FUNÇÕES DO 1º GRAU

Professores:

Pedro Augusto Pereira Borges

Colaborador:

Fernando Augusto Brancher

FEVEREIRO/2015

1. Introdução

A ideia de descrever o comportamento de uma grandeza relacionada com outra não é muito antiga. Os povos antigos, Árabes e Gregos não chegaram a investigar a velocidade. Foi com Galileo (1564-1642) ao estudar o movimento que o conceito de função começou a se configurar. Porém, não sem dificuldades. A geometria de Descartes (1637) já usava a representação gráfica de uma expressão algébrica, mas essa ideia só foi aceita na comunidade de matemáticos com os trabalhos de Euler (1707-1783) e da família dos Bernoillis, ao desenvolver o cálculo aplicado a problemas físicos. A definição atribuída a Euler diz que função *é uma expressão analítica que representa a relação entre duas variáveis.*

Um conceito de função, muito semelhante ao usado atualmente, foi introduzido por Dirichlet (1805-1859), motivado pela necessidade de uma definição mais restritiva que a de Euler, ao estudar o problema de convergência de séries, na época, aplicado à investigação de problemas de condução do calor, propostos por Fourier. A definição de Dirichlet é a seguinte: *y é uma função de x, se para qualquer valor de x, existe uma regra que o associa a um único valor de y.* Em 1939, Bourbaki definiu função como *regra de correspondência entre dois conjuntos e que isto era um subconjunto do produto cartesiano entre aqueles conjuntos.*

A definição de Euler é muito usada até hoje nas ciências, devido a sua simplicidade e eficiência para descrever a relação entre duas variáveis. De fato, muitas aplicações de funções na Física, Química e Economia requerem apenas uma expressão algébrica e uma representação gráfica.

Na base do desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral está o conceito de função e daí sua importância, já que praticamente toda a ciência e a tecnologia moderna utilizam o Cálculo. Mas porque as funções são tão importantes para as ciências? Porque elas descrevem qualitativamente o comportamento de partes da realidade com precisão suficiente para que decisões possam ser tomadas. Saber o tempo de resfriamento de uma peça fundida é importante para decidir quando manuseá-la; saber o tempo em que a receita e a despesa de um empreendimento serão iguais, significa saber quando o lucro se inicia; o planejamento econômico de um reflorestamento depende da função de como as árvores crescem; a variação da concentração de um medicamento no organismo humano é fundamental para determinar a dose e o intervalo de ingestão; a deformação em vigas depende das cargas aplicadas e do material;... Todos esses e tantos outros fenômenos são expressos na forma de funções, cujo conhecimento básico vamos desenvolver neste capítulo.

2. Definição de funções

Analisemos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.1 – O preço de *1 kg* de carne é *R$ 15,00.* Determine uma fórmula para calcular qualquer o custo de quantidade de carne.

Solução: Vamos usar a ideia de variável. Seja x a quantidade, em kg e y o custo da carne. Então

$$y = 15 \cdot x \tag{2.1}$$

é a expressão que dá o custo de carne para qualquer valor de x.

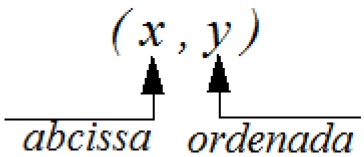
Se as massas são $x = \{\ 0,\ 0.5,\ 1,\ 2,\ 3\}$, usando a Eq. (2.1) calculamos os correspondentes valores dos custos $y = \{\ 0,\ 7.5,\ 15,\ 30,\ 45\}$. Evidentemente, podemos calcular y para qualquer x real maior ou igual a zero.

Exemplo 2.2 – Se x é o lado de um quadrado, encontre uma expressão para a área.

Solução: Sabe-se que a área do quadrado é $A = x^2$. Para quadrados de lado $x = \{\ 0,\ 1,\ 2,3,4\}$, usando a expressão da área temos os correspondentes valores de $A = \{\ 0,1,4,9,16\}$. Evidentemente, podemos calcular A para qualquer x real maior ou igual a zero.

Definição 2.1: Sejam dois conjuntos $X = \{\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots\ x_n\}$ e $Y = \{\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots,\ y_n\ \}$. Seja f uma regra matemática que associa os elementos de X e Y, formando um conjunto de pares ordenados $(x_i,\ y_i)$ com $i = 1,2,3,4,\ \ldots,n$. $Y = f(x_i)$ é uma função de X, se para qualquer x_i , f associa um, e somente um valor de y_i.

Nos pares ordenados (x,y), os elementos do conjunto X são chamados de *abcissas* e os do conjunto Y de *ordenadas.*

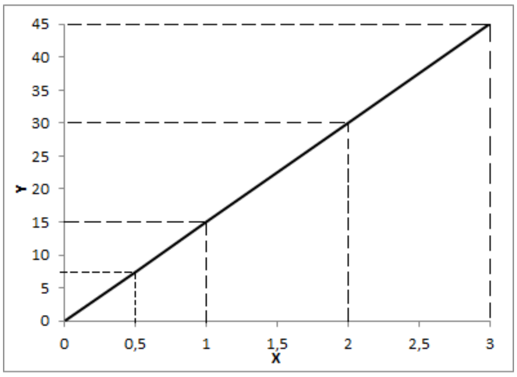


As expressões dos Exemplos 2.1 e 2.2 são funções de acordo com a Def. 2.1, pois para cada valor de x, existe um e somente um y.

Exemplo 2.3 – Represente a função do Exemplo 2.1 em um gráfico cartesiano.

Solução: Dispondo alguns valores de x e y em uma tabela, temos:

X	Y
0	0
0,5	7,5
1	15
2	30
3	45



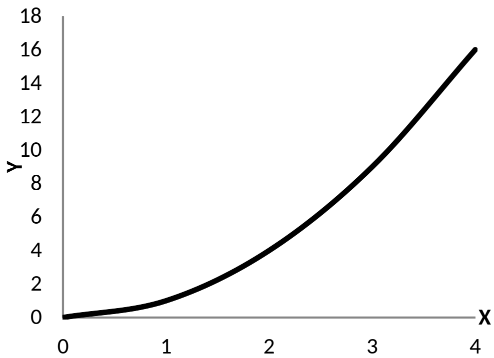
Os valores de x e y formam pares ordenados (x,y) que localizados no Plano Cartesiano, neste caso, formam uma **reta**. Como podemos usar qualquer $x \in R$, $x \geq 0$, a reta será contínua.

Nesse exemplo, na medida que a massa x cresce, o custo y também cresce, proporcionalmente. Ou seja, para cada incremento de *1 kg*, o custo cresce *15 reais*

Exemplo 2.4 – Represente a função do Exemplo 2.2 em um gráfico cartesiano.

Solução: Dispondo alguns valores de x e A em uma tabela, temos:

X	A
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16



Os valores de x e A formam pares ordenados (x,y) que localizados no Plano Cartesiano, neste caso, formam uma **curva**. Como podemos usar qualquer $x \in R$, $x \geq 0$, a curva será contínua.

Nesse exemplo, na medida que o lado x cresce, a área A também cresce, porém diferentemente do Exemplo 1, que tinha um crescimento constante. No primeiro incremento, a área cresceu $1\ cm^2$, no segundo $3\ cm^2$, no terceiro $5\ cm^2$

Exemplo 2.5 – Verifique se $-3x + y^2 = 1$ é uma função, de acordo com a Def. 2.1. Considere $x \in \boldsymbol{R}$.

Solução: A equação dada está na forma implícita (x e y estão no mesmo lado da igualdade). Para explicitar y, adicionamos $(+3x)$ em ambos os lados da equação, obtendo:

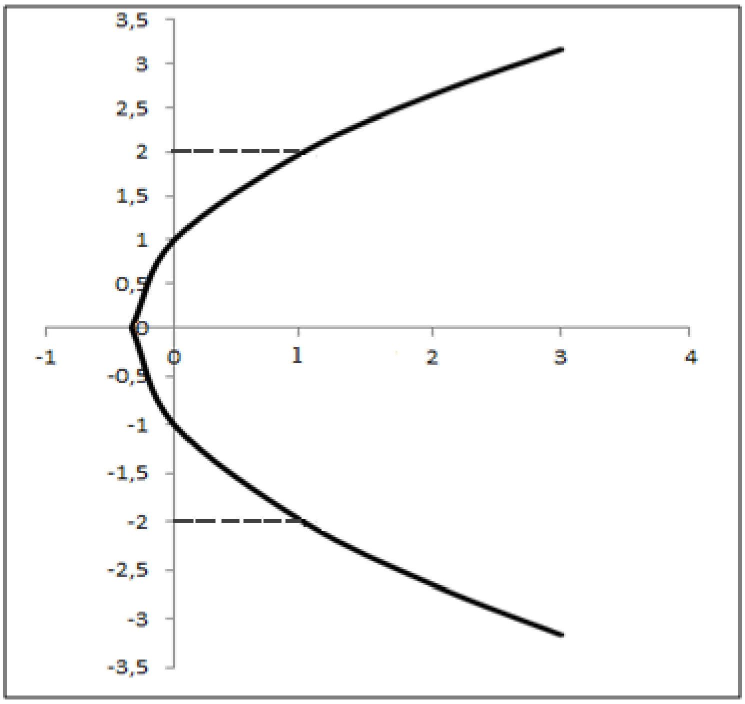
$$y^2 = 1 + 3x\ .$$

Aplicando raiz quadrada em ambos os lados da equação, temos:

$$y = \pm\sqrt{1+3x}\ .$$

Esta equação só terá valores reais para y, se o radicando for um número nulo ou positivo. Então,

$1 + 3x \geq 0$ ou $x \geq -1/3$.



Observemos que para qualquer valor de $x > -1/3$, teremos dois valores de y. Por exemplo:

Se $x = 1$, teremos $y = \pm\ 2$;

Se $x = 2$, teremos $y = \pm\sqrt{7}$;

Se $x = 5$, teremos $y = \pm\ 4$ e assim por diante.

Portanto, a equação dada não é uma função

Notação:

Usa-se a notação $y = f(x)$ para referir-se à função f de x, onde x é a variável independente e $y = f(x)$ é a variável dependente de x.

Por exemplo: $f(x) = x^2$ ou $f(x) = 3x - 2$.

Definição 2.2 – O *domínio* de uma função $y = f(x)$ é o conjunto dos valores de x nos quais a função é definida e denota-se : $D\ f(x)$.

Definição 2.3 – A *imagem* de uma função $y = f(x)$ é o conjunto dos valores de y para os quais existem valores de x correspondentes e denota-se : $I_m\ f(x)$.

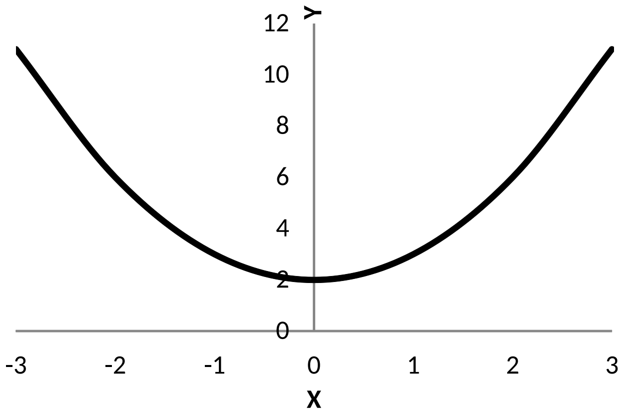
Exemplo 2.5 – Determine o domínio e a imagem da função $f(x) = x^2 + 2$.

