

Bericht über die Möglichkeit technischer Energiegewinnung aus der Uranspaltung (II)

Von **W. Heisenberg**

29. 2. 40

II.1

Der folgende Bericht enthält die genaue Ausarbeitung der Überlegungen, die in meinem früheren Bericht kurz skizziert waren. Zunächst hat es sich als notwendig erwiesen, die Theorie der Resonanzeinfangung der Neutronen mathematisch streng durchzuführen. Für den Fall der Neutronenbremsung durch Wasserstoff hat *Flügge* die Theorie bereits entwickelt. Der Abschnitt II.2a enthält die Verallgemeinerung für beliebige Substanzen. Ferner hatte Herr *Bothe* mich darauf aufmerksam gemacht, daß bei der Absorption in Uranplatten von der Streuung an U- und O-Atomen nicht abgesehen werden kann. Der Abschnitt II.2b behandelt die Absorption in den Platten unter Berücksichtigung der Streuung. Damit scheint mir der ganze Fragenkomplex der Resonanzabsorption einigermaßen erschöpfend behandelt. Dabei enthalten die beiden Abschnitte II.2a und b in der Hauptsache mathematische Entwicklungen, die auch abgesehen von dem Uranproblem ein gewisses Interesse beanspruchen können, und ich möchte daher fragen, ob diese beiden Abschnitte unter Vermeidung jeder Bezugnahme auf das Uranproblem eventuell veröffentlicht werden können.

Der Abschnitt II.3 enthält eine kritische Erörterung der bisher vorliegenden experimentellen Ergebnisse über die für die Uranmaschine wichtigen Konstanten. Es zeigt sich, daß die in Teil I zu Grunde gelegten Werte dieser Konstanten zum Teil erheblich verändert werden müssen – was ja in Teil I auch schon vorgesehen war. Schließlich enthält der Abschnitt II.4 eine neue Berechnung der wichtigsten Daten der Uranmaschine auf Grund der neuen experimentellen Ergebnisse und der genaueren theoretischen Formeln; dabei wird auch ein Fehler verbessert, der in Teil I. Tabelle 1 unterlaufen war und auf den mich Herr *Bothe* aufmerksam gemacht hatte. Die Ergebnisse dieses Abschnittes 4 zeigen, daß die Bedingungen 1 a für die Herstellung der Uranmaschine in Teil I wohl etwas zu günstig beurteilt worden sind. Insbesondere ist es zweifelhaft geworden, ob die Uranmaschine mit reiner Kohle hergestellt werden könnte. Die bisher vorliegenden experimentellen Daten sind noch zu ungenau, um eine endgültige Entscheidung hierüber zu treffen. Sonst ändert sich in den Angaben von Teil I nicht allzuviel.

II.2 Die Einfangung von Neutronen in Resonanzstellen

1 b

a) Lösungen der absorbierenden Substanz in der verlangsamenden Substanz

Wir betrachten eine Lösung, in der N_i Atome der Masse M_i in der Volumeneinheit vorhanden sind, und fragen zunächst nach der Verteilung der Neutronen im Geschwindigkeitsraum, wenn pro sec Q Neutronen der Geschwindigkeit v_0 in

den Raum entsandt werden. Nach dem Stoß eines Neutrons der Masse m und der Energie E mit einem Atom der Masse M_i nimmt die Energie des Neutrons mit gleicher Wahrscheinlichkeit jeden Wert zwischen E und $E[(M_i - m)/(M_i + m)]^2$ an. Wir setzen

$$\left(\frac{M_i - m}{M_i + m}\right)^2 = 1 - \alpha_i ; \quad (1)$$

ferner führen wir ein

$$\gamma_i = N_i \sigma_i(v) , \quad (2)$$

wobei σ_i die Wirkungsquerschnitte für den elastischen Stoß des Neutrons mit den Atomen N_i bedeuten. Die Verhältnisse der σ_i und damit der γ_i sollen von v unabhängig sein. Für die Anzahl $N(v) dv$ der Neutronen mit der Geschwindigkeit zwischen v und $v + dv$ erhält man dann die Integralgleichung

$$v N(v) \sum \gamma_i = Q \delta(v - v_0) + \sum \frac{2v}{\alpha_i} \int_v^{v/\sqrt{1-\alpha_i}} N(v') \gamma_i(v') \frac{dv'}{v'} . \quad (3)$$

