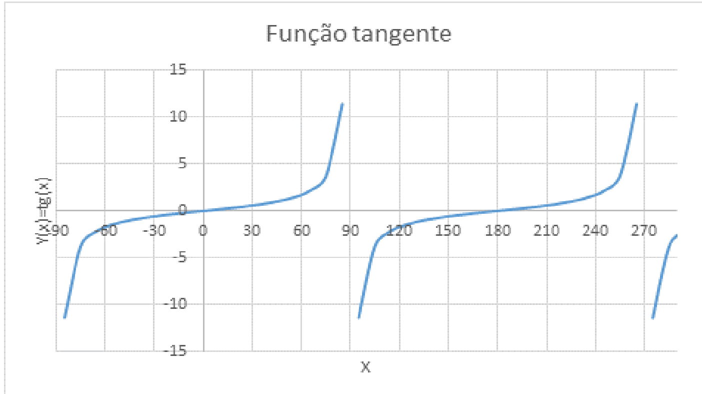


Figura 6.8 - Função tangente: *Y(x) = tg(x)*

Domínio e imagem da função tangente

A função tangente *f(x) = tg(x)* é definida para qualquer valor de x real, **exceto** para ângulos múltiplos ímpares de 90°(ou de arco π /2). Assim, seu domínio é:

$D_m f = \{x \in R / x \neq \pm(\frac{(2n-1)\pi}{2})\}$, para $n = 1, 2, 3...$

O conjunto imagem da função tangente é formado por todos os números reais:

$I_m f(x) = \{y \in R\}$.

Período da função tangente

A tangente, assim como as funções seno e cosseno, é uma *função cíclica* (que se repete ao longo do domínio). Observe-se na Fig. 6.8 que entre -90°e +90°a função tangente tem um ciclo sem repetições. O mesmo ocorre entre +90°e +270°, dentre outros intervalos em x, cujo comprimento é 180°(ou π). Por isso, o *período T* da função tangente *f(x) = tg(x)* é 180°(ou π).

A forma mais geral da função tangente tem dois parâmetros A e b reais:

f(x) = A· tg(b· x).

(6.7)

A variação destes parâmetros determina a posição da função no gráfico, analogamente à função cosseno.

10.6.5 Função cotangente

A reta horizontal que encosta no círculo trigonométrico no ponto T = *(0,1)* é o *eixo das cotangentes*, como ilustra a Fig. 6.9. À direita do ponto T o eixo é positivo e abaixo negativo.

Cotangente

A distância (TP) corresponde à *cotg(x)*= TP , como ilustra a Fig. 6.9.

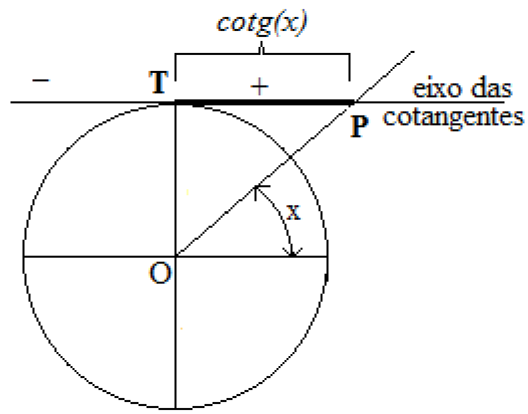


Figura 6.9 - Função Cotangente

Na Fig. 6.9, observa-se que:

1. Nos quadrantes I e III a cotangente é positiva e nos quadrantes II e IV é negativa.
2. A cotangente dos ângulos 90°e 270°são nulas: $tg(90°) = 0$; $tg(270°) = 0$.
3. A cotangente dos ângulos 0º e 180°não existem: tg$(0°) = \nexists$; $tg(180°) = \nexists$.
4. Na medida em que *x* cresce no quadrante I, a cotangente decresce (tende a zero).
5. Na medida em que *x* cresce no quadrante II, a cotangente decresce (tende a menos infinito).
6. Na medida em que *x* cresce no quadrante III, a cotangente decresce (tende a zero).
7. Na medida em que *x* cresce no quadrante IV, a cotangente decresce (tende a menos infinito).
8. A cotangente varia entre menos e mais infinito: $-\infty \leq tg(x) \leq +\infty$.
9. $cotg\ (x) = -cotg(-x)$.

A função *cotangente* associa a cada ângulo (ou arco) *x*, o valor da cotangente desse ângulo (arco).

$$f(x) = cotg(x). \tag{6.8}$$

Atribuindo valores a *x* e calculando os respectivos valores de $y = cotg(x)$, obtém-se os conjuntos X e Y. Os pares ordenados (x,y) formam a curva da função cotangente, como ilustra a Fig. 6.10.

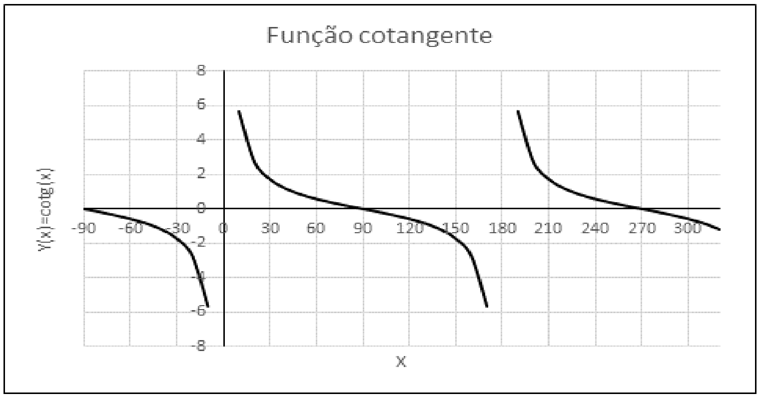


Figura 6.10 - Função cotangente: *Y(x) = cotg(x)*

Domínio e imagem da função cotangente

A função cotangente *f(x) = cotg(x)* é definida para qualquer valor de *x* real, **exceto** para ângulos múltiplos de 180°(ou de arco π). Assim, seu domínio é:

$D_m f(x) = \{x \in R / x \neq \pm n \cdot \pi\}$, para *n=0,1,2,3,...*

O conjunto imagem da função tangente é formado por todos os números reais:

$I_m f(x) = \{y \in R\}$.

Período da função cotangente

A cotangente, assim como as funções seno e cosseno, é uma *função cíclica* (que se repete ao longo do domínio). Observe-se na Fig. 6.10 que entre 0°e 180°a função cotangente tem um ciclo sem repetições. O mesmo ocorre entre 180°e 360°, dentre outros intervalos em *x*, cujo comprimento é 180°(ou π). Por isso, o *período T* da função cotangente *f(x) = cotg(x)* é 180°(ou π).

A forma mais geral da função cotangente tem dois parâmetros *A* e *b* reais:

f(x) = A· cotg(b· x).

(6.9)

A variação destes parâmetros determina a posição da função no gráfico, analogamente à função cosseno.

10.6.6 Função secante

Prolongando a reta que define o ângulo *x* no quadrante I, no círculo trigonométrico, até o eixo das tangentes, obtém-se um segmento de reta, da origem até aquele eixo, como ilustra a Fig. 6.11.

Secante

A distância (*OP*) corresponde à *sec(x)= OP* , como ilustra a Fig. 6.11.

Para ângulos do II e III quadrantes, prolonga-se a reta que define o ângulo *x* até um eixo simétrico ao eixo das tangentes, em relação ao eixo dos senos. Nesses quadrantes a secante é negativa. No quarto quadrante o prolongamento da reta que define o ângulo deve ser feito até o eixo das tangentes, gerando secantes positivas.

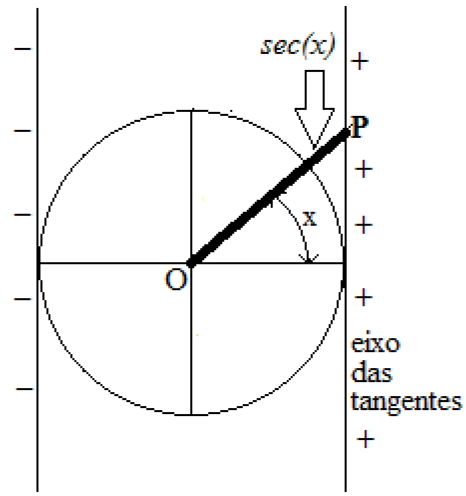


Figura 6.11 - Função secante

O sinal da função secante é o mesmo da função cosseno: positivo nos quadrantes I e IV e negativo nos quadrantes II e III.

Na Fig. 6.11, observa-se que:

1. $sec(0°) = 1$ e $sec(180°) = -1$.
2. A secante dos ângulos 90º e 270°não existem: $sec(90°) = \nexists$; $sec(270°) = \nexists$.
3. Na medida em que *x* cresce no quadrante I, a secante cresce (tende a infinito).
4. Na medida em que *x* cresce no quadrante II, a secante cresce (tende a 1).
5. Na medida em que *x* cresce no quadrante III, a secante decresce (tende a menos infinito).
6. Na medida em que *x* cresce no quadrante IV, a secante decresce (tende a 1).
7. A secante varia entre menos infinito e -1 e entre 1 e mais infinito: $-\infty \leq sec(x) \leq -1$ e $1 \leq sec(x) \leq +\infty$.
8. $sec(x) = sec(-x)$.

A função *secante* associa a cada ângulo (ou arco) *x*, o valor da secante desse ângulo (arco).

$$f(x) = sec(x). \qquad (6.10)$$

Atribuindo valores a *x* e calculando os respectivos valores de $y = sec(x)$, obtém-se os conjuntos *X* e *Y*. Os pares ordenados (x,y) formam a curva da função secante, como ilustra a Fig. 6.12.

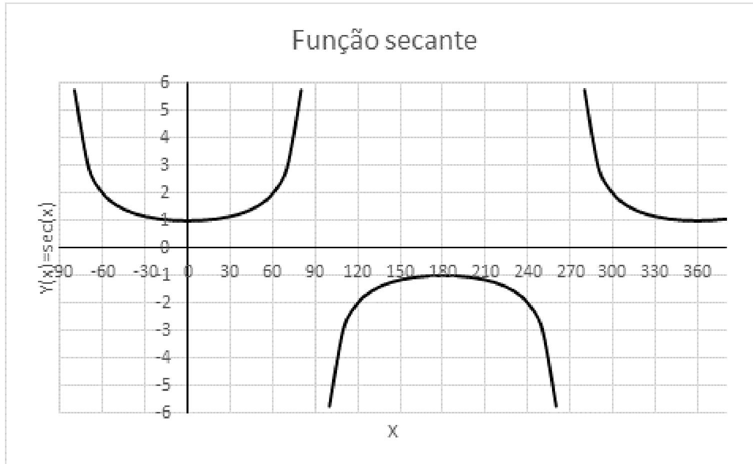


Figura 6.12 - Função secante: *Y(x) = sec(x)*

Domínio e imagem da função secante

A função secante *f(x) = sec(x)* é definida para qualquer valor de *x* real, **exceto** para ângulos múltiplos ímpares de 90°(ou de arco π /2). Assim, seu domínio é:

$D_m f(x) = \{x \in R/x \neq \pm(\frac{(2n-1)\pi}{2})\}$, para $n = 1,2,3...$

O conjunto imagem da função secante é:

$I_m f(x) = \{y \in R/-\infty \leq y \leq -1 \text{ ou } 1 \leq y \leq +\infty\}$.

Período da função secante

A secante, assim como as funções seno e cosseno, é uma *função cíclica* (que se repete ao longo do domínio). Observe-se na Fig. 6.12 que entre -90°e +270°a função secante tem um ciclo sem repetições. O mesmo ocorre entre 0°e +360°, dentre outros intervalos em *x*, cujo comprimento é 360°(ou 2π). Por isso, o *período T* da função tangente *f(x) = sec(x)* é 360°(ou 2π).

A forma mais geral da função secante tem dois parâmetros *A* e *b* reais:

f(x) = A· sec(b· x).

(6.11)

A variação destes parâmetros determina a posição da função no gráfico, analogamente à função cosseno.

10.6.7 Função cossecante

Prolongando a reta que define o ângulo *x* nos quadrantes I e II, no círculo trigonométrico, até o eixo das cotangentes, obtém-se um segmento de reta, da origem até aquele eixo, como ilustra a Fig. 6.13. Nesses quadrantes a cossecante é positiva.

Cossecante

A distância (*OP*) corresponde à *cosec(x)*= *OP* , como ilustra a Fig. 6.13.

Para ângulos do III e IV quadrantes, prolonga-se a reta que define o ângulo *x* até um eixo simétrico ao eixo das cotangentes, em relação ao eixo dos cossenos. Nesses quadrantes a cossecante é negativa.

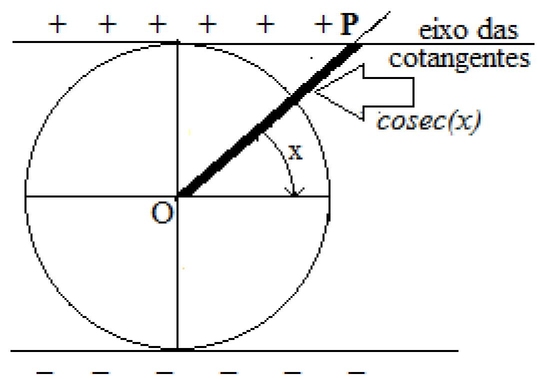


Figura 6.13 - Função cossecante

O sinal da função cossecante é o mesmo da função seno: positivo nos quadrantes I e II e negativo nos quadrantes III e IV.

Na Fig. 6.13, observa-se que:

1. $cosec(90°) = 1$ e $cosec(270°) = -1$.
2. A cossecante dos ângulos 0^o e $180°$ não existem: $cosec(0°) = \nexists$; $cosec(180°) = \nexists$.
3. Na medida em que *x* cresce no quadrante I, a cossecante decresce (tende a 1).
4. Na medida em que *x* cresce no quadrante II, a cossecante cresce (tende a infinito).
5. Na medida em que *x* cresce no quadrante III, a cossecante cresce (tende a 1).
6. Na medida em que *x* cresce no quadrante IV, a cossecante decresce (tende a menos infinito).
7. A cossecante varia entre menos infinito e -1 e entre 1 e mais infinito:
   $-\infty \leq cosec(x) \leq -1$ e $1 \leq cosec(x) \leq +\infty$.
8. $cosec(x) = -cosec(-x)$.

A função *cossecante* associa a cada ângulo (ou arco) *x*, o valor da cossecante desse ângulo (arco).

$$f(x) = cosec(x). \qquad (6.12)$$

Atribuindo valores a *x* e calculando os respectivos valores de $y = cosec(x)$, obtém-se os conjuntos *X* e *Y*. Os pares ordenados (x,y) formam a curva da função cossecante, como ilustra a Fig. 6.14.

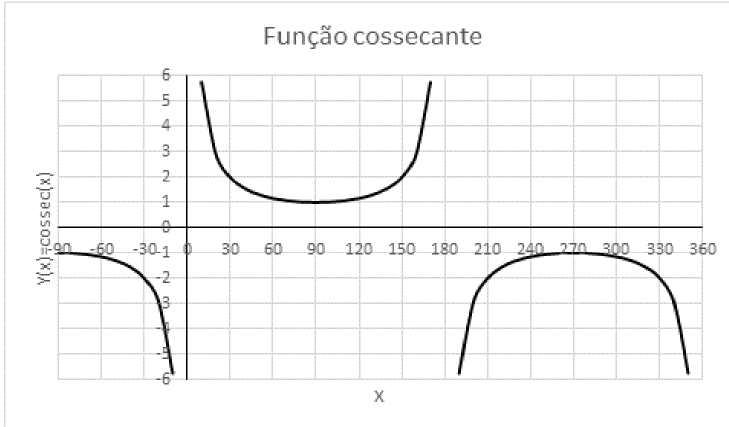


Figura 6.14 - Função cossecante

Domínio e imagem da função cossecante

A função cossecante *f(x) = cosec(x)* é definida para qualquer valor de *x* real, **exceto** para ângulos múltiplos de 180°(ou de arcos π). Assim, seu domínio é:

$D_m f(x) = \{x \in R/x \neq \pm n \cdot \pi\}$, para *n=0,1,2,3,...*

O conjunto imagem da função cossecante é:

$I_m f(x) = \{y \in\ R/-\infty\ \leq y \leq -1$ ou $\ 1 \leq y \leq +\infty\}$.

Período da função cossecante

A cossecante, assim como as funções seno e cosseno, é uma *função cíclica* (que se repete ao longo do domínio). Observe-se na Fig. 6.14 que entre 0°e +360°a função cossecante tem um ciclo sem repetições. O mesmo ocorre entre -90°e +270°, dentre outros intervalos em *x*, cujo comprimento é 360°(ou 2π). Por isso, o *período T* da função cossecante *f(x) = cosec(x)* é 360°(ou 2π).

A forma mais geral da função cosecante tem dois parâmetros *A* e *b* reais:

f(x) = A· cosec(b· x).

(6.13)

A variação destes parâmetros determina a posição da função no gráfico, analogamente ao estudo realizado com as demais funções trigonométricas.

EXERCÍCIOS 10.6

10.6.1 Desenhe os arcos dos seguintes ângulos, no círculo trigonométrico:

a) *225°*

b) *-60°*

c) *-120°*

d) *420°*

e) *-135°*

10.6.2 Desenhe os ângulos dos seguintes arcos, no círculo trigonométrico:

a) $5\pi/4$

b) $-\pi/4$

c) $10\pi/3$

d) $-13\pi/6$

e) $-7\pi/4$

10.6.3 Determine os senos e cossenos dos seguintes arcos usando calculadora:

a) $\pi/4$

b) $-\pi/4$

c) $4\pi/3$

d) $5\pi/6$

e) $-3\pi/4$

10.6.4 Faça um círculo trigonométrico de raio *1 dm*, projete e meça os senos e cossenos dos seguintes arcos. Compare as medidas obtidas com os resultados do exercício anterior.

a) $\pi/4$

b) $-\pi/4$

c) $4\pi/3$

d) $5\pi/6$

e) $-3\pi/4$

10.6.5 Projete e meça os senos e cossenos no círculo trigonométrico de raio *1 dm*. Confira os valores medidos com a calculadora.

	30°	70°	120°	210°	-80°	-150°
seno						
cosseno						
tangente						

10.6.6 Usando apenas o círculo trigonométrico (sem usar a calculadora) determine o senos e cossenos dos seguintes ângulos:

a) *0º*

b) 90°

c) 270°

d) 360°

e) -180°

10.6.7 Usando apenas o círculo trigonométrico (sem usar a calculadora) determine o sinal dos senos e cossenos dos seguintes ângulos:

a) 25^o

b) 110°

c) -125°

d) 240°

e) -265°

10.6.8 Usando apenas o círculo trigonométrico, complete o quadro com os sinais de senos, cossenos e tangentes em cada quadrante.

	I	II	III	IV
Senos				
Cossenos				
Tangentes				

10.6.9 Mostre que $cos(x)=cos(-x)$ usando as projeções de cosseno no círculo trigonométrico.

10.6.10 Mostre que $sen\ (x) = -sen(-x)$ usando as projeções de seno no círculo trigonométrico.

10.6.11 Explique, usando as projeções de seno no círculo trigonométrico, porque para qualquer ângulo x, $-1 \leq sen(x) \leq 1$.

10.6.12 Faça o gráfico (manualmente) de um período da função $f(x) = sen(x)$ e a partir deste, faça o gráficos das funções dadas, interpretando o significado gráfico da variação dos coeficientes.

a) $F(x) = 2sen(x)$
b) $G(x) = sen(2x)$
c) $Q(x) = -2sen(x$
d) $R(x) = sen(-2x)$
e) $J(x) = sen(-x)$
f) $M(x) = -sen(-x)$

10.6.13 Faça o gráfico (manualmente) de um período da função $g(x) = cos(x)$ e a partir deste, faça o gráficos das funções dadas, interpretando o significado gráfico da variação dos coeficientes.

a) $f(x) = 2cos(x)$
b) $K(x) = -2cos(x)$
c) $L(x) = cos(-2x)$
d) $N(x) = cos(2x)$

10.6.14 Faça os gráficos dos dois exercícios anteriores usando uma planilha eletrônica e compare com os gráficos feitos manualmente.

10.6.15 Faça um círculo trigonométrico de raio *1 dm*, projete e meça as tangentes e cotangentes dos seguintes arcos. (Confira com a calculadora).

a) $\pi/4$

b) $-\pi/4$

c) $4\pi/3$

d) $5\pi/6$

e) $-3\pi/4$

10.6.16 Explique porque *tg (90°)* e *cotg(180°)* não existem:

a) Usando o círculo trigonométrico

b) Usando a definição de tangente e cotangente.

