



## Livro Matemática C

Pedro Borges

MARÇO/2015



# Sumário

<b>1</b>	<b>Conjuntos Numéricos</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Grandezas Proporcionais</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Expressões Algébricas</b>	<b>9</b>
3.1	Expressões Algébricas . . . . .	9
3.2	Operações com monômios e polinômios . . . . .	11
3.3	Produtos Notáveis . . . . .	14
3.4	Fatoração . . . . .	15
3.5	Expressões algébricas fracionárias . . . . .	18
3.5.1	Menor Múltiplo Comum (MMC) com expressões algébricas: . . . . .	18
3.5.2	Operações com frações algébricas . . . . .	19
3.6	RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Equações de primeiro e segundo grau</b>	<b>25</b>
4.1	Introdução . . . . .	25
4.2	Solução da equação . . . . .	26
4.3	Equação do 1º Grau . . . . .	27
4.4	Equação do 2º Grau . . . . .	30
4.4.1	Solução da equação do 2º Grau incompleta . . . . .	30
4.4.2	Solução da Eq. do 2º grau completa . . . . .	31
4.4.3	Método do produto e soma . . . . .	33
4.5	RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Função do primeiro grau</b>	<b>39</b>
5.1	Introdução . . . . .	39

5.2	Definição de funções . . . . .	40
5.3	Função do 1º grau . . . . .	44
5.3.1	Crescimento e decrescimento das funções do 1º grau . . . . .	48
5.3.2	Domínio e imagem da função de 1º grau . . . . .	48
5.3.3	Raiz da função de 1º grau . . . . .	48
5.3.4	Sinal da função de 1º grau . . . . .	49
5.3.5	Tipos especiais de retas . . . . .	51
5.3.6	Retas paralelas e perpendiculares . . . . .	54
5.4	Aplicações de funções do 1º grau . . . . .	57
5.4.1	Produção de bens: custo fixo + custo variável . . . . .	57
5.4.2	Produção de Lixo . . . . .	58
5.4.3	Modelo Mola-massa . . . . .	59
5.4.4	Locação de carros . . . . .	60
5.4.5	Orçamento de Churrasco . . . . .	60
5.4.6	Deslocamento com velocidade constante . . . . .	61
5.4.7	Temperatura no interior de uma parede . . . . .	62
5.5	RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS . . . . .	62
5.6	ANEXO . . . . .	72
5.6.1	Tangente de ângulos suplementares . . . . .	72
5.6.2	Tangente de ângulos complementares . . . . .	72
5.6.3	Retas paralelas . . . . .	73
5.6.4	Retas perpendiculares . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Função do segundo grau</b> . . . . .	<b>75</b>
6.1	Introdução . . . . .	75
6.2	Definição de função do 2º grau . . . . .	75
6.3	Gráfico de uma função de 2º grau . . . . .	76
6.3.1	Concavidade da parábola . . . . .	77
6.3.2	Intersecção com o eixo Y . . . . .	77
6.3.3	Raízes das funções de 2º grau (intersecção com o eixo X) . . . . .	78
6.3.4	Vértice da parábola . . . . .	79
6.3.5	Parábolas com eixo de simetria paralelos a X . . . . .	82

6.4	Sinal da função do 2º grau . . . . .	83
6.5	Pontos de máximo e de mínimo . . . . .	86
6.6	Aplicações das funções quadráticas . . . . .	87
6.6.1	Queda livre . . . . .	87
6.6.2	Arcos parabólicos em construções . . . . .	88
6.6.3	Problemas de otimização (dados de experimentos) . . . . .	90
6.6.4	Antena parabólica . . . . .	91
6.7	Exercícios . . . . .	92
6.8	RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS . . . . .	94
<b>7</b>	<b>Inequações</b>	<b>101</b>
7.1	Introdução . . . . .	101
7.2	Inequações: definição e propriedades . . . . .	102
7.3	Inequações de 1º Grau . . . . .	105
7.4	Inequações do 2º Grau . . . . .	107
7.5	RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS . . . . .	109
<b>8</b>	<b>Potências e funções exponenciais</b>	<b>113</b>
8.1	Introdução . . . . .	113
8.2	Potências . . . . .	113
8.3	Funções exponenciais . . . . .	118
8.3.1	Função exponencial com base e (função exponencial natural) . . . . .	121
8.4	Juros compostos . . . . .	124
8.5	RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS . . . . .	126
<b>9</b>	<b>Logarítmos e função logarítmica</b>	<b>133</b>
<b>10</b>	<b>Trigonometria e funções trigonométricas</b>	<b>135</b>
10.1	Introdução . . . . .	135
10.2	Ângulos, arcos e circunferência . . . . .	135
10.3	Triângulo retângulo . . . . .	141
10.4	Razões trigonométricas . . . . .	147
10.5	Identidades trigonométricas . . . . .	153
10.5.1	Identidade fundamental da trigonometria . . . . .	153

10.5.2	Identidades com quadrados de tangentes, cotangentes, secantes e cotangentes	154
10.5.3	Outras identidades trigonométricas . . . . .	154
10.6	Funções trigonométricas . . . . .	155
10.6.1	Círculo trigonométrico . . . . .	155
10.6.2	Função cosseno . . . . .	157
10.6.3	Função seno . . . . .	161
10.6.4	Função tangente . . . . .	163
10.6.5	Função cotangente . . . . .	165
10.6.6	Função secante . . . . .	167
10.6.7	Função cossecante . . . . .	169
10.7	Funções arco e equações trigonométricas . . . . .	175
10.7.1	As funções arco . . . . .	177
10.7.2	Equações trigonométricas . . . . .	180
10.8	RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS . . . . .	183
<b>11</b>	<b>Outras Funções</b>	<b>189</b>
11.1	BIBLIOGRAFIA . . . . .	190

# **Capítulo 1**

## **Conjuntos Numéricos**





## **Capítulo 2**

# **Grandezas Proporcionais**



## Capítulo 3

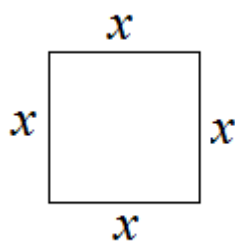
# Expressões Algébricas

### 3.1 Expressões Algébricas

A Matemática é uma linguagem e como tal, expressa alguma coisa. Ao calcular a área de um retângulo com  $3\text{ cm}$  de comprimento e  $4\text{ cm}$  de largura, escrevemos  $3 \cdot 4$  (três vezes quatro) e estamos expressando a soma de  $4 + 4 + 4$ . Tanto  $3 \cdot 4$  como  $4 + 4 + 4$  são expressões numéricas, cujo significado particular é o número de  $\text{cm}^2$  do retângulo.

Para escrever de modo geral a área de qualquer quadrado de lado  $x$ , usamos  $x^2$ . Esta expressão com *letras* e *números*, chamamos de *expressão algébrica*.

**Exemplo 3.1.1.** O lado do quadrado pode ser expresso pela letra  $x$  e isso significa que o lado é variável, ou seja, pode assumir diferentes valores positivos.



Se  $x = 2\text{ cm}$  o quadrado tem todos os lados iguais a  $2\text{ cm}$  e é aproximadamente do tamanho de um ladrilho de revestimento de paredes.

Se  $x = 2,2\text{ m}$ , o quadrado tem todos os lados iguais a  $2,2\text{ m}$  e é aproximadamente do tamanho de banheiro.

Se  $x = 1\text{ hm}$  ( $100\text{m}$ ), o quadrado tem todos os lados iguais a  $1\text{ hm}$  e é aproximadamente do tamanho de uma quadra de cidade.

Devemos observar que o lado do quadrado expresso por  $x$  é variável, ou seja, pode assumir diferentes valores.

Para cada valor de  $x$  proposto acima, o perímetro ( $P$ ) de todos os quadrados, pode ser escrito com uma equação algébrica:

$$P = 4x.$$

Dizemos que  $4x$  é a expressão algébrica do perímetro de qualquer quadrado de lado  $x$ . Nesse caso, o número 4 é uma constante (coeficiente, parte numérica) e  $x$  é a variável (parte literal) ■

As expressões algébricas recebem nomes específicos em função do número de termos:

1 termo = **monômios**. Exemplos:  $7x^3$ ;  $3m^2n^4$

2 termos = **binômios**. Exemplos:  $x + 1$ ;  $7x^3 - 4x$ ;  $4y - 3$ ;  $x^2 - 1$

3 termos = **trinômios**. Exemplos:  $x^4 - x^3 + 3$ ;  $x^2 - 2x + 3$

Mais do que 3 termos = **polinômios**. Exemplo:  $2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 2$ .

**Definição 3.1.1.** Dois monômios são semelhantes se as partes literais forem idênticas.

**Exemplo 3.1.2.** (a) Os monômios  $7x^3$  e  $3x^3$  são semelhantes, pois as partes literais são idênticas;

(b) Os monômios  $2ab^2$  e  $2a^3b$  não são semelhantes, pois as partes literais são diferentes ■

**Exemplo 3.1.3.** Determine o valor numérico do polinômio  $3x^2 - 4x - 1$ , para  $x = -1$ .

**Solução:** O valor numérico de uma expressão algébrica é obtido substituindo o valor da variável na expressão:

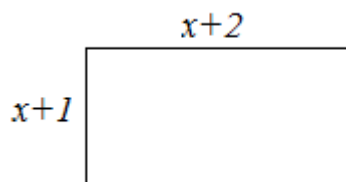
$$3(-1)^2 - 4(-1) - 1 = 3 + 4 - 1 = 6 \blacksquare$$

### EXERCÍCIOS 3.1

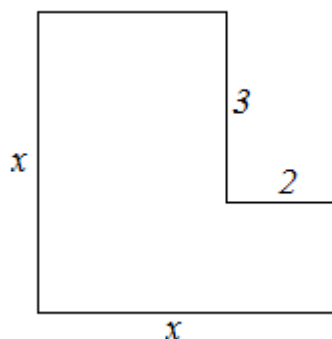
**3.1.1** Use variáveis para expressar o perímetro e a área de:

- (a) Quadrados
- (b) Retângulos em que um lado é o dobro do outro
- (c) Retângulos em que a diferença dos lados é 2 cm
- (d) Retângulos em que um lado é 5 cm maior do outro

**3.1.2** Determine a expressão algébrica do perímetro do retângulo



3.1.3 Determine a expressão algébrica do perímetro da figura:



3.1.4 Determine o perímetro da figura do Ex 3.1.3 para  $x = 4$ .

3.1.5 O valor de  $x$  poderia ser 1 na figura do Ex 3.1.3 ?

3.1.6 Calcule o valor numérico das expressões com os respectivos valores das variáveis:

a)  $7x^3 + x^2 - 3x + 1$  para  $x = -2$

b)  $-x^4 + 5x - \frac{1}{3}$  para  $x = -1$

c)  $\frac{x+1}{x^2-2}$  para  $x = 2$

d)  $\frac{x+1}{x^2-x+1}$  para  $x = \frac{1}{2}$

## 3.2 Operações com monômios e polinômios

### Adição e subtração de monômios e polinômios

Só é possível adicionar ou subtrair monômios semelhantes.

Para adicionar ou subtrair monômios, soma-se ou subtrai-se os coeficientes e mantém-se a parte literal.

Para adicionar/subtrair polinômios, soma-se ou subtrai-se os monômios semelhantes.

#### Exemplo 3.2.1.

(a)  $3x^2 + 5x^2 - 2x^2 = (3 + 5 - 2)x^2 = 6x^2$

(b)  $5y - 7x - 8y + 6x = (5 - 8)y + (-7 + 6)x = -3y - x$

(c)  $(x^2 + 5x - 3) - (2x^2 + 2x - 8) = -x^2 + 3x + 5$

### Multiplicação e divisão de monômios

Multiplica-se ou divide-se os coeficientes e usa-se a propriedade da multiplicação/divisão de potências de mesma base para multiplicar a parte literal.

**Exemplo 3.2.2.** (a)  $(-3x^2) \cdot (7x^2) = -21x^4$

$$(b) (25x^4y^2) \div (5x^2y) = 5x^2y$$

$$(c) (10x^2) \div (2x) = 5x$$

$$(d) (12x^3 + 6x^2 - 5x) \div (-2x) = -6x^2 - 3x + \frac{5}{2}.$$

**Exemplo 3.2.3.** Multiplique  $12 \cdot 15$

**Solução:** Vamos escrever  $12 = 10 + 2$  e  $14 = 10 + 4$ . Para multiplicar usamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

$$(10 + 2) \cdot (10 + 4) = 10 \cdot 10 + 10 \cdot 4 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 4 = 100 + 40 + 20 + 8 = 168.$$

Ou, na forma de algoritmo:

$$\begin{array}{r} 1d + 4u \\ 10 + 2 \\ \hline 2d + 8u \\ 1c + 4d \\ \hline 1c + 6d + 8u = 168 \text{ u } \blacksquare \end{array}$$

**Exemplo 3.2.4.** Multiplique os polinômios:  $(x^3 + 6x^2 - 5x) \cdot (x - 2)$

**Solução:** A multiplicação de dois polinômios segue o mesmo algoritmo da multiplicação de dois números decompostos como soma, como no Ex 3.2.3

$$\begin{array}{r} x^3 + 6x^2 - 5x \\ x - 2 \\ \hline -2x^3 - 12x^2 + 10x \\ x^4 + 6x^3 - 5x^2 \\ \hline x^4 + 4x^3 - 17x^2 + 10x \blacksquare \end{array}$$

**Exemplo 3.2.5.** Divida os polinômios:  $(x^3 + 6x^2 - 5x) \div (x - 2)$ .

**Solução:** A divisão de polinômios é semelhante ao algoritmo da divisão de dois números inteiros.

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 6x^2 - 5x \quad | \quad x - 2 \\
 -x^3 + 2x^2 \phantom{- 5x} \quad x^2 + 8x \\
 \hline
 \phantom{x^3 + } + 8x^2 - 5x \\
 \phantom{x^3 + } - 8x^2 + 16x \\
 \hline
 \phantom{x^3 + } \phantom{+ 8x^2 - } + 11x
 \end{array}$$

A divisão dos polinômios dá  $x^2 + 8x$  e o resto é  $+11x$  ■

### EXERCÍCIOS 3.2

**3.2.1** Explique porque podemos cancelar  $a$  em  $\frac{a \cdot b}{a}$  e não podemos em  $\frac{a+b}{a}$ .

**3.2.2** Verifique se as igualdades são verdadeiras (justifique sua resposta):

- |                          |                           |
|--------------------------|---------------------------|
| a) $a^2 + a^3 = a^5$     | d) $2m^2 - 3m^2 = -m^2$   |
| b) $x^3 \cdot x^3 = x^6$ | e) $x^3 \cdot x^3 = 2x^6$ |
| c) $y^3 : y^3 = 1$       | f) $10y^3 : 2y^2 = 5y$    |

**3.2.3** Resolva as operações com as expressões algébricas:

- |   |   |
|---|---|
| a) $3x^2 + \frac{1}{3}x^2 - 2x^2$             | f) $a^2b \cdot ab^3 \cdot a^3b$               |
| b) $ab^2 - \frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{4}ab^2$ | g) $(y^2 - \frac{1}{5}) \cdot (5y - 2)$       |
| c) $y^3 - \frac{3}{4}y^3 + 2y^3$              | h) $7a^3b^2x^2 : 14a^2bx$                     |
| d) $x(xy + 2x + 3y)$                          | i) $(2x^3 + 5x^2 + 2x) : (x + \frac{1}{2})$   |
| e) $(x - 3)(x^2 - \frac{1}{3}x + 3)$          | j) $\frac{1}{2}m^3n^2 : \frac{1}{4}m^2n + mn$ |

**3.2.4** Dados os polinômios  $A = 2x + 1$ ;  $B = x - 3$  e  $C = 2x^2 + 5x + 2$ , resolva:

- |                |                |                    |                    |
|----------------|----------------|--------------------|--------------------|
| a) $A + B$     | c) $A \cdot B$ | e) $C - x \cdot A$ | g) $C : B$         |
| b) $B + C - A$ | d) $A \cdot C$ | f) $C : A$         | h) $A \cdot B - C$ |

**3.2.5** Um lado de um retângulo é expresso por  $x + 3$  e outro por  $2x$ :

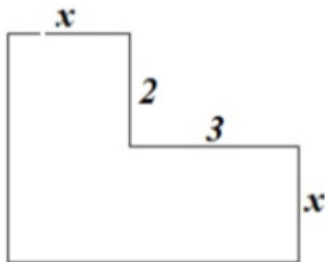
- Determine a expressão algébrica do perímetro.
- Determine a expressão algébrica da área.
- Para que valor de  $x$  o perímetro é  $18\text{cm}$ ?
- Se a área é  $56\text{cm}^2$ , qual é o valor de  $x$ ?
- Qual é o valor de  $x$  para que os lados sejam iguais?

**3.2.6** A área de um retângulo é expressa por  $x^2 + 2x - 3$  e um dos lados por  $x - 1$ . Determine a expressão algébrica do outro lado.

**3.2.7** O lado de um cubo é expresso por  $x + 1$ . Determine a expressão algébrica:

- a) Do volume
- b) Da área de uma face
- c) Da área superficial

**3.2.8** Com base na figura, determine as expressões algébricas do perímetro e da área.



**3.2.9** O lado de um quadrado é expresso por  $x + 3$ :

- a) Determine a expressão algébrica da área.
- b) Calcule a área para  $x = 1$ .
- c)  $x$  pode ser zero?
- d) Qual o valor de  $x$  para que a área seja nula.

**3.2.10** Calcule os valores da área do quadrado do **Ex 3.2.9** para:

$$x = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

### 3.3 Produtos Notáveis

Produtos notáveis são produtos especiais de polinômios. São chamados “notáveis” porque aparecem seguidamente em problemas de Matemática.

**Quadrado da soma de dois termos:**  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

**Quadrado da diferença de dois termos:**  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

**Produto da soma pela diferença:**  $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$



**Cubo da soma de dois termos:**  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

**Cubo da diferença de dois termos:**  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

### EXERCÍCIOS 3.3

**3.3.1** Resolva os produtos notáveis:

- a)  $(x + 5)^2$
- b)  $(2x - 3)^2$
- c)  $(x + \frac{1}{2})^2$
- d)  $(3 - x)^2$
- e)  $(\frac{1}{2}x + 2)^2$
- f)  $(x + 1)^3$
- g)  $(2x - 5)^3$
- h)  $(x - 3)(x + 3)$
- i)  $(m + 3n)(m + 3n)$
- j)  $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$
- k)  $(x + 1)(x + 2)$
- l)  $(x - 1)(x + 3)$
- m)  $(2a - b)(2a + b)$
- n)  $(a + b + 1)^2$
- o)  $(x + \frac{1}{4})(x + 2)$

## 3.4 Fatoração

***Fatores** são os termos de uma multiplicação e **fatorar** é transformar um número ou expressão algébrica em um produto de fatores.*

**Exemplos:**

- a) O número 12 fatorado é  $3 \cdot 4$ , onde 3 e 4 são fatores.
- b) Podemos decompor números em fatores primos, por exemplo:  $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ . Os números 2 e 3, nesse caso são fatores, onde o fator 2 aparece três vezes.
- c) Na expressão  $3x^2a^3$ , 3,  $x^2$  e  $a^3$  são fatores.

**Fatoração com Fator Comum:**

Algumas expressões algébricas têm *fatores comuns* (fatores que estão presentes em mais de uma expressão algébrica) que se pode colocar em evidência (colocar em separado, na forma de fatores). Vejamos os exemplos:

$$a) \quad 3x + 6y = 3x + 2 \cdot 3y = 3 \cdot (x + 2y).$$

Observemos que o 3 é fator comum aos dois monômios.

$$b) \quad 4ab^3 - 2a^3b + 10ab^4 = 2ab \cdot (2b^2 - a^2 + 5b^3).$$

Observemos que o  $2ab$  é fator comum aos três monômios

$$c) \quad 2an + 2bn - am - bm.$$

**(Fatoração por agrupamento)**

Nos dois primeiros termos o fator comum é  $2n$  e nos dois últimos o fator comum é  $-m$ .

$$2an + 2bn - am - bm = 2n(a + b) - m(a + b)$$

A expressão resultante tem mais um fator comum:  $(a + b)$ . Então:

$$2an + 2bn - am - bm = (a + b)(2n - m).$$

**Fatoração do Trinômio Quadrado Perfeito (TQP):**

Um trinômio é *quadrado perfeito (TQP)* se foi originado pelo quadrado da soma ou subtração de dois termos.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

(Quadrado da soma de dois termos)

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

(Quadrado da diferença de dois termos)

Observemos que o trinômio foi *transformado (fatorado)* em um produto onde os fatores são  $(a \pm b)$ . Chamando  $a$  de “primeiro termo do binômio” e  $b$  de “segundo termo do binômio”, dizemos que o trinômio  $a^2 + 2ab + b^2$  é o quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo mais o quadrado do segundo.

**Fatoração da Diferença de dois quadrados:**

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

(Produto da soma pela diferença de dois termos)

**Exemplo 3.4.1.** Verifique se  $x^2 + 2x + 1$  é um TQP.

**Solução:** Se o trinômio dado é um TQP então o primeiro termo do binômio  $(a + b)$  deve ser  $a = \sqrt{x^2} = x$ ; o segundo termo do binômio  $(a + b)$  deve ser  $b = \sqrt{1} = 1$ .

**Teste do segundo termo do trinômio:**  $2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot x \cdot 1 = 2x$  deve ser igual ao *segundo termo do trinômio*. O que de fato ocorre, neste caso. Assim,

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Portanto, o polinômio dado é um TQP ■

**Exemplo 3.4.2.** Verifique se  $x^2 + 2x + 4$  é um TQP.

**Solução:** Se o trinômio dado é um TQP então o primeiro termo deve ser  $a = \sqrt{x^2} = x$  e o segundo termo  $b = \sqrt{4} = 2$ .

**Teste do segundo termo do trinômio:**  $2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot x \cdot 2 = 4x$ , que é diferente de  $2x$ . Portanto, o trinômio dado não é um TQP ■

**Exemplo 3.4.3.** Complete o trinômio  $x^2 - 4x + 1 = 0$ , de modo que obtenha-se um TQP.

**Solução:** Para se obter um TQP na identidade dada, o primeiro termo do binômio  $(a + b)$  deve ser  $a = \sqrt{x^2} = x$ . O segundo termo " $b$ " pode ser obtido, sabendo que

$$2 \cdot x \cdot b = -4x \quad \text{(duas vezes o primeiro termo, vezes o segundo termo é igual ao segundo termo do trinômio)}$$

Assim,  $b = -2$  e o TQP é  $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ .

Para obter o TQP no lado esquerdo da identidade dada, basta adicionar  $(+3)$  em ambos os lados:

$$x^2 - 4x + 1 + (+3) = 0 + (+3)$$

$$x^2 - 4x + 4 = 3 \quad \blacksquare$$

### EXERCÍCIOS 3.4

**3.4.1** Fatore as expressões algébricas:

a)  $x^2 - x$

f)  $x^2 - 25$

b)  $a^3b^2 - ab + ab^2$

g)  $16x^2 - \frac{4}{9}$

c)  $9x^2 - 12x + 4$

h)  $ax + bx + ay + by$

d)  $9 + 6x + x^2$

i)  $6 + 3x + 2y + xy$

e)  $x^2 + x + \frac{1}{4}$

j)  $x^3 + 1$

**3.4.2** Verifique se os trinômios são quadrados perfeitos:

a)  $x^2 + 4x + 16$

c)  $4y^2 - 12y + 9$

b)  $x^2 + 6x + 9$

d)  $9x^2 - 6x + 3$

**3.4.3** Adicione constantes nas equações de modo a obter trinômios quadrados perfeitos no lado esquerdo da igualdade:

a)  $x^2 + 6x + 10 = 0$

c)  $9x^2 - 12x + 5 = 0$

b)  $4x^2 + 4x + 3 = 0$

d)  $x^2 + 10x + 12 = 0$

### 3.5 Expressões algébricas fracionárias

Expressões algébricas fracionárias são expressões com variáveis no denominador.

**Exemplos:**

$$1) \frac{a+b}{b}$$

$$2) \frac{x^2+3x+5}{x-1}$$

$$3) \frac{ab^2-5a+b}{a+b}$$

#### 3.5.1 Menor Múltiplo Comum (MMC) com expressões algébricas:

Para encontrar o MMC de números são conhecidos dois métodos:

Encontre o MMC(6,8):

**a) Usando conjuntos de múltiplos:**

Os múltiplos de 6 são :

$$M(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, \dots\}$$

Os múltiplos de 8 são :

$$M(8) = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, \dots\}$$

Examinando os conjuntos de múltiplos de 6 e 8, observa-se que existem vários múltiplos comuns, mas o menor deles é 24. Então,  $\text{MMC}(6,8) = 24$ .

**b) Usando decomposição em fatores primos:**

1º) decompor os números em fatores primos;

2º) o MMC é o produto de todos os fatores, porém aqueles que se repetirem, escolhe-se apenas os de potência maior.

$$6 = 2 \cdot 3$$

e

$$8 = 2^3$$

Os fatores são 2, 3 e  $2^3$ . Como o fator 2 se repetiu, escolhemos apenas  $2^3$ .

$$\text{Então, } \text{MMC}(6,8) = 2^3 \cdot 3 = 24.$$

O MMC de expressões algébricas é calculado pelo método da decomposição.

**Exemplo 3.5.1.** Determine o MMC das expressões algébricas:

a)  $ab^2$  e  $a^3b$ .

Os fatores são:  $a$ ;  $a^3$ ;  $b$  e  $b^2$ . Então, o  $\text{MMC}(ab^2, a^3b) = a^3b^2$

b)  $x^2 + 2x + 1$  e  $2(x + 1)$ :

Fatorando a primeira expressão, temos:  $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ . Os fatores são:  $(x + 1)^2$ ; 2 e  $(x + 1)$ . Então o MMC das expressões dadas é  $2(x + 1)^2$  ■

### 3.5.2 Operações com frações algébricas

As operações com frações algébricas seguem as mesmas regras das operações com frações numéricas e polinômios.

**Exemplo 3.5.2.** Resolva as operações com as frações algébricas:

a)  $\frac{a}{b} + \frac{2a}{b^2} =$

O MMC( $b, b^2$ ) =  $b^2$ . Aplicando o algoritmo da adição de frações, temos:

$$\frac{a}{b} + \frac{2a}{b^2} = \frac{ab+2a}{b^2} = \frac{a(b+2)}{b^2}$$

b)  $\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+1}{x^2-1} =$

Ao invés de multiplicar diretamente, podemos fazer simplificações reescrevendo o denominador da segunda fração como:  $(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)$ . Assim,

$$\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} =$$

Cancelando os fatores iguais (propriedade do cancelamento), temos:

$$\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x}{x+2} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{x}{(x+2)(x-1)} \quad \blacksquare$$

## EXERCÍCIOS 3.5

**3.5.1** Simplifique as frações algébricas usando a propriedade do cancelamento:

a)  $\frac{21x^4}{15x}$

c)  $\frac{a^2-a}{a^2-2a+1}$

e)  $\frac{x^3+4x^2-21x}{x^2-9}$

b)  $\frac{x^2}{x^2-x}$

d)  $\frac{y+2}{4y^2-16}$

f)  $\frac{a^3+3a^2-5a-15}{a^2+3a}$

**3.5.2** Resolva as adições e subtrações com frações algébricas:

a)  $\frac{1}{3x} + \frac{x+1}{x^2}$

c)  $\frac{1}{y^2-1} - \frac{1}{y+1}$

e)  $\frac{x}{x+3} + \frac{1}{x^2+6x+9}$

b)  $\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x-1}$

d)  $\frac{2}{a} + \frac{a}{a^2+1}$

f)  $\frac{x}{x^2-25} - \frac{x-1}{2x-10}$

**3.5.3** Multiplique as frações algébricas usando a propriedade do cancelamento:

a)  $\frac{4}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{16}$

c)  $\frac{1}{x} \cdot \frac{x^2-6x+9}{x+1} \cdot \frac{x^2+x}{x-3}$

e)  $\frac{x^3-1}{2x^2} \cdot \frac{4x}{x^2+x+1}$

b)  $\frac{x+4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x}{x^2-16}$

d)  $\frac{4x^2-2}{x^2} \cdot \frac{6x^2-6}{4x^4-4x^2+1}$

f)  $\frac{y+3}{7} \cdot \frac{21}{2y+6}$

**3.5.4** Resolva as operações com frações algébricas:

$$\text{a) } \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x^3}}$$

$$\text{b) } \frac{x}{3x+1} + \frac{x+1}{9x^2-1}$$

$$\text{c) } \frac{a}{a-1} : \frac{a^3}{a^3-a}$$

$$\text{d) } \frac{1}{2y+5} - \frac{y}{4y^2+20y+25}$$

$$\text{e) } \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{x-2} + \frac{1}{x^2-4}$$

$$\text{f) } \frac{x}{x-3} - \frac{1}{x^2-6x+9} : \frac{6x^2-36x+54}{2x-6}$$

## 3.6 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

### RESPOSTAS 3.1

3.1.1 a)  $P = 4x$ ;  $A = x^2$

c)  $P = 4x - 4$ ;  $A = x^2 - 2x$

b)  $P = 6x$ ;  $A = 2x^2$

d)  $P = 4x + 10$ ;  $A = x^2 + 5x$

3.1.2  $P = 4x + 6$

3.1.3  $P = 4x$

3.1.4  $P = 16cm$

3.1.5 Não. Se  $x = 1cm$ , a figura não seria fechada.

3.1.6 a) -45

b)  $-\frac{19}{3}$

c)  $\frac{3}{2}$

d) 2

### RESPOSTAS 3.2

3.2.1 Só podemos cancelar quando o mesmo número ou variável está sujeito a operações inversas. Neste caso, a multiplicação por  $a$  pode ser cancelada com a divisão por  $a$ .

3.2.2 a) Falsa. A soma dos expoentes, quando as bases são iguais, só é feita se a operação entre as potências for a multiplicação.

b) Verdadeira. Na multiplicação de potências de mesma base conserva-se a base e soma-se os expoentes.

c) Verdadeira. Na divisão de potências de mesma base, conserva-se a base e subtrai-se os expoentes.

d) Verdadeira.

e) Falsa. Multiplica-se os coeficientes ao invés de somá-los.

f) Verdadeira.

3.2.3 a)  $\frac{4}{3}x^2$

d)  $x^2y + 2x^2 + 3xy$

h)  $\frac{1}{2}abx$

b)  $\frac{3}{4}ab^2$

e)  $x^3 - \frac{10}{3}x^2 + 4x - 9$

i)  $2x^2 + 4x$

f)  $a^6b^5$

c)  $\frac{9}{4}y^3$

g)  $5y^3 - 2y^2 - y + \frac{2}{5}$

j)  $3mn$

3.2.4 a)  $3x - 2$

d)  $4x^3 + 12x^2 + 9x + 2$

g)  $2x + 11$ ;  $R = 35$

b)  $2x^2 + 4x - 2$

e)  $4x + 2$

c)  $2x^2 - 5x - 3$

f)  $x + 2$

h)  $-10x - 5$

3.2.5

- a)  $6x+6$       b)  $2x^2+6x$       c)  $2cm$       d)  $4cm$       e) 3

3.2.6  $x+3$

3.2.7 a)  $x^3+3x^2+3x+1$       b)  $x^2+2x+1$       c)  $6x^2+12x+6$

3.2.8  $P=4x+10$ ;  $A=x^2+5x$

3.2.9 a)  $x^2+6x+9$       b) 16      c) Sim      d) -3

3.2.10 Respectivamente 0; 1; 4; 9; 16; 25; 36

### RESPOSTAS 3.3

- 3.3.1 a)  $x^2+10x+25$       i)  $m^2+6mn+9n^2$   
 b)  $4x^2-12x+9$       j)  $x^2-\frac{1}{4}$   
 c)  $x^2+x+\frac{1}{4}$       k)  $x^2+3x+2$   
 d)  $x^2-6x+9$       l)  $x^2+2x-3$   
 e)  $\frac{1}{4}x^2+2x+4$       m)  $4a^2-b^2$   
 f)  $x^3+3x^2+3x+1$       n)  $a^2+b^2+2ab+2a+2b+1$   
 g)  $8x^3-60x^2+150x-125$       o)  $x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{2}$   
 h)  $x^2-9$

### RESPOSTAS 3.4

- 3.4.1 a)  $x(x-1)$       e)  $(x+\frac{1}{2})^2$       i)  $(3+y)(2+x)$   
 b)  $ab(a^2b-1+b)$       f)  $(x+5)(x-5)$       j)  $(x+1)(x^2-x+1)$   
 c)  $(3x-2)^2$       g)  $(4x+\frac{2}{3})(4x-\frac{2}{3})$   
 d)  $(x+3)^2$       h)  $(x+y)(a+b)$
- 3.4.2 a) Não é um TQP.      c) É um TQP:  $(2y-3)^2$   
 b) É um TQP:  $(x+3)^2$       d) Não é um TQP.
- 3.4.3 a) -1      b)  $-\frac{1}{2}$       c)  $-\frac{1}{9}$       d) 13

### RESPOSTAS 3.5

- 3.5.1 a)  $\frac{7}{5}x^3$       c)  $\frac{a}{a-1}$       e)  $\frac{x(x+7)}{x+3}$   
 b)  $\frac{x}{x-1}$       d)  $\frac{1}{4y-8}$       f)  $\frac{a^2-5}{a}$
- 3.5.2 a)  $\frac{4x+3}{3x^2}$       c)  $\frac{2-y}{(y+1)(y-1)}$       e)  $\frac{x^2+3x+1}{(x+3)^2}$   
 b)  $\frac{-x^3+2x^2-x-2}{x(x+1)(x-1)}$       d)  $\frac{3a^2+2}{a(a^2+1)}$       f)  $\frac{-x^2-2x+5}{2(x^2-25)}$



3.5.3 a)  $\frac{x+1}{4}$

b)  $\frac{1}{x^2-3x-4}$

3.5.4 a)  $\frac{x^2}{x+1}$

b)  $\frac{3x^2+1}{9x^2-1}$

c)  $x-3$

d)  $\frac{12(x^2-1)}{x^2(2x^2-1)}$

c)  $\frac{a+1}{a}$

d)  $\frac{y+5}{(2y+5)^2}$

e)  $\frac{2(x-1)}{x}$

f)  $\frac{3}{2}$

e)  $\frac{x^2(x+2)+1}{(x-2)(x+2)}$

f)  $\frac{3x(x-3)^2-1}{3(x-3)^3}$



# Capítulo 4

## Equações de primeiro e segundo grau

### 4.1 Introdução

Ao escrever problemas em linguagem matemática, geralmente utilizamos equações. Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 4.1.1.** A renda de uma família é a soma das rendas do pai (P), da mãe (M) e de uma filha (F). Sabe-se que a renda total é R\$ 4.500,00 e somando a renda do pai e da mãe, obtém-se R\$ 3.100,00. Qual é a renda do filho ?

**Solução:** Escrevendo a renda como uma equação temos:

$$R = P + M + F \quad (4.1)$$

Sabemos que  $P + M = \text{R\$ } 3.100,00$ , e  $R = \text{R\$ } 4.500,00$ . Substituindo  $P + M$  e  $R$  na equação, temos:

$$4500 = 3100 + F \quad (4.2)$$

Para que o lado esquerdo da Eq. (2) seja igual ao lado direito,  $F = 1.400$  ■

Na Eq. (2) temos uma equação com uma letra, cujo valor desconhecemos, mas que desejamos determinar. Chamamos esta letra de *incógnita*.

**Exemplo 4.1.2.** O perímetro de um quadrado mede 12 cm. Quanto mede cada lado?

**Solução:** Chamaremos de  $x$  (*incógnita*, a grandeza desconhecida) o lado do quadrado e escrevemos uma equação para o perímetro:

$$P = 4 \cdot x \quad (4.3)$$

Substituindo 12 no lugar de  $P$  obtemos uma equação com uma incógnita.

$$12 = 4 \cdot x$$

Novamente temos uma equação com uma incógnita. É fácil verificar que o lado do quadrado mede  $x = 3 \text{ cm}$  ■

**Exemplo 4.1.3.** a) O dobro de um número mais 3 é igual a 5. Que número é esse?

b) O dobro de um número mais 3 é igual a 6. Que número é esse?

**Solução:** a) Chamando esse número de  $x$ , podemos escrever:

$$2x + 3 = 5 \quad (4.4)$$

Novamente temos uma equação com uma incógnita. Para que o lado esquerdo da Eq. (4) seja igual ao lado direito,  $x = 1$ .

b) Com o mesmo procedimento do item (a), podemos escrever:

$$2x + 3 = 6 \quad (4.5)$$

A solução nesse caso, não é tão óbvia. Neste capítulo vamos estudar operações algébricas para encontrar o valor da incógnita de equações algébricas. A solução é  $x = 3/2$ . Substitua esse valor de  $x$  na equação dada e verifique se ambos os lados da equação são iguais ■

Podemos elaborar equações de vários tipos:

$$3 \cdot (5+8) = 10 + 29 \quad (\text{Equação numérica})$$

$$2 + 3x + x^2 + 5x^3 + x^4 = 0 \quad (\text{Equação polinomial de 4º grau})$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 0 \quad (\text{Equação racional})$$

$$3^{x+1} = 2 \quad (\text{Equação exponencial})$$

Neste capítulo vamos estudar as soluções das equações polinomiais de 1º e 2º Grau.

## 4.2 Solução da equação

O(s) valor(es) da incógnita que torna ambos os lados iguais é a solução de uma equação. Para resolver equações é necessário conhecer suas propriedades.

**Propriedade fundamental das equações:**

Se em ambos os lados da equação for realizada a mesma operação, a equação permanece verdadeira (é mantida a identidade da equação).

**Exemplo 4.2.1.** Consideremos uma equação numérica:  $5 = 5$ .

Evidentemente é uma equação verdadeira pois 5 é igual a 5!

1. Se adicionarmos +10 em ambos os lados, temos

$$+10 + 5 = 5 + 10$$

$$+15 = +15. \text{ A identidade foi mantida.}$$

2. Se adicionarmos -10 em ambos os lados, temos

$$-10 + 5 = 5 + (-10)$$

$-5 = -5$ . A identidade foi mantida.

3. Se multiplicarmos por 7 em ambos os lados, temos

$$7 \cdot 5 = 5 \cdot 7$$

$(a) = 35$ . A identidade foi mantida.

4. Se dividirmos por 4 em ambos os lados, temos

$$\frac{5}{4} = \frac{5}{4}. \text{ A identidade foi mantida} \blacksquare$$

**Exemplo 4.2.2.** Dada a equação  $3x = 2x + 5$ , determine o valor de  $x$ .

**Solução:** Usando a propriedade fundamental, se adicionarmos  $-2x$  em ambos os lados da equação dada, temos:

$$-2x + 3x = 2x + 5 - 2x$$

$$x = 5 \blacksquare$$

Para resolver uma equação, precisamos isolar a incógnita em um dos lados. Os *princípios aditivo e multiplicativo* derivam da propriedade fundamental e a tornam mais prática.

#### Princípio aditivo

Adicionando constantes ou variáveis em ambos os lados, a solução da equação permanece a mesma.

**Exemplo 4.2.3.** Dada a equação  $2x = x + 12$ , determine o valor de  $x$ .

**Solução:** Observemos que a solução é  $x = 12$ . Precisamos reunir as expressões que contem  $x$  em um lado da equação. Adicionando  $-x$  em ambos os lados, obtemos:

$$-x + 2x = x - x + 12$$

$$x = 12. \text{ Observemos que a solução permaneceu a mesma } x = 12 \blacksquare$$

**Princípio multiplicativo** Multiplicando (ou dividindo) ambos os lados por constantes ou variáveis (diferente de zero), a solução da equação permanece a mesma.

**Exemplo 4.2.4.** Dada a equação  $2x = -12$ , determine o valor de  $x$ .

**Solução:** Observemos que a solução é  $x = -6$ . Multiplicando ambos os lados por  $\frac{1}{2}$ , obtemos:

$$\frac{1}{2} \cdot 2x = -12 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x = -6. \text{ Observemos que a solução permaneceu a mesma, } x = -6 \blacksquare$$

## 4.3 Equação do 1º Grau

As equações polinomiais têm a forma de polinômios de uma incógnita igualados a zero:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots + a_nx^n = 0 \quad (4.6)$$

O grau de uma equação polinomial é o grau do maior expoente da incógnita. Assim,

$$2 + 3x = 0 \quad \text{é uma equação de 1º grau}$$

$$4 + 5x + x^2 = 0 \quad \text{é uma equação do 2º grau}$$

$$3 + 2x + x^2 + 5x^3 + 2x^4 = 0 \quad \text{é uma equação do 4º grau e assim por diante.}$$

**Definição 4.3.1.** A equação do 1º Grau tem a forma

$$ax + b = 0 \quad (4.7)$$

Onde  $a$  e  $b$  são números reais e  $x$  é uma incógnita.

**Exemplo 4.3.1.** Mostre que a equação  $x + 3x + 3(x-1) = 5$  pode ser reduzida à forma

$$ax + b = 0.$$

**Solução:** Multiplicando a constante 3 pelo conteúdo do parêntesis, temos:

$x + 3x + 3x - 3 = 5$ . Adicionando os termos semelhantes e adicionando  $+3$  em ambos os lados da equação, temos:

$$7x - 3 + 3 = 5 + 3 \text{ ou adicionando } (-8), \text{ temos:}$$

$$7x - 8 = 0. \text{ Portanto, a equação dada é do 1º Grau} \quad \blacksquare$$

**Exemplo 4.3.2.** Mostre que a equação  $\frac{x-3}{2} = \frac{x+3}{3} + 3$  pode ser reduzida à forma

$$ax + b = 0 \text{ e resolva a equação.}$$

**Solução:** Multiplicando toda equação por 6, temos:

$$6 \left( \frac{x-3}{2} \right) = 6 \left( \frac{x+3}{3} + 3 \right)$$

Efetivando os produtos, temos:

$$3x - 9 = 2x + 6 + 18 \quad . \text{ Adicionando } -2x \text{ e } -24 \text{ em ambos os lados, temos:}$$

$$x - 33 = 0. \text{ Portanto, a equação dada é do 1º Grau.}$$

Para resolver a equação, basta adicionar  $+33$  em ambos os lados.

$$x = 33 \quad \blacksquare$$

**Observemos que nas equações de 1º Grau existe apenas uma solução.**

### EXERCÍCIOS 4.3

**4.3.1** Uma estratégia para resolver equações fracionárias de apenas um termo em cada lado da igualdade é multiplicando os meios e os extremos (lembrar de proporções):

Se  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  então  $a \cdot d = b \cdot c$ . ( $a$  e  $d$  são os extremos e  $b$  e  $c$  são os meios)

- a) Use essa estratégia para resolver a equação  $\frac{x}{2} = \frac{2}{3}$   
b) A estratégia poderia ser usada para resolver  $\frac{x}{2} = \frac{2x}{3} + \frac{1}{2}$  ?

4.3.2 Resolva a equação  $\frac{x+1}{4} = x + \frac{1}{2}$  :

- (a) Multiplicando ambos os lados pelo MMC dos denominadores  
(b) Adicionando os termos do lado direito e igualando o produto dos meios e dos extremos.

4.3.3 Determine a solução das equações:

- (a)  $x + 3 = 1$   
(b)  $3x - 3 = x + 1$   
(c)  $3(x + 2) = 9$   
(d)  $2(3x + 3) = 3x$   
(e)  $2(x - 2x) = 4(x - 1)$   
(f)  $\frac{x-1}{2} = \frac{x-4}{3}$   
(g)  $\frac{x+5}{4} = \frac{3x+3}{6}$   
(h)  $\frac{12}{x} = \frac{3}{x} + \frac{3}{2}$   
(i)  $3(x + 5) = \frac{x-20}{2}$   
(j)  $\frac{1}{2} = \frac{x-2}{3}$

4.3.4 Resolva a equação  $\frac{x}{5} + \frac{x-1}{10} = \frac{1}{2}$  :

- (a) Adicionando as frações do lado esquerdo e depois resolvendo para  $x$ ;  
(b) Multiplicando toda a equação pelo MMC dos denominadores e depois resolvendo para  $x$ .

4.3.5 Resolva as equações:

- (a)  $\frac{x}{3} + \frac{x-1}{2} = \frac{1}{3}$  b)  $\frac{1}{2} = \frac{x}{5} + 2x$  c)  $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{1}{6}$   
(d)  $\frac{x+1}{2} + \frac{3x}{4} = \frac{5x}{2}$  e)  $\frac{5}{x+1} = \frac{3}{x+2}$  f)  $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2}$

4.3.6 Determine:

- (a) Um número mais sua metade e mais 5 é 8. Que número é este?  
(b) Um número mais sua metade e mais 5 é 3. Que número é este?  
(c) A terça parte de um número, mais a metade desse número menos 1 é  $\frac{1}{3}$ . Que número é este?

4.3.7 O lado de um quadrado mede  $x + 2\text{cm}$ , onde  $x$  é uma variável real. Qual é o valor de  $x$ , sabendo-se que o perímetro é 12 cm?

**4.3.8** A largura e o comprimento de um retângulo medem  $x$  cm e  $(x + 3)$  cm, respectivamente. Qual é o valor de  $x$ , para que o perímetro seja:

(a)  $P = 10$  cm

(b)  $P = 12$  cm

**4.3.9** A largura de um retângulo é dada pela expressão  $3x - 1$  e o comprimento por  $x + \frac{1}{2}$ . Qual é o valor de  $x$ , se a largura é a metade do comprimento?

**4.3.10** O comprimento de um campo de futebol é 30m maior do que a largura. Quais são as dimensões do campo, se o perímetro é 340m?

**4.3.11** Os lados, em sequência, de um triângulo diferem entre si por 2 cm. Quanto mede cada lado se o perímetro é 12 cm?

## 4.4 Equação do 2º Grau

**Definição 4.4.1.** as equações de segundo grau têm a forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0, \text{ para } a_2 \neq 0 \blacksquare \quad (4.8)$$

### 4.4.1 Solução da equação do 2º Grau incompleta

Se  $a_0$  e/ou  $a_1$  forem iguais a zero, a solução da Eq. (8) pode ser obtida facilmente usando a propriedade fundamental das equações. Vejamos os casos 1, 2 e 3:

**Caso 1:** Se  $a_0 = a_1 = 0$ . Nesse caso a Eq. (8) tem a forma:

$$a_2x^2 = 0$$

e a única solução é  $x = 0$  ■

**Caso 2:**  $a_0 \neq 0$  e  $a_1 = 0$ . Nesse caso a Eq. (8) tem a forma:

$$a_0 + a_2x^2 = 0. \quad (4.9)$$

Adicionando  $(-a_0)$  em ambos os lados, temos:

$$a_2x^2 = -a_0 \quad (4.10)$$

Dividindo a Eq. (10) por  $a_2$  e em seguida aplicando raiz quadrada em ambos os lados, temos:

$$x = \pm \sqrt{-\frac{a_0}{a_2}}. \quad (4.11)$$

Como a raiz quadrada de números negativos não é número real (é número complexo), podemos afirmar que  $x$  será real, somente se



$$-\frac{a_0}{a_2} \geq 0 \quad \blacksquare \quad (4.12)$$

**Caso 3:**  $a_1 \neq 0$  e  $a_0 = 0$ . Nesse caso a Eq. (8) tem a forma:

$$a_1x + a_2x^2 = 0. \quad (4.13)$$

Colocando o fator comum  $x$  em evidência, temos:

$$x \cdot (a_1 + a_2x) = 0 \quad (4.14)$$

Esse produto de dois termos será zero somente **se um ou os dois termos** forem nulos. Assim, teremos duas soluções possíveis:  $x_1$  e  $x_2$ .

1.  $x_1 = 0$  ou

2.  $a_1 + a_2x_2 = 0$ . Resolvendo para  $x$ , temos:

$$x = -\frac{a_1}{a_2}$$

A solução da equação de 2º grau, nesse caso, é

$$x_1 = 0$$

e  $x_2 = -\frac{a_1}{a_2}$ .  $\blacksquare$

#### 4.4.2 Solução da Eq. do 2º grau completa

Quando nenhum coeficiente da equação de segundo grau for nulo, a solução pode ser obtida por fatoração do trinômio, completando o quadrado perfeito. Lembremos que

$$\begin{array}{ccc} \text{binômio} & & \text{trinômio} \\ \overbrace{(a+b)^2} & = & \overbrace{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2} \\ \uparrow \quad \uparrow & & \\ \text{primeiro} & \text{segundo} & \\ \text{termo} & \text{termo} & \end{array} \quad \left( \begin{array}{l} \text{quadrado do primeiro, mais} \\ \text{duas vezes o primeiro vezes o segundo, mais} \\ \text{o quadrado do segundo} \end{array} \right)$$

Vejamos dois exemplos:

**Exemplo 4.4.1.** Determine as raízes da equação  $x^2 + 6x + 9 = 0$ .

**Solução:** Nesse caso, temos um TQP, pois  $a = x$  e  $b=3$ . Portanto,

$2ab = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x$  que é igual ao termo intermediário do trinômio. Assim,

$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2=0$ . Aplicando raiz quadrada em ambos os lados, temos:

$x + 3 = 0$ . Adicionando  $(-3)$  em ambos os lados, temos:

$x = -3$  é a raiz da equação dada ■

**Exemplo 4.4.2.** Determine as raízes da equação  $x^2 + 5x + 6 = 0$ .

**Solução:** Nesse caso, NÃO temos um TQP, pois se  $a = x$  e  $b = \sqrt{6}$  não temos uma identidade, comparando com o termo intermediário do trinômio:

$$2ab = 2 \cdot x \cdot \sqrt{6} \neq 5x.$$

Para obter um trinômio, vamos usar  $a = x$  e determinar  $b$ , tal que

$$5x = 2ab = 2 \cdot x \cdot b \text{ ou}$$

$$5 = 2 \cdot b$$

$$b = 5/2.$$

Adicionando  $b^2 = (5/2)^2$  em ambos os lados da equação dada, obtemos:

$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$ . Adicionando  $(-6)$  em ambos os lados e reescrevendo, temos

$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ . Fatorando o TQP obtido, temos:

$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ . Aplicando raiz quadrada em ambos os lados, temos:

$x + \frac{5}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$ . Adicionando  $(-5/2)$  em ambos os lados e operando, temos:

$x = \pm \frac{1}{2} - \frac{5}{2}$ . Finalmente, as soluções da equação dada são:

$$x_1 = -2 \quad \text{e} \quad x_2 = -3 \quad \blacksquare$$

O processo desenvolvido no Ex. 5.2 pode ser generalizado da seguinte maneira:

Inicialmente, para evitar o uso de sub-índices, vamos usar  $A=a_2$ ;  $B=a_1$  e  $C=a_0$  e reescrever a Eq. (7) :

$$Ax^2 + Bx + C = 0. \quad (4.15)$$

Para que o coeficiente de  $x^2$  seja 1, vamos dividir a Eq. (8) por  $A$ .

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{A} = \frac{0}{A} \quad \text{ou} \quad x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0 \quad (4.16)$$

Para obter o TQP, vamos usar  $a = x$  e determinar  $b$ , tal que:

$$\frac{B}{A}x = 2ab = 2xb. \text{ Então } b = \frac{B}{2A}.$$

Adicionando  $\left(b^2 = \left(\frac{B}{2A}\right)^2\right)$  em ambos os lados da Eq. (16), temos

$x^2 + \frac{B}{A}x + \left(\frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{C}{A} = \left(\frac{B}{2A}\right)^2$ . Fatorando o TQP obtido e adicionando  $(-C/A)$  em ambos os lados, temos:

$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 = \left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{C}{A}$ . Operando o lado direito e aplicando raiz quadrada em ambos os lados, temos:

$x + \frac{B}{2A} = \sqrt{\frac{B^2 - 4AC}{4A^2}}$ . Adicionando  $-\frac{B}{2A}$  em ambos os lados, temos:

$$x = \pm \sqrt{\frac{B^2 - 4AC}{4A^2}} - \frac{B}{2A} \quad \text{ou}$$

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \quad (4.17)$$

com os coeficientes da Eq. (8)

A Eq. (17) é conhecida como a Fórmula de Baskhara e a expressão no radicando da Eq. (17)

$$\Delta = B^2 - 4 \cdot A \cdot C$$

chama-se *discriminante* e é simbolizada pela letra grega delta maiúscula ( $\Delta$ ) ■

As equações do 2º grau tem sempre duas soluções,  $x_1$  e  $x_2$ . Da fórmula de Baskhara, podemos tirar a seguinte conclusão, sobre o número de soluções das equações do 2º grau:

1. Se  $\Delta = B^2 - 4AC = 0$  as soluções são reais e idênticas:  $x_1 = x_2$
2. Se  $\Delta = B^2 - 4AC > 0$  as soluções são reais e distintas:  $x_1 \neq x_2$
3. Se  $\Delta = B^2 - 4AC < 0$  as soluções não são reais.

### 4.4.3 Método do produto e soma

A equação

$$x^2 + (a + b) \cdot x + a \cdot b = 0 \quad (4.18)$$

é gerada pelo produto

$$(x + a) \cdot (x + b) = 0. \quad (4.19)$$

Observemos na Eq. (19) que se os termos entre parênteses forem nulos, a equação será uma identidade. Ou seja,

1. Se  $x + a = 0$  temos uma solução da Eq. (18) :  $x_1 = -a$ .
2. Se  $x + b = 0$  temos outra solução da Eq. (18) :  $x_2 = -b$ .

Assim, as soluções da Eq. (18) poder ser determinadas desde que encontremos dois números  $a$  e  $b$ , tal que

$$a + b = B \quad (\text{soma})$$

$$a \cdot b = C \quad (\text{produto})$$

**Exemplo 4.4.3.** Encontre as soluções de  $x^2 + x - 6 = 0$ .

**Solução:** Temos que encontrar números  $a$  e  $b$ , tal que

$$a + b = 1 \quad (4.20)$$

$$a \cdot b = -6.$$

A solução é obtida por tentativas, por isso o método é eficiente quando as soluções são inteiras. Nesse caso,  $a = -2$  e  $b = 3$  satisfazem as Eq. (20), portanto as soluções são  $x_1 = 2$  e  $x_2 = -3$ .