Solução: Observemos que qualquer valor de $x \epsilon\ \boldsymbol{R}$ gera um valor de $f(x)$. Então,

$$Df(x)=\{\ x \epsilon\ \boldsymbol{R}\ \}\ .$$

Analisando a expressão da função, observamos que ela tem a soma de dois termos positivos (lembremos que para x^2, teremos sempre $x^2 > 0$). Portanto, o menor valor possível de $x^2 + 2$ será 2, quando $x = 0$. Então,

$$I_m\ f(x) = \{\ y \epsilon\ \boldsymbol{R},\ y \geq 2\}\ .$$



No gráfico de *f(x)*, traçando *retas verticais*, para qualquer x teremos sempre um y correspondente, o que indica que *f(x)* é uma função.

A imagem de *f(x)* pode ser obtida traçando retas horizontais. Os valores de y, pelos quais estas retas passarão, pertencem a imagem de *f(x)*. Assim, a imagem desta função será o conjunto de números reais y tal que $y \geq 2$

EXERCÍCIOS 2.1

a) Localize os pontos no plano cartesiano:

(i) $A = (2{,}3)$ c) $C = (-3{,}3)$ e) $E = (2{,}0)$
(ii) $B = (-2{,}-3)$ d) $D = (0{,}3)$ f) $F = (0{,}-3)$

b) Qual é o valor de x (abcissa) dos pontos sobre o eixo Y ?

c) Qual é o valor de y (ordenada) dos pontos sobre o eixo X ?

d) Dada a função $f(x) = 3x - 1$, calcule:

(i) $f(0)$ c) $f(c+1)$ e) $f(1/3)$
(ii) $f(-2)$ d) $f(1)$ f) $f(3-c)$

e) Dada a função $f(x) = -2x + 1/2$, calcule x sendo:

a) $f(x)=1/2$ c) $f(x)=-3/4$
(i) $f(x)=1$ d) $f(x)=4$

f) Faça o gráfico das funções com variáveis reais:

(i) $y = 3x$ c) $y = x^2$
e) $g\left(x\right) = \frac{1}{x}$

(ii) $f(x) = -3x + 1$ d)) $y = x^2 + 1$

f) $y = \frac{1}{x-1}$

g) Faça o gráfico dos dados das tabelas:

(i) b) c) d)

X	Y
-3	-6
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4
3	6

X	Y
-3	-5
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5
3	7

X	Y
-3	12
-2	9
-1	3
0	1
1	3
2	9
3	12

X	Y
-3	5
-2	2
-1	1
0	2
1	5
2	9
3	14

3. Todas as funções do Ex.6 são funções, de acordo com a Def. 2.1?

4. A expressão $y = \pm\sqrt{x}$ é uma função, de acordo com a Def. 2.1?

5. Faça o gráfico das funções usando uma tabela eletrônica ou um editor de gráficos computacional.

a) $y = -2x + 5$ c) $y = x^4 - x^2 + 4$ e) $y = \frac{x+1}{x-1}$

b) $y = x^2 - 2x + 1$ d) $y = x^3 + 1$ f) $y^2 + x^2 = 4$

6. Todas as expressões do Ex. 10 são funções, de acordo com a Def. 2.1?

7. Determine o domínio e a imagem das funções:

a) $y = x$ d) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ e) $g(x) = -\sqrt{x}$

c) $y = 4 - x^2$ f) $q(x) = \sqrt{x-4}$

8. Faça os gráficos das funções do Ex. 12 usando uma ferramenta computacional.

9. Função do 1º grau

Os exercícios da Seção 2 mostram que existem funções cujo gráfico é uma reta e outras apresentam curvas de diferentes formatos. Nessa seção, serão estudadas as funções cujos gráficos são retas.

Uma das características das retas é a *taxa de variação (crescimento ou decrescimento) constante*. Isto significa que, para o mesmo incremento (Δx) em qualquer x, o incremento (Δy) em y, será o mesmo.

Exemplo 3.1 – Dada a reta $f(x) = x + 1$ use o incremento $\Delta x = 1$ em

(i) $x_0 = 0$; (ii) $x_1 = 2$; (iii) $x_2 = 5$ e calcule os respectivos incrementos em y.

Definição 3.1. Uma função polinomial do primeiro grau tem a forma

$$y = f(x) = ax + b \tag{3.1}$$

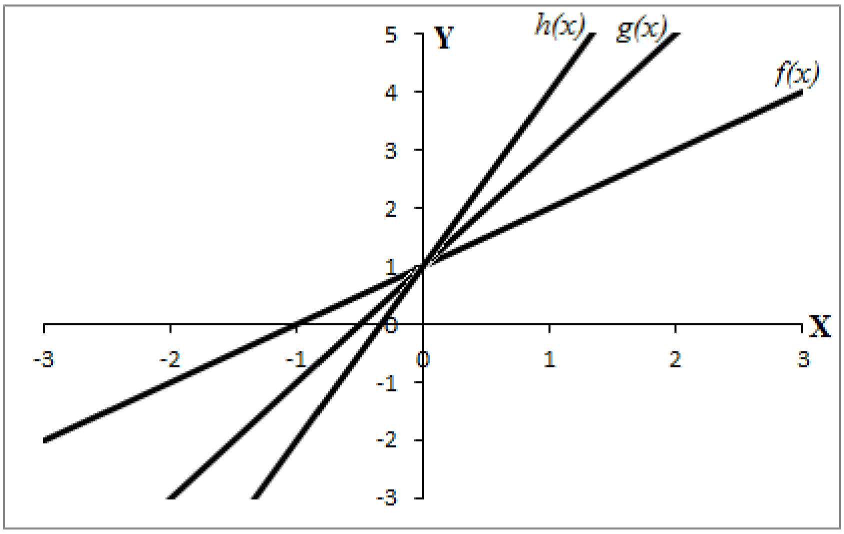
onde a e b são números reais, x e y são variáveis reais.

O coeficiente a é chamado **coeficiente angular (inclinação)**

e o b **coeficiente linear**.

Exemplo 3.2 – Faça os gráficos das funções: (i) $f(x) = x + 1$; (ii) $g(x) = 2x + 1$; (iii) $h(x) = 3x + 1$.

Solução: Elaborando tabelas para as três funções e localizando os pares ordenados no Plano Cartesiano, obtemos três retas.

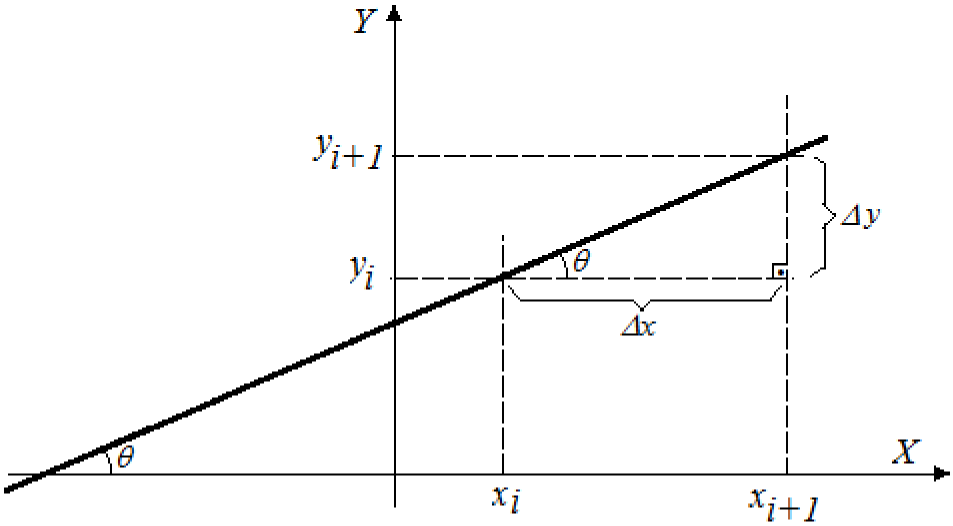


Observemos que as inclinações são diferentes, sendo que a diferença entre as três funções é o *coeficiente angular*. Observemos que quanto maior o a mais inclinada está a reta

O coeficiente angular é a *inclinação (ou taxa de crescimento)* da reta, dado pela expressão:

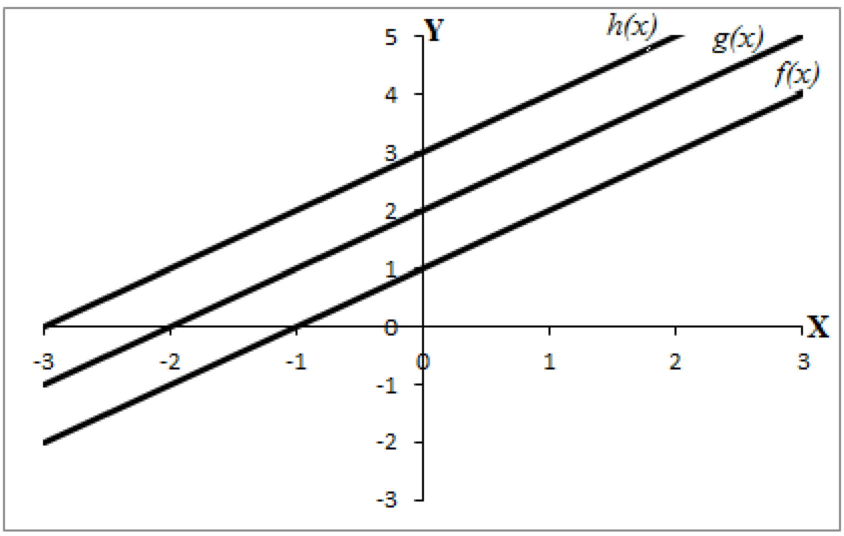
$$a = tg\,(\theta) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \qquad (3.2)$$

Onde $i = 0,1,2,3,...$ refere-se aos pontos de $f(x)$ e é o ângulo que a reta faz com o eixo X.



Exemplo 3.3 – Faça os gráficos das funções: (i) $f(x) = x + 1$; (ii) $g(x) = x + 2$; (iii) $h(x) = x + 3$.

Solução: Elaborando tabelas para as três funções e localizando os pares ordenados no Plano Cartesiano, obtemos três retas.



Observemos que todas têm a mesma inclinação, pois os coeficientes angulares são iguais: $a = 1$.

Observemos também que quando calculamos as funções para $x = 0$ (pontos sobre o eixo Y) o valor obtido é o coeficiente linear: $f(0) = 1$; $g(0) = 2$ e $h(0) = 3$. Podemos concluir que o *coeficiente linear* é o valor do y, nos pontos onde a reta corta o eixo Y

O *coeficiente linear* é o valor do y (ordenada), no ponto $(0,b)$ onde a reta corta o eixo Y

Exemplo 3.4 –Uma reta passa pelos pontos: $P_1 = (1,2)$ e $P_2 = (3,5)$:

a) Calcule o coeficiente angular

b) Calcule o coeficiente linear.

Solução: (i) Usando a Eq. (3.2) temos:

$$a = \frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}$$

(ii) Substituindo o valor de a na Eq. (3.2), temos:

$y = \frac{3}{2}x + b$ (3.3)

Como a reta passa pelos pontos P_1 e P_2 , as coordenadas desses pontos devem satisfazer a Eq. (3.3). Usando as coordenadas de $P_1 = (1,2)$ na Eq. (3.3), temos:

$2 = \frac{3}{2} \cdot 1 + b$. Resolvendo para b, temos:

$b = \frac{1}{2}$

Observemos que se fosse utilizado o ponto $P_2 = (3,5)$, obteríamos o mesmo valor de b

10. Crescimento e decrescimento das funções do 1º grau

O quadro abaixo define o que são funções crescentes e decrescentes:

Seja $y = f(x)$ uma função definida no intervalo (x_0,x_n).