10.6.17 Faça os gráficos (manualmente e com planilha eletrônica) de um período das funções dadas:

a) $f(x) = 2tg(x)$

b) $g(x) = cotg(2x)$

c) $F(x) = 2tg(2x)$

d) $G(x) = 2cotg(x)$

10.6.18 Faça um círculo trigonométrico de raio *1 dm*, projete e meça as secantes e cossecantes dos seguintes arcos. (Confira com a calculadora).

a) $\pi/4$

b) $-\pi/4$

c) $4\pi/3$

d) $5\pi/6$

e) $-3\pi/4$

10.6.19 Explique porque *sec (90°)* e *cosec(0°)* não existem:

a) Usando o círculo trigonométrico

b) Usando a definição de secante e cossecante.

10.6.20 Faça os gráficos (manualmente e com planilha eletrônica) de um período das funções dadas:

a) $f(x) = 2sec(x)$

b) $g(x) = cosec(4x)$

c) $F(x) = 3cosec(2x)$

d) $G(x) = 4sec(3x)$

10.6.21 Faça os gráficos das funções usando uma planilha eletrônica:

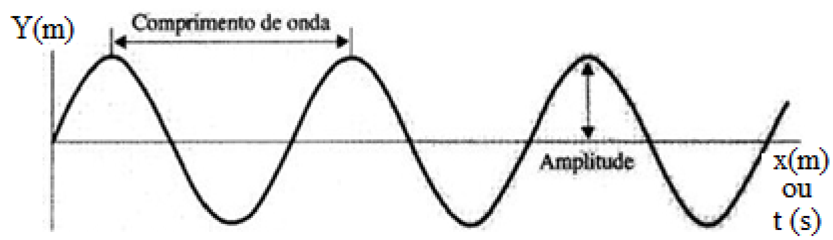
a) $f(x) = sen(x)cos(x)$

b) $G(x) = sen^2(3x)$

c) $g(x) = sen^2(x)$

d) $f(x) = x \cdot sen(x)$

10.6.22 Três conceitos definem uma onda sonora: o *comprimento de onda* (λ , *m*), a *frequência* (*f*, *Hz*) e *intensidade (I, m)*. O comprimento de onda é a distância de um ciclo da onda. A intensidade é a altura da onda e a frequência é o número de oscilações que a onda faz por unidade de tempo. A Figura abaixo ilustra estas variáveis.



Os sons graves (voz masculina, sons do contrabaixo ou cordas grossas do violão) têm frequências baixas. Os sons agudos (voz feminina, cordas finas do violão) têm frequências altas. Cada nota musical tem uma frequência característica, p.ex. *La = 440 Hz*. Isto significa que ao tocar um La ocorrem 440 vibrações em 1 segundo.

O volume do som está associado com a intensidade. Quanto maior o volume, maior a intensidade.

Sabendo que as frequências das notas MI e Do são 330 e 264 Hz, respectivamente, faça o gráfico das ondas para La, Mi e Do. Use a seguinte equação de onda:

$Y(x) = I \cdot sen(f \cdot t)$ onde Y é a altura (m), f é a frequência (Hz) e t é o tempo (s).

10.7 Funções arco e equações trigonométricas

As funções arco são as *funções inversas* das funções trigonométricas estudadas nos capítulos anteriores.

Pela definição de função inversa, tem-se que:

f(x) e *g(x)* são inversas se: *f[g(x)] = x* e *g[f(x)] = x* .

Duas propriedades das funções inversas devem ser lembradas:

1. O domínio de f é a imagem de f^{-1} e vice-versa.
2. Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à função identidade $y = x$.

Exemplo 10.7.1. Determine a função inversa de $y=f(x) = x^2$.

Solução: A inversão de funções $y = f(x)$ é obtida com as seguintes operações (ver capítulo de funções logarítmicas):

1°) Resolver a função para x:

Aplicando raiz quadrada em ambos os lados da equação dada, tem-se:

$$\pm\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = x$$

2°) Trocar as *x* por *y e y* por *x*.

$$y = \pm\sqrt{x}$$

A função obtida satisfaz a definição de função inversa, portanto,

$$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$$

Porém, f^{-1} NÃO É FUNÇÃO, pois para cada $x > 0$, tem-se dois valores de y correspondentes, como mostra a Fig. 7.1.

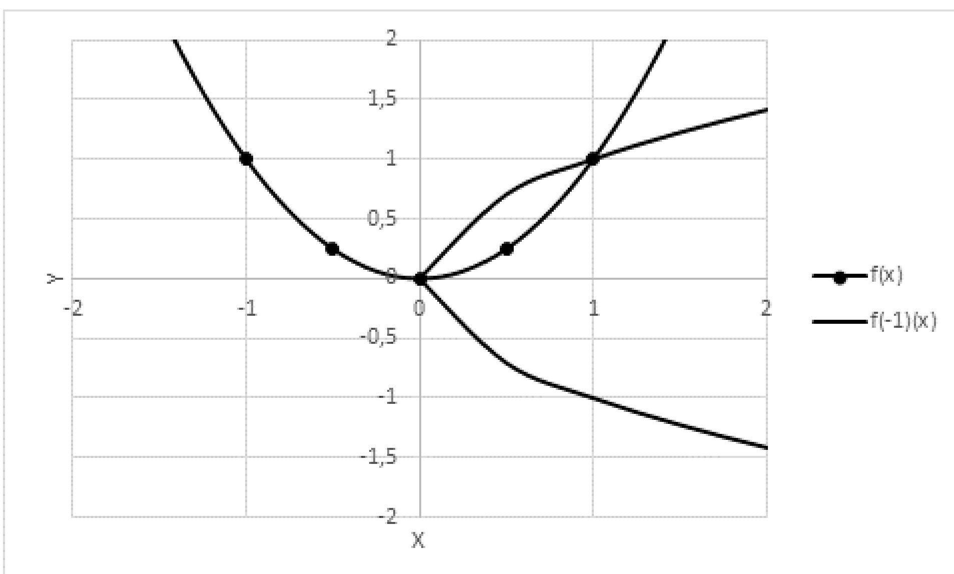


Figura 7.1 - Visualização da restrição do domínio de $y=f(x) = x^2$ para que $f^{-1}(x)$ seja função.

Para que $y=f(x) = x^2$ tenha inversas, é necessário *restringir o domínio de f(x)*: Seja a função

$y_1=f_1(x) = x^2$ definida para $x > 0$. Aplicando os passos para inversão em y_1, obtém-se a função $f_1^{-1}(x) = f_2(x) = +\sqrt{x}$.

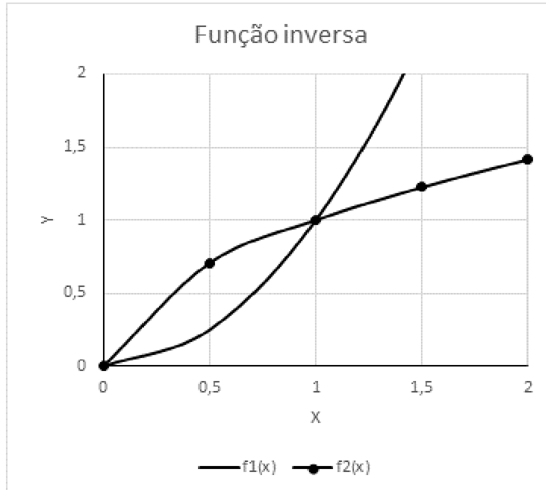


Figura 7.2 - Funções inversas: $f_1(x)$ e $f_1^{-1}(x) = f_2(x)$

As funções $f_1(x)$ e $f_1^{-1}(x)$ satisfazem a definição de função inversa; o domínio de $f_1(x)$ é a imagem de $f_1^{-1}(x)$ e são simétricas em relação à função identidade, como mostra a Fig. 7.2 ■

10.7.1 As funções arco

Para definir a função inversa das funções arco é necessário *restringir domínio* das funções diretas para (analogamente ao Ex. 7.1) apenas um período *[-π /2,π /2],* porque além deste domínio, a inversa não satisfaria o conceito de função.

Definição 10.7.1. A função *arco seno*, denotada por

y = f(x) = arcsen(x)

associa um arco *y* a cada valor de seno de *x*.

Exemplo 10.7.2. Faça o gráfico, determine o domínio e a imagem das funções

f(x) = arcsen(x) .

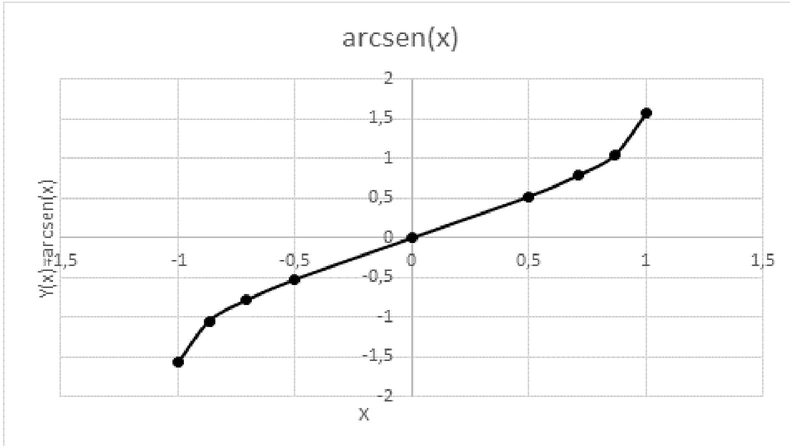
Solução: Seja um conjunto de valores de senos

X={ *-1, -0.86, -0.707, -0.5,0 , 0.5, 0.707, 0.86, 1*} .

O conjunto *Y = f(x)= arcsen(x)* será composto pelos *arcos cujos senos* correspondem aos elementos de X.

Y={ *-π /2, -π /3, -π /4, -π /6, 0, π /6, π /4, π /3, π /2* } .

Pela Def. 7.1, a função *arcsen(x)* associa os elementos dos conjuntos X e Y, como ilustra a figura abaixo.



Como pode-se observar no gráfico, o domínio da função *arcsen(x)* é:

$D_m f(x) = \{x \in R / -1 \leq x \leq 1\}$.

A imagem da função *arcsen(x)* é:

$I_m f(x) = \{y \in \ R / -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ ■

Exemplo 10.7.3. Verifique se as funções *f(x) = arcsen(x)* e *g(x) =sen(x)* são inversas, conferindo:

1. pela definição
2. pela igualdade dos domínios e imagens e
3. pela propriedade de simetria em relação à função identidade.

Solução: (i) Pela definição de função inversa, tem-se:

$g[f(x)] = x$. Então deve ser verdade que a*rcsen(sen(x)) = x* .

Seguem alguns exemplos:

•Seja *x = π /6*. Pergunta-se: a*rcsen(sen(π /6)) = ?.*

Mas*, sen(π /6)=0,5.* Então a*rcsen(sen(π /6))=*a*rcsen(0,5)* .

Qual é o arco cujo seno é 0,5? π /6. Portanto,

a*rcsen(sen(π /6))=*a*rcsen(0,5) = π /6 = x.*

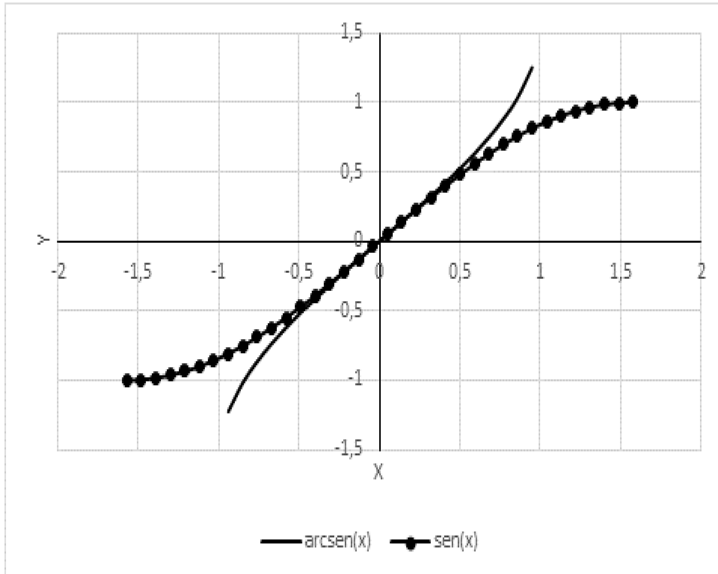
•Se *x = π /4*, tem-se a*rcsen(sen(π /4))=* a*rcsen(0,707) = π /4 = x.*

•Se *x = π /2*, tem-se a*rcsen(sen(π /2))=* a*rcsen(1) = π /2 = x.*

•Se *x = 0*, tem-se a*rcsen(sen(0))=* a*rcsen(0) = 0 = x* .

(ii) Restringindo o domínio da função *g(x) =sen(x)* apenas para *[-π /2,π /2]*, tem-se:

$D_m f(x) = I_m g(x) = [-1, 1]$ e $D_m g(x) = I_m f(x) = [-\pi/2, \pi/2]$.



(iii) A figura acima mostra a simetria de *arcsen(x)* e *sem(x)* em relação à função identidade *y = x* no domínio *[-1,1]* ■

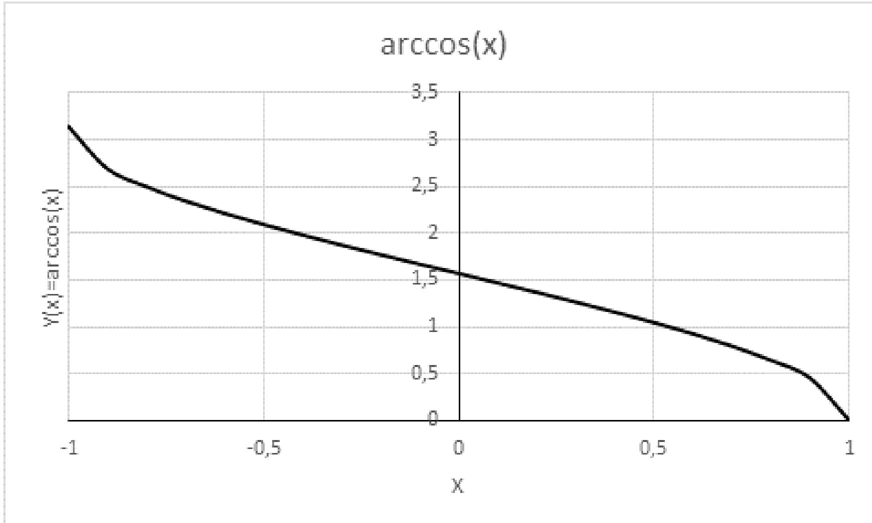
Outras funções arco

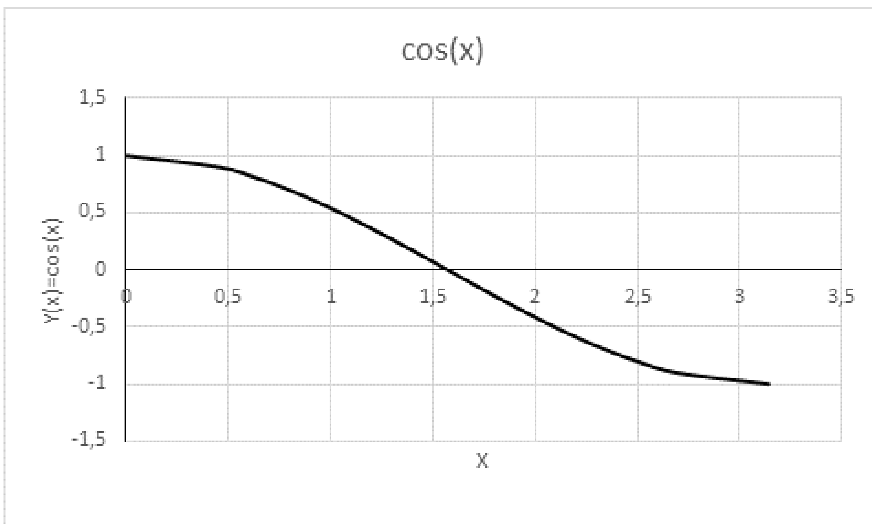
As conclusões apresentadas acima sobre a função *arcsen(x)* podem ser estendidas para as demais funções trigonométricas. Assim, pode-se definir também outras funções arco:
f(x) = arccos(x)   *f(x) = arctg(x)*
f(x) = arcsec(x)   *f(x) = arccosec(x).*
e *f(x) = arccotg(x)*

Exemplo 10.7.4. Faça o gráfico e defina o domínio e a imagem das funções inversas

f(x) = arccos(x) e *g(x) =cos(x).*

Solução: Analogamente ao Ex. 7.1, o gráfico das funções dadas é obtido definindo os conjuntos X e Y e plotando os pares ordenados no gráfico cartesiano.





$f(x) = arccos(x)$	$g(x) = cos(x)$
$D_m f(x) = \{x \in R / -1 \leq x \leq 1\}$	$D_m g(x) = \{y \in R / 0 \leq y \leq \pi\}$
$I_m f(x) = \{y \in R / 0 \leq y \leq \pi\}$	$I_m g(x) = \{x \in R / -1 \leq x \leq 1\}$

Como pode-se observar na tabela acima, $D_m f(x) = I_m g(x)$ e $I_m f(x) = D_m g(x)$ ■

10.7.2 Equações trigonométricas

Definição 10.7.2. Uma equação é trigonométrica se, em ao menos um dos membros da igualdade, a variável estiver no arco de uma função trigonométrica.

Exemplos:

1) *sen x + cos x = 1* e *sen 2x = cos2 x* são equações trigonométricas.

2) *x + (tg 30°). x^2 = 0* e *x + sen 60°* = 0 não são equações trigonométricas pois as variáveis não estão nos arcos das funções trigonométricas.

Solução das equações trigonométricas

1. *x = r* é uma *raiz* ou *solução* da equação trigonométrica *f(x) = g(x)* se *r* for elemento do domínio de *f* e *g* e se *f(r) = g(r)*.

2. O conjunto solução S é o conjunto de todas as raízes *x = r* da equação.

Exemplo 10.7.5. Determine o conjunto solução de:

1. *cos(x) = 0.*
2. *sen(x) = 1.*

Solução:

1. Procura-se valores de *x* reais, tal que *cos(x) = 0.* Examinando no círculo trigonométrico, observa-se que os arcos cujo cosseno é 0, são: $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}, \pm\frac{9\pi}{2}, \dots, \pm\frac{(2n+1)\pi}{2}$, sendo *n = 0,1,2,3,4...*

   Portanto, $S = \{x \in R/x = \pm\frac{(2n-1)\pi}{2}\}$ sendo *n = 0,1,2,3,4...*

2. Procura-se valores de *x* reais, tal que *sen (x) = 1.* Examinando no círculo trigonométrico, observa-se que os arcos cujo seno é 1, são: os arcos positivos $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}, \frac{17\pi}{2}, \dots, \frac{(4n+1)\pi}{2}$ para *n = 0,1,2,3,4...* e os negativos $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{11\pi}{2}, \dots, \pm\frac{(4m-1)\pi}{2}$, para *m = 1,2,3,4...*

Portanto, $S = \{x \in R/x = \frac{(4n+1)\pi}{2} oux = \frac{(4m-1)\pi}{2}\}$ *n = 0,1,2,3,4...* e *m=1,2,3,4...* ■

Exemplo 10.7.6. Determine o conjunto solução de *cos(2x+1) = 0,* no domínio R^+.

Solução: Usando a função inversa *arcos* em ambos os lados da equação, tem-se: *arcos*(*cos (2x+1)) = arcos(0).* Pela definição das funções inversas, tem-se:

2x+1 = arcos(0).

Quais são os arcos positivos cujo cosseno é zero? $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots, \frac{(2n+1)\pi}{2}$. Então,

$2x+1 = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ sendo *n = 0,1,2,3,4...* Resolvendo para *x,* tem-se:

$x = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(2n+1)\pi}{2} - 1\right]$ ou

$S = \{x \in R/x = \frac{1}{4} \cdot [(2n+1)\pi - 2]\}$ sendo *n = 0,1,2,3,4...* ■

Exemplo 10.7.7. Determine o conjunto das soluções no intervalo *[-90°,90°]*.

a) *sen(x) = 0,45*
b) *cos(y) = 0,23* .

Solução: Como esses valores de seno e cosseno não são facilmente verificados através do círculo trigonométrico, ou arcos conhecidos, é necessário utilizar a calculadora (ou uma tabela se senos e cossenos):

1°) Ajuste a calculadora para obter a resposta em ângulo (Tecla "DRG" . Deixe na posição D);

2°) Entre com o valor do seno ou cosseno de *x*;

3°) Use as teclas de função inversa, geralmente "INV" e a tecla da função trigonométrica (isso corresponde a arcsen, arcos,...). O resultado é o ângulo correspondente no intervalo *[-90°,90°]*.

1. *arcsen(sen (0,45)) = 26,74366°* . Esse resultado corresponde a solução no quadrante I: $S = \{x \in R/x = 26,74366^o\}$.