Observemos que as soluções têm o  *sinal oposto*  dos números  $a$  e  $b$  ■

## EXERCÍCIOS 4.4

**4.4.1** Para que  $Ax^2 + Bx + C = 0$  seja uma equação de 2º grau, o coeficiente  $A$  pode ser nulo ? e os coeficientes  $B$  e  $C$  ?

**4.4.2** Verifique se o valor de  $x$  dado é solução da respectiva equação:

a)  $x^2 - 9 = 0$  para  $x = -3$  c)  $2x^2 + x - 3 = 0$  para  $x = 1$

b)  $x^2 - 6x + 9 = 0$  para  $x = -3$  d)  $5x^2 + 3x - 5/2 = 0$  para  $x = 1/2$

**4.4.3** Resolva as equações usando apenas as propriedades das equações (sem usar a fórmula de Baskhara):

a)  $x^2 - 16 = 0$  b)  $x^2 + 2x = 0$  c)  $-2x^2 + 18 = 0$

d)  $-x^2 + 8x = 0$  e)  $-3x^2 + 6x = 0$  f)  $2x^2 = 0$

**4.4.4** Determine  $B$  para que as expressões sejam trinômios quadrados perfeitos:

a)  $x^2 + Bx + 16 = 0$  b)  $x^2 - Bx + 9 = 0$  c)  $4t^2 - Bt + 9 = 0$

d)  $9x^2 + Bx + 25 = 0$  e)  $16s^2 - Bs + 4 = 0$  f)  $36x^2 + Bx + 9 = 0$

**4.4.5** Resolva as equações usando fatoração do trinômio:

a)  $x^2 + 4x - 5 = 0$  b)  $x^2 + x - 12 = 0$  c)  $x^2 - 14x + 40 = 0$

d)  $x^2 - 12x + 36 = 0$  e)  $x^2 - 3x - 8 = 0$  f)  $3x^2 - 2x - 2 = 0$

**4.4.6** Resolva as equações usando o método de produto e soma:

a)  $x^2 + 4x + 4 = 0$  b)  $x^2 + x - 12 = 0$  c)  $x^2 - 3x - 10 = 0$

d)  $x^2 - 7x + 10 = 0$  e)  $x^2 + 10x + 21 = 0$  f)  $x^2 - x - 2 = 0$

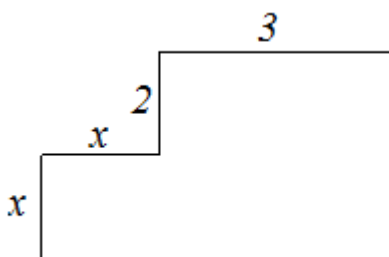
**4.4.7** Verifique se o método produto e soma é eficiente para a solução de:

a)  $2x^2 - 4x - 30 = 0$  b)  $3x^2 + 8x + 12 = 0$

4.4.8 Resolva as equações usando a fórmula de Baskhara:

a)  $x^2 - 2x - 8 = 0$       b)  $4x^2 + 4x + 1 = 0$       c)  $-x^2 + 7x - 6 = 0$   
 d)  $2x^2 - x - 3 = 0$       e)  $x^2 + 5/2x + 1 = 0$       f)  $x^2 - 8 = 0$

4.4.9 Determine o valor de  $x$  para que a área da figura seja  $7,5 \text{ cm}^2$ . (medidas do desenho em centímetros)



4.4.10 Invente uma equação de 2º grau tal que o discriminante seja nulo.

4.4.11 Invente uma equação de 2º grau tal que:

- a) As soluções sejam reais e idênticas
- b) As soluções não sejam reais (complexas)
- c) As soluções sejam reais e distintas

4.4.12 Resolva as equações usando qualquer método:

a)  $x(x-1)+3(x^2-1) = 0$       c)  $(x+1)^2 - (2x+1)^2 = 0$   
 b)  $2x(x-4)+2(x-1) = 0$       d)  $(x+2)^2 - 2(x+1/2)^2 = 0$

## 4.5 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

### RESPOSTAS 4.3

4.3.1 a)  $x = 4/3$

b) Até poderia ser usada a estratégia, porém somente após realizar a adição do lado direito.

4.3.2  $x = -\frac{1}{3}$

4.3.3 a) -2      b) 2      c) 1      d) -2      e) 2/3

f) -5      g) 3      h) 6      i) -10      j) 7/2

4.3.4  $x = 2$ .

4.3.5 a)  $x = 1$       b)  $x = \frac{5}{22}$       c)  $x = \frac{1}{7}$       d)  $x = 2/5$       e)  $x = -\frac{7}{2}$       f)  $x = -3$ .

4.3.6 a) 2      b)  $-\frac{4}{3}$       c)  $\frac{8}{5}$

4.3.7  $x = 1\text{cm}$

4.3.8 a)  $x = 1\text{cm}$       b)  $x = \frac{3}{2}\text{cm}$

4.3.9  $x = \frac{1}{2}$ ;

4.3.10 Comprimento= $100\text{m}$  e largura= $70\text{m}$ ;

4.3.11  $2\text{cm}$ ,  $4\text{cm}$  e  $6\text{cm}$ .

### RESPOSTAS 4.4

4.4.1 Não pois sem o coeficiente  $A$  a equação se torna de 1º grau. Os coeficientes  $B$  e  $C$  podem ser nulos.

4.4.2 a) sim, b) não, c) o valor de  $x$  é solução da equação, d) o valor de  $x$  não é solução da equação

4.4.3 a)  $x = \pm 4$       d)  $x' = 0; x'' = 8$   
           b)  $x' = 0; x'' = -2$       e)  $x' = 0; x'' = 2$   
           c)  $x = \pm 3$       f)  $x = 0$

4.4.4 a) 8      d) 30  
           b) 6      e) 16  
           c) 12      f) 36

4.4.5 a)  $x' = 1; x'' = -5$       d)  $x' = 6; x'' = 6$   
           b)  $x' = 3; x'' = -4$       e)  $x = \pm\sqrt{\frac{41}{4}} + \frac{3}{2}$   
           c)  $x' = 10; x'' = 4$       f)  $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$

4.4.6 a)  $x' = x'' = -2$       d)  $x' = 2; x'' = 5$   
           b)  $x' = 3; x'' = -4$       e)  $x' = -3; x'' = -7$   
           c)  $x' = -2; x'' = 5$       f)  $x' = -1; x'' = 2$

4.4.7 a) O método é eficiente porque as raízes são inteiras.

b) O método do produto e soma não é eficiente pois as raízes não são inteiras.

4.4.8 a)  $x' = 4; x'' = -2$       d)  $x' = \frac{3}{2}; x'' = -1$   
           b)  $x' = -\frac{1}{2}; x'' = -\frac{1}{2}$       e)  $x' = -\frac{1}{2}; x'' = -2$   
           c)  $x' = 1; x'' = 6$       f)  $x' = 2\sqrt{2}; x'' = -2\sqrt{2}$

4.4.9  $x \cong 0,4365$

4.4.12 a)  $x' = 1; x'' = -0,75$

b)  $x' \cong 3,302\dots; x'' \cong -0,302\dots$

c)  $x' = 0; x'' = -\frac{2}{3}$

d)  $x' = \frac{2+3\sqrt{2}}{2}; x'' = \frac{2-3\sqrt{2}}{2}$





# Capítulo 5

## Função do primeiro grau

### 5.1 Introdução

A ideia de descrever o comportamento de uma grandeza relacionada com outra não é muito antiga. Os povos antigos, Árabes e Gregos não chegaram a investigar a velocidade. Foi com Galileo (1564-1642) ao estudar o movimento que o conceito de função começou a se configurar. Porém, não sem dificuldades. A geometria de Descartes (1637) já usava a representação gráfica de uma expressão algébrica, mas essa ideia só foi aceita na comunidade de matemáticos com os trabalhos de Euler (1707-1783) e da família dos Bernoillis, ao desenvolver o cálculo aplicado a problemas físicos. A definição atribuída a Euler diz que função *é uma expressão analítica que representa a relação entre duas variáveis*.

Um conceito de função, muito semelhante ao usado atualmente, foi introduzido por Dirichlet (1805-1859), motivado pela necessidade de uma definição mais restritiva que a de Euler, ao estudar o problema de convergência de séries, na época, aplicado à investigação de problemas de condução do calor, propostos por Fourier. A definição de Dirichlet é a seguinte: *y é uma função de x, se para qualquer valor de x, existe uma regra que o associa a um único valor de y*. Em 1939, Bourbaki definiu função como *regra de correspondência entre dois conjuntos e que isto era um subconjunto do produto cartesiano entre aqueles conjuntos*.

A definição de Euler é muito usada até hoje nas ciências, devido a sua simplicidade e eficiência para descrever a relação entre duas variáveis. De fato, muitas aplicações de funções na Física, Química e Economia requerem apenas uma expressão algébrica e uma representação gráfica.

Na base do desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral está o conceito de função e daí sua importância, já que praticamente toda a ciência e a tecnologia moderna utilizam o Cálculo. Mas porque as funções são tão importantes para as ciências? Porque elas descrevem qualitativamente o comportamento de partes da realidade com precisão suficiente para que decisões possam ser tomadas. Saber o tempo de resfriamento de uma peça fundida é importante para decidir quando manuseá-la; saber o tempo em que a receita e a despesa de um empreendimento serão iguais, significa saber quando o lucro se inicia; o planejamento econômico de um reflorestamento depende da função de como as árvores crescem; a variação da concentração de um medicamento no organismo humano é fundamental para determinar a dose e o intervalo de ingestão; a deformação em vigas

depende das cargas aplicadas e do material;... Todos esses e tantos outros fenômenos são expressos na forma de funções, cujo conhecimento básico vamos desenvolver neste capítulo.

## 5.2 Definição de funções

Analisemos o seguinte exemplo:

**Exemplo 5.2.1.** O preço de 1 kg de carne é R\$ 15,00. Determine uma fórmula para calcular qualquer o custo de quantidade de carne.

**Solução:** Vamos usar a ideia de variável. Seja  $x$  a quantidade, em kg e  $y$  o custo da carne. Então

$$y = 15 \cdot x \quad (2.1)$$

é a expressão que dá o custo de carne para qualquer valor de  $x$ .

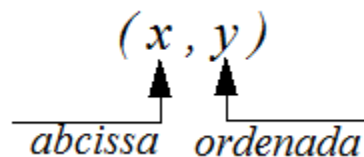
Se as massas são  $x = \{ 0, 0.5, 1, 2, 3 \}$ , usando a Eq. (2.1) calculamos os correspondentes valores dos custos  $y = \{ 0, 7.5, 15, 30, 45 \}$ . Evidentemente, podemos calcular  $y$  para qualquer  $x$  real maior ou igual a zero.

**Exemplo 5.2.2.** Se  $x$  é o lado de um quadrado, encontre uma expressão para a área.

**Solução:** Sabe-se que a área do quadrado é  $A = x^2$ . Para quadrados de lado  $x = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ , usando a expressão da área temos os correspondentes valores de  $A = \{ 0, 1, 4, 9, 16 \}$ . Evidentemente, podemos calcular  $A$  para qualquer  $x$  real maior ou igual a zero.

**Definição 5.2.1.** Sejam dois conjuntos  $X = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n \}$  e  $Y = \{ y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n \}$ . Seja  $f$  uma regra matemática que associa os elementos de  $X$  e  $Y$ , formando um conjunto de pares ordenados  $(x_i, y_i)$  com  $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ .  $Y = f(x_i)$  é uma função de  $X$ , se para qualquer  $x_i$ ,  $f$  associa um, e somente um valor de  $y_i$ .

Nos pares ordenados  $(x, y)$ , os elementos do conjunto  $X$  são chamados de *abscissas* e os do conjunto  $Y$  de *ordenadas*.

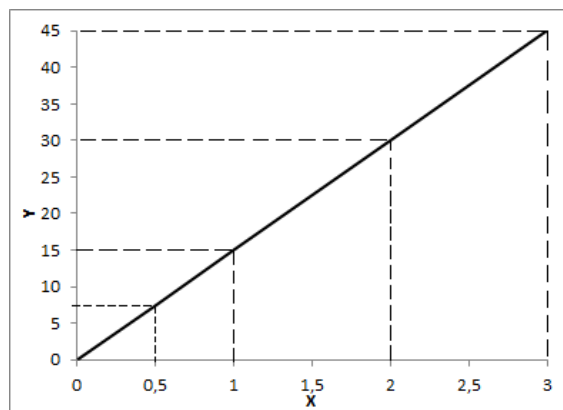


As expressões dos Exemplos 2.1 e 2.2 são funções de acordo com a Def. 2.1, pois para cada valor de  $x$ , existe um e somente um  $y$ .

**Exemplo 5.2.3.** Represente a função do Exemplo 2.1 em um gráfico cartesiano.

**Solução:** Dispondo alguns valores de  $x$  e  $y$  em uma tabela, temos:

X	Y
0	0
0,5	7,5
1	15
2	30
3	45



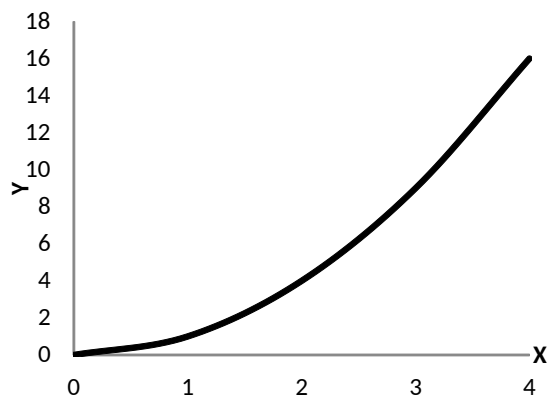
Os valores de  $x$  e  $y$  formam pares ordenados  $(x,y)$  que localizados no Plano Cartesiano, neste caso, formam uma **reta**. Como podemos usar qualquer  $x \in R$ ,  $x \geq 0$ , a reta será contínua.

Nesse exemplo, na medida que a massa  $x$  cresce, o custo  $y$  também cresce, proporcionalmente. Ou seja, para cada incremento de  $1\text{ kg}$ , o custo cresce  $15\text{ reais}$  ■

**Exemplo 5.2.4.** Represente a função do Exemplo 2.2 em um gráfico cartesiano.

**Solução:** Dispondo alguns valores de  $x$  e  $A$  em uma tabela, temos:

X	A
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16



Os valores de  $x$  e  $A$  formam pares ordenados  $(x,y)$  que localizados no Plano Cartesiano, neste caso, formam uma **curva**. Como podemos usar qualquer  $x \in R$ ,  $x \geq 0$ , a curva será contínua.

Nesse exemplo, na medida que o lado  $x$  cresce, a área  $A$  também cresce, porém diferentemente do Exemplo 1, que tinha um crescimento constante. No primeiro incremento, a área cresceu  $1\text{ cm}^2$ , no segundo  $3\text{ cm}^2$ , no terceiro  $5\text{ cm}^2$  ■

**Exemplo 5.2.5.** Verifique se  $-3x + y^2 = 1$  é uma função, de acordo com a Def. 2.1. Considere  $x \in R$ .

**Solução:** A equação dada está na forma implícita ( $x$  e  $y$  estão no mesmo lado da igualdade). Para explicitar  $y$ , adicionamos  $(+3x)$  em ambos os lados da equação, obtendo:

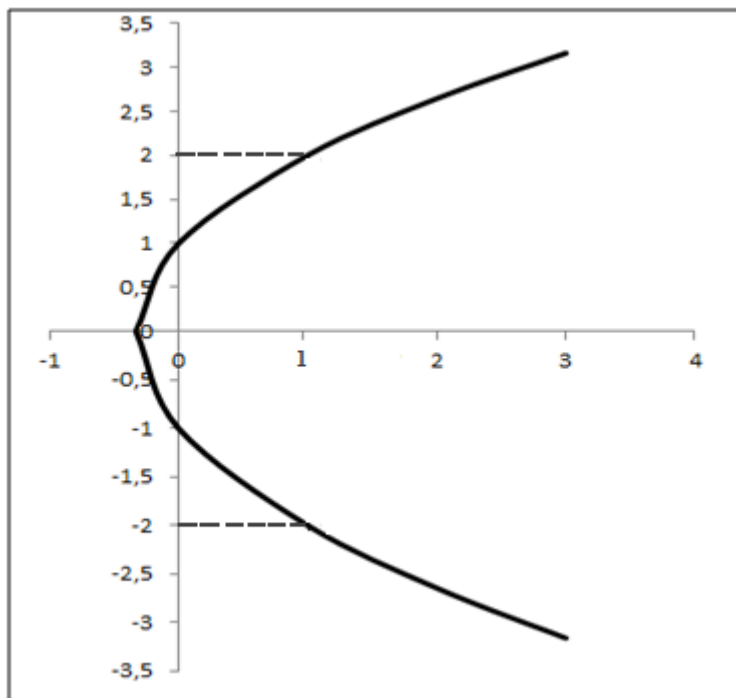
$$y^2 = 1 + 3x.$$

Aplicando raiz quadrada em ambos os lados da equação, temos:

$$y = \pm\sqrt{1+3x}.$$

Esta equação só terá valores reais para  $y$ , se o radicando for um número nulo ou positivo. Então,

$$1+3x \geq 0 \text{ ou } x \geq -1/3.$$



Observemos que para qualquer valor de  $x > -1/3$ , teremos dois valores de  $y$ . Por exemplo:

Se  $x = 1$ , teremos  $y = \pm 2$  ;

Se  $x = 2$ , teremos  $y = \pm\sqrt{7}$  ;

Se  $x = 5$ , teremos  $y = \pm 4$  e assim por diante.

Portanto, a equação dada não é uma função ■

#### Notação:

Usa-se a notação  $y = f(x)$  para referir-se à função  $f$  de  $x$ , onde  $x$  é a variável independente e  $y = f(x)$  é a variável dependente de  $x$ .

Por exemplo:  $f(x) = x^2$  ou  $f(x) = 3x - 2$ .

**Definição 5.2.2.** O *domínio* de uma função  $y = f(x)$  é o conjunto dos valores de  $x$  nos quais a função é definida e denota-se :  $D f(x)$ .

**Definição 5.2.3.** A *imagem* de uma função  $y = f(x)$  é o conjunto dos valores de  $y$  para os quais existem valores de  $x$  correspondentes e denota-se :  $I_m f(x)$ .

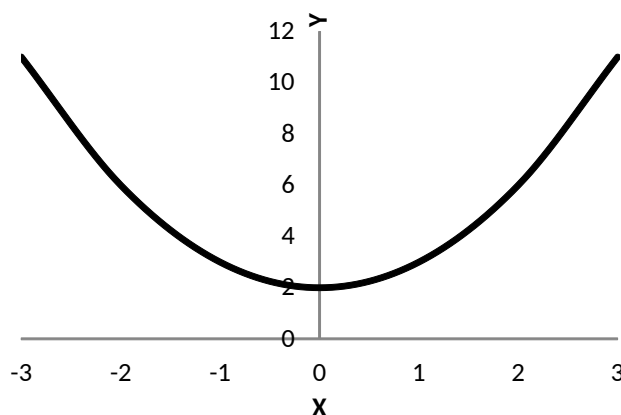
**Exemplo 5.2.6.** Determine o domínio e a imagem da função  $f(x) = x^2 + 2$ .

**Solução:** Observemos que qualquer valor de  $x \in \mathbf{R}$  gera um valor de  $f(x)$ . Então,

$$Df(x) = \{ x \in \mathbf{R} \}.$$

Analisando a expressão da função, observamos que ela tem a soma de dois termos positivos (lembramos que para  $x^2$ , teremos sempre  $x^2 > 0$ ). Portanto, o menor valor possível de  $x^2 + 2$  será 2, quando  $x = 0$ . Então,

$$I_m f(x) = \{ y \in \mathbf{R}, y \geq 2 \}.$$



No gráfico de  $f(x)$ , traçando *retas verticais*, para qualquer  $x$  teremos sempre um  $y$  correspondente, o que indica que  $f(x)$  é uma função.

A imagem de  $f(x)$  pode ser obtida traçando retas horizontais. Os valores de  $y$ , pelos quais estas retas passarão, pertencem a imagem de  $f(x)$ . Assim, a imagem desta função será o conjunto de números reais  $y$  tal que  $y \geq 2$  ■

## EXERCÍCIOS 5.2

**5.2.1** Localize os pontos no plano cartesiano:

a)  $A = (2, 3)$

c)  $C = (-3, 3)$

e)  $E = (2, 0)$

b)  $B = (-2, -3)$

d)  $D = (0, 3)$

f)  $F = (0, -3)$

**5.2.2** Qual é o valor de  $x$  (abscissa) dos pontos sobre o eixo Y?

**5.2.3** Qual é o valor de  $y$  (ordenada) dos pontos sobre o eixo X ?

**5.2.4** Dada a função  $f(x) = 3x - 1$ , calcule:

a)  $f(0)$

c)  $f(c+1)$

e)  $f(1/3)$

b)  $f(-2)$

d)  $f(1)$

f)  $f(3-c)$

**5.2.5** Dada a função  $f(x) = -2x + 1/2$ , calcule  $x$  sendo:

a)  $f(x) = 1/2$

c)  $f(x) = -3/4$

b)  $f(x) = 1$

d)  $f(x) = 4$

5.2.6 Faça o gráfico das funções com variáveis reais:

a)  $y = 3x$

c)  $y = x^2$

e)  $g(x) = \frac{1}{x}$

b)  $f(x) = -3x + 1$

d)  $y = x^2 + 1$

f)  $y = \frac{1}{x-1}$

5.2.7 Faça o gráfico dos dados das tabelas:

a)

X	Y
-3	-6
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4
3	6

b)

X	Y
-3	-5
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5
3	7

c)

X	Y
-3	12
-2	9
-1	3
0	1
1	3
2	9
3	12

d)

X	Y
-3	5
-2	2
-1	1
0	2
1	5
2	9
3	14

5.2.8 Todas as funções do Ex.6 são funções, de acordo com a Def. 2.1?

5.2.9 A expressão  $y = \pm\sqrt{x}$  é uma função, de acordo com a Def. 2.1?

5.2.10 Faça o gráfico das funções usando uma tabela eletrônica ou um editor de gráficos computacional.

a)  $y = -2x + 5$

c)  $y = x^4 - x^2 + 4$

e)  $y = \frac{x+1}{x-1}$

b)  $y = x^2 - 2x + 1$

d)  $y = x^3 + 1$

f)  $y^2 + x^2 = 4$

5.2.11 Todas as expressões do Ex. 10 são funções, de acordo com a Def. 2.1?

5.2.12 Determine o domínio e a imagem das funções:

a)  $y = x$

c)  $y = 4 - x^2$

e)  $g(x) = -\sqrt{x}$

b)  $f(x) = \frac{1}{x}$

d)  $f(x) = \sqrt{x}$

f)  $q(x) = \sqrt{x-4}$

5.2.13 Faça os gráficos das funções do Ex. 12 usando uma ferramenta computacional.

## 5.3 Função do 1º grau

Os exercícios da Seção 2 mostram que existem funções cujo gráfico é uma reta e outras apresentam curvas de diferentes formatos. Nessa seção, serão estudadas as funções cujos gráficos são retas.

Uma das características das retas é a *taxa de variação (crescimento ou decrescimento) constante*. Isto significa que, para o mesmo incremento ( $\Delta x$ ) em qualquer  $x$ , o incremento ( $\Delta y$ ) em  $y$ , será o mesmo.

**Exemplo 5.3.1.** Dada a reta  $f(x) = x + 1$  use o incremento  $\Delta x = 1$  em

(i)  $x_0 = 0$ ; (ii)  $x_1 = 2$ ; (iii)  $x_2 = 5$  e calcule os respectivos incrementos em  $y$ .

**Solução:** i) Usando o incremento em  $x_0 = 0$ :

$$x_0 + \Delta x = 0 + 1 = 1.$$

Calculando  $f(x_0) = f(0) = 0 + 1 = 1$ . Calculando a  $f(x_0 + \Delta x) = f(1) = 1 + 1 = 2$ .

O incremento em  $y$  será:  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2 - 1 = 1$ .

ii) Usando o incremento em  $x_1 = 2$ :

$$x_1 + \Delta x = 2 + 1 = 3.$$

Calculando  $f(x_1) = f(2) = 2 + 1 = 3$ . Calculando a  $f(x_1 + \Delta x) = f(3) = 3 + 1 = 4$ .

O incremento em  $y$  será:  $\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) = 4 - 3 = 1$ .

iii) Usando o incremento em  $x_2 = 5$

$$x_2 + \Delta x = 5 + 1 = 6.$$

Calculando  $f(x_2) = f(5) = 5 + 1 = 6$ . Calculando a  $f(x_2 + \Delta x) = f(6) = 6 + 1 = 7$ .

O incremento em  $y$  será:  $\Delta y = f(x_2 + \Delta x) - f(x_2) = 7 - 6 = 1$ .

Como podemos observar, o incremento  $\Delta y$  foi o mesmo, nos três casos analisados:  $\Delta y = 1$

Faça um gráfico mostrando os incrementos  $\Delta x$  e nos valores de  $x$  dados. ■

**Definição 5.3.1.** Uma função polinomial do primeiro grau tem a forma

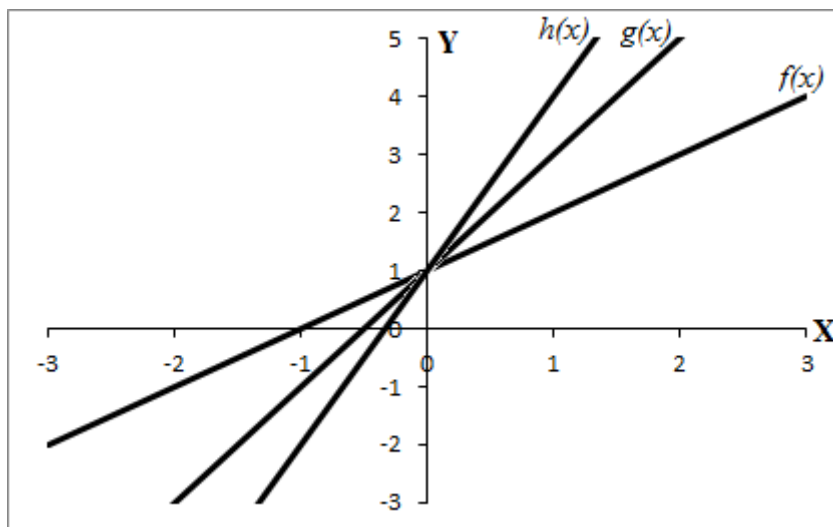
$$y = f(x) = ax + b \quad (3.1)$$

onde  $a$  e  $b$  são números reais,  $x$  e  $y$  são variáveis reais.

O coeficiente  $a$  é chamado **coeficiente angular (inclinação)** e o  $b$  **coeficiente linear**.

**Exemplo 5.3.2.** Faça os gráficos das funções: (i)  $f(x) = x + 1$ ; (ii)  $g(x) = 2x + 1$ ; (iii)  $h(x) = 3x + 1$ .

**Solução:** Elaborando tabelas para as três funções e localizando os pares ordenados no Plano Cartesiano, obtemos três retas.

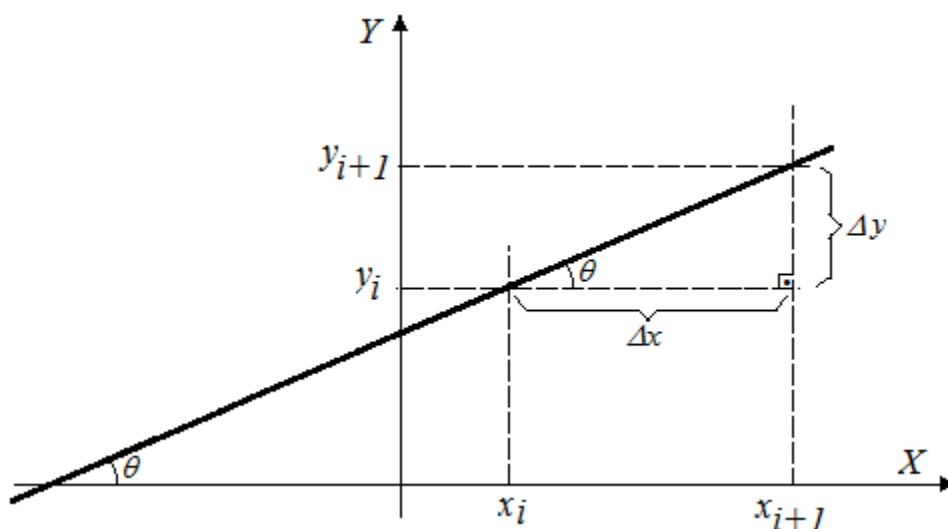


Observemos que as inclinações são diferentes, sendo que a diferença entre as três funções é o *coeficiente angular*. Observemos que quanto maior o  $a$  mais inclinada está a reta ■

O coeficiente angular é a *inclinação (ou taxa de crescimento)* da reta, dado pela expressão:

$$a = \operatorname{tg}(\theta) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \quad (3.2)$$

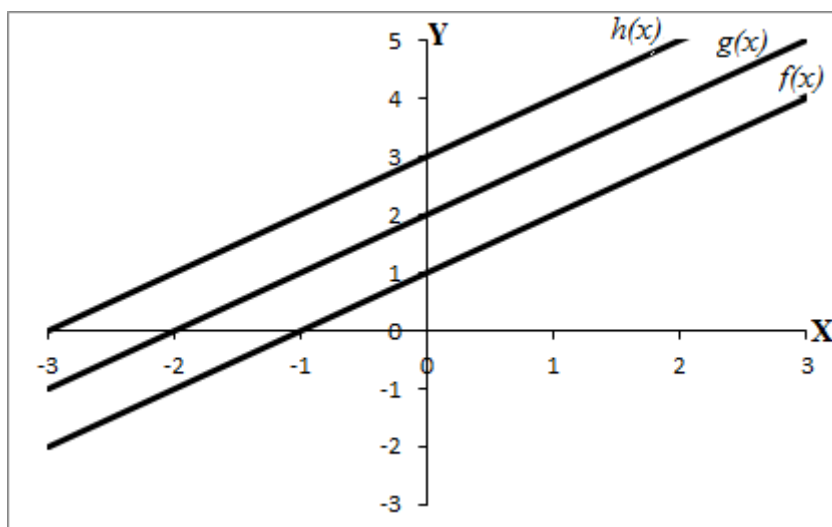
Onde  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$  refere-se aos pontos de  $f(x)$  e é o ângulo que a reta faz com o eixo  $X$ .



**Exemplo 5.3.3.** Faça os gráficos das funções: (i)  $f(x) = x + 1$ ; (ii)  $g(x) = x + 2$ ; (iii)  $h(x) = x + 3$ .



**Solução:** Elaborando tabelas para as três funções e localizando os pares ordenados no Plano Cartesiano, obtemos três retas.



Observemos que todas têm a mesma inclinação, pois os coeficientes angulares são iguais:  $a = 1$ .

Observemos também que quando calculamos as funções para  $x = 0$  (pontos sobre o eixo  $Y$ ) o valor obtido é o coeficiente linear:  $f(0) = 1$ ;  $g(0) = 2$  e  $h(0) = 3$ . Podemos concluir que o *coeficiente linear* é o valor do  $y$ , nos pontos onde a reta corta o eixo  $Y$  ■

O *coeficiente linear* é o valor do  $y$  (ordenada), no ponto  $(0, b)$  onde a reta corta o eixo  $Y$

**Exemplo 5.3.4.** Uma reta passa pelos pontos:  $P_1 = (1, 2)$  e  $P_2 = (3, 5)$ :

i) Calcule o coeficiente angular

ii) Calcule o coeficiente linear.

**Solução:** (i) Usando a Eq. (3.2) temos:

$$a = \frac{5 - 2}{3 - 1} = \frac{3}{2}$$

(ii) Substituindo o valor de  $a$  na Eq. (3.2), temos:

$$y = \frac{3}{2}x + b \quad (3.3)$$

Como a reta passa pelos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , as coordenadas desses pontos devem satisfazer a Eq. (3.3). Usando as coordenadas de  $P_1 = (1, 2)$  na Eq. (3.3), temos:

$$2 = \frac{3}{2} \cdot 1 + b. \text{ Resolvendo para } b, \text{ temos:}$$

$$b = \frac{1}{2}$$

Observemos que se fosse utilizado o ponto  $P_2 = (3, 5)$ , obteríamos o mesmo valor de  $b$  ■

### 5.3.1 Crescimento e decrescimento das funções do 1º grau

O quadro abaixo define o que são funções crescentes e decrescentes:

Seja  $y = f(x)$  uma função definida no intervalo  $(x_0, x_n)$ .

Se  $f(x_{i+1}) > f(x_i)$  para qualquer  $x_i \in (x_0, x_n)$  então  $f$  é *crescente* em  $(x_0, x_n)$ .

Se  $f(x_{i+1}) < f(x_i)$  para qualquer  $x_i \in (x_0, x_n)$  então  $f$  é *decrescente* em  $(a, b)$ .

O quadro abaixo apresenta a relação entre coeficiente angular e crescimento da função do 1º grau:

Se o *coeficiente angular* é *positivo* a reta é *crescente*.

Se o *coeficiente angular* é *negativo* a reta é *decrescente*.

**Exemplo 5.3.5.** Verifique se as retas são crescentes ou decrescentes.

i)  $f(x) = 3x - 5$

ii)  $f(x) = -x + 2$

iii)  $4 = 3x - 2y$

**Solução:**

(i) O coeficiente angular da reta é  $+3$ . Portanto a reta é crescente para qualquer  $x \in \mathbf{R}$ .

(ii) O coeficiente angular da reta é  $-1$ . Portanto a reta é decrescente para qualquer  $x \in \mathbf{R}$ .

(iii) A equação está na forma implícita. Adicionando  $(+2y)$  e  $(-4)$  em ambos os lados, obtemos:

$$2y = 3x - 4. \text{ Dividindo a equação por 2, obtemos:}$$

$$y = \frac{3}{2}x - 2.$$

O coeficiente angular da reta é  $+3/2$ . Portanto a reta é crescente para qualquer  $x \in \mathbf{R}$  ■

### 5.3.2 Domínio e imagem da função de 1º grau

As funções de 1º grau têm a expressão de um polinômio, cujas operações são possíveis para qualquer  $x$  real. Assim, o domínio destas funções é:

$$Df(x) = \{ x \in \mathbf{R} \}.$$

Como as funções de 1º grau são estritamente crescentes ou decrescentes e não tem descontinuidades, sua imagem é

$$Imf(x) = \{ y \in \mathbf{R} \}.$$

### 5.3.3 Raiz da função de 1º grau

**Definição 5.3.2.** A raiz de uma função é o valor do  $x$ , do ponto onde a função intercepta o eixo  $X$ .

A raiz das funções de 1º grau é determinada fazendo  $y=f(x)=0$  na Eq. (3.1), de acordo com a Def. 3.2, pois os pontos sobre o eixo  $X$ , tem  $y = 0$ . Assim,

$0 = ax + b$ . Resolvendo para  $x$ , temos:

$$x = -\frac{b}{a}$$

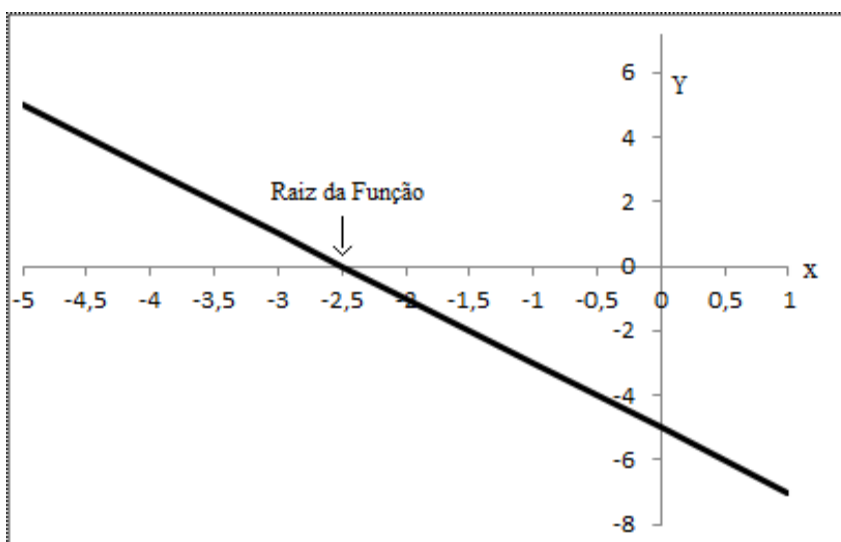
(raiz da função de 1º grau)

**Exemplo 5.3.6.** Determine a raiz da função  $5 = -2x - y$  e mostre-a no gráfico da função.

**Solução:** Mesmo com a equação na forma implícita, colocamos a exigência da Def. 3.1  $y = 0$  na função dada e obtemos:

$$5 = -2x - 0. \text{ Resolvendo para } x, \text{ temos } x = -5/2,$$

que é a raiz da função.



A Fig. 3.5 mostra a raiz da função no ponto  $(-5/2, 0)$  de interseção do eixo  $X$  ■

### 5.3.4 Sinal da função de 1º grau

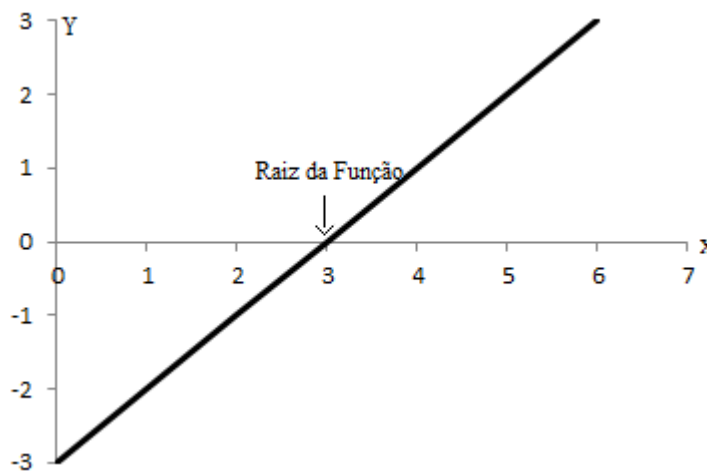
Lembremos que os valores de  $y$  são os valores da função. Portanto, o sinal da função em algum ponto é o sinal das ordenadas, nos pontos da função.

**Exemplo 5.3.7.** Dada a função  $y = f(x) = x - 3$ , determine o sinal da função para os seguintes valores de  $x$ :  $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

**Solução:** Substituindo os valores de  $x$  dados em  $f(x)$ , obtemos os respectivos valores de  $y$ , apresentados na tabela.

X	-1	0	1	2	3	4	5
Y	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2
Sinal de Y	-	-	-	-	Sem sinal	+	+

Observemos que o sinal dos valores da função ( $y$ ) são negativos para  $x < 3$  e positivos para  $x > 3$ . A mudança do sinal ocorreu em  $x = 3$ , que é a raiz da função.



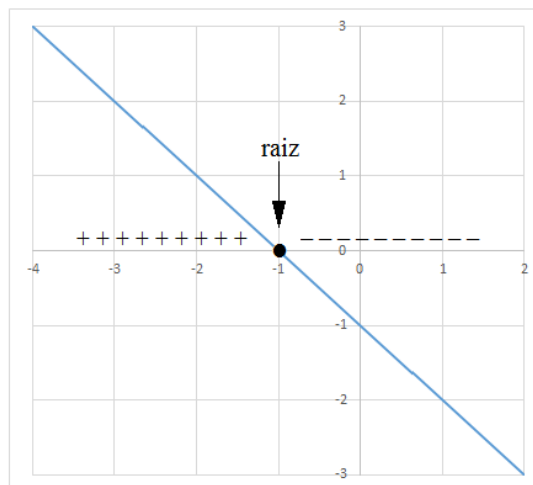
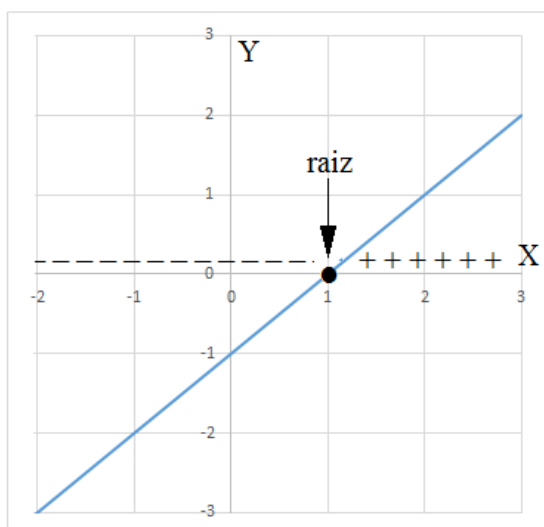
A visualização do sinal é evidente no gráfico, assim como a mudança do sinal a partir da raiz da função ■

**Exemplo 5.3.8.** Determine o sinal das funções: (i)  $f(x) = x - 1$  e (ii)  $g(x) = -x - 1$ .

**Solução:** No Exemplo 3.7 observamos que o sinal da função muda quando a função intercepta o eixo X (raiz da função). Então, vamos calcular as raízes das funções e ver a inclinação das mesmas.

(i) Raiz de  $f(x)$ :  $x = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{1} = 1$ .

Como  $f(x)$  é inclinada para a direita (crescente, pois  $a = 1 > 0$ ),  $f(x)$  é negativa se  $x < 1$  e positiva se  $x > 1$ .



(ii) Raiz de  $g(x) : x = -\frac{a}{b} = -\frac{-1}{-1} = -1$ .

Como  $f(x)$  é inclinada para a esquerda (decrescente, pois  $a = -1 < 0$ ),  $f(x)$  é positiva se  $x < -1$  e negativa se  $x > -1$  ■

#### SINAL DA FUNÇÃO DO 1º GRAU

Seja  $y = f(x) = ax + b$ , cuja raiz é  $x_r = -\frac{b}{a}$ .

Se  $a > 0$  então:  $f(x)$  é **negativa** para  $x < x_r$  e  $f(x)$  é **positiva** para  $x > x_r$ .

Se  $a < 0$  então:  $f(x)$  é **positiva** para  $x < x_r$  e  $f(x)$  é **negativa** para  $x > x_r$ .

### 5.3.5 Tipos especiais de retas

#### Função constante

As *retas horizontais* são chamadas funções constantes, pois não crescem nem decrescem. Seu coeficiente angular, pela Eq. (3.2) será nulo, portanto sua equação será:

$$y = b, \text{ para } b \in \mathbf{R}. \quad (3.4)$$

Observemos que para  $b = 0$ , temos  $y = 0$ , que é o próprio eixo X.

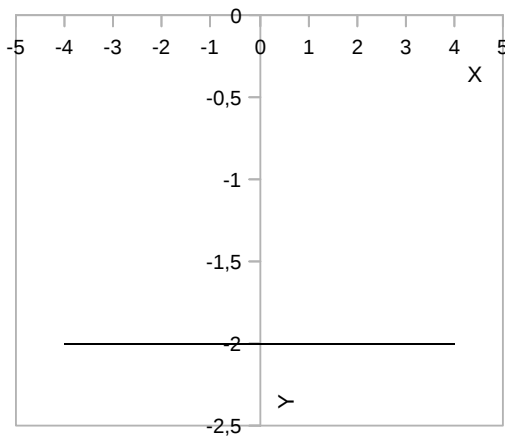
Se  $f(x) = c$  o  $Df(x) = \{ x \in \mathbf{R} \}$  e a imagem é  $I_m f(x) = \{ y \in \mathbf{R} / y = b \}$ .

**Exemplo 5.3.9.** Faça o gráfico das funções:

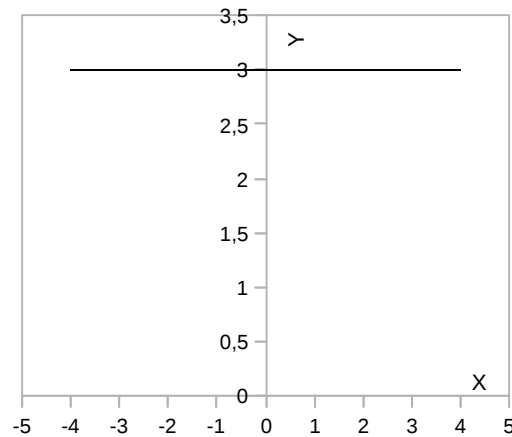
i)  $y = 3$

(ii)  $y = -2$

**Solução:**



(i)



(ii)

Todas as funções dadas são funções constantes (retas paralelas a  $X$ , ou retas horizontais). Mesmo variando os valores de  $x$ , os valores de  $y$  permanecem constantes ■

### Retas verticais

Estas retas, de acordo com a definição de função (Def. 2.1) NÃO SÃO FUNÇÕES, pois para o mesmo  $x$ , correspondem vários valores de  $y$ . Tão pouco, são funções do 1º grau. Observemos que, não existe coeficiente angular, porque a Eq. (3.2) teria denominador nulo. Assim, a expressão para as retas verticais não deriva da forma da Eq.(3.1).

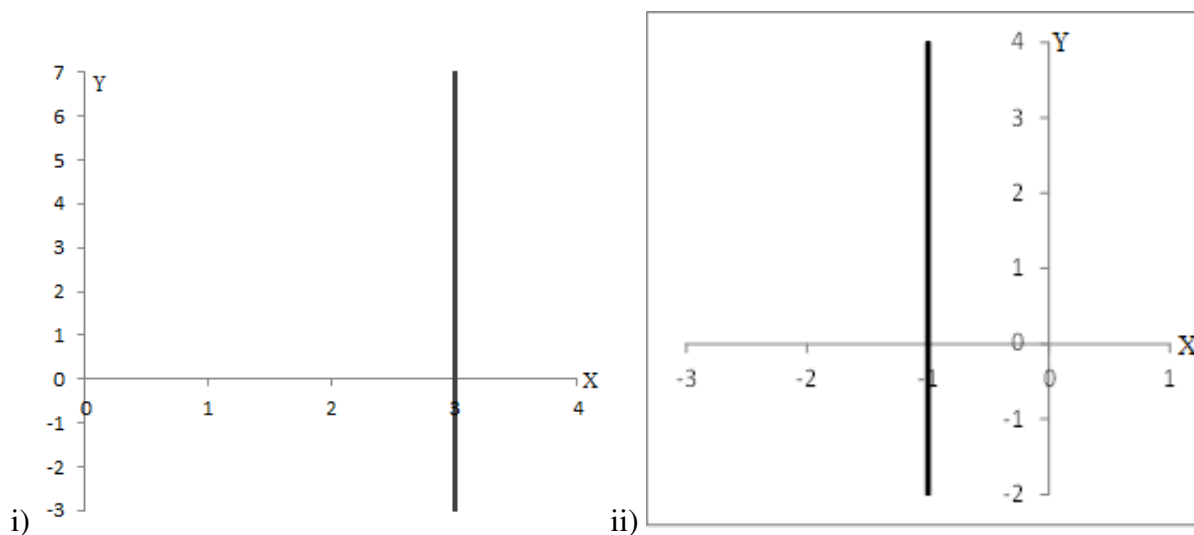
A expressão para as retas verticais é construída com base no fato da abscissa ser constante para qualquer valor da ordenada,  $y$ . Então:

$$x = c, \text{ onde } c \text{ é uma constante.} \quad (3.5)$$

**Exemplo 5.3.10.** Faça o gráfico das retas:

i)  $x = 3$       (ii)  $x = -1$

**Solução:**



### Função identidade

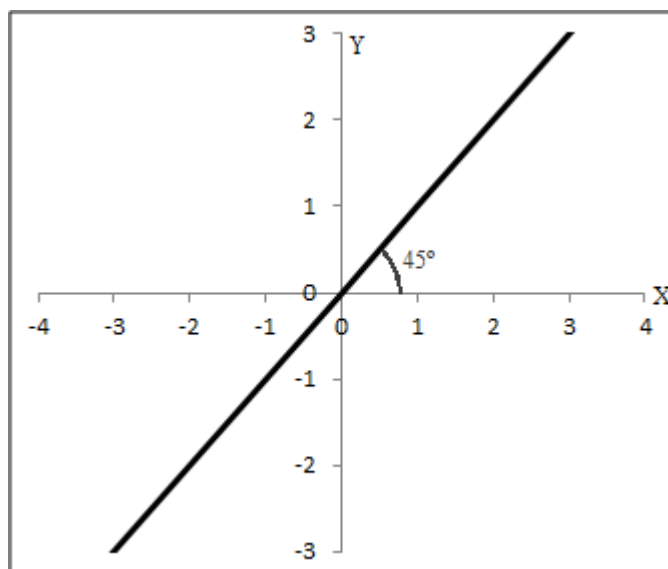
Esta função tem esse nome porque os valores de  $x$  e  $y$  são iguais. Sua expressão é:

$$y = x. \quad (3.6)$$

Se  $f(x) = x$  o domínio  $Df(x) = \{ x \in \mathbf{R} \}$  e a imagem é  $I_m f(x) = \{ y \in \mathbf{R} \}$  ■

**Exemplo 5.3.11.** Faça o gráfico da função  $y = x$ .

**Solução:** A função identidade divide na metade o 1º e o 3º quadrantes do Plano Cartesiano. O ângulo que esta reta faz com o eixo  $X$  é  $45^\circ$  ■



### Função linear

As funções do 1º grau, com  $a \neq 0$  e  $b = 0$  são chamadas funções lineares e têm a forma:

$$y = ax. \quad (3.7)$$

Se  $f(x) = ax$  o  $Df(x) = \{ x \in \mathbf{R} \}$  e a imagem é  $I_m f(x) = \{ y \in \mathbf{R} \}$ .

### Função afim

As funções do 1º grau, com  $a \neq 0$  são chamadas **função afim** e têm a forma:

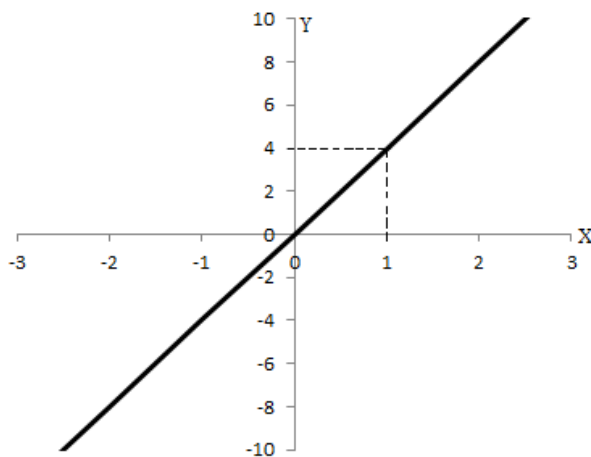
$$y = ax + b. \quad (3.8)$$

Se  $f(x) = ax + b$  o  $Df(x) = \{ x \in \mathbf{R} \}$  e a imagem é  $I_m f(x) = \{ y \in \mathbf{R} \}$ .

Observemos que as funções lineares são também funções afim.

**Exemplo 5.3.12.** Faça o gráfico da função  $y = 4x$ .

**Solução:** Como as funções lineares têm  $b = 0$ , então interceptam os eixos na origem  $(0,0)$ . O coeficiente angular igual a  $+4$  indica que a função é crescente (inclinada para a direita), com inclinação  $+4$ , portanto passará pelo ponto  $(1,4)$ . Colocando estes dados no Plano Cartesiano, obtemos o gráfico indicado na Fig. 3.14.



### 5.3.6 Retas paralelas e perpendiculares

Sejam as retas  $(r) : y = mx + b$  e  $(s) : y = px + c$ .

Se  $r$  é **paralela** a  $s$  então  $m = p$ .

Se  $r$  é **perpendicular** a  $s$  então  $p = -\frac{1}{m}$ .



**EXERCÍCIOS 5.3**

**5.3.1** Verifique se a dependência entre as grandezas mencionadas é de 1º grau:

- Considere que a distribuição de adubo em uma lavoura é homogênea. A quantidade de adubo distribuída é proporcional a área de lavoura?
- A circunferência de um círculo é proporcional ao seu raio? E a área?
- O lixo produzido por uma cidade é proporcional ao número de habitantes?
- Uma caixa d'água é enchida por uma torneira, sempre com a mesma abertura. O volume de água da caixa é proporcional ao tempo?
- No planejamento de uma festa, a quantidade de comida é proporcional à quantidade de pessoas?

**5.3.2** A tabela abaixo apresenta a deformação  $y$  (cm) de uma mola que está sendo distendida por massas  $m$ , (g) penduradas. Verifique se  $m$  é proporcional a  $y$ .

$y$ , (cm)	0	3	6	9	12
$m$ (g)	0	50	100	150	200

**5.3.3** Considerando que o custo de uma corrida de taxi ( $y$ ) depende de um valor fixo ( $b$ ), referente à hora do dia, do preço por quilômetro percorrido ( $p$ ) e da quilometragem percorrida ( $x$ ). Fazendo  $b = 5,00$  reais e  $p = 1,5$  reais, determine uma função para o custo  $y(x)$  de uma corrida.

**5.3.4** Determine uma função que relacione o custo dos azulejos para revestir uma parede com  $x$   $m^2$ , sendo que o preço de 1  $m^2$  de azulejo é  $p$ .

**5.3.5** O custo ( $C$ ) da carne usada para um churrasco depende do preço da carne ( $p$ ), da quantidade de carne comprada ( $x$ ) e da gasolina gasta para ir ao supermercado ( $b$ ). Faça uma função  $C(x)$ .

**5.3.6** O custo ( $C$ ) para produzir uma certa mercadoria é a soma dos custos fixos ( $CF$ ) e dos variáveis ( $a$ ), aqueles que dependem da quantidade produzida ( $x$ ). Faça uma função  $C(x)$ .