Se $f(x_{i+1}) > f(x_i)$ para qualquer $x_i \in (x_0,x_n)$ então
f é *crescente* em (x_0,x_n).

Se $f(x_{i+1}) < f(x_i)$ para qualquer $x_i \in (x_0,x_n)$ então
f é de*crescente* em (a,b).

O quadro abaixo apresenta a relação entre coeficiente angular e crescimento da função do 1º grau:

Se o *coeficiente angular* é *positivo* a reta é crescente.

Se o *coeficiente angular* é *negativo* a reta é decrescente.

Exemplo 3.5 – Verifique se as retas são crescentes ou decrescentes.

a) $f(x) = 3x - 5$

b) $f(x) = - x + 2$

c) $4 = 3x - 2y$

Solução: (i) O coeficiente angular da reta é $+3$. Portanto a reta é crescente para qualquer $x \in \boldsymbol{R}$.

(ii) O coeficiente angular da reta é *-1*. Portanto a reta é decrescente para qualquer $x \epsilon$ $\boldsymbol{R}$.

(iii) A equação está na forma implícita. Adicionando (*+2y*) e (*-4*) em ambos os lados, obtemos:

2y = 3x – 4. Dividindo a equação por *2*, obtemos: $y = \frac{3}{2}x - 2$.

O coeficiente angular da reta é *+3/2*. Portanto a reta é crescente para qualquer $x \epsilon$ $\boldsymbol{R}$

11. Domínio e imagem da função de 1º grau

As funções de 1º grau têm a expressão de um polinômio, cujas operações são possíveis para qualquer x real. Assim, o domínio destas funções é:

Df(x)= { $x \epsilon$ $\boldsymbol{R}$} .

Como as funções de 1º grau são estritamente crescentes ou decrescentes e não tem descontinuidades, sua imagem é

Imf(x)= { $y \epsilon$ $\boldsymbol{R}$} .

12. Raiz da função de 1º grau

Definição 3.2 : a raiz de uma função é o valor do x, do ponto onde a função intercepta o eixo X.

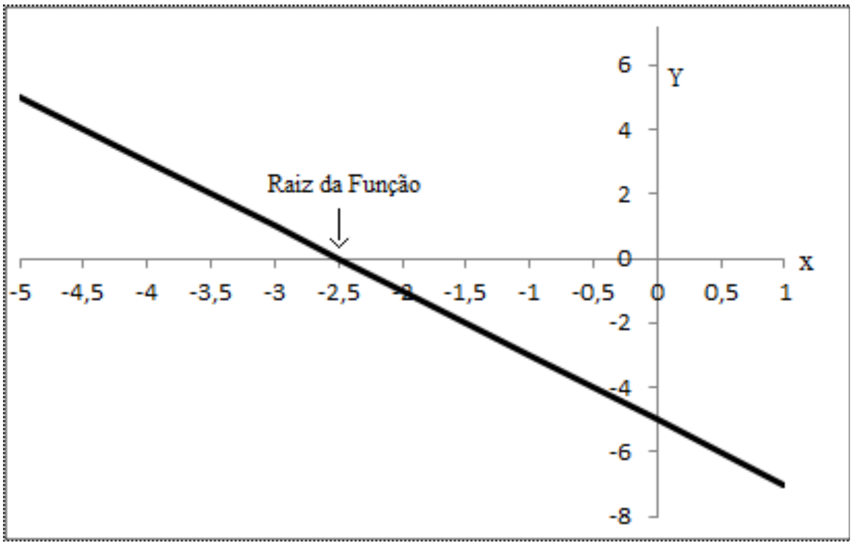
A raiz das funções de 1º grau é determinada fazendo *y=f(x)=0* na Eq. (3.1), de acordo com a Def. 3.2, pois os pontos sobre o eixo X, tem *y = 0*. Assim,

$x = -\frac{b}{a}$ (raiz da função de 1º grau)

Exemplo 3.6 – Determine a raiz da função *5 = -2x – y* e mostre-a no gráfico da função.

Solução: Mesmo com a equação na forma implícita, colocamos a exigência da Def. 3.1 *y = 0* na função dada e obtemos:

5 = -2x – 0 . Resolvendo para *x*, temos *x = -5/2*, que é a raiz da função.



A Fig. 3.5 mostra a raiz da função no ponto (*-5/2,0*) de interceptação do eixo *X*

13. Sinal da função de 1º grau

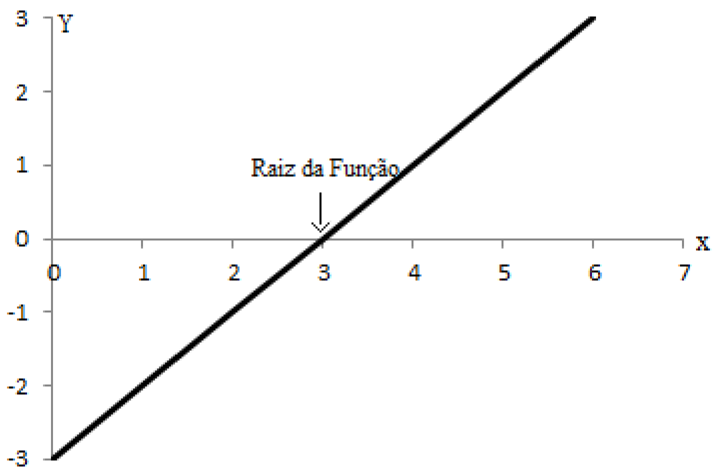
Lembremos que os valores de *y* são os valores da função. Portanto, o sinal da função em algum ponto é o sinal das ordenadas, nos pontos da função.

Exemplo 3.7 – Dada a função *y = f(x) = x – 3*, determine o sinal da função para os seguintes valores de *x: -1, 0, 1,2,3,4,5.*

Solução: Substituindo os valores de *x* dados em *f(x)*, obtemos os respectivos valores de *y*, apresentados na tabela.

X	-1	0	1	2	3	4	5
Y	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2
Sinal de Y	−	−	−	−	Sem sinal	+	+

Observemos que o sinal dos valores da função (y) são negativos para $x < 3$ e positivos para $x > 3$. A mudança do sinal ocorreu em $x = 3$, que é a raiz da função.



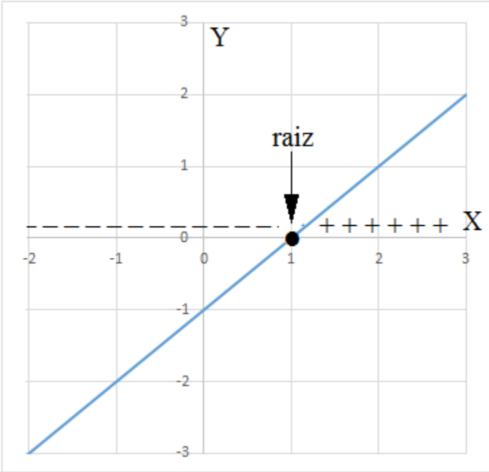
A visualização do sinal é evidente no gráfico, assim como a mudança do sinal a partir da raiz da função

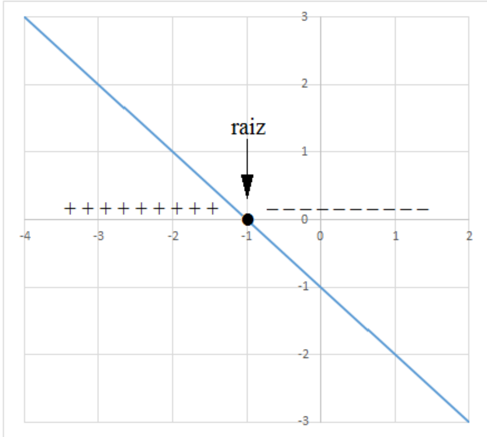
Exemplo 3.8 – Determine o sinal das funções: (i) $f(x) = x - 1$ e (ii) $g(x) = -x - 1$.

Solução: No Exemplo 3.7 observamos que o sinal da função muda quando a função intercepta o eixo X (raiz da função). Então, vamos calcular as raízes das funções e ver a inclinação das mesmas.

a) Raiz de $f(x)$: $x = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{1} = 1$.

Como $f(x)$ é inclinada para a direita (crescente, pois $a = 1 > 0$) , $f(x)$ é negativa se $x < 1$ e positiva se $x > 1$.





(i) (ii)

b) Raiz de $g(x)$: $x = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{-1} = -1$.

Como $f(x)$ é inclinada para a esquerda (decrescente, pois $a = -1 < 0$) , $f(x)$ é positiva se $x < -1$ e negativa se $x > -1$

SINAL DA FUNÇÃO DO 1º GRAU

Seja $y = f(x) = ax + b$, cuja raiz é $x_r = -\frac{b}{a}$.

Se $a > 0$ então: $f(x)$ é **negativa** para $x < x_r$ e $f(x)$ é **positiva** para $x > x_r$.

Se $a < 0$ então: $f(x)$ é **positiva** para $x < x_r$ e $f(x)$ é **negativa** para $x > x_r$.

14. Tipos especiais de retas

a) **Função constante**: as *retas horizontais* são chamadas funções constantes, pois não crescem nem decrescem. Seu coeficiente angular, pela Eq. (3.2) será nulo, portanto sua equação será:

$$y = b \qquad , \textit{para } b \in \boldsymbol{R}. \tag{3.4}$$

Observemos que para $b = 0$, temos $y = 0$, que é o próprio eixo X.

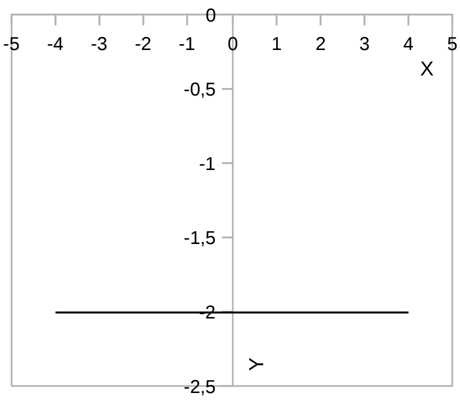
Se $f(x)=c$ o $Df(x)=\{\ x \in \boldsymbol{R}\ \}$ e a imagem é $I_m f(x) = \{\ y \in \boldsymbol{R}\ /\ y = b\ \}$.

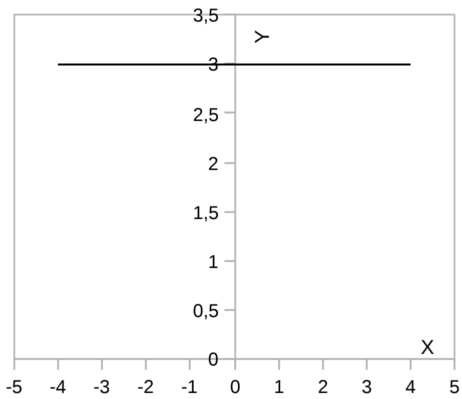
Exemplo 3.7– Faça o gráfico das funções:

a) $y = 3$ (ii) $y = -2$

Solução:

a) (ii)





Todas as funções dadas são funções constantes (retas paralelas a X, ou retas horizontais). Mesmo variando os valores de x, os valores de y permanecem constantes

ii) **Retas verticais**: estas retas, de acordo com a definição de função (Def. 2.1) NÃO SÃO FUNÇÕES, pois para o mesmo x, correspondem vários valores de y. Tão pouco, são funções do 1º grau. Observemos que, não existe coeficiente angular, porque a Eq. (3.2) teria denominador nulo. Assim, a expressão para as retas verticais não deriva da forma da Eq.(3.1).