Hierin bedeutet $\delta(v - v_0)$ die Diracsche δ -Funktion; das Glied $Q \delta(v - v_0)$ stellt die von der Neutronenquelle gelieferten Teilchen dar. Wir führen nun als neue Variable ein $u = \lg v/v_0$ und setzen

$$\beta_i = 1/2 \lg(1 - \alpha_i) ; \quad (4)$$

dann wird

$$N(u) \sum \gamma_i(u) = \frac{Q}{v_0^2} \delta(u) + \sum \frac{2}{\alpha_i} \int_u^{u+\beta_i} N(u') \gamma_i(u') du' . \quad (5)$$

Diese Gleichung kann durch eine Laplacetransformation gelöst werden. Wir setzen

$$N(u) \sum \gamma_i(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i u x} f(x) dx \quad (6)$$

und benutzen

$$2 \quad \delta(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i u x} dx , \quad \text{schreiben ferner}$$

$$\gamma_i / \sum \gamma_i = g_i . \quad (7)$$

Dann wird aus der Integralgleichung (5):

$$f(x) = \frac{Q}{v_0^2} + \sum \frac{2}{\alpha_i} \frac{g_i}{2\pi i x} (e^{2\pi i \beta_i x} - 1) f(x) , \quad \text{also} \quad (8)$$

$$N(u) \sum_i \gamma_i(u) = \frac{Q}{v_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\pi i x e^{2\pi i x u}}{\pi i x - \sum_i (g_i/\alpha_i) (e^{2\pi i \beta_i x} - 1)} . \quad (9)$$

Der Integrationsweg wird durch die Forderung bestimmt, daß $N(u)$ verschwinden muß für $u > 0$. Dies bedeutet, daß in der komplexen x -Ebene die Integration oberhalb sämtlicher singulärer Punkte des Integranden geführt werden muß. In (9) kann man auch den singulären Teil, der von der Neutronenquelle herrührt, abtrennen und erhält so

$$N(u) \sum_i \gamma_i(u) = \frac{Q}{v_0^2} \delta(u) + \frac{Q}{v_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{2i x u} \left\{ \frac{\sum (g_i/\alpha_i) (e^{2\pi i \beta_i x} - 1)}{\pi i x - \sum (g_i/\alpha_i) (e^{2\pi i \beta_i x} - 1)} \right\} . \quad (10)$$

Der Nenner des Integranden in (9) und (10) hat eine Nullstelle bei $x = i/\pi$ und eine weitere bei $x = 0$. Alle übrigen Nullstellen (es gibt unendlich viele) liegen unter der reellen Achse und symmetrisch um die imaginäre Achse (Fig. 1).

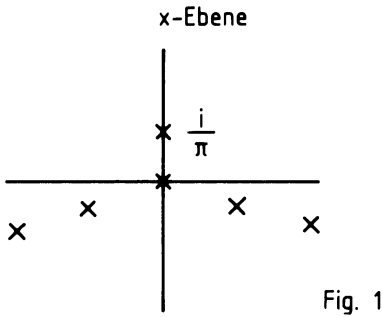


Fig. 1

Aus der Darstellung (10) läßt sich das asymptotische Verhalten von $N(u)$ für große negative u , d. h. kleine Geschwindigkeiten leicht ermitteln. Man deformiert dazu den Integrationsweg so, daß er in einen Kreis um die Singularität $x = i/\pi$ herum und einen Weg längs der reellen Achse zerfällt. Der weitaus größte Beitrag zu (10) stammt dann für große negative u von der Integration um den Punkt i/π . Dieser ergibt

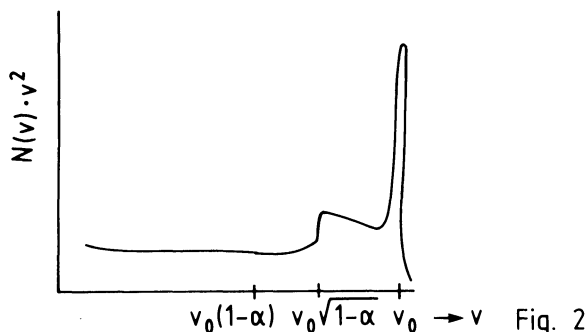
$$\begin{aligned} N(u) \sum_i \gamma_i(u) &= \frac{Q}{v_0^2} \frac{2e^{-2u}}{1 - \sum_i 2g_i \beta_i (1 - \alpha_i)/\alpha_i} \\ &= \frac{2Q}{v^2 [1 + \sum_i (g_i(1 - \alpha_i)/\alpha_i) \lg(1 - \alpha_i)]} . \end{aligned} \quad (11)$$