**5.3.7** Determine os coeficientes angular e linear das retas que passam pelos pontos dados e construa a função do 1º grau:

- $P_1 = (-1,0)$  e  $P_2 = (3,2)$
- $P_1 = (0,3)$  e  $P_2 = (-3,0)$
- $P_1 = (2,-2)$  e  $P_2 = (-2,2)$
- $P_1 = (3,3)$  e  $P_2 = (5,3)$

**5.3.8** Para produzir 5 peças de uma certa mercadoria foram gastos R\$ 15,00. Para produzir 12 peças foram gastos R\$ 35,00. Supondo que os custos são proporcionais ao número de peças:

- Determine uma função de 1º grau que relacione custos e número de peças
- Determine o custo para 30 peças.

**5.3.9** Determine o coeficiente angular das funções e verifique se são crescentes ou decrescentes:

a)  $3x + y = 3$

c)  $\frac{3}{2}y + x = \frac{2}{3}$

b)  $\frac{1}{2}x + y = 4$

d)  $\frac{x-y}{2} = 3$

**5.3.10** Dados os pontos da tabela, verifique se eles estão alinhados. Se estiverem, determine a equação da função linear e faça o gráfico.

**5.3.11** Considere um quadrado cujos vértices estão nos pontos  $V_1 = (0,0)$ ;  $V_2 = (0,4)$ ;  $V_3 = (4,4)$  e  $V_4 = (4,0)$ . Determine equações para as retas correspondentes a cada lado do quadrado.

**5.3.12** Considere um triângulo cujos vértices estão nos pontos  $V_1=(1,1)$ ;  $V_2=(4,1)$  e  $V_3=(1,4)$ . Determine equações para as retas correspondentes a cada lado do triângulo.

**5.3.13** Dadas as equações de retas, faça o gráfico usando somente as informações fornecidas pelos coeficientes angular e linear (não use tabela):

a)  $y = -x + 1$

d)  $y = 2x - 3$

b)  $y = 4x$

e)  $y = 1$

c)  $y = -x$

f)  $x = 1$

**5.3.14** Construa a equação e faça um esboço do gráfico das retas  $y = ax + b$ , com as informações dadas:

a)  $a = 2$  e  $b = 1$

d) é constante e passa em  $(2,3)$

b)  $a = -1$  e passa em  $(1,0)$

e)  $\theta = 45$  e  $b = -1$

c) passa em  $(0,0)$  e tem inclinação  $-2$

f)  $\theta = 120$  e passa em  $(0,3)$

**5.3.15** a) Um motoqueiro cobra R\$ 3,00 por viagem, para entregar até cinco pizzas. Sabendo que o custo de uma pizza é R\$ 40,00, faça uma função que dê o custo de 1 a 5 pizzas. Faça o gráfico da função.

b) Refaça a função para o custo de uma pizza é R\$ 50,00. Faça o gráfico e compare com a reta da letra (a).

**5.3.16** Analise os coeficientes angular e linear das retas. Determine se as retas crescem ou decrescem e o ponto de intersecção com o eixo Y. Faça um esboço do gráfico com base nessa análise.

a)  $y = 3x + 5$

c)  $y = 2x - 1, 3$

e)  $y = -1, 3x + 2$

b)  $y = -2,3x - 1$

d)  $y = -5,2x + 2,3$

f)  $y = -4, 1x - 5$

**5.3.17** Nas retas que passam pelos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , determine se a reta cresce ou decresce e o ponto em que a reta intercepta o eixo Y:

a)  $P_1=(1,1)$  e  $P_2=(2,4)$

c)  $P_1=(2,8)$  e  $P_2=(7,1)$

b)  $P_1=(1,6)$  e  $P_2=(5,3)$

d)  $P_1=(6,1)$  e  $P_2=(1,3)$

**5.3.18** A fabricação de um produto implica em custos de materiais, energia, mão de obra, encargos sociais e impostos comerciais. Para uma determinada quantidade do produto, vamos considerar os custos de mão de obra como custo fixo, no valor de R\$ 20,00. Considerando que os custos de materiais, energia e impostos são de R\$ 150,00, para produzir uma unidade do produto:

- Construa uma tabela relacionando o número de unidades do produto e o custo total.
- Faça um gráfico com os dados da tabela.
- Determine uma equação para relacionar o número de unidades do produto e o custo total.
- Determine o coeficiente angular e o linear. Qual é o significado destes coeficientes no problema?

**5.3.19** Uma agência de pesquisa estatística encontrou os percentuais de voto (V) mostrados na tabela abaixo para os candidatos A e B.

Data	Tempo(dias)	V (%)	Candidato	Candidato
			(A)	(B)
01/07	1		35	30
01/08	32		37	32
01/09	63		46	40

- Faça um gráfico do percentual de voto (V) pelo tempo (t) para os dois candidatos, considerando o período 1/07 a 1/09.
- Considere o percentual de voto uma função linear em cada mês e determine a função da reta do mês de julho. Com esta função, calcule o percentual para o dia 20 de julho.
- Se a variável V mantiver em setembro a mesma tendência de agosto, para os dois candidatos, quais serão os percentuais de voto no dia 16 de setembro?

## 5.4 Aplicações de funções do 1º grau

### 5.4.1 Produção de bens: custo fixo + custo variável

A produção de bens, seja na indústria ou na agricultura, apresenta custos variáveis e fixos. Os primeiros dependem da quantidade de bens produzidos e os últimos não dependem. Por exemplo, na produção de vinho, o custo das garrafas, matéria prima (uva), impostos, energia, água e produtos de limpeza são **variáveis**, ou seja, dependem da quantidade produzida. Quanto mais litros de vinhos forem produzidos, estes custos aumentarão proporcionalmente. Enquanto que o custo do aluguel, mão-de-obra, o equipamento (pipas, bomba, baldes, máquina de colocar rolhas,...) são **constantes** até uma certa quantidade de litros produzidos.

Um modelo linear pode ser usado para modelar a produção de bens:

$$C(x) = p x + CF \quad (4.1)$$

Onde  $C(x)$  é o custo total (R\$),  $x$  é a quantidade produzida (*unidades*),  $p$  é o custo variável por unidade produzida (R\$/*unidade*) e  $CF$  é o custo fixo (R\$).

Observemos que a Eq. 4.1 é uma função afim, onde  $p$  e  $CF$  são os coeficientes angular e linear, respectivamente.

A Receita (ou ganhos com a venda do bem produzido) é proporcional à quantidade produzida e vendida. Assim, a função receita é uma função linear:

$$R(x) = PV x \quad (4.2)$$

Onde  $R(x)$  é a receita (R\$) e  $PV$  é o preço de venda de cada bem (R\$/*unidade*).

Para determinar o Lucro da atividade, fazemos a diferença entre a receita e o custo de produção.

$$L(x) = R(x) - C(x) = PVx - (p x + CF) \text{ ou}$$

$$L(x) = (PV - p)x - CF. \quad (4.3)$$

Observemos que a Eq. 4.3 também é uma função afim.

Considere que para produzir um litro de vinho o custo variável por unidade é  $p = \text{R\$ } 4,50$ , o custo fixo é  $CF = \text{R\$ } 2.000,00$  e o preço de venda é  $PV = \text{R\$ } 10,00$ .

1. Substitua os valores de  $p$ ,  $CF$  e  $PV$  nas Eqs. 4.1, 4.2 e 4.3 e faça os gráficos das funções  $C$ ,  $R$  e  $L$ , no mesmo plano cartesiano.
2. Calcule quantos litros de vinho deverão ser produzidos para que a receita seja equivalente aos custos ■

## 5.4.2 Produção de Lixo

A Tabela abaixo apresenta dados sobre a produção de lixo doméstico em Chapecó em 2004, 2007 e 2012.

Tempo, $t$ (anos)	2004	2007	2012
População, $h$ (habitantes)	165.220	168.113	180.000
Resíduos domésticos, $R$ (kg/hab./dia)	0,405	0,630	0,855

Fonte: Abrelpe; MMA (Dados citados pelas alunas Ana C. Maccari e Cristiane L. da Silva no trabalho de Cálculo Numérico, Curso de Engenharia Ambiental, 2º/2014)

1. Verifique se a população cresce linearmente com o tempo.
2. Verifique se a produção de resíduos domésticos/habitante/dia cresce linearmente com o tempo.
3. Considerando que  $R(h)$  é linear entre 2007 e 2016, faça a previsão da  $R(2016)$  ■

### 5.4.3 Modelo Mola-massa

Um sistema mola-massa é ilustrado na figura abaixo uma mola é distendida por massas  $m$ , (g) que causam deformações  $y$  (cm). A posição  $y_0 = 0$  corresponde ao estado da mola sem massa. A cada massa  $m_i$  colocada corresponde uma posição  $y_i$  (deformação da mola), sendo  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ , o número de massas. Para o regime elástico (valores de  $m$ , para os quais a mola ainda volta na posição  $y_0$ ) as posições  $y$  são proporcionais às massas  $m$ . Considerando o conceito de força peso, que é a força com que a terra atrai as massas, temos

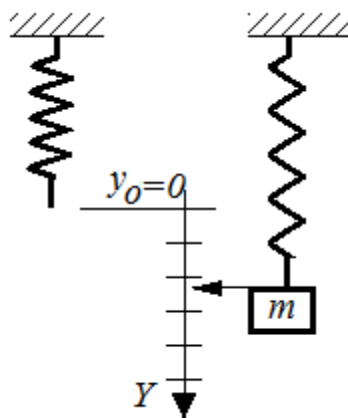
$$F = m \cdot g$$

Onde  $m$  é a massa (g)  $g$  a aceleração da gravidade ( $m/s^2$ ).

A relação entre  $F$  e  $y$  é uma função de 1º grau, conhecida como Lei de Hooke

$$F(y) = k y ,$$

onde  $k$  é uma constante característica da mola. Observemos que  $k$  é o coeficiente angular da função e neste caso, tem um significado físico: a “dureza” da mola.



1. Considere molas com  $k = 1, 2$  e  $3$ . Calcule as deformações  $y$  para as massas  $m = 0,50, 100, 150$  e  $200$  g. (considere  $g = 10 \text{ m/s}^2$ )
2. Faça um gráfico e compare as retas.
3. Qual é a mola mais “dura” ■

### 5.4.4 Locação de carros

A consulta a um site de locação de carros resultou nos dados da tabela abaixo.

Nº de diárias	Valor cobrado (R\$ )
1	83
2	166
3	249
4	332
5	415

1. Verifique se o valor cobrado ( $V$ ) é proporcional ao número de diárias ( $d$ ). Faça um modelo matemático que relacione  $V$  e  $d$ . Calcule  $V$  para um aluguel de sete dias.
2. Como ficaria este modelo se a locadora cobrasse uma taxa de lavagem de R\$ 25,00.
3. Outro sistema de aluguel considera uma taxa fixa de R\$ 40,00, mais R\$ 1,30 por quilômetro rodado. Faça um modelo matemático para este sistema de locação.
4. Considerando a locação por quilômetro rodado (letra (d)), se um locador pretende ficar 3 dias com o carro, quanto quilômetros ele teria que rodar para que o custo seja equivalente ao do modelo da letra (c) ?
5. Verifique qual é o sistema de locação mais vantajoso para uma semana de locação, com 400 km rodados.

### 5.4.5 Orçamento de Churrasco

Consideremos as seguintes hipóteses de consumo para um churrasco:

- 450 g de carne por pessoa,
- preço médio da carne:  $PM$ ,
- custo da salada: 20% do custo da carne.

O custo médio de carne e salada por pessoa ( $p$ ) pode ser calculado fazendo:

$$p = \text{custo da carne} + \text{custo salada}$$

$$p = 0,450 \cdot PM + 0,450 \cdot PM \cdot 0,2 = 1,2 \cdot 0,450 \cdot PM \text{ ou}$$

$$p = 0,54 PM$$

O custo de um churrasco ( $C$ ) para um grupo de pessoas depende do número de pessoas ( $x$ ), do custo da carne e salada por pessoa ( $p$ ) e da taxa de limpeza ( $b$ ) do local do churrasco.

$$C(x) = p x + b. \tag{4.4}$$

1. Qual é o custo de um churrasco para 10 pessoas, considerando o preço médio da carne  $PM = R\$ 18,00$ .
2. Que modificação na Eq. 4.4 deve ser implementada para incluir o custo da gasolina ( $g$ ) usada para buscar os mantimentos?
3. Que modificação na Eq. 4.4 deve ser implementada para incluir o custo da sobremesa ( $SM$ )?

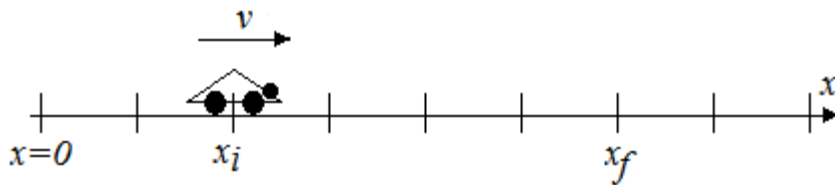
### 5.4.6 Deslocamento com velocidade constante

As funções de 1º grau são úteis para modelar vários problemas de Física, como por exemplo o deslocamento de um carro em uma estrada retilínea, com velocidade constante. A velocidade ( $v$ ) é definida como a razão entre a variação da distância percorrida ( $x$ ) pela variação de tempo ( $t$ ):

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (4.5)$$

Se  $x_f$  e  $x_i$  são as posições final e inicial do carro (ver Fig. 4.6.1), substituindo  $\Delta x = x_f - x_i$ , na Eq. (4.5), temos

$$x_f = v \cdot \Delta x + x_i \quad (4.6)$$



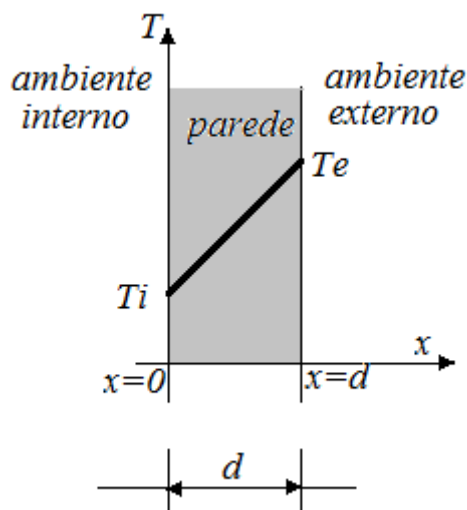
Se o tempo inicial for zero  $\Delta x = t$ , onde  $t$  é o tempo de deslocamento e  $x_f$  é a posição final, ou seja, uma função de  $x(t)$ . Então,

$$X(t) = v \cdot t + x_i \quad (4.7)$$

1. Determine a posição de um carro que partiu do quilômetro 10 com velocidade constante 80 km/h e andou durante 3 h.
2. Quanto tempo esse carro precisará rodar nessa velocidade para chegar no quilômetro 270 ?

### 5.4.7 Temperatura no interior de uma parede

Consideremos que a parede de uma casa está sujeita a temperaturas diferentes e constantes, na superfície interna e externa da casa, durante um período de tempo. Se as temperaturas forem mantidas, a distribuição de temperatura no interior da parede será linear.



Seja  $d$  a espessura da parede. Com base no sistema de coordenadas mostrado na figura acima, dois pontos da reta  $T(x)$  são conhecidos. Então, podemos calcular o coeficiente angular:

$$a = \frac{T_e - T_i}{\Delta x} = \frac{\Delta T}{d} \quad (4.8)$$

Como a reta intercepta o eixo das ordenadas em  $T = T_i$  temos:

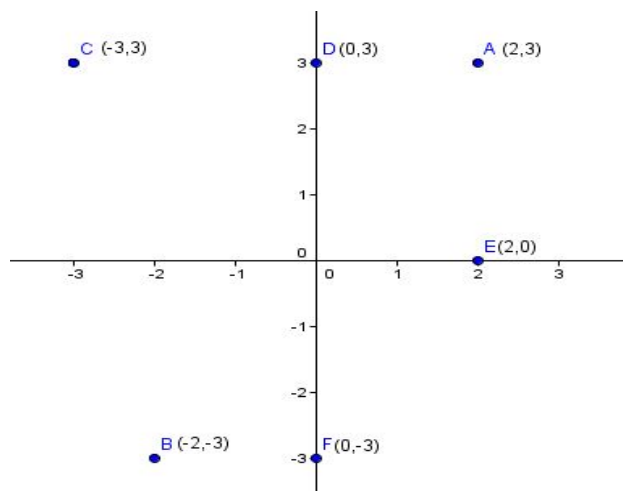
$$T(x) = \frac{\Delta T}{d}x + T_i \quad (4.9)$$

1. Determine uma função  $T(x)$  em uma parede, sabendo que  $45^\circ\text{C}$  e  $25^\circ\text{C}$  são as temperaturas externa interna da casa, respectivamente e a espessura da parede é de  $15\text{ cm}$ .
2. Usando a função do item (a), calcule a temperatura em  $5\text{ cm}$ ,  $7,5\text{ cm}$  e  $10\text{ cm}$ .

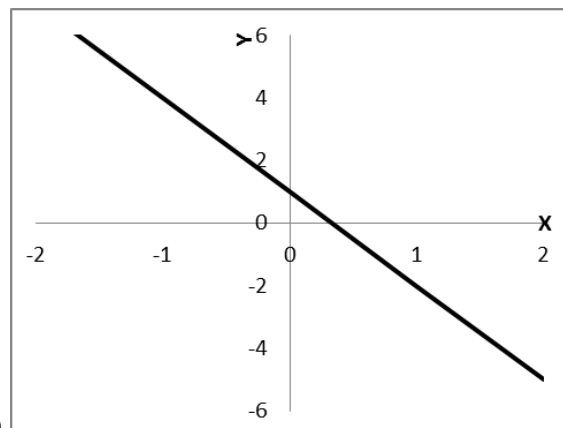
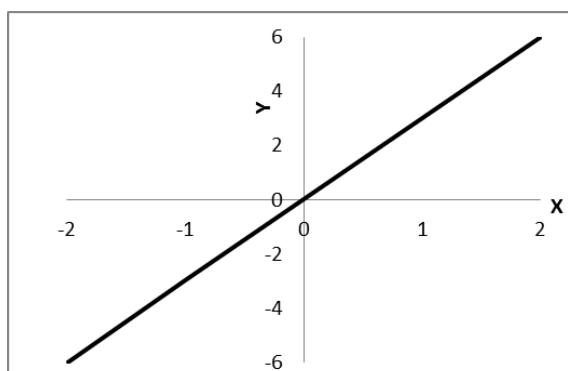
## 5.5 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

### RESPOSTAS 5.2



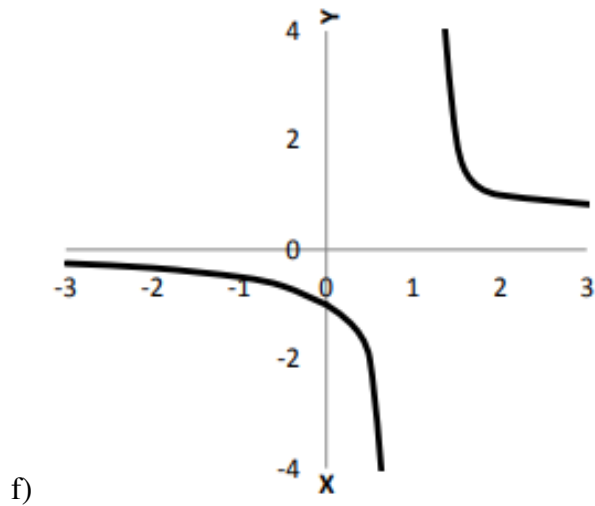
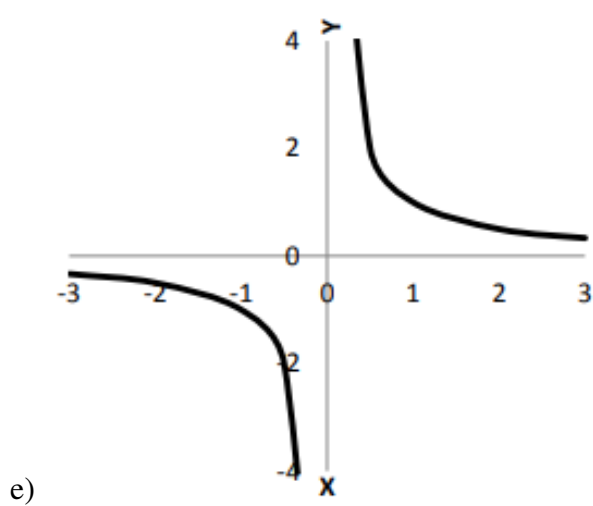
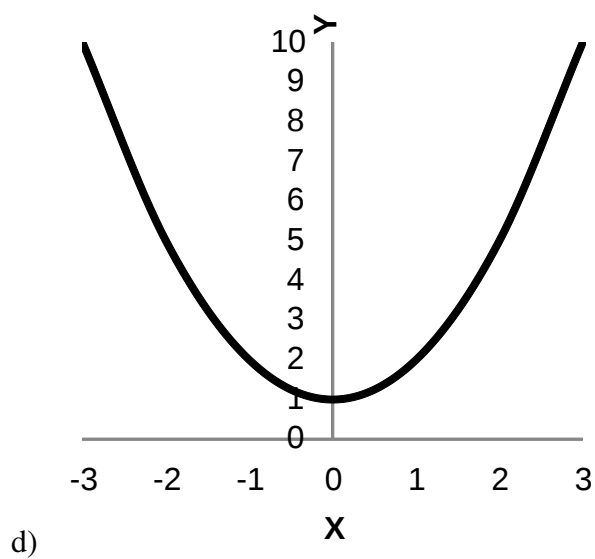
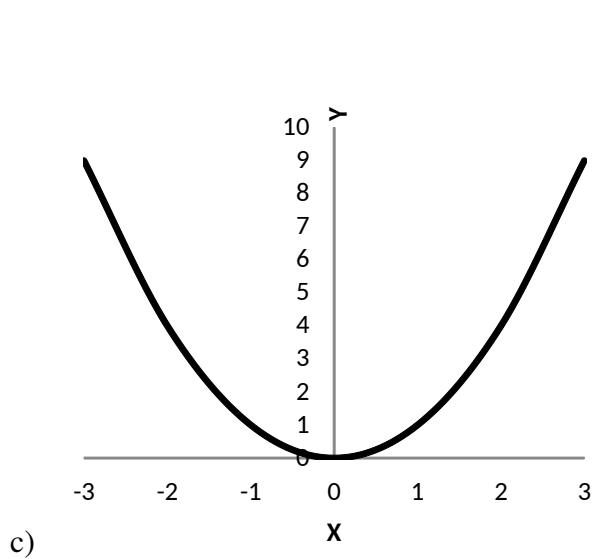


5.2.1

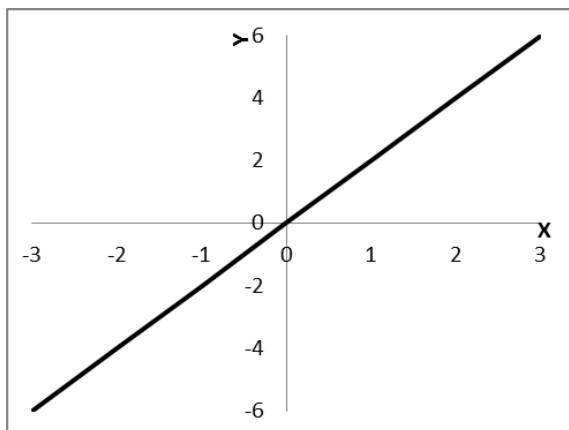
5.2.2  $x = 0$ 5.2.3  $y = 0$ 5.2.4 a)  $f(0) = -1$ b)  $f(-2) = -7$ c)  $f(c+1) = 3c+2$ d)  $f(1) = 2$ e)  $f(1/3) = 0$ f)  $f(3-c) = -3c+8$ 5.2.5 a)  $x = 0$ b)  $x = -1/4$ c)  $x = 5/8$ d)  $x = -7/4$ 

5.2.6 a)

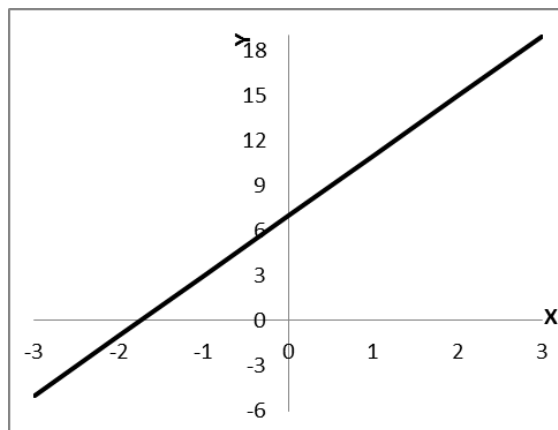
b)

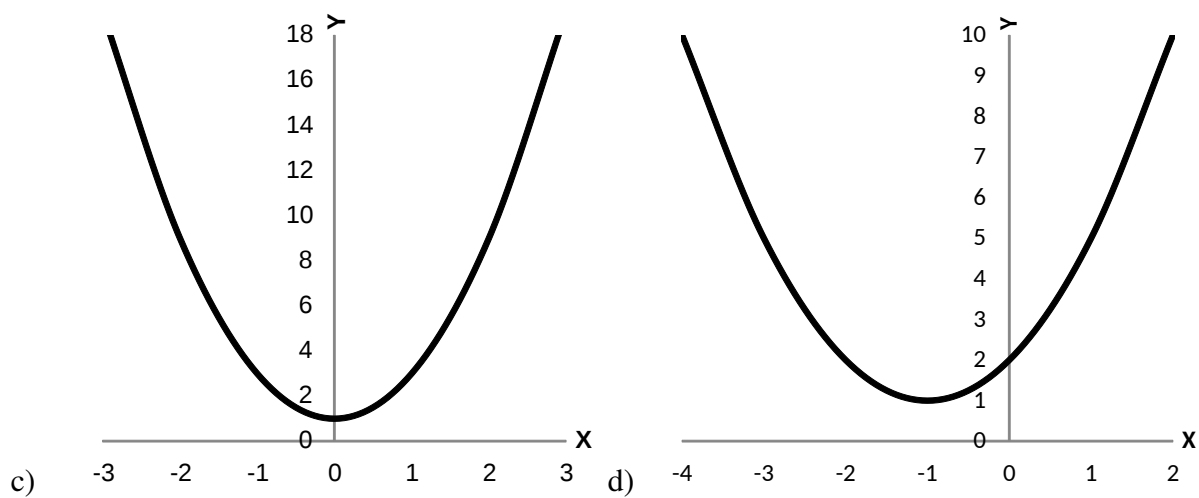


5.2.7 a)



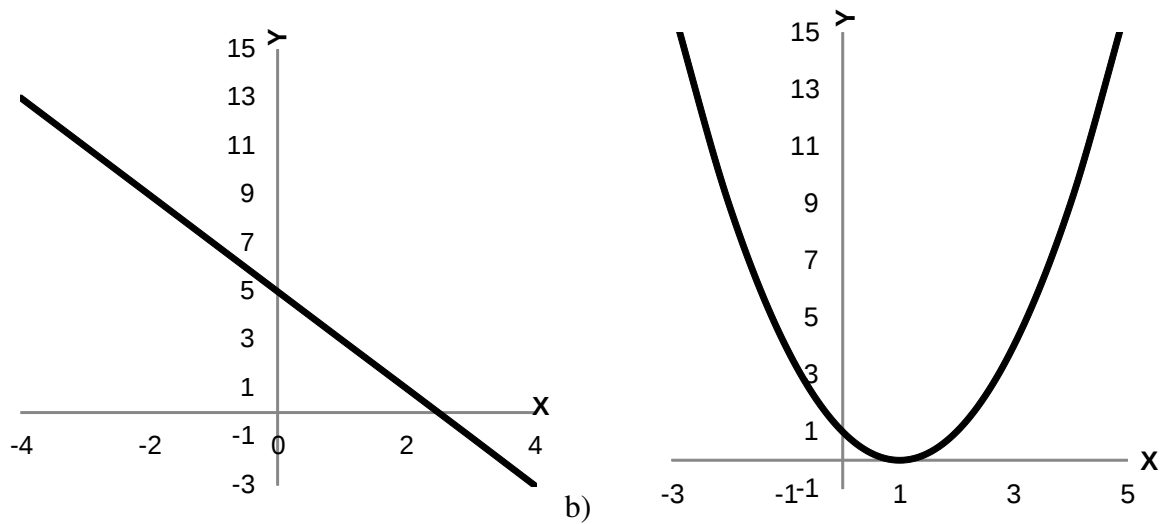
b)



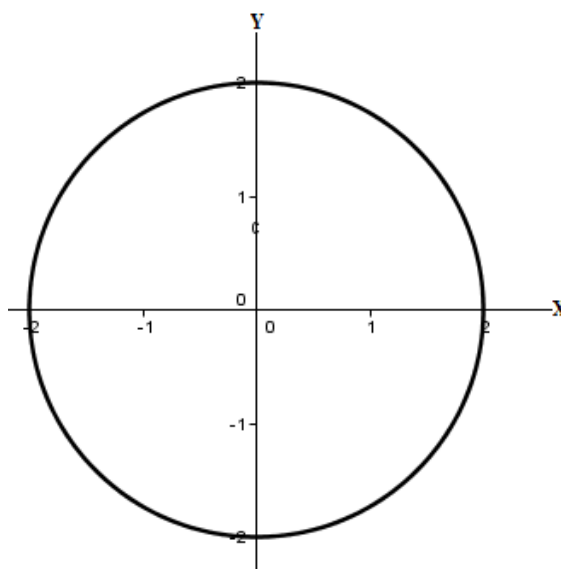
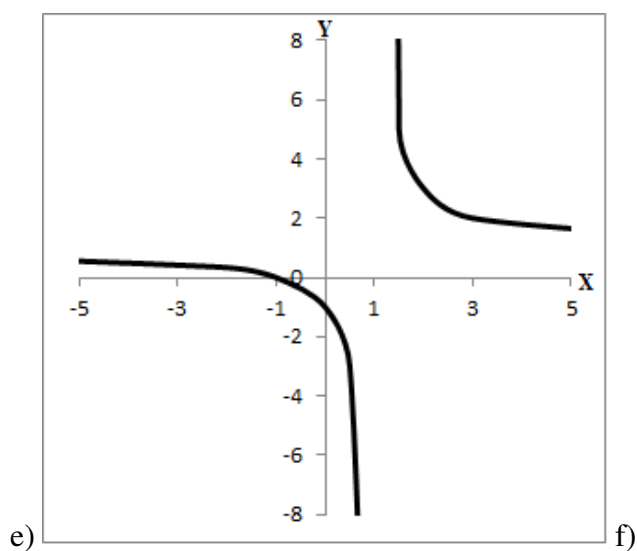
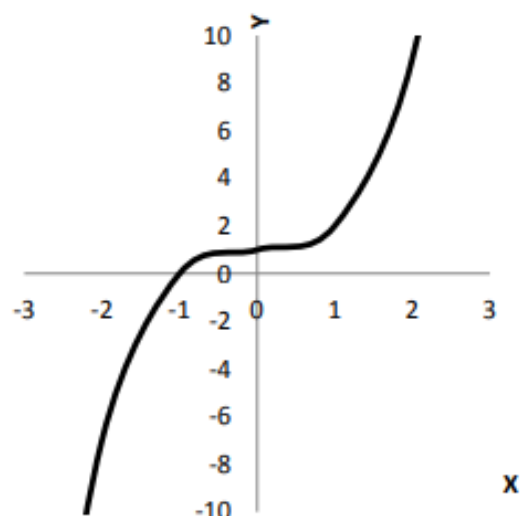
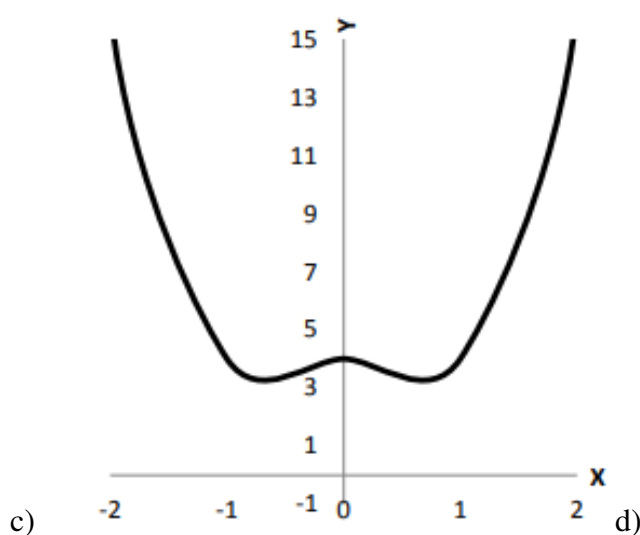


5.2.8 Sim.

5.2.9 Não, pois para um mesmo valor de  $x$  há dois valores de  $y$  correspondentes.



5.2.10 a)



5.2.11 Não, a alternativa f) não está de acordo, pois há dois valores de  $y$  para mesmo  $x$ .

5.2.12 a)  $D = \{x \in \mathbb{R}\}; \quad Im = \{y \in \mathbb{R}\}$

b)  $D = \{x \in \mathbb{R} \neq 0\}; \quad Im = \{y \in \mathbb{R} / y \neq 1\}$

c)  $D = \{x \in \mathbb{R}\}; Im = \{y \in \mathbb{R} / y \leq 4\}$

d)  $D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}; Im = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$

e)  $D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}; Im = \{y \in \mathbb{R} / y \leq 0\}$

f)  $D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 4\}; Im = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$

### RESPOSTAS 5.3

5.3.1 a) Sim. A dependência é de 1º Grau.

b) A proporção da circunferência em relação ao raio é de 1º Grau. A da área é de 2º Grau.

c) Sim. A dependência é de 1º Grau.

d) Sim. A dependência é de 1º Grau.

e) Sim. A dependência é de 1º Grau.

5.3.2  $m$  é proporcional a  $y$ .  $\Delta y / \Delta x = 50/3$

5.3.3  $y(x) = 1,5x + 5$

5.3.4  $C(x) = p \cdot x$ ;

5.3.5  $C(x) = px + b$

5.3.6  $C(x) = ax + CF$

5.3.7 a)  $a = 1/2; b = 1/2$ ;  $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

b)  $a = 1; b = 3$ ;  $f(x) = x + 3$

c)  $a = -1; b = 0$ ;  $f(x) = -x$

d)  $a = 0; b = 3$ ;  $f(x) = 3$

5.3.8 a)  $C = 20/7x + 5/7$       b)  $C(30) = 605/7 = 86,42$

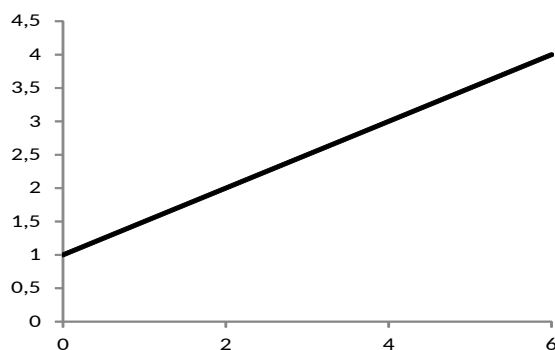
5.3.9 a)  $a = -3$ ; *Decrescente*

c)  $a = -2/3$ ; *Decrescente*

b)  $a = -1/2$ ; *Decrescente*

d)  $a = 1$ ; *Crescente*

5.3.10 a)  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

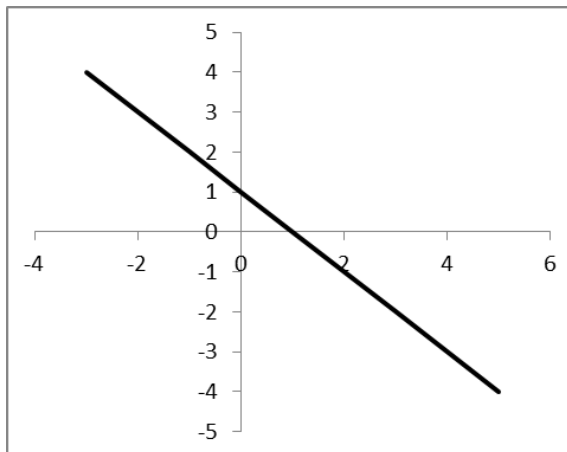


b) Os pontos não estão alinhados

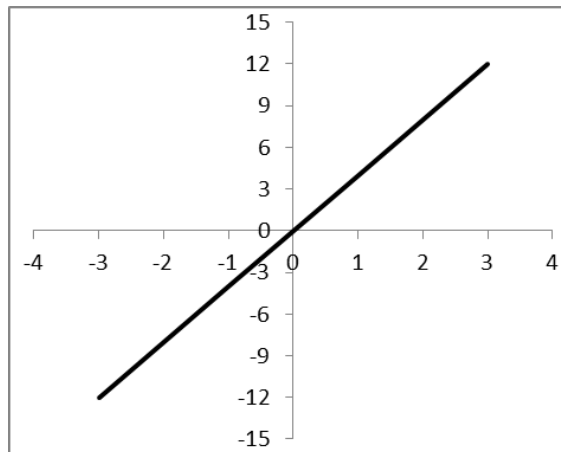
5.3.11  $V_1V_2:x=0$ ;  $V_1V_4:y=0$ ;  $V_2V_3:y=4$ ;  $V_3V_4:x=4$

5.3.12  $V_1V_2:y=1$ ;  $V_1V_3:x=1$ ;  $V_2V_3:y=-x+5$

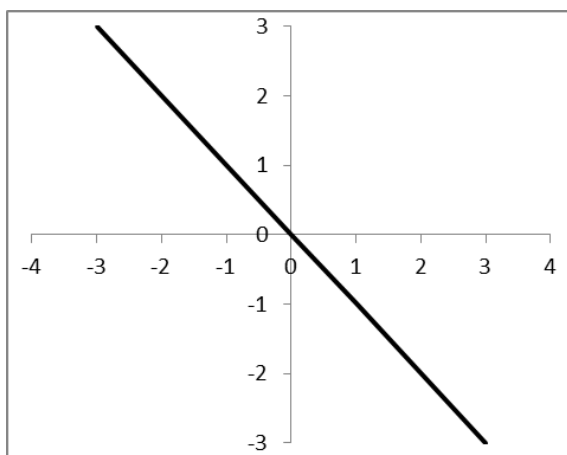
5.3.13 a)



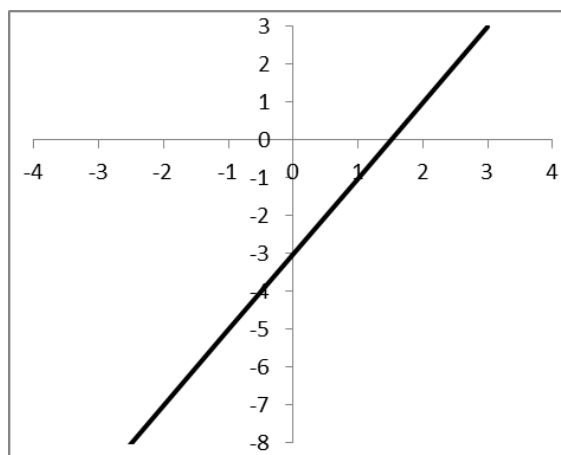
b)



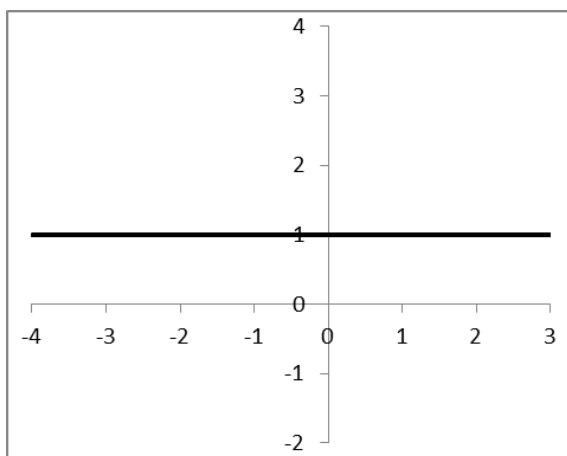
c)



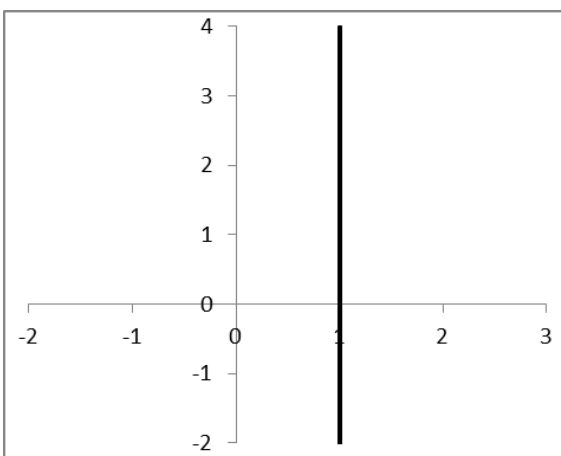
d)



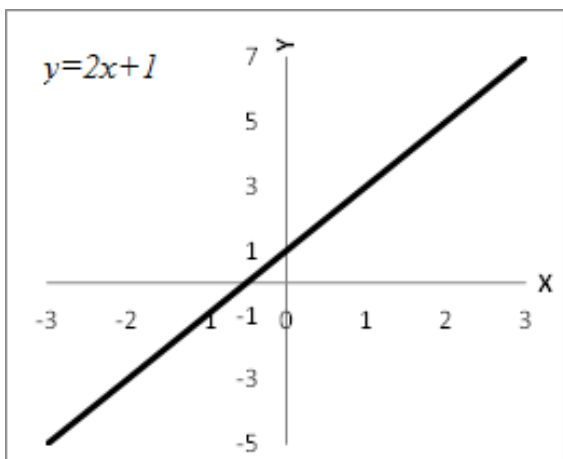
e)



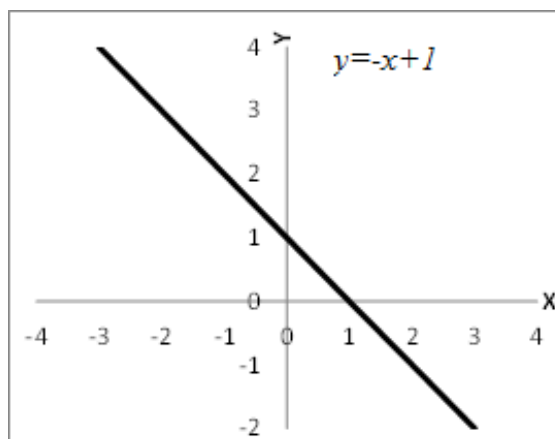
f)



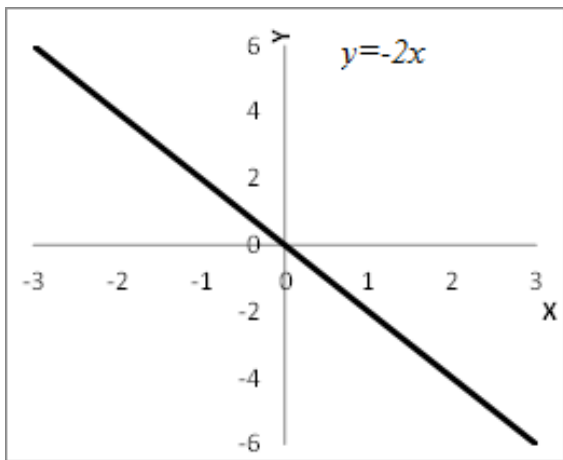
5.3.14 a)



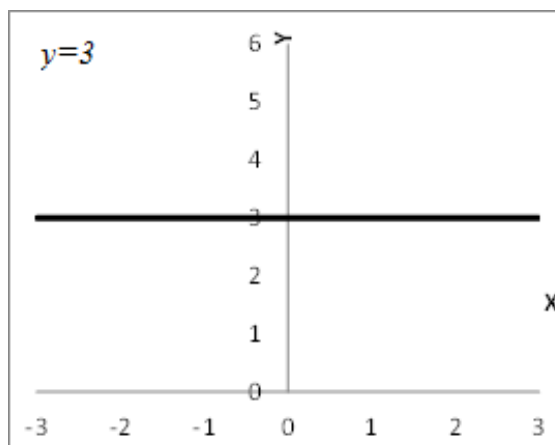
b)



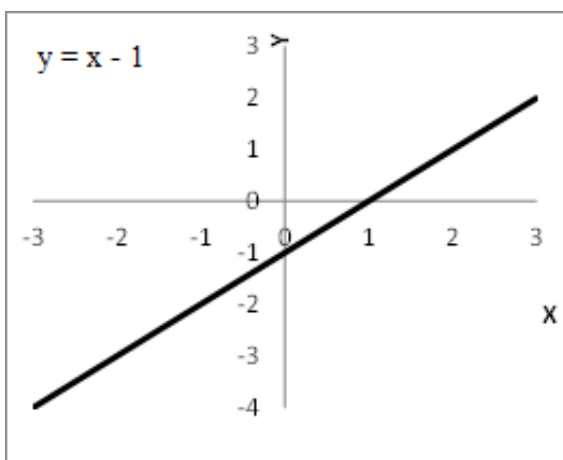
c)



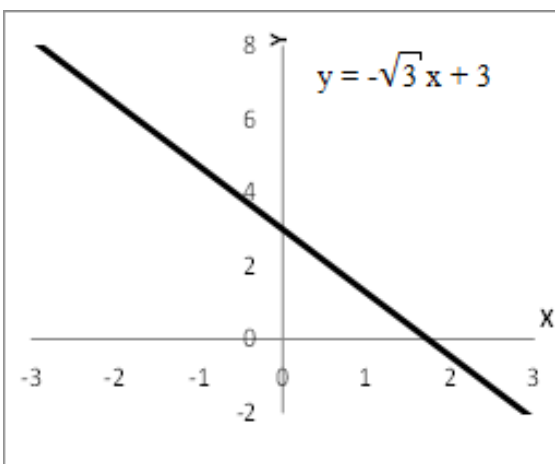
d)

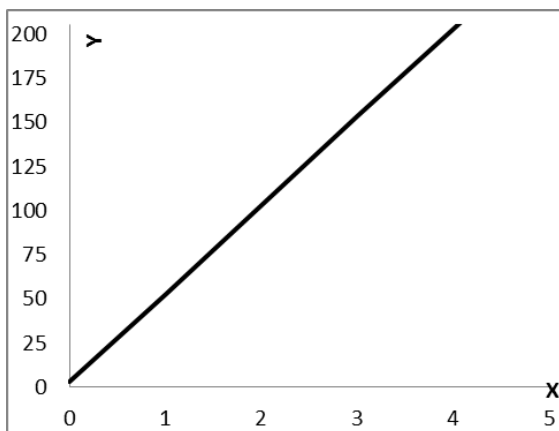
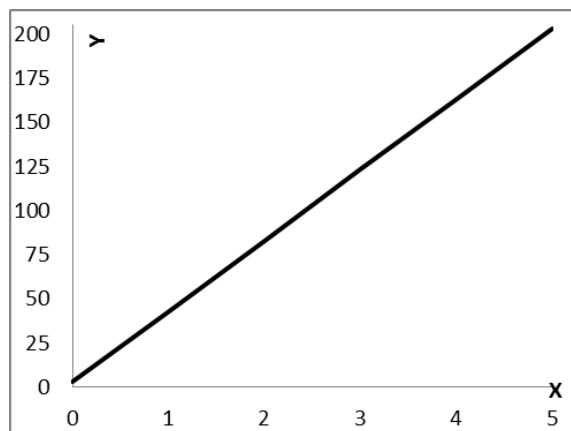


e)



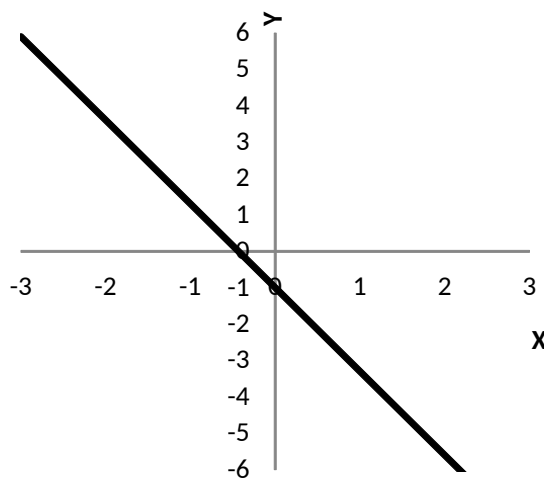
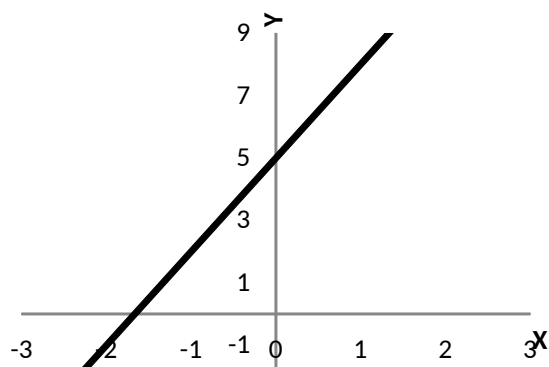
f)

5.3.15 a)  $f(x) = 40x + 3$       b)  $g(x) = 50x + 3$



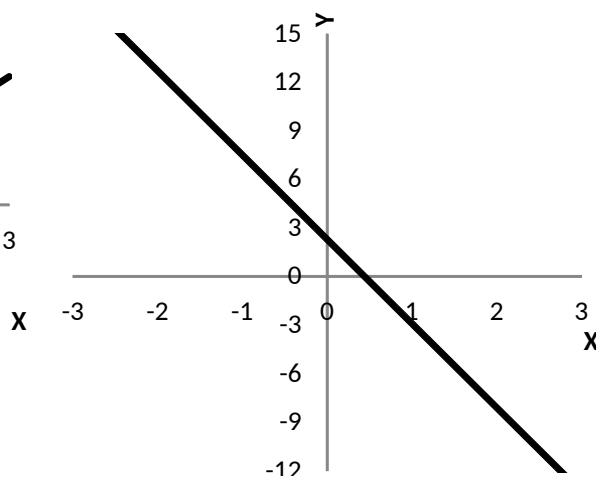
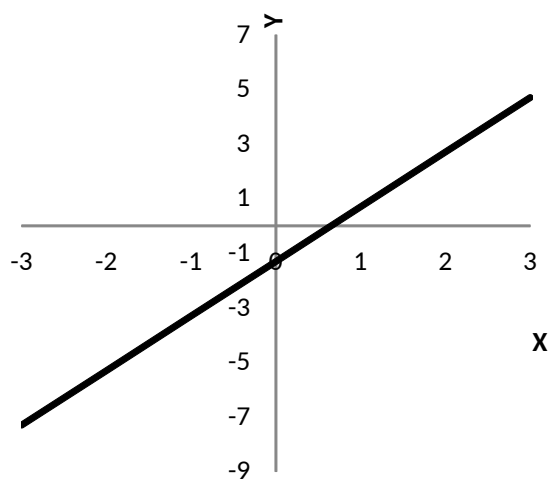
5.3.16 a) Crescente; Intersecção em Y: (0,5)

b) Decrescente; Intersecção em Y: (0,-1)



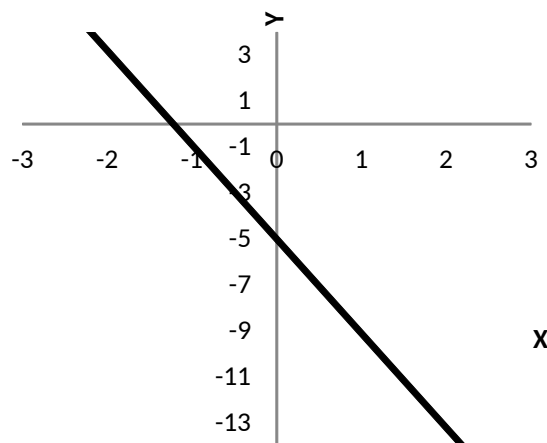
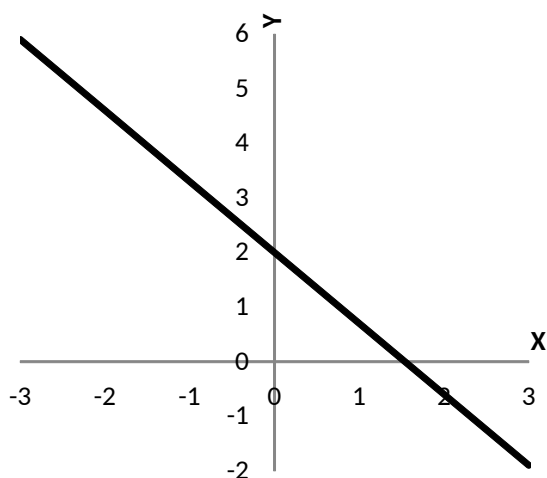
c) Crescente; Intersecção em Y: (0,-1.3)

d) Decrescente; Intersecção em Y: (0,2.3)



e) Decrescente; Intersecção em Y: (0,2) quad f) Decrescente; Intersecção em Y: (0,-5)



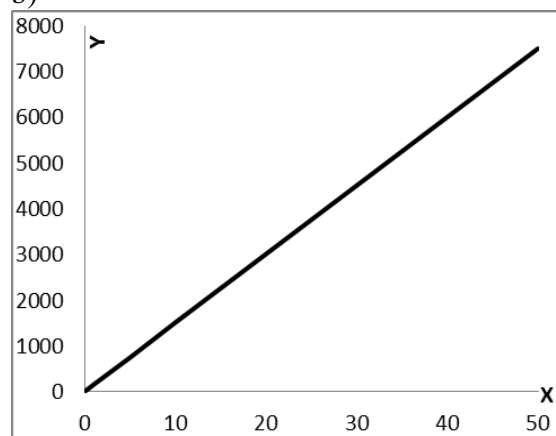


- 5.3.17 a) Crescente; Ponto de Intersecção em  $Y = -2$   
 b) Decrescente; Ponto de Intersecção em  $Y = 27/4$   
 c) Decrescente; Ponto de Intersecção em  $Y = 54/5$   
 d) Decrescente; Ponto de Intersecção em  $Y = 17/5$

a)

X	Y
0	20
1	170
5	770
10	1520
50	7520

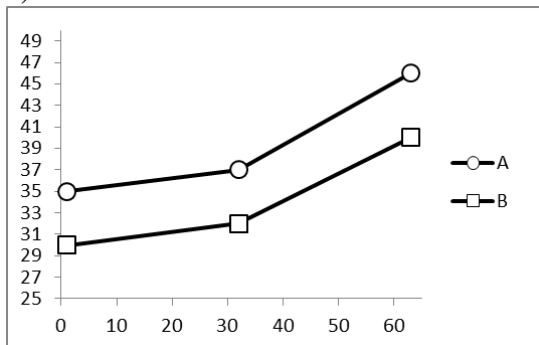
b)



5.3.18 c)  $C = 150,00un + 20,00$

d)  $y = 150 + 20$

a)



5.3.19 b) Candidato (A):  $y = \frac{2}{31}x + \frac{1083}{31}$ , Percentual para 20/07: 36,22%

Candidato (B):  $y = \frac{2}{31}x + \frac{928}{31}$ , Percentual para 20/07: 31,22%

c) Candidato (A): 51,8%

Candidato (B): 45,1%

## 5.6 ANEXO

### 5.6.1 Tangente de ângulos suplementares

Sejam o ângulo  $0 < \theta < 90^\circ$ . O suplementar de  $\theta$  é  $(180^\circ - \theta)$ . Pela definição de tangente,  $tg(\theta) = MT$  e  $tg(180^\circ - \theta) = MT'$ , como mostra a Fig. 1. Os ângulos dos triângulos OMT e OMT' são iguais e o segmento OM é comum aos triângulos (portanto são iguais) então os outros lados também serão. Portanto, os triângulos OMT e OMT' são idênticos e

$$tg(\theta) = -tg(180^\circ - \theta)$$

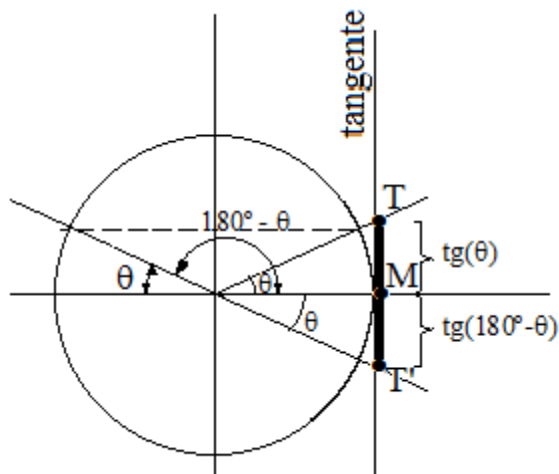


Figura 1 - Tangente de ângulos suplementares

### 5.6.2 Tangente de ângulos complementares

Pela definição de tangente, temos:

$tg(\theta) = \frac{QR}{PR}$  e  $tg(90^\circ - \theta) = \frac{PR}{QR}$ . Comparando as expressões, temos:

$$tg(\theta) = \frac{1}{tg(90^\circ - \theta)}$$

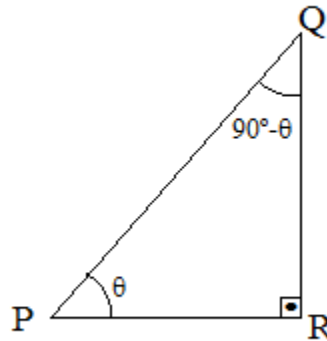


Figura 2 - Tangente de ângulos complementares

### 5.6.3 Retas paralelas

**Teorema:** Sejam as retas  $(r) : y = mx + b$  e  $(s) : y = px + c$ . Se  $r$  é paralela a  $s$  então  $m = p$ .

**Demonstração:** Sejam  $\alpha$  e  $\theta$  os ângulos que as retas  $r$  e  $s$ , fazem com o eixo  $X$ , respectivamente. Se  $r$  é paralela a  $s$  então  $\alpha = \theta$  e  $tg \alpha = tg \theta$ . Como  $m = tg \alpha$  e  $p = tg \theta$ , tem-se  $m = p$ .