A expressão para as retas verticais é construída com base no fato da abcissa ser constante para qualquer valor da ordenada, y. Então:

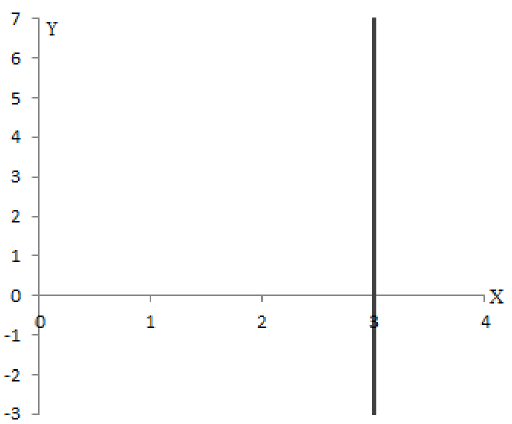
$$x = c, \quad \text{onde } c \text{ é uma constante.} \tag{3.5}$$

Exemplo 3.8– Faça o gráfico das retas:

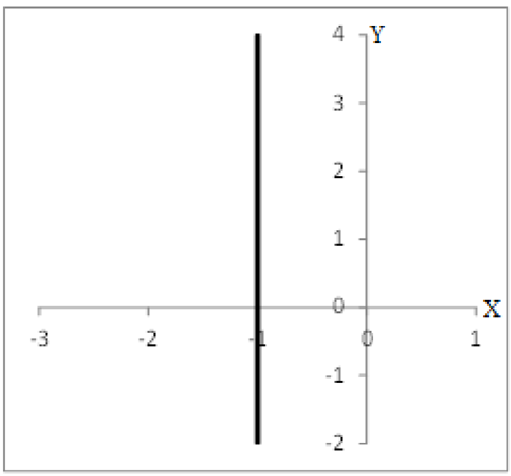
a) $x = 3$ (ii) $x = -1$

Solução:

(i)



(ii)

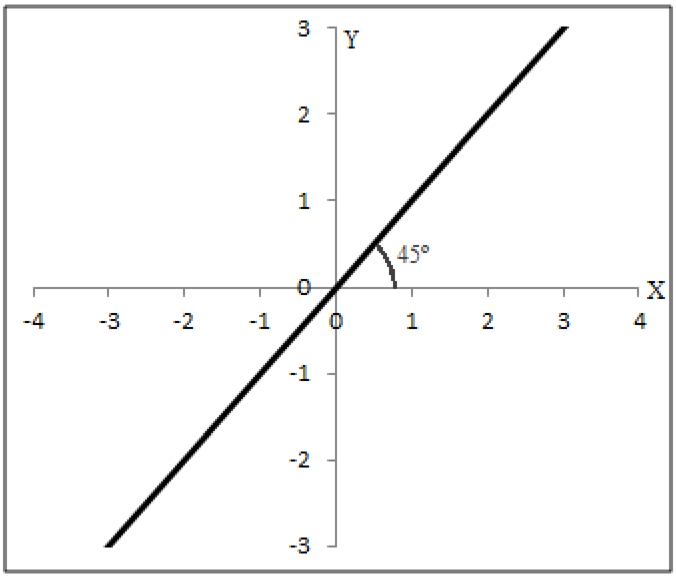


$$y = x.$$
(3.6)

Se *f(x)* $= x$ o domínio *Df(x)*=$\{ \ x \in \boldsymbol{R} \ \}$ e a imagem é $I_m f(x) = \{ \ y \in \boldsymbol{R} \ \}$

Exemplo 3.9– Faça o gráfico da função $y = x$.

Solução: A função identidade divide na metade o 1º e o 3º quadrantes do Plano Cartesiano. O ângulo que esta reta faz com o eixo X é *45º*



iv) **Função linear**: As funções do 1º grau, com $a \neq 0$ e $b = 0$ são chamadas funções lineares e têm a forma:

$$y = ax. \tag{3.7}$$

Se *f(x)* $= ax$ o *Df(x)*=$\{ \ x \in \boldsymbol{R} \ \}$ e a imagem é $I_m f(x) = \{ \ y \in \boldsymbol{R} \ \}$.

v) **Função afim**: As funções do 1º grau, com $a \neq 0$ são chamadas **função afim** e têm a forma:

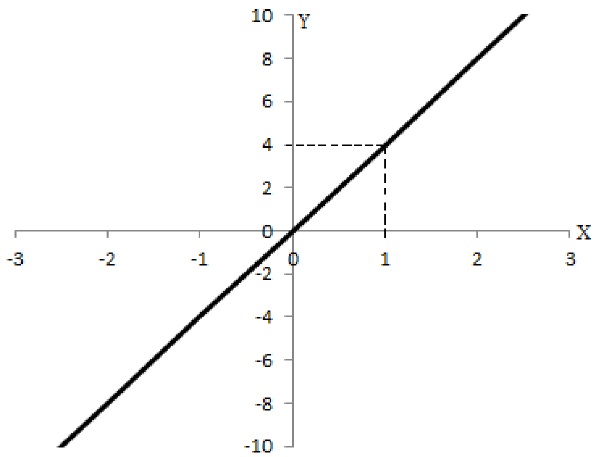
$$y = ax + b. \tag{3.8}$$

Se $f(x) = ax + b$ o $Df(x)=\{\ x \in \boldsymbol{R}\ \}$ e a imagem é $I_m f(x) = \{\ y \in \boldsymbol{R}\ \}$.

Observemos que as funções lineares são também funções afim.

Exemplo 3.10– Faça o gráfico da função $y = 4x$.

Solução: Como as funções lineares têm $b = 0$, então interceptam os eixos na origem $(0,0)$. O coeficiente angular igual a $+4$ indica que a função é crescente (inclinada para a direita), com inclinação $+4$, portanto passará pelo ponto $(1,4)$. Colocando estes dados no Plano Cartesiano, obtemos o gráfico indicado na Fig. 3.14.



3.6 – Retas paralelas e perpendiculares

Sejam as retas $(r) :\ y = mx + b$ e $(s) :\ y = px + c$.

Se r é **paralela** a s então $m = p$.

Se r é **perpendicular** a s então $p = -\frac{1}{m}$.

EXERCÍCIOS

a) Verifique se a dependência entre as grandezas mencionadas é de 1º grau:

(i) Considere que a distribuição de adubo em uma lavoura é homogênea. A quantidade de adubo distribuída é proporcional a área de lavoura?

(ii) A circunferência de um círculo é proporcional ao seu raio? E a área?

(iii) O lixo produzido por uma cidade é proporcional ao número de habitantes?

(iv) Uma caixa d'água é enchida por uma torneira, sempre com a mesma abertura. O volume de água da caixa é proporcional ao tempo?

(v) No planejamento de uma festa, a quantidade de comida é proporcional à quantidade de pessoas?

b) A tabela abaixo apresenta a deformação y (cm) de uma mola que está sendo distendida por massas m, (g) penduradas. Verifique se m é proporcional a y.

y, (cm)	0	3	6	9	12
m (g)	0	50	100	150	200

c) Considerando que o custo de uma corrida de taxi *(y)* depende de um valor fixo *(b)*, referente à hora do dia, do preço por quilômetro percorrido (p) e da quilometragem percorrida (x). Fazendo $b = 5{,}00$ reais e $p = 1{,}5$ reais, determine uma função para o custo *y(x)* de uma corrida.

d) Determine uma função que relacione o custo dos azulejos para revestir uma parede com x m^2, sendo que o preço de 1 m^2 de azulejo é p.

e) O custo (C) da carne usada para um churrasco depende do preço da carne (p), da quantidade de carne comprada (x) e da gasolina gasta para ir ao supermercado (b). Faça uma função *C(x)*.

f) O custo (C) para produzir uma certa mercadoria é a soma dos custos fixos (CF) e dos variáveis (a) , aqueles que dependem da quantidade produzida (x). Faça uma função *C(x)*.

g) Determine os coeficientes angular e linear das retas que passam pelos pontos dados e construa a função do 1º grau:

(i) $P_1 = (-1,0)$ e $P_2 = (3,2)$
(ii) $P_1 = (0,3)$ e $P_2 = (-3,0)$
c) $P_1 = (2,-2)$ e $P_2 = (-2,2)$
d) $P_1 = (3,3)$ e $P_2 = (5,3)$

h) Para produzir 5 peças de uma certa mercadoria foram gastos R$ 15,00. Para produzir 12 peças foram gastos R$ 35,00. Supondo que os custos são proporcionais ao número de peças:

a) Determine uma função de 1º grau que relacione custos e número de peças

b) Determine o custo para 30 peças.

i) Determine o coeficiente angular das funções e verifique se são crescentes ou decrescentes:

a) $3x + y = 3$
b) $\frac{1}{2}x + y = 4$
c) $\frac{3}{2}y + x = \frac{2}{3}$
d) $\frac{x-y}{2} = 3$

j) Dados os pontos da tabela, verifique se eles estão alinhados. Se estiverem, determine a equação da função linear e faça o gráfico.

X	0	1	3	6
Y	1	3/2	5/2	4

X	0	1	2	3
Y	1,5	2,5	3,5	4,6

(i) b)

(ii) Considere um quadrado cujos vértices estão nos pontos $V_1 = (0,0)$; $V_2 = (0,4)$; $V_3 = (4,4)$ e $V_4 = (4,0)$. Determine equações para as retas correspondentes a cada lado do quadrado.

(iii) Considere um triângulo cujos vértices estão nos pontos V_1=(1,1) ; V_2=(4,1) e V_3=(1,4). Determine equações para as retas correspondentes a cada lado do triângulo.

(iv) Dadas as equações de retas, faça o gráfico usando somente as informações fornecidas pelos coeficientes angular e linear (não use tabela):

(1) y = -x + 1 d) $y = 2x - 3$
(2) $y = 4x$ e) $y = 1$
(3) y = -x f) $x = 1$

(v) Construa a equação e faça um esboço do gráfico das retas $y = ax + b$, com as informações dadas:

(1) $a = 2$ e $b = 1$ d) é constante e passa em (2,3)
(2) a = -1 e passa em (1,0) e) $= 45^o$ e b = -1
(3) passa em (0,0) e tem inclinação -2 f) $= 120^o$ e passa em (0,3)

(vi) a) Um motoqueiro cobra R$ 3,00 por viagem, para entregar até cinco pizzas. Sabendo que o custo de uma pizza é R$ 40,00, faça uma função que dê o custo de 1 a 5 pizzas. Faça o gráfico da função.