Oder

$$N(v) = \frac{2Q}{v^2 \sum_i \gamma_i [1 + (1 - \alpha_i)/\alpha_i \lg(1 - \alpha_i)]} . \quad (12)$$

Die Verteilung der Neutronen folgt also bei kleinen Geschwindigkeiten wieder

dem Gesetz $\text{const.}/v^2$; für die Wirkung der verschiedenen Massen ist der Faktor $(1 + (1 - \alpha_i)/\alpha_i) \lg(1 - \alpha_i)$ im Nenner charakteristisch. Die Verteilung in der Nähe von v_0 läßt sich nur qualitativ angeben. Wenn es nur eine Atomsorte in der Lösung gibt, für die $\alpha < 1$ ist, so ist sie etwa durch die Fig. 2 dargestellt:



Die Funktion verhält sich bei v_0 wie eine δ -Funktion; bei $v_0\sqrt{1-\alpha}$ ist sie endlich, aber unstetig; bei $v_0(1-\alpha)$ ist sie stetig, aber der 1. Differentialquotient unstetig usw.

Nach dieser Vorbereitung gehen wir zur Frage der Absorption der Neutronen in der Resonanzstelle $v = v_r$ einer Atomsorte über, von der N_U Atome in der Volumeneinheit vorhanden sind und bei der der Wirkungsquerschnitt für Einfang in der Umgebung der Resonanzstelle durch die Formel

$$\sigma_U = \sigma_r \frac{(\Gamma_r/2)^2}{(E - E_r)^2 + (\Gamma_r/2)^2} \quad (13)$$

- 4 gegeben ist. Führt man wieder die neue Variable $u = \lg(v/v_r)$ ein, so kann man setzen $E = E_r e^{2u}$ und erhält in hinreichender Näherung:

$$\sigma_U = \sigma_r \left(\frac{\Gamma_r}{4E_r} \right)^2 \frac{1}{u^2 + (\Gamma_r/4E_r)^2} \quad (14)$$

Für die folgenden Rechnungen soll angenommen werden, daß die Konzentration der absorbierenden Atome so groß ist, daß die Äquivalenzbreite der Linie groß ist gegen Γ_r ; dann kann man auch einfach setzen

$$\sigma_U = \sigma_r \left(\frac{\Gamma_r}{4E_r} \right)^2 \frac{1}{u^2} \quad (15)$$

Wir führen noch die Bezeichnung ein

$$N_U \sigma_r \left(\frac{\Gamma_r}{4E_r} \right)^2 = \gamma_U \quad (16)$$

Wenn man annimmt, daß die Erzeugung der Neutronen bei sehr hohen Geschwindigkeiten stattgefunden hat, so kann man im Gebiet der Resonanzlinie Gl. (5) durch die Gleichung

$$N(u) \left(\sum \gamma_i + \frac{\gamma_u}{u^2} \right) = \sum \frac{2}{\alpha_i} \int_u^{u+\beta_i} N(u') \gamma_i(u') du' \quad (17)$$

ersetzen. Da $N(u)$ in weitem Abstand von der Resonanzlinie wie e^{-2u} variiert, setzen wir

$$N(u) = y(u) e^{-2u} , \quad (18)$$

ferner differenzieren wir (17) nach u und erhalten

$$\begin{aligned} -2y e^{-2u} \left[\sum \gamma_i + \frac{\gamma_u}{u^2} \right] + e^{-2u} \frac{d}{du} \left[y \left(\sum \gamma_i + \frac{\gamma_u}{u^2} \right) \right] \\ = \sum \frac{2}{\alpha_i} [y \gamma_i(u + \beta_i) e^{-2u-2\beta_i} - y \gamma_i e^{-2u}] , \end{aligned} \quad (19)$$

oder nach (4)

$$\frac{d}{du} \left[\left(y \sum \gamma_i + \frac{\gamma_u}{u^2} \right) \right] = \sum \frac{2(1-\alpha_i)}{\alpha_i} [y \gamma_i(u_i + \beta_i) - y \gamma_i(u)] . \quad (20)$$