2. Usando procedimento semelhante, obtém-se:

arccos(cos (0,23)) = 76,70292° . Esse resultado corresponde a solução no quadrante I. No quadrante II, a solução é - *76,70292°*, pois *cos(x)=cos(-x)*. Então,

$S = \{y \in R/y = \pm 76,70292^o\}$ ■

Exemplo 10.7.8. Resolva a equação trigonométrica**:** 2*sen(3x) = 0*

Solução: Dividindo a equação dada por *2* (propriedade fundamental das equações), tem-se:

sen(3x) = 0. Aplicando a função inversa do seno: *arc sen(x)* em ambos os lados da equação, tem-se:

arcsen(sen (3x)) = arcsen(0). No lado direito, procura-se arcos cujos senos sejam nulos: 0, $\pm\, \pi$, $\pm\, 2\pi$,..., $\pm\, n\, \pi$.

3x = $\pm\, n\pi$, para *n=0,1,2,3,4,...* , pois o seno é nulo para $\pm\, n\pi$. Assim,

$S = \{x \in R/x = \pm \frac{n\pi}{3}\}$ para *n=0,1,2,3,4,...* ■

EXERCÍCIOS 10.7

10.7.1 Encontre um valor positivo ou nulo dos seguintes arcos:

a) *arcsen(0)*
b) *arcsen(-1)*
c) *arccos(1)*
d) *arccos(-1)*
e) *arctg(1)*
f) *arccotg(-1)*
g) *arctg(0)*
h) *arccotg(1)*
i) *arcsec(-1)*
j) *arccosec(-1)*
k) *arcosec(2)*
l) *arcsec(1)*

10.7.2 Determine as raízes positivas de cada equação:

a) $sen(x) = 0$

b) $cos(2x) = 0$

c) $sen(3x) = 0$

d) $cos(5x) = 0$

10.7.3 Escreva todas as raízes de cada função:

a) $y= sen(x)$

b) $y=cos(2x)$

c) $y=sen(3x)$

d) $y=cos(5x)$

10.7.4 Determine todas as soluções da equação: $1= cos(x)$.

a) $cos(x)=1$

b) $tg(x)=1$

10.7.5 Verifique se as funções dadas são inversas:

a) $y= 3x$ e $y= 1/3x$

b) $y=x^3$ e $y = \sqrt[3]{x}$

c) $y=x^4$ e $y = \sqrt[4]{x}$

10.7.6 Trace um esboço do gráfico das funções: (confira seus resultados com uma planilha eletrônica)

a) $y= 0,5arcsen(x)$

b) $y=arcos(2x)$

c) $y=2arcsen(x)$

d) $y= 0,5arcsec(x)$

e) $y=2arctg(0,5x)$

f) $y=2arcotg(x)$

10.8 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESPOSTAS 10.2

10.2.1 a) 30° b) 107°
c) 95° d) 42°

10.2.2 a) c = 25,13 cm b) c = 3,14 m
c) c = 62,83 m d) c = 15,71 km

10.2.3 a) r = 0,9994 $\sim$ 1 cm b) r = 1,59 m
c) r = 0,40 cm d) r = 15,92 mm

10.2.4 c_1 = 68.05 cm e c_2 = 70,06 cm.

10.2.5 d = 5421,54 m^3.

10.2.6 A soma dos ângulos internos do polígono de 5 lados é $S_5 = 540°$.

10.2.7 a) $\pi/15$ b) $5\pi/6$
c) $2\pi/3$ d) $11\pi/6$
e) π f) $5\pi/3$ g) $7\pi/6$

10.2.8 a) 45° b) 120°
c) 135° d) 225°
e) 150° f) 240°
g) 420°

10.2.9 c = 323,58 mm

10.2.10 99°8' 7" .

10.2.11 Cada ângulo igual mede 60°28' 25" .

Questão	a	b	c	d	e
ângulos	50°	15°	75°	80°	20°
complementar	40°	75°	15°	10°	70°
suplementar	130°	165°	105°	100°	160°
replementar	310°	345°	285°	280°	340°

10.2.12

10.2.13 55°24' 40" .

RESPOSTAS 10.3

10.3.1 a = 2 cm e x = 3 cm.

10.3.2 Alguns exemplos: 6,4 e 10 ; 30, 40 e 50; 21, 28 e 35.

10.3.3 a) c = 13 cm b) b= $5\sqrt{3}$ cm
c) a = 12 cm d) $\sqrt{29}$ cm

10.3.4 a) m =16/5 n=9/5 b) m = h = $2\sqrt{2}$

10.3.5 a) "a" é o lado. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. b) A $= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

10.3.6 a) "a" é a hipotenusa: $a = m\sqrt{2}$. b) $h = \frac{m\sqrt{2}}{2}$

10.3.7 a) h = 1,4 m b) 4,237 m é o lado inclinado.

10.3.8 $R_1 = 3\ m$; $R_2 = 0{,}65\ m$; $R_3 = 1{,}30\ m$; $R_4 = 3{,}11\ m$.

10.3.10 $AC = 30m$.

10.3.11 a) $d = 4\sqrt{2}$ cm   b) $d = \sqrt{41}$ cm
c) h=3,12 cm.

10.3.12 D=16cm e d=8cm.

RESPOSTAS 10.4

10.4.1

Questão	x	seno		cosseno		tangente	
a	5	4/5	3/5	3/5	4/5	4/3	3/4
b	4,15	0,6385	0,7692	0,7692	0,6384	0,83	1,2048
c	8,6	0,8140	0,5814	0,5813	0,8139	1,4	0,7143
d	4,49	0,5556	0,8315	0,8314	0,5555	0,6682	1,4967

10.4.2

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
46°	0,71934	0,6946	1,0355
41,4096	0,6614	$\frac{3}{4}$	0,8819
71,5650	0,9487	0,3162	3
59,3165	0,86	0,5103	1,6853

10.4.3

Questão	ângulo	tangente	cotangente	secante	cossecante
a	14°	0,2493	4,0112	1,0306	4,1336
b	45°	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
c	30°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
d	60°	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

10.4.4 a) H = 33,33 m b) H = 13,60 m c) H = 25 m.

10.4.5 $AC = 17,32m$.

RESPOSTAS 10.5

10.5.2 a) θ= 32,7040°; θ = *0,5707* .   c) *cos(2θ)*=0,41615
b) *cos(θ)=0,84147*   d) *sen(2θ)= 0.90929*

10.5.3 a) y = 92°e y = 1,6057
b) sen(y) = 0,9994

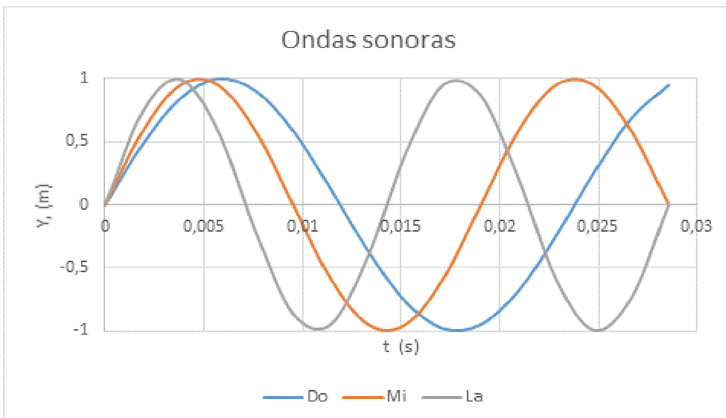
10.5.4 a) *sen(π /8) = 0,3826;*   b) cos(π /4)= *0,70710.*
c) cos(π /16)= *0,98078.*

RESPOSTAS 10.6

10.6.8

	I	II	III	IV
Senos	+	+	-	-
Cossenos	+	-	-	+
Tangentes	+	-	+	-

10.6.22 Quanto *maior* a frequência *maior* o número de oscilações e *menor* o comprimento de onda. Na mesma escala, Do < Mi < La. Do é a mais grave (menor frequência, menos oscilações) e La a mais aguda (maior frequência, mais oscilações).



RESPOSTAS 10.7

10.7.1 a) *arcsen(0)*= 0

b) *arcsen(-1)*= $\frac{3\pi}{2}$

c) *arcos(1)= 0*

d) *arccos(-1)*=π

e) *arctg(1)*= π /4

f) *arcotg(-1)*= 3π /4

g) *arctg(0)*= π /2

h) *arcotg(1)*= π /4

i) *arcsec(-1)*= π

j) *arcosec(-1)*= 3π /2

k) *arcosec(2)*= π /6

l) *arcsec(1)=0*

10.7.2 a) $S = \{x \in R/x = n\pi\}$ para *n=0,1,2,3,4,...*

b) $S = \{x \in R/x = \frac{(2n+1)\pi}{4}\}$ para *n=0,1,2,3,4,...*

c) $S = \{x \in R/x = \frac{n\pi}{3}\}$ para *n=0,1,2,3,4,...*

d) $S = \{x \in R/x = \frac{(2n+1)\pi}{10}\}$ para *n=0,1,2,3,4,...*

10.7.3 a) $S = \{x \in R/x = \pm n\pi\}$ para *n=0,1,2,3,4,...*

b) $S = \{x \in R/x = \pm\frac{(2n+1)\pi}{4}\}$ para *n=0,1,2,3,4,...*

c) $S = \{x \in R/x = \pm\frac{n\pi}{3}\}$ para *n=0,1,2,3,4,...*

d) $S = \{x \in R/x = \pm\frac{(2n+1)\pi}{10}\}$ para *n=0,1,2,3,4,...*

10.7.4 a) $S = \{x \in R/x = \pm 2n\pi\}$ para *n=0,1,2,3,4,...*

b) $S = \{x \in R/x = \frac{(4n+1)\pi}{4}\}$ para *n=0,1,2,3,4,...*

10.7.5 a) São inversas para qualquer $x \in R$.

b) São inversas para qualquer $x \in R$.

c) Para $x \in R/x \leq 0$ a inversa de y=x^4 é $y = -\sqrt[4]{x}$.

Para $x \in R/x \geq 0$ a inversa de y=x^4 é $y = \sqrt[4]{x}$.

Capítulo 11

Outras Funções

11.1 Introdução

Nos capítulos anteriores estudamos as funções de 1º e 2º grau, que são funções polinomiais. Uma série de outras funções são utilizadas para modelar problemas de ciência e tecnologia como funções potência com expoente fracionário, racionais, polinomiais com grau maior do que dois, funções modulares e funções com mais de uma sentença.

11.2 Funções potência

Definição 11.2.1. As funções potência têm a forma

$f(x) = Ax^m$, sendo $A \in \mathbb{R}$ e $m \in Q^+$. (2.1)

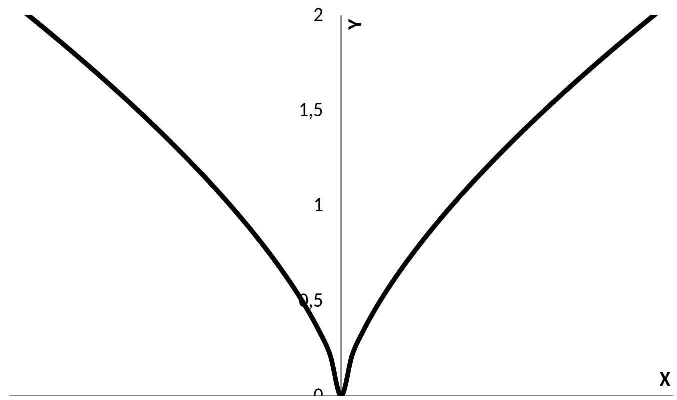
Se $m = \frac{a}{b}$ com a e $b \in \mathbf{Z}$,com $b \neq 0$, *f(x)* pode ser escrita como uma raiz:

$f(x) = A\sqrt[b]{x^a}$ (2.2)

Na forma da Eq. (2.2), se b é par, *f(x)* só é real se o radicando for positivo ■

Exemplo 11.2.1. Faça o gráfico, determine o domínio e a imagem da função $f(x) = x^{2/3}$ (ou $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$).

Solução: A função dada é uma função potência, pois o expoente é um número racional. Atribuindo valores para *x,* obtemos os valores de *f(x)* com o uso de uma calculadora.



O gráfico desta função potência também pode ser obtido escolhendo valores de x^2 cuja raiz cúbica seja inteira, tais como: *0, 8, 27*. Os respectivos valores de x serão: 0,$\sqrt{8}$,$\sqrt{27}$. Com os pontos (0,0),($\sqrt{8}$,2) e ($\sqrt{27}$,3) pode-se traçar um bom esboço do gráfico de *f(x)*.

Escrevendo a função como uma raiz: $y = \sqrt[3]{x^2}$.

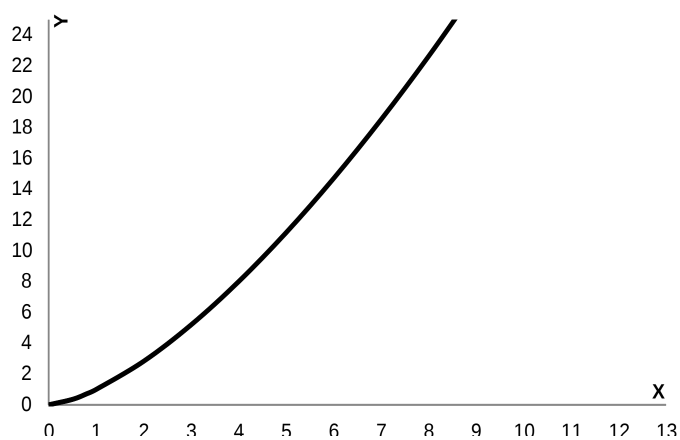
Pode-se observar que:

(i) será possível calcular os valores de y para qualquer valor de x, pois existe raiz cúbica de qualquer número real. Portanto: $Df(x)=\{\ x \in \mathbb{R}\ \}$.

(ii) não existirá $y < 0$ pois todos os valores de x estão sendo elevados ao quadrado e a raiz cúbica destes será nula ou positiva. Portanto: $I_m f(x)=\{\ y \in \mathbb{R}\ /\ y \geq 0\}$ ■

Exemplo 11.2.2. Faça o gráfico, determine o domínio e a imagem da função $f(x) = x^{3/2}$.

Solução: A função dada é uma função potência, pois o expoente é um número racional. Atribuindo valores para *x,* obtemos os valores de *f(x)* com o uso de uma calculadora.



Temos a opção de escrever a função como uma raiz: $y = \sqrt{x^3}$.

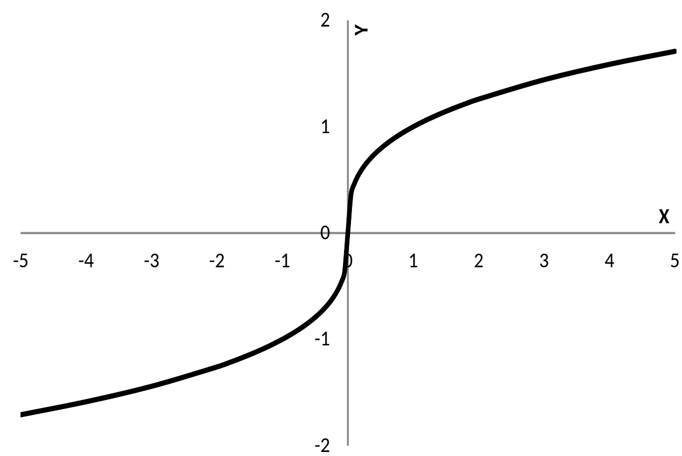
Pode-se observar que:

1. será possível calcular os valores de y, apenas para $x \geq 0$, pois se $x < 0$ o radicando será negativo e a raiz quadrada não será real. Portanto: $Df(x)=\{\ x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0\}$.

2. não existirá $y < 0$ pois todas as raízes quadradas serão nulas ou positivas. Portanto: $I_m f(x)=\{\ y \in \mathbb{R} \,/\, y \geq 0\}$ ■

Exemplo 11.2.3. Faça o gráfico, determine o domínio e a imagem da função $f(x) = x^{1/3}$.

Solução: A função dada é uma função potência, pois o expoente é um número racional. Atribuindo valores para *x,* obtemos os valores de *f(x)* com o uso de uma calculadora.



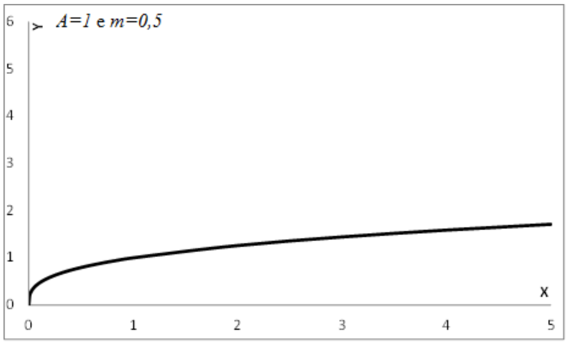
Temos a opção de escrever a função como uma raiz: $y = \sqrt[3]{x}$ e observar que:

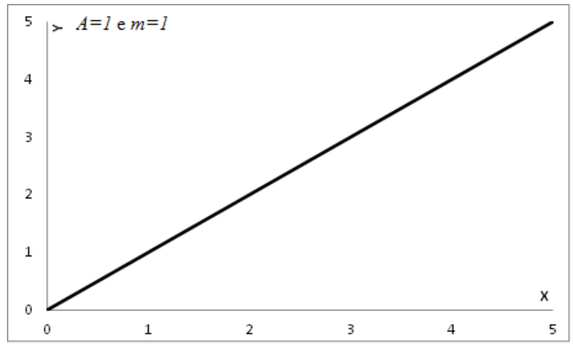
1. Como a raiz é cúbica será possível calcular os valores de y para qualquer x real. Portanto: $Df(x)=\{\ x \in \mathbb{R}\ \}$.

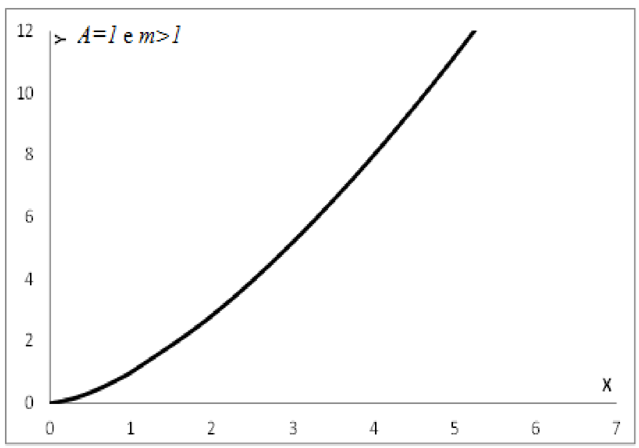
2. O gráfico indica que $-\infty < y < +\infty$. Portanto: $I_m f(x)=\{\ y \in \mathbb{R}\ \}$ ■

Exemplo 11.2.4. Determine a concavidade das funções potências para $A = 1$ e $0 < m < 1$; $m = 1$ e $m > 1$.

Solução: As figuras abaixo apresentam os gráficos para funções potência com $A = 1$ e m nos intervalos dados.







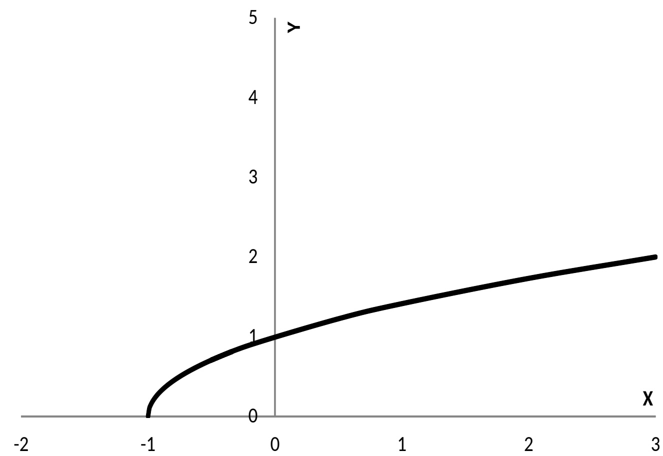
1. Para $0 < m < 1$: concavidade para baixo.

2. Para $m = 1$, a função potência é a própria função identidade. Não tem concavidade pois é uma reta.

3. Para $m > 1$: concavidade para cima ■

Exemplo 11.2.5. Faça o gráfico, determine o domínio e a imagem da função $f(x) = (x+1)^{1/2}$.

Solução: Observemos que à base da potência foi acrescentada uma soma ao x. O efeito no gráfico é um deslocamento, neste caso para a esquerda, do gráfico da função $f(x) = (x)^{1/2}$.