### 5.6.4 Retas perpendiculares

**Teorema:** Sejam as retas  $(r) : y = mx + b$  e  $(s) : y = px + c$ . Se  $r$  é perpendicular a  $s$  então  $p = -\frac{1}{m}$ .

**Demonstração:** Sejam  $\alpha$  e  $\theta$  os ângulos que as retas  $r$  e  $s$ , fazem com o eixo  $X$ , respectivamente. Da Fig. 3, temos:

$$p = tg(\theta) = \frac{RP}{PT}; tg(180^\circ - \alpha) = \frac{PT}{RP} \text{ e } m = tg(\alpha) \quad (3.1)$$

Da trigonometria sabemos que as tangentes de ângulos suplementares são iguais em módulo e de sinais contrários:

$$tg(180^\circ - \alpha) = -tg(\alpha). \quad (3.2)$$

Substituindo a Eq. (3.2) na Eq. (3.1), temos:

$$tg(\theta) = -\frac{PT}{RP} \quad (3.3)$$

Comparando as razões das Eqs. (3.1) e (3.3) temos:

$$p = \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{RP}{PT} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} = -\frac{1}{m}$$

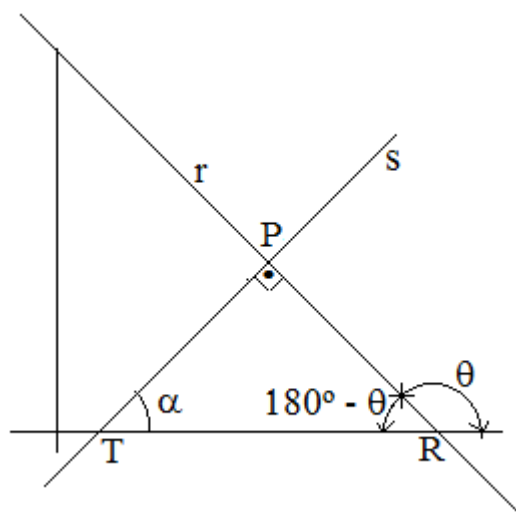


Figura 3 - Retas perpendiculares

# Capítulo 6

## Função do segundo grau

### 6.1 Introdução

No capítulo sobre função de 1º grau foram estudados modelos em que as grandezas eram simplesmente proporcionais entre si. Isto significa que, para o mesmo incremento ( $\Delta x$ ) em qualquer  $x$ , o incremento ( $\Delta y$ ) em  $y$ , será sempre o mesmo. Os gráficos dessas funções são retas. Porém, muitas grandezas se relacionam proporcionalmente ao quadrado de outras: é o caso da área de um quadrado em relação ao lado; a área de um círculo em relação ao raio; o deslocamento de uma pedra em queda livre em relação ao tempo e muitas outras. Estas funções são chamadas de quadráticas e serão estudadas neste capítulo.

### 6.2 Definição de função do 2º grau

As funções polinomiais tem a forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots + a_nx^n \quad (2.1)$$

onde  $a_i$  são números reais, para  $i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n$ .

O grau de uma função polinomial é dado pelo maior grau do polinômio. Assim,

1.  $f(x) = a_0 + a_1x$  é uma função do 1º grau, para  $a_1 \neq 0$ .
2.  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  é uma função do 2º grau, para  $a_2 \neq 0$ .
3.  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  é uma função do 3º grau, para  $a_3 \neq 0$
4.  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$  é uma função do grau  $n$ , para  $a_n \neq 0$ .

Particularmente, as funções de 2º grau (também chamadas de *funções quadráticas*) tem a forma:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \text{ para } a_2 \neq 0. \quad (2.2)$$

Para simplificar a notação (evitar sub-índices), vamos substituir  $a_0 = C$ ,  $a_1 = B$  e  $a_2 = A$  na Eq. (2.2) e obter :

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C, \text{ para } A \neq 0. \quad (2.3)$$

**Exemplo 6.2.1.** a) Na função  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ,  $A=1$ ;  $B=2$  e  $C=-3$ .

b) Na função  $g(x) = 3x^2 - 1/3$ ,  $A=3$ ;  $B=0$  e  $C=-1/3$ .

c) Na função  $h(x) = -x^2 + 5x$ ,  $A=-1$ ;  $B=5$  e  $C=0$ .

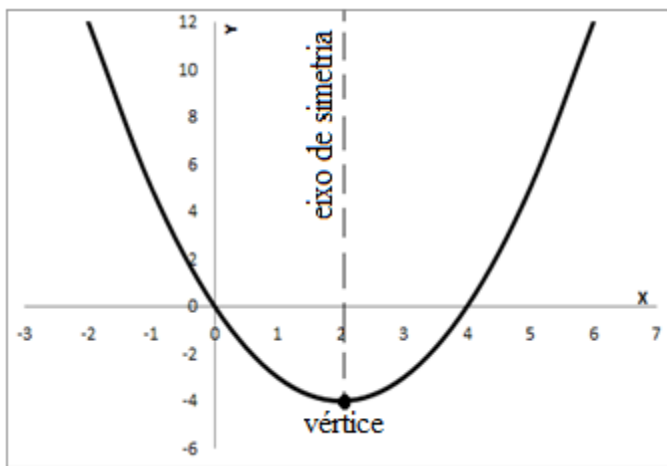
d) Na função  $p(x) = -3x^2$ ,  $A=-3$ ;  $B=0$  e  $C=0$  ■

### 6.3 Gráfico de uma função de 2º grau

O modo mais elementar de fazer o gráfico de uma função do 2º grau conhecida é localizando vários pontos da função no plano cartesiano. Esse modo é simples e fácil, porém demorado e mecânico. Vejamos um exemplo:

**Exemplo 6.3.1.** Faça o gráfico da função  $f(x) = x^2 - 4x$ .

**Solução:** Podemos fazer uma tabela atribuindo valores para  $x$  e calculando os correspondentes valores de  $f(x)$  com a função dada.



Observemos que o gráfico de  $f(x)$  é uma *curva*. As curvas resultantes de funções de 2º grau são chamadas **PARÁBOLAS**.

Observemos também que as parábolas têm um **eixo de simetria** que divide a curva em duas partes iguais, o qual passa pelo **vértice** (ponto extremo da curva).

Como sugestão de atividade, incentivamos o leitor a obter o gráfico do presente exemplo em uma planilha eletrônica ■

### 6.3.1 Concavidade da parábola

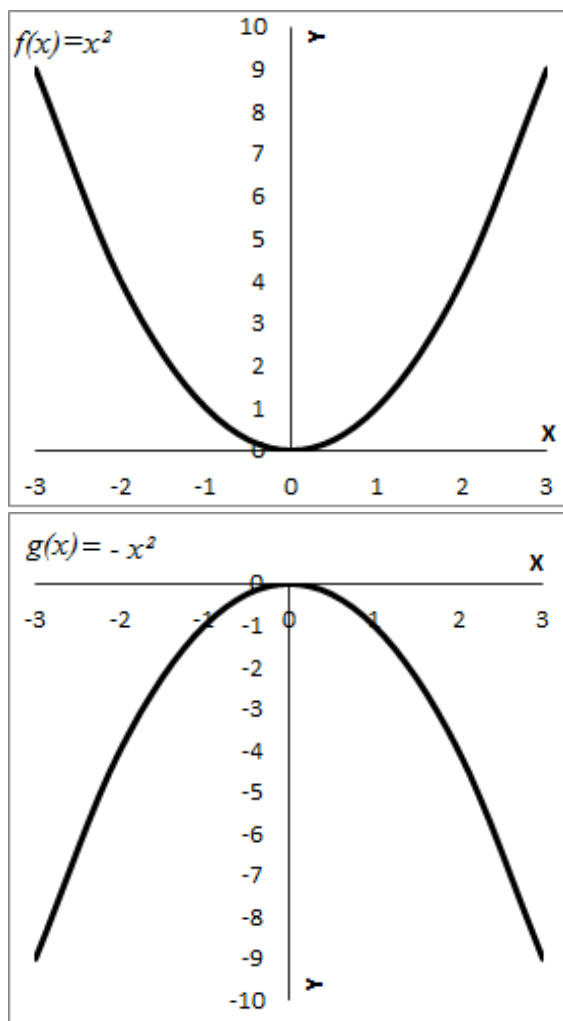
As parábolas com a forma da Eq. (2.3) têm *concavidade para cima ou para baixo*.

Se  $A > 0$  então a concavidade é para cima

Se  $A < 0$  então a concavidade é para baixo.

**Exemplo 6.3.2.** Faça um esboço do gráfico das funções  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = -x^2$ .

**Solução:** Atribuindo valores para  $x$  e calculando os correspondentes valores de  $f(x)$  e  $g(x)$  obtemos os gráficos das figuras abaixo.



Observemos que para  $A > 0$  a concavidade é para cima e para  $A < 0$  a concavidade é para baixo■

### 6.3.2 Intersecção com o eixo Y

Os pontos onde qualquer função intersecta o eixo Y tem abcissa igual a zero ( $x=0$ ). Fazendo  $x=0$  na Eq. (2.3) temos:

$$y = A0^2 + B0 + C$$

$$y = C. \quad (3.1)$$

Portanto, a parábola vai intersectar o eixo  $Y$  em  $(0, C)$ .

### 6.3.3 Raízes das funções de 2º grau (intersecção com o eixo X)

Lembremos que a raiz de uma função é o valor da abscissa ( $x_r$ ) do ponto em que a função intersecta o eixo  $X$ , portanto, nesse ponto temos  $y = 0$ .

Fazendo  $y = f(x) = 0$  na Eq. (2.3) temos uma equação de 2º grau:

$$0 = Ax^2 + Bx + C \quad (3.2)$$

A solução da Eq. (3.2) foi demonstrada no capítulo sobre equações, cuja conclusão é a fórmula de Baskhara:

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (3.3)$$

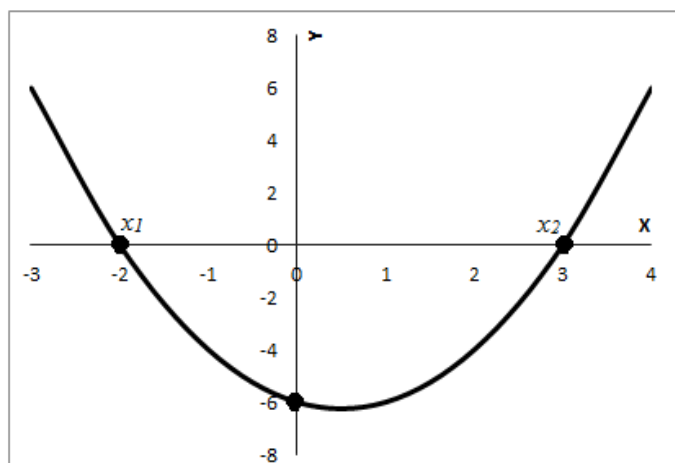
**Exemplo 6.3.3.** Calcule as raízes e faça um esboço do gráfico da função  $f(x) = x^2 - x - 6$ .

**Solução:**

Usaremos três informações para fazer um esboço da função:

1.  $A = 1 > 0$ . Portanto a concavidade da parábola é para cima;
2.  $C = -6$ . Portanto a parábola intersecta o eixo  $Y$  em  $(0, -6)$ ;
3. Aplicando a Eq. (3.3) com  $A=1$ ;  $B=-1$  e  $C=-6$  obtemos as raízes  $x_1 = -2$  e  $x_2 = 3$ . Portanto a parábola passa em  $(-2, 0)$  e  $(3, 0)$ .

Colocando estas informações no plano cartesiano obtemos a curva da  $f(x)$  dada.





Novamente incentivamos o leitor a obter o gráfico do presente exemplo em uma planilha eletrônica ■

Se  $x_1$  e  $x_2$  são raízes da equação de 2º grau e  $A = 1$ , então  $0 = x^2 + Bx + C$  pode ser fatorada como

$$0 = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + Bx + C. \quad (3.4)$$

Assim,

$$B = a + b \text{ e } C = a \cdot b$$

Para que a Eq. (3.4) seja nula,  $(x+a) = (x+b) = 0$  e  $a$  e  $b$  são as raízes com o sinal oposto desta equação:

$$a = -x_1 \text{ e } b = -x_2.$$

Re-escrevendo a Eq. 3.4 temos:

$$0 = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 + Bx + C \quad (3.5)$$

**Exemplo 6.3.4.** Escreva três equações do 2º grau cujas raízes sejam  $x_1 = 2$  e  $x_2 = -1$ .

**Solução:** Usando a Eq. 3.5 podemos escrever:

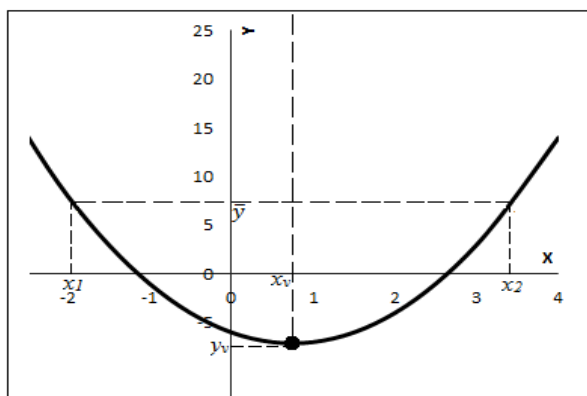
$$0 = (x - 2)(x + 1) = x^2 - x - 2.$$

Multiplicando a equação obtida por qualquer número real, obtemos equações cuja solução é  $x_1 = 2$  e  $x_2 = -1$ . Por exemplo:

$$0 = 2x^2 - 2x - 4 ; 0 = 3x^2 - 3x - 6 \text{ e } 0 = 4x^2 - 4x - 8 \quad \blacksquare$$

### 6.3.4 Vértice da parábola

O vértice é o ponto  $V=(x_v, y_v)$  pelo qual passa o eixo de simetria da parábola.



Consideremos um valor  $y$ , tal que  $y > y_v$ , como indica a figura acima. Devido à simetria das parábolas, devem existir  $x_1$  e  $x_2$  tal que

$$\text{i) } f(x_1) = f(x_2) = y \text{ e}$$

$$\text{ii) } x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} .$$

Assim, de (i) e da Eq. 2.3, temos:

$$y = Ax_1^2 + Bx_1 + C \quad (3.6)$$

$$y = Ax_2^2 + Bx_2 + C \quad (3.7)$$

Subtraindo as Eqs. (3.6) e (3.7) e colocando  $A$  e  $B$  em evidência, temos:

$$0 = A(x_2^2 - x_1^2) + B(x_2 - x_1) . \quad (3.8)$$

Fatorando a diferença de dois quadrados no fator que multiplica  $A$ , temos:

$$0 = A(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) + B(x_2 - x_1) . \quad (3.9)$$

De (ii) temos  $2x_v = x_1 + x_2$ , que substituindo na Eq. (3.9)

$$0 = A \cdot 2x_v \cdot (x_2 - x_1) + B(x_2 - x_1) . \quad (3.10)$$

Dividindo a Eq. (3.10) por  $(x_2 - x_1)$ , pois  $x_1 \neq x_2$ , temos:

$$0 = A \cdot 2x_v + B .$$

E, finalmente, resolvendo para  $x_v$ , temos:

$$x_v = \frac{-B}{2A} . \quad (3.11)$$

A ordenada do vértice pode ser obtida substituindo  $x_v$  na Eq. (2.3)

$$y_v = f(x_v) = Ax_v^2 + Bx_v + C .$$

Substituindo a expressão de  $x_v$  da Eq. (3.11), tem-se:

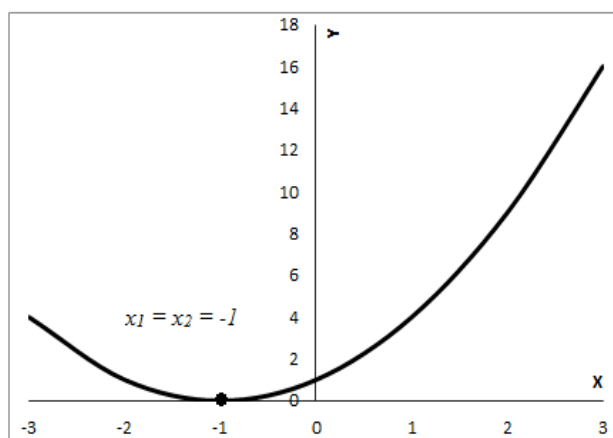
$$y_v = f(x_v) = A\left(\frac{-B}{2A}\right)^2 + B\left(\frac{-B}{2A}\right) + C \quad (3.12)$$

Resolvendo o quadrado, o produto e adicionando as frações, obtém-se:

$$y_v = f(x_v) = -\frac{B^2 - 4AC}{4A} . \quad (3.13)$$

**Exemplo 6.3.5.** Faça um esboço do gráfico da função  $f(x) = x^2 + 2x + 1$ .

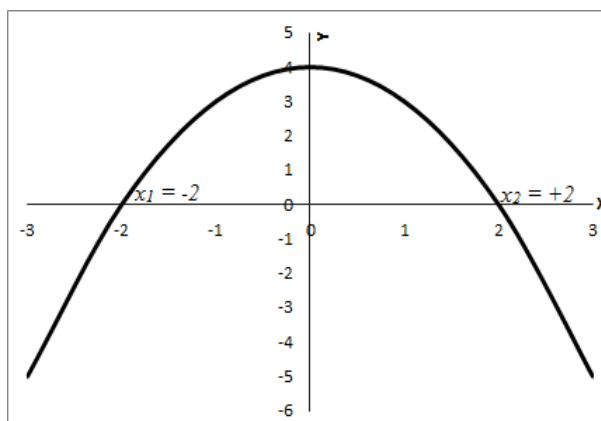
**Solução:** Aplicando a Eq. (3.3) com  $A=1$ ;  $B=2$  e  $C=1$  obtemos duas raízes iguais  $x_1 = x_2 = -1$ . Com isto, já sabemos que a parábola tangencia o eixo  $X$  em  $(-1,0)$ .



Usando as Eqs. (3.11) e (3.13) encontramos o vértice:  $V=(-1,0)$ . Com isso, sabemos que o eixo de simetria é a reta vertical  $x = -1$ . Como  $A=1 > 0$  a parábola tem concavidade para cima. Com essas informações podemos traçar um esboço da parábola ■

**Exemplo 6.3.6.** Faça um esboço do gráfico da função  $f(x) = -x^2 + 4$ .

**Solução:** Aplicando a Eq. (3.3) com  $A=-1$ ;  $B=0$  e  $C=4$  obtemos duas raízes  $x_1 = -2$  e  $x_2 = +2$ . Com isto, já sabemos que a parábola intersecta o eixo  $X$  em  $(-2,0)$  e  $(2,0)$ .



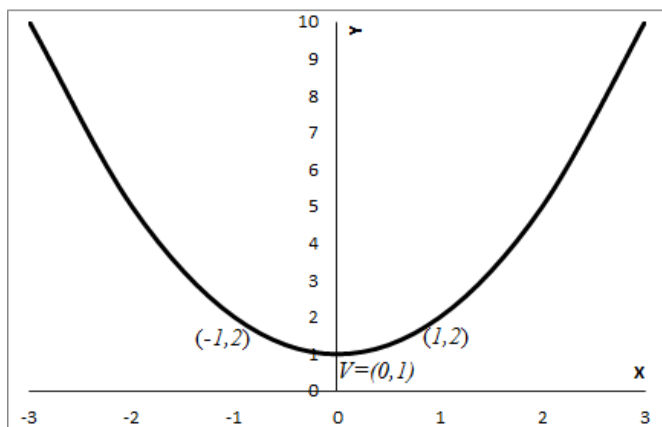
Usando as Eqs. (3.11) e (3.13) encontramos o vértice:  $V=(0,4)$ . Com isso, sabemos que o eixo de simetria é o próprio eixo  $Y$ . Como  $A=-1 < 0$  a parábola tem concavidade para baixo. Com essas informações podemos traçar um esboço da parábola ■

**Exemplo 6.3.7.** Faça um esboço do gráfico da função  $f(x) = x^2 + 1$ .

**Solução:** Aplicando a Eq. (3.3) com  $A=1$ ;  $B=0$  e  $C=1$  obtemos discriminante negativo, portanto as raízes não são reais. Temos outras informações para fazer um esboço do gráfico:

Usando as Eqs. (3.11) e (3.13) encontramos o vértice:  $V=(0,1)$ . Com isso, sabemos que o eixo de simetria é o próprio eixo  $Y$ . A parábola intersecta  $Y$  em  $(0,1)$ .

Como  $A=1 > 0$  a parábola tem concavidade para cima. Usaremos os pontos  $(1,2)$  e  $(-1,2)$  apenas para ter uma ideia da concavidade. Com essas informações podemos traçar um esboço da parábola■



### 6.3.5 Parábolas com eixo de simetria paralelos a X

As parábolas com eixo de simetria paralelos a X **NÃO SÃO FUNÇÕES**, pois para cada  $x$  temos dois valores de  $y$ .

As expressões das parábolas com eixo de simetria paralelos a X são obtidas trocando as variáveis  $x$  e  $y$  na Eq. (2.3):

$$x = Ay^2 + By + C \quad (3.14)$$

Se na Eq. (3.14)  $B = 0$ , a parábola tem o eixo de simetria sobre o eixo X e sua equação é

$$x = Ay^2 + C \quad \text{ou} \quad y = \pm \sqrt{\frac{x-C}{A}} \quad (3.15)$$

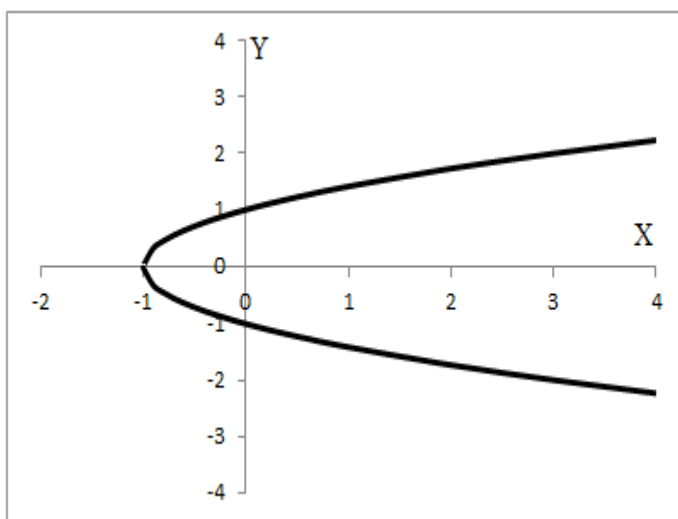
Se na Eq. (3.14)  $B = 0$  e  $C = 0$  a parábola tem o eixo de simetria sobre o eixo X, o vértice na origem e sua equação é

$$x = Ay^2 \quad \text{ou} \quad y = \pm \sqrt{\frac{x}{A}} \quad (3.16)$$

**Exemplo 6.3.8.** Faça um esboço do gráfico da parábola  $x = y^2 - 1$ .

**Solução:** Observe que para  $y = \pm 2$ , obtém-se o mesmo valor de  $x = 3$ . Portanto esta parábola não é uma função.

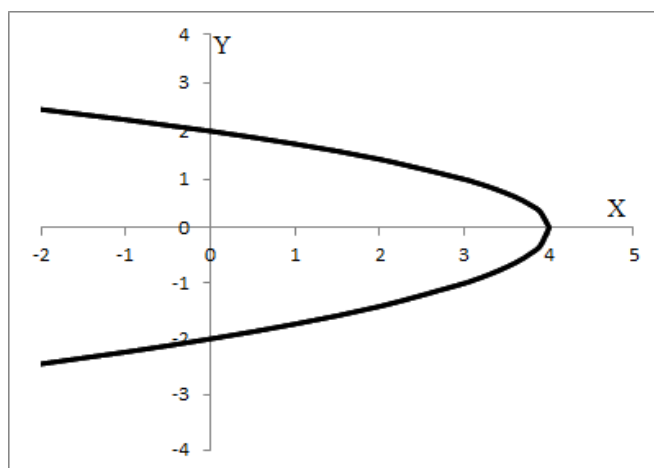
Usando as informações sobre raízes e vértices, temos:



Raízes:  $y_1 = 1$  e  $y_2 = -1$  e vértice:  $V = (-1, 0)$ . Como  $A = 1 > 0$  a concavidade é para a direita ■

**Exemplo 6.3.9.** Faça um esboço do gráfico da parábola  $x = -y^2 + 4$ .

**Solução:** Usando as informações sobre raízes e vértices, temos:



Raízes:  $y_1 = 2$  e  $y_2 = -2$  e vértice:  $V = (4, 0)$ . Como  $A = -1 < 0$  a concavidade é para a esquerda ■

## 6.4 Sinal da função do 2º grau

Lembremos que o sinal da função  $y = f(x)$  é o sinal da variável  $y$  em cada ponto. As raízes e a concavidade das parábolas são os elementos necessários para determinar o sinal da função.

Seja  $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ , vamos analisar três casos:

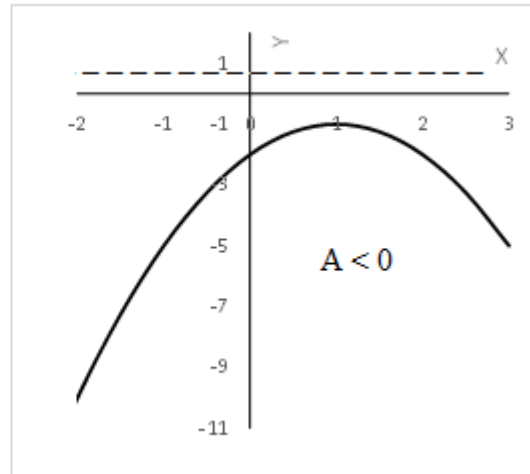
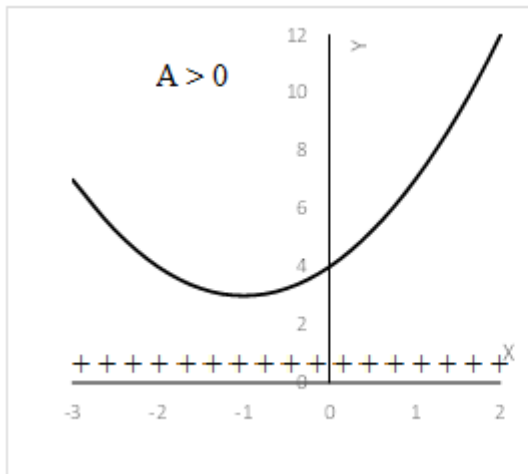
**Caso 1:  $f(x)$  não tem raízes reais.**

Então  $f(x)$  não intercepta o eixo  $X$ .

Nesse caso,  $\Delta = B^2 - 4AC < 0$  e:

Se  $A > 0$ ,  $f(x)$  é POSITIVA para qualquer  $x$ ;

Se  $A < 0$ ,  $f(x)$  é NEGATIVA para qualquer  $x$ ;

**Caso 2:  $f(x)$  tem raízes reais idênticas. ( $x_1 = x_2$ )**

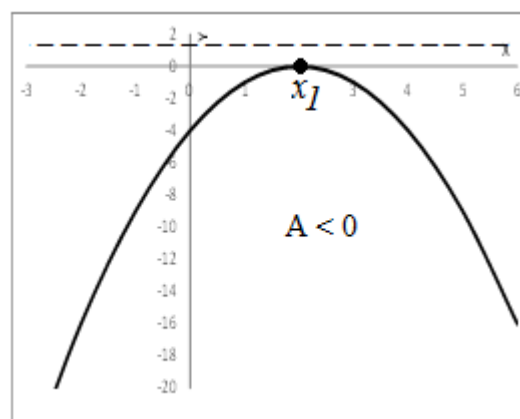
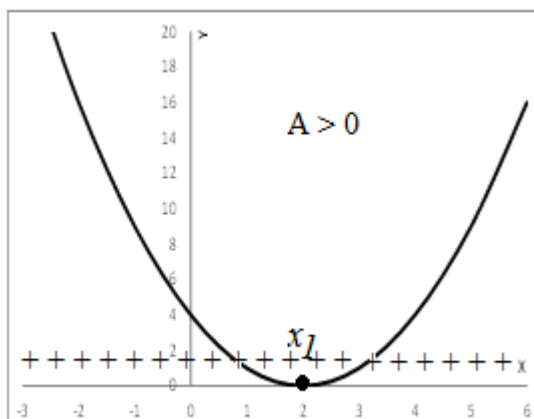
Então  $f(x)$  tangencia o eixo  $X$  em um ponto:  $(x_1, 0)$

Nesse caso,  $\Delta = B^2 - 4AC = 0$  e:

Se  $A > 0$ ,  $f(x)$  é POSITIVA para qualquer  $x$ ,  $/ x \neq x_1$ ;

Se  $A < 0$ ,  $f(x)$  é NEGATIVA para qualquer  $x$ ,  $/ x \neq x_1$  e

Para  $x \neq x_1$   $f(x) = 0$ .



**Caso 3:**  $f(x)$  tem raízes reais distintas. ( $x_1 \neq x_2$ )

Então  $f(x)$  intersecta o eixo  $X$  em dois pontos:  $(x_1, 0)$  e  $(x_2, 0)$ .

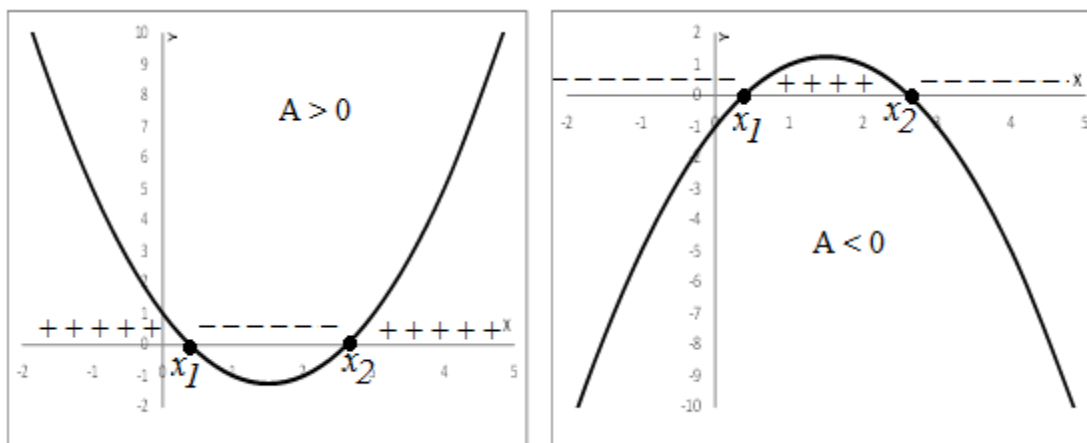
Nesse caso,  $\Delta = B^2 - 4AC > 0$  e:

Se  $A > 0$ ,  $f(x)$  é POSITIVA para qualquer  $x$ , /  $x < x_1$  ou  $x > x_2$  e

$f(x)$  é NEGATIVA para qualquer  $x$ , /  $x_1 < x < x_2$ .

Se  $A < 0$ ,  $f(x)$  é POSITIVA para qualquer  $x$ , /  $x_1 < x < x_2$  e

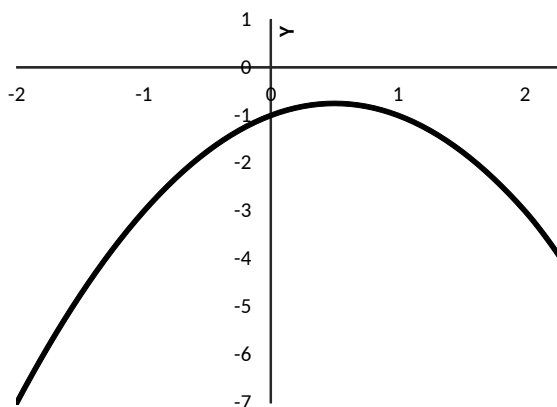
$f(x)$  é NEGATIVA para qualquer  $x$ ,  $x < x_1$  ou  $x > x_2$ .



**Exemplo 6.4.1.** Determine os sinais e faça um esboço do gráfico da função

$$f(x) = -x^2 + x - 1.$$

**Solução:** O discriminante  $\Delta = -3 < 0$  e o  $A = -1 < 0$ . Portanto, trata-se do Caso 1:  $f(x)$  é NEGATIVA para qualquer  $x$  real ■

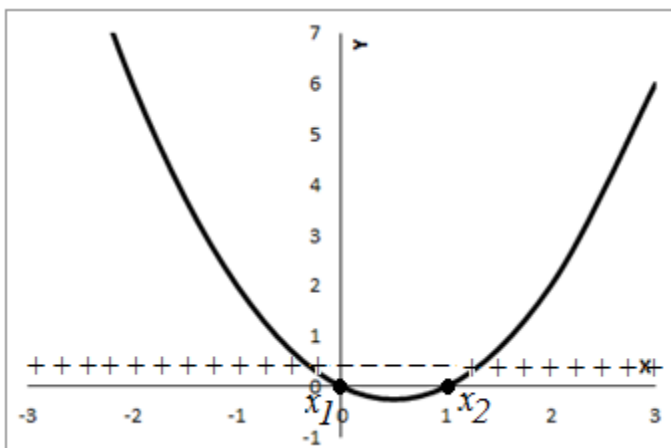


**Exemplo 6.4.2.** Determine os sinais e faça um esboço do gráfico da função

$$f(x) = x^2 - x.$$

**Solução:** O discriminante  $\Delta = 1 > 0$ . As raízes são  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$  então trata-se do Caso 3. Como  $A = 1 > 0$ , tem-se:

$f(x)$  será POSITIVA se  $x < 0$  ou  $x > 1$  e NEGATIVA se  $0 < x < 1$  ■



## 6.5 Pontos de máximo e de mínimo

O vértice ( $V$ ) é um ponto de máximo ou de mínimo das parábolas.

Se  $A > 0$  então  $V$  é de **mínimo**,

Se  $A < 0$  então  $V$  é de **máximo**.

**Exemplo 6.5.1.** Encontre o ponto de máximo da função:  $f(x) = -x^2 - 4x + 8$ .

**Solução:** Para determinar as coordenadas do vértice usamos as Eqs. 3.11 e 3.13:

$$x_v = \frac{-(-4)}{2(-1)} = -2 \text{ e } y_v = -\frac{(-4)^2 - 4(-1)(8)}{4(-1)} = 12.$$

O maior valor (ponto máximo) de  $f(x)$  ocorre em  $x = -2$  e  $y = 12$  ■

**Exemplo 6.5.2.** Em um experimento de cultivo de beterraba foram obtidos os dados da tabela para  $(x)$  número de mudas/ $m^2$  e  $(P)$  produtividade ( $kg/m^2$ ).

$x$ , nº de mudas/ $m^2$ (unid)	20	50
$P$ , produtividade ( $kg/m^2$ )	0,8	0,6

É razoável considerar que para nenhuma muda plantada ( $x=0$ ) a produtividade é nula ( $P=0$ ).

a) Determine uma função do segundo grau para descrever a relação entre  $P$  e  $x$ .

b) Calcule o número de mudas que levaria a produtividade máxima.

**Solução:** a) O coeficiente  $C$  de  $P(x) = Ax^2 + Bx + C$  é zero, pois a parábola intersecta em  $P = 0$ .



Substituindo os valores de  $x$  e  $P$  na equação  $P(x) = Ax^2 + Bx$  obtemos um sistema de duas equações com duas variáveis,  $A$  e  $B$ :

$$0,8 = 400A + 20B$$

$$0,6 = 2500A + 50B$$

Resolvendo o sistema obtemos:  $A = -0,00093$  e  $B = 0,0586$ .

A função produtividade é:  $P(x) = -0,00093 x^2 + 0,0586x$ .



b) A produtividade máxima será no vértice de  $P(x)$ . Usando as Eqs. (3.11) e (3.13) obtemos :  $x_v = 31,42 \text{ mudas/m}^2$  e  $P_v = 0,92 \text{ kg}$  ■

## 6.6 Aplicações das funções quadráticas

As funções quadráticas são utilizadas em alguns fenômenos físicos e em como função de ajuste em problemas de otimização. Vamos analisar alguns desses casos.

### 6.6.1 Queda livre

O movimento vertical de uma pedra, tanto de subida como de descida, desconsiderando a presença do ar, pode ser modelado por uma função quadrática.

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (6.1)$$

onde  $y(t)$  é a posição no eixo  $Y$  vertical, apontando para cima (m),

$y_0$  é a posição inicial (m),

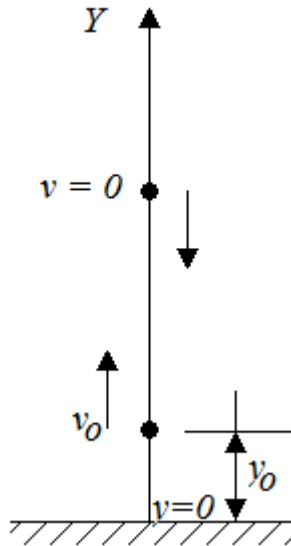
$v_0$  é a velocidade inicial (m/s),

$g$  é a aceleração da gravidade ( $\text{m/s}^2$ ) e

$t$  é o tempo (s).

A velocidade da pedra em cada instante, é dada por uma função de 1º grau:

$$v(t) = v_o - gt \quad (6.2)$$



Consideremos que  $y = 0$  corresponde ao nível do chão. Se uma pedra é jogada para cima por uma pessoa em pé, a posição de saída é  $y_o$  e como a pedra está recebendo um impulso, a velocidade inicial é  $v_o$ , diferente de zero, e com sinal

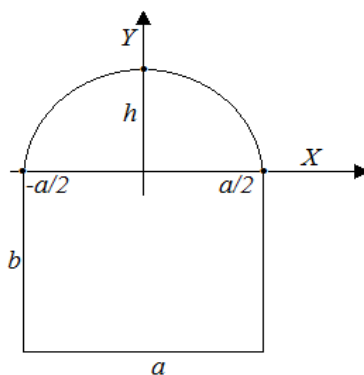
1. Considere  $y_o = 1 \text{ m}$ ;  $v_o = +5 \text{ m/s}$  e  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e faça um gráfico de  $y(t)$ .
2. Determine a altura máxima que a pedra alcançará e o tempo correspondente a esta posição, usando o que você conhece sobre vértice de parábolas.
3. A velocidade da pedra na posição de altura máxima é zero. Use a Eq. (6.2) para calcular o tempo que a pedra levará para atingir a altura máxima. Compare o resultado com o item (b).
4. Analise o sinal da velocidade em função do tempo.
5. Calcule o tempo que a pedra levará para atingir o chão.
6. Calcule a velocidade da pedra ao atingir o chão.

### 6.6.2 Arcos parabólicos em construções

Os arcos parabólicos são utilizados em construções, principalmente em portas, janelas, pontes e aquedutos. Consegue-se maior resistência em estruturas na forma de arcos, para grandes vãos, do que com vigas retas.



Consideremos a construção de uma janela composta por um retângulo e uma parábola na parte superior, conforme mostra a figura.



Podemos determinar uma equação de 2º grau para modelar o arco. Sejam  $x_1 = a/2$  e  $x_2 = -a/2$  as raízes da parábola.

Reescrevendo a Eq. (3.5) multiplicada por  $A$  (coeficiente de  $x^2$ , na Eq. 2.3), temos:

$$F(x) = A(x - x_1)(x - x_2) \quad (6.3)$$

Substituindo as raízes na Eq.(6.3) temos

$$F(x) = A\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x + \frac{a}{2}\right) = A\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right) \quad (6.4)$$

Substituindo as coordenadas do vértice  $V=(0,h)$  na Eq. ( 6.4), temos

$$h = -A\frac{a^2}{4} \quad .$$

$$\text{Então } A = -\frac{4h}{a^2} \quad .$$

Substituindo esta expressão de  $A$  na Eq. (6.4), temos

$$F(x) = \frac{h}{a^2} (a^2 - 4x^2) \quad .$$

a) Considerando  $a = 1,6 \text{ m}$  e  $h = 0,6 \text{ m}$ , determine a função  $F(x)$ .

b) Use a função  $F(x)$  para determinar ao menos cinco pontos para  $0 < x < a/2$ , que poderiam ser utilizados para fazer a forma de madeira, sobre a qual são assentados os tijolos.

### 6.6.3 Problemas de otimização (dados de experimentos)

Em experimentos de cultivos de espécies é comum obter-se dados de ( $P$ ) produtividade por outra variável ( $x$ ) tal como o número de mudas, a quantidade de um fertilizante ou de água. Neste tipo de problema, o objetivo é determinar o valor de  $x$  que **maximiza** a produtividade.

Se o número de dados disponíveis é de apenas três pontos, existe uma única parábola que passa por eles. Para determinar a parábola, podemos substituir os valores  $(x_i, P_i)$  na função de 2º grau

$$P(x) = Ax^2 + Bx + C. \quad (6.5)$$

$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$P$	$P_1$	$P_2$	$P_3$

Obtemos um sistema linear de três equações e três incógnitas:

$$\begin{cases} P_1 = Ax_1^2 + Bx_1 + C \\ P_2 = Ax_2^2 + Bx_2 + C \\ P_3 = Ax_3^2 + Bx_3 + C \end{cases} \quad (6.6)$$

A solução do sistema Eq. (6.6) pode ser obtida pelo Método de Cramer (determinantes). A matriz dos coeficientes e a dos termos independentes são:

$$M = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Por este método, são construídas três matrizes, substituindo o vetor  $b$  em cada coluna da matriz  $A$ .

$$M_1 = \begin{bmatrix} P_1 & x_1 & 1 \\ P_2 & x_2 & 1 \\ P_3 & x_3 & 1 \end{bmatrix}; M_2 = \begin{bmatrix} x_1^2 & P_1 & 1 \\ x_2^2 & P_2 & 1 \\ x_3^2 & P_3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } M_3 = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & P_1 \\ x_2^2 & x_2 & P_2 \\ x_3^2 & x_3 & P_3 \end{bmatrix}$$

Os determinantes das matrizes  $M$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  são obtidos pela Regra de Sarrus e a solução pelas razões:

$$A = \frac{\det(M_1)}{\det(M)}, B = \frac{\det(M_2)}{\det(M)} \text{ e } C = \frac{\det(M_3)}{\det(M)}.$$

Levando os valores de  $A$ ,  $B$  e  $C$  na Eq. (6.5) obtém-se a função que passa nos três pontos dados.

O cálculo de  $x$  que corresponde à maior produtividade é o cálculo das coordenadas do vértice da parábola.

Os dados da tabela abaixo são de um experimento com beterraba.

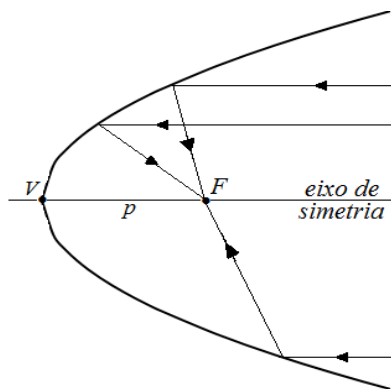
$x$ , nº de mudas/ $m^2$ ( <i>unid</i> )	20	30	50
$P$ , produtividade ( $kg/m^2$ )	0,8	1,2	0,6

- Determine uma função do segundo grau para descrever a relação entre  $P$  e  $x$ .
- Calcule o número de mudas que levaria a produtividade máxima.

#### 6.6.4 Antena parabólica

Consideremos uma parábola. Se a girarmos em torno de seu eixo, obteremos uma superfície chamada parabolóide de revolução. Uma antena parabólica é um parabolóide de revolução. Porque as antenas têm esta forma geométrica?

As parábolas têm um ponto característico chamado *foco* com a seguinte propriedade: *toda reta paralela ao eixo, reflete passando pelo foco*. No caso das antenas, as radiações eletromagnéticas vindas do espaço em múltiplas direções. Aquelas que são paralelas ao eixo de simetria da antena, são concentradas no foco, onde está o captador e assim o sinal é concentrado, melhorando a qualidade da recepção.



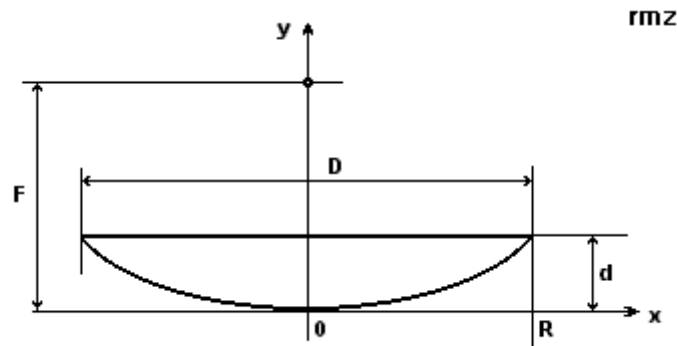
A equação canônica de uma parábola com eixo de simetria horizontal é

$$y^2 = 4Fx, \quad (6.7)$$

onde  $F$  é a distância do vértice ao foco. Com essas informações, podemos construir parábolas com o foco conhecido. Por exemplo, se  $F = 0,5 \text{ m}$ , podemos encontrar os pontos da parábola, atribuindo valores de  $x$  e calculando os de  $y$ , através da Eq. (6.7).

$$y = \pm\sqrt{2x}. \quad (6.8)$$

Assim, para  $x = 0,6 \text{ cm}$  (diâmetro de  $1,2 \text{ m}$ ) teremos  $y = 1,095 \text{ m}$  (altura  $d$  na figura).



- a) Calcule a posição  $F$  do foco, se  $d = 0,8m$  e o diâmetro da antena é  $1 m$ .
- b) Meça o diâmetro e a altura  $d$  de uma antena parabólica real e calcule o foco  $F$ . Verifique se esta localização coincide com a posição do coletor de radiação eletromagnética do equipamento.

## 6.7 Exercícios

**6.1** Considere que o lado de um quadrado é expresso pela variável  $x$ .

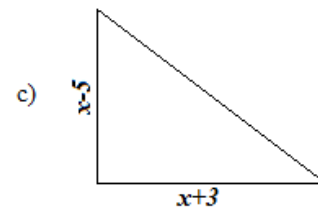
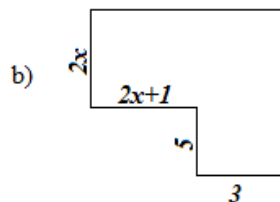
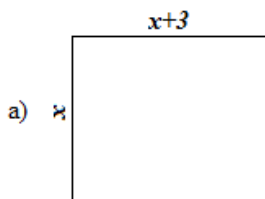
- Escreva a função que expressa a área  $A$  do quadrado em função do lado  $x$ .
- Faça uma tabela com valores de  $x$  e  $A$ .
- Faça um gráfico da função  $A(x)$ .
- A dependência entre  $A$  e  $x$  é linear ?

**6.2** Considere que o lado de um quadrado é expresso pela função  $x+1$ .

- Escreva a função que expressa a área  $A$  do quadrado em função da variável  $x$ .
- Faça um gráfico da função  $A(x)$  e compare com o gráfico do Ex. 1.

**6.3** Nos Exs. 1 e 2 a função área  $A(x)$  tem sentido para  $x \leq 0$  ?

**6.4** Determine a função que expressa a área de cada figura.



**6.5** Nas funções abaixo: calcule as raízes, identifique os pontos de intersecção com os eixos coordenados, calcule o vértice e faça o gráfico:

a)  $f(x) = x^2 - 1$

b)  $f(x) = x^2 - 2x - 3$

c)  $f(x) = -x^2 - x + 6$

d)  $f(x) = x^2 + 2x - 8$

**6.6** Identifique os intervalos em que cada função do Ex. 5, é positiva ou negativa. (Faça um desenho do eixo X indicando o sinal da função).

**6.7** A área de um círculo é dada pela fórmula:  $A = \pi r^2$ , onde  $r$  é o raio. Faça um gráfico da função  $A(r)$ , para  $r < 4$  cm.

**6.8** O deslocamento de uma pedra em queda livre (sem o atrito do ar e influência do vento) é dado pela fórmula:  $y(t) = y_o + v_o t - 0,5gt^2$ , onde  $y$  é a posição no eixo  $Y$  vertical, apontando para baixo,  $y_o$  é a posição inicial (m),  $v_o$  é a velocidade inicial (m/s),  $g$  é a aceleração da gravidade ( $m/s^2$ ) e  $t$  é o tempo (s).

6.a) Escreva a função  $y(t)$  sabendo que:  $y_o = 1$  m;  $v_o = 10$  m/s e  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>.

6.b) Faça um gráfico de  $y(t)$

6.c) Calcule o tempo para que a pedra atinja a altura máxima

6.d) Calcule a altura máxima

6.e) Calcule o tempo para que a pedra atinja o chão.

**6.9** Escreva uma função de 2º grau cujas raízes são:

a)  $x_1 = 2$  e  $x_2 = 3$

c)  $x_1 = -2$  e  $x_2 = 1$

b)  $x_1 = 3$  e  $x_2 = 4$

d)  $x_1 = -3$  e  $x_2 = 2$

**6.10** Faça um esboço do gráfico das funções do 2º grau usando as informações disponíveis.

a) As raízes são  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 3$ ; o vértice é  $V = (2, -2)$

b) As raízes são  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 3$ ; o vértice é  $V = (2, 2)$

c) As raízes são  $x_1 = 1$  e  $x_2 = -1$ ; e a função intersecta  $Y$  em  $(0, 1)$

d) A função intersecta  $X$  em  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 2$ ; e o vértice é  $V = (1, -2)$

**6.11** Escreva a função de 2º grau usando as seguintes informações:

a) O  $x$  do vértice é 1; a função intersecta  $Y$  na origem;  $A = -1$

b) As raízes são  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 3$  e a função intersecta  $Y$  em  $(0, 3)$

c) As raízes são  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 3$  e a função intersecta  $Y$  em  $(0, 6)$

d) As raízes são  $x_1 = -2$  e  $x_2 = 2$  e a função intersecta  $Y$  em  $(0, 5)$

**6.12** Faça um esboço do gráfico das parábolas:

- a)  $y^2 = x + 5$       c)  $y^2 = -x + 2$       e)  $y = \sqrt{x-2}$       g)  $x = y^2 - y - 2$   
 b)  $y^2 = 3x - 1$       d)  $y = \pm\sqrt{x-3}$       f)  $y = -\sqrt{x-2}$       h)  $x = -y^2 + y + 2$

**6.13** Uma porta de casa colonial tem a forma de uma parábola com a concavidade para baixo. A altura máxima, no eixo central da porta, tem  $2,50\text{ m}$  e a base  $2\text{ m}$ . Para marcar o contorno da porta os pedreiros precisam alguns pontos  $(x,y)$  para fazer a forma e assentar os tijolos, formando o arco parabólico.