Die Größe $y \sum \gamma_i$ muß sowohl für sehr große positive wie für sehr große negative u konstant werden. Wir setzen nun auch die γ_i im ganzen Gebiet konstant, d. h. wir nehmen an, daß die γ_i in der näheren Umgebung | der Resonanzstelle nicht stark variieren. Die Differenz 5

$$y_{+\infty} - y_{-\infty} = \Delta y$$

gibt ein Maß für die gesamte absorbierte Neutronenmenge. Durch Integration von (20) von $-\infty$ bis $+\infty$ erhält man sofort

$$\Delta y \sum \gamma_i = \sum \frac{2(1-\alpha_i)}{\alpha_i} \beta_i \Delta y + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} y (\gamma_u / u^2) du , \quad \text{also} \quad (21)$$

$$\Delta y = \frac{2 \int_{-\infty}^{+\infty} y (\gamma_u / u^2) du}{\sum \gamma_i [1 + ((1-\alpha_i)/\alpha_i) \lg(1-\alpha_i)]} . \quad (22)$$

Aus Gl. (20) geht sofort hervor, daß in vielen Fällen die Größe $y(\sum \gamma_i + \gamma_u/u^2)$ im kritischen Gebiet $u \sim 0$ nur relativ geringe Änderungen durchmacht, da die rechte Seite klein bleibt und das kritische Gebiet relativ eng ist. Dies gilt dann, wenn die gesamte Neutronenabsorption gering ist und wenn die α_i nicht zu klein sind. In diesem Falle kann man also im kritischen Gebiet in erster Näherung

$$y(\sum \gamma_i + \gamma_u/u^2) = y_{+\infty} \sum \gamma_i \quad \text{und} \quad (23)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{\gamma_U}{u^2} du = y_{+\infty} \pi \sqrt{\gamma_U \sum \gamma_i} \quad (24)$$

setzen. Man erhält schließlich nach (16)

$$\begin{aligned} w_r &= \frac{\Delta y}{y_{+\infty}} = \frac{2\pi \sqrt{\gamma_U \sum \gamma_i}}{\sum \gamma_i [1 + ((1 - \alpha_i)/\alpha_i) \lg(1 - \alpha_i)]} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma_r}{E_r} \frac{\sqrt{N_U \sigma_r \sum \gamma_i}}{\sum \gamma_i [1 + ((1 - \alpha_i)/\alpha_i) \lg(1 - \alpha_i)]} . \end{aligned} \quad (25)$$

Wenn eine Größe α_i und damit auch β_i klein wird gegen die Äquivalenzbreite der Linie, also nach (24) klein gegen $\pi \sqrt{\gamma_U / \sum \gamma_i}$, so wird das betreffende Glied auf der rechten Seite von (20) groß. Es kann dann $y \gamma_i(u + \beta_i)$ in eine Reihe nach β_i entwickelt werden und wegen (4) gilt näherungsweise

$$\frac{2(1 - \alpha_i)}{\alpha_i} [y \gamma_i(u + \beta_i) - y \gamma_i(u)] = \frac{d}{du} (y \gamma_i) \frac{2(1 - \alpha_i)}{\alpha_i} \beta_i . \quad (26)$$

Man kann dieses Glied dann auf die linke Seite herübernehmen, und die Gl. (24) bleibt zu Recht bestehen, wenn man in der $\sum \gamma_i$ das eine Glied γ_i , das zu dem kleinen γ_i gehört, mit $1 + ((1 - \alpha_i)/\alpha_i) \lg(1 - \alpha_i)$ multipliziert.

Allgemein gilt also

$$w = \frac{2\pi \sum_r \sqrt{\gamma_{Ur} \sum_i \gamma_i \varepsilon_{ir}}}{\sum_i \gamma_i [1 + ((1 - \alpha_i)/\alpha_i) \lg(1 - \alpha_i)]} , \quad (27)$$

wobei

$$\varepsilon_{ir} = \begin{cases} 1 & \text{für } \beta_i \gg \pi \sqrt{\gamma_{Ur} / \sum_i \gamma_i \varepsilon_{ir}} \\ 1 + ((1 - \alpha_i)/\alpha_i) \lg(1 - \alpha_i) & \text{für } \beta_i \ll \pi \sqrt{\gamma_{Ur} / \sum_i \gamma_i \varepsilon_{ir}} \end{cases} .$$