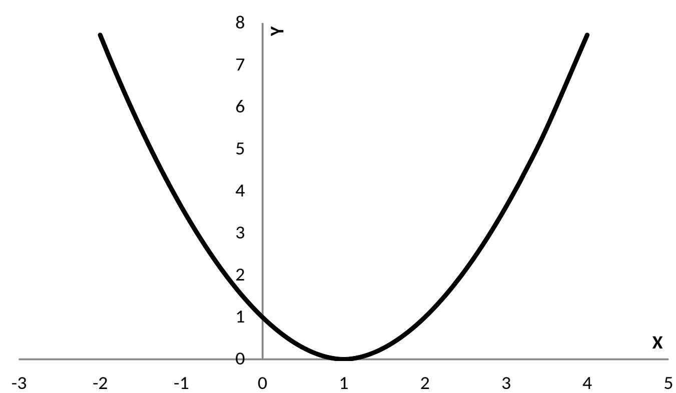
Pode-se observar que:

1. será possível calcular os valores de y , apenas para $x+1 \geq 0$, ou $x \geq -1$. Portanto: $Df(x)=\{ x \in \mathbb{R} \; / x \geq -1\}$.
2. não existirá $y < 0$ pois todas as raízes quadradas serão nulas ou positivas. Portanto: $I_m f(x)=\{ y \in \mathbb{R} \, / \, y \geq 0\}$ ■

Exemplo 11.2.6. Faça o gráfico, determine o domínio e a imagem da função

$$f(x) = (x-1)^{1,86} .$$

Solução: É um caso semelhante ao Ex. 2.5 porém com uma subtração. O efeito no gráfico é um deslocamento de uma unidade, neste caso para a direita, do gráfico da função $f(x) = (x)^{1,86}$.



Temos a opção de escrever $f(x)$ com expoente fracionário $f(x) = \sqrt[100]{(x-1)^{186}}$. Podemos observar que:

1. será possível calcular os valores de y para qualquer x real, pois o expoente da base do radicando é um número par. Portanto: $Df(x)=\{ x \in \mathbb{R} \}$.

2. não existirá $y < 0$ pois todas as raízes serão nulas ou positivas, já que o índice é par. Portanto: $I_m f(x)=\{ y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$ ■

EXERCÍCIOS 11.2

11.2.1 Escreva as funções potência na forma de expoente fracionário e como raízes:

a) $y = x^{0,2}$ c) $y = x^{1,3333...}$ e) $y = x^{0,12121212...}$

b) $y = x^{1,5}$ d) $y = x^{0,75}$ f) $y = x^{2,5}$

11.2.2 Determine o domínio e a imagem das funções:

a) $y = x^{4/3}$ c) $y =(x+2)^{1,3333...}$ e) $y = (2x-3)^{3/4}$

b) $y = x^{5,5}$ d) $y = (x-3)^{1,25}$ f) $y = (x+4)^{2,25}$

11.2.3 Faça manualmente o gráfico das funções do Ex. 2 .

11.2.4 Faça o gráfico das funções do Ex. 2, usando uma planilha eletrônica.

11.2.5 Determine os intervalos em que as funções são crescentes ou decrescentes:

a) $y = x^{3/5}$ c) $y = (2x+3)^{3/4}$

b) $y =(x+2)^{0,5}$

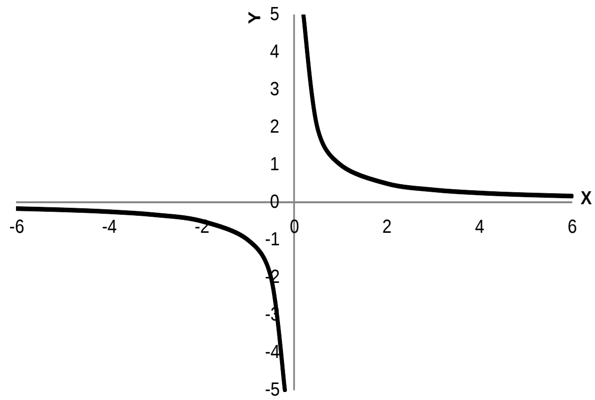
11.2.6 Considere que a função $f(x) = Ax^m$ passa pelos pontos $P_1=(1,1)$ e $P_2=(3,2)$. Substitua as coordenadas dos pontos dados na função e determine os valores de A e m.

11.3 Funções Racionais

Definição 11.3.1. Sejam $p(x)$ e $q(x)$ funções reais. A função é chamada racional se na sua forma irredutível, apresenta a variável no denominador. $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, sendo $q(x) \neq 0$. (3.1)

Exemplo 11.3.1. Faça o gráfico, determine o domínio e a imagem da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Solução: A função dada é uma função racional ($p(x)=1$ e $q(x)=x$), pois apresenta a variável no denominador. Atribuindo valores para x, obtemos os valores de $f(x)$ com o uso de uma calculadora. Observemos que $x \neq 0$, pois 1/0 é uma impossibilidade.



(i) Como o denominador não pode ser nulo, *f(0)* não existe. Para qualquer outro valor de x a função existe, pois é *1/x*, para $x \in \mathbb{R}\ / x \neq 0$, é um número real. Portanto,

$$Df(x)=\{\ x \in \mathbb{R}\ / x \neq 0\ \}\ .$$

(ii) Para que y seja nulo, o numerador precisaria ser nulo e o denominador não nulo. Portanto, $I_m f(x)=\{\ y \in \mathbb{R} / y \neq 0\}$ ■

11.3.1 Assíntotas horizontais e verticais

Na função do **Exemplo 3.1**:

(i) Se aumentamos o valor de x infinitamente, os valores de y tendem a 0, com valores positivos. Observe que por mais que x cresça, a função nunca será zero. (Veja as tabelas)

(ii) Se diminuirmos o valor de x infinitamente, os valores de y tendem a 0, com valores negativos. Observe que por mais que x decresça, a função nunca será zero. (Veja as tabelas)

X	Y
1	1
10	0,1
100	0,01
1000	0,001
10000	0,0001

X	Y
-1	-1
-10	-0,1
-100	-0,01
-1000	-0,001
-10000	-0,0001

Nesse caso, a reta horizontal $y = 0$ é chamada de ***assíntota horizontal***.

Ainda na função do **Exemplo 3.1**:

(i) Se atribuirmos valores a x cada vez mais próximos a zero, pela direita de zero, observaremos que y tende a infinito positivo. (Veja as tabelas)

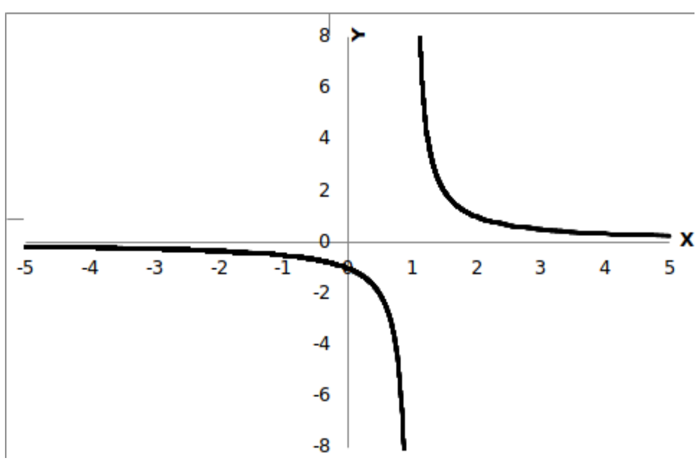
(ii) Se atribuirmos valores a x cada vez mais próximos a zero, pela esquerda de zero, observaremos que y tende a infinito negativo. (Veja as tabelas)

X	Y
0,9	1,11...
0,5	2
0,1	10
0,01	100
0,001	1000
X	Y
-0,9	-1,11...
-0,5	-2
-0,1	-10
-0,01	-100
-0,001	-1000

Nesse caso, a reta vertical $x = 0$ é chamada de ***assíntota vertical***.

Exemplo 11.3.2. Faça o gráfico, determine o domínio e a imagem da função $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Solução: A função dada é semelhante ao Exemplo 3.1, porém com uma subtração no denominador. Como o denominador não pode ser nulo, a função não existirá para $x = 1$, com o gráfico ficando deslocado de uma unidade para a direita, em relação aquele exemplo.



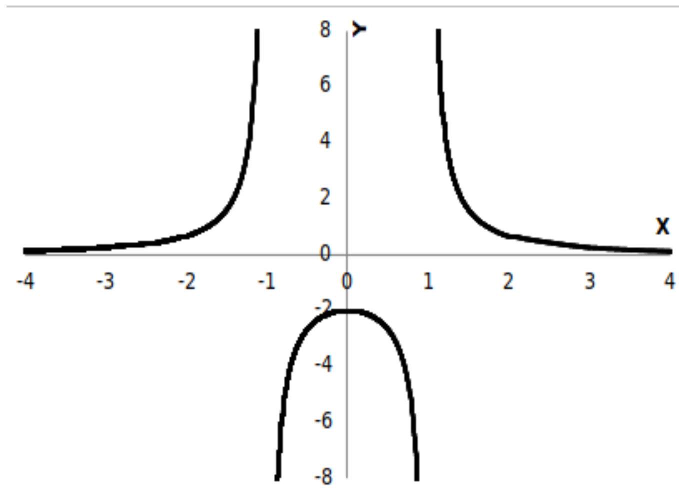
Examinando o gráfico é fácil concluir que :

$Df(x)=\{\ x \in \mathbb{R}\ /\ x \neq 1\ \}$ e $I_m f(x)=\{\ y \in \mathbb{R}\ /\ y \neq 0\}$.

A assíntota horizontal é $y = 0$ e a vertical é $x = 1$ ■

Exemplo 11.3.3. Faça o gráfico, determine o domínio e a imagem da função $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$.

Solução: Como o denominador não pode ser nulo, a função não será definida para $x = +1$ e -1. A função não interceptará as retas verticais $x = +1$ e $x=-1$. Fazendo $x = 0$, temos $f(0) = -2$. Com auxílio de uma calculadora podemos investigar mais pontos nos três intervalos: $x < -1$; $-1 < x < +1$ e $x > 1$, obtendo o gráfico mostrado na figura abaixo.



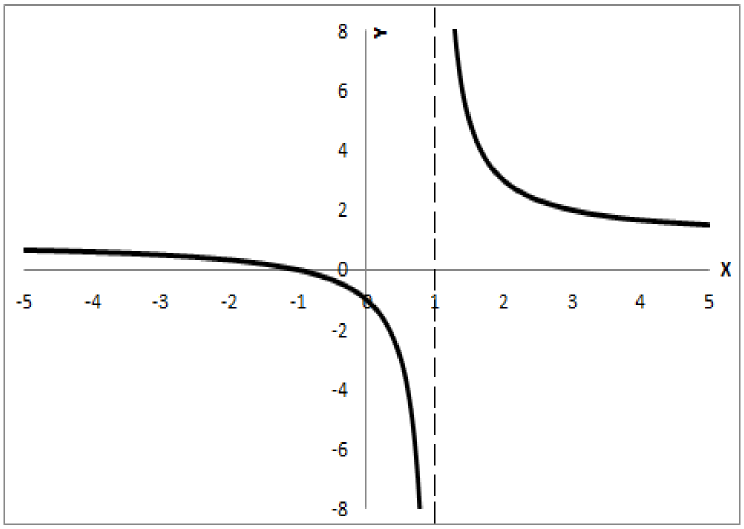
Examinando o gráfico é fácil concluir que:

$Df(x)=\{ x \in \mathbb{R} \ / x \neq -1$ e $x \neq +1 \}$ e $I_m f(x)=\{ y \in \mathbb{R} / y \leq -2$ ou $y > 0\}$. Observemos que não existe imagem em $-2 < y \leq 0$.

As assíntotas verticais serão $x = -1$ e $x = +1$ e a horizontal $y = 0$ ■

Exemplo 11.3.4. Faça o gráfico, determine o domínio e a imagem da função $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

Solução: Como o denominador não pode ser nulo, a função não será definida para $x=+1$. A função não interceptará a reta vertical $x = +1$ (*assíntota vertical*). A função interceptará Y em $y=-1$, pois $f(0) = -1$. Com auxílio de uma calculadora, podemos investigar mais pontos, especificamente quando x aumenta infinitamente. Observe que neste caso, y tende a 1, com valores maiores do que 1. Se x diminui (tende a menos infinito), observamos que y tende a 1, com valores menores que 1. Desses dados, podemos concluir que $y = 1$ é uma *assíntota horizontal*. Levando estas informações para o plano cartesiano, obtemos o gráfico apresentado pela figura abaixo.



Examinando o gráfico é fácil concluir que:

$Df(x)=\{\ x\in\mathbb{R}\ /\ x\neq 1\ \}$ e $I_mf(x)=\{\ y\in\mathbb{R}\ /\ y\neq 1\}$.

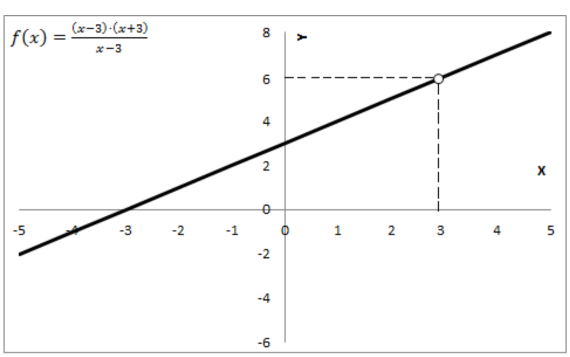
A assíntota vertical será $x = +1$ e a horizontal $y = 1$ ■

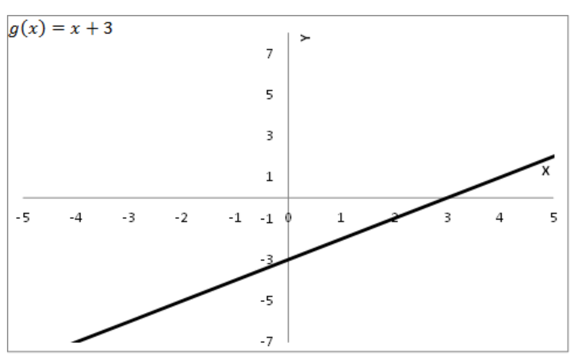
Exemplo 11.3.5. Faça o gráfico, determine o domínio e a imagem da função $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$.

Solução: Podemos fatorar o numerador da função e cancelar o fator *(x-3)*, obtendo outra função que chamaremos de *g(x)*.

$$f(x)=\frac{(x-3)\cdot(x+3)}{x-3} \qquad \text{e} \qquad g(x)=x+3$$

Observemos que *f(x)* e *g(x)* são perfeitamente iguais para qualquer valor de *x*, exceto para $x = 3$. Teste essa afirmação para diferentes valores de *x*, tais como, *0, 1, -1, -3* e outros. Para $x = 3$ temos *f((3) = 0/0* que é uma **indeterminação** (não existe um número *n* tal que *n = 0/0*) e *g(3) = 6*. Portanto, $f((3)\neq g(3)$.





Analisando os gráficos podemos afirmar que:

$Df(x)=\{\ x \in \mathbb{R}\ \ /\ x \neq 3\}$ e $I_m f(x)=\{\ y \in \mathbb{R}\ /\ y \neq 6\}$.

$Dg(x)=\{\ x \in \mathbb{R}\ \}$ e $I_m g(x)=\{\ y \in \mathbb{R}\ \}$.

Assim, as funções *f(x)* e *g(x)* são muito semelhantes mas não são idênticas. Diferem apenas em um ponto: *(3,6)* ■

EXERCÍCIOS 11.3

11.3.1 Faça o gráfico manualmente, determine o domínio e a imagem das funções:

a) $f(x) = -\frac{3}{x}$ c) $h(x) = \frac{x+1}{x}$ e) $F(x) = \frac{2}{x^2-1}$

b) $g(x) = \frac{1}{x-2}$ d) $H(x) = \frac{x-1}{x+1}$ f) $M(x) = \frac{2}{x^2+2x+1}$

11.3.2 Faça os gráficos das funções do Ex.1 utilizando uma planilha eletrônica (ou outro programa computacional)

11.3.3 Verifique se as funções racionais podem ser reduzidas a funções mais simples. Faça o gráfico e discuta sobre o domínio e a imagem de ambas.

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ c) $R(x) = \frac{x-1}{x^2-x}$ e) $q(x) = \frac{-x^2-x}{x^2-1}$

b) $g(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-2}$ d) $H(x) = \frac{x^2+2x}{x}$ f) $P(x) = \frac{x^2+4x+3}{x+3}$

11.3.4 Determine as assíntotas horizontais e verticais das funções, se existirem:

a) $f(x) = \frac{5}{-x+1}$ b) $h(x) = \frac{x-1}{2x}$ c) $g(x) = \frac{1-x}{x-2}$

11.3.5 Faça os gráficos das funções do Ex.4 utilizando uma planilha eletrônica (ou outro programa computacional) e determine o domínio e a imagem.

11.4 Funções polinomiais com grau maior do que dois

Definição 11.4.1. As funções polinomiais têm a forma de polinômios de uma incógnita:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_nx^n \tag{4.1}$$

sendo $a_i \in \mathbb{R}$ e n = *1,2,3,4, ...*

O grau de uma função polinomial é o grau do maior expoente da variável. Assim,

$f(x) = 5 - 2x$ é uma função de 1º grau

$g(x) = 1 - 5x + 2x^2$ é uma função do 2º grau

$h(x) = -4 + x + 2x^2 + x^3 + x^4$ é uma função do 4º grau e assim por diante.

As funções polinomiais são contínuas e existem para qualquer número real, pois as operações envolvidas (adição e multiplicação) com as variáveis não apresentam exceções, como as funções racionais (o denominador deve ser positivo) e as potências (se o índice é par, o radicando deve ser positivo). Assim, o domínio será *Df(x)*=$\{\, x \in \mathbb{R} \,\}$.

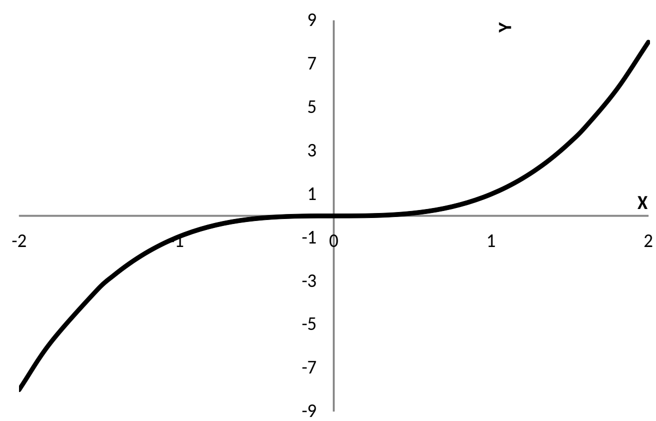
A imagem das funções polinomiais depende da existência de pontos de máximo ou mínimo, que serão estudados em Cálculo. Neste estágio podemos determinar apenas casos específicos.

Exemplo 11.4.1. Faça o gráfico, determine o domínio e a imagem da função $f(x) = x^3$.

Solução: Podemos construir o gráfico obtendo pontos da função aleatoriamente. Porém, observando a expressão da função, vemos que:

(i) Quanto maior o valor de *x*, maior será o de *f(x)* .

(ii) Se *x* é negativo, *f(x)* também será.

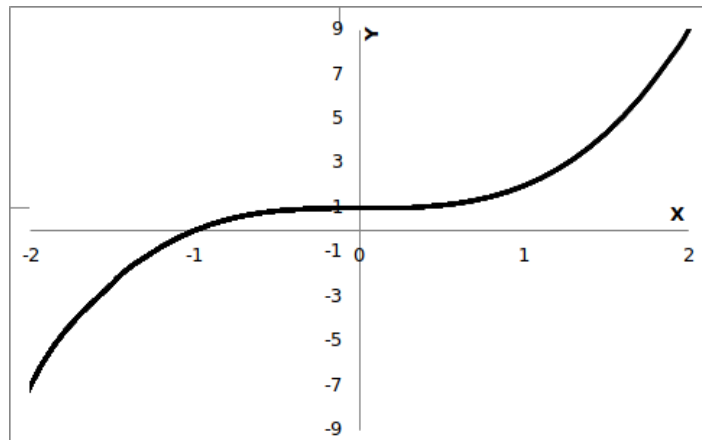


O domínio será $Df(x)=\{\ x \in \mathbb{R}\ \}$ e a imagem $I_m f(x)=\{\ y \in \mathbb{R}\ \}$ ■

Exemplo 11.4.2. Faça o gráfico, determine o domínio e a imagem da função

$$f(x) = x^3 + 1$$

Solução: A expressão desta função é a mesma do exemplo anterior, acrescida de 1. Portanto, basta acrescentar *1* a cada *y*. (ou levantar a função $f(x) = x^3$ em uma unidade)



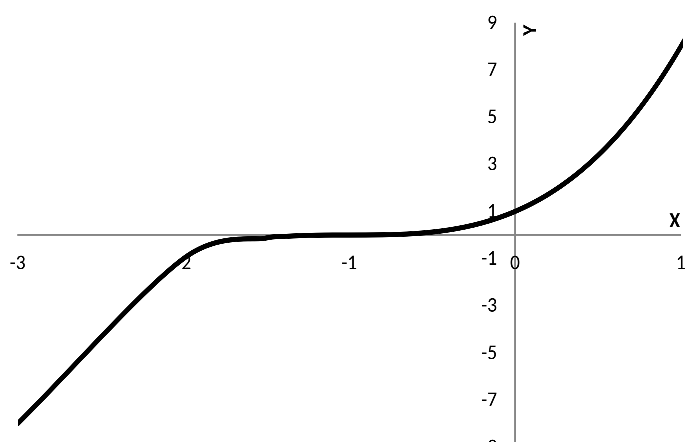
O domínio será *Df(x)*=$\{ x \in \mathbb{R} \ \}$ e a imagem $I_m f(x)$=$\{ y \in \mathbb{R}\}$ ■

Exemplo 11.4.3. Faça o gráfico, determine o domínio e a imagem da função

$$g(x) = (x+1)^3$$

.