(vii) Refaça a função para o custo de uma pizza é R$ 50,00. Faça o gráfico e compare com a reta da letra (a).

k) Analise os coeficientes angular e linear das retas. Determine se as retas crescem ou decrescem e o ponto de intersecção com o eixo Y. Faça um esboço do gráfico com base nessa análise.

a) $y = 3x + 5$
c) $y = 2x - 1{,}3$ e) y = -1,3x + 2

b) y = -2,3x - 1
d) y = -5,2x + 2,3 f) y = -4,1x − 5

l) Nas retas que passam pelos pontos P_1 e P_2 , determine se a reta cresce ou decresce e o ponto em que a reta intercepta o eixo Y:

a) P_1 =(1,1) e P_2 =(2,4)
c) P_1=(2,8) e P_2 =(7,1)

b) P_1=(1,6) e P_2 =(5,3)
d) P_1=(6,1) e P_2 =(1,3)

m) A fabricação de um produto implica em custos de materiais, energia, mão de obra, encargos sociais e impostos comerciais. Para uma determinada quantidade do produto, vamos considerar os custos de mão de obra como custo fixo, no valor de R$ 20,00. Considerando que os custos de materiais, energia e impostos são de R$ 150,00, para produzir uma unidade do produto:

a) Construa uma tabela relacionando o número de unidades do produto e o custo total.

b) Faça um gráfico com os dados da tabela.

c) Determine uma equação para relacionar o número de unidades do produto e o custo total.

d) Determine o coeficiente angular e o linear. Qual é o significado destes coeficientes no problema?

n) Uma agência de pesquisa estatística encontrou os percentuais de voto (V) mostrados na tabela abaixo para os candidatos A e B.

Data	Tempo (dias)	V (%)	
		Candidato (A)	Candidato (B)
01/07	1	35	30
01/08	32	37	32
01/09	63	46	40

a) Faça um gráfico do percentual de voto (V) pelo tempo (t) para os dois candidatos, considerando o período 1/07 a 1/09.

b) Considere o percentual de voto uma função linear em cada mês e determine a função da reta do mês de julho. Com esta função, calcule o percentual para o dia 20 de julho.

c) Se a variável V mantiver em setembro a mesma tendência de agosto, para os dois candidatos, quais serão os percentuais de voto no dia 16 de setembro?

4. Aplicações de funções do 1º grau

4.1 - Produção de bens: custo fixo + custo variável

A produção de bens, seja na indústria ou na agricultura, apresenta custos variáveis e fixos. Os primeiros dependem da quantidade de bens produzidos e os últimos não dependem. Por exemplo, na produção de vinho, o custo das garrafas, matéria prima (uva), impostos, energia, água e produtos de limpeza são **variáveis**, ou seja, dependem da quantidade produzida. Quanto mais litros de vinhos forem produzidos, estes custos aumentarão proporcionalmente. Enquanto que o custo do aluguel, mão-de-obra, o equipamento (pipas, bomba, baldes, máquina de colocar rolhas,...) são **constantes** até uma certa quantidade de litros produzidos.

Um modelo linear pode ser usado para modelar a produção de bens:

$$C(x) = p\ x + CF \tag{4.1}$$

Onde $C(x)$ é o custo total *(R\$)*, x é a quantidade produzida (*unidades*), p é o custo variável por unidade produzida *(R\$ /unidade)* e CF é o custo fixo *(R\$)*.

Observemos que a Eq. 4.1 é uma função afim, onde p e CF são os coeficientes angular e linear, respectivamente.

A Receita (ou ganhos com a venda do bem produzido) é proporcional à quantidade produzida e vendida. Assim, a função receita é uma função linear:

$$R(x) = PV\ x \tag{4.2}$$

Onde $R(x)$ é a receita (*R\$*) e PV é o preço de venda de cada bem (*R\$ /unidade*).

Para determinar o Lucro da atividade, fazemos a diferença entre a receita e o custo de produção.

$L(x) = R(x) - C(x) = PVx - (p\ x + CF)$ ou

$$L(x) = (PV - p)x - CF\ . \qquad (4.3)$$

Observemos que a Eq. 4.3 também é uma função afim.

Considere que para produzir um litro de vinho o custo variável por unidade é $p = R\$\ 4{,}50$, o custo fixo é $CF = R\$\ 2.000{,}00$ e o preço de venda é $PV = R\$\ 10{,}00$.

a) Substitua os valores de p, CF e PV nas Eqs. 4.1, 4.2 e 4.3 e faça os gráficos das funções C, R e L, no mesmo plano cartesiano.

b) Calcule quantos litros de vinho deverão ser produzidos para que a receita seja equivalente aos custos

4.2 – Produção de Lixo

A Tabela abaixo apresenta dados sobre a produção de lixo doméstico em Chapecó em 2004, 2007 e 2012.

Tempo, t (anos)	2004	2007	2012
População, h (habitantes)	165.220	168.113	180.000
Resíduos domésticos, R (kg/hab./dia)	0,405	0,630	0,855

Fonte: Abrelpe; MMA (Dados citados pelas alunas Ana C. Maccari e Cristiane L. da Silva no trabalho de Cálculo Numérico, Curso de Engenharia Ambiental, 2º/2014)

a) Verifique se a população cresce linearmente com o tempo.

b) Verifique se a produção de resíduos domésticos/habitante/dia cresce linearmente com o tempo.

c) Considerando que $R(h)$ é linear entre 2007 e 2016, faça a previsão da $R(2016)$

4.3 – Modelo Mola-massa

Um sistema mola-massa é ilustrado na figura abaixo uma mola é distendida por massas m, (g) que causam deformações y (cm). A posição $y_o = 0$ corresponde ao estado da mola sem massa. A cada massa m_i colocada corresponde uma posição y_i (deformação da mola), sendo $i = 0,1,2,3,..\ n$, o número de massas. Para o regime elástico (valores de m, para os quais a mola ainda volta na posição y_o) as posições y são proporcionais às massas m. Considerando o conceito de força peso, que é a força com que a terra atrai as massas, temos

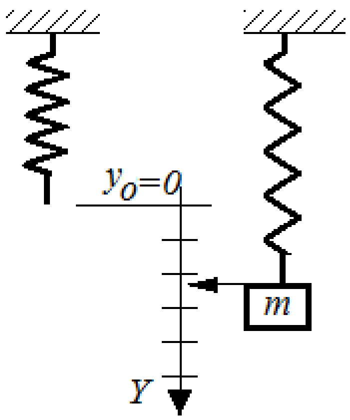
$$\mathbf{F} = m\cdot \mathbf{g}$$

Onde m é a massa (g) $\mathbf{g}$ a aceleração da gravidade (m/s^2).

A relação entre F e y é uma função de 1º grau, conhecida como Lei de Hooke

$$F(y) = k\ y\ ,$$

onde k é uma constante característica da mola. Observemos que k é o coeficiente angular da função e neste caso, tem um significado físico: a "dureza" da mola.



a) Considere molas com $k = 1{,}2$ e 3. Calcule as deformações y para as massas

$m = 0{,}50{,}100{,}150$ e $200\ g$. (considere $\mathbf{g} = 10\ m/s^2$)

b) Faça um gráfico e compare as retas.

c) Qual é a mola mais "dura"

4.4 – Locação de carros

A consulta a um site de locação de carros resultou nos dados da tabela abaixo.

Nº de diárias	Valor cobrado (R$)
1	83
2	166
3	249
4	332
5	415

a) Verifique se o valor cobrado (V) é proporcional ao número de diárias (d). Faça um modelo matemático que relacione V e d. Calcule V para um aluguel de sete dias.

b) Como ficaria este modelo se a locadora cobrasse uma taxa de lavagem de R$ 25,00.

c) Outro sistema de aluguel considera uma taxa fixa de R$ 40,00, mais R$ 1,30 por quilômetro rodado. Faça um modelo matemático para este sistema de locação.

d) Considerando a locação por quilômetro rodado (letra (d)), se um locador pretende ficar 3 dias com o carro, quanto quilômetros ele teria que rodar para que o custo seja equivalente ao do modelo da letra (c) ?

e) Verifique qual é o sistema de locação mais vantajoso para uma semana de locação, com 400 km rodados.

4.5 – Orçamento de Churrasco

Consideremos as seguintes hipóteses de consumo para um churrasco:

- 450 g de carne por pessoa,

- preço médio da carne: PM,

- custo da salada: 20% do custo da carne.

O custo médio de carne e salada por pessoa (p) pode ser calculado fazendo:

p = custo da carne + custo salada

$p = 0{,}450 \cdot PM + 0{,}450 \cdot PM \cdot 0{,}2 = 1{,}2 \cdot 0{,}450 \cdot PM$ ou

$p = 0{,}54\ PM$

O custo de um churrasco (C) para um grupo de pessoas depende do número de pessoas (x), do custo da carne e salada por pessoa (p) e da taxa de limpeza (b) do local do churrasco.

$$C(x) = p\ x + b. \tag{4.4}$$

a) Qual é o custo de um churrasco para *10* pessoas, considerando o preço médio da carne PM = *R$ 18,00*.

b) Que modificação na Eq. 4.4 deve ser implementada para incluir o custo da gasolina (g) usada para buscar os mantimentos?

c) Que modificação na Eq. 4.4 deve ser implementada para incluir o custo da sobremesa (SM)?

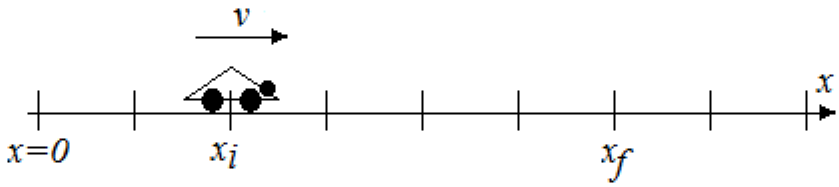
4.6 - Deslocamento com velocidade constante

As funções de 1º grau são úteis para modelar vários problemas de Física, como por exemplo o deslocamento de um carro em uma estrada retilínea, com velocidade constante. A velocidade (v) é definida como a razão entre a variação da distância percorrida (x) pela variação de tempo (t):

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{4.5}$$

Se x_f e x_i são as posições final e inicial do carro (ver Fig. 4.6.1), substituindo $\Delta\ x = x_f - x_i$, na Eq. (4.5), temos

$$x_f = v \cdot \Delta\ x + x_i \tag{4.6}$$



Se o tempo inicial for zero $\Delta\ x = t$, onde t é o tempo de deslocamento e x_f é a posição final, ou seja, uma função de *x(t)*. Então,

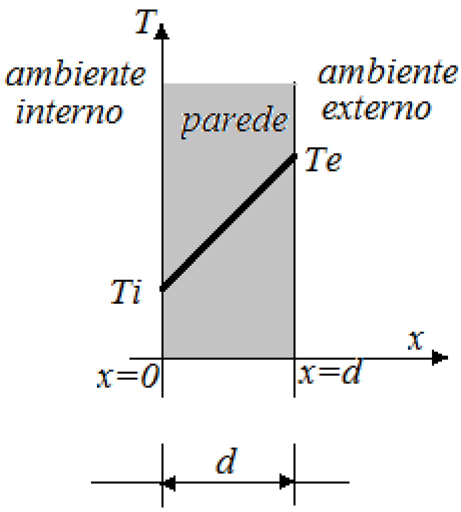
$$X(t) = v \cdot\ t + x_i \tag{4.7}$$

a) Determine a posição de um carro que partiu do quilômetro *10* com velocidade constante *80 km/h* e andou durante *3 h*.

b) Quanto tempo esse carro precisará rodar nessa velocidade para chegar no quilômetro 270 ?

4.7 Temperatura no interior de uma parede

Consideremos que a parede de uma casa está sujeita a temperaturas diferentes e constantes, na superfície interna e externa da casa, durante um período de tempo. Se as temperaturas forem mantidas, a distribuição de temperatura no interior da parede será linear.