Auch Gl. (27) gilt nur, wenn $w \ll 1$ ist. Für Werte von w von der Größenordnung 1 kann man wohl die Anlehnung an die Resultate, die *Flügge* bei der Absorption in Wasserstoff gefunden hat, in guter Näherung setzen:

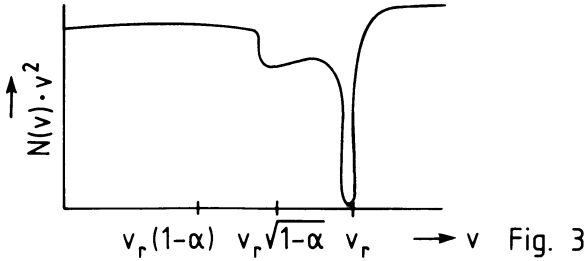
$$1 - w = \exp \left(- \frac{2\pi \sum_r \sqrt{\gamma_{Ur} \sum_i \gamma_i \varepsilon_{ir}}}{\sum_i \gamma_i [1 + ((1 - \alpha_i)/\alpha_i) \lg(1 - \alpha_i)]} \right) . \quad (28)$$

Diese Formel wird in allen weiteren Rechnungen über die Resonanzabsorption benutzt werden. Wenn man sich nicht nur für die Gesamtzahl der Neutronen, sondern auch für ihre Energieverteilung interessiert, so geht man zweckmäßig von Gl. (17) aus, die man in der Form:

$$N(u) \sum_i \gamma_i = -N(u) \frac{\gamma_U}{u^2} + \sum_i \frac{2}{\alpha_i} \int_u^{u+\beta_i} N(u')(u') du' \quad (29)$$

schreiben kann. Der Vergleich mit (5) lehrt, daß hier das Glied $-N(u)(\gamma_U/u^2)$

gewissermaßen eine negative Neutronenquelle darstellt, die dann auch nach (12) zu einer Absorption nach Formel (22) führt. Der allgemeine Verlauf der Neutronenzahl $N(v)$ ist daher auch für eine einzige Atomsorte $N_i(v)$ in Analogie zu Fig. 2 qualitativ in Fig. 3 dargestellt.



Man erkennt aus der Figur, daß die Gesamtaborption *nicht* einfach durch die Differenz von $N(v)$ rechts und links von der Resonanzstelle bestimmt ist. Diese Differenz ist von *Flügge* im Teil II seiner Untersuchungen berechnet und irrtümlich der Gesamtaborption gleichgesetzt worden.

Wir vergleichen nun das Ergebnis (27) und (28) mit der Abschätzung von Teil I, Abschn. 2a. Dort wurde in Gl. (6) für w im Fall einer einzelnen bremsenden Substanz die Formel

$$w = \frac{1}{-\lg \delta} \frac{\pi \Gamma_r}{2 E_r} \sqrt{\frac{\sigma_r N_U}{\sigma N}}$$

angegeben. Der Vergleich mit der genauen Formel (27) zeigt (für eine einzige Substanz muß wegen $w \ll 1$ stets $\varepsilon = 1$ sein), daß die Größe $-\lg \delta$ im Teil I in der genaueren Theorie durch $1 + ((1 - \alpha_i)/\alpha_i) \lg(1 - \alpha)$ zu ersetzen ist. Im Grenzfall großer Massen ($\alpha \ll 1$) stimmen die beiden Ausdrücke überein, da $\delta = 1 - (\alpha/2)$ ist:

$$-\lg \delta \underset{\alpha \ll 1}{=} -\lg \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \approx \frac{\alpha}{2} \approx 1 + \frac{1 - \alpha}{\alpha} \lg(1 - \alpha) . \quad (30)$$

Im entgegengesetzten Grenzfall $\alpha = 1$, d. h. bei der Verlangsamung der Neutronen im Wasserstoff, unterscheiden sich die beiden Ausdrücke, wie $\lg 2$ und 1, also etwa 30%, wie schon *Flügge* in Teil I angegeben hat. Die Abweichung der früheren Näherungsformel von der exakten Formel ist also nicht sehr groß, doch muß sie berücksichtigt werden. Ferner hat *Flügge* mit Recht darauf aufmerksam gemacht, daß der Beitrag der Sauerstoffatome zur Bremsung in H_2O und insbesondere D_2O nicht vernachlässigt werden darf. Die Formel (27) zeigt in der Tat, daß die Größe w in D_2O um etwa 20% höher wird als sich bei der Vernachlässigung von O ergeben würde (w = Wahrscheinlichkeit, daß ein schnelles Neutron im U^{238} durch Resonanz eingefangen wird, bevor es thermische Energie erreicht).