Solução: Novamente podemos comparar as expressões das funções desse exemplo com o Exemplo 4.1. Observemos que a base da potência é a diferença. Ou seja, a função *g(x)* é a *f(x)* deslocada uma unidade para a esquerda,



O domínio será $Df(x)=\{ x \in \mathbb{R} \}$ e a imagem $I_m f(x)=\{ y \in \mathbb{R} \}$ ■

Exemplo 11.4.4. Faça o gráfico, determine o domínio e a imagem da função

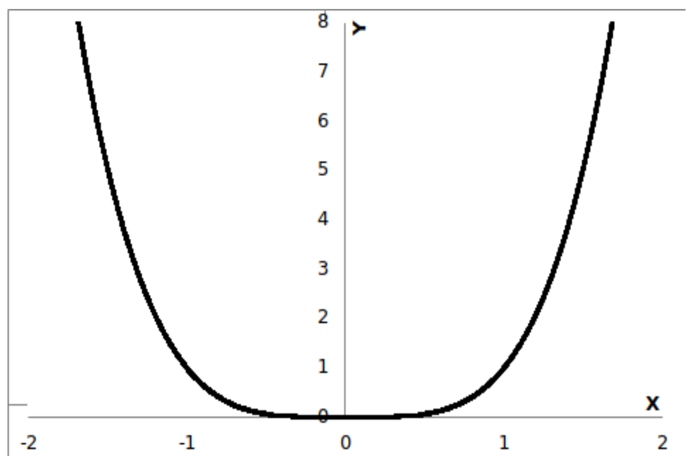
$f(x) = x^4$.

Solução: Podemos construir o gráfico obtendo pontos da função aleatoriamente. Porém, observando a expressão da função, vemos que:

(i) Quanto maior o valor de x, maior será o de $f(x)$.

(ii) A função é simétrica em relação ao eixo Y, pois $f(x) = f(-x)$.

(iii) Não existe $f(x) < 0$, pois o expoente de x é par.



O domínio será $Df(x)=\{ x \in \mathbb{R} \}$ e a imagem $I_m f(x)=\{ y \in \mathbb{R} \ / \ y > 0\}$ ■

Exemplo 11.4.5. Faça o gráfico, determine o domínio e a imagem da função

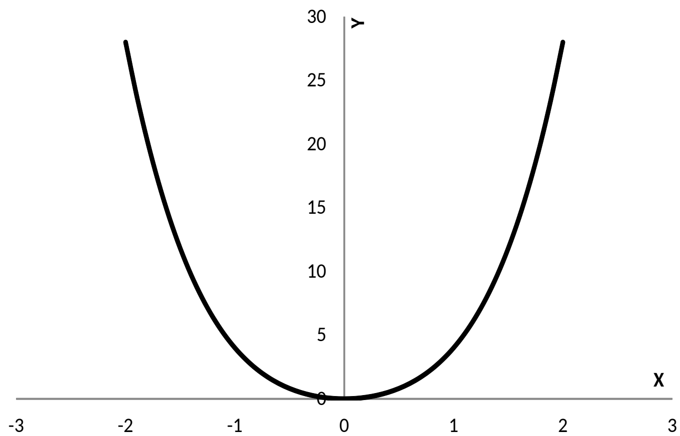
$f(x) = x^4 + 3x^2$.

Solução: Observando a expressão da função, vemos que colocando x^3 em evidência obtemos $f(x) = x^3(x+3)$. Fazendo $f(x) = 0$, temos:

$0 = x^2\left(x^2+3\right)$.

O lado direito desta expressão só será nulo para $x = 0$. Portanto, $f(x)$ intercepta X em $(0,0)$.

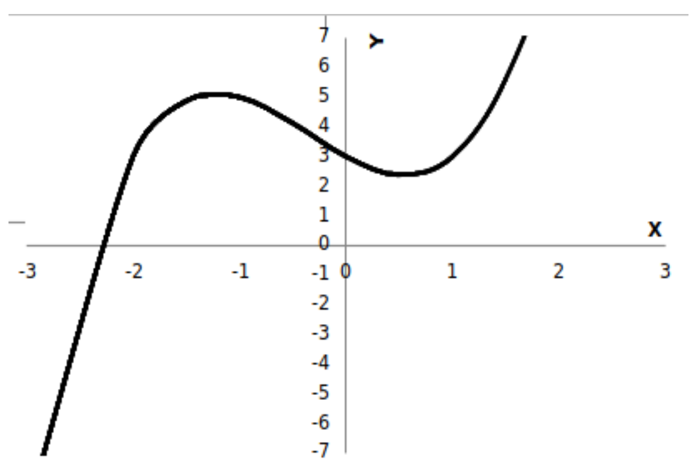
Outros pontos podem ser obtidos atribuindo valores a x e calculando os respectivos valores de $f(x)$.



O domínio será *Df(x)*={ $x \in \mathbb{R}$ } e a imagem I_m*f(x)*={ $y \in \mathbb{R}$ / $y > 0$} ■

Exemplo 11.4.6. Faça o gráfico, determine o domínio e a imagem da função $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$ usando uma planilha eletrônica.

Solução:



Observando o gráfico, o domínio será *Df(x)*={ $x \in \mathbb{R}$ } e a imagem I_m*f(x)*={ $y \in \mathbb{R}$} ■

EXERCÍCIOS 11.4

11.4.1 Faça o gráfico manualmente das funções:

a) $f(x) = x^3 + 3$
b) $f(x) = -x^3 + 3$
c) $f(x) = 1 - 2x^3$
d) $f(x) = x^3 + 3x$
e) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$
f) $g(x) = x^4 + 3x$

11.4.2 Faça o gráfico das funções do Ex.1 usando uma planilha eletrônica e determine o domínio e a imagem.

11.4.3 Os pontos *P_1=(0,-1)* e *P_2=(2,5)* pertencem à função $f(x) = Ax^3 + B$. Determine os coeficientes *A* e *B* e faça um gráfico da *f(x)*.

11.4.4 Os pontos *P_1=(1,-1)* e *P_2=(3,-4)* pertencem à função $g(x) = Ax^3 + B$. Determine os coeficientes *A* e *B* e faça um gráfico da *g(x)*.

11.4.5 Os pontos *P_1=(0,1), P_2=(1,3)* e *P_3=(2,1)* pertencem à função
$h(x) = Ax^3 + Bx + C$. Determine os coeficientes *A, B* e *C* e faça um gráfico da *h(x)*.

11.4.6 Os pontos *P_1=(-1,1), P_2=(0,4)* e *P_3=(1,-1)* pertencem à função
$q(x) = Ax^3 + Bx^2 + C$. Determine os coeficientes *A, B* e *C* e faça um gráfico da *q(x)*.

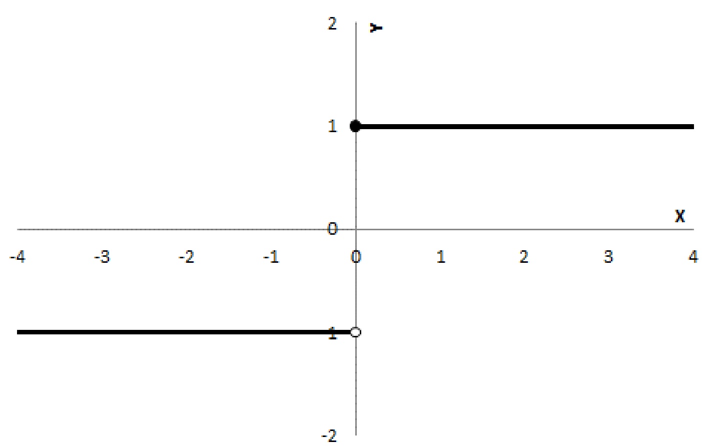
11.5 Funções com mais de uma sentença

Algumas funções podem variar a sentença ao longo do domínio. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 11.5.1. Faça o gráfico e determine o domínio e a imagem da função

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{c} -1, sex < 0 \\ 1, sex \geq 0. \end{array} \right\}$$

Solução: A função *f(x)* tem duas sentenças, ambas funções constantes: *f(x) = - 1* e *f(x)=1*. A primeira vale para *x < 0* e a segunda para *x* $\geq$ *0*. Levando estas informações para o gráfico, temos:



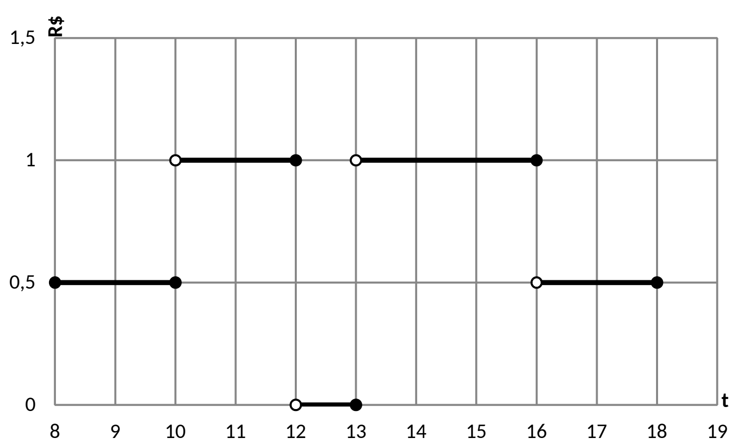
O domínio e a imagem de *f(x)* são, respectivamente:

Df(x)=$\{ x \in \mathbb{R} \}$ e a imagem $I_m f(x)$=$\{ y \in \mathbb{R}$ / *y= -1* e *y=1*$\}$ ■

Exemplo 11.5.2. Em uma cidade, o estacionamento pago depende da hora do dia. Das 8 as 10 h é R\$ 0,50/h; das 10 as 12 h é R\$ 1,00/h; das 12 as 13 h é grátis; das 13 as 16 h é R\$ 1,00/h e das 16 as 118 h é R\$ 0,50/h. Represente os dados como uma função de *t* (tempo), faça o gráfico e determine o domínio e a imagem.

Solução: Representando estes dados como uma função, temos:

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{c} 0,50 \text{ se } 8 \leq t \leq 10h \\ 1,00 \text{ se } 10 < t \leq 12h \\ 0 \text{ se } 12 < t \leq 13h \\ 1,00 \text{ se } 13 < t \leq 16h \\ 0,50 \text{ se } 16 < t \leq 18h \end{array} \right\}$$



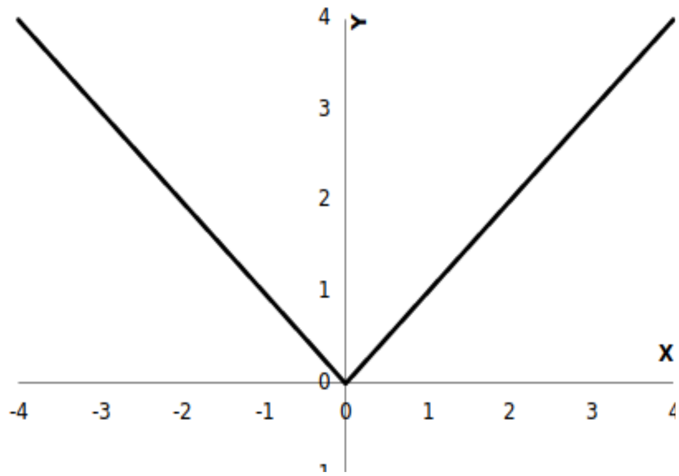
O domínio e a imagem de *f(t)* são, respectivamente:

Df(x)=$\{ t \in \mathbb{R}$ **/ 8 < t < 18**$\}$ e a imagem $I_m f(x)$=$\{ y \in \mathbb{R}$ / *y= 0,5* ; *y=0* e *y=1*$\}$ ■

Exemplo 11.5.3. Faça o gráfico e determine o domínio e a imagem da função

$$[f(x) = \left\{ \begin{array}{c} -x, \text{ se } x < 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \\ \text{x } se \text{ x>0} \end{array} \right\}]$$

Solução: A função *f(x)* tem três sentenças: a reta *f(x)* = - *x* para *x* < *0*; a função constante *f(x)=0* para *x* = *0* e a função identidade *f(x)* = *x* para *x* > *0*. Levando estas informações para o gráfico, temos:



O domínio e a imagem de *f(x)* são, respectivamente:

Df(x)={ $x \in \mathbb{R}$ } e a imagem *I_mf(x)*={ $y \in \mathbb{R}$ } ■

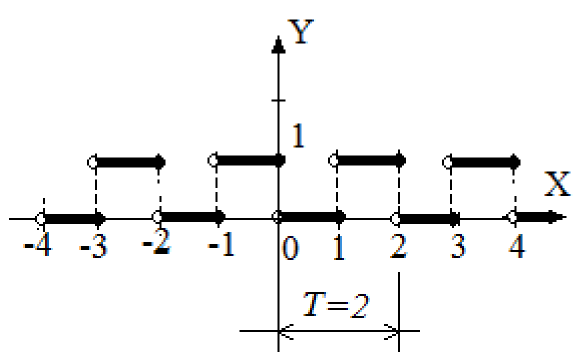
Exemplo 11.5.4. Algumas funções periódicas podem ser escritas especificando suas sentenças para um período que se repete.

Seja T o período: T = 2 , da função

$$[f(x) = \begin{Bmatrix} 0, \text{ para } 0 < x \leq T/2 \\ 1, \; para \frac{T}{2} < x \leq T. \end{Bmatrix}]$$

Faça o gráfico e determine o domínio e a imagem da função.

Solução: Se o período é T = 2 , significa que se a função inicia em x = 0 , se repete de 2 em 2, tanto para a esquerda como para a direita da origem, como mostra o gráfico.



Esta função é conhecida como *função degrau*. O domínio e a imagem de *f(x)* são, respectivamente:

Df(x)=$\{\ x \in \mathbb{R}\ \}$ e a imagem $I_m f(x)$=$\{\ y = 0$ e $y = 1\}$ ■

EXERCÍCIOS 11.5

11.5.1 Dada a função $\left(f(x) = \begin{Bmatrix} -2, \mathit{se}\ \text{x<0} \\ 1, \text{ se } x \geq 0. \end{Bmatrix}\right)$, determine :

a) *f(-1)* b) *f(0)* c) *f(-3)* d) *f(1)* e) *f(2)*

11.5.2 Faça os gráficos das seguintes funções:

a) $\left(f(x) = \begin{Bmatrix} -1 \text{ , se } x < 0 \\ 1, \text{ se } x \geq 0. \end{Bmatrix}\right)$

b) $\left(f(x) = \begin{Bmatrix} \text{x} \text{ , } \mathit{se}\ \text{x<0} \\ -x, \text{ se } x \geq 0. \end{Bmatrix}\right)$

c) $\left(\ f(x) = \begin{Bmatrix} -2 \text{ , se } x \leq 1 \\ \text{3x , } \mathit{se}\ \text{x>1.} \end{Bmatrix}\right)$

d) $\left(\ f(t) = \begin{Bmatrix} 0 \text{ , se } t \neq 0 \\ 1, \text{ se } t = 0. \end{Bmatrix}\right)$

11.5.3 Faça o gráfico das funções periódicas:

a $\left(f(x) = \begin{Bmatrix} -1, \text{ se } 0 < x \leq T/2 \\ 1 \text{ , } \mathit{se}\ \frac{T}{2} < x \leq T. \end{Bmatrix}\right)$ Para $T = 4$.

b $\left(\ \text{f}(x) = \begin{Bmatrix} 0, \text{ se } 0 \leq x < T/2 \\ 1 \text{ , } \mathit{se}\ \frac{T}{2} \leq x < T. \end{Bmatrix}\right)$ Para $T = 1$.

11.5.4 Faça o gráfico da função "dente de serra", definida por: $(f(x) = x$, para $T = 1)$. Determine o domínio e a imagem.

11.5.5 Faça o gráfico da função definida por: $(f(x) = -x + 1$, para $T = 1)$. Determine o domínio e a imagem.

11.5.6 Faça o gráfico da função definida por:

$\left(f(x) = \begin{Bmatrix} 0, & \text{se } 0 < x \leq T/2 \\ x, & \text{se } T/2 < x \leq T \end{Bmatrix}\right.$, para $\left.T = 2\right)$. Determine o domínio e a imagem.

11.5.7 A função "modular"é definida por:

$\left(f(x) = \begin{Bmatrix} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{Bmatrix}\right)$. Determine o domínio e a imagem.

11.6 Funções pares e ímpares

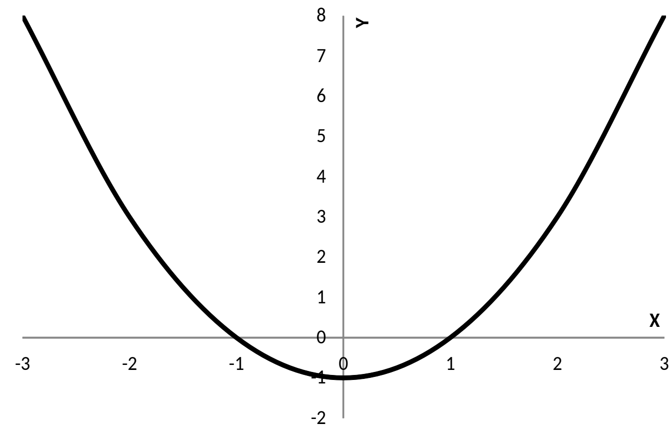
Definição 11.6.1. Uma função é **par** se é simétrica em relação ao eixo Y.

Ou em linguagem matemática,

f(-x) = f(x) , para qualquer $x \in$ *Df(x)* ■

Exemplo 11.6.1. Verifique se a função $f(x) = x^2 - 1$ é par.

Solução:



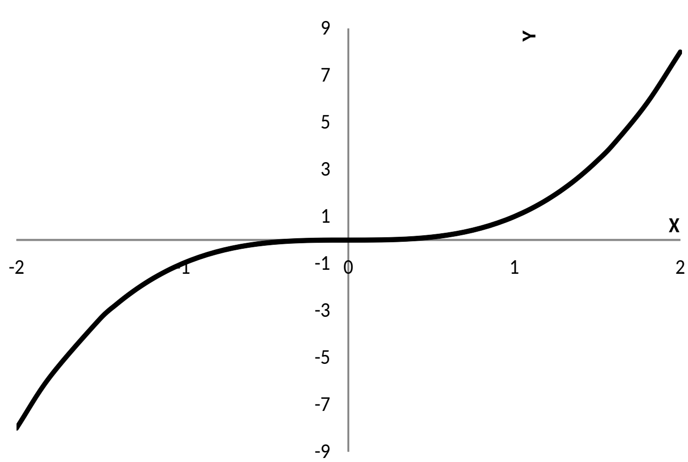
Analisando o gráfico observa-se que $f(x)$ é uma parábola e que o eixo Y é seu eixo de simetria. Usando a Def. 6.1, observa-se que para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$. Portanto, $f(x)$ é uma função par ■

Definição 11.6.2. Uma função é **ímpar** se é anti-simétrica (simetria com o sinal oposto) em relação ao eixo Y. Ou em linguagem matemática,

$f(-x) = -f(x)$, para qualquer $x \in Df(x)$ ■

Exemplo 11.6.2. Verifique se a função $f(x) = x^3$ é par ou ímpar.

Solução:



Analisando o gráfico observa-se que *f(x)* é antissimétrica em relação ao eixo Y. Usando a Def. 6.1, observa-se que para qualquer $x \in \mathbb{R}$, *f(x) = -f(-x)*. Portanto, *f(x)* é uma função ímpar ■

EXERCÍCIOS 11.6

11.6.1 Verifique se as funções são pares e ímpares:

a) $f(x) = -x^2 + 5$

b) $f(x) = -x^3$

c) $f(x) = -x^4$

d) $f(x) = x^5 + 3$

e) $f(x) = -5x^2 + 3$

f) $f(x) = 3x^3$

11.6.2 Verifique se a função abaixo é par ou ímpar:

$$[f(x) = \begin{Bmatrix} -1 \text{ , se } x < 0 \\ 0\text{, se } x = 0 \\ 1 \text{ , } se \text{ x>0.} \end{Bmatrix}]$$

11.6.3 Verifique se a função abaixo é par ou ímpar:

$$(f(x) = \begin{Bmatrix} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{Bmatrix}).$$

11.6.4 Crie uma função par, faça o gráfico e determine o domínio e a imagem.

11.6.5 Crie uma função ímpar, faça o gráfico e determine o domínio e a imagem.

11.7 Módulo e funções modulares

Definição 11.7.1. O módulo de um número real x é representado por $|x|$ e definido como:

$$(|x| = \left\{ \begin{array}{c} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{array} \right\}) \tag{7.1}$$

Exemplo 11.7.1. Determine o módulo de x = *-5* e x = *5*.