Seja d a espessura da parede. Com base no sistema de coordenadas mostrado na figura acima, dois pontos da reta *T(x)* são conhecidos. Então, podemos calcular o coeficiente angular:

$$a = \frac{T_e - T_i}{\Delta x} = \frac{\Delta T}{d} \tag{4.8}$$

Como a reta intercepta o eixo das ordenadas em $T = T_i$ temos:

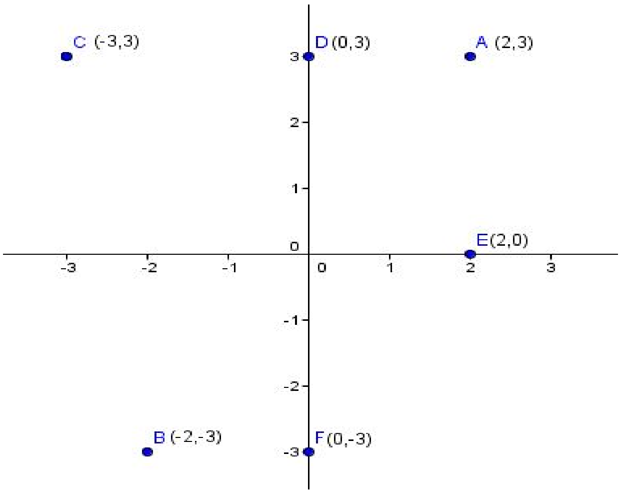
$$T\left(x\right) = \frac{\Delta T}{d}x + T_i \tag{4.9}$$

a) Determine uma função *T(x)* em uma parede, sabendo que $45^o C$ e $25^o C$ são as temperaturas externa interna da casa, respectivamente e a espessura da parede é de *15 cm*.

b) Usando a função do item (a), calcule a temperatura em *5 cm*, *7,5 cm* e *10 cm*.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

EXERCÍCIOS 2



2.1.

(i) $x = 0$

(ii) $y = 0$

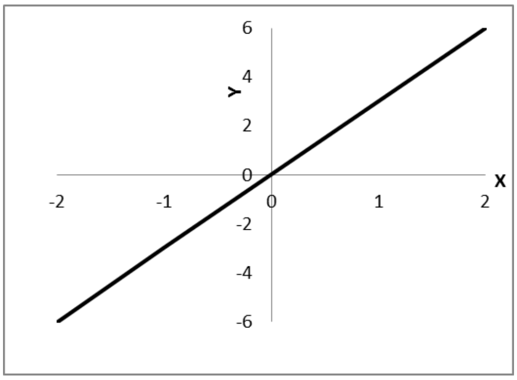
(iii) a) $f(0) = -1$ c) $f(c+1) = 3c+2$ e) $f(1/3) = 0$

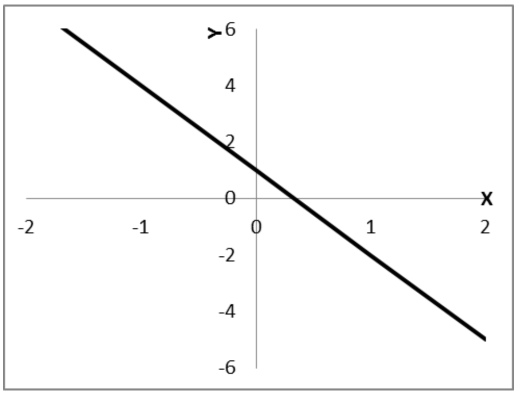
b) $f(-2) = -7$ d) $f(1) = 2$ f) $f(3-c) = -3c+8$

(iv) a) $x = 0$ c) $x = 5/8$

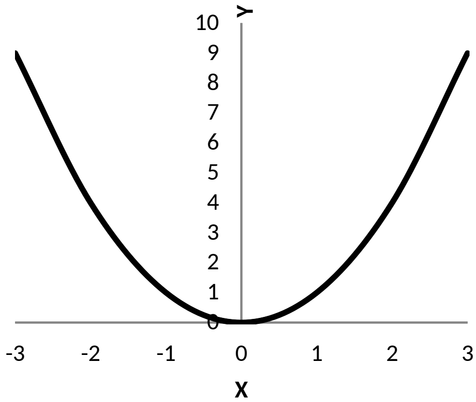
b) $x = -\frac{1}{4}$ d) $x = -\frac{7}{4}$

(v) a) b)

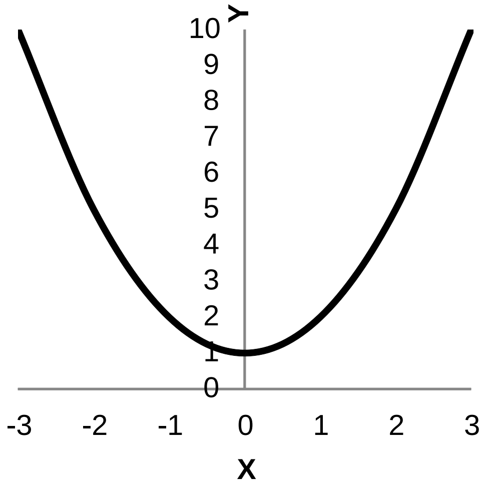




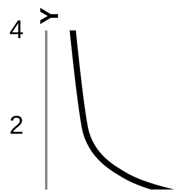
c) d)


Y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-3 -2 -1 0 1 2 3
X

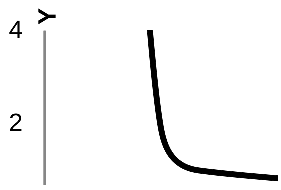
e)


Y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-3 -2 -1 0 1 2 3
X

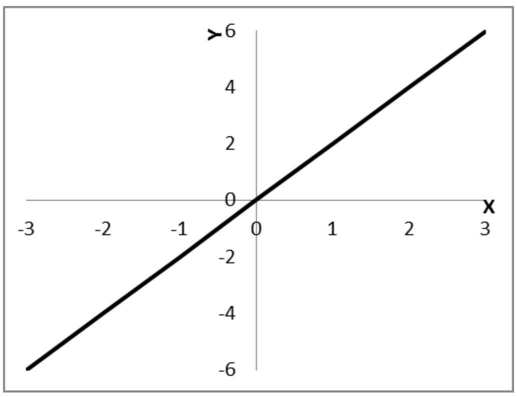
f)


Y
4
2

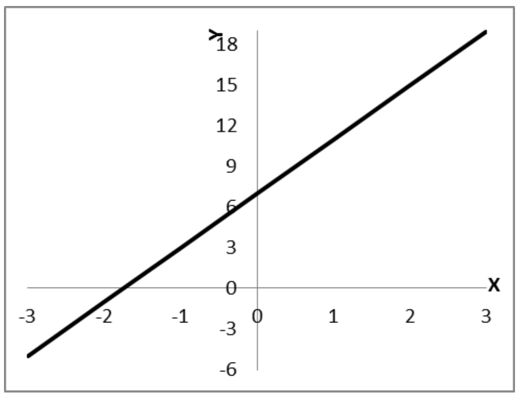
(vi) a)


Y
4
2

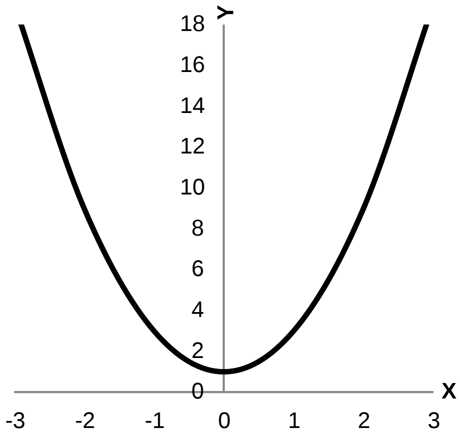
b)

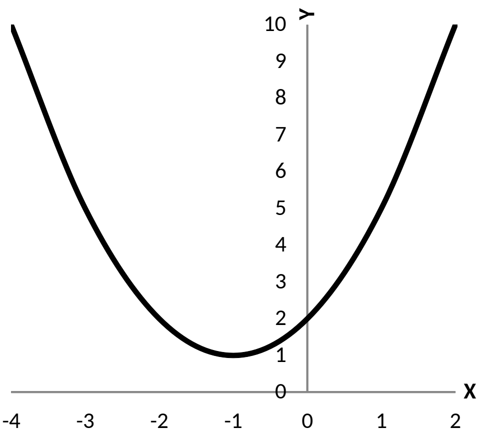

Y
6
4
2
0
-2
-4
-6
-3 -2 -1 0 1 2 3
X

c)


Y
18
15
12
9
6
3
0
-3
-6
-3 -2 -1 0 1 2 3
X

d)

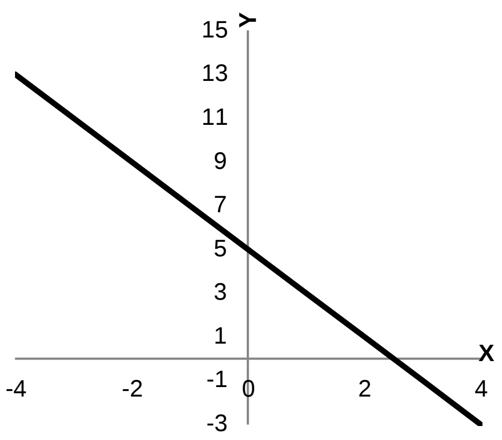


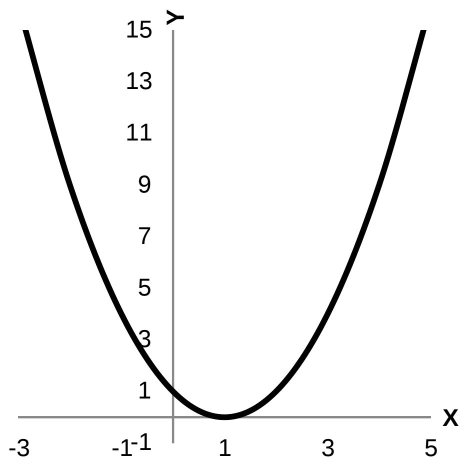


(vii) Sim.

(viii) Não, pois para um mesmo valor de x há dois valores de y correspondentes.

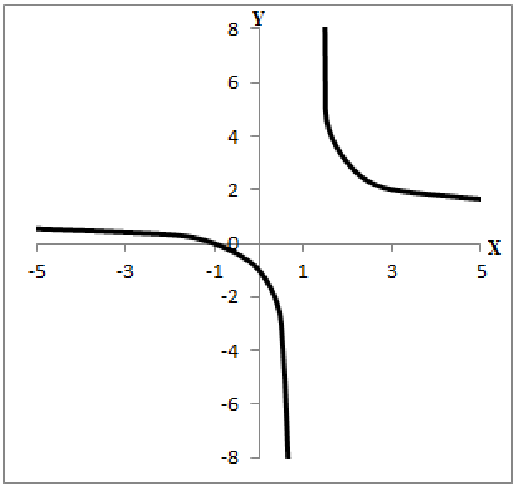
(ix) a) b)

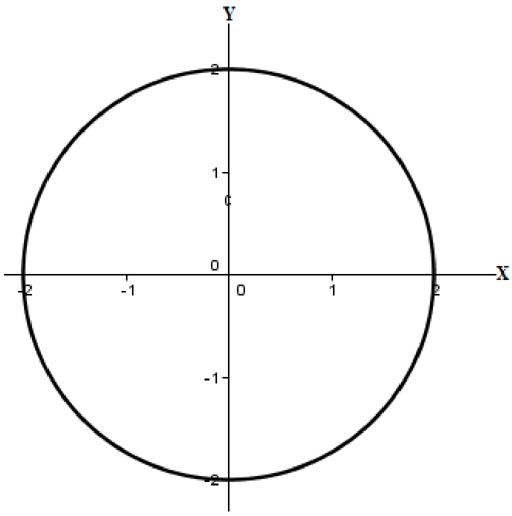




c) d)

e) f)





(x) Não, a alternativa f) não está de acordo, pois há dois valores de y para mesmo x.