**b) Ebene Platten uranhaltiger Substanz
in einem zur Neutronenverlangsamung dienenden Medium**

Wir betrachten eine unendlich ausgedehnte Platte der Dicke d aus einer Mischung von U mit anderen Substanzen. Die Platte sei eingebettet in ein Medium, das selbst wieder aus verschiedenen Atomsorten gemischt ist. Die Neutronenquelle sei gleichmäßig über den Raum verteilt und soll Neutronen so hoher Energie liefern, daß sie in der Gegend der Resonanzstelle von Uran bereits eine gleichförmige Neutronenverteilung nach dem Gesetz const/v^2 eingestellt hat, die dann durch die Resonanzstelle gestört wird. Die streuenden Substanzen teilen wir in zwei Gruppen a und b ein. Zur Gruppe a gehören die leichteren Atome, die bei einem Stoß einem Neutron in der Gegend der Resonanzenergie im Mittel sehr viel mehr Energie entziehen, als die effektive Breite der Resonanzlinie beträgt (die ihrerseits wieder von d abhängt); zur Gruppe b gehören die schwereren Atome, die einem Neutron beim Stoß sehr viel weniger Energie entziehen als die effektive Breite der Resonanzlinie beträgt. Atome, bei denen keine der beiden Voraussetzungen erfüllt ist, sollen nicht vorkommen. Die effektive Breite der Resonanzlinie soll auf jeden Fall sehr klein gegen die Resonanzenergie selbst sein.

Der Raum in der Platte werde als Gebiet 1, der Raum außerhalb als Gebiet 2 bezeichnet. Die Platte soll senkrecht zur z -Achse stehen. Dann wird die Neutronenverteilung vom Absolutbetrag der Geschwindigkeit, der z -Koordinate und vom Winkel der Geschwindigkeit relativ zur z -Achse abhängen.

$$N(v, \zeta, z) dv d\zeta dz \quad (1)$$

9 sei die Anzahl der Neutronen pro cm^3 zwischen z und $z + dz$, mit einer Geschwindigkeit zwischen v und $v + dv$ und einem Winkel zur z -Achse, dessen Cosinus zwischen ζ und $\zeta + d\zeta$ liegt. Wie in [Abschn.] II.2a, Gl. (2) | führen wir die Produkte aus Wirkungsquerschnitt und Atomzahl ein:

$$\gamma_i = N_i \cdot \sigma_i \quad (2)$$

und setzen wieder, wie in [Abschn.] II.2a, Gln. (15) und (16):

$$N_U \cdot \sigma_U = \gamma_U / u^2, \quad (3)$$

wobei $u = \lg v/v_0$; schließlich sei $M_i/(M_i + m) = \eta_i$, also

$$4 \eta_i (1 - \eta_i) = \alpha_i / 2. \quad (4)$$

Dann ergibt sich für die Neutronenverteilung die folgende Integralgleichung (im Gebiet 2 ist dabei $\gamma_U = 0$):

$$\zeta \frac{\partial N}{\partial z} + \left(\sum_i \gamma_i + \frac{\gamma_U}{u^2} \right) N = \sum_i \frac{v}{\pi \eta_i} \int \frac{N(v', \zeta', z) \gamma_i d\zeta' dv'}{Z_i}, \quad \text{wobei} \quad (5)$$

$$Z_i = \{ (v'^2 - v^2) [v^2 - (1 - 2\eta_i)^2 v'^2] - 4(1 - \eta_i^2) v^2 v'^2 (\zeta^2 + \zeta'^2) + 4\zeta\zeta' (1 - \eta_i) v v' [v'^2 (1 - 2\eta_i) + v^2] \}^{1/2}. \quad (6)$$

Die Integrationsgrenzen in (5) ergeben sich aus dem Realitätsbereich von Z_i . Man kann sich leicht durch Einsetzen davon überzeugen, daß für $\gamma_U = 0$ die Gl. (5) durch den Ansatz $N = \text{const}/v^2$ gelöst wird.