Solução: Usando a Def. 7.1, temos:

Para $x = -5$, $x < 0$, então $|x| = -(-5) = +5$.

Para $x = 5$, $x > 0$, então $|x| = +5$ ■

Exemplo 11.7.2. Determine $|x+3|$.

Solução: Usando a Def. 7.1, temos:

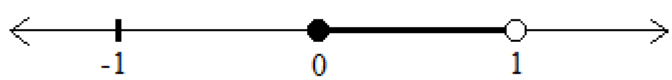
Se $x+3 \geq 0$, ou $x \geq -3$, temos $|x+3| = x+3$.

Se $x+3 < 0$, ou $x < -3$, temos $|x+3| = -(x+3)$ ■

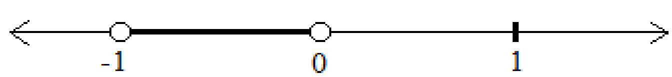
Exemplo 11.7.3. Os módulos podem ser usados para representar intervalos. Quais são os valores de x que satisfazem a desigualdade I = $|x| < 1$.

Solução: Usando a Def. 7.1, temos:

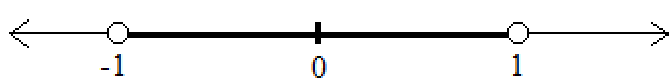
Se $x \geq 0$ temos $x < 1$.



Se $x < 0$, temos $-x < 1$ ou $x > -1$.



Unindo os dois intervalos, temos que I = $\{ x \in \mathbb{R} \ / -1 < x < 1 \}$



■

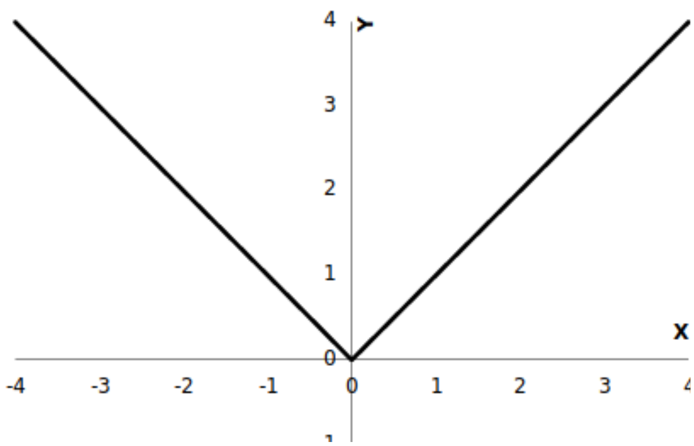
Definição 11.7.2. Seja x uma variável real. Uma função é modular se possui $|\ f(x)\ |$ na sua expressão.

Exemplo 11.7.4. Faça o gráfico da função modular $f(x) = |\,x|$. Determine o domínio e a imagem.

Solução: Usando a Def. 7.1 temos:

Se $x \geq 0$ temos $f(x) = x$.

Se $x < 0$, temos $f(x) = -x$. Temos duas retas, uma para cada intervalo do domínio.



Observando o gráfico, o domínio será $Df(x)=\{\ x \in \mathbb{R}\ \}$ e a imagem

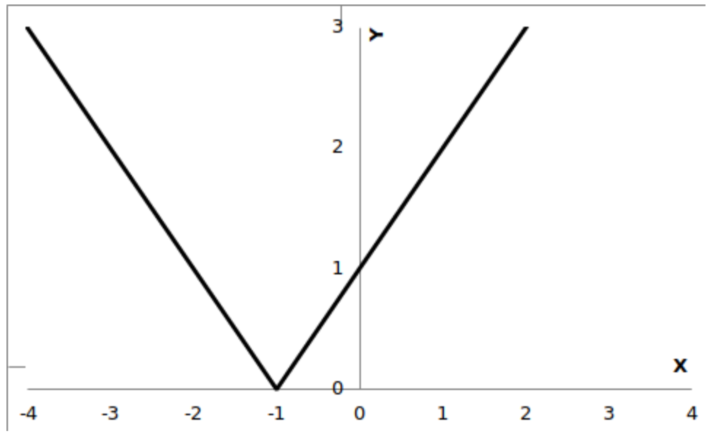
$I_m f(x)=\{\ y \in \mathbb{R}\ /\ y \geq 0\}$ ■

Exemplo 11.7.5. Faça o gráfico da função modular $f(x) = |\,x+1|$. Determine o domínio e a imagem.

Solução: Usando a Def. 7.1 temos:

Se $x+1 \geq 0$ ou $x \geq -1$ temos $f(x) = x+1$.

Se $x+1 < 0$ ou $x < -1$temos$f(x) = -(x+1)$. Temos duas retas, uma para cada intervalo do domínio.



Observando o gráfico, o domínio será $Df(x)=\{\ x \in \mathbb{R}\ \}$ e a imagem.

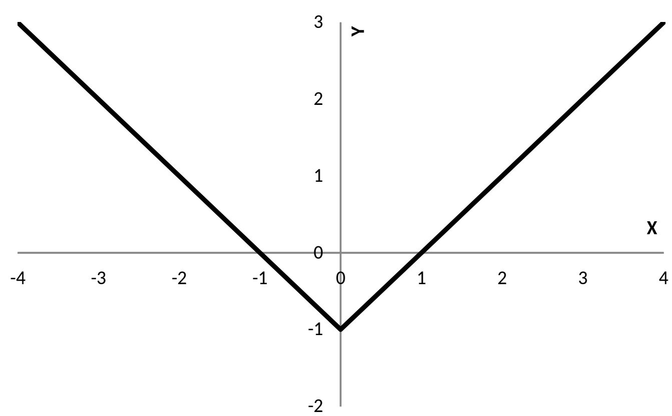
$I_m f(x)=\{\ y \in \mathbb{R} \ / \ y \geq 0\}$ ■

Exemplo 11.7.6. Faça o gráfico da função modular $f(x) = |\ x|\ -1$. Determine o domínio e a imagem.

Solução: Usando a Def. 7.1 temos:

Se $x \geq 0$temos $f(x) = x\text{-}1$.

Se $x < 0$, temos $f(x) = -x\text{-}1$. Temos duas retas, uma para cada intervalo do domínio.



Observando o gráfico, o domínio será $Df(x)=\{\ x \in \mathbb{R}\ \}$ e a imagem

$I_m f(x)=\{\ y \in \mathbb{R} \ / \ y \geq -1\}$ ■

Exemplo 11.7.7. Faça o gráfico da função modular $f(x) = |\ x^2\text{-}1|$. Determine o domínio e a imagem.

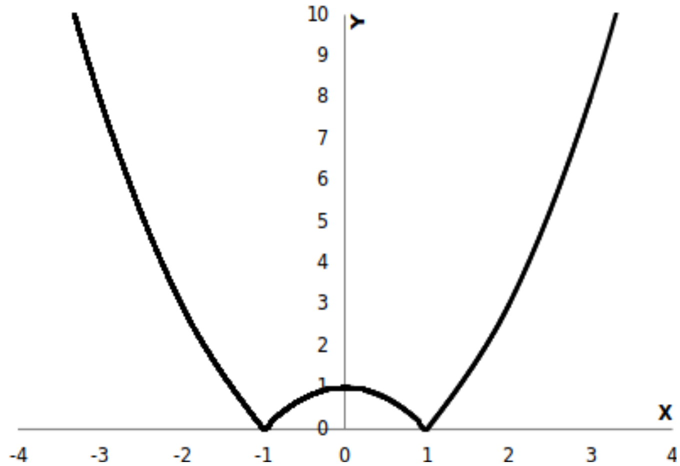
Solução: Usando a Def. 7.1 temos:

Se x^2-$1 \geq 0$,

$x^2 \geq 1$. Então, nos intervalos $x \leq -1$ ou $x \geq 1$ temos $f(x) = x^2 - 1$.

Se x^2-$1 < 0$

$x^2 < 1$. Então, no intervalo $-1 < x < 1$ temos $f(x) = -x^2 + 1$.



Observando o gráfico, o domínio será $Df(x)=\{ x \in \mathbb{R} \}$ e a imagem $I_m f(x)=\{ y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$ ■

EXERCÍCIOS 11.7

11.7.1 Determine os módulos, usando a definição 7.1:

a) $| -7| =$
b) $| x+1| =$
c) $| +8| =$
d) $| x-1| =$
e) $| -x+2| =$
f) $| 5 - x | =$

11.7.2 Determine os intervalos em x que satisfazem os módulos:

a) $| x| > 1$
b) $| x+1| < 0$
c) $| x| < 1$
d) $| x-1| < 2$
e) $| -x+2| < 2$
f) $| 5 - x | < 1$

11.7.3 Desenhe os intervalos do exercício anterior em uma reta real.

11.7.4 Faça o gráfico das funções e determine o domínio e a imagem.

a) $F(x)=| -x|$
b) $f(x)=| 2x-3|$
c) $f(x)=| -2x-3|$
d) $g(x)=| -x+5|$
e) $G(x)=| 1-x|$
f) $g(t)=| t | +2$
g) $H(x)=| x^2 +4|$
h) $F(x)=| -x^2 | +5$
i) $f(t)=| t^2 +1| -2$

11.7.5 Faça o gráfico em uma planilha eletrônica e determine o domínio e a imagem das funções.

a) $f(x)=|x^2 - x - 2|$
b) $g(x)=|x^2 - x| + 1$
c) $f(x)=|-x^2 + 4|$
d) $p(t)=|t| + t^2 + 4$
e) $p(t)=|t| - t^2 + 2$
f) $g(x)=|x^3| - x^2 + 1$

11.7.6 Faça o gráfico da função periódica: $f(x) = |x|$, para $T = 1$.

(a) Considerando que *f(x)* é par.
(b) Considerando que *f(x)* é ímpar.

11.8 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESPOSTAS 11.2

11.2.1 a) $x^{1/5}$; $\sqrt[5]{x}$

b) $x^{3/2}$;$\sqrt{x^3}$

c) $x^{4/3}$; $\sqrt[3]{x^4}$

d) $x^{3/4}$; $\sqrt[4]{x^3}$

e) $x^{4/33}$; $\sqrt[33]{x^4}$

f) $x^{5/2}$;$\sqrt{x^5}$

11.2.2 a) $D = \{x \in R\}$ $Im = \{y \in R/y \geq 0\}$

b) $D = \{x \in R/x \geq 0\}$ $Im = \{y \in R/y \geq 0\}$

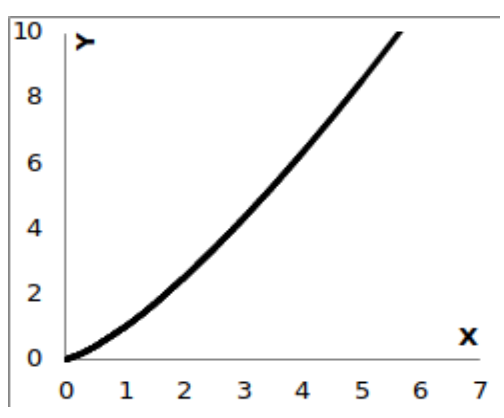
c) $D = \{x \in R\}$ $Im = \{y \in R/y \geq 0\}$

d) $D = \{x \in R/x \geq 3\}$ $Im = \{y \in R/y \geq 0\}$ $Im = \{y \in R/y \geq 0\}$

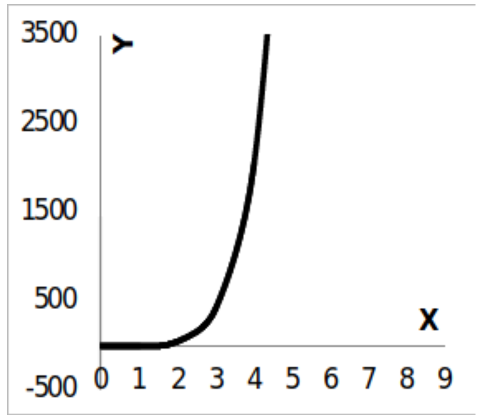
e) $D = \{x \in R/x \geq 3/2\}$ $Im = \{y \in R/y \geq 0\}$

f) $D = \{x \in R\ /x \geq -4\}$ $Im = \{y \in R/y \geq 0\}$

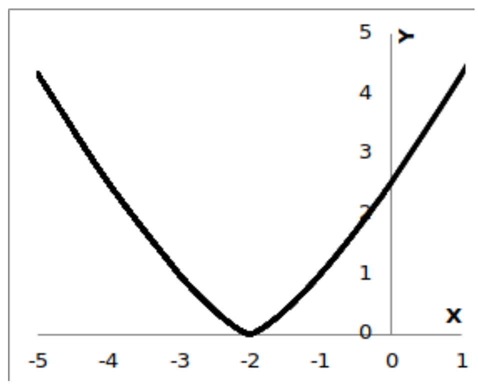
11.2.3 a)



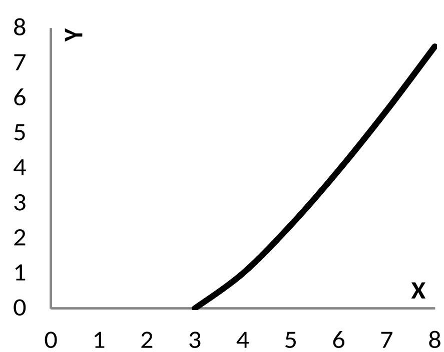
b)


3500
2500
1500
500
-500
Y
X
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

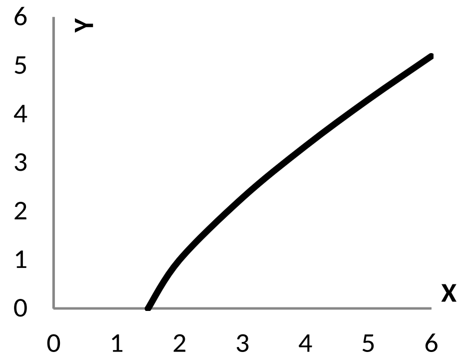
c)


5
4
3
2
1
0
Y
x
-5 -4 -3 -2 -1 0 1

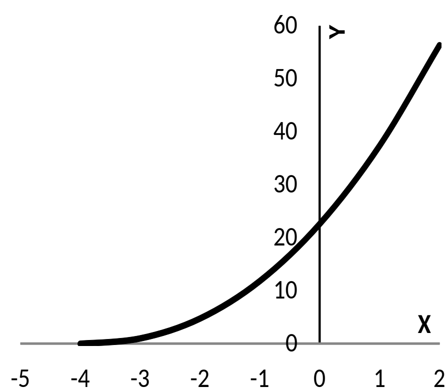
d)


8
7
6
5
4
3
2
1
0
Y
X
0 1 2 3 4 5 6 7 8

e)



f)



11.2.5 a) Crescente para x $\in R$

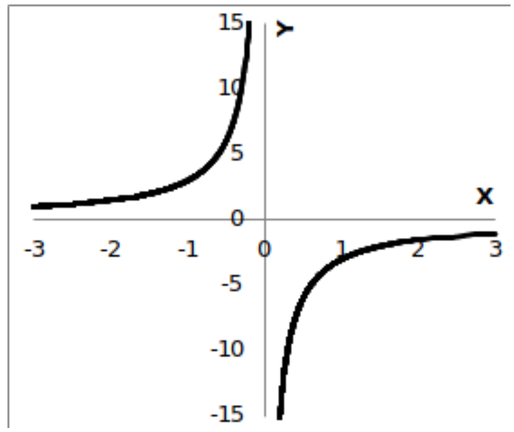
b) $Crescente\ para\ x > -2$

c) $Crescente\ para\ x > -1$

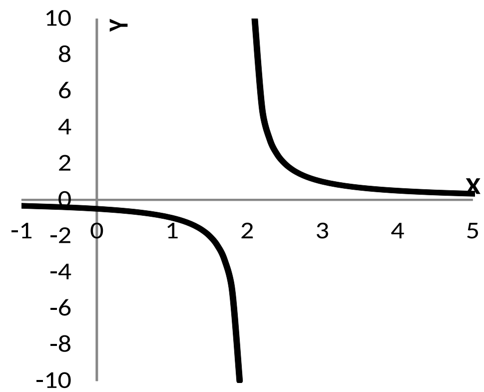
11.2.6 $f(x) = x^{0,6309298}$

RESPOSTAS 11.3

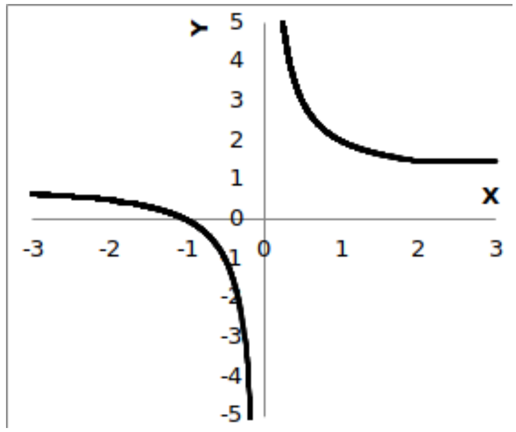
11.3.1 a) $D = \{x \in R / x \neq 0\}$
$Im = \{y \in R / y \neq 0\}$



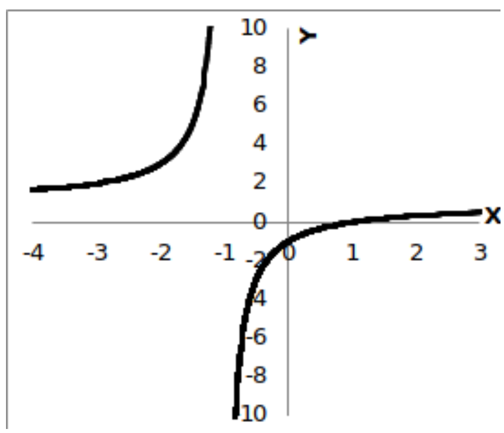
b) $D = \{x \in R / x \neq 2\}$
$Im = \{y \in R / y \neq 0\}$



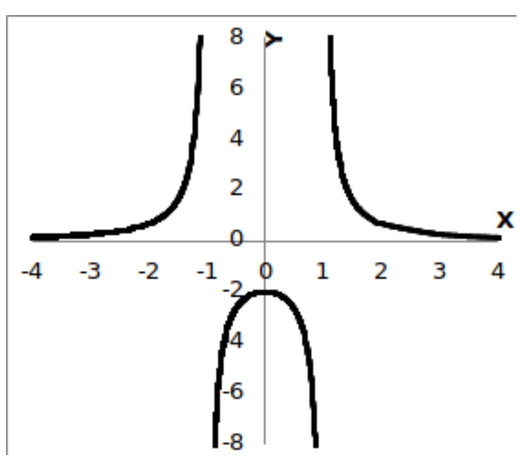
c) $D = \{x \in R / x \neq 0\}$
$Im = \{y \in R / y \neq 1\}$



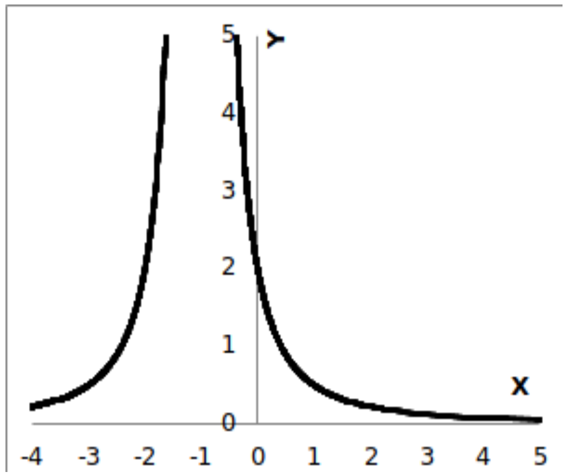
d) $D = \{x \in R / x \neq -1\}$
$Im = \{y \in R / y \neq 1\}$