(xi) a) $D = \{x \in R\,;\quad Im = \{y \in R\}$

b) $D = \{x \in R \neq 0\,;\quad Im = \{y \in \mathrm{R}\ /y \neq 1\}$

c) $D = \{x \in R\,;\ Im = \{y \in \mathrm{R}\ /\ y \leq 4\}$

d) $D = \{x \in R/x \geq 0\,;\ Im = \{y \in R/y \geq 0\}$

e) $D = \{x \in R/x \geq 0\,; Im = \{y \in R/y \leq 0\}$

f) $D = \{x \in R/x \geq 4\,;\ Im = \{y \in R/y \geq 0\}$

EXERCÍCIOS 3

(i) a) Sim. A dependência é de 1º Grau.

b) A proporção da circunferência em relação ao raio é de 1º Grau. A da área é de 2º Grau.

c) Sim. A dependência é de 1º Grau.

d) Sim. A dependência é de 1º Grau.
e) Sim. A dependência é de 1º Grau.

(ii) m é proporcional a y. $\Delta y/\Delta x = 50/3$

(iii) $y\left(x\right) = 1,5x + 5$

(iv) $C\left(x\right) = p \cdot x$;

(v) $C\left(x\right) = px + b$

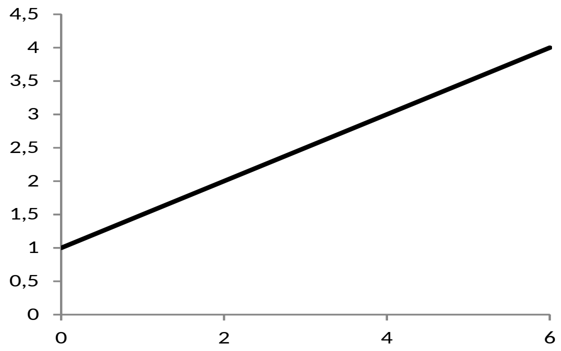
(vi) $C\left(x\right) = ax + CF$

(vii) a) $a = 1/2; b = 1/2$; $f\left(x\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
b) $a = 1; b = 3$; $f\left(x\right) = x + 3$
c) $a = -1; b = 0$; $f\left(x\right) = -x$
d) $a = 0; b = 3; f\left(x\right) = 3$

(viii) a) C=20/7x +5/7 b) C(30)=605/7= 86,43

(ix) a) $a = -3; Decrescente$ b) $a = -1/2; Decrescente$
c) $a = -2/3; Decrescente$ d) $a = 1; Crescente$

(x) a) $f\left(x\right) = \frac{1}{2}x + 1$

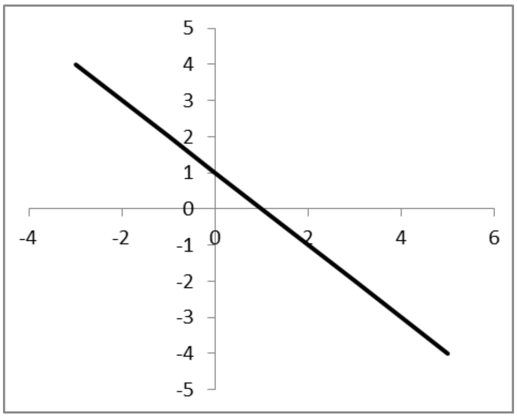


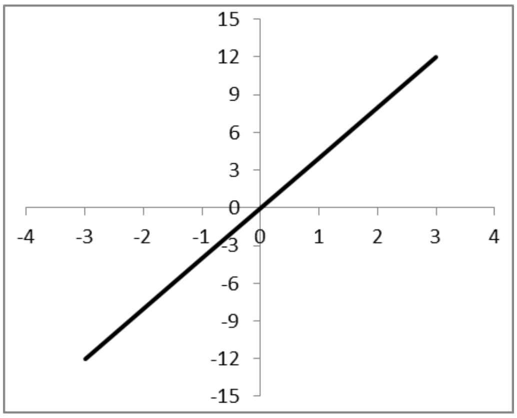
b) Os pontos não estão alinhados

(xi) V_1V_2:x=0; V_1V_4:y=0; V_2V_3:y=4; V_3V_4:x=4

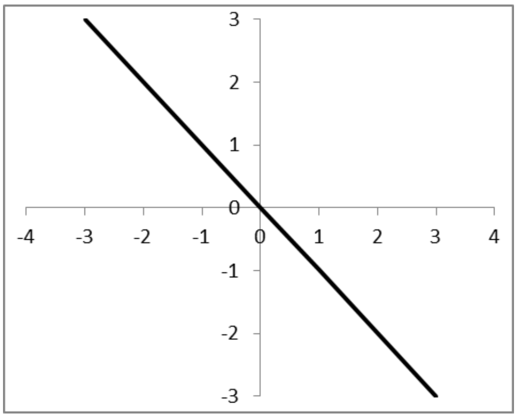
(xii) V_1V_2:y=1; V_1V_3:x=1; V_2V_3:y=-x+5

(xiii) a) b)

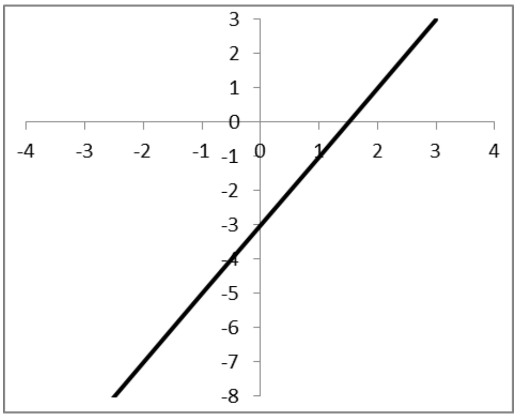




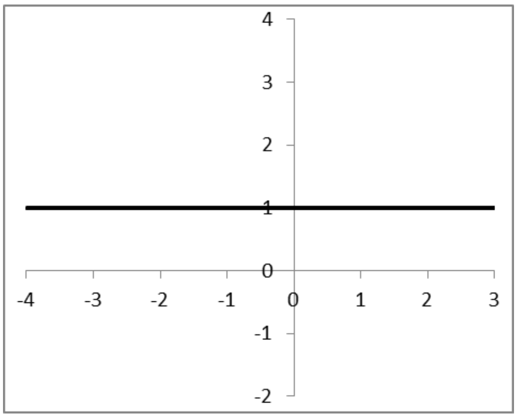
c)



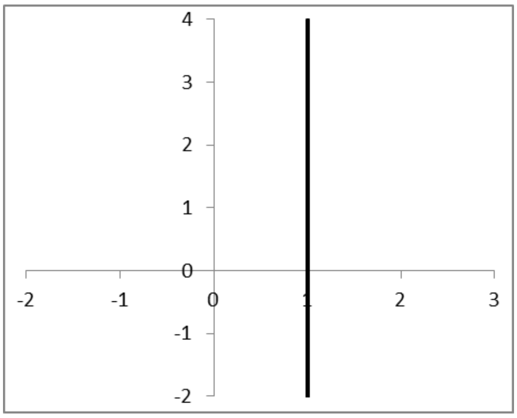
d)



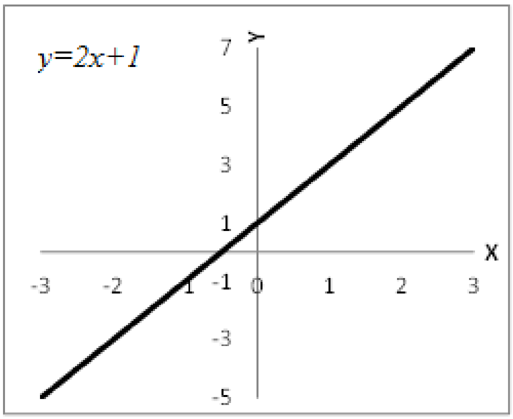
e)



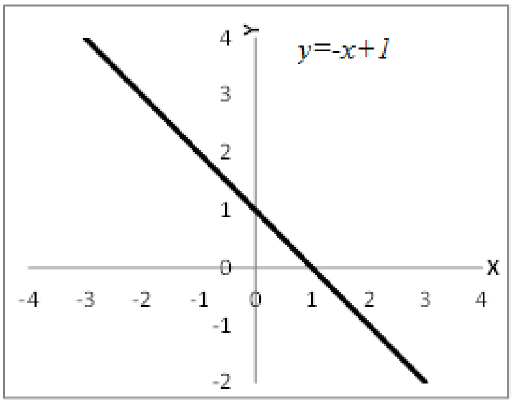
f)



(xiv) a)

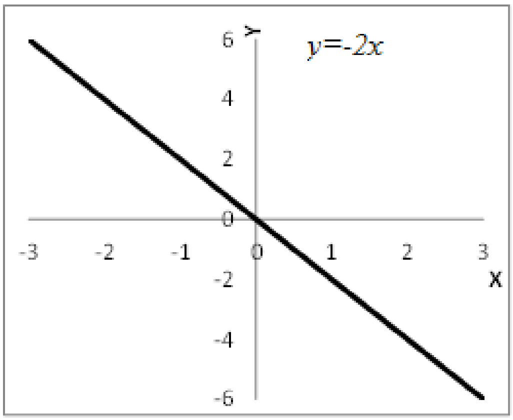


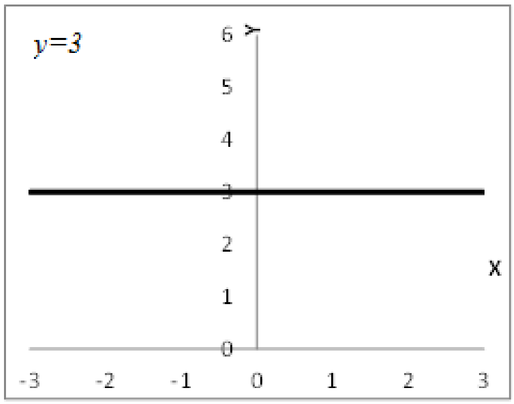
b)



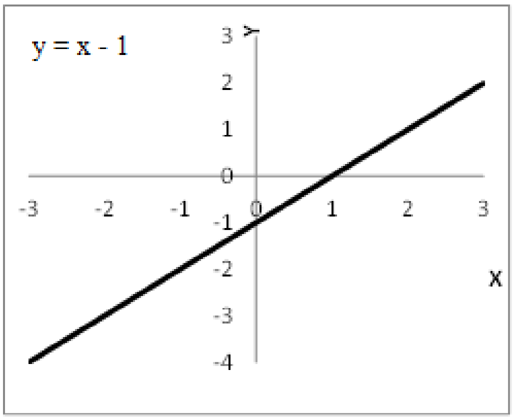
c)