Wir nehmen nun in (5) zunächst die Einteilung in die beiden Atomsorten a und b vor. Für die Atome der Gruppe b kann $1 - \eta_i \ll 1$, d. h. $\eta_i \sim 1$ angenommen werden. Unter dieser Voraussetzung und unter der Annahme, daß $N(v', \zeta', z)$ nicht zu schnell mit v' variiert, kann auf der rechten Seite von (5) die Integration über v' ausgeführt werden, da ja v' stets in der Nachbarschaft von v bleibt. Man erhält so:

$$\zeta \frac{\partial N}{\partial z} + \left(\sum_i \gamma_i + \frac{\gamma_U}{u^2} \right) N = \frac{1}{2} \sum_b \gamma_i \int_0^1 N(v, z, \zeta') d\zeta' + \sum_a \frac{v \gamma_i}{\pi \eta_i} \int \frac{N(v', \zeta', z) dv' d\zeta'}{Z_i} . \quad (7)$$

Wir interessieren uns nun für die Werte von N in unmittelbarer Nähe der Resonanzstelle $v = v_r$. In diesem Gebiet wird N sehr stark variieren; jedoch werden sich die unter \sum_a vorkommenden Integrale dort nur wenig ändern, da sie sich über einen Geschwindigkeitsbereich erstrecken, der sehr groß ist verglichen mit der effektiven Breite der Resonanzlinie. Wir können diese Integrale also als näherungsweise konstant ansehen und erhalten für N in der unmittelbaren Umgebung der Resonanzstelle die einfachere Integralgleichung 10

$$\zeta \frac{\partial N}{\partial z} + \left(\sum_i \gamma_i + \frac{\gamma_U}{u^2} \right) N = \frac{1}{2} \sum_b \gamma_i \int_{-1}^{+1} N(v, z, \zeta') d\zeta' + N_0 \sum_a \gamma_i , \quad (8)$$

wobei N_0 die Anzahl $N(v, z, \zeta)$ dicht oberhalb der Resonanzstelle bezeichnet.

Eine partikuläre Lösung von (8) lautet:

$$N = N_0 \sum \gamma_i / \left(\sum_i \gamma_i + \frac{\gamma_U}{u^2} \right) . \quad (9)$$

Um die allgemeinste Lösung zu erhalten, müssen wir hierzu die allgemeinste Lösung der homogenen Integralgleichung

$$\zeta \frac{\partial N}{\partial z} + \left(\sum_i \gamma_i + \frac{\gamma_U}{u^2} \right) N = \frac{1}{2} \sum_b \gamma_i \int_{-1}^{+1} N(v, z, d') d\zeta' \quad (10)$$

addieren. Wenn Atome der Sorte b nicht vorkommen, so entsteht aus (10) eine einfache Differentialgleichung, deren Lösung sofort ausgeschrieben werden kann. Wenn von der elastischen Streuung an den U-Atomen selbst abgesehen werden könnte, so müßten für nicht zu dicke Platten tatsächlich alle anderen Atome (H, D, O) zur Gruppe a gerechnet werden; die weiteren Rechnungen lassen sich in diesem Fall streng durchführen:

Fall 1: $\gamma_{ib} = 0$. Aus (10) wird jetzt

$$\zeta \frac{\partial N}{\partial z} + \left(\sum_i \gamma_i + \frac{\gamma_U}{u^2} \right) N = 0 , \quad (11)$$

$$N = f(\zeta, u) \exp[-(\sum_a \gamma_i + \gamma_U/u^2)z/\zeta] . \quad (12)$$

- 11 Zur Herstellung der vollständigen Lösung müssen die Grenzbedingungen an der Grenze zwischen Gebiet 1 und Gebiet 2 berücksichtigt werden; die Grenzen sollen bei $+d/2$ und $-d/2$ liegen. Die Verteilung muß dann symmetrisch um $z = 0$ sein, d. h. bei gleichzeitigem Vorzeichenwechsel von z und ζ muß $N(v, z, d)$ unverändert bleiben. Die auf die verschiedenen Gebiete bezogenen Größen unterscheiden wir durch die Indizes 1 und 2. Dann gilt an der Grenze $+d/2$:

$$N_1(d/2, \zeta) = N_2(d/2, \zeta)$$

oder

$$\begin{aligned} N_0 \frac{\sum_a \gamma_i^{(1)}}{\sum_a \gamma_i^{(1)} + (\gamma_U/u^2)} + f_1(u, \zeta) \exp \left[- \left(\sum_a \gamma_i^{(1)} + \frac{\gamma_U}{u^2} \right) \frac{d}{2\zeta} \right] \\ = N_0 + f_2(u, \zeta) \exp \left[- \sum \gamma_i^{(2)} \frac{d}{2\zeta} \right] . \end{aligned} \quad (13)$$