- a) Determine a equação da parábola que satisfaz as medidas da porta.  
 b) Faça uma tabela com valores de  $x$  e  $y$  para, ao menos, cinco pontos da parábola.  
 c) Faça o gráfico da parábola e indique a posição dos pontos do item (b).

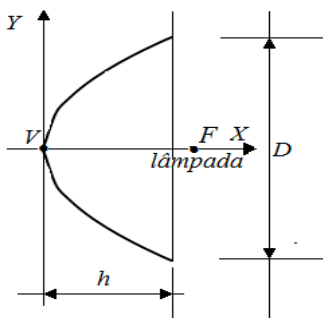
**6.14** Considere uma janela na forma de um quadrado com um semicírculo sobre ele. Encontre as dimensões da janela se a área total do quadrado e do semicírculo é  $60,96\text{m}^2$ .

**6.15** Em um experimento de cultivo de cenouras foi obtida uma função que relaciona a quantidade de adubo orgânico de galinha ( $x$ ,  $\text{kg}$ ) com a produtividade ( $P$ ,  $\text{kg}/\text{m}^2$ ):

$$P(x) = -2,13x^2 + 5,2x - 0,066.$$

- a) Determine a quantidade de adubo para a maior produtividade  
 b) Faça o gráfico de  $P(x)$  indicando o ponto de maior produtividade.

**6.16** Um refletor parabólico (paraboloide de revolução) tem uma lâmpada localizada no foco  $F = 5\text{ cm}$ , com a luz direcionada para o arco parabólico, como indica a figura. Qual deve ser o diâmetro  $D$  para que a profundidade do arco seja  $h = 5\text{ cm}$ ? (Veja a aplicação 6.4)



## 6.8 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

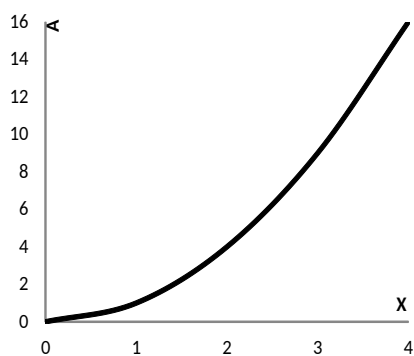
**6.1** a)  $A = x^2$

b)



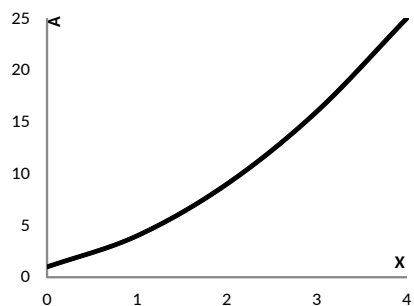
X	A
0	0
1	1
2	4
3	9

c)

d) Não, a dependência entre  $A$  e  $x$  é de 2º Grau.

6.2 a)  $A = x^2 + 2x + 1$

b)

6.3 No Ex. 1.1  $A(x) = x^2 > 0$  para qualquer  $x$ , se  $x < 0$  não existe quadrado. Analogamente, no Ex1.2. para  $x > -1$ .

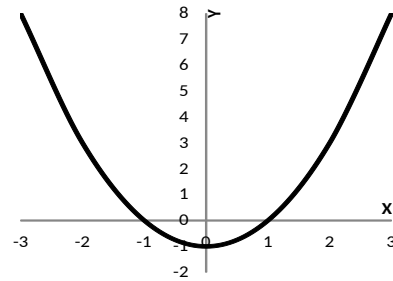
6.4 a)  $A = x^2 + 3x$

b)  $A = x^2 + 8x + 15$

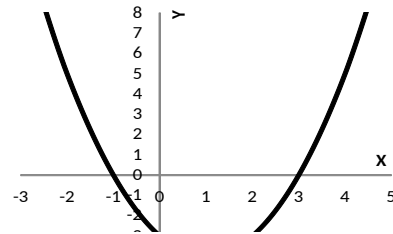
c)  $A = \frac{x^2 - 2x - 15}{2}$

6.5

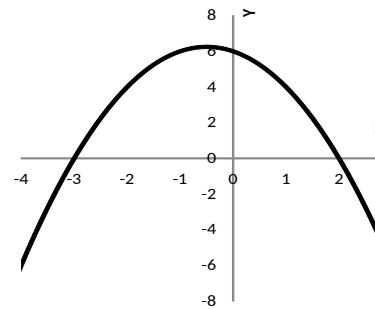
a) Raízes:  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 1$ . Intersecção com Y em  $(0, -1)$ ; Intersecção com X em  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ ;  $V = (0, -1)$



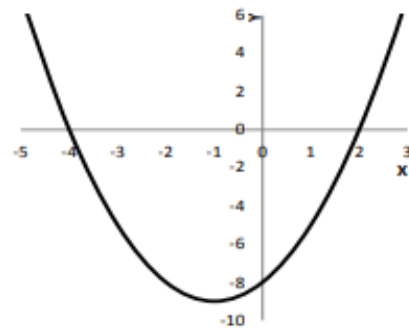
b) Raízes:  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 3$ . Intersecção com Y em  $(0, -3)$ ; Intersecção com X em  $(-1, 0)$  e  $(3, 0)$ ;  $V = (1, -4)$



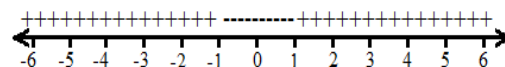
c) Raízes:  $x_1 = -3$ ;  $x_2 = 2$ . Intersecção com Y em  $(0, 6)$ ; Intersecção com X em  $(-3, 0)$  e  $(2, 0)$ ;  $V = (-1/2, 25/4)$



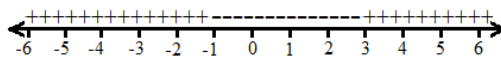
d) Raízes:  $x_1 = -4$ ;  $x_2 = 2$ . Intersecção com Y em  $(0, -8)$ ; Intersecção com X em  $(-4, 0)$  e  $(2, 0)$ ;  $V = (-1, -9)$ .



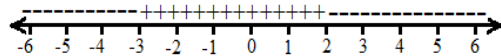
6.6 a) Positiva  $x < -1$  ou  $x > 1$ ; Negativa  $-1 < x < 1$



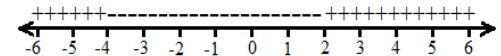
b) Positiva  $x < -1$  ou  $x > 3$ ; Negativa  $-1 < x < 3$



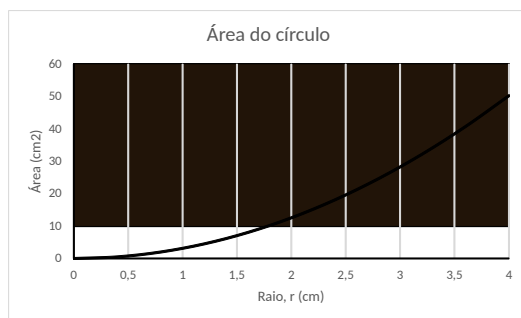
c) Positiva  $-3 < x < 2$ ; Negativa  $x < -3$  ou  $x > 2$



d) Positiva  $x < -4$  ou  $x > 2$ ; Negativa  $-4 < x < 2$

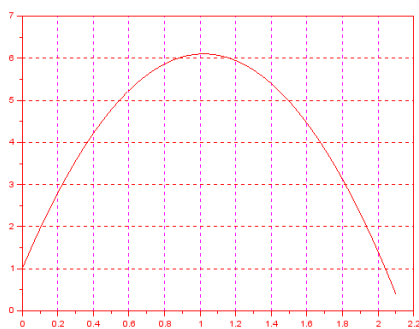


6.7



6.8 a)  $1 + 10t - 4.9t^2$

b)



c)  $t = 1,02$  s

d)  $y_{\text{máx}} = 6,102$  m

e)  $t = 2,13$  s.

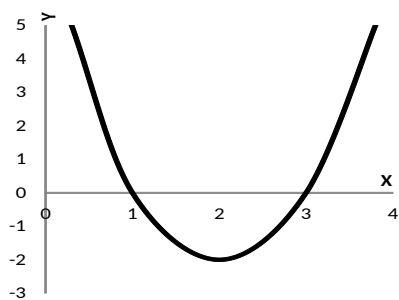
6.9 a)  $f(x) = x^2 - 5x + 6$

b)  $g(x) = x^2 - 7x + 12$

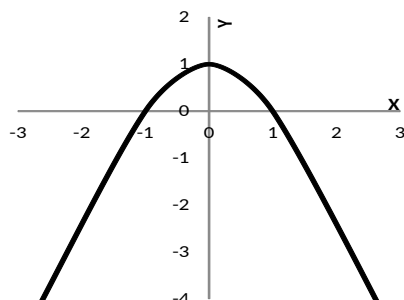
c)  $h(x) = x^2 + x - 2$

d)  $i(x) = x^2 + x - 6$

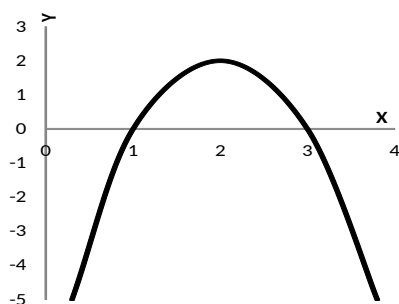
6.10



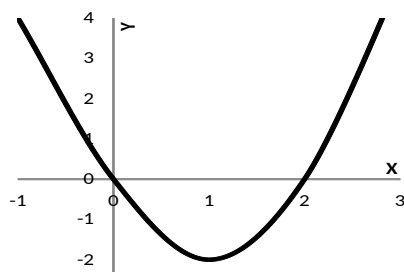
(a)



(c)



(b)



(d)

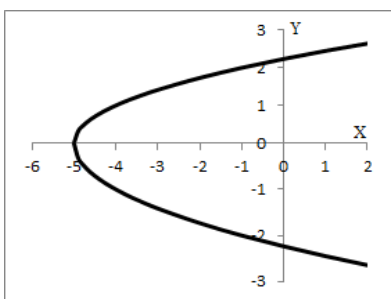
6.11 a)  $f(x) = -x^2 + 2x$

b)  $g(x) = x^2 - 4x + 3$

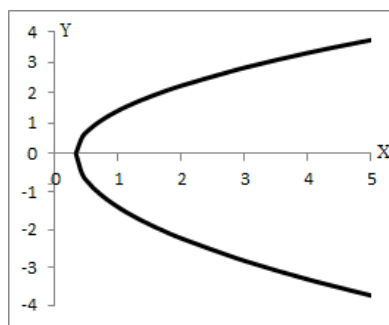
b)  $h(x) = 2x^2 - 8x + 6$

c)  $i(x) = -\frac{5}{4}x^2 + 5$

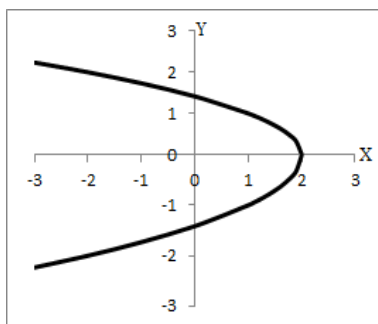
6.12



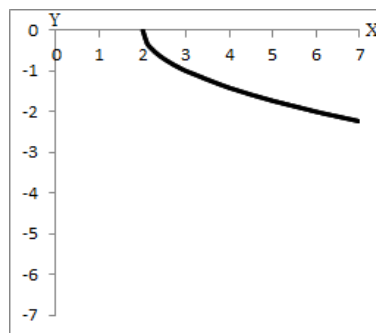
(a)



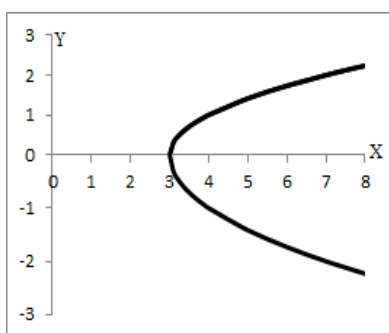
(b)



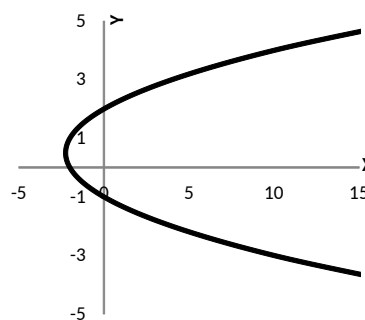
(c)



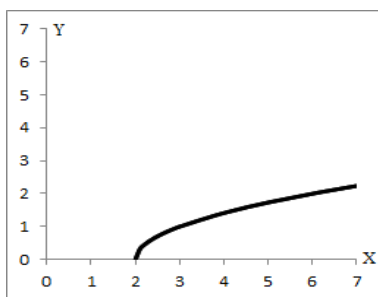
(f)



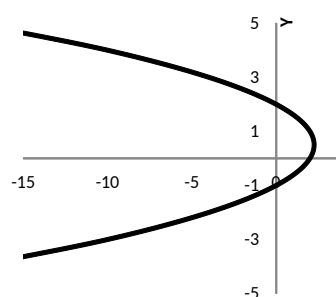
(d)



(g)



(e)



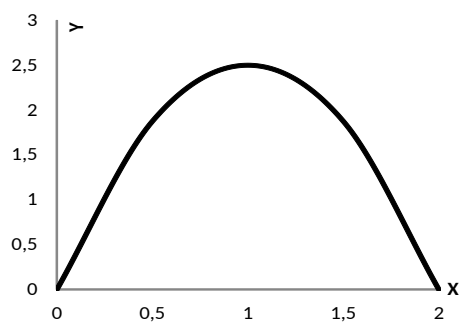
(h)

6.13 a)  $f(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 5x$

b)

x	y
0	0
1/2	1,875
1	2,5
3/2	1,875
1	0

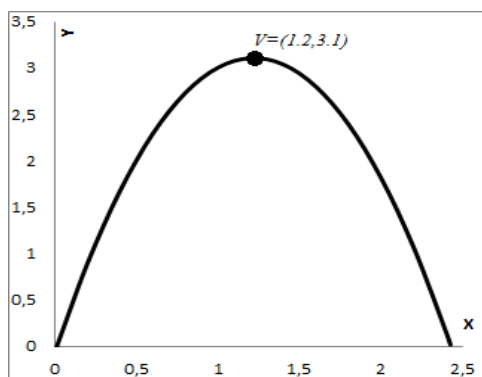
c)



6.14 Lado do quadrado = 6,6159 m e raio do semicírculo = 3,3079 m.

6.15 a)  $x = 1,22$  e  $P_{\max} = 3,107$ .

b)



6.16  $D = 20\text{cm}$ .

# Capítulo 7

## Inequações

### 7.1 Introdução

As soluções de equações polinomiais têm um número finito de soluções. As de 1º Grau têm uma, as de 2º Grau podem ter até duas, e assim por diante. Outros problemas podem ter infinitas soluções:

Observe os seguintes exemplos:

**Exemplo 7.1.1.** Quantos alunos na sua turma têm mais de 20 anos?

Solução: evidentemente a solução depende da idade dos alunos da turma. Porém, podemos afirmar que podem ocorrer diferentes tipos de soluções:

1. Nenhum aluno tem mais de 20 anos. Se  $x$  é o número de alunos com mais de 20 anos, a solução é  $S = \{ \}$ .
2. Existe um número finito de alunos com mais de 20 anos. Nesse caso,  $S = \{ x / x > 0 \}$  ■

**Exemplo 7.1.2.** Existe algum número real cujo dobro mais cinco seja maior do que zero? Quantos? Quais ?

Solução: Seja  $x$  o número procurado. Podemos escrever “dobro de  $x$  mais cinco seja maior do que zero” em linguagem matemática:

$$2x + 5 > 0.$$

Não é difícil verificar que existem infinitos  $x$  reais que satisfazem esta desigualdade:  $-1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, \dots$

Observe (fazendo testes particulares) que se  $x = -5/2$ , temos  $2x + 5 = 0$  e que

se  $x < -5/2$  temos  $2x + 5 < 0$  e que

se  $x > -5/2$  temos  $2x + 5 > 0$ .

Assim, podemos concluir que  $S = \{ x / x > -5/2 \}$  ■

Neste capítulo vamos aprender operar com desigualdades e resolver com segurança problemas semelhantes ao Ex.1.2.

## 7.2 Inequações: definição e propriedades

**Definição 7.2.1.** Uma inequação é uma desigualdade de duas expressões matemáticas.

**Exemplos:**

a)  $-x + 5 > x - \frac{1}{3}$

b)  $x^2 + 2 \leq 1$

c)  $\frac{x}{2} + \frac{x-1}{3} \geq 3$  ■

A desigualdade numérica  $2 < 3$  é verdadeira. Observe as seguintes operações:

1. Adicionando 10 em ambos os lados da desigualdade, temos:

$$2 + 10 < 3 + 10$$

$12 < 13$ . A nova desigualdade permanece verdadeira.

2. Adicionando -10 em ambos os lados da desigualdade, temos:

$$2 + (-10) < 3 + (-10)$$

$-8 < -7$ . A nova desigualdade permanece verdadeira.

3. Multiplicando 10 em ambos os lados da desigualdade, temos:

$$2 \cdot 10 < 3 \cdot 10$$

$20 < 30$ . A nova desigualdade permanece verdadeira.

4. Multiplicando -10 em ambos os lados da desigualdade, temos:

$$2 \cdot (-10) < 3 \cdot (-10)$$

$-20 < -30$ . A nova desigualdade **NÃO PERMANECE VERDADEIRA!**

Observe que, com exceção do produto por número negativo, opera-se com as inequações de forma semelhante às equações. Veja a seguir as propriedades das inequações.

**Propriedades das inequações:**

Sejam  $u, v$  e  $w$  números reais ou variáveis e  $c$  um número real.

1. **Transitiva:** Se  $u < v$  e  $v < w$  então  $u < w$ . Ou Se  $u > v$  e  $v > w$  então  $u > w$ .
2. **Adição:** Se  $u < v$ , então  $u \pm w < v \pm w$ . Ou Se  $u > v$ , então  $u \pm w > v \pm w$ .
3. **Multiplicação:** Se  $u < v$  e  $c > 0$  então  $u \cdot c < v \cdot c$ . Se  $u < v$  e  $c < 0$  então  $u \cdot c > v \cdot c$ .



**Exemplo 7.2.1.** Dada a desigualdade  $5 > 3$ , verifique se as desigualdades permanecem verdadeiras após a operação proposta:

1. Adicionar +4 em ambos os lados.
2. Adicionar - 4 em ambos os lados.
3. Multiplicar por (+2) em ambos os lados.
4. Multiplicar por (-2) em ambos os lados.

**Solução:**

1.  $5+4 > 3+4$

$9 > 7$ . A desigualdade permanece verdadeira. (Propriedade da adição)

2.  $5 - 4 > 3 - 4$

$1 > -1$ . A desigualdade permanece verdadeira. (Propriedade da adição)

3.  $5 \cdot (+2) > 3 \cdot (+2)$

$10 > 6$ . A desigualdade permanece verdadeira. (Propriedade da Multiplicação por um número positivo)

4.  $5 \cdot (-2) > 3 \cdot (-2)$

$-10 > -6$ . A desigualdade NÃO permanece verdadeira.

Nesse caso, para que a igualdade fique verdadeira é necessário **INVERTER A DESIGUALDADE: (Propriedade da Multiplicação por um número NEGATIVO):**

$-10 < -6$  ■

As propriedades das desigualdades são usadas para resolver inequações, como veremos nos próximos itens.

## EXERCÍCIOS 7.2

**7.2.1** Dada a desigualdade  $1 < 2$  (que é verdadeira):

- (a) Adicionando -5 em ambos os lados, a desigualdade permanece verdadeira?
- (b) Multiplicando ambos os lados por (+5), a desigualdade permanece verdadeira?
- (c) Multiplicando ambos os lados por (-5), a desigualdade permanece verdadeira?

**7.2.2** Sejam M, N e P três números reais.

- (a) Se  $M > N$  e  $N > P$ , o que se pode afirmar sobre M e P ?

(b) Se  $M < N$  e  $N < P$ , o que se pode afirmar sobre  $M$  e  $P$  ?

7.2.3 Compare as propriedades das equações com as das inequações. Em que operação elas se diferenciam?

7.2.4 Dada a inequação  $3x + 4 < 0$ . A inequação é verdadeira para:

- a)  $x = 1$  ?
- b)  $x = -2$  ?
- c)  $x = -4/3$  ?
- d)  $x = -3$  ?

7.2.5 Dada a inequação  $-x + 2 \geq 0$ . A inequação é verdadeira para:

- a)  $x = 1$  ?
- b)  $x = 2$  ?
- c)  $x = 3$  ?
- d)  $x = -3$  ?

7.2.6 Use as propriedades da adição e multiplicação para que o lado direito das inequações torne-se nulo:

- a)  $x + 2 > -x + 3$
- b)  $2 + 3x < 4x + 1$
- c)  $\frac{1}{2} + 2x \geq \frac{4}{3}$
- d)  $\frac{3}{4}x - \frac{2}{3} \leq 2$

7.2.7 Use as propriedades da adição e multiplicação para isolar  $x$  do lado esquerdo da inequação:

- a)  $3x - 8 < x + 4$
- b)  $2x - 12 < 4x + 6$
- c)  $3 + \frac{1}{2}x \geq 5x$
- d)  $\frac{x+1}{4} \leq \frac{x-1}{2}$

7.2.8 Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras. Justifique sua resposta. Considere  $a$  um número real.

- a)  $a^2 > 0 \Rightarrow a > 0$
- b)  $a > 3 \Rightarrow a \geq 3$
- c)  $a^3 > 0 \Rightarrow a > 0$
- d)  $a \geq 3 \Rightarrow a > 3$

## 7.3 Inequações de 1º Grau

**Definição 7.3.1.** Uma inequação do primeiro grau é uma desigualdade de expressões algébricas que pode ser reduzida à forma  $ax + b < 0$ , para  $a \neq 0$ .

**OBSERVAÇÃO:** Onde foi usado “<” pode ser também “>”, “≤” ou “≥”.

**Exemplo 7.3.1.** Resolva a inequação  $-x + 5 < 3x - 4$  para  $x \in \mathbf{R}$ .

**Solução:** Resolver uma inequação significa determinar os possíveis valores da incógnita (nesse caso  $x$ ) que satisfazem a desigualdade. Faremos isso de forma semelhante às equações, porém usando as propriedades das inequações.

Para termos  $x$  apenas do lado esquerdo, podemos adicionar  $(-3x)$  em ambos os lados da desigualdade (Propriedade da Adição):

$$(-3x) - x + 5 < (-3x) + 3x - 4$$

$$-4x + 5 < -4.$$

Para termos apenas números no lado esquerdo, podemos adicionar  $(-5)$  em ambos os lados da desigualdade (Propriedade da Adição):

$$-4x + 5 + (-5) < -4 + (-5).$$

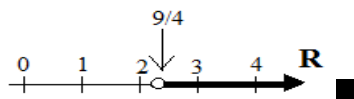
$$-4x < -9.$$

Finalmente, para termos apenas  $x$  no lado esquerdo, multiplicamos a inequação por  $(-1/4)$  e invertemos a desigualdade, pois  $-1/4 < 0$ . (Propriedade da multiplicação)

$$-4x \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) > -9 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$x > 9/4. \text{ Portanto, } S = \{ x \in \mathbf{R} / x > 9/4 \}.$$

Representando a solução na reta real, temos:



**Exemplo 7.3.2.** Resolva a inequação  $\frac{x}{2} \geq \frac{3x+1}{3}$  para  $x \in \mathbf{R}$ .

**Solução:** Para evitar trabalhar com denominadores, multiplicamos a inequação por  $(6)$ . (Propriedade da multiplicação)

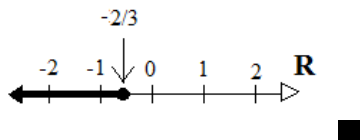
$$6 \cdot \frac{x}{2} \geq \frac{3x+1}{3} \cdot 6$$

$3x \geq 6x + 2$ . Adicionamos  $(-6x)$  (Propriedade da Adição)

$-3x \geq 2$ . Dividimos por  $(-3)$  (Propriedade da Multiplicação por número negativo)

$x \leq -\frac{2}{3}$ . Portanto,  $S = \{ x \in \mathbf{R} / x \leq -2/3 \}$ .

Representando a solução na reta real, temos:



### Solução da inequação de primeiro grau com o lado direito nulo

A resolução de uma inequação do 1º Grau também pode ser obtida utilizando a redução à forma  $ax + b < 0$ , para  $a \neq 0$ . O sinal da desigualdade pode ser também “>”, “≤” ou “≥”. Observemos que sempre é possível escrever essa forma com  $a > 0$ . Por exemplo,

Se temos  $-2x + 5 > 0$  podemos multiplicar por  $(-1)$  obtendo,  $2x - 5 < 0$ .

Os seguintes passos levam à solução da inequação de 1º Grau:

1º) Passo: Encontrar a solução da equação correspondente  $ax + b = 0$  que é  $x = -b/a$ .

2º) Passo: Verificar o sinal da desigualdade :

1. Se for “>” então a solução da inequação é:  $S = \{ x \in \mathbf{R} / x > -b/a \}$
2. Se for “<” então a solução da inequação é:  $S = \{ x \in \mathbf{R} / x < -b/a \}$
3. Se for “≤” então a solução da inequação é:  $S = \{ x \in \mathbf{R} / x \leq -b/a \}$
4. Se for “≥” então a solução da inequação é:  $S = \{ x \in \mathbf{R} / x \geq -b/a \}$

**Exemplo 7.3.3.** Resolva a inequação  $\frac{x}{2} \geq \frac{3x+1}{3}$  para  $x \in \mathbf{R}$  reduzindo a inequação à forma  $ax + b \leq 0$ .

**Solução:** Multiplicando a inequação por  $(6)$  e adicionado  $(-6x)$ , obtemos (ver Ex. 3.2):

$3x \geq 6x + 2$ . Adicionando  $(-6x - 2)$ , obtemos

$-3x - 2 \geq 0$ . Multiplicando por  $(-1)$ , obtemos

$3x + 2 \leq 0$ . A inequação está na forma  $ax + b \leq 0$  com  $a > 0$ .

1º) Passo: A solução da equação correspondente é  $x = -2/3$ .

2º) Passo: o sinal da inequação com  $a > 0$  é “≤”. Então a solução é (iii):

$S = \{ x \in \mathbf{R} / x \leq -2/3 \}$  ■

**Exemplo 7.3.4.** Resolva a dupla inequação  $-\frac{3}{2} \leq \frac{x+1}{2} < 2$  para  $x \in \mathbf{R}$ .

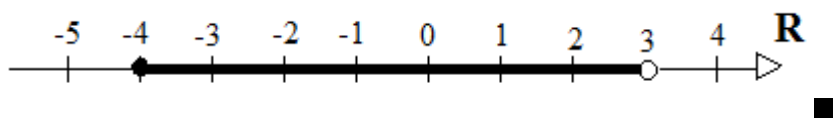
**Solução:** Usaremos as propriedades das inequações para isolar  $x$  entre as desigualdades. Para evitar os denominadores, multiplicamos a dupla inequação por 2.

-  $3 \leq x+1 < 4$ . Adicionando  $(-1)$  em cada membro, temos:

$$-3 + (-1) \leq x+1 + (-1) < 4 + (-1)$$

$$-4 \leq x < 3. \text{ Portanto, } S = \{x \in \mathbf{R} / -4 \leq x < 3\}.$$

Representando a solução na reta real, temos:



### EXERCÍCIOS 7.3

**7.3.1** Resolva as inequações do primeiro grau usando as propriedades:

a)  $2x - 1 \leq 3x + 3$

b)  $2(5 - x) + 2(3x - 1) \geq 2x + 1$

c)  $\frac{5x+7}{4} \leq -2$

d)  $\frac{2-x}{3} + \frac{3x-1}{2} < -1$

**7.3.2** Represente as soluções do Exercício anterior na reta real.

**7.3.3** Resolva as inequações de primeiro grau anulando o lado direito:

a)  $\frac{x-2}{3} + \frac{x+2}{3} < 2$

b)  $\frac{2x-1}{5} \leq \frac{x+3}{2} + 3x$

c)  $\frac{1}{6} + \frac{x+1}{3} > \frac{2}{3}$

d)  $\frac{3x+1}{3} \geq \frac{x-3}{4} - \frac{3x+1}{6}$

**7.3.4** Resolva as inequações duplas de primeiro grau:

a)  $2 \leq x + 6 < 9$

b)  $4 \geq \frac{y-3}{5} \geq -1$

c)  $-1 \leq -3x + 2 < 5$

d)  $-2 \leq \frac{2t+3}{3} \leq \frac{5}{4}$

**7.3.5** Represente as soluções do Exercício anterior na reta real.

## 7.4 Inequações do 2º Grau

**Definição 7.4.1.** Uma inequação do segundo grau é uma desigualdade de expressões algébricas que pode ser reduzida à forma

$$ax^2 + bx + c < 0 \text{ para } a \neq 0.$$

**OBSERVAÇÃO:** Onde foi usado “<” pode ser também “>”, “≤” ou “≥”.

A resolução de uma inequação do 2º Grau pode ser obtida utilizando a redução à forma

$$x^2 + bx + c < 0. \text{ (Onde foi usado “<” pode ser também “>”, “≤” ou “≥” )}$$

segundo os seguintes passos:

1º ) Passo: Encontrar as soluções reais (se existirem) da equação  $ax^2 + bx + c = 0$ , que chamaremos  $x_1$  e  $x_2$  e consideraremos  $x_1 < x_2$ .

2º ) Passo: classificar as raízes:

**1º) Caso: raízes não reais (nesse caso o discriminante  $b^2 - 4ac < 0$ )**

1. Se o sinal da desigualdade for “<” ou “≤”, então  $S = \{ \}$
2. Se o sinal da desigualdade for “>” ou “≥”, então  $S = \{ x \in \mathbf{R} \}$ .

**2º) Caso: raízes reais idênticas:  $x_1 = x_2$  (nesse caso o discriminante  $b^2 - 4ac = 0$ )**

1. Se o sinal da desigualdade for “<”, então  $S = \{ \}$
2. Se o sinal da desigualdade for “≤”, então  $S = \{ x \in \mathbf{R} / x = x_1 \}$ .
3. Se o sinal da desigualdade for “>”, então  $S = \{ x \in \mathbf{R} / x \neq x_1 \}$
4. Se o sinal da desigualdade for “≥”, então  $S = \{ x \in \mathbf{R} \}$

**3º) Caso: raízes reais distintas:  $x_1 \neq x_2$  (nesse caso o discriminante  $b^2 - 4ac > 0$ )**

1. Se o sinal da desigualdade for “<”, então  $S = \{ x \in \mathbf{R} / x_1 < x < x_2 \}$
2. Se o sinal da desigualdade for “≤”, então  $S = \{ x \in \mathbf{R} / x_1 \leq x \leq x_2 \}$
3. Se o sinal da desigualdade for “>”, então  $S = \{ x \in \mathbf{R} / x < x_1 \text{ ou } x > x_2 \}$
4. Se o sinal da desigualdade for “≥”, então  $S = \{ x \in \mathbf{R} / x \leq x_1 \text{ ou } x \geq x_2 \}$

**Exemplo 7.4.1.** Resolva a inequação  $x^2 + 2x \leq 2x^2 + 3$  para  $x \in \mathbf{R}$ .

**Solução:** Precisamos reduzir a inequação dada à forma  $ax^2 + bx + c \leq$  ou  $\geq 0$ . Para isso, adicionamos  $(-2x^2 - 3)$  em ambos os lados e obtemos:

$$-x^2 + 2x - 3 \leq 0. \text{ Multiplicando por } (-1), \text{ para que } a > 0, \text{ temos:}$$

$$x^2 - 2x + 3 \geq 0. \text{ (Observe que o sinal da desigualdade ficou “} \geq \text{” )}$$

1º) Passo: A equação  $x^2 - 2x + 3 = 0$  não tem raízes reais.

2º) Passo: como as raízes não são reais, temos o 1º Caso. Como o sinal da desigualdade é “ $\geq$ ”, temos a situação (ii). Então, a solução será:

$$S = \{x \in \mathbb{R}\}. \text{ Ou seja, qualquer número real satisfas a inequação dada } \blacksquare$$

**Exemplo 7.4.2.** Resolva a inequação  $x^2 - x < x + 3$  para  $x \in \mathbb{R}$ .

**Solução:** Precisamos reduzir a inequação dada à forma  $ax^2 + bx + c < \text{ou } > 0$ . Para isso, adicionamos  $(-x - 3)$  em ambos os lados e obtemos:

$$x^2 - 2x - 3 < 0.$$

1º) Passo: As raízes da equação  $x^2 - 2x - 3 = 0$  são  $x_1 = -1$  e  $x_2 = 3$ .

2º) Passo: como as raízes são reais e distintas, temos o 3º Caso. Como o sinal da desigualdade é “ $<$ ”, temos a situação (i). Então, a solução está entre as raízes:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 3\} \blacksquare$$

## EXERCÍCIOS 7.4

**7.4.1** Resolva as inequações de segundo grau para  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $x^2 - 4x < 0$

b)  $x^2 - 4x + 3 > 0$

c)  $x^2 + 6x + 9 < 0$

d)  $x^2 + 4x + 4 \leq 0$

e)  $x^2 + 2x + 1 \geq 0$

f)  $x^2 - 9 < 0$

g)  $x^2 - 9 > 0$

h)  $x^2 + 9 \leq 0$

i)  $x^2 - 9 \geq 0$

**7.4.2** Represente as soluções do Exercício anterior na reta real.

## 7.5 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

### RESPOSTAS 7.2

**7.2.1** a) Sim; b) Sim; c) Não

**7.2.2** a)  $M > P$ ; b)  $M < P$

**7.2.3** Na multiplicação de um número negativo por uma inequação deve-se inverter o sentido da desigualdade.

**7.2.4** a) Não; b) Sim; c) Não; d) Sim

**7.2.5** a) Sim; b) Sim; c) Não; d) Sim

**7.2.6** a)  $2x - 1 > 0$

b)  $-x + 1 < 0$

c)  $2x - 5/6 \geq 0$

d)  $9x - 32 \leq 0$

**7.2.7** a)  $x < 6$

b)  $x > -9$

c)  $x \leq \frac{2}{3}$

d)  $x \geq 3$

### RESPOSTAS 7.3

**7.3.1** a)  $S = \{x \in R / x \geq -4\}$

b)  $S = \{x \in R / x \geq -7/2\}$

c)  $S = \{x \in R / x \leq 3\}$

d)  $S = \{x \in R / x < -1\}$

**7.3.3** a)  $2x - 6 < 0$  e  $S = \{x \in R / x < 3\}$

b)  $31x + 17 \geq 0$  e  $S = \{x \in R / x \geq -17/31\}$

c)  $2x - 1 > 0$  e  $S = \{x \in R / x > 1/2\}$

d)  $x + 1 \geq 0$  e  $S = \{x \in R / x \geq -1\}$

**7.3.4** a)  $S = \{x \in R / -4 \leq x < 3\}$

b)  $S = \{y \in R / 17 \geq y \geq -2\}$

c)  $S = \{x \in R / 1 \geq x > -1\}$

d)  $S = \{t \in R / -9/2 \leq t \leq 3/8\}$

### RESPOSTAS 7.4

**7.4.1** a)  $S = \{x \in R / 0 < x < 4\}$

b)  $S = \{x \in R / x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

c)  $S = \emptyset$

d)  $S = \{-2\}$



e)  $S = \{x \in R\}$

f)  $S = \{x \in R / -3 < x < 3\}$

g)  $S = \{x \in R / x < -3 \text{ ou } x > 3\}$

h)  $S = \{x \in R / x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3\}$

i)  $S = \{x \in R / x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3\}$



# Capítulo 8

## Potências e funções exponenciais

### 8.1 Introdução

As funções exponenciais modelam uma série de problemas de interesse científico tais como aplicações financeiras a juros compostos, crescimento populacional, reações químicas, secagem de produtos agrícolas, entre outras.

### 8.2 Potências

**Definição 2.1:** A potência  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n > 0$ , de um número  $b \in \mathbb{R}$  é o produto de  $b$ ,  $n$  vezes, por ele mesmo:

$$\begin{array}{c} \text{expoente} \\ \downarrow \\ b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ vezes}} \\ \uparrow \\ \text{base} \end{array}$$

**Exemplo 8.2.1.** Calcule (a)  $2^3$ , (b)  $(-3)^4$ , (c)  $-3^4$  e (d)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

**Solução:**

(a)  $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

(b)  $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

(c)  $-3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$

(d)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

**Propriedade das potências**

**P1:**  $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$  (Produto de potências de mesma base)

**Demonstração:** Expandindo as potências, temos o produto de  $n$  bases  $b$  por  $m$  bases  $b$ . Como todas as bases são iguais, pela Def. 2.1, o expoente será  $n + m$ .

$$b^n \cdot b^m = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ vezes}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{m \text{ vezes}} = b^{n+m}$$

■

**Exemplo 8.2.2.** Resolva os produtos de potências:

(a)  $2^3 \cdot 2^5$  e (b)  $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$ .

**Solução:**

(a)  $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$

(b)  $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$  ■

**P2:**  $\frac{b^m}{b^n} = b^m : b^n = b^{m-n}$ . (Divisão de potências de mesma base)

**Demonstração:** Escrevendo a divisão como fração e expandindo as potências, podemos cancelar as bases  $b$  do numerador e denominador. O número de bases restantes será  $n - m$ .

$$b^n : b^m = \frac{b^n}{b^m} = \frac{\overbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}^{n \text{ vezes}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{m \text{ vezes}}} = b^{n-m}$$

■

**Exemplo 8.2.3.** Resolva as divisões de potências:

(a)  $3^4 : 3^2$  e (b)  $\left(\frac{5}{2}\right)^5 : \left(\frac{5}{2}\right)^3$ .

**Solução:**

(a)  $3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2$

(b)  $\left(\frac{5}{2}\right)^5 : \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^{5-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$  ■

**P3:  $b^0 = 1$ . (Expoente zero)**

**Demonstração:** Seja  $\frac{b^n}{b^n} = 1$ . Pela P2, tem-se  $\frac{b^n}{b^n} = b^{n-n} = b^0 = 1$  ■

**Exemplo 8.2.4.** (a) Mostre que :  $3^4 : 3^4 = 1$ .

(b) Resolva a expressão numérica:  $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^0 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$ .

**Solução:**

(a)  $3^4 : 3^4 = 3^{4-4} = 3^0 = 1$

(b)  $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^0 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^3$  ■

**P4:  $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$ . (Expoente negativo)**

**Demonstração:** Sejam  $b^p$  e  $b^q$ , tal que  $n = q - p > 0$ . Usando a P2, tem-se:

$b^{-n} = b^{p-q} = \frac{b^p}{b^q}$ . Expandindo as potências e cancelando as bases  $b$ , o numerador será  $1$  e o denominador terá  $n = q - p$  bases  $b$ . Então,

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n} \text{ . } \blacksquare$$

**Exemplo 8.2.5.** (a) Mostre que :  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ .

(b) Resolva a expressão numérica:  $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + 2\right)^{-2}$ .

**Solução:**

(a) Usando a P4:  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = 1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$ .

(b) Resolvendo inicialmente dentro do parênteses da potência maior, aplicando a P4:

$$\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + 2\right)^{-2} = (3 + 2)^{-2} = 5^{-2} \text{ . Aplicando a P4, novamente:}$$

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \text{ } \blacksquare$$

$$\mathbf{P5: } b^{m^n} = b^{\overbrace{m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot \dots \cdot m}^{n \text{ vezes}}} \quad (\text{Potência de expoente})$$

**Demonstração:** Expandindo a potência  $m^n$  obtém-se o expoente de  $b^{m^n}$  ■

**Exemplo 8.2.6.** Resolva: (a)  $2^{2^3}$  (b)  $2^{(-3)^2}$ .

**Solução:**

(a) Usando a P5:  $2^{2^2 \cdot 2} = 2^8 = 256$ .

(b) Usando a P5:  $2^{(-3) \cdot (-3)} = 2^9$  ■

**P6:  $(b^m)^n = b^{m \cdot n}$  (Potência de potência)**

**Demonstração:** Expandindo a potência  $(b^m)^n$  obtém-se um produto de  $n$  fatores, cuja base é  $b$ . Usando a propriedade do produto (P1), conserva-se a base e soma-se os  $n$  expoentes  $m$ . Então,

$$(b^m)^n = \overbrace{b^m \cdot b^m \cdot b^m \cdot b^m \cdot \dots \cdot b^m}^{n \text{ vezes}} = b^{m \cdot n}$$

■

**Exemplo 8.2.7.** Resolva: (a)  $((-2)^2)^3$  (b)  $(2^{(-3)})^2$ .

**Solução:**

(a) Usando a P6:  $((-2)^2)^3 = (-2)^{2 \cdot 3} = (-2)^6 = 64$

ou usando a Def. 2.1:

$$((-2)^2)^3 = (-2)^2 \cdot (-2)^2 \cdot (-2)^2 = (-2)^6 = 64.$$

(b) Usando a P6:  $(2^{(-3)})^2 = 2^{-6} = \frac{1}{2^6}$  ■

**P7:  $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$  (Potência de fração)**

A demonstração desta propriedade é obtida diretamente com a Def. 2.1.

**Exemplo 8.2.8.** Resolva: (a)  $(\frac{2}{3})^3$  (b)  $(-\frac{3}{4})^{-2}$ .

**Solução:**

(a) Usando a P7:  $(\frac{2}{3})^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$ .

(b) Usando a P4:  $(-\frac{3}{4})^{-2} = (-\frac{4}{3})^2$ . Usando a P7:  $(-\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9}$ . ■

**P8:  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$  (Potência do produto)**

**Demonstração:** Expandindo a base  $(a \cdot b)$   $n$  vezes e usando a Def. 2.1 para os fatores  $a$  e  $b$ , obtém-se o produto de  $a^n \cdot b^n$ .

$$(a \cdot b)^n = \overbrace{a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot \dots \cdot a \cdot b}^{n \text{ vezes}} = a^n \cdot b^n$$

■

**Exemplo 8.2.9.** Resolva: (a)  $(2 \cdot 3)^3$  (b)  $(2 + 3)^3$ .

**Solução:**

(a) Usando a P8:  $2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$ .

(b) Nesse caso não é possível aplicar a P8, mas pode-se adicionar dentro do parênteses e aplicar a definição:  $(2 + 3)^3 = 5^3 = 125$  ■

**P9.** Se  $b^m = b^n$  então  $m = n$ . (**Igualdade de duas potências: bases iguais**)

**Demonstração:** Dividindo  $b^m = b^n$  por  $b^m$ , obtém-se

$$1 = \frac{b^n}{b^m} = b^{m-n}. \text{ Portanto, pela propriedade do expoente zero (P3) tem-se } m - n = 0 \text{ ou } m = n \text{ ■}$$

**Exemplo 8.2.10.** Resolva as equações exponenciais:

(a)  $2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$  (b)  $7^{2x+1} = \frac{1}{49}$ .

**Solução:**

(a) Para usar a P9, é necessário que as bases das potências sejam iguais. Usando a P4 no lado direito:  $2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ . Usando a P9:  $x = 1$ .

(b) Para usar a P9, é necessário que as bases das potências sejam iguais. Decompondo o 49 e usando a P4 no lado direito:  $7^{2x+1} = 7^{-2}$ . Usando a P9:  $2x + 1 = -2$ . resolvendo para  $x$  tem-se:  $x = -3/2$  ■

**P10. (Igualdade de duas potências: expoentes iguais)**

Se  $a^m = b^m$ , para  $m \neq 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , então  $a = b$ .

**Demonstração:** Dividindo  $a^m = b^m$  por  $a^m$  e usando as propriedades P3 e P7, obtém-se

$$1 = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m. \text{ Como } m \neq 0, \text{ para que essa igualdade seja verdadeira } \frac{b}{a} = 1 \text{ ou } a = b \text{ ■}$$

**Exemplo 8.2.11.** Resolva a equação exponencial:  $16 = (3x - 2)^4$ .

**Solução:**

Para usar a P10, é necessário que os expoentes das potências sejam iguais. Decompondo 16, tem-se:  $2^4 = (3x - 2)^4$ . Usando a P10:

$$2 = 3x - 2. \text{ Resolvendo para } x, \text{ tem-se } x = 4/3 \text{ ■}$$

## EXERCÍCIOS 8.2

**8.2.1** Calcule as potências:

a)  $4^2 =$

c)  $0^5 =$

e)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3 =$

g)  $\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$

b)  $(-4)^3 =$

d)  $1^{100} =$

f)  $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 =$

h)  $-5^4 =$

**8.2.2** Resolva as operações com as potências usando as propriedades P1 e P2:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} 2^2 \cdot 2^4 = & \text{c)} 3^4 : 3^2 = & \text{e)} \left(\frac{5}{4}\right)^3 : \left(\frac{5}{4}\right)^2 = & \text{g)} \left(\frac{7}{4}\right)^3 : \left(\frac{7}{4}\right)^5 = \\ \text{b)} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = & \text{d)} \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = & \text{f)} 5^2 : 5^5 = & \text{h)} 8^{-2} \cdot 8^5 = \end{array}$$

**8.2.3** Resolva as potências usando a propriedade do expoente negativo:

$$\text{a)} 2^{-3} = \quad \text{b)} 3^{-5} = \quad \text{c)} \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \quad \text{d)} \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} =$$

**8.2.4** Mostre que  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ .

**8.2.5** Verifique se  $2^{3^2} = (2^3)^2$ .

**8.2.6** Resolva as expressões numéricas usando as propriedades:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = & \text{c)} \left[2^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = & \text{e)} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \\ \text{b)} (-2)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = & \text{d)} \left[\left(\frac{7}{3}\right)^2 \cdot 14^{-3}\right]^{-1} = & \text{f)} \left(-\frac{6}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{25}\right)^{-2} = \end{array}$$

**8.2.7** Calcule o valor das expressões:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{2 - \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{10}\right)}{\left(\frac{5}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-1}} = & \text{c)} 1,333\dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \\ \text{b)} \left(7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{-\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{4}{3}}\right)^{-2} = & \text{d)} \left(\frac{7}{5} \cdot \left(\frac{49}{25}\right)^{-1} \cdot 5^{-1} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\right)^{100} = \end{array}$$

**8.2.8** Resolva as equações exponenciais usando as propriedades P9 e P10:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 7^x = 343 & \text{c)} \left(\frac{1}{25}\right)^x = 125 & \text{e)} \left(\frac{4}{25}\right)^{3x+1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-x} \\ \text{b)} 4^{x-2} = \frac{1}{2} & \text{d)} \left(\frac{3}{4}\right)^x = 0,75 & \text{f)} \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} = 1 \end{array}$$

**8.2.9** Resolva a equação exponencial:  $(243)^{2x+8/5} = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]^{x-1}$ .

## 8.3 Funções exponenciais

**Definição:** Uma função exponencial tem a forma

$$f(x) = A \cdot b^{m \cdot x} \quad (3.1)$$

onde os parâmetros  $A$  e  $m \in \mathbb{R}$  e a base  $b \in \mathbb{R}^+$ , com  $b \neq 1$ .

**Exemplo 8.3.1.** Dadas as funções  $f(x) = 2^x$  e  $g(x) = 2^{-x}$ :

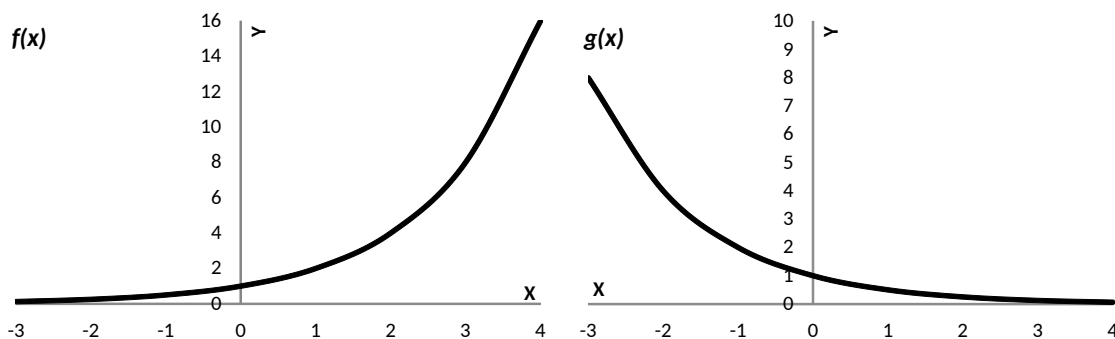
1. Construa uma tabela com valores de  $x$ ,  $f(x)$  e  $g(x)$ .
2. Faça o gráfico das funções  $f(x)$  e  $g(x)$ .
3. Verifique se são crescentes ou decrescentes.
4. Determine o domínio e a imagem das funções.



**Solução:** Os parâmetros da função  $f(x)$  são:  $A = 1$  e  $m = 1$ . Da função  $g(x)$  são  $A = 1$  e  $m = -1$ .

(a) atribuindo valores para  $x$ , calcula-se os valores de  $f(x)$  e  $g(x)$ , mostrados na tabela.

$x$	$f(x)$	$g(x)$
-3	0,125	8
-2	0,25	4
-1	0,5	2
0	1	1
1	2	0,5
2	4	0,25
3	8	0,125
4	16	0,0625



A função  $f(x)$  é crescente (sinal do expoente  $m$  é positivo) e a  $g(x)$  é decrescente (sinal do expoente  $m$  é negativo).

$$D_m f(x) = \{x \in \mathbb{R}\} \text{ e } I_m f(x) = \{x \in \mathbb{R}^+\}$$

$$D_m g(x) = \{x \in \mathbb{R}\} \text{ e } I_m g(x) = \{x \in \mathbb{R}^+\}$$

Deve-se observar que a função exponencial é uma função *monótona*: ou cresce, ou decresce, sem apresentar pontos de máximo ou de mínimo como as parábolas, por exemplo ■

**Exemplo 8.3.2.** As bactérias se reproduzem de forma assexuada, por bipartição. Isto significa que cada indivíduo se parte em dois geneticamente iguais. Em condições favoráveis, se reproduzem rapidamente. Consideremos que uma bactéria se divide a cada 1 h. Qual será a população de bactérias em 24 h?

**Solução:** As duas primeiras colunas da tabela abaixo mostram valores das variáveis tempo ( $t$ ) e número de indivíduos ( $N$ ). A terceira coluna mostra expressões numéricas que geram os valores da função  $N(t)$ .

Tempo (t)	N(t)	Expressão
0	1	$2^0$
1	2	$2^1$
2	4	$2^2$
3	8	$2^3$
4	16	$2^4$
5	32	$2^5$
...	...	...
t		$2^t$

Com base na sequência de terceira coluna, as variáveis  $N$  e  $t$  se relacionam de acordo com a função  $N(t) = 2^t$ . Assim, para  $t=24$ , tem-se  $N(24) = 2^{24}$ , ou seja  $N(24) = 16.777.216$  de bactérias

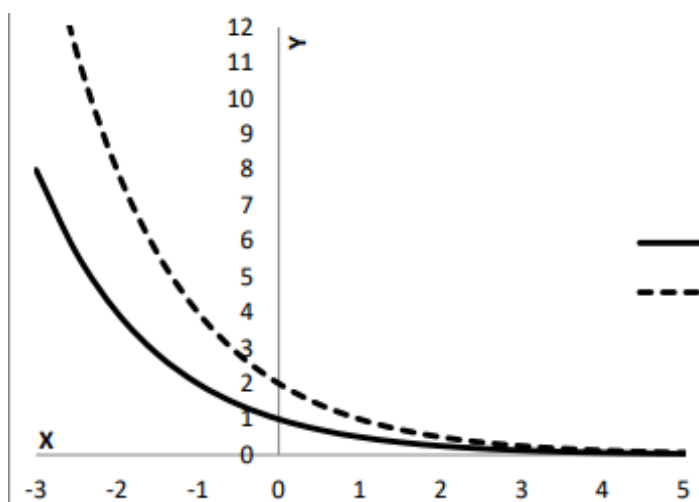


**Exemplo 8.3.3.** Faça os gráficos das funções  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  e  $g(x) = 2^{-x+1}$ .