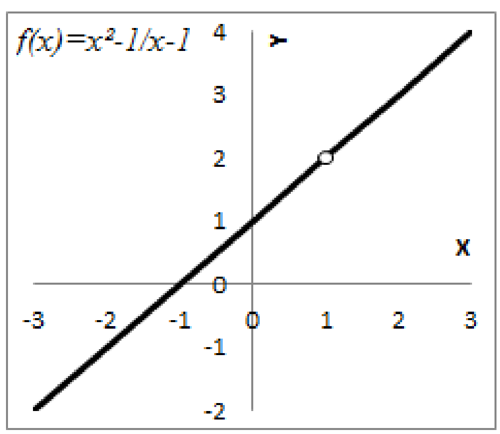
e) $D = \{x \in R / x \neq -1 e x \neq 1\}$
$Im = \{y \in R / y \leq -2 ou y > 0\}$



f) $D = \{x \in R/x \neq -1\}$
$Im = \{y \in R/y > 0\}$

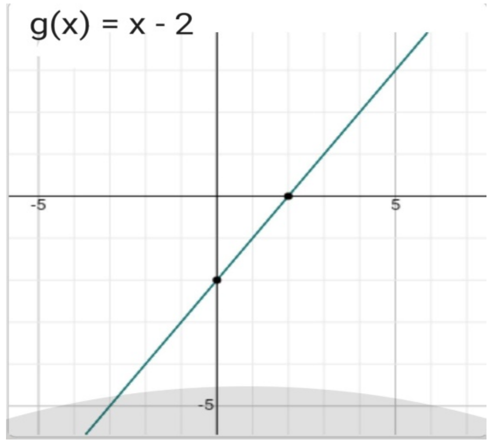


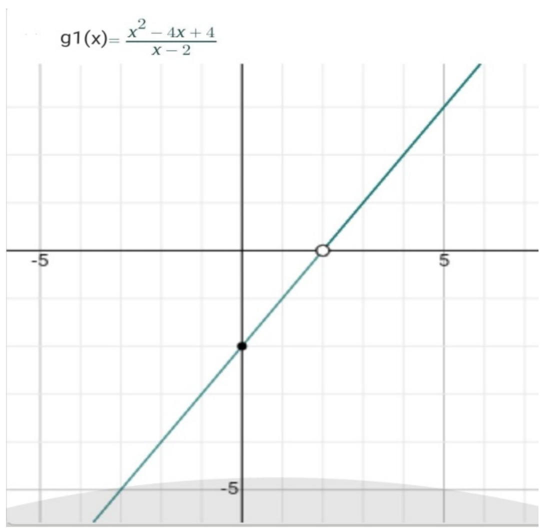
11.3.3 a) $f1(x) = x+1$;
$Df(x) = \{x \in R/x \neq 1\}$
$Imf(x) = \{y \in R/y \neq 2\}$



b) $g(x) = x-2$
$D = \{x \in R\}$
$Im = \{y \in R\}$

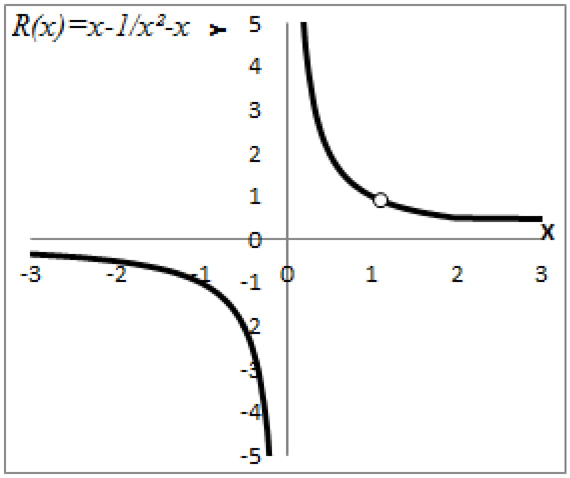
$g1(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-2}$
$D = \{x \in R/x \neq 2\}$
$Im = \{y \in R/y \neq 0\}$

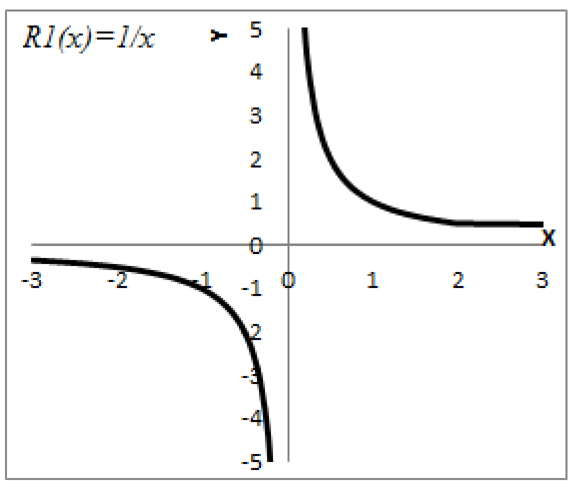




c) $R(x)=\frac{x-1}{x^2-x}$
$D=\{x\in R/x\neq 0e\ x\neq 1\}$
$Im=\{y\in R/y\neq 0\}$

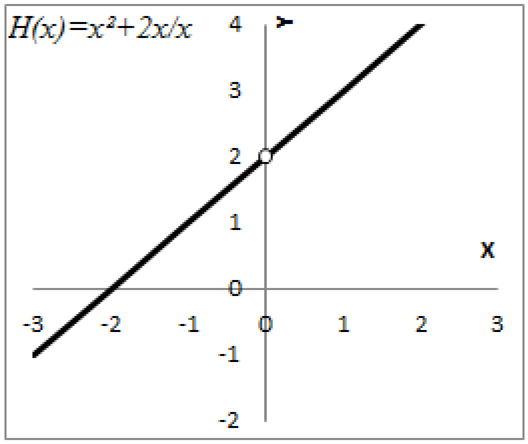
$R1(x)=\frac{1}{x}$
$D=\{x\in R/x\neq 0\}$
$Im=\{y\in R/y\neq 0\}$

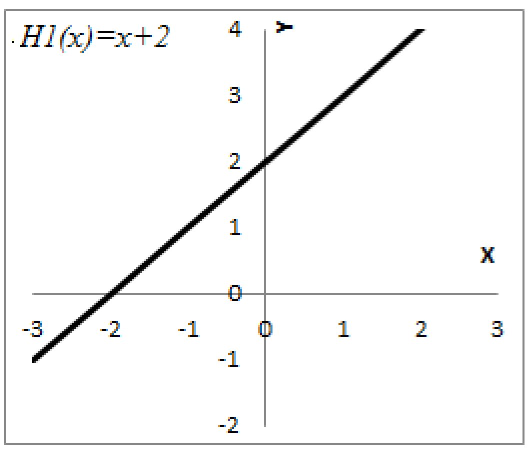




d) $H(x) = \frac{x^2+2x}{x}$
$D = \{x \in R / x \neq 0\}$
$Im = \{y \in R / y \neq 2\}$

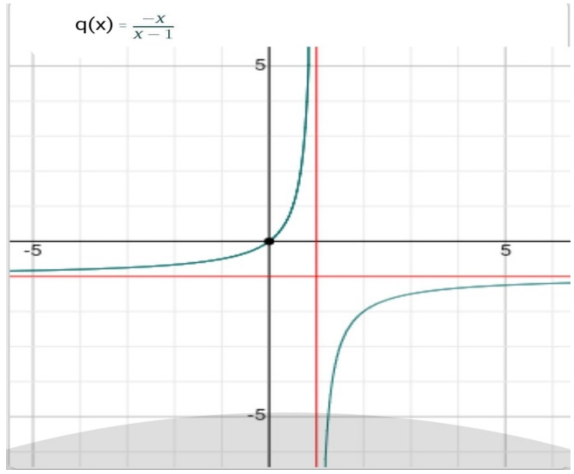
$H1(x) = x+2$
$D = \{x \in R\}$
$Im = \{y \in R\}$

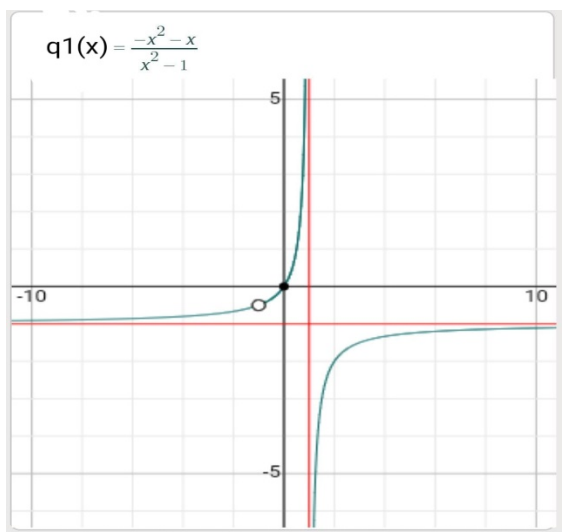




e) $q(x) = \frac{-x}{x-1}$
$D = \{x \in R/x \neq 1\}$
$Im = \{y \in R/y \neq -1\}$

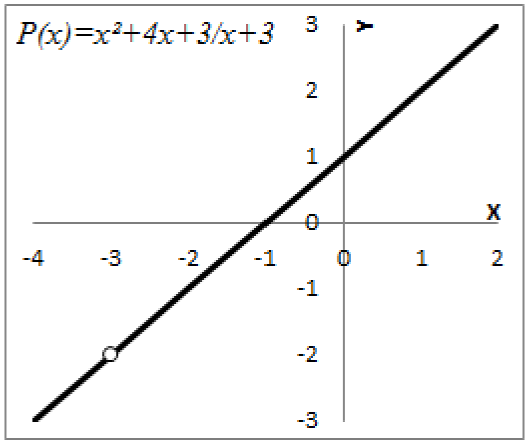
$q1(x) = \frac{-x^2-x}{x^2-1}$
$D = \{x \in R/\ x \neq -1 \text{ e x} \neq 1\}$
$Im = \{y \in R/y \neq -1 \text{ e y} \neq -\frac{1}{2}\}$

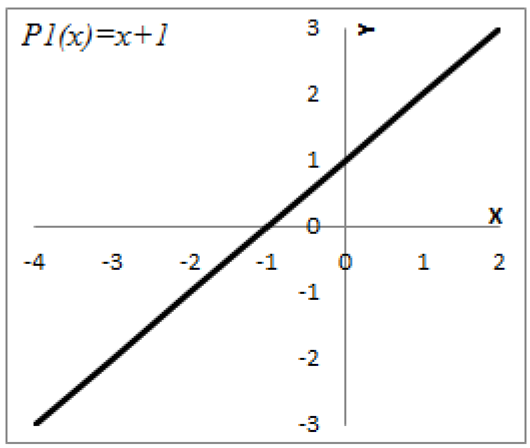




f) $P(x) = \frac{x^2+4x+3}{x+3}$
$D = \{x \in R / x \neq -3\}$
$Im = \{y \in R / y \neq -2\}$

$P1(x) = x+1$
$D = \{x \in R\}$
$Im = \{y \in R\}$



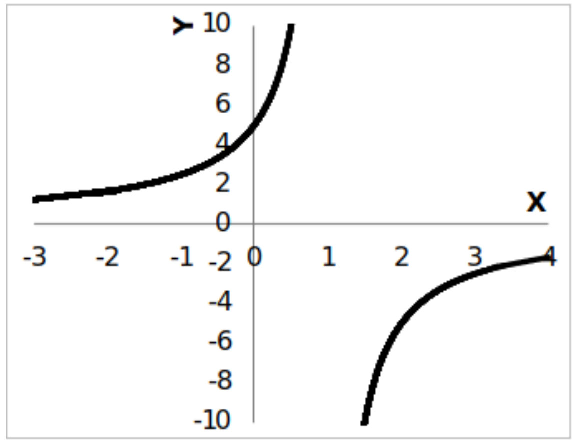


11.3.4 a) Assíntota Horizontal: y=*0*; Assíntota Vertical: *x=1*.

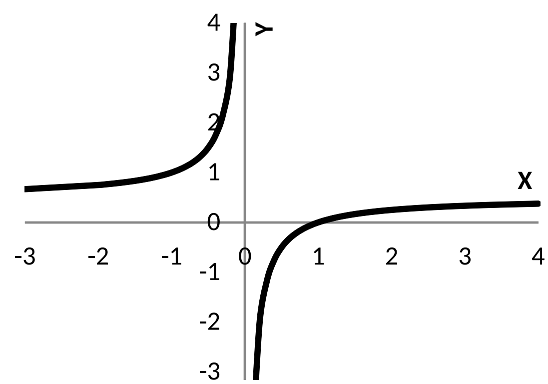
b) Assíntota Horizontal: y=*1/2*; Assíntota Vertical: *x=0*.

c) Assíntota Horizontal: *y=-1*; Assíntota Vertical: *x=2*.

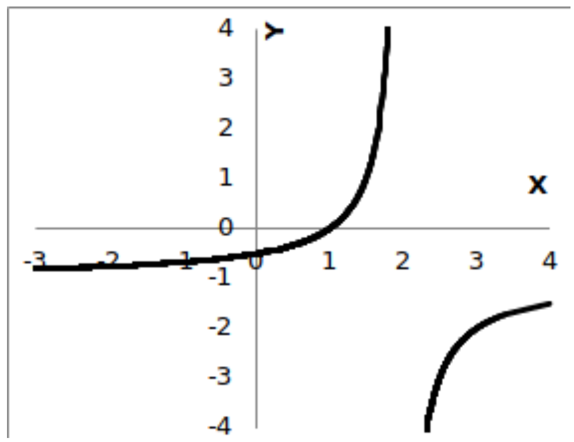
11.3.5 a)



b)

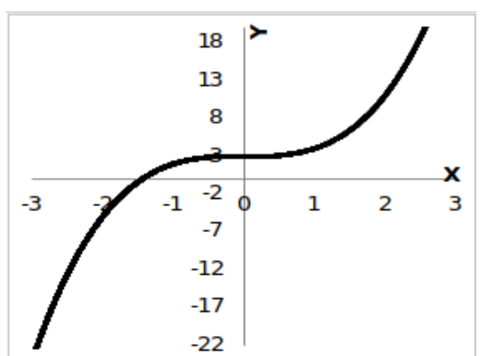


c)

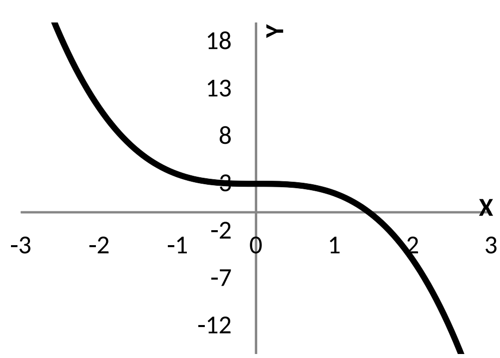


RESPOSTAS 11.4

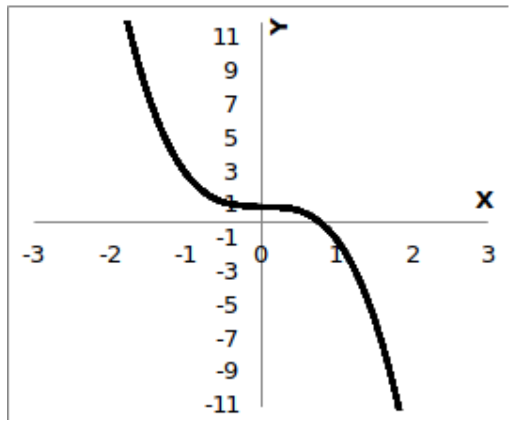
11.4.1 a)



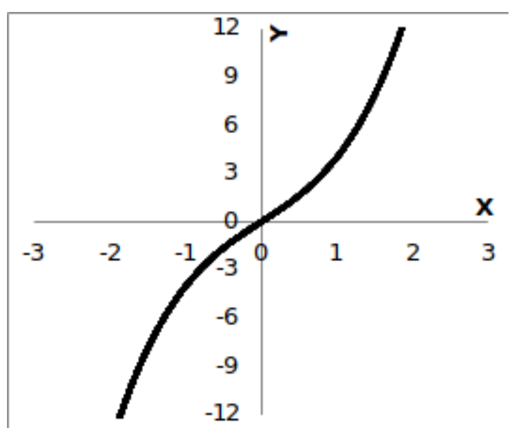
b)



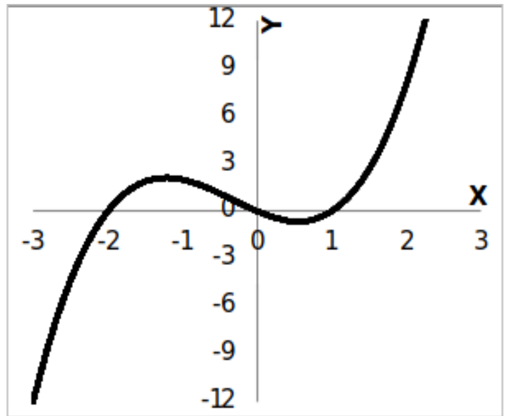
c)



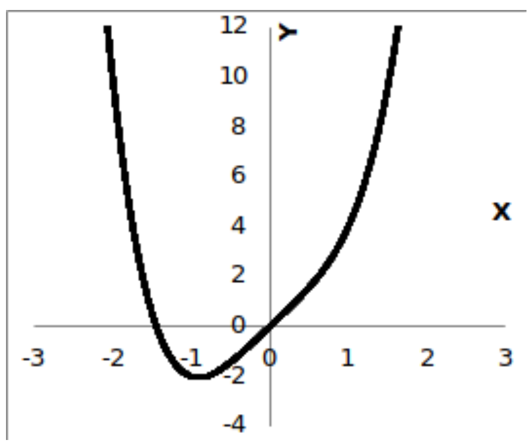
d)



e)



f)



11.4.2 a) $D = \{x \in R\}$ **;** $Im = \{y \in R\}$

b) $D = \{x \in R\}$ **;** $Im = \{y \in R\}$

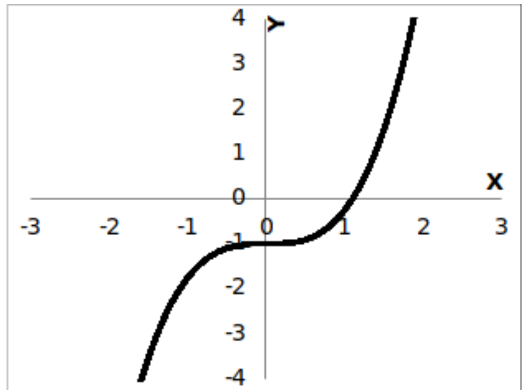
c) $D = \{x \in R\}$ **;** $Im = \{y \in R\}$

d) $D = \{x \in R\}$ **;** $Im = \{y \in R\}$

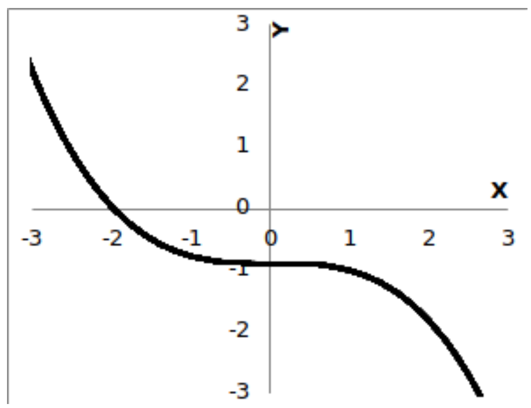
e) $D = \{x \in R\}$ **;** $Im = \{y \in R\}$

f) $D = \{x \in R\}$ **;** $Im = \{y \in R / y > -2,04\}$

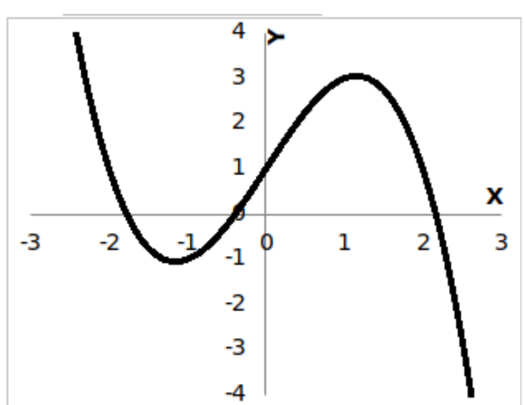
11.4.3 $f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 1$



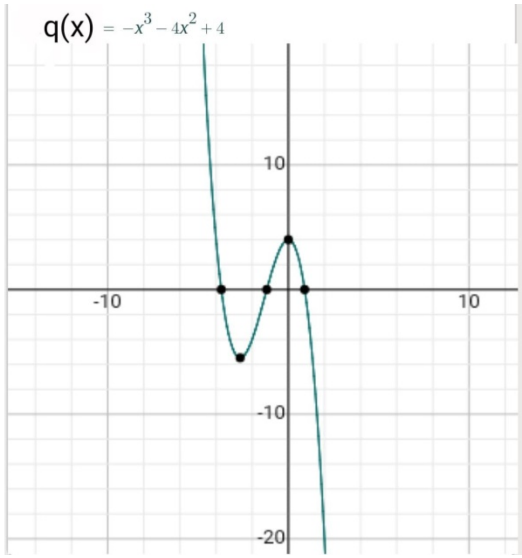
11.4.4 $g(x) = -\frac{3}{26}x^3 - \frac{23}{26}$



11.4.5 $h(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}x + 1$



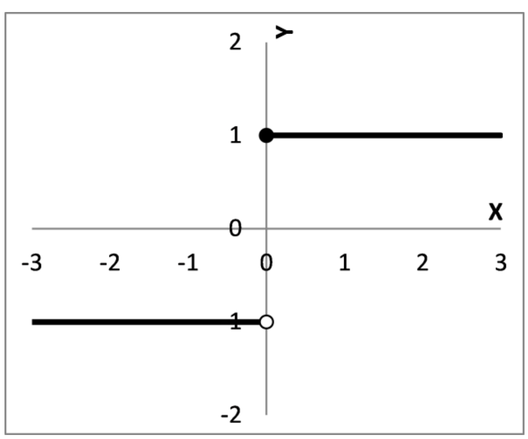
11.4.6 $q(x) = -x^3-4x^2+4$.