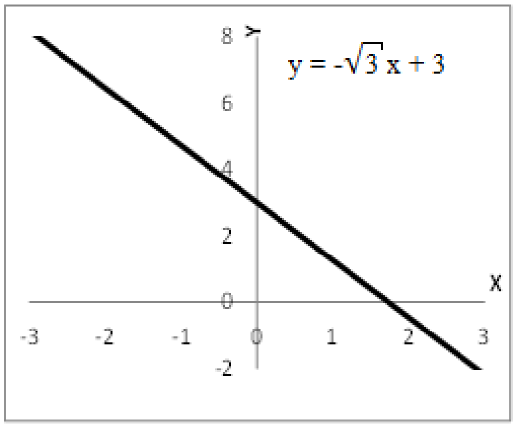
d)



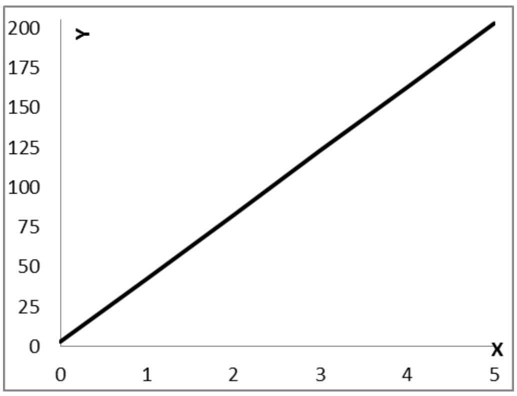


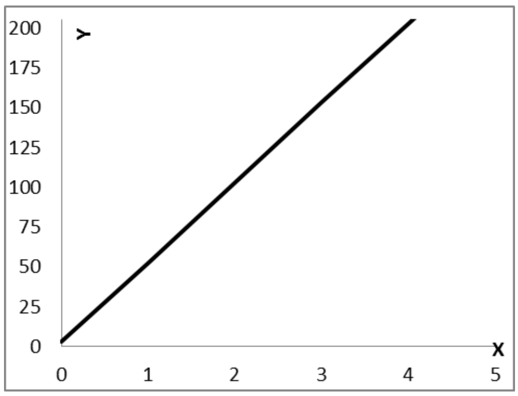
e) f)



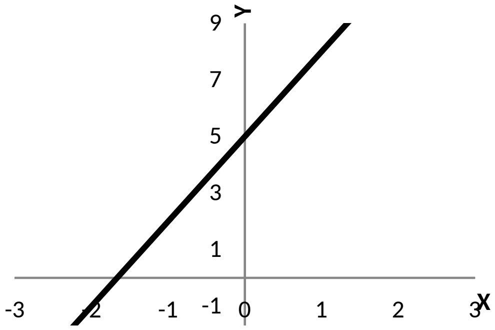


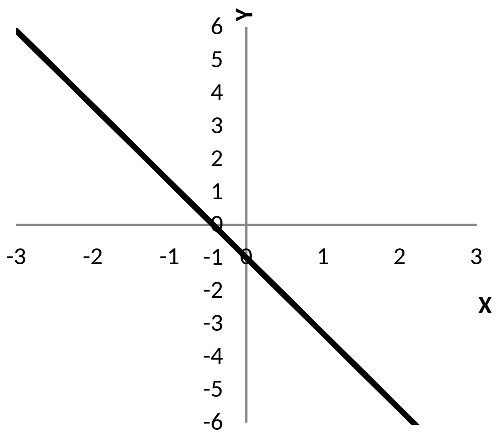
(xv) a) $f\left(x\right) = 40x + 3$ b) $g\left(x\right) = 50x + 3$



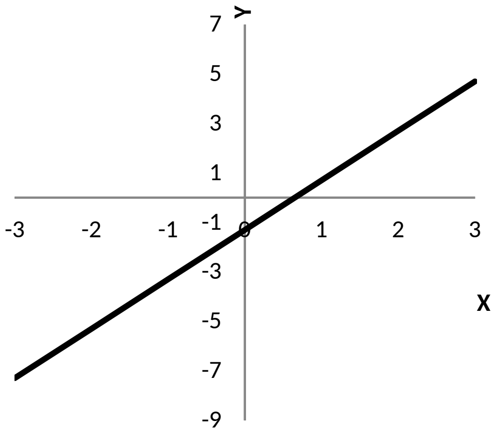


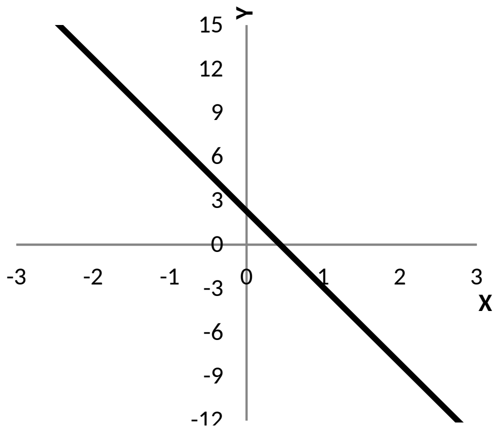
(xvi) a) Crescente; Intersecção em Y: (0,5) b) Decrescente; Intersecção em Y: (0,-1)





c) Crescente; Intersecção em Y: (0,-1.3) d) Decrescente; Intersecção em Y:(0,2.3)

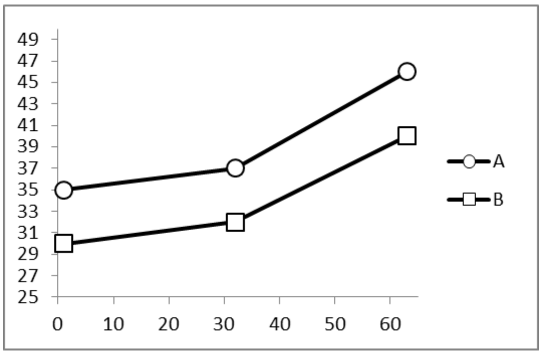




e) Decrescente; Intersecção em Y:(0,2) f) Decrescente; Intersecção em Y:(0,-5)

15. 150 é coeficiente angular; custo de produção de uma peça; 20 é o coeficiente linear; custo fixo.

c) $C = 150,00un + 20,00$



b) Candidato (A): $y = \frac{2}{31}x + \frac{1083}{31}$, Percentual para 20/07: 36,22%

Candidato (B): $y = \frac{2}{31}x + \frac{928}{31}$, Percentual para 20/07: 31,22%

c) Candidato (A): 51,8%

Candidato (B): 45,1%

ANEXO

Tangente de ângulos suplementares

Sejam o ângulo *0 < < 90º*. O suplementar de é (*180º* -). Pela definição de tangente, $tg\,(\theta) = \overline{MT}$ e $tg\,(180° - \theta) = \overline{MT'}$, como mostra a Fig. 1. Os ângulos dos triângulos OMT e OMT' são iguais e o segmento OM é comum aos triângulos (portanto são iguais) então os outros lados também serão. Portanto, os triângulos OMT e OMT' são idênticos e

$$tg\,(\theta) = -tg\,(180° - \theta)$$

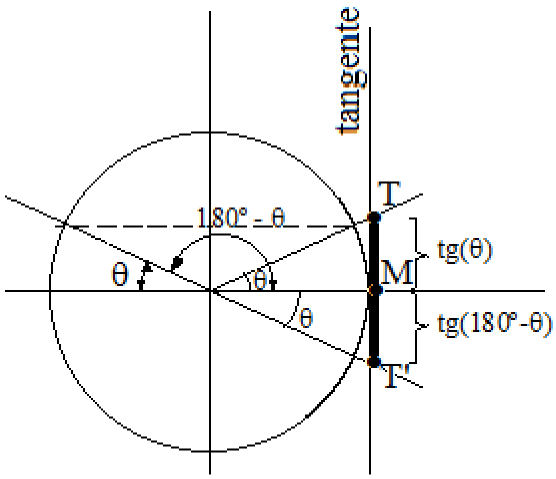


Figura 1 – Tangente de ângulos suplementares

Tangente de ângulos complementares

Pela definição de tangente, temos:

$tg\,(\theta) = \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}}$ e $tg\,(90^o - \theta) = \frac{\overline{PR}}{\overline{QR}}$. Comparando as expressões, temos:

$$tg\,(\theta) = \frac{1}{tg\,(90^o - \theta)}$$

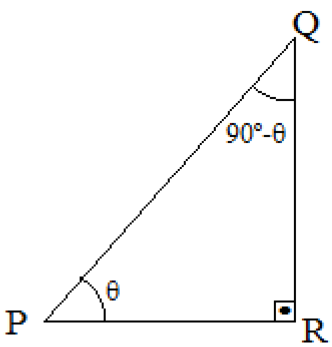


Figura 2 – Tangente de ângulos complementares

Retas paralelas

Teorema: Sejam as retas $(r):\ y = mx + b$ e $(s):\ y = px + c$. Se r é paralela a s então $m = p$.

Demonstração: Sejam e os ângulos que as retas r e s, fazem com o eixo X, respectivamente. Se r é paralela a s então $=$ e tg $= tg$. Como $m= tg$ e $p = tg$, tem-se $m = p$.

Retas perpendiculares

Teorema: Sejam as retas $(r):\ y = mx + b$ e $(s):\ y = px + c$. Se r é perpendicular a s então $p = -\frac{1}{m}$.

Demonstração: Sejam e os ângulos que as retas r e s, fazem com o eixo X, respectivamente. Da Fig. 3, temos:

$$p = tg\,(\alpha) = \frac{\overline{RP}}{\overline{PT}} \quad ; \quad tg\,(180^o - \theta) = \frac{\overline{PT}}{\overline{RP}} \qquad \text{e} \qquad m = tg\,(\theta) \tag{3.1}$$

Da trigonometria sabemos que as tangentes de ângulos suplementares são iguais em módulo e de sinais contrários:

$$tg\,(180^\circ - \theta) = -tg\,(\theta)\ . \tag{3.2}$$

Substituindo a Eq. (3.2) na Eq. (3.1), temos:

$$tg\,(\theta) = -\frac{\overline{PT}}{\overline{RP}} \tag{3.3}$$

Comparando as razões das Eqs. (3.1) e (3.3) temos:

$$p = tg\,(\alpha) = \frac{\overline{RP}}{\overline{PT}} = -\frac{1}{tg(\theta)} = -\frac{1}{m}$$

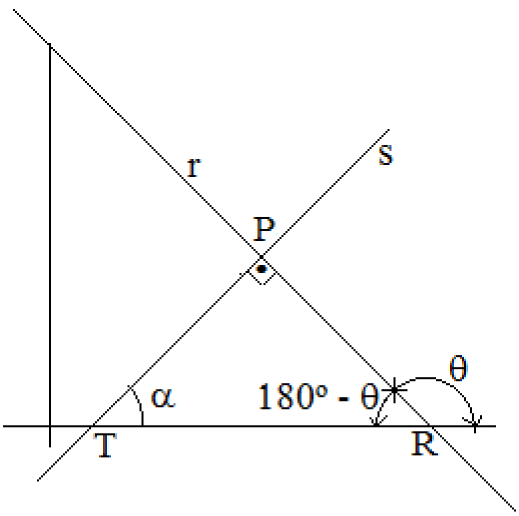


Figura 3 – Retas perpendiculares

BIBLIOGRAFIA

MALIK, M.A. Historical and pedagogical aspects of the definition of funtion. In: *Int. J. Math. Sci. Technol.*, 1980, vol. 11, nº 4, p. 489-492.