**Solução:** Usando as propriedades das potências, a  $f(x)$  pode ser escrita como

$$f(x) = (2^{-1})^x = 2^{-x}.$$

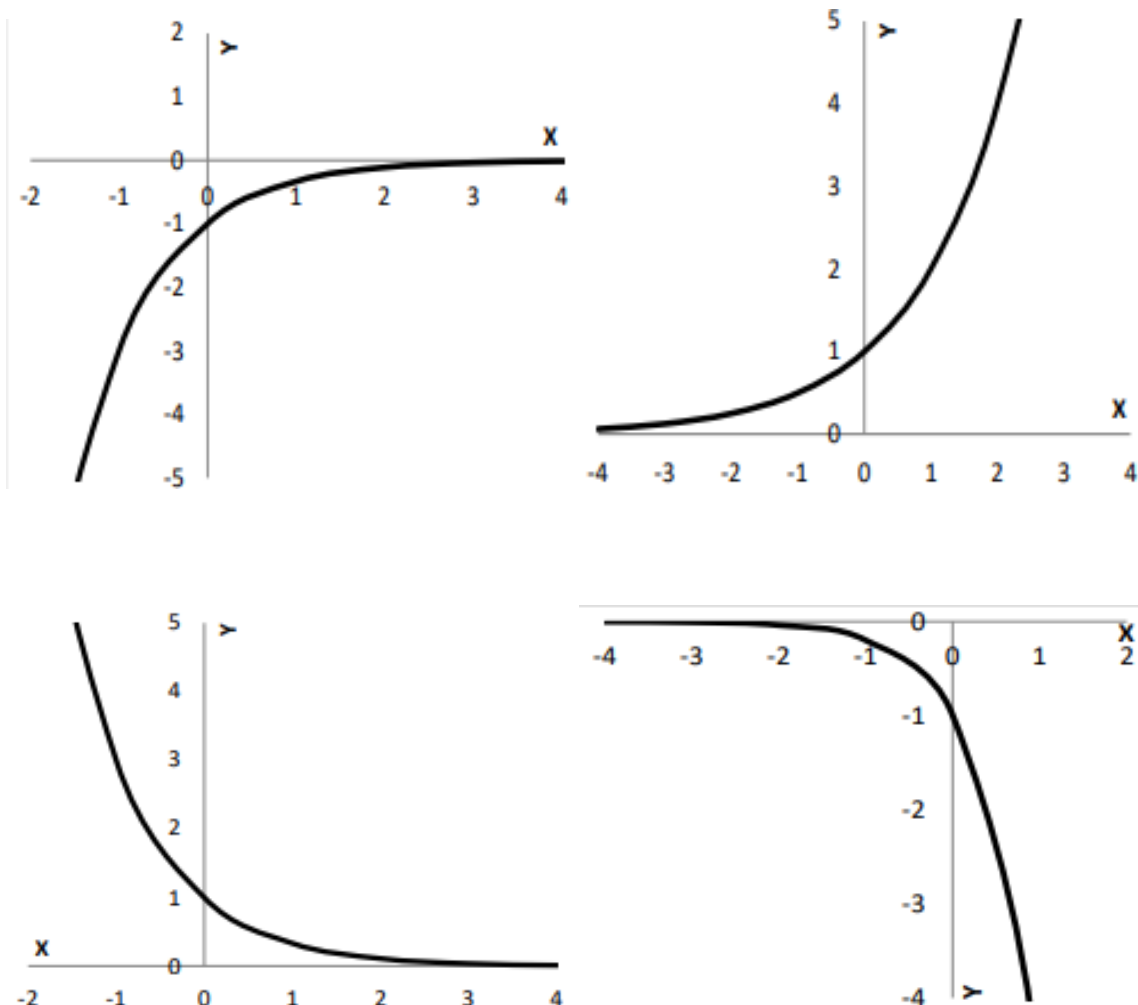
Da mesma forma,  $g(x)$  pode ser escrita como  $g(x) = 2^{-x} \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^{-x}$ .



**Exemplo 8.3.4.** Associe as funções

a)  $f(x) = 2^x$ ; (b)  $g(x) = 3^{-x}$  (c)  $h(x) = -3^{-x}$  (d)  $p(x) = -5^x$

aos respectivos gráficos. (Justifique sua resposta)

**Solução:**

1º gráfico: letra (c): o sinal de menos na frente de  $h(x)$  indica que o parâmetro  $A = -1$ , portanto esta função corta  $y$  em  $(0, -1)$ ; é negativa para qualquer  $x$  e é o rebatimento da função  $y = 3^{-x}$ , que é uma exponencial decrescente (Veja letra (b)).

2º gráfico: letra (a):  $A = 1$  indica que  $f(x)$  é positiva. O expoente  $m = 1$  (positivo), indica que  $f(x)$  é crescente.

3º gráfico: letra (b):  $A = 1$  indica que  $g(x)$  é positiva. O expoente  $m = -1$  (negativo), indica que  $g(x)$  é decrescente.

4º gráfico: letra (d):  $A = -1$  indica que  $p(x)$  corta  $y$  em  $(0, -1)$ ; é negativa para qualquer  $x$  e é o rebatimento da função  $y = 5^x$ , que é uma exponencial crescente (semelhante a função da letra (a))

**8.3.1 Função exponencial com base e (função exponencial natural)**

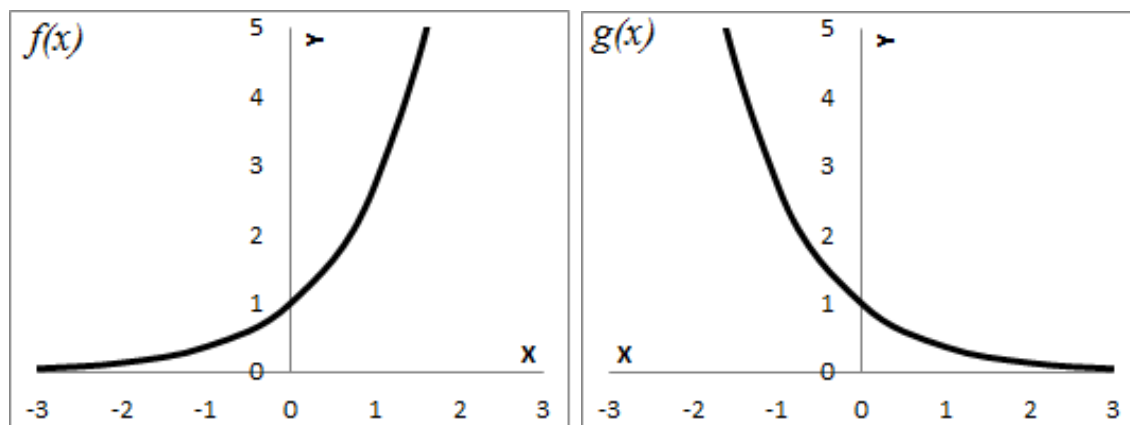
**Definição:** A função exponencial natural tem a forma

$$f(x) = A \cdot e^{m \cdot x} \quad (3.1)$$

onde os parâmetros  $A$  e  $m$  e a base  $e$  é um número irracional, chamado número de Euler: 2.7182818...

**Exemplo 8.3.5.** Faça os gráficos das funções  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = e^{-x}$  :

**Solução:** Atribuindo valores para  $x$ , obtém-se os valores de  $f$  e  $g$ . A figura abaixo mostra estas funções, que são semelhantes às exponenciais de base qualquer.



### EXERCÍCIOS 8.3

**8.3.1** I) Faça e compare os gráficos das funções.

a)  $f(x) = 3^x$  e  $f(x) = -3^x$

b)  $f(x) = 4^x$  e  $f(x) = -4^x$

II) Qual é o efeito do sinal do parâmetro  $A$  no gráfico das funções  $f(x) = Ab^{mx}$ ?

**8.3.2** I) Faça e compare os gráficos das funções.

a)  $f(x) = 3^x$  e  $f(x) = 3^{-x}$

b)  $f(x) = -3^x$  e  $f(x) = -3^{-x}$

II) Qual é o efeito do sinal do parâmetro  $m$  no gráfico das funções  $f(x) = Ab^{mx}$ ?

**8.3.3** Faça um esboço do gráfico das funções, com base nas conclusões dos Exercícios 1 e 2.

a)  $f(x) = 5^x$

b)  $f(x) = -5^x$

c)  $f(x) = -2^{-x}$

d)  $f(x) = -7^x$

8.3.4 Faça um esboço do gráfico das funções:

a)  $f(x) = 2 \cdot 5^x$

b)  $f(x) = 3 \cdot 5^x$

c)  $f(x) = -2 \cdot 2^{-x}$

d)  $f(x) = -3 \cdot 7^x$

8.3.5 Faça um esboço do gráfico das funções:

a)  $f(x) = 2 \cdot 2^x$

b)  $f(x) = 5^{x+1}$

c)  $f(x) = 2^{-x+2}$

d)  $f(x) = 7^{x-1}$

8.3.6 Faça os gráficos do exercício anterior usando um aplicativo computacional.

8.3.7 Faça os gráficos das funções:

a)  $f(x) = e^{2x}$

b)  $f(x) = -e^{-2x}$

c)  $f(x) = 3e^x$

d)  $f(x) = -2e^{-3x}$

8.3.8 Faça os gráficos do exercício anterior usando um aplicativo computacional.

8.3.9 Associe as funções

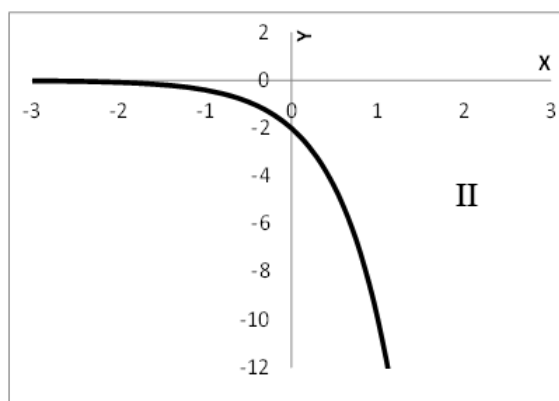
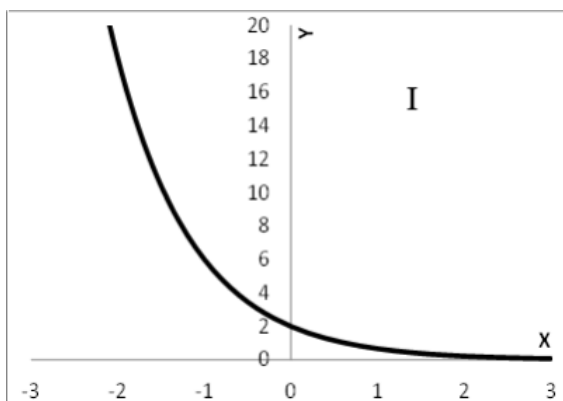
a)  $f(x) = 2 \cdot e^x$ ;

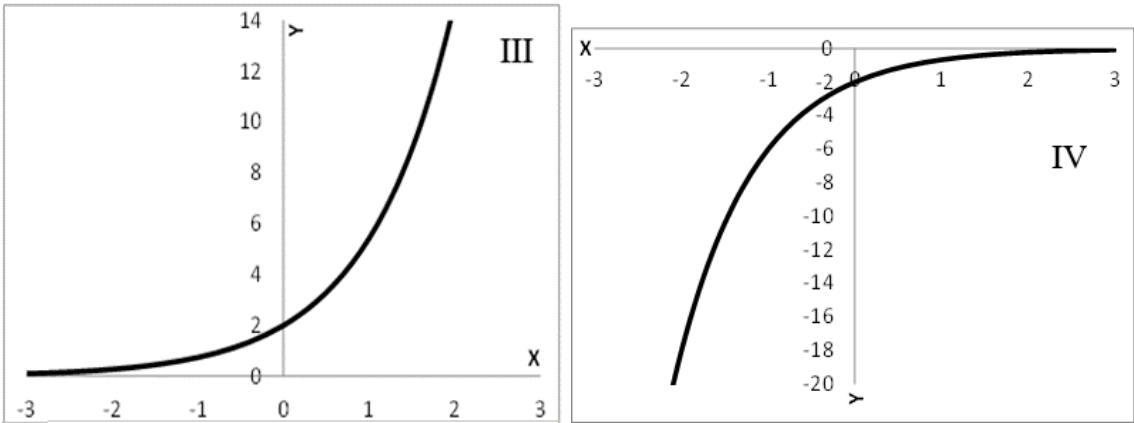
(b)  $g(x) = 2 \cdot 3^{-x}$ ;

(c)  $h(x) = -2 \cdot 3^{-x}$ ;

(d)  $p(x) = -2 \cdot 5^x$

aos respectivos gráficos. (Justifique sua resposta)





8.3.10 Uma aplicação a juros compostos (juro sobre juro) evolui com taxa mensal de 10% ao mês, de acordo com a tabela abaixo. Elabore uma função exponencial para calcular o montante depois de 25 meses.

Tempo (meses)	Capital (R\$ )
0	1.000,00
1	1.100,00
2	1.210,00
3	1.331,00
...	...

8.4 Juros compostos

Em uma aplicação financeira do tipo poupança, o capital inicial  $C_o$  é depositado no mês  $t = 0$  e é corrigido mensalmente com uma taxa de juros constante de  $i \%$  do capital presente. O capital a cada mês pode ser calculado da seguinte maneira:

Capital = Capital do mês anterior + rendimento  
Onde o rendimento é : Capital do mês anterior  $\cdot$  taxa de juros.

Tempo (meses)	Capital (R\$ )	Montante (R\$ )
0	$C_o$	$C_o$
1	$C_o + C_o \cdot i/100$	$C_o \cdot (1+i/100)$
2	$C_o \cdot (1+i/100) \cdot (1+i/100)$	$C_o \cdot (1+i/100)^2$
3	$C_o \cdot (1+i/100)^2 \cdot (1+i/100)$	$C_o \cdot (1+i/100)^3$
4	$C_o \cdot (1+i/100)^3 \cdot (1+i/100)$	$C_o \cdot (1+i/100)^4$
...	...	....
$t$	$C_o \cdot (1+i/100)^{t-1} \cdot (1+i/100)$	$C_o \cdot (1+i/100)^t$

Generalizando, para  $t$  meses, o montante será

$$C(t) = C_0 \left(1 + \frac{i}{100}\right)^t \quad (4.1)$$

**Exemplo 8.4.1.** Uma poupança foi iniciada com R\$ 5.000,00 e corrigida com uma taxa constante de 0,6 % ao mês. Calcule o montante depois de (a) 15 meses (b) 10 anos.

**Solução:** (a) aplicando  $t = 15$  meses e  $C_0 = 5.000,00$  na Eq. 4.1, tem-se:

$$C(15) = 5000 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right)^{15}$$

$$C(15) = 5.469,40 \text{ reais.}$$

(b) Fazendo  $t = 10 \cdot 12 = 120$  meses e substituindo na Eq. 4.1, tem-se:

$$C(120) = 5000 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right)^{120}$$

$$C(120) = 10.250,09 \text{ reais} \blacksquare$$

## EXERCÍCIOS 8.4

**8.4.1** Dados o capital inicial, a taxa de juros e o tempo, calcule o montante de aplicações a juros compostos:

- a)  $C_0 = \text{R\$ } 1.500,00$ ,  $i = 0,5 \%$  ao mês e  $t = 20$  meses
- b)  $C_0 = \text{R\$ } 10.000,00$ ,  $i = 1 \%$  ao mês e  $t = 50$  meses.
- c)  $C_0 = \text{R\$ } 10.500,00$ ,  $i = 1 \%$  ao mês e  $t = 5$  anos.
- d)  $C_0 = \text{R\$ } 1.000,00$ ,  $i = 0,8 \%$  ao mês e  $t = 10$  anos e 5 meses.
- e)  $C_0 = \text{R\$ } 20.000,00$ ,  $i = 0,65 \%$  ao mês e  $t = 3$  anos e 10 meses.

**8.4.2** Qual é o capital inicial de uma aplicação com taxa  $i = 0,5 \%$  ao mês, cujo montante depois de 10 anos é de R\$ 8.500,00.

**8.4.3** Faça os gráficos das seguintes aplicações com  $C_0 = \text{R\$ } 10.000,00$ ,  $i = 2 \%$  ao mês para tempo de 0 a 12 meses:

- a) Corrigidos com juros simples
- b) Corrigidos com juros compostos.

**8.4.4** Verifique quando as aplicações abaixo terão o mesmo montante:

- a)  $C_0 = \text{R\$ } 12.000,00$ ,  $i = 1 \%$  ao mês, corrigidos com juros simples.
- b)  $C_0 = \text{R\$ } 10.000,00$ ,  $i = 1 \%$  ao mês, corrigidos com juros compostos.

- 8.4.5 Qual é o capital inicial para que o montante de uma aplicação seja R\$ 20.000,00, depois de 3 anos, com taxa de 1 % ao mês?
- 8.4.6 Um pai emprestou R\$ 5.000,00 ao filho, a 1% ao mês, a juros compostos. Qual é a dívida depois de 1 ano.
- 8.4.7 Um investidor tem R\$ 250.000,00 para comprar um apartamento, que deverá ser entregue em 1 ano. Foram-lhe oferecidas três formas de pagamento. Verifique qual delas é a mais vantajosa para ele, considerando que o capital pode ser aplicado (se não for usado para pagar) com taxa de 0,6 % ao mês:
- a) À vista R\$ 240.000,00.
  - b) Entrada R\$ 100.000,00 e R\$ 150.000,00 na entrega do apartamento.
  - c) R\$ 260.000,00 na entrega do apartamento.
- 8.4.8 Calcule a taxa de juros na venda de uma máquina agrícola, cujo preço à vista é R\$ 20.000,00 e para pagar em 6 meses é R\$ 22.000,00.

## 8.5 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

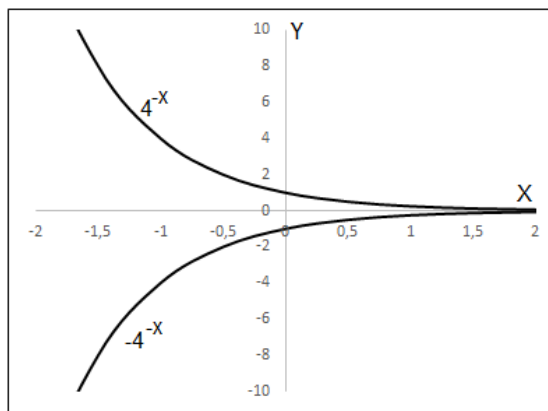
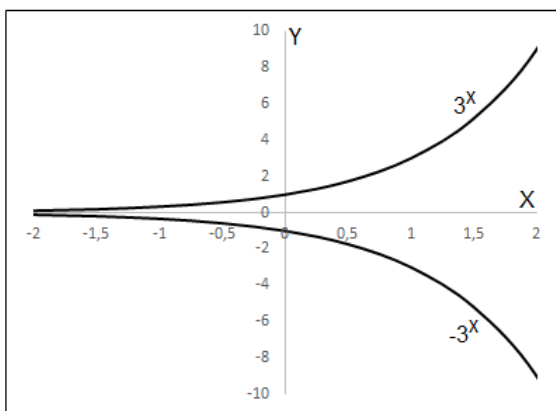
### RESPOSTAS 8.2

- 8.2.1 a) 16 b) -64 c) 0 d) 1 e)  $1/8$  f)  $9/16$  g)  $16/81$  h) -625
- 8.2.2 a) 64 b)  $1/1024$  c) 9 d)  $729/64$  e)  $5/4$  f)  $1/125$  g)  $16/49$  h) 512
- 8.2.3 a)  $1/8$  b)  $1/243$  c)  $64/27$  d)  $16/9$
- 8.2.6 a)  $32/25$  b)  $-16/3$  c) 8 d) 504 e)  $27/96$  f)  $-78125/1944$
- 8.2.7 a)  $3/5$  b)  $1/49$  c) 2 d) 1
- 8.2.8 a)  $x = 3$  b)  $x = 3/2$  c)  $x = -3/2$  d)  $x = 1$  e)  $x = -2/5$  f)  $x = 1$ .
- 8.2.9  $x_1 = -1$  e  $x_2 = -8$ .

### RESPOSTAS 8.3

- 8.3.1 (I) a) b)

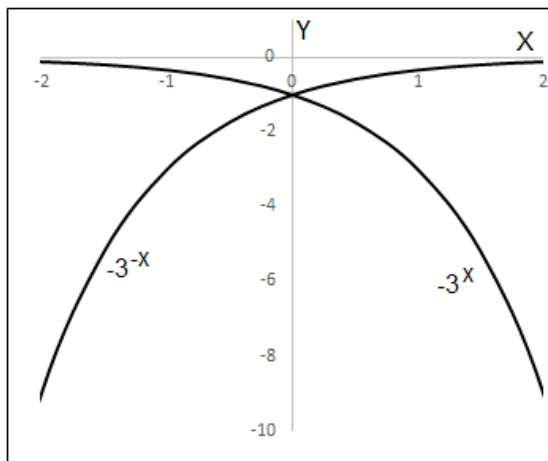
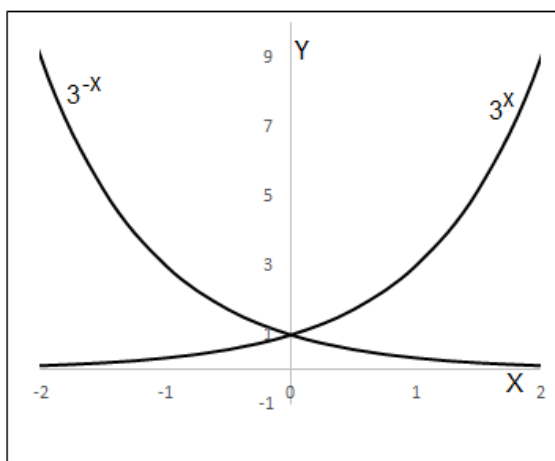




II- Se  $A$  for positivo a função é positiva e se  $A$  for negativo a função é negativa. As funções  $f(x)=Ab^x$  e  $g(x)=-Ab^x$  são simétricas em relação ao eixo  $X$ .

8.3.2 (I)a

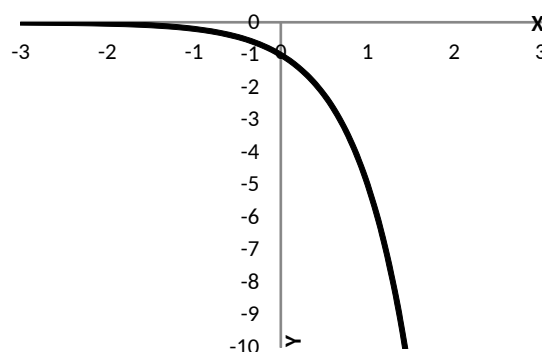
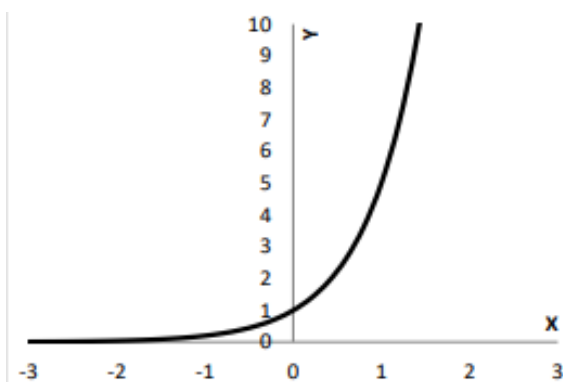
b



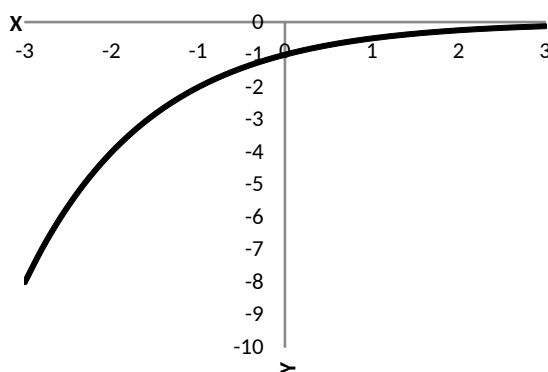
II- Se  $f(x)=Ae^{mx}$  e  $g(x)=Ae^{-mx}$  então  $f$  e  $g$  são simétricas em relação ao eixo  $Y$ .

8.3.3 a)

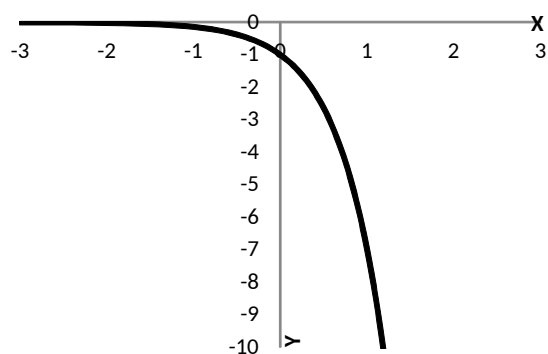
b)



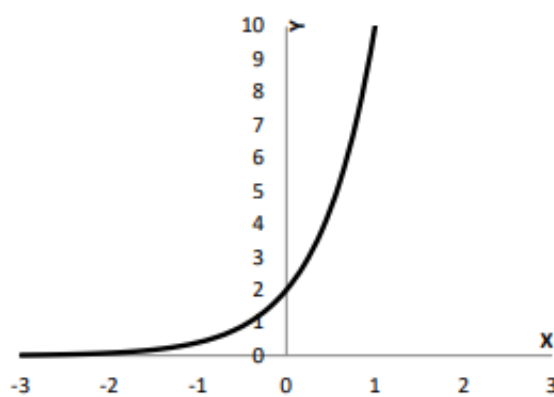
c)



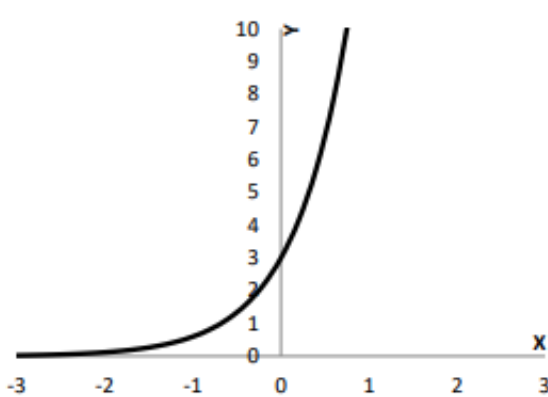
d)



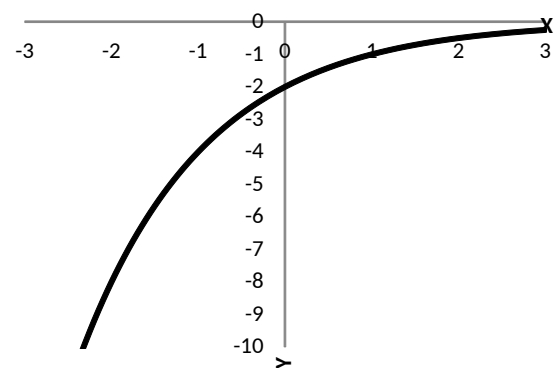
8.3.4 a)



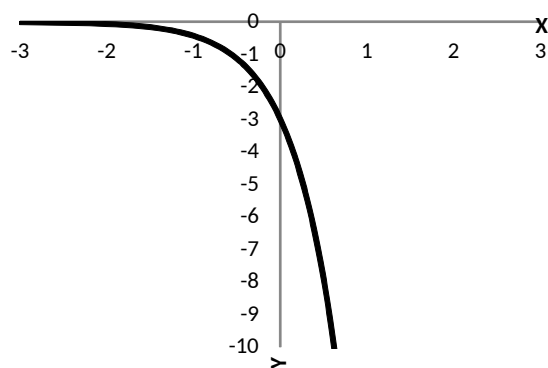
b)



c)

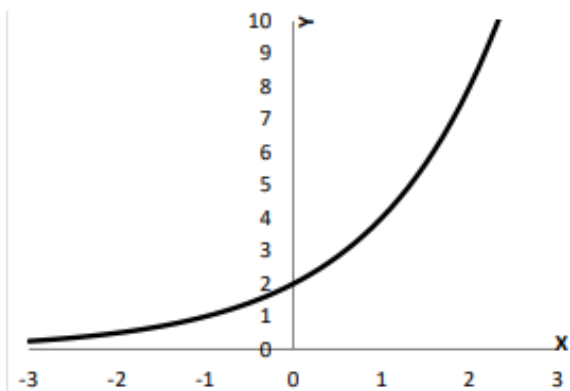


d)

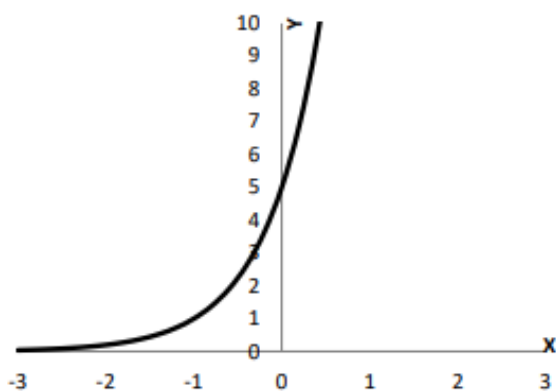


8.3.5 a)

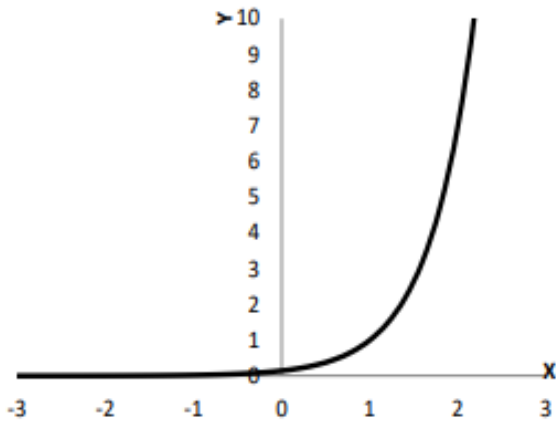
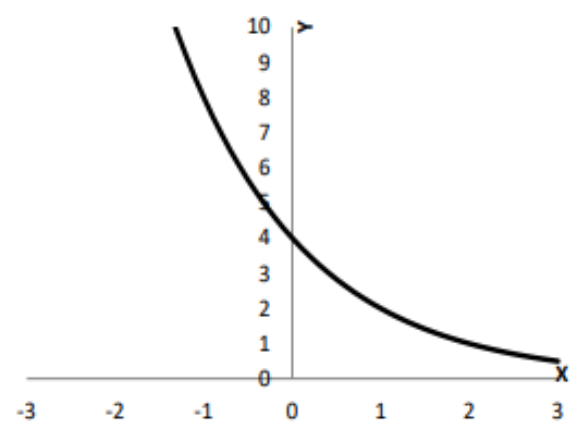
b)



c)

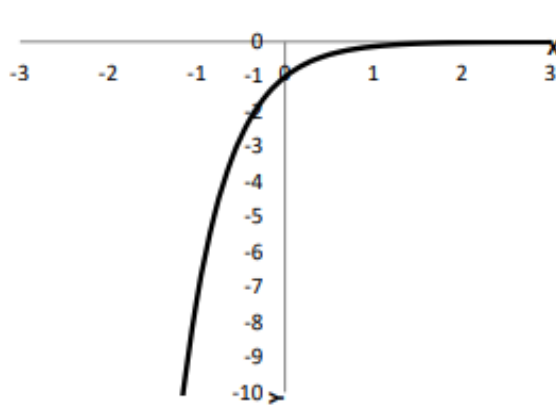
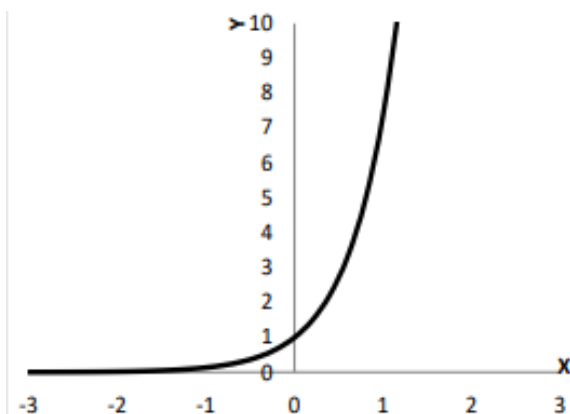


d)



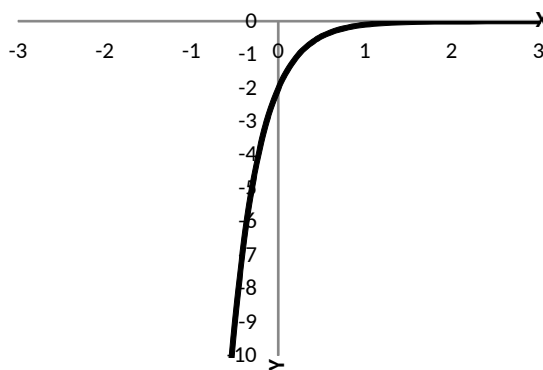
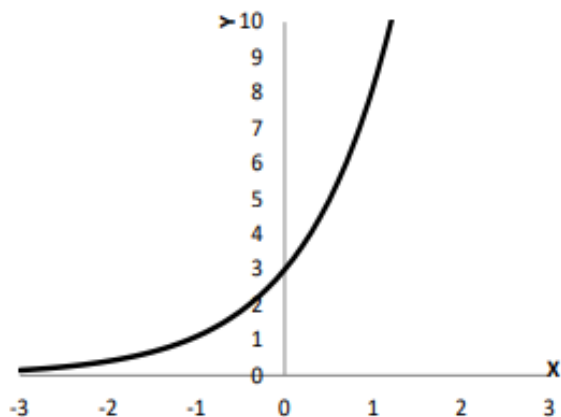
8.3.7 a)

b)



c)

d)



8.3.9 a-III ; b-I;c-IV; d-II .

8.3.10  $C(t) = C_0 \left(1 + \frac{i}{100}\right)^t$

#### RESPOSTAS 8.4

8.4.1 a) R\$ 1 657, 34

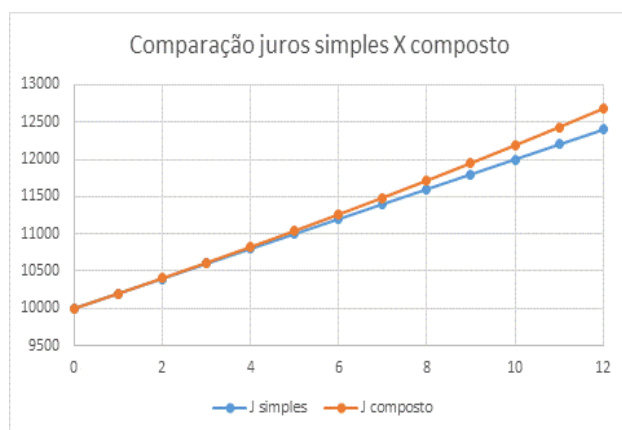
b) R\$ 16 446, 31

c) R\$ 19 075, 31

d) R\$ 2 707, 48

e) R\$ 26 944, 11

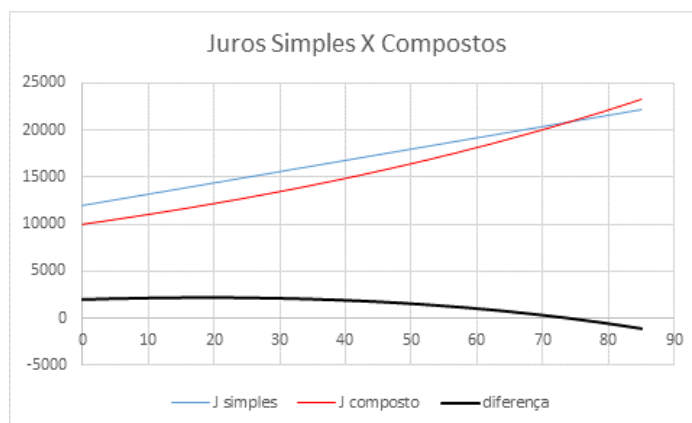
8.4.2  $C_o \cong R\$4671,87$



8.4.3

8.4.4 Tempo no qual as duas aplicações são iguais = 74° mês

Sugestão: desenvolva as duas aplicações em uma tabela eletrônica.



8.4.5  $C_o \cong R\$13978,50$

8.4.6  $R\$ 5\,634,12$

8.4.7 Alternativa b

8.4.8  $i \cong 1,601$



## **Capítulo 9**

### **Logarítmos e função logarítmica**





# Capítulo 10

## Trigonometria e funções trigonométricas

### 10.1 Introdução

A trigonometria é a área da Matemática em que são estudadas as relações entre as medidas do triângulo retângulo. O interesse nesse assunto, provavelmente foi motivado pela necessidade de calcular distâncias e ângulos em problemas de Astronomia, Agrimensura e Navegações, há mais de 2.000 anos a.C, com os egípcios e babilônios. Na Grécia, Hiparco de Nicéia e Ptolomeu deram imensa contribuição, construindo tabelas de valores das razões trigonométricas, na segunda metade do século II a.C. O triângulo retângulo com lados inteiros já era conhecido dos egípcios, mas atribui-se o enunciado à Pitágoras ( $\sim 570$  a 496 a.C.).

Muitas soluções de problemas de geometria plana ou espacial são elaboradas com o uso das propriedades do triângulo retângulo. São exemplos a medição de distâncias, inclinações, áreas e volumes na topografia (medição de terras), nas engenharias (volume de madeira, peças, centros de massa) e na Física (módulo de vetores, decomposição de forças, etc.).

As funções trigonométricas são usadas como modelo matemático para descrever o comportamento de variáveis cíclicas como ondas mecânicas, corrente e tensão elétrica, oscilações de pêndulo, etc.

### 10.2 Ângulos, arcos e circunferência

**Definição 10.2.1.** Sejam duas retas  $r$  e  $s$  em um plano, com um ponto de interseção  $V$  (vértice). O ângulo entre  $r$  e  $s$  é a abertura entre estas retas.

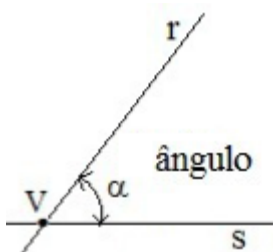


Figura 10.2.1: ângulo

A unidade de medida de ângulos, o grau, é obtida dividindo a volta inteira em 360 partes. O transferidor (Fig. 10.2.2) é um instrumento para medição de ângulos.

1 volta corresponde a  $360^\circ$ ;  
 $1/360$  da volta inteira = 1 grau =  $1^\circ$

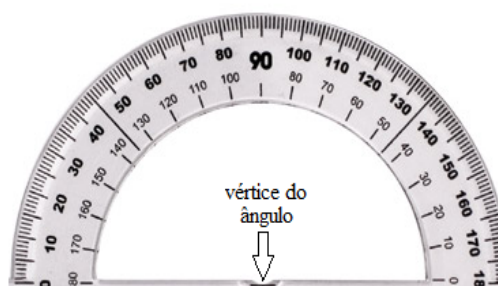


Figura 10.2.2: Transferidor

O ângulo de  $90^\circ$  é chamado de *ângulo reto* (ver Fig. 10.2.3)

O ângulo de  $180^\circ$  é chamado de *ângulo raso*. (ver Fig. 10.2.3)

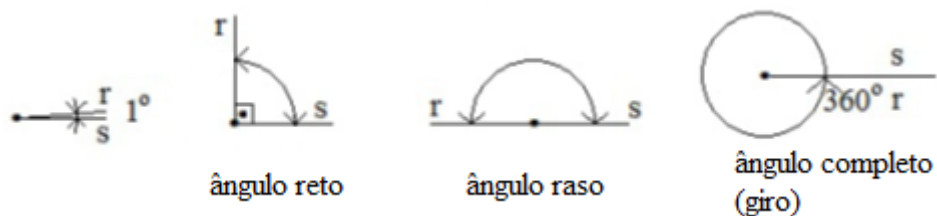


Figura 10.2.3: Grau e ângulos especiais

Para medições mais precisas, são usadas subunidades do grau:

$$1^\circ = 60' \text{ (60 minutos)}$$

$$1' = 60'' \text{ (60 segundos)} \quad 1^\circ = 60' \cdot 60 = 3600''$$

**Exemplo 10.2.1.** (a) Quantos graus tem em  $7270''$  ?

(b) Quantos segundos tem em  $1^{\circ} 2' 30''$  ?

**Solução:**

(a) Com base na relação entre graus, minutos e segundos, tem-se:

Dividindo  $7270'' / 60 = 121'$  e resta  $10''$  .

Dividindo  $121' / 60 = 2^{\circ}$  e resta  $1'$  .

Então:  $7270'' = 2^{\circ} 1' 10''$  .

(b) Com base na relação entre graus, minutos e segundos, tem-se:

$1^{\circ} \cdot 3600 = 3600''$

$2' \cdot 60 = 120''$

Então,  $1^{\circ} 2' 30'' = 3600'' + 120'' + 30'' = 3750''$  ■

A *circunferência* é um arco, cujos pontos estão a mesma distância  $r$  (raio) de um ponto central. Na Fig. 2.4(a), os pontos A e A' estão sobrepostos. Abrindo a circunferência no ponto A e estendendo-a, tem-se o comprimento da circunferência:

$$C = 2 \pi r \quad (10.1)$$

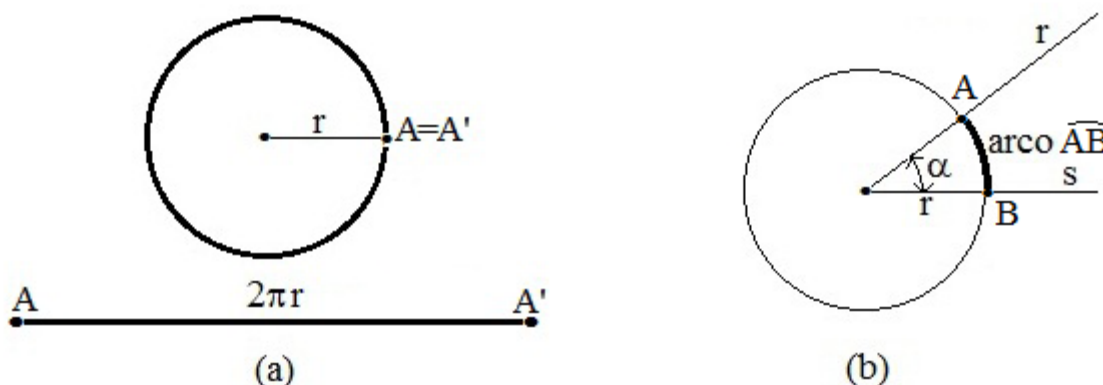


Figura 10.2.4: (a) circunferência (b) arco e ângulo

O *arco AB* de um *ângulo* é o comprimento sobre a circunferência de raio  $r$ , limitado pelas retas  $r$  e  $s$  que definem o ângulo, como mostra a figura 2.4(b).

A relação entre *ângulos* e *arcos* é dada pela proporção:

Arco		Ângulo
$C = 2\pi r$	$\rightarrow$	$360^{\circ}$
Arco	$\rightarrow$	$\alpha$

Resolvendo a proporção para o arco, tem-se:

$$Arco = \frac{\alpha \pi r}{180} \quad \text{ou} \quad Arco = \frac{\alpha \pi}{180}, \text{ se } r = 1 \quad (10.2)$$

u.c. (unidade de comprimento).

Resolvendo a proporção para o *ângulo*, com  $r = 1$  u.c., tem-se:

$$\alpha = \frac{arco \cdot 180}{\pi} \quad (10.3)$$

**Exemplo 10.2.2.** Calcule o comprimento da circunferência de uma lata cilíndrica, cujo raio mede 8 cm.

**Solução:** Substituindo  $r = 8$  cm. na Eq. 2.1, tem-se  $C = 2 \pi 8 = 16 \pi$  cm, o que dá

$$C = 50,26 \text{ cm} \blacksquare$$

**Exemplo 10.2.3.** Determine os arcos correspondentes aos seguintes ângulos:  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  e  $360^\circ$ , considerando o raio igual a 1 u.c.

**Solução:** Utilizando a Eq. 2.3, substitui-se o ângulo dado no lugar de  $\alpha$  e obtém-se as correspondências de ângulos e arcos, apresentadas na tabela abaixo.

Ângulos	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
Arcos	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$

**Exemplo 10.2.4.** Determine o arco de um ângulo de  $120^\circ$  sobre:

- (a) uma circunferência cujo raio é 1 cm
- (b) uma circunferência cujo raio é 2 cm.

**Solução:** Substituindo  $\alpha = 120^\circ$  na Eq. 2.1, tem-se:

$$1. \text{ Arco} = \frac{120 \cdot \pi \cdot 1}{180} = \frac{2\pi}{3} \sim 2,0943 \text{ cm.}$$

$$2. \text{ Arco} = \frac{120 \cdot \pi \cdot 2}{180} = \frac{4\pi}{3} \sim 4,1886 \text{ cm} \blacksquare$$

**Definição 10.2.2.** Dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são *complementares* quando sua soma é  $90^\circ$ .

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

**Definição 10.2.3.** Dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são *suplementares* quando sua soma é  $180^\circ$ .

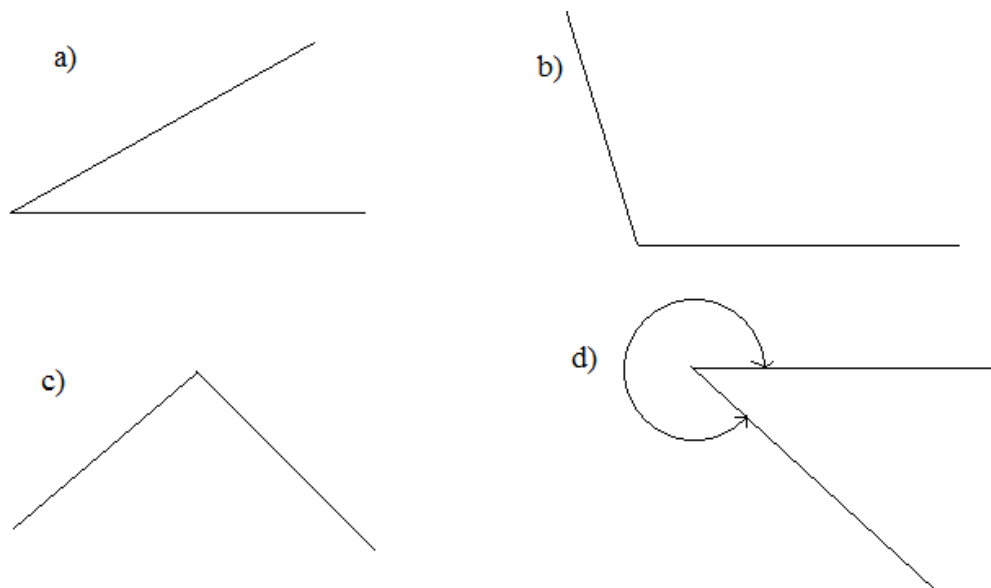
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

**Definição 10.2.4.** Dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são *replementares* quando sua soma é  $360^\circ$ .

$$\alpha + \beta = 360^\circ$$

## EXERCÍCIOS 10.2

**10.2.1** Use o transferidor para medir os seguintes ângulos:



**10.2.2** Calcule o comprimento da circunferência, cujo raio mede:

- a)  $r = 4 \text{ cm}$
- b)  $r = 0,5 \text{ m}$
- c)  $r = 10 \text{ m}$
- d)  $r = 2,5 \text{ km}$

**10.2.3** Calcule o raio cuja circunferência mede:

- a)  $c = 6,28 \text{ cm}$
- b)  $c = 10 \text{ m}$
- c)  $c = 2,5 \text{ cm}$
- d)  $c = 100 \text{ mm}$

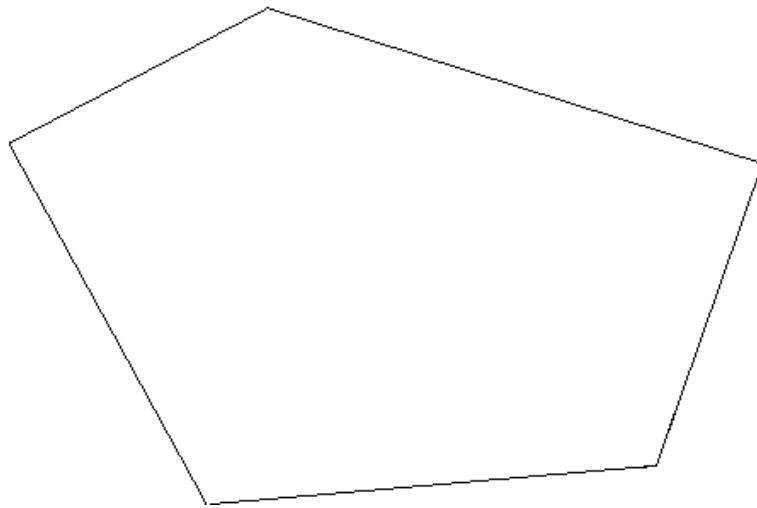
**10.2.4** O raio oficial de uma bola de futebol deve estar entre 10,83 cm e 11,15 cm. Quanto mede a circunferência para estes raios?

**10.2.5** Calcule a densidade de uma esfera cuja circunferência é 0,32 m e a massa é 3 kg.

**10.2.6** a) Meça os ângulos internos do polígono e adicione-os.

b) Verifique se a soma dos ângulos internos desse polígono satisfaz a fórmula

$S_n = 180(n-2)$  onde  $S_n$  é a soma dos ângulos internos e  $n$  é o número de ângulos.



**10.2.7** Determine os arcos correspondentes aos seguintes ângulos, considerando o raio da circunferência igual a  $1 \text{ u.c.}$

- a)  $12^\circ$
- b)  $150^\circ$
- c)  $120^\circ$
- d)  $330^\circ$
- e)  $180^\circ$
- f)  $300^\circ$
- g)  $210^\circ$

**10.2.8** Determine os ângulos correspondentes aos seguintes arcos, considerando o raio da circunferência igual a  $1 \text{ u.c.}$

- a)  $\pi / 4$
- b)  $2\pi / 3$
- c)  $3\pi / 4$
- d)  $5\pi / 4$
- e)  $5\pi / 6$
- f)  $4\pi / 3$
- g)  $7\pi / 3$

**10.2.9** Um cano de esgoto tem o diâmetro interno de 100mm e espessura 1,5 mm. Determine a circunferência externa.

**10.2.10** Três ângulos internos de um quadrilátero medem:  $\hat{A}_1 = 80^\circ 30' 12''$  ;  $\hat{A}_2 = 95^\circ 35' 23''$  e  $\hat{A}_3 = 84^\circ 46' 18''$  . Calcule o quarto ângulo, sabendo que a soma de todos os ângulos internos do quadrilátero deve ser  $360^\circ$ .

10.2.11 Um triângulo tem dois ângulos iguais e um diferente, que mede  $59^{\circ}3'10''$ . Determine a medidas dos ângulos iguais.

10.2.12 Dados os ângulos, determine o ângulo complementar, suplementar e replementar:

- a)  $50^{\circ}$
- b)  $15^{\circ}$
- c)  $75^{\circ}$
- d)  $80^{\circ}$
- e)  $20^{\circ}$

10.2.13 Qual é o ângulo complementar de  $34^{\circ}35'20''$ .

## 10.3 Triângulo retângulo

**Definição 3.1** - Um triângulo é *retângulo* se um dos ângulos internos é reto.

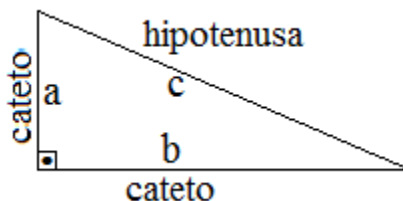


Figura 3.1 - Triângulos retângulos

No triângulo retângulo:

- o lado maior chama-se *hipotenusa*.

- os demais lados chamam-se *catetos*.

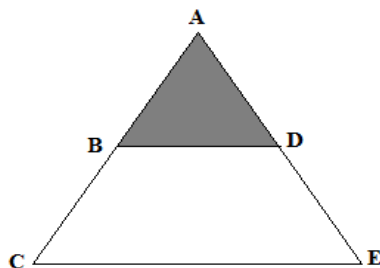


**Definição 3.2** - Dois triângulos são semelhantes quando os ângulos correspondentes são congruentes (tiverem a mesma medida).

**Propriedade dos triângulos semelhantes:**

Se dois triângulos são semelhantes então as razões entre seus lados correspondentes são iguais.

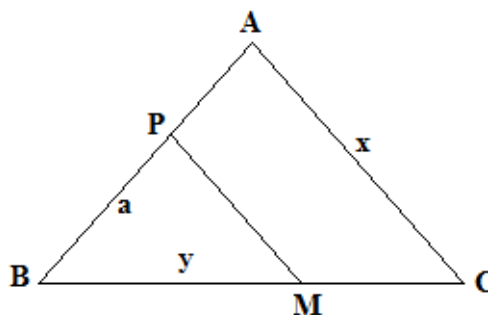
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$$



**Exemplo 10.3.1.** Dado os triângulos ABC e PQM, determine a medida dos lados indicados com letras  $a$  e  $x$ , sabendo que:

$$AB = 6\text{ cm} ; \quad PM = 5\text{ cm} ; .$$

$$BC = 9\text{ cm} \text{ e } BM = 3\text{ cm} .$$



**Solução:** Usando a proporção entre os lados dos triângulos semelhantes, tem-se:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PM} = \frac{BC}{BM}$$

Substituindo os dados disponíveis, tem-se:

$$\frac{6}{a} = \frac{x}{5} = \frac{9}{3}$$

Resolvendo a segunda igualdade para  $x$ , tem-se:  $x = 15\text{ cm}$ .

Substituindo  $x = 15\text{ cm}$  na segunda razão e resolvendo a primeira igualdade para  $a$ , tem-se:  $a = 2\text{ cm}$  ■

**Propriedades dos triângulos retângulos**



**Propriedade 1:** Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  os dois ângulos internos não retos de um triângulo retângulo. Então  $\alpha$  e  $\beta$  são complementares.