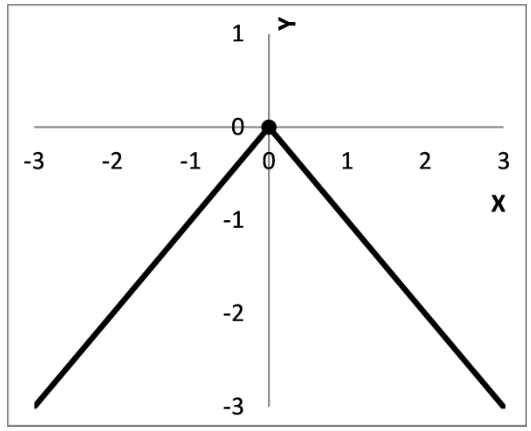
RESPOSTAS 11.5

11.5.1 a) $f(-1) = -2$
b) $f(0) = 1$
c) $f(-3) = -2$
d) $f(1) = 1$
e) $f(2) = 1$

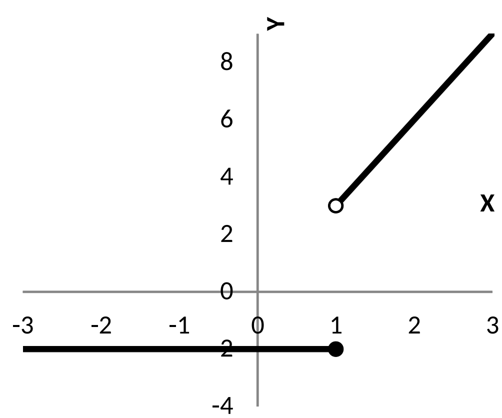
11.5.2 a)



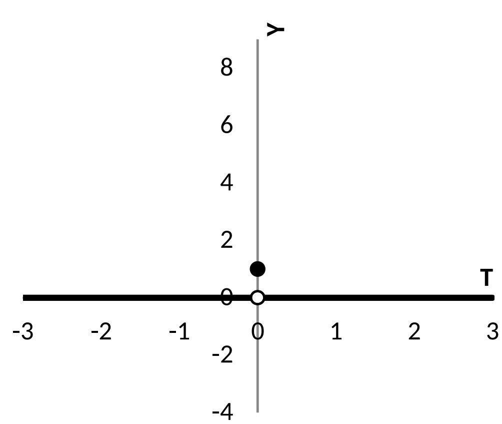
b)



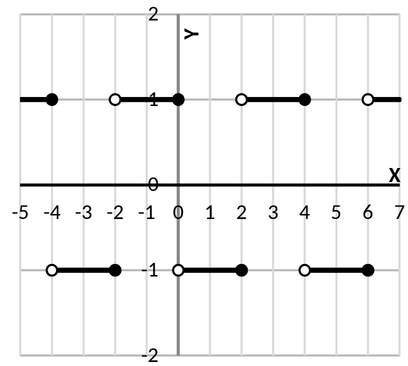
c)



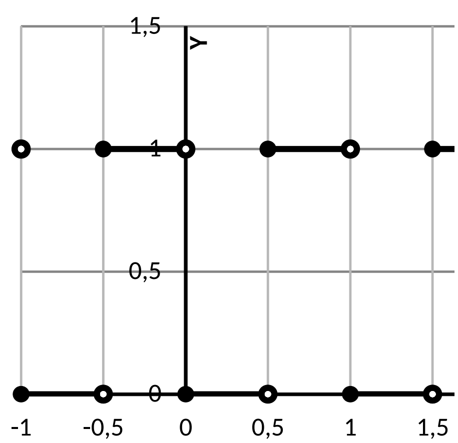
d)



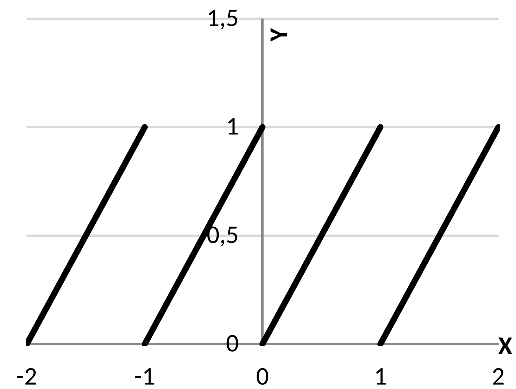
11.5.3 a)



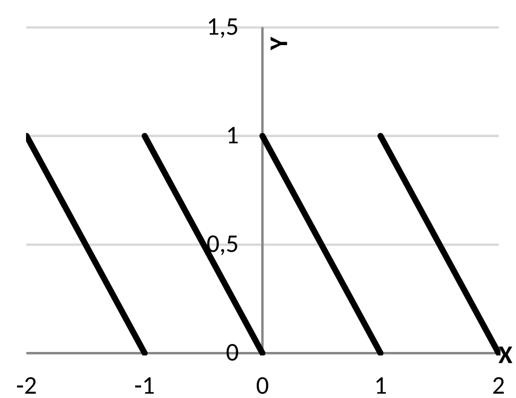
b)



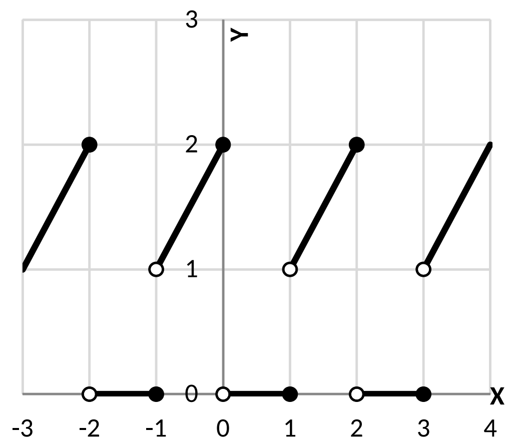
11.5.4 $D = \{x \in R\}$
$Im = \{y \in R / 0 < y < 1\}$



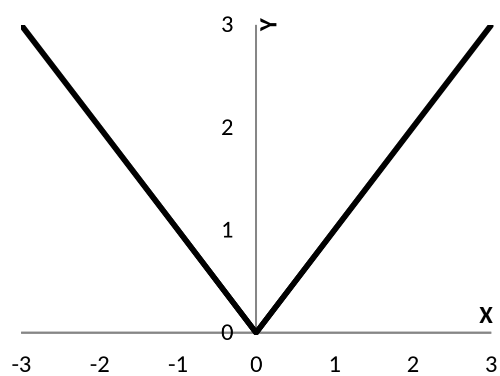
11.5.5 $D = \{x \in R\}$
$Im = \{y \in R/0 < y < 1\}$



11.5.6 $D = \{x \in R\}$
$(Im = \{y \in R/y = 0 \text{ ou } 1 < y \leq 2\})$



11.5.7 $D = \{x \in R\}$
$Im = \{y \in R/y \geq 0\}$



RESPOSTAS 11.6

11.6.1 a) A função é par

b) A função é ímpar

c) A função é par

d) A função é ímpar

e) A função é par

f) A função é ímpar

11.6.2 A função é ímpar

11.6.3 A função é par

RESPOSTAS 11.7

11.7.1 a) 7

b) Se $x+1 \geq 0; |x+1| = x+1$

Se $x+1 < 0; |x+1| = -(x+1)$

c) 8

d) Se $x-1 \geq 0; |x-1| = x-1$

Se $x-1 < 0; |x-1| = -(x-1)$

e) Se $x \leq 2; |-x+2| = (-x+2)$

Se $x > 2; |-x+2| = -(-x+2)$

f) Se $x \leq 5; |5-x| = (5-x)$

Se $x > 5; |5-x| = -(5-x)$

11.7.2 a) $(I = \{x \in R/x < -1 \text{ ou } x > 1\})$

b) $I = \{x \in R/x \neq -1\}$

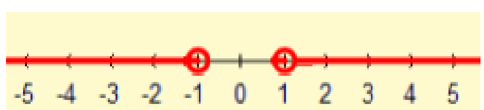
c) $I = \{x \in R/-1 < x < 1\}$

d) $I = \{x \in R/-1 < x < 3\}$

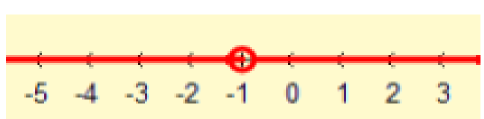
e) $I = \{x \in R/0 < x < 4\}$

f) $I = \{x \in R/4 < x < 6\}$

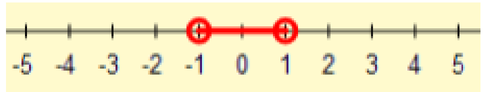
11.7.3 a)



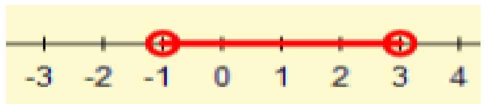
b)



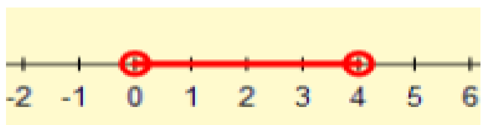
c)



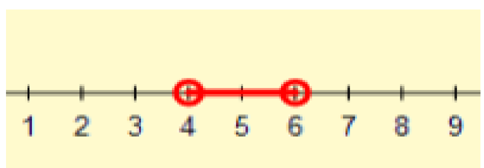
d)



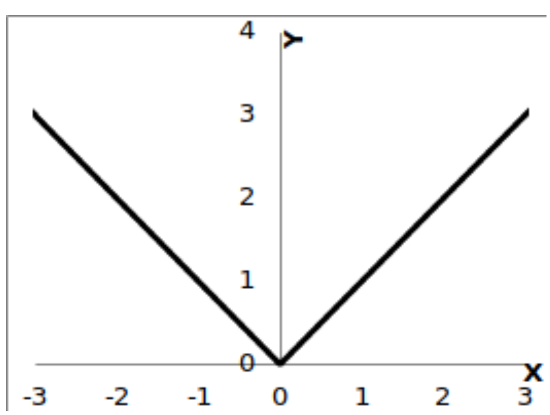
e)



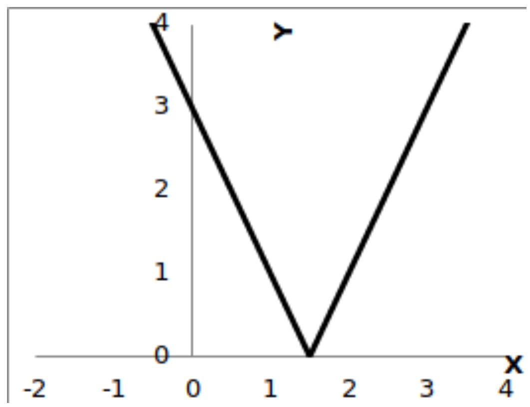
f)



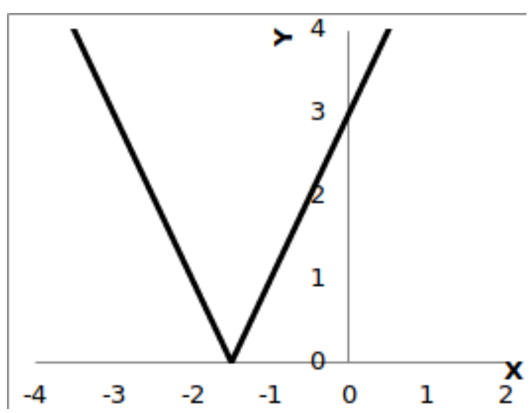
11.7.4 a) $D = \{x \in R\}$ **;** $Im = \{y \in R / y \geq 0\}$



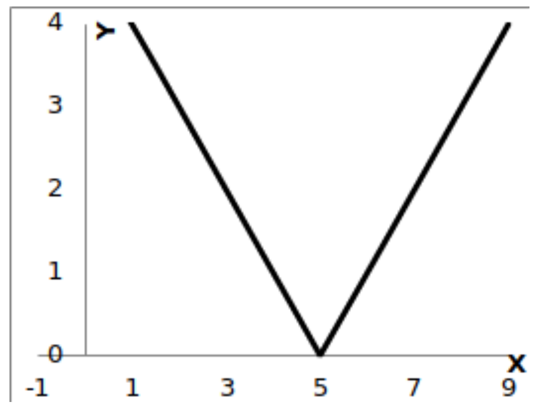
b) $D = \{x \in R\}$ **;** $Im = \{y \in R/y \geq 0\}$



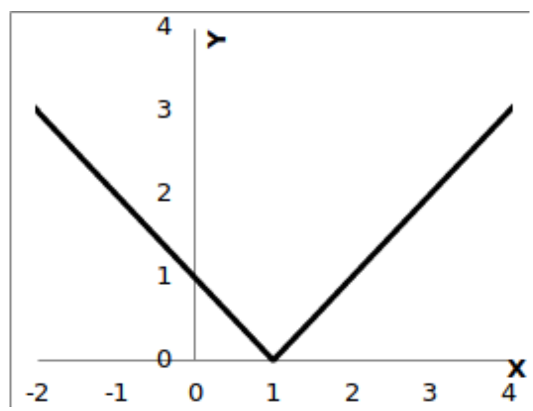
c) $D = \{x \in R\}$ **;** $Im = \{y \in R/y \geq 0\}$



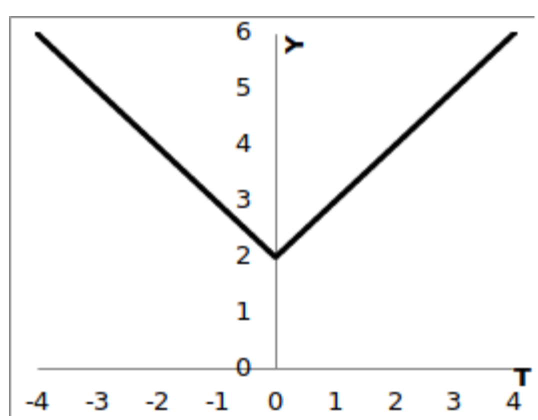
d) $D = \{x \in R\}$ **;** $Im = \{y \in R/y \geq 0\}$



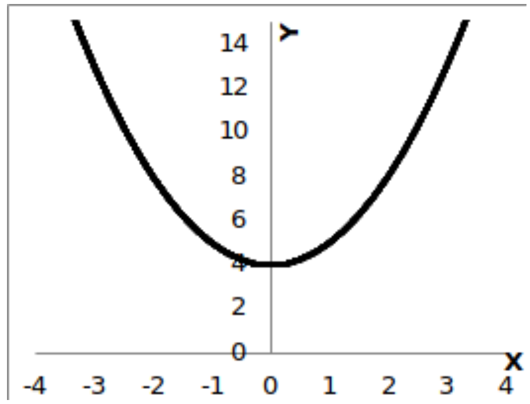
e) $D=\{x \in R\}$; $Im=\{y \in R/y \geq 0\}$



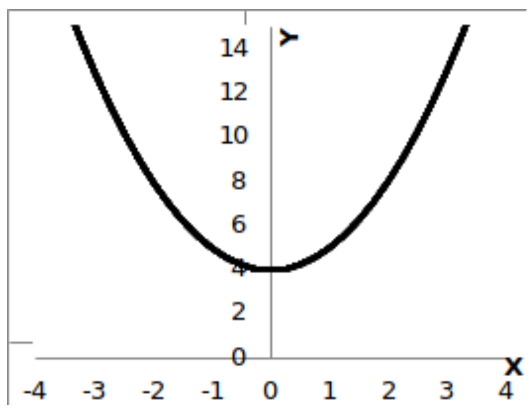
f) $D=\{x \in R\}$; $Im=\{y \in R/y \geq 2\}$



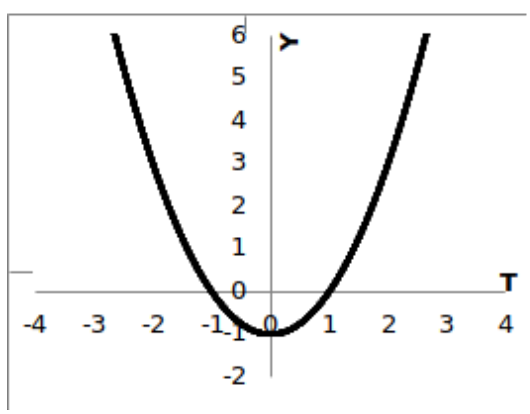
g) $D=\{x \in R\}$; $Im=\{y \in R/y \geq 4\}$



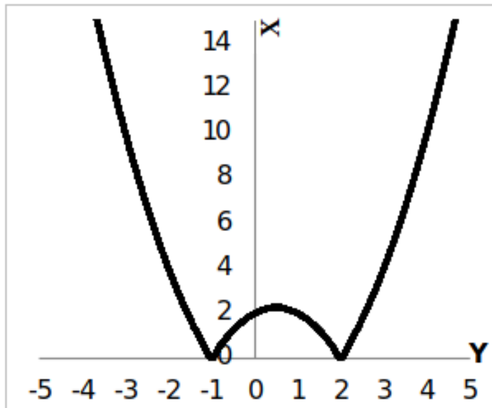
h) $D = \{x \in R\}$ **;** $Im = \{y \in R / y \geq 4\}$



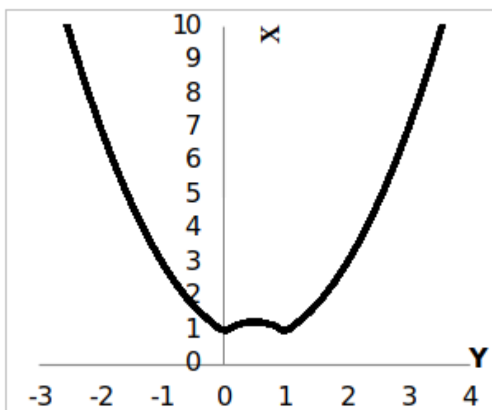
i) $D = \{x \in R\}$ **;** $Im = \{y \in R / y \geq -1\}$



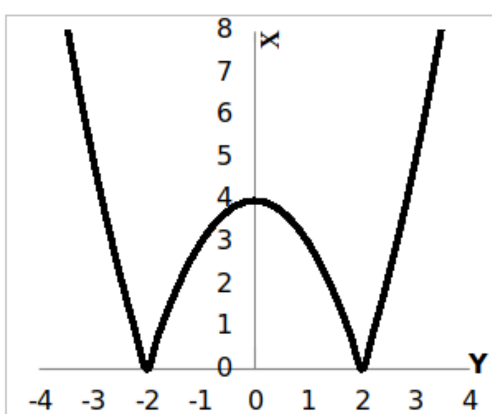
11.7.5 a)


X
14
12
10
8
6
4
2
0
Y
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

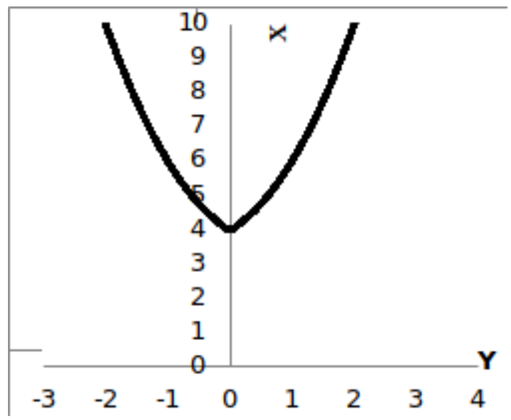
b)


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
X
Y
-3 -2 -1 0 1 2 3 4

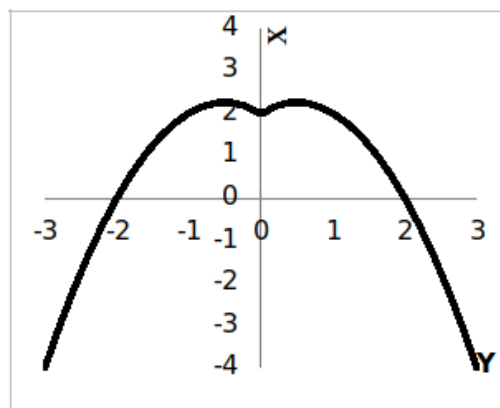
c)


8
7
6
5
4
3
2
1
0
X
Y
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

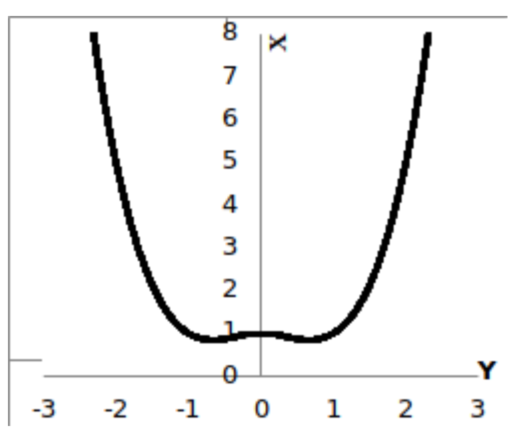
d)


X
Y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-3 -2 -1 0 1 2 3 4

e)


X
Y
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-3 -2 -1 0 1 2 3

f)


X
Y
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-3 -2 -1 0 1 2 3