**Demonstração:** Pela fórmula da soma dos ângulos internos dos polígonos, para  $n = 3$ , tem-se:

$$S_3 = 180 (3-2) = 180^\circ.$$

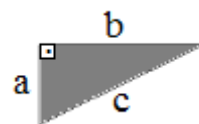
Somando os ângulos internos do triângulo retângulo, tem-se:

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ \text{ ou}$$

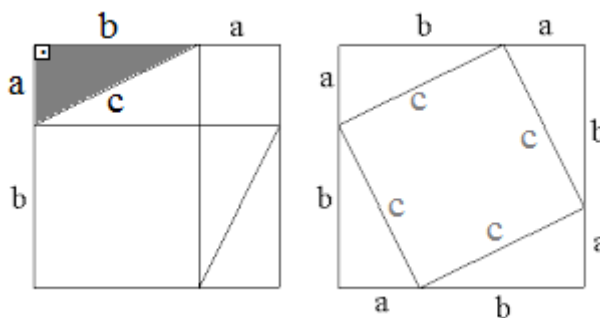
$$\alpha + \beta = 90^\circ. \text{ Portanto, e são complementares} \blacksquare \quad (3.1)$$

**Propriedade 2** (Teorema de Pitágoras): Se  $a$  e  $b$  são os catetos e  $c$  é a hipotenusa de um triângulo retângulo. Então,  $a^2 + b^2 = c^2$ .

**Demonstração:** Seja o triângulo retângulo da figura ao lado.



Com este triângulo, pode-se construir dois quadrados, cujos lados medem  $(a + b)$ , portanto de áreas equivalentes, cada um dividido como ilustram as figuras abaixo.



A área do primeiro quadrado é:  $a^2 + b^2 + 2ab$ .

A área do segundo quadrado é:  $c^2 + 2ab$ .

Igualando as áreas dos quadrados, tem-se:

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab.$$

Adicionando  $-2ab$  em ambos os lados da equação, tem-se:

$$a^2 + b^2 = c^2 \blacksquare \quad (3.2)$$

**Exemplo 10.3.2.** Calcule a medida do terceiro lado dos triângulos retângulos:

1. Hipotenusa =  $10 \text{ cm}$  e um dos catetos de  $8 \text{ cm}$ .

2. Dois catetos iguais = 5 cm.

**Solução:** (a) Sejam  $c = 10$  e  $a = 8$  as medidas da hipotenusa e do cateto conhecido, respectivamente. Para calcular o outro cateto, substitui-se  $a$  e  $c$  na Eq. 3.2:

$$8^2 + b^2 = 10^2$$

$$b^2 = 100 - 64 = 36$$

$$b = \pm\sqrt{36} = \pm 6.$$

Como os lados do triângulo são medidas positivas, serão usadas apenas os valores positivos das raízes. Então,  $b = 6$  cm. Nesse caso, a medida do cateto desconhecido é 6 cm e é um número inteiro.

(b) Sejam  $a = b = 5$  cm as medidas dos catetos. Para calcular a hipotenusa, substitui-se  $a$  e  $b$  na Eq. 3.2:

$$5^2 + 5^2 = a^2$$

$$a^2 = 50$$

$a = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \cong 7,071$ . Nesse caso, a medida da hipotenusa é  $5\sqrt{2} \cong 7,071$  cm e é um número irracional ■

**Exemplo 10.3.3.** (a) Verifique se o triângulo de lados 3, 4 e 5 u.c. é triângulo retângulo.

(b) Mostre que para  $n \in \mathbb{R}$ ,  $3n$ ,  $4n$  e  $5n$ , também são triângulos retângulos.

**Solução:** (a) Substituindo  $a = 3$ ,  $b = 4$  e  $c = 5$  na Eq. 3.2, tem-se:.

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$25 = 25.$$

Como o Teorema de Pitágoras foi satisfeito, o triângulo com lados  $a = 3$ ,  $b = 4$  e  $c = 5$  é retângulo.

(b) Substituindo  $a = 3n$ ,  $b = 4n$  e  $c = 5n$  na Eq. 3.2, tem-se:.

$$(3n)^2 + (4n)^2 = (5n)^2$$

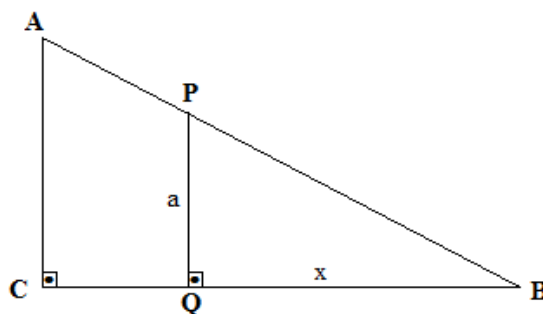
$$25n^2 = 25n^2.$$

Como o Teorema de Pitágoras foi satisfeito, os triângulos com lados  $a = 3n$ ,  $b = 4n$  e  $c = 5n$  são retângulos ■

### EXERCÍCIOS 10.3

**10.3.1** Dado os triângulos ABC e PQM, determine a medida dos lados indicados com letras  $a$  e  $x$ , sabendo que:  $AC = 10$  cm ;  $CQ = 12$  cm;  $CB = 15$  cm

$$\text{e } AB = 5\sqrt{13} \text{ cm}.$$



10.3.2 Use o resultado do Exemplo 3.3 para criar mais 3 triângulos retângulos com lados inteiros.

10.3.3 Calcule a medida do terceiro lado dos triângulos retângulos ( $a$  e  $b$  são catetos e  $c$  é a hipotenusa):

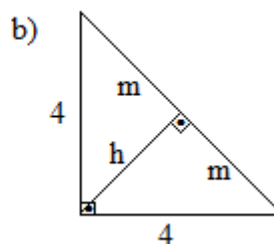
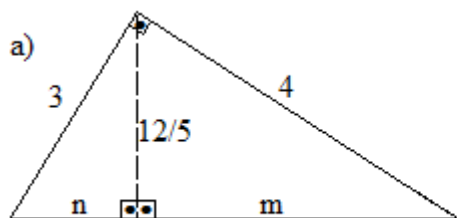
a)  $a = 5 \text{ cm}$  e  $b = 12 \text{ cm}$

c)  $b = 5 \text{ cm}$  e  $c = 13 \text{ cm}$

b)  $c = 10 \text{ cm}$  e  $a = 5 \text{ cm}$

d)  $a = 2 \text{ cm}$  e  $b = 5 \text{ cm}$

10.3.4 Calcule a medidas indicadas com letras:



10.3.5 Um triângulo equilátero tem os três lados iguais.

a) Determine a altura, em função da medida dos lados.

b) Deduza a fórmula da área.

10.3.6 Um triângulo retângulo tem dois ângulos de  $45^\circ$ . Cada cateto mede  $m$ .

a) Calcule a medida da hipotenusa.

b) Calcule a medida da altura.

10.3.7 O oitão (parte triangular da fachada da figura) de uma casa é composto por dois triângulos retângulos. A inclinação do telhado é  $35^\circ$ . Sabendo que a largura da casa é  $8 \text{ m}$ :

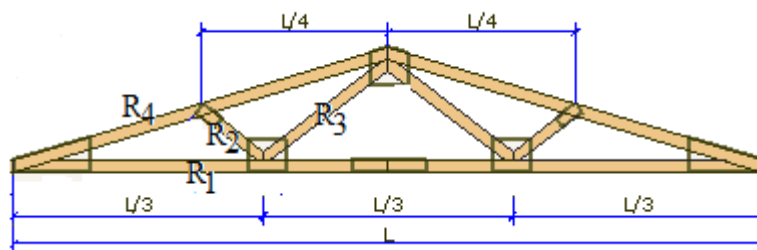
a) Calcule a altura central do telhado.

b) Calcule o comprimento do lado inclinado.

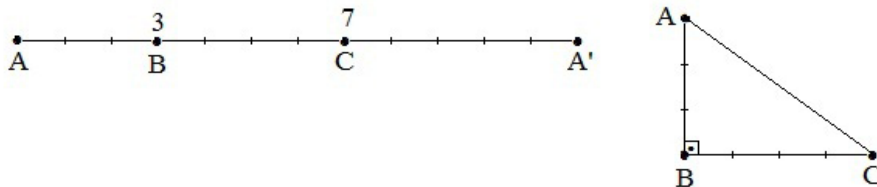


**10.3.8** A tesoura de um telhado tem a forma da figura abaixo. Sabendo que  $L = 6\text{ m}$  e a inclinação é  $28\%$ , calcule o comprimento das ripas  $R_1$  (considere meia tesoura)

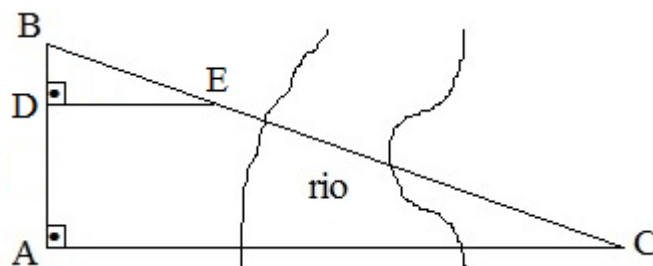
$R_2$ ,  $R_3$  e  $R_4$ .



**10.3.9** Os triângulos pitagóricos são utilizados para marcar figuras em esquadro no solo. Por exemplo, para marcar um galpão de  $10\text{ m}$  de largura por  $15\text{ m}$  de comprimento, pode-se usar uma corda de  $12\text{ m}$ , com marcas em  $3\text{ m}$  e  $7\text{ m}$  (ver Figura). Esticando a corda e dobrando-a nas referidas marcas tem-se um triângulo com um ângulo reto no ponto B. Desenvolva uma estratégia, no papel, para marcar o galpão retangular de  $8 \times 10\text{ m}$ .



**10.3.10** Considere que os pontos A e B estão do mesmo lado de um rio e o ponto C é inacessível, porém visível de A e B, como ilustra a figura abaixo. Para estimar a distância AC, pode-se usar triângulos semelhantes:



- 1°) Instala-se um ângulo reto em A, com um esquadro (ver problema 3.9) ou teodolito;
- 2°) Marca-se um ponto B na direção perpendicular a AC;
- 3°) Marca-se um ponto D na reta AB;
- 4°) Instala-se um triângulo retângulo em D (ver problema 3.9);
- 5°) Marca-se um ponto E sobre a reta BC, deslocando uma baliza sobre a direção DE, até que E esteja sobre BC;
- 6°) Mede-se as distâncias  $AB$ ,  $DB$  e  $DE$ .

Os triângulos ABC e DBE são semelhantes. Portanto:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DE}$$

Considere  $AB = 10m$ ,  $DB = 1m$  e  $DE = 3m$  e calcule  $AC$ .

**10.3.11** Calcule:

- a) A diagonal de um quadrado de lado 4 cm.
- b) A diagonal de um retângulo de lados 4 e 5 cm.
- c) A altura de um triângulo isósceles com lados iguais de 4 cm e base 5 cm.

**10.3.12** Em um losango de  $4\sqrt{5}$  cm de lado, a diagonal maior é o dobro da menor. Calcule as medidas dessas diagonais.

## 10.4 Razões trigonométricas

É bem provável que as pirâmides do Egito foram construídas utilizando a ideia de *razões trigonométricas*.

Lembre-se que a razão entre dois números  $a$  e  $b$ , na matemática, tem a forma de uma fração,  $\frac{a}{b}$ .

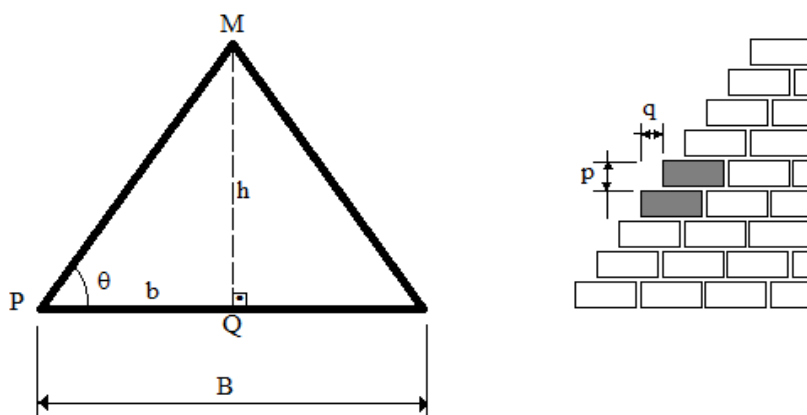


Figura 4.1 - Esquema construtivo das pirâmides

A inclinação de uma pirâmide de base quadrada, depende da largura da base ( $B$ ) e da altura  $h$ . O triângulo PQM ilustra a seção longitudinal de uma pirâmide de base quadrada, onde  $b = B/2$  é a metade da base e  $h$  é a altura. A inclinação da hipotenusa (lado  $PM$ ) é a inclinação da face da pirâmide. Ao construir, esta inclinação deve ser mantida em cada pedra colocada na face lateral. É impossível colocar um fio indicando a posição das pedras, devido à enorme altura: a pirâmide de Quéops tinha  $b = 115 \text{ m}$  por  $h = 147 \text{ m}$ . Uma solução é fazer a proporção entre as razões de altura e base da pirâmide e de cada degrau da face lateral (ver Fig. 4.1).

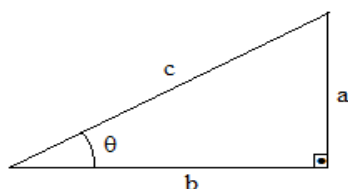
$$\frac{h}{b} = \frac{p}{q}$$

Onde  $h$  e  $b$  são a altura e a base da pirâmide, respectivamente;  $p$  e  $q$  são a altura e a base do degrau, respectivamente.

Com essa ideia, na pirâmide de Quéops, a razão  $p/q$  deveria ser  $147/115 = 1,278$ . Ou seja, para cada  $1 \text{ m}$  na horizontal, a altura deveria ser  $1,278 \text{ m}$ . Observe-se que mantida essa razão  $p/q$ , mantém-se o ângulo de inclinação (ângulo na Fig. 4.1) constante.

### Razões no triângulo retângulo

Sejam  $a$  e  $b$  os catetos de um triângulo,  $c$  a hipotenusa e o ângulo entre  $b$  e  $c$ .



**Definição 10.4.1.** As três razões trigonométricas diretas são o *seno*, o *coseno* e a *tangente*, definidas como:

$$\text{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{cos}\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{a}{b}$$

As três razões trigonométricas inversas são a *cossecante*, a *secante* e a *cotangente*, definidas como:

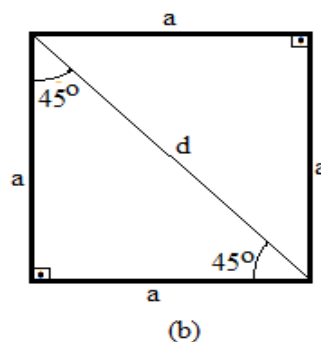
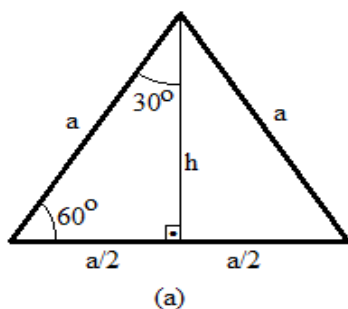
$$\text{cosec}\theta = \frac{1}{\text{sen}\theta} = \frac{c}{a}$$

$$\text{sec}\theta = \frac{1}{\text{cos}\theta} = \frac{c}{b}$$

$$\text{cotg}\theta = \frac{1}{\text{tg}\theta} = \frac{b}{a}$$

**Exemplo 10.4.1.** As razões trigonométricas de alguns ângulos podem ser calculadas geometricamente. Calcule os valores de seno e cosseno de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ .

**Solução:** No triângulo equilátero (todos os ângulos e lados iguais) cada ângulo interno é  $60^\circ$  (Fig. (a)).



Dividindo este triângulo com a linha da altura, obtém-se dois triângulos retângulos em que um dos ângulos é  $30^\circ$  e o outro é  $60^\circ$ . Considerando o comprimento do lado como  $a$ , pode-se calcular a altura usando o teorema de Pitágoras:

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

Resolvendo para  $h$ , obtém-se:  $h = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ .

Com esse resultado, pode-se calcular os senos e cossenos de  $30^\circ$  e  $60^\circ$ .

$$\text{sen}(30^\circ) = \frac{\frac{a}{2}}{A} = \frac{1}{2} = 0.5. ; \quad \text{COS}(30^\circ) = \frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,86602545...$$

$$\text{sen}(60^\circ) = \frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,86602545... \quad \text{cos}(60^\circ) = \frac{\frac{a}{2}}{A} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

No quadrado (fig. (b)) cada ângulo interno é  $90^\circ$ . Dividindo o quadrado pela diagonal, obtém-se dois triângulos retângulos com dois ângulos iguais a  $45^\circ$ . Considerando o comprimento do lado como  $a$ , pode-se calcular a diagonal do quadrado (hipotenusa dos triângulos) usando o teorema de Pitágoras:

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2.$$

Aplicando raiz quadrada em ambos os lados da equação, obtém-se:  $d = \alpha\sqrt{2}$ .

Com esse resultado, pode-se calcular o seno e cosseno de  $45^\circ$ .

$$\text{sen}(45^\circ) = \frac{a}{\alpha\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,7071068 ; \text{cos}(45^\circ) = \frac{a}{\alpha\sqrt{2}} = \text{sen}(45^\circ).$$

Observa-se que os valores de seno e cosseno independem do tamanho do lado do triângulo ou do quadrado, mas que referem-se apenas aos ângulos ■

As razões trigonométricas de outros ângulos são calculadas por somas infinitas, chamadas séries de potências:

$$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (4.1)$$

$$\text{cos}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (4.2)$$

Onde  $x$  é o arco, escrito em radianos.

Usando as séries das Eqs. (4.1) e (4.2) é possível construir as tabelas de senos e cossenos para qualquer ângulo, como na tabela abaixo. Atualmente, esses valores podem ser obtidos diretamente nas calculadoras científicas.

Ângulos	senos	cossenos
$14^\circ$	0,24192	0,97029
$15^\circ$	0,25881	0,96592
$16^\circ$	0,27563	0,96126
$17^\circ$	0,292371	0,95630
$18^\circ$	0,309016	0,95105
$19^\circ$	0,32556	0,94551

### Leitura de senos, cossenos e ângulo



As tabelas de razões trigonométricas podem ser consultadas de duas formas:

1. Dado o ângulo procura-se a razão trigonométrica:

**Exemplo:** Qual é o seno de  $15^\circ$ ? Resposta:  $\text{sen}(15^\circ) = 0,650287$ .

2. Dada a razão trigonométrica procura-se o ângulo:

**Exemplo:** Qual é ângulo cujo seno é  $0,650287$ ? Resposta:  $15^\circ$ .

**Exemplo 10.4.2.** Obtenha o valor de  $\text{sen}(15^\circ)$ :

1. Usando a Eq. (4.1) com 3 termos ( $n = 0, 1, 2$ )
2. Usando a calculadora científica. Compare os resultados.

**Solução:**

1. Substituindo  $x = \pi/12$  (arco correspondente ao ângulo de  $15^\circ$ ) na Eq. (4.1), tem-se:

$$\text{sen}(15^\circ) = \frac{\pi}{12} - \frac{\left(\frac{\pi}{12}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{12}\right)^5}{5!} = 0,25881906...$$

2. Na calculadora, ajusta-se a tecla (DRG) para “D” (graus), digita-se  $15$  e em seguida a tecla “seno”. A resposta, com 10 dígitos, é:

$$\text{sen}(15^\circ) = 0,25881904 ...$$

Observa-se que as duas respostas são idênticas até o nono dígito. Quanto mais termos da Eq. (4.1) forem usados, mais exato será o seno calculado pela série de potências ■

**Exemplo 10.4.3.** Em um triângulo retângulo a hipotenusa mede  $6,5 \text{ cm}$  e um dos ângulos  $35^\circ$ . Calcule a medida dos catetos.

**Solução:** seja  $x$  o cateto oposto ao ângulo de  $35^\circ$ . Da definição de seno, tem-se:

$$\text{sen}35^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{6,5} \text{ . Resolvendo para } x:$$

$$x = 6,5 \cdot \text{sen } 35^\circ = 6,5 \cdot 0,573576 = 3,728 \text{ cm.}$$

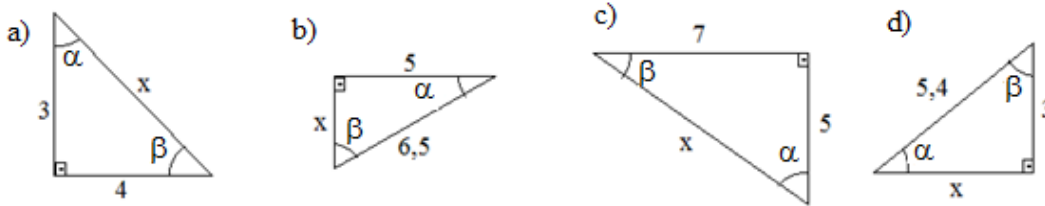
Seja  $y$  o cateto adjacente ao ângulo de  $35^\circ$ . Da definição de cosseno, tem-se:

$$\text{cos}35^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{6,5} \text{ . Resolvendo para } y:$$

$$y = 6,5 \cdot \text{cos } 35^\circ = 6,5 \cdot 0,8191520 = 5,324 \text{ cm} \blacksquare$$

## EXERCÍCIOS 10.4

10.4.1 Encontre os valores dos lados  $x$  e calcule o seno, cosseno e tangente dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ .



10.4.2 Complete a tabela (use a calculadora ou tabelas de razões trigonométricas):

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
$46^\circ$			
		$\frac{3}{4}$	
			3
	0,86		

10.4.3 Dados os valores de senos e cossenos, calcule a tangente, cotangente, secante e cossecante dos ângulos:

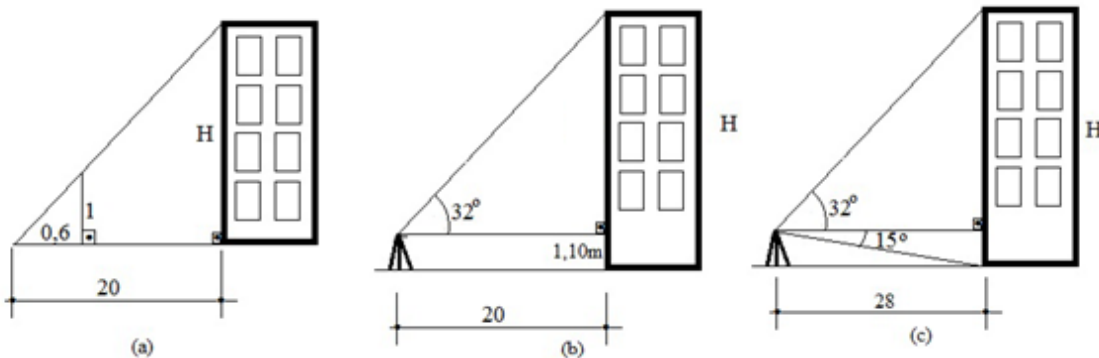
a)  $\text{sen } 14^\circ = 0,24192$  e  $\text{cos } 14^\circ = 0,97029$

b)  $\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $\text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c)  $\text{sen } 30^\circ = 0,5$  e  $\text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d)  $\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $\text{cos } 60^\circ = 0,5$

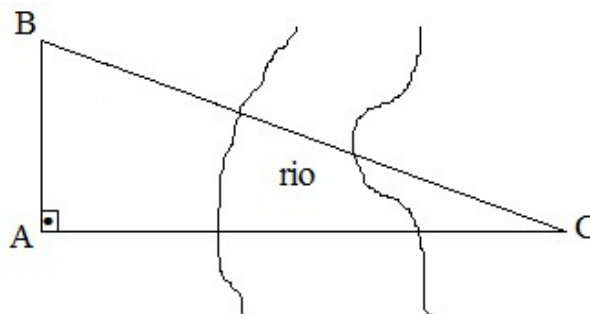
10.4.4 Calcule a altura  $H$  dos prédios nas três situações apresentadas.



10.4.5 Considere que os pontos A e B estão do mesmo lado de um rio e o ponto C é inacessível, porém visível de A e B, como ilustra a figura abaixo. Para estimar a distância AC, instala-se um ângulo reto em A, com um esquadro (ver problema 3.9) ou teodolito; marca-se um ponto

B na direção perpendicular a AC e mede-se a distância  $AB$ . Visualizando A e C a partir de B, mede-se o ângulo  $B$ .

Considerando  $AB = 10m$  e  $B = 60^\circ$  calcule a distância  $AC$ .

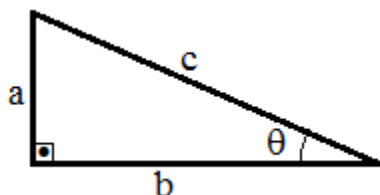


## 10.5 Identidades trigonométricas

As identidades trigonométricas são equações que relacionam as razões trigonométricas e são empregadas frequentemente em problemas da ciência. Nesse capítulo, será demonstrada a identidade fundamental. Outras identidades serão apenas enunciadas, com o objetivo de disponibilizá-las para conhecimento e uso em aplicações durante outras disciplinas de matemática.

### 10.5.1 Identidade fundamental da trigonometria

Seja um triângulo retângulo com catetos  $a$  e  $b$ , hipotenusa  $c$  e o ângulo entre  $b$  e  $c$ . Pela definição de seno e cosseno do ângulo, tem-se:



$$\operatorname{sen} \theta = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{b}{c}.$$

Elevando ao quadrado cada membro de ambas as equações, tem-se:

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{a^2}{c^2}$$

e

$$\operatorname{cos}^2 \theta = \frac{b^2}{c^2}.$$

Adicionando as duas equações, membro a membro, tem-se:

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

Pelo Teorema de Pitágoras :  $a^2 + b^2 = c^2$ , então:

$$\frac{sen^2 \theta + cos^2 \theta}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} \quad e$$

$$sen^2 \theta + cos^2 \theta = 1 \quad (5.1)$$

A Eq. (5.1) é conhecida como *identidade fundamental da trigonometria*.

### 10.5.2 Identidades com quadrados de tangentes, cotangentes, secantes e cotangentes

Dividindo a Eq. (5.1) por  $cos^2 \theta$ , tem-se:

$$\frac{sen^2 \theta + cos^2 \theta}{cos^2 \theta} = \frac{1}{cos^2 \theta}$$

Usando a definição das razões trigonométricas:

$$tg^2 \theta + 1 = sec^2 \theta \quad (5.2)$$

Dividindo a Eq. (5.1) por  $sen^2 \theta$ , tem-se:

$$\frac{sen^2 \theta + cos^2 \theta}{sen^2 \theta} = \frac{1}{sen^2 \theta}$$

Usando a definição das razões trigonométricas:

$$1 + cotg^2 \theta = cosec^2 \theta \quad (5.3)$$

### 10.5.3 Outras identidades trigonométricas

Em Leithold (1979) encontra-se a demonstração das seguintes identidades trigonométricas:

Para  $a$  e  $b$  números reais quaisquer, tem-se:

$$cos(a+b) = cos(a) \cdot cos(b) - sen(a) \cdot sen(b) \quad (5.4)$$

$$cos(a-b) = cos(a) \cdot cos(b) + sen(a) \cdot sen(b) \quad (5.5)$$

$$sen(a \pm b) = sen(a) \cdot cos(b) \pm cos(a) \cdot sen(b) \quad (5.6)$$

$$sen(2t) = 2sent \cdot cost \quad (5.7)$$

$$cos(2t) = cos^2 t - sen^2 t \quad (5.8)$$

$$cos^2\left(\frac{1}{2}t\right) = \frac{1+cost}{2} \quad (5.9)$$

$$sen^2\left(\frac{1}{2}t\right) = \frac{1-cost}{2} \quad (5.10)$$

### EXERCÍCIOS 10.5

10.5.1 Use a identidade fundamental para calcular o seno dos ângulos, dados os cossenos:

- a)  $\cos 35^\circ = 0.81915$
- b)  $\cos 126^\circ = -0.5877$
- c)  $\cos (-73^\circ) = 0.2923$
- d)  $\cos 205^\circ = -0.9063$

10.5.2 Sabendo que  $\sin(\theta) = 0,54030$  :

- a) Qual é a medida de  $\theta$  em graus ? em radianos?
- b) Calcule o  $\cos(\theta)$  usando a identidade fundamental.
- c) Calcule o  $\cos(2\theta)$  usando a Eq. 5.8.
- d) Calcule  $\sin(2\theta)$  usando a Eq. 5.7.

10.5.3 Sabendo que  $\cos(y) = -0.0348995$ :

- a) Qual é a medida de  $y$  em graus ? em radianos?
- b) Calcule o  $\sin(y)$  usando a identidade fundamental.

10.5.4 Sabendo que  $\cos(\pi/8) = 0.9238795$  :

- a) Calcule o  $\sin(\pi/8)$
- b) Calcule o cosseno de  $\pi/4$ , usando as identidades trigonométricas.
- c) Calcule o cosseno de  $\pi/16$ , usando as identidades trigonométricas.

10.5.5 Sabe-se que  $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e o  $\sin(30^\circ) = 0,5$ :

- a) Calcule o  $\cos(60^\circ)$  usando a Eq. (5.7). Calcule diretamente com a calculadora e compare.
- b) Calcule o  $\cos(60^\circ)$  usando a Eq. (5.4). Compare com os resultados anteriores.

## 10.6 Funções trigonométricas

As funções trigonométricas são definidas com base no significado das razões trigonométricas no círculo trigonométrico.

### 10.6.1 Círculo trigonométrico

O *círculo trigonométrico* é um círculo com raio unitário ( $r = 1$  u.c.) com centro na origem de um sistema de eixos ortogonais, como mostra a Fig. 6.1a.

O sentido da medida positiva dos ângulos é anti-horário, a partir do lado direito do eixo horizontal, como mostra a Fig. 6.1b. As medidas no sentido horário são negativas. Assim,  $+30^\circ$  e  $-30^\circ$  são ângulos localizados no I e IV quadrantes, respectivamente.

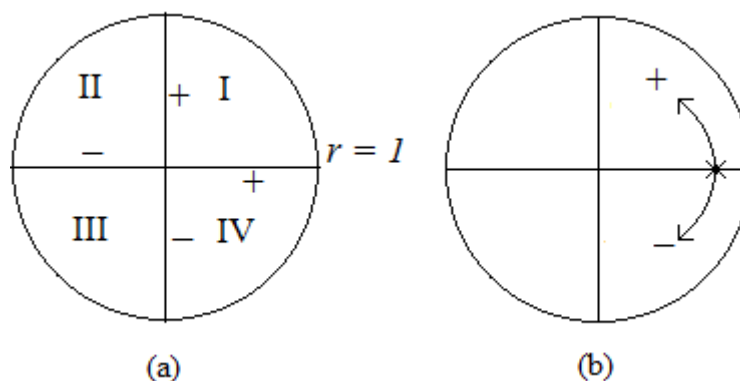


Figura 6.1 - Círculo trigonométrico

Chama-se *radiano* o arco de comprimento unitário ( $1 \text{ rd} = 1 \text{ raio}$ ), como mostra a Fig. 6.2, que corresponde, aproximadamente, ao ângulo de  $57,29578^\circ$ .

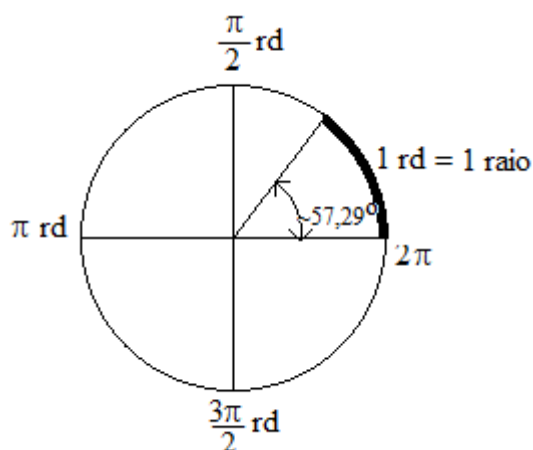


Figura 6.2 - Radianos

Assim, a semicircunferência do círculo trigonométrico mede  $\pi \text{ rd} \approx 3,1415 \text{ u.c.}$

**Exemplo 10.6.1.** Determine os arcos dados os ângulos, no círculo trigonométrico:

1. a)  $30^\circ$
- b)  $150^\circ$
- c)  $210^\circ$
- d)  $300^\circ$
- e)  $-45^\circ$

**Solução:** Utilizando a relação entre arcos e ângulos (Eq. 2.3) para  $r = 1$ :  $\text{Arco} = \frac{\alpha\pi}{180}$ , substitui-se pelo ângulo dado e obtém os arcos correspondentes:

1. a)  $\pi / 6$   
 b)  $2\pi / 3$   
 c)  $7\pi / 6$   
 d)  $5\pi / 3$   
 e)  $-\pi / 4$  ■

**Exemplo 10.6.2.** Determine os ângulos dados os arcos, no círculo trigonométrico:

1. a)  $\pi / 4$   
 b)  $3\pi / 4$   
 c)  $3\pi / 2$   
 d)  $13\pi / 6$   
 e)  $-7\pi / 6$

**Solução:** Resolvendo a (Eq. 2.3), para o ângulo , tem-se :  $\alpha = \frac{180 \cdot \text{arco}}{\pi}$  . Substituindo *arco* pelo valor dado obtém-se os ângulos correspondentes:

1. a)  $45^\circ$   
 b)  $135^\circ$   
 c)  $270^\circ$   
 d)  $390^\circ$   
 e)  $-210^\circ$  ■

## 10.6.2 Função cosseno

O eixo horizontal no círculo trigonométrico é o *eixo dos cossenos*. À direita da origem (ponto O) o eixo é positivo e à esquerda negativo, como ilustra a Fig. 6.3.

### Cosseno

Considere-se o círculo trigonométrico com  $x$  sendo o ângulo, medido no sentido anti-horário, a partir do eixo dos cossenos. A projeção ortogonal do raio (  $OP$  ) sobre o eixo dos cossenos corresponde ao  $\cos(x) = OQ$  , como ilustra a Fig. 6.3.

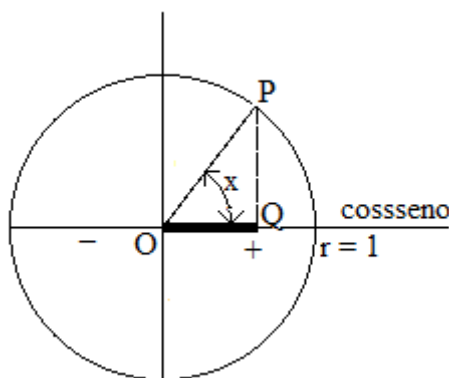


Figura 6.3 - Função Cosseno

Na Fig. 6.3, observa-se que:

1. Nos quadrantes I e IV o cosseno é positivo e nos quadrantes II e III o cosseno é negativo.
2. O cosseno dos ângulos  $90^\circ$  e  $270^\circ$  são nulos:  $\cos(90^\circ) = 0$ ;  $\cos(270^\circ) = 0$ .
3. O cosseno do ângulo  $0^\circ$  é 1 e do ângulo  $180^\circ$  é -1:  $\cos(0^\circ) = 1$ ;  $\cos(180^\circ) = -1$ .
4. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante I, o cosseno decresce (tende a zero).
5. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante II, o cosseno decresce (tende a -1), mas cresce em módulo.
6. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante III, o cosseno cresce (tende a zero).
7. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante IV, o cosseno cresce (tende a 1).
8. Para qualquer ângulo  $x$  o cosseno está entre -1 e 1:  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ .
9.  $\cos(x) = \cos(-x)$ .

**Exemplo 10.6.3.** Mostre que a projeção do raio no eixo dos cossenos, quando  $x = 60^\circ$  é 0,5.

**Solução:** Pela definição do cosseno, tem-se: (ver Fig. 6.3, se  $x = 60^\circ$  )

$$\cos(60^\circ) = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{1} = OQ$$

Como  $\cos(60^\circ) = 0,5$ , tem-se que  $OQ = 0,5$  ■

**Exemplo 10.6.4.** Considere o conjunto  $X = \{0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ\}$ .

(a) Considere um conjunto Y, formado pelos cossenos de cada elemento do conjunto X. (use a calculadora)

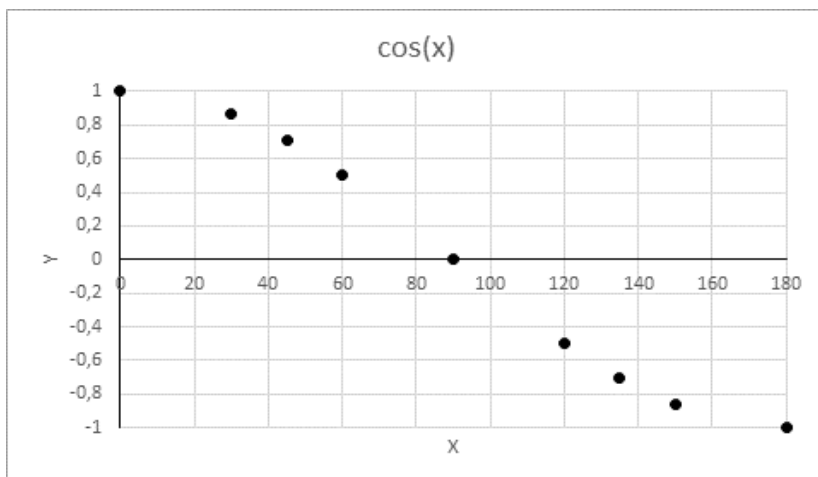
(b) Faça um gráfico cartesiano onde X é a abcissa e Y a ordenada.

**Solução:** (a) O conjunto Y é obtido fazendo o cosseno de cada elemento do conjunto X.

X	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
Y	1	0,866	0,707	0,5	0	-0,5	-0,707	-0,866	-1

(b) Cada coluna da tabela é um par ordenado  $(x,y)$  que colocados no gráfico cartesiano, formam uma curva.





Observe-se que o cosseno é positivo no quadrante I e negativo no II ■

A função cosseno associa a cada ângulo (ou arco)  $x$ , o valor do cosseno desse ângulo (arco).

$$f(x) = \cos(x).$$

(6.1)

Atribuindo valores a  $x$  e calculando os respectivos valores de  $y = \cos(x)$ , analogamente ao Exemplo 6.4, obtém-se os conjuntos  $X$  e  $Y$ . Os pares ordenados  $(x,y)$  formam a curva da função cosseno, como ilustra a Fig. 6.4.

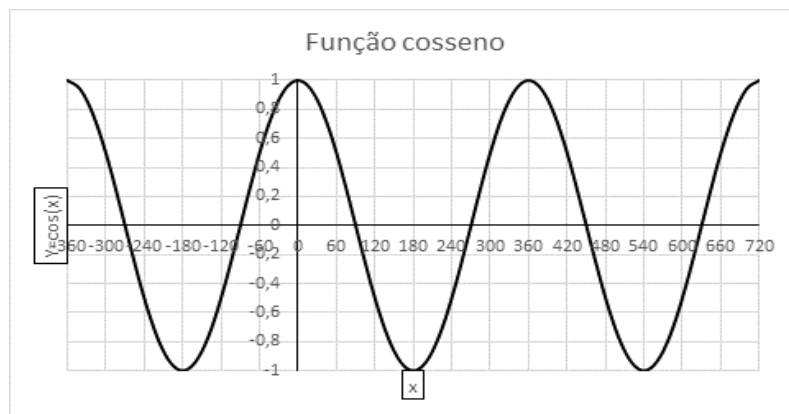


Figura 6.4 - Função cosseno:  $Y(x) = \cos(x)$

#### Domínio e imagem da função cosseno

A função cosseno é definida para qualquer valor de  $x$  real. Assim, seu domínio é o conjunto dos números reais:  $D_m f(x) = \{x \in \mathbb{R}\}$ . É mais comum expressar os valores de  $x$  em radianos (ao invés de ângulos como na Fig. 6.4), nas funções trigonométricas.

O conjunto imagem da função cosseno é formado por todos os números reais entre -1 e 1, incluindo os extremos:  $I_m f(x) = \{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$ .

### Período da função cosseno

O cosseno é uma *função cíclica* (que se repete ao longo do domínio). O *período*  $T$  de uma função cíclica é o menor intervalo em que a função não se repete.

Observe-se na Fig. 6.4 que entre  $0$  e  $360^\circ$  a função cosseno tem um ciclo sem repetições. O mesmo ocorre entre  $-180^\circ$  e  $+180^\circ$ , dentre outros intervalos em  $x$ , cujo comprimento é  $2\pi$  (ou  $360^\circ$ ). Por isso, o *período*  $T$  da função cosseno é  $2\pi$  (ou  $360^\circ$ ).

A forma mais geral da função cosseno tem dois parâmetros  $A$  e  $b$  reais:

$$f(x) = A \cdot \cos(b \cdot x). \quad (6.2)$$

A variação destes parâmetros determina a posição da função no gráfico:

- Coeficiente  $A$ : determina a *amplitude* (altura) da curva.
- Coeficiente  $b$ : determina o *período*  $T$ .

O período é inversamente proporcional a  $b$  (quanto maior  $b$ , menor o período  $T$ . Veja o Exemplo 6.6). Se para  $b = 1$ , o período é  $2\pi$ , resolvendo uma regra de três inversa, tem-se:

$$T = \frac{2\pi}{b}.$$

(6.3)

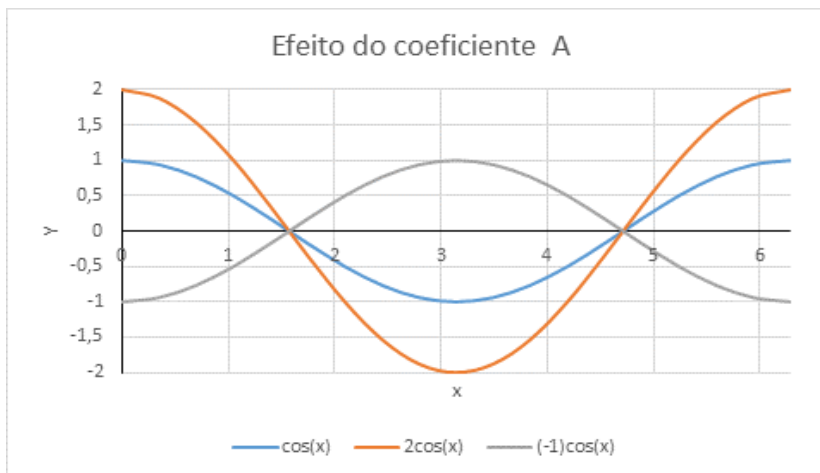
**Exemplo 10.6.5.** Compare os gráficos das funções

$$f_1(x) = \cos(x);$$

$$f_2(x) = 2\cos(x)$$

e  $f_3(x) = -\cos(x).$

**Solução:** A diferença entre as três funções dadas é o valor do coeficiente  $A$ . Em todas o  $b = 1$ .



Escolhendo como padrão a função  $f_1(x) = \cos(x)$ , com  $A = 1$  e  $b = 1$ , pode-se observar que :

1. O coeficiente  $A = 2$  na função  $f_2$ , dobrou a altura (amplitude) da função  $f_1$ ;

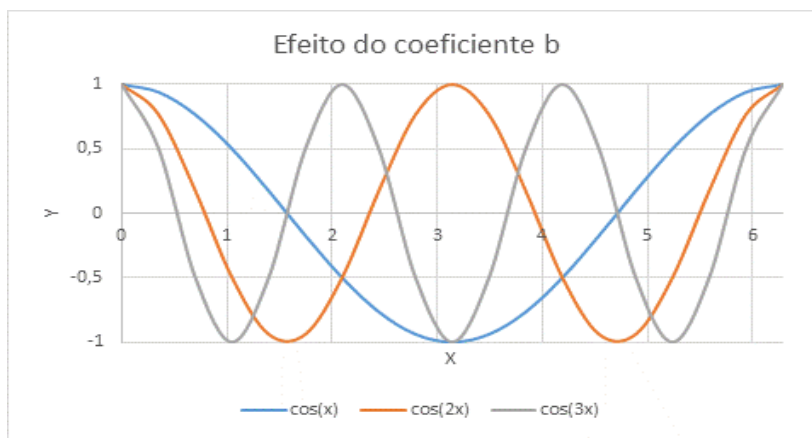
2. O coeficiente  $A = -1$  rebateu a função  $f_1$ , simetricamente ao eixo X, mas manteve a mesma amplitude, em módulo.
3. O período não se alterou, pois  $b=1$  nas três funções ■

**Exemplo 10.6.6.** Compare os gráficos das funções

$$f_1(x) = \cos(x); \quad f_2(x) = \cos(2x)$$

e  $f_3(x) = \cos(3x)$ .

**Solução:** A diferença entre as três funções dadas é o valor do coeficiente  $b$ .



Escolhendo como padrão a função  $f_1(x)=\cos(x)$ , com  $A = 1$  e  $b = 1$ , pode-se observar que :

1. O coeficiente  $b = 2$  na  $f_2$  dividiu pela metade o período da função  $f_1$ . De acordo com a Eq. (6.3), o período da função  $f_2$  é  $T = \pi$ .
2. O coeficiente  $b = 3$  dividiu por 3 o período da função  $f_1$ . De acordo com a Eq. (5.3), o período da função  $f_3$  é  $T = 2\pi/3$ .
3. A amplitude não se alterou, pois  $A=1$  nas três funções ■

### 10.6.3 Função seno

O eixo vertical no círculo trigonométrico é o *eixo dos senos*. Acima da origem o eixo é positivo e abaixo é negativo, como ilustra a Fig. 6.5.

#### Seno

A projeção ortogonal do raio ( $OP$ ) sobre o eixo dos senos corresponde ao  $\text{sen}(x) = OR$ , como ilustra a Fig. 6.5.

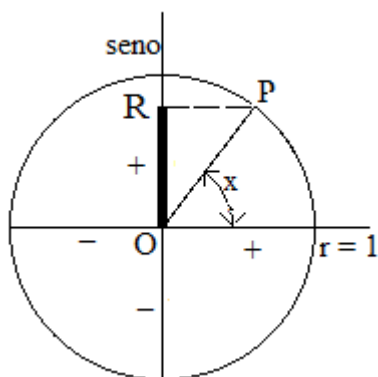


Figura 6.5 - Função seno.

Na Fig. 6.5, observa-se que:

1. Nos quadrantes I e II o seno é positivo e nos quadrantes III e IV o seno é negativo.
2. O seno dos ângulos  $0^\circ$  e  $180^\circ$  são nulos:  $\text{sen}(0^\circ) = 0$ ;  $\text{sen}(180^\circ) = 0$ .
3. O seno do ângulo  $90^\circ$  é 1 e do ângulo  $270^\circ$  é -1:  $\text{sen}(90^\circ) = 1$ ;  $\text{sen}(270^\circ) = -1$ .
4. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante I, o seno cresce (tende a 1).
5. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante II, o seno decresce (tende a zero).
6. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante III, o seno decresce (tende a -1).
7. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante IV, o seno cresce (tende a zero).
8. Para qualquer ângulo  $x$  o seno está entre -1 e 1:  $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$ .
9.  $\text{sen}(x) = -\text{sen}(-x)$ .

A função seno associa a cada ângulo (ou arco)  $x$ , o valor do seno desse ângulo (ou arco).

$$f(x) = \text{sen}(x).$$

(6.4)

Atribuindo valores a  $x$  e calculando os respectivos valores de  $y = \text{sen}(x)$ , obtém-se os conjuntos  $X$  e  $Y$ . Os pares ordenados  $(x, y)$  formam a curva da função seno, como ilustra a Fig. 6.6, conhecida como *senóide*.

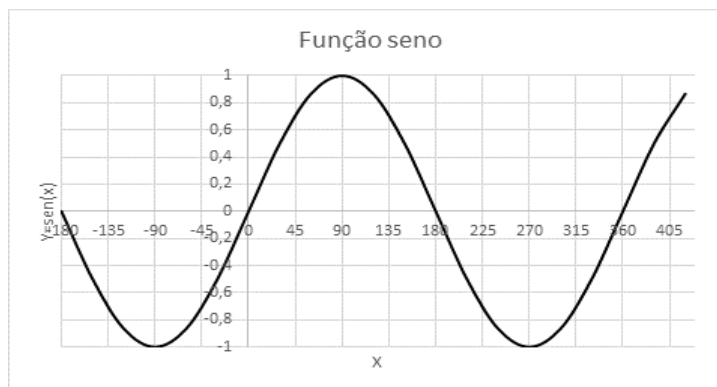


Figura 6.6 - Função seno:  $Y(x) = \text{sen}(x)$

#### Domínio e imagem da função seno

A função seno  $f(x) = \text{sen}(x)$  é definida para qualquer valor de  $x$  real. Assim, seu domínio é o conjunto dos números reais:  $D_m f(x) = \{x \in \mathbb{R}\}$ .

O conjunto imagem da função seno é formado por todos os números reais entre

-1 e 1, incluindo os extremos:  $I_m f(x) = \{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$ .

#### Período da função seno

O seno, assim como o cosseno, é uma *função cíclica* (que se repete ao longo do domínio). Observe-se na Fig. 6.6 que entre 0 e 360° a função seno tem um ciclo sem repetições. O mesmo ocorre entre -180° e +180°, dentre outros intervalos em  $x$ , cujo comprimento é  $2\pi$  (ou 360°). Por isso, o *período*  $T$  da função seno  $f(x) = \text{sen}(x)$  é  $2\pi$  (ou 360°).

A forma mais geral da função seno tem dois parâmetros  $A$  e  $b$  reais:

$$f(x) = A \cdot \text{sen}(b \cdot x).$$

(6.5)

A variação destes parâmetros determina a *amplitude* e o *período* da função, analogamente à função cosseno.

### 10.6.4 Função tangente

A reta vertical que encosta no círculo trigonométrico no ponto  $T = (1, 0)$  é o *eixo das tangentes*, como ilustra a Fig. 6.7. Acima do ponto  $T$  o eixo é positivo e abaixo negativo.

### Tangente

A distância (  $TP$  ) corresponde à  $tg(x) = TP$ ,  
como ilustra a Fig. 6.7.

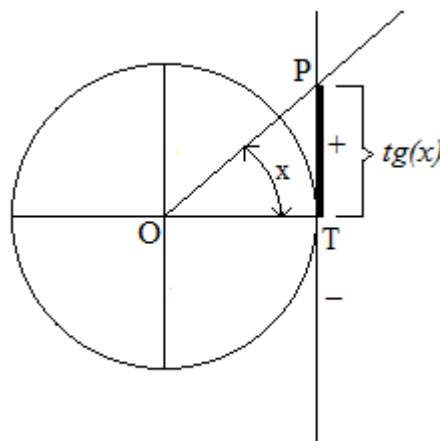


Figura 6.7 - Função Tangente

Na Fig. 6.7, observa-se que:

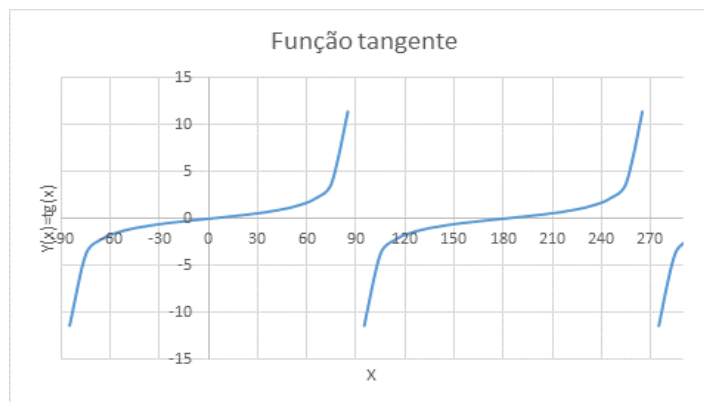
1. Nos quadrantes I e III a tangente é positiva e nos quadrantes II e IV é negativa.
2. A tangente dos ângulos  $0^\circ$  e  $180^\circ$  são nulas:  $tg(0^\circ) = 0$ ;  $tg(180^\circ) = 0$ .
3. A tangente dos ângulos  $90^\circ$  e  $270^\circ$  não existem:  $tg(90^\circ) = \nexists$ ;  $tg(270^\circ) = \nexists$ .
4. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante I, a tangente cresce (tende a infinito).
5. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante II, a tangente cresce (tende a zero).
6. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante III, a tangente cresce (tende a infinito).
7. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante IV, a tangente cresce (tende a zero).
8. A tangente varia entre menos e mais infinito:  $-\infty \leq tg(x) \leq +\infty$ .
9.  $tg(x) = -tg(-x)$ .

A função *tangente* associa a cada ângulo (ou arco)  $x$ , o valor da tangente desse ângulo (arco).

$$f(x) = tg(x).$$

(6.6)

Atribuindo valores a  $x$  e calculando os respectivos valores de  $y = tg(x)$ , obtém-se os conjuntos  $X$  e  $Y$ . Os pares ordenados  $(x,y)$  formam a curva da função tangente, como ilustra a Fig. 6.8.

Figura 6.8 - Função tangente:  $Y(x) = tg(x)$ 

### Domínio e imagem da função tangente

A função tangente  $f(x) = tg(x)$  é definida para qualquer valor de  $x$  real, **exceto** para ângulos múltiplos ímpares de  $90^\circ$  (ou de arco  $\pi/2$ ). Assim, seu domínio é:

$$D_m f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \pm \left( \frac{(2n-1)\pi}{2} \right) \right\}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

O conjunto imagem da função tangente é formado por todos os números reais:

$$I_m f(x) = \{ y \in \mathbb{R} \}.$$

### Período da função tangente

A tangente, assim como as funções seno e cosseno, é uma *função cíclica* (que se repete ao longo do domínio). Observe-se na Fig. 6.8 que entre  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$  a função tangente tem um ciclo sem repetições. O mesmo ocorre entre  $+90^\circ$  e  $+270^\circ$ , dentre outros intervalos em  $x$ , cujo comprimento é  $180^\circ$  (ou  $\pi$ ). Por isso, o *período*  $T$  da função tangente  $f(x) = tg(x)$  é  $180^\circ$  (ou  $\pi$ ).

A forma mais geral da função tangente tem dois parâmetros  $A$  e  $b$  reais:

$$f(x) = A \cdot tg(b \cdot x).$$

(6.7)

A variação destes parâmetros determina a posição da função no gráfico, analogamente à função cosseno.

## 10.6.5 Função cotangente

A reta horizontal que encosta no círculo trigonométrico no ponto  $T = (0, 1)$  é o *eixo das cotangentes*, como ilustra a Fig. 6.9. À direita do ponto  $T$  o eixo é positivo e abaixo negativo.

**Cotangente**

A distância (  $TP$  ) corresponde à  $\cotg(x) = TP$ ,  
como ilustra a Fig. 6.9.

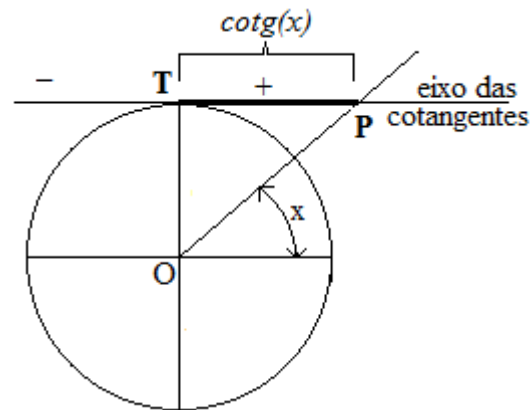


Figura 6.9 - Função Cotangente

Na Fig. 6.9, observa-se que:

1. Nos quadrantes I e III a cotangente é positiva e nos quadrantes II e IV é negativa.
2. A cotangente dos ângulos  $90^\circ$  e  $270^\circ$  são nulas:  $\cotg(90^\circ) = 0$ ;  $\cotg(270^\circ) = 0$ .
3. A cotangente dos ângulos  $0^\circ$  e  $180^\circ$  não existem:  $\cotg(0^\circ) = \nexists$ ;  $\cotg(180^\circ) = \nexists$ .
4. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante I, a cotangente decresce (tende a zero).
5. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante II, a cotangente decresce (tende a menos infinito).
6. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante III, a cotangente decresce (tende a zero).
7. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante IV, a cotangente decresce (tende a menos infinito).
8. A cotangente varia entre menos e mais infinito:  $-\infty \leq \cotg(x) \leq +\infty$ .
9.  $\cotg(x) = -\cotg(-x)$ .

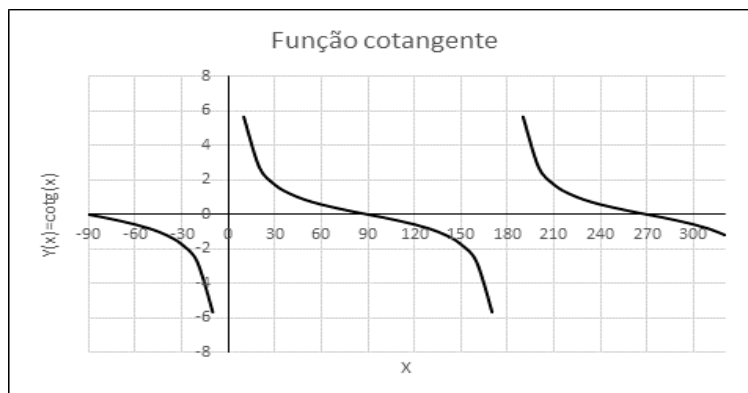
A função *cotangente* associa a cada ângulo (ou arco)  $x$ , o valor da cotangente desse ângulo (arco).

$$f(x) = \cotg(x).$$

(6.8)

Atribuindo valores a  $x$  e calculando os respectivos valores de  $y = \cotg(x)$ , obtém-se os conjuntos  $X$  e  $Y$ . Os pares ordenados  $(x, y)$  formam a curva da função cotangente, como ilustra a Fig. 6.10.



Figura 6.10 - Função cotangente:  $Y(x) = \cotg(x)$ 

### Domínio e imagem da função cotangente

A função cotangente  $f(x) = \cotg(x)$  é definida para qualquer valor de  $x$  real, **exceto** para ângulos múltiplos de  $180^\circ$  (ou de arco  $\pi$ ). Assim, seu domínio é:

$$D_m f(x) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \pm n \cdot \pi\}, \text{ para } n=0,1,2,3,\dots$$

O conjunto imagem da função tangente é formado por todos os números reais:

$$I_m f(x) = \{y \in \mathbb{R}\}.$$

### Período da função cotangente

A cotangente, assim como as funções seno e cosseno, é uma *função cíclica* (que se repete ao longo do domínio). Observe-se na Fig. 6.10 que entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$  a função cotangente tem um ciclo sem repetições. O mesmo ocorre entre  $180^\circ$  e  $360^\circ$ , dentre outros intervalos em  $x$ , cujo comprimento é  $180^\circ$  (ou  $\pi$ ). Por isso, o *período*  $T$  da função cotangente  $f(x) = \cotg(x)$  é  $180^\circ$  (ou  $\pi$ ).

A forma mais geral da função cotangente tem dois parâmetros  $A$  e  $b$  reais:

$$f(x) = A \cdot \cotg(b \cdot x).$$

(6.9)

A variação destes parâmetros determina a posição da função no gráfico, analogamente à função cosseno.

## 10.6.6 Função secante

Prolongando a reta que define o ângulo  $x$  no quadrante I, no círculo trigonométrico, até o eixo das tangentes, obtém-se um segmento de reta, da origem até aquele eixo, como ilustra a Fig. 6.11.

### Secante

A distância (  $OP$  ) corresponde à  $\sec(x) = OP$ , como ilustra a Fig. 6.11.

Para ângulos do II e III quadrantes, prolonga-se a reta que define o ângulo  $x$  até um eixo simétrico ao eixo das tangentes, em relação ao eixo dos senos. Nesses quadrantes a secante é negativa. No quarto quadrante o prolongamento da reta que define o ângulo deve ser feito até o eixo das tangentes, gerando secantes positivas.

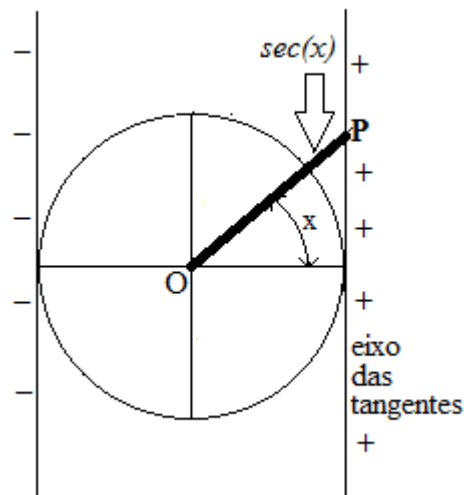


Figura 6.11 - Função secante

O sinal da função secante é o mesmo da função cosseno: positivo nos quadrantes I e IV e negativo nos quadrantes II e III.

Na Fig. 6.11, observa-se que:

1.  $\sec(0^\circ) = 1$  e  $\sec(180^\circ) = -1$ .
2. A secante dos ângulos  $90^\circ$  e  $270^\circ$  não existem:  $\sec(90^\circ) = \nexists$ ;  $\sec(270^\circ) = \nexists$ .
3. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante I, a secante cresce (tende a infinito).
4. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante II, a secante cresce (tende a 1).
5. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante III, a secante decresce (tende a menos infinito).
6. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante IV, a secante decresce (tende a 1).
7. A secante varia entre menos infinito e -1 e entre 1 e mais infinito:  

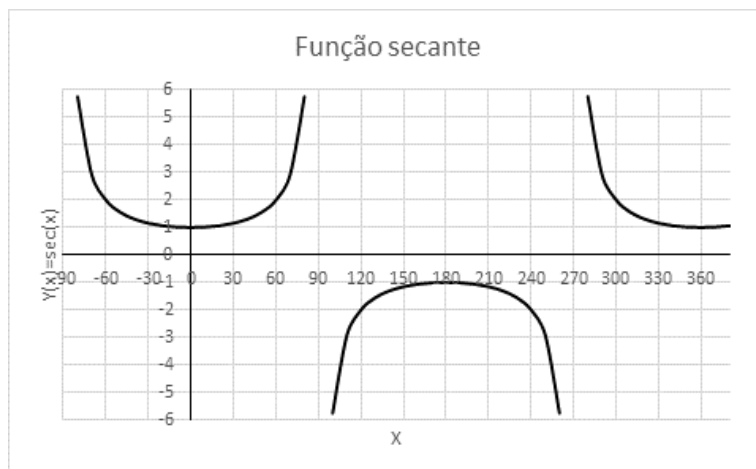
$$-\infty \leq \sec(x) \leq -1 \text{ e } 1 \leq \sec(x) \leq +\infty.$$
8.  $\sec(x) = \sec(-x)$ .

A função *secante* associa a cada ângulo (ou arco)  $x$ , o valor da secante desse ângulo (arco).

$$f(x) = \sec(x).$$

(6.10)

Atribuindo valores a  $x$  e calculando os respectivos valores de  $y = \sec(x)$ , obtém-se os conjuntos  $X$  e  $Y$ . Os pares ordenados  $(x, y)$  formam a curva da função secante, como ilustra a Fig. 6.12.

Figura 6.12 - Função secante:  $Y(x) = \sec(x)$ **Domínio e imagem da função secante**

A função secante  $f(x) = \sec(x)$  é definida para qualquer valor de  $x$  real, **exceto** para ângulos múltiplos ímpares de  $90^\circ$  (ou de arco  $\pi/2$ ). Assim, seu domínio é:

$$D_m f(x) = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \pm \left( \frac{(2n-1)\pi}{2} \right) \right\}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

O conjunto imagem da função secante é:

$$I_m f(x) = \{ y \in \mathbb{R} / -\infty \leq y \leq -1 \text{ ou } 1 \leq y \leq +\infty \}.$$

**Período da função secante**

A secante, assim como as funções seno e cosseno, é uma *função cíclica* (que se repete ao longo do domínio). Observe-se na Fig. 6.12 que entre  $-90^\circ$  e  $+270^\circ$  a função secante tem um ciclo sem repetições. O mesmo ocorre entre  $0^\circ$  e  $+360^\circ$ , dentre outros intervalos em  $x$ , cujo comprimento é  $360^\circ$  (ou  $2\pi$ ). Por isso, o período  $T$  da função tangente  $f(x) = \sec(x)$  é  $360^\circ$  (ou  $2\pi$ ).

A forma mais geral da função secante tem dois parâmetros  $A$  e  $b$  reais:

$$f(x) = A \cdot \sec(b \cdot x).$$

(6.11)

A variação destes parâmetros determina a posição da função no gráfico, analogamente à função cosseno.

**10.6.7 Função cossecante**

Prolongando a reta que define o ângulo  $x$  nos quadrantes I e II, no círculo trigonométrico, até o eixo das cotangentes, obtém-se um segmento de reta, da origem até aquele eixo, como ilustra a Fig. 6.13. Nesses quadrantes a cossecante é positiva.

**Cossecante**

A distância (  $OP$  ) corresponde à  $\text{cosec}(x) = OP$ , como ilustra a Fig. 6.13.

Para ângulos do III e IV quadrantes, prolonga-se a reta que define o ângulo  $x$  até um eixo simétrico ao eixo das cotangentes, em relação ao eixo dos cossenos. Nesses quadrantes a cossecante é negativa.

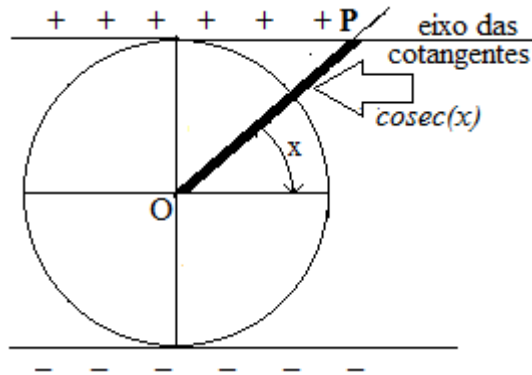


Figura 6.13 - Função cossecante

O sinal da função cossecante é o mesmo da função seno: positivo nos quadrantes I e II e negativo nos quadrantes III e IV.

Na Fig. 6.13, observa-se que:

1.  $\text{cosec}(90^\circ) = 1$  e  $\text{cosec}(270^\circ) = -1$ .
2. A cossecante dos ângulos  $0^\circ$  e  $180^\circ$  não existem:  $\text{cosec}(0^\circ) = \nexists$ ;  $\text{cosec}(180^\circ) = \nexists$ .
3. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante I, a cossecante decresce (tende a 1).
4. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante II, a cossecante cresce (tende a infinito).
5. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante III, a cossecante cresce (tende a 1).
6. Na medida em que  $x$  cresce no quadrante IV, a cossecante decresce (tende a menos infinito).
7. A cossecante varia entre menos infinito e -1 e entre 1 e mais infinito:  

$$-\infty \leq \text{cosec}(x) \leq -1 \text{ e } 1 \leq \text{cosec}(x) \leq +\infty.$$
8.  $\text{cosec}(x) = -\text{cosec}(-x)$ .

A função *cossecante* associa a cada ângulo (ou arco)  $x$ , o valor da cossecante desse ângulo (arco).

$$f(x) = \text{cosec}(x).$$

(6.12)

Atribuindo valores a  $x$  e calculando os respectivos valores de  $y = \text{cosec}(x)$ , obtém-se os conjuntos  $X$  e  $Y$ . Os pares ordenados  $(x, y)$  formam a curva da função cossecante, como ilustra a Fig. 6.14.

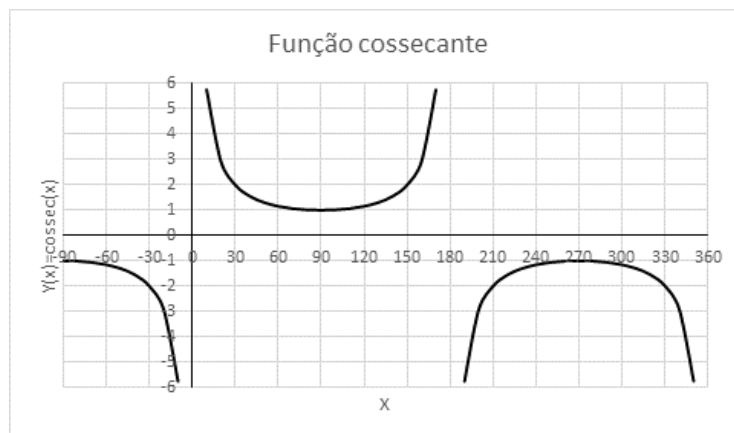


Figura 6.14 - Função cossecante

### Domínio e imagem da função cossecante

A função cossecante  $f(x) = \text{cosec}(x)$  é definida para qualquer valor de  $x$  real, **exceto** para ângulos múltiplos de  $180^\circ$  (ou de arcos  $\pi$ ). Assim, seu domínio é:

$$D_m f(x) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \pm n \cdot \pi\}, \text{ para } n=0,1,2,3,\dots$$

O conjunto imagem da função cossecante é:

$$I_m f(x) = \{y \in \mathbb{R} / -\infty \leq y \leq -1 \text{ ou } 1 \leq y \leq +\infty\}.$$

### Período da função cossecante

A cossecante, assim como as funções seno e cosseno, é uma *função cíclica* (que se repete ao longo do domínio). Observe-se na Fig. 6.14 que entre  $0^\circ$  e  $+360^\circ$  a função cossecante tem um ciclo sem repetições. O mesmo ocorre entre  $-90^\circ$  e  $+270^\circ$ , dentre outros intervalos em  $x$ , cujo comprimento é  $360^\circ$  (ou  $2\pi$ ). Por isso, o *período*  $T$  da função cossecante  $f(x) = \text{cosec}(x)$  é  $360^\circ$  (ou  $2\pi$ ).

A forma mais geral da função cosecante tem dois parâmetros  $A$  e  $b$  reais:

$$f(x) = A \cdot \text{cosec}(b \cdot x).$$

(6.13)

A variação destes parâmetros determina a posição da função no gráfico, analogamente ao estudo realizado com as demais funções trigonométricas.

## EXERCÍCIOS 10.6

10.6.1 Desenhe os arcos dos seguintes ângulos, no círculo trigonométrico:

- a)  $225^\circ$
- b)  $-60^\circ$
- c)  $-120^\circ$
- d)  $420^\circ$

e)  $-135^\circ$

10.6.2 Desenhe os ângulos dos seguintes arcos, no círculo trigonométrico:

a)  $5\pi/4$

b)  $-\pi/4$

c)  $10\pi/3$

d)  $-13\pi/6$

e)  $-7\pi/4$

10.6.3 Determine os senos e cossenos dos seguintes arcos usando calculadora:

a)  $\pi/4$

b)  $-\pi/4$

c)  $4\pi/3$

d)  $5\pi/6$

e)  $-3\pi/4$

10.6.4 Faça um círculo trigonométrico de raio  $1\text{ dm}$ , projete e meça os senos e cossenos dos seguintes arcos. Compare as medidas obtidas com os resultados do exercício anterior.

a)  $\pi/4$

b)  $-\pi/4$

c)  $4\pi/3$

d)  $5\pi/6$

e)  $-3\pi/4$

10.6.5 Projete e meça os senos e cossenos no círculo trigonométrico de raio  $1\text{ dm}$ . Confira os valores medidos com a calculadora.

	$30^\circ$	$70^\circ$	$120^\circ$	$210^\circ$	$-80^\circ$	$-150^\circ$
seno						
cosseno						
tangente						

10.6.6 Usando apenas o círculo trigonométrico (sem usar a calculadora) determine o senos e cossenos dos seguintes ângulos:

a)  $0^\circ$

b)  $90^\circ$

c)  $270^\circ$

d)  $360^\circ$

e)  $-180^\circ$

10.6.7 Usando apenas o círculo trigonométrico (sem usar a calculadora) determine o sinal dos senos e cossenos dos seguintes ângulos:

- a)  $25^\circ$
- b)  $110^\circ$
- c)  $-125^\circ$
- d)  $240^\circ$
- e)  $-265^\circ$

10.6.8 Usando apenas o círculo trigonométrico, complete o quadro com os sinais de senos, cossenos e tangentes em cada quadrante.

	I	II	III	IV
Senos				
Cossenos				
Tangentes				

10.6.9 Mostre que  $\cos(x) = \cos(-x)$  usando as projeções de cosseno no círculo trigonométrico.

10.6.10 Mostre que  $\sin(x) = -\sin(-x)$  usando as projeções de seno no círculo trigonométrico.

10.6.11 Explique, usando as projeções de seno no círculo trigonométrico, porque para qualquer ângulo  $x$ ,  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ .

10.6.12 Faça o gráfico (manualmente) de um período da função  $f(x) = \sin(x)$  e a partir deste, faça o gráficos das funções dadas, interpretando o significado gráfico da variação dos coeficientes.

- a)  $F(x) = 2\sin(x)$
- b)  $G(x) = \sin(2x)$
- c)  $Q(x) = -2\sin(x)$
- d)  $R(x) = \sin(-2x)$
- e)  $J(x) = \sin(-x)$
- f)  $M(x) = -\sin(-x)$

10.6.13 Faça o gráfico (manualmente) de um período da função  $g(x) = \cos(x)$  e a partir deste, faça o gráficos das funções dadas, interpretando o significado gráfico da variação dos coeficientes.

- a)  $f(x) = 2\cos(x)$
- b)  $K(x) = -2\cos(x)$
- c)  $L(x) = \cos(-2x)$
- d)  $N(x) = \cos(2x)$

10.6.14 Faça os gráficos dos dois exercícios anteriores usando uma planilha eletrônica e compare com os gráficos feitos manualmente.

10.6.15 Faça um círculo trigonométrico de raio  $1 \text{ dm}$ , projete e meça as tangentes e cotangentes dos seguintes arcos. (Confira com a calculadora).

- a)  $\pi/4$
- b)  $-\pi/4$
- c)  $4\pi/3$

d)  $5\pi/6$

e)  $-3\pi/4$

10.6.16 Explique porque  $\operatorname{tg}(90^\circ)$  e  $\operatorname{cotg}(180^\circ)$  não existem:

a) Usando o círculo trigonométrico

b) Usando a definição de tangente e cotangente.

10.6.17 Faça os gráficos (manualmente e com planilha eletrônica) de um período das funções dadas:

a)  $f(x) = 2\operatorname{tg}(x)$

b)  $g(x) = \operatorname{cotg}(2x)$

c)  $F(x) = 2\operatorname{tg}(2x)$

d)  $G(x) = 2\operatorname{cotg}(x)$

10.6.18 Faça um círculo trigonométrico de raio  $1\text{ dm}$ , projete e meça as secantes e cossecantes dos seguintes arcos. (Confira com a calculadora).

a)  $\pi/4$

b)  $-\pi/4$

c)  $4\pi/3$

d)  $5\pi/6$

e)  $-3\pi/4$

10.6.19 Explique porque  $\sec(90^\circ)$  e  $\operatorname{cosec}(0^\circ)$  não existem:

a) Usando o círculo trigonométrico

b) Usando a definição de secante e cossecante.

10.6.20 Faça os gráficos (manualmente e com planilha eletrônica) de um período das funções dadas:

a)  $f(x) = 2\sec(x)$

b)  $g(x) = \operatorname{cosec}(4x)$

c)  $F(x) = 3\operatorname{cosec}(2x)$

d)  $G(x) = 4\sec(3x)$

10.6.21 Faça os gráficos das funções usando uma planilha eletrônica:

a)  $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$

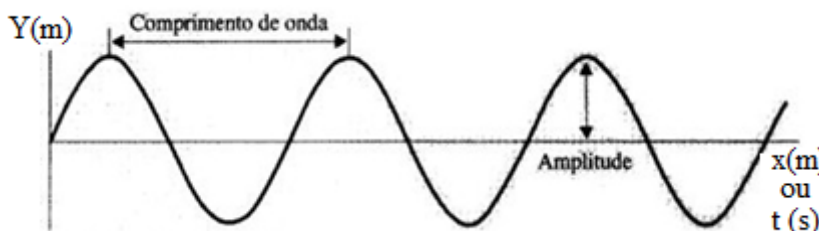
b)  $G(x) = \operatorname{sen}^2(3x)$

c)  $g(x) = \operatorname{sen}^2(x)$

d)  $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(x)$



**10.6.22** Três conceitos definem uma onda sonora: o *comprimento de onda* ( $\lambda$ , m), a *frequência* ( $f$ , Hz) e *intensidade* ( $I$ , m). O comprimento de onda é a distância de um ciclo da onda. A intensidade é a altura da onda e a frequência é o número de oscilações que a onda faz por unidade de tempo. A Figura abaixo ilustra estas variáveis.



Os sons graves (voz masculina, sons do contrabaixo ou cordas grossas do violão) têm frequências baixas. Os sons agudos (voz feminina, cordas finas do violão) têm frequências altas. Cada nota musical tem uma frequência característica, p.ex.  $La = 440 \text{ Hz}$ . Isto significa que ao tocar um La ocorrem 440 vibrações em 1 segundo.

O volume do som está associado com a intensidade. Quanto maior o volume, maior a intensidade.

Sabendo que as frequências das notas MI e Do são 330 e 264 Hz, respectivamente, faça o gráfico das ondas para La, Mi e Do. Use a seguinte equação de onda:

$Y(x) = I \cdot \text{sen}(f \cdot t)$  onde  $Y$  é a altura (m),  $f$  é a frequência (Hz) e  $t$  é o tempo (s).

## 10.7 Funções arco e equações trigonométricas

As funções arco são as *funções inversas* das funções trigonométricas estudadas nos capítulos anteriores.

Pela definição de função inversa, tem-se que:

$f(x)$  e  $g(x)$  são inversas se:  $f[g(x)] = x$  e  $g[f(x)] = x$ .

Duas propriedades das funções inversas devem ser lembradas:

1. O domínio de  $f$  é a imagem de  $f^{-1}$  e vice-versa.
2. Os gráficos de  $f$  e  $f^{-1}$  são simétricos em relação à função identidade  $y = x$ .

**Exemplo 10.7.1.** Determine a função inversa de  $y = f(x) = x^2$ .

**Solução:** A inversão de funções  $y = f(x)$  é obtida com as seguintes operações (ver capítulo de funções logarítmicas):

1º) Resolver a função para  $x$ :

Aplicando raiz quadrada em ambos os lados da equação dada, tem-se:

$$\pm\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = x$$

2º) Trocar as  $x$  por  $y$  e  $y$  por  $x$ .

$$y = \pm\sqrt{x}$$

A função obtida satisfaz a definição de função inversa, portanto,

$$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$$

Porém,  $f^{-1}$  NÃO É FUNÇÃO, pois para cada  $x > 0$ , tem-se dois valores de  $y$  correspondentes, como mostra a Fig. 7.1.

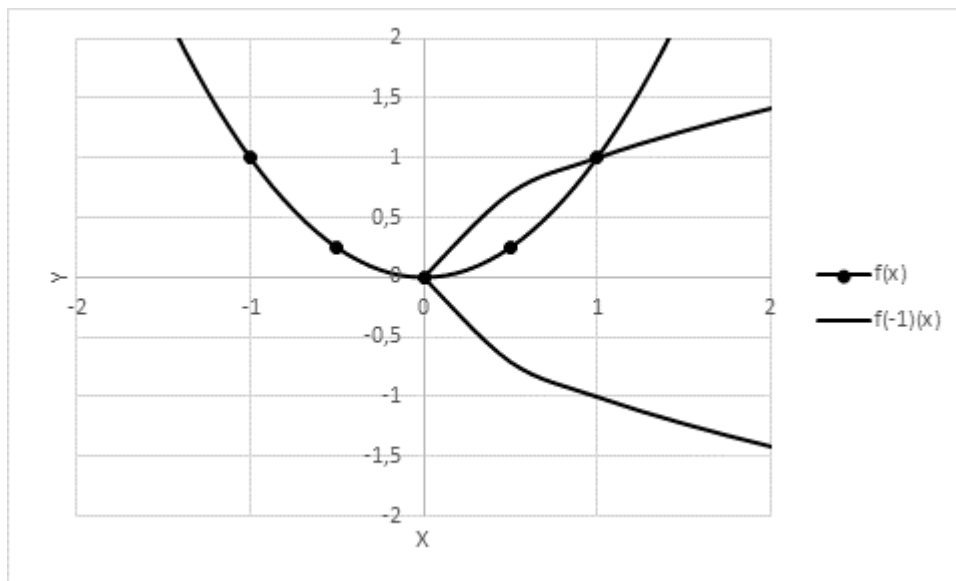


Figura 7.1 - Visualização da restrição do domínio de  $y=f(x) = x^2$  para que  $f^{-1}(x)$  seja função.

Para que  $y=f(x) = x^2$  tenha inversas, é necessário *restringir o domínio de  $f(x)$* : Seja a função

$y_1=f_1(x) = x^2$  definida para  $x > 0$ . Aplicando os passos para inversão em  $y_1$ , obtém-se a função  $f_1^{-1}(x) = f_2(x) = +\sqrt{x}$ .

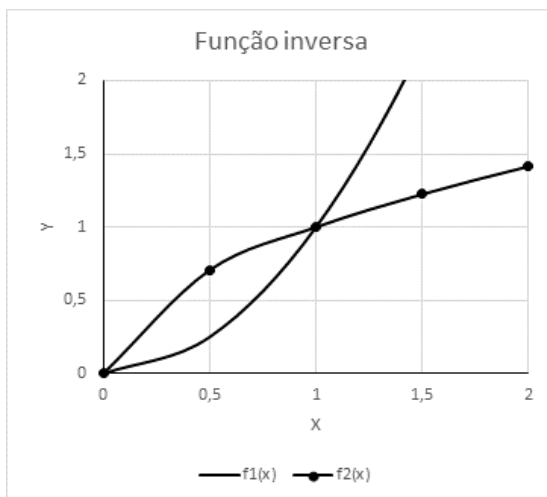


Figura 7.2 - Funções inversas:  $f_1(x)$  e  $f_1^{-1}(x) = f_2(x)$

As funções  $f_1(x)$  e  $f_1^{-1}(x)$  satisfazem a definição de função inversa; o domínio de  $f_1(x)$  é a imagem de  $f_1^{-1}(x)$  e são simétricas em relação à função identidade, como mostra a Fig. 7.2 ■

### 10.7.1 As funções arco

Para definir a função inversa das funções arco é necessário *restringir domínio* das funções diretas para (analogamente ao Ex. 7.1) apenas um período  $[-\pi/2, \pi/2]$ , porque além deste domínio, a inversa não satisfaria o conceito de função.

**Definição 10.7.1.** A função *arco seno*, denotada por

$$y = f(x) = \arcsen(x)$$

associa um arco  $y$  a cada valor de seno de  $x$ .

**Exemplo 10.7.2.** Faça o gráfico, determine o domínio e a imagem das funções

$$f(x) = \arcsen(x).$$

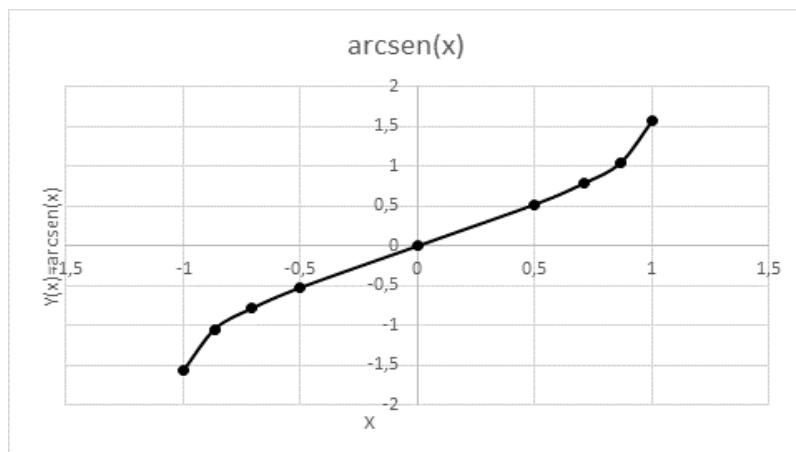
**Solução:** Seja um conjunto de valores de senos

$$X = \{-1, -0.86, -0.707, -0.5, 0, 0.5, 0.707, 0.86, 1\}.$$

O conjunto  $Y = f(x) = \arcsen(x)$  será composto pelos *arcos cujos senos* correspondem aos elementos de  $X$ .

$$Y = \{-\pi/2, -\pi/3, -\pi/4, -\pi/6, 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2\}.$$

Pela Def. 7.1, a função  $\arcsen(x)$  associa os elementos dos conjuntos  $X$  e  $Y$ , como ilustra a figura abaixo.



Como pode-se observar no gráfico, o domínio da função  $\arcsen(x)$  é:

$$D_m f(x) = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 1\}.$$

A imagem da função  $\arcsen(x)$  é:

$$I_m f(x) = \{y \in \mathbb{R} / -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\} \blacksquare$$

**Exemplo 10.7.3.** Verifique se as funções  $f(x) = \arcsen(x)$  e  $g(x) = \sen(x)$  são inversas, conferindo:

1. pela definição
2. pela igualdade dos domínios e imagens e
3. pela propriedade de simetria em relação à função identidade.

**Solução:** (i) Pela definição de função inversa, tem-se:

$$g[f(x)] = x. \text{ Então deve ser verdade que } \arcsen(\sen(x)) = x.$$

Seguem alguns exemplos:

•Seja  $x = \pi/6$ . Pergunta-se:  $\arcsen(\sen(\pi/6)) = ?$ .

Mas,  $\sen(\pi/6) = 0,5$ . Então  $\arcsen(\sen(\pi/6)) = \arcsen(0,5)$ .

Qual é o arco cujo seno é 0,5?  $\pi/6$ . Portanto,

$$\arcsen(\sen(\pi/6)) = \arcsen(0,5) = \pi/6 = x.$$

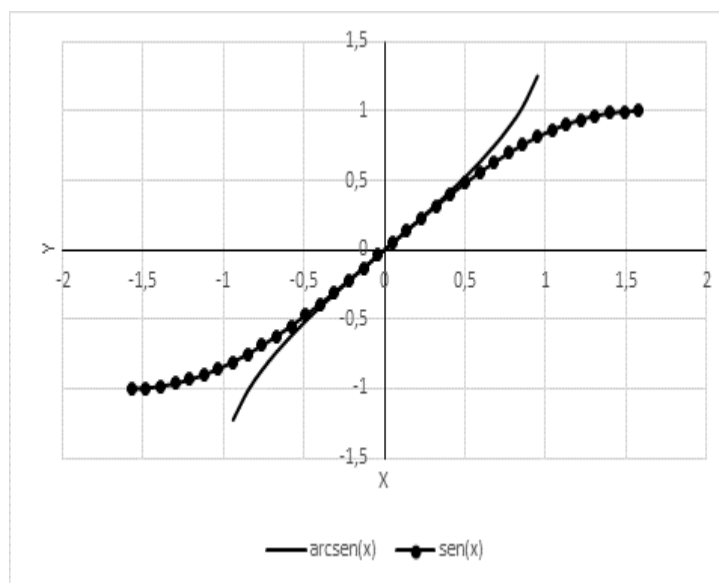
•Se  $x = \pi/4$ , tem-se  $\arcsen(\sen(\pi/4)) = \arcsen(0,707) = \pi/4 = x$ .

•Se  $x = \pi/2$ , tem-se  $\arcsen(\sen(\pi/2)) = \arcsen(1) = \pi/2 = x$ .

•Se  $x = 0$ , tem-se  $\arcsen(\sen(0)) = \arcsen(0) = 0 = x$ .

(ii) Restringindo o domínio da função  $g(x) = \sen(x)$  apenas para  $[-\pi/2, \pi/2]$ , tem-se:

$$D_m f(x) = I_m g(x) = [-1, 1] \text{ e } D_m g(x) = I_m f(x) = [-\pi/2, \pi/2].$$



(iii) A figura acima mostra a simetria de  $\arcsen(x)$  e  $\sen(x)$  em relação à função identidade  $y = x$  no domínio  $[-1, 1]$  ■

### Outras funções arco

As conclusões apresentadas acima sobre a função  $\arcsen(x)$  podem ser estendidas para as demais funções trigonométricas. Assim, pode-se definir também outras funções arco:

$$f(x) = \arccos(x)$$

$$f(x) = \arctg(x)$$

$$f(x) = \arcsec(x)$$

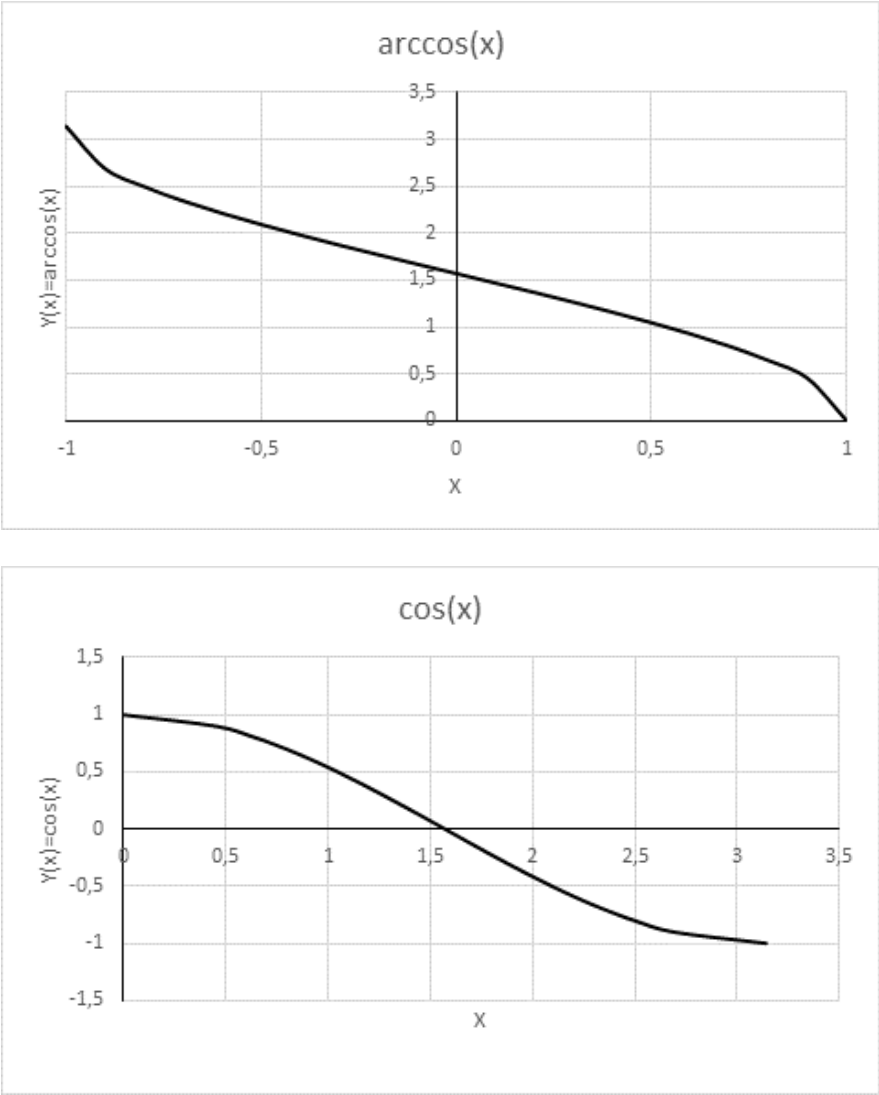
$$f(x) = \operatorname{arccosec}(x).$$

$$\text{e } f(x) = \operatorname{arccotg}(x)$$

**Exemplo 10.7.4.** Faça o gráfico e defina o domínio e a imagem das funções inversas

$$f(x) = \arccos(x) \text{ e } g(x) = \cos(x).$$

**Solução:** Analogamente ao Ex. 7.1, o gráfico das funções dadas é obtido definindo os conjuntos X e Y e plotando os pares ordenados no gráfico cartesiano.



$f(x) = \arccos(x)$	$g(x) = \cos(x)$
$D_m f(x) = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 1\}$	$D_m g(x) = \{y \in \mathbb{R} / 0 \leq y \leq \pi\}$
$I_m f(x) = \{y \in \mathbb{R} / 0 \leq y \leq \pi\}$	$I_m g(x) = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 1\}$

Como pode-se observar na tabela acima,  $D_m f(x) = I_m g(x)$  e  $I_m f(x) = D_m g(x)$  ■

10.7.2 Equações trigonométricas

**Definição 10.7.2.** Uma equação é trigonométrica se, em ao menos um dos membros da igualdade, a variável estiver no arco de uma função trigonométrica.

Exemplos:

1)  $\sin x + \cos x = 1$  e  $\sin 2x = \cos 2x$  são equações trigonométricas.

2)  $x + (\operatorname{tg} 30^\circ) \cdot x^2 = 0$  e  $x + \sin 60^\circ = 0$  não são equações trigonométricas pois as variáveis não estão nos arcos das funções trigonométricas.

### Solução das equações trigonométricas

1.  $x = r$  é uma *raiz* ou *solução* da equação trigonométrica  $f(x) = g(x)$  se  $r$  for elemento do domínio de  $f$  e  $g$  e se  $f(r) = g(r)$ .
2. O conjunto solução  $S$  é o conjunto de todas as raízes  $x = r$  da equação.

**Exemplo 10.7.5.** Determine o conjunto solução de:

1.  $\cos(x) = 0$ .

2.  $\sin(x) = 1$ .

**Solução:**

1. Procura-se valores de  $x$  reais, tal que  $\cos(x) = 0$ . Examinando no círculo trigonométrico, observa-se que os arcos cujo cosseno é 0, são:  $\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \pm \frac{7\pi}{2}, \pm \frac{9\pi}{2}, \dots, \pm \frac{(2n+1)\pi}{2}$ , sendo  $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Portanto,  $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \pm \frac{(2n-1)\pi}{2}\}$  sendo  $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

2. Procura-se valores de  $x$  reais, tal que  $\sin(x) = 1$ . Examinando no círculo trigonométrico, observa-se que os arcos cujo seno é 1, são: os arcos positivos  $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}, \frac{17\pi}{2}, \dots, \frac{(4n+1)\pi}{2}$  para  $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  e os negativos  $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{11\pi}{2}, \dots, \pm \frac{(4m-1)\pi}{2}$ , para  $m = 1, 2, 3, 4, \dots$

Portanto,  $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{(4n+1)\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{(4m-1)\pi}{2}\}$   $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  e  $m = 1, 2, 3, 4, \dots$  ■

**Exemplo 10.7.6.** Determine o conjunto solução de  $\cos(2x+1) = 0$ , no domínio  $\mathbb{R}^+$ .

**Solução:** Usando a função inversa *arcos* em ambos os lados da equação, tem-se:  $\operatorname{arcos}(\cos(2x+1)) = \operatorname{arcos}(0)$ . Pela definição das funções inversas, tem-se:

$$2x+1 = \operatorname{arcos}(0).$$

Quais são os arcos positivos cujo cosseno é zero?  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots, \frac{(2n+1)\pi}{2}$ . Então,

$$2x+1 = \frac{(2n+1)\pi}{2} \text{ sendo } n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \text{ Resolvendo para } x, \text{ tem-se:}$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2} - 1 \right] \text{ ou}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{1}{4} \cdot [(2n+1)\pi - 2]\} \text{ sendo } n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \text{ ■}$$

**Exemplo 10.7.7.** Determine o conjunto das soluções no intervalo  $[-90^\circ, 90^\circ]$ .

- a)  $\text{sen}(x) = 0,45$   
 b)  $\text{cos}(y) = 0,23$ .

**Solução:** Como esses valores de seno e cosseno não são facilmente verificados através do círculo trigonométrico, ou arcos conhecidos, é necessário utilizar a calculadora (ou uma tabela se senos e cossenos):

1°) Ajuste a calculadora para obter a resposta em ângulo (Tecla “DRG” . Deixe na posição D);

2°) Entre com o valor do seno ou cosseno de  $x$ ;

3°) Use as teclas de função inversa, geralmente “INV” e a tecla da função trigonométrica (isso corresponde a  $\arcsen$ ,  $\arccos$ ,...). O resultado é o ângulo correspondente no intervalo  $[-90^\circ, 90^\circ]$ .

1.  $\arcsen(\text{sen}(0,45)) = 26,74366^\circ$  . Esse resultado corresponde a solução no quadrante I:  $S = \{x \in R/x = 26,74366^\circ\}$ .

2. Usando procedimento semelhante, obtém-se:

$\arccos(\text{cos}(0,23)) = 76,70292^\circ$  . Esse resultado corresponde a solução no quadrante I. No quadrante II, a solução é  $-76,70292^\circ$ , pois  $\text{cos}(x) = \text{cos}(-x)$ . Então,

$$S = \{y \in R/y = \pm 76,70292^\circ\} \blacksquare$$

**Exemplo 10.7.8.** Resolva a equação trigonométrica:  $2\text{sen}(3x) = 0$

**Solução:** Dividindo a equação dada por 2 (propriedade fundamental das equações), tem-se:

$\text{sen}(3x) = 0$ . Aplicando a função inversa do seno:  $\arcsen(x)$  em ambos os lados da equação, tem-se:

$\arcsen(\text{sen}(3x)) = \arcsen(0)$ . No lado direito, procura-se arcos cujos senos sejam nulos:  $0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots, \pm n\pi$ .

$3x = \pm n\pi$ , para  $n=0,1,2,3,4,\dots$ , pois o seno é nulo para  $\pm n\pi$ . Assim,

$$S = \{x \in R/x = \pm \frac{n\pi}{3}\} \text{ para } n=0,1,2,3,4,\dots \blacksquare$$

## EXERCÍCIOS 10.7

**10.7.1** Encontre um valor positivo ou nulo dos seguintes arcos:

- |                  |                         |                          |
|------------------|-------------------------|--------------------------|
| a) $\arcsen(0)$  | e) $\arctg(1)$          | i) $\text{arcsec}(-1)$   |
| b) $\arcsen(-1)$ | f) $\text{arccotg}(-1)$ | j) $\text{arccosec}(-1)$ |
| c) $\arccos(1)$  | g) $\arctg(0)$          | k) $\text{arccosec}(2)$  |
| d) $\arccos(-1)$ | h) $\text{arccotg}(1)$  | l) $\text{arcsec}(1)$    |

**10.7.2** Determine as raízes positivas de cada equação:

- a)  $\text{sen}(x) = 0$



b)  $\cos(2x) = 0$

c)  $\sin(3x) = 0$

d)  $\cos(5x) = 0$

10.7.3 Escreva todas as raízes de cada função:

a)  $y = \sin(x)$

b)  $y = \cos(2x)$

c)  $y = \sin(3x)$

d)  $y = \cos(5x)$

10.7.4 Determine todas as soluções da equação:  $1 = \cos(x)$ .

a)  $\cos(x) = 1$

b)  $\tan(x) = 1$

10.7.5 Verifique se as funções dadas são inversas:

a)  $y = 3x$  e  $y = 1/3x$

b)  $y = x^3$  e  $y = \sqrt[3]{x}$

c)  $y = x^4$  e  $y = \sqrt[4]{x}$

10.7.6 Trace um esboço do gráfico das funções: (confira seus resultados com uma planilha eletrônica)

a)  $y = 0,5 \arcsen(x)$

d)  $y = 0,5 \operatorname{arcsec}(x)$

b)  $y = \arccos(2x)$

e)  $y = 2 \operatorname{arctg}(0,5x)$

c)  $y = 2 \arcsen(x)$

f)  $y = 2 \operatorname{arccotg}(x)$

## 10.8 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

### RESPOSTAS 10.2

10.2.1 a)  $30^\circ$

b)  $107^\circ$

c)  $95^\circ$

d)  $42^\circ$

10.2.2 a)  $c = 25,13 \text{ cm}$

b)  $c = 3,14 \text{ m}$

c)  $c = 62,83 \text{ m}$

d)  $c = 15,71 \text{ km}$

10.2.3 a)  $r = 0,9994 \sim 1 \text{ cm}$

b)  $r = 1,59 \text{ m}$

c)  $r = 0,40 \text{ cm}$

d)  $r = 15,92 \text{ mm}$

10.2.4  $c_1 = 68,05 \text{ cm}$  e  $c_2 = 70,06 \text{ cm}$ .

10.2.5  $d = 5421,54 \text{ m}^3$ .

10.2.6 A soma dos ângulos internos do polígono de 5 lados é  $S_5 = 540^\circ$ .

- 10.2.7 a)  $\pi/15$  b)  $5\pi/6$   
 c)  $2\pi/3$  d)  $11\pi/6$   
 e)  $\pi$  f)  $5\pi/3$  g)  $7\pi/6$

- 10.2.8 a)  $45^\circ$  b)  $120^\circ$   
 c)  $135^\circ$  d)  $225^\circ$   
 e)  $150^\circ$  f)  $240^\circ$   
 g)  $420^\circ$

10.2.9  $c = 323,58 \text{ mm}$

10.2.10  $99^\circ 8' 7''$ .

10.2.11 Cada ângulo igual mede  $60^\circ 28' 25''$ .

Questão	a	b	c	d	e
ângulos	$50^\circ$	$15^\circ$	$75^\circ$	$80^\circ$	$20^\circ$
complementar	$40^\circ$	$75^\circ$	$15^\circ$	$10^\circ$	$70^\circ$
suplementar	$130^\circ$	$165^\circ$	$105^\circ$	$100^\circ$	$160^\circ$
replementar	$310^\circ$	$345^\circ$	$285^\circ$	$280^\circ$	$340^\circ$

10.2.12

10.2.13  $55^\circ 24' 40''$ .

### RESPOSTAS 10.3

10.3.1  $a = 2 \text{ cm}$  e  $x = 3 \text{ cm}$ .

10.3.2 Alguns exemplos: 6,4 e 10 ; 30, 40 e 50; 21, 28 e 35.

- 10.3.3 a)  $c = 13 \text{ cm}$  b)  $b = 5\sqrt{3} \text{ cm}$   
 c)  $a = 12 \text{ cm}$  d)  $\sqrt{29} \text{ cm}$

10.3.4 a)  $m = 16/5$   $n = 9/5$  b)  $m = h = 2\sqrt{2}$

10.3.5 a) “a” é o lado.  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  . b)  $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

10.3.6 a) “a” é a hipotenusa:  $a = m\sqrt{2}$  . b)  $h = \frac{m\sqrt{2}}{2}$

10.3.7 a)  $h = 1,4 \text{ m}$  b)  $4,237 \text{ m}$  é o lado inclinado.

10.3.8  $R_1 = 3 \text{ m}$  ;  $R_2 = 0,65 \text{ m}$  ;  $R_3 = 1,30 \text{ m}$  ;  $R_4 = 3,11 \text{ m}$ .

10.3.10  $AC = 30 \text{ m}$ .

10.3.11 a)  $d = 4\sqrt{2}$  cm  
c)  $h=3,12$  cm.

b)  $d = \sqrt{41}$  cm

10.3.12  $D=16$ cm e  $d=8$ cm.

### RESPOSTAS 10.4

Questão	x	seno		cosseno		tangente	
10.4.1 a	5	4/5	3/5	3/5	4/5	4/3	3/4
b	4,15	0,6385	0,7692	0,7692	0,6384	0,83	1,2048
c	8,6	0,8140	0,5814	0,5813	0,8139	1,4	0,7143
d	4,49	0,5556	0,8315	0,8314	0,5555	0,6682	1,4967

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
46°	0,71934	0,6946	1,0355
10.4.2 41,4096	0,6614	$\frac{3}{4}$	0,8819
71,5650	0,9487	0,3162	3
59,3165	0,86	0,5103	1,6853

Questão	ângulo	tangente	cotangente	secante	cossecante
10.4.3 a	14°	0,2493	4,0112	1,0306	4,1336
b	45°	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
c	30°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
d	60°	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

10.4.4 a)  $H = 33,33$  m b)  $H = 13,60$  m c)  $H = 25$  m.

10.4.5  $AC = 17,32$ m.

### RESPOSTAS 10.5

10.5.2 a)  $\theta = 32,7040^\circ$ ;  $\theta = 0,5707$ .

c)  $\cos(2\theta)=0,41615$

b)  $\cos(\theta)=0,84147$

d)  $\sin(2\theta)= 0.90929$

10.5.3 a)  $y = 92^\circ$  e  $y = 1,6057$

b)  $\sin(y) = 0,9994$

10.5.4 a)  $\sin(\pi/8) = 0,3826$ ;  
c)  $\cos(\pi/16)= 0,98078$ .

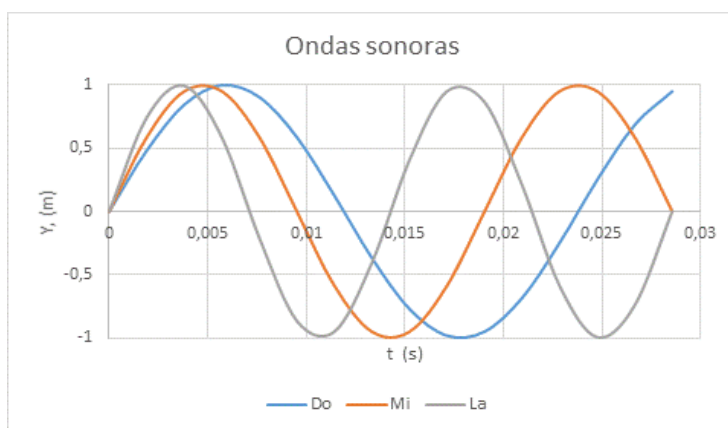
b)  $\cos(\pi/4)= 0,70710$ .

## RESPOSTAS 10.6

10.6.8

	I	II	III	IV
Senos	+	+	-	-
Cossenos	+	-	-	+
Tangentes	+	-	+	-

10.6.22 Quanto *maior* a frequência *maior* o número de oscilações e *menor* o comprimento de onda. Na mesma escala, Do < Mi < La. Do é a mais grave (menor frequência, menos oscilações) e La a mais aguda (maior frequência, mais oscilações).



## RESPOSTAS 10.7

10.7.1 a)  $\arcsen(0) = 0$

e)  $\arctg(1) = \pi/4$

i)  $\arcsec(-1) = \pi$

b)  $\arcsen(-1) = \frac{3\pi}{2}$

f)  $\arctg(-1) = 3\pi/4$

j)  $\arcsec(-1) = 3\pi/2$

c)  $\arccos(1) = 0$

g)  $\arctg(0) = \pi/2$

k)  $\arcsec(2) = \pi/6$

d)  $\arccos(-1) = \pi$

h)  $\arctg(1) = \pi/4$

l)  $\arcsec(1) = 0$

10.7.2 a)  $S = \{x \in \mathbb{R} / x = n\pi\}$  para  $n=0,1,2,3,4,\dots$

b)  $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{(2n+1)\pi}{4}\}$  para  $n=0,1,2,3,4,\dots$

c)  $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{n\pi}{3}\}$  para  $n=0,1,2,3,4,\dots$

d)  $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{(2n+1)\pi}{10}\}$  para  $n=0,1,2,3,4,\dots$

10.7.3 a)  $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \pm n\pi\}$  para  $n=0,1,2,3,4,\dots$

b)  $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \pm \frac{(2n+1)\pi}{4}\}$  para  $n=0,1,2,3,4,\dots$

c)  $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \pm \frac{n\pi}{3}\}$  para  $n=0,1,2,3,4,\dots$

d)  $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \pm \frac{(2n+1)\pi}{10}\}$  para  $n=0,1,2,3,4,\dots$

10.7.4 a)  $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \pm 2n\pi\}$  para  $n=0,1,2,3,4,\dots$

b)  $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{(4n+1)\pi}{4}\}$  para  $n=0,1,2,3,4,\dots$

10.7.5 a) São inversas para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ .

b) São inversas para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ .

c) Para  $x \in \mathbb{R} / x \leq 0$  a inversa de  $y=x^4$  é  $y = -\sqrt[4]{x}$ .

Para  $x \in \mathbb{R} / x \geq 0$  a inversa de  $y=x^4$  é  $y = \sqrt[4]{x}$ .



## **Capítulo 11**

### **Outras Funções**

## 11.1 BIBLIOGRAFIA

MALIK, M.A. Historical and pedagogical aspects of the definition of function. In: *Int. J. Math. Sci. Technol.*, 1980, vol. 11, nº 4, p. 489-492.