Damit für große z N in N_0 übergeht, was aus physikalischen Gründen gefordert werden muß, folgt, daß für $z \geq d/2$

$$f_2(u, \zeta) = 0 \quad \text{für} \quad \zeta < 0 . \quad (14)$$

Daraus ergibt sich

$$f_1(u, d) = N_0 \frac{\gamma_U}{u^2 \sum_a \gamma_i^{(1)} + \gamma_U} \exp \left[\left(\sum_a \gamma_i^{(1)} + \frac{\gamma_U}{u^2} \right) \frac{d}{2\zeta} \right] \quad \text{für} \quad \zeta < 0 . \quad (15)$$

Aus Symmetriegründen folgt daraus für beliebige ζ :

$$f_1(u, \zeta) = N_0 \frac{\gamma_U}{u^2 \sum_a \gamma_i^{(1)} + \gamma_U} \exp \left[- \left(\sum_a \gamma_i^{(1)} + \frac{\gamma_U}{u^2} \right) \frac{d}{2|\zeta|} \right] \quad (16)$$

und schließlich

$$\begin{aligned} N_1(z, \zeta, u) = N_0 \left\{ \frac{\sum_a \gamma_i^{(1)}}{\sum_a \gamma_i^{(1)} + \gamma_U/u^2} + \frac{\gamma_U}{u^2 \sum_a \gamma_i^{(1)} + \gamma_U} \right. \\ \left. \cdot \exp \left[- \left(\sum_a \gamma_i^{(1)} + \frac{\gamma_U}{u^2} \right) \left(\frac{2}{\zeta} + \frac{d}{2|\zeta|} \right) \right] \right\} . \end{aligned} \quad (17)$$

Die Gesamtzahl aller pro sec absorbierten Neutronen erhält man, wenn man N_1 mit $v_r(\gamma_U/u^2)$ multipliziert und über ζ , z und u integriert; dabei kann in u von $-\infty$ bis $+\infty$ integriert werden:

$$n_{\text{abs}} = \int_{-d/2}^{+d/2} dz \int_{-1}^{+1} d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2} \gamma_U v_r^2 N_1 . \quad (18)$$

Setzt man $d \sum_a \gamma_i^{(1)} = a$ und benützt die Bezeichnung

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (19)$$

so ergibt sich nach einer längeren Rechnung:

$$n_{\text{abs}} = N_0 v_r^2 \sqrt{\gamma_U} d \left\{ \pi \sqrt{a} + \sqrt{\pi} \left(\frac{5}{3} + \frac{2}{3} a \right) e^{-a} + \frac{\pi}{2 \sqrt{a}} \left[\Phi(\sqrt{a}) - 4a \left(1 + \frac{a}{3} \right) (1 - \Phi(\sqrt{a})) \right] \right\}. \quad (20)$$

Um die Wahrscheinlichkeit w der Einfangung zu berechnen, müssen wir aber 12 noch durch die Anzahl der pro sec emittierten Neutronen dividieren. Diese Wahrscheinlichkeit verschwindet, wenn nur eine Platte in einem unendlich großen Gebiet 2 vorhanden ist. Wir nehmen daher jetzt an, daß das Gebiet 2 nur die Ausdehnung l habe, d. h. daß der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Platten in der Uranmaschine l sei., Dabei soll $l \gg (1/\sum \gamma_i^{(2)})$, d. h. groß gegen die mittlere freie Weglänge sein. dann ist nach [Abschn.] II.2a, Gl. (12) die Anzahl der pro sec und cm^2 in der Platte und im Gebiet 2 von der Ausdehnung l emittierten Neutronen:

$$N_0 v_r^2 \sum_i \gamma_i^{(1)} [1 + ((1 - \alpha_i)/\alpha_i) \lg(1 - \alpha_i)] d + N_0 v_r^2 \sum_i \gamma_i^{(2)} [1 + ((1 - \alpha_i)/\alpha_i) \lg(1 - \alpha_i)] l. \quad (21)$$

Schließlich folgt:

$$w = \frac{\sum_r \sqrt{\gamma_U} d \left\{ \pi \sqrt{a} + \sqrt{\pi} \left(\frac{5}{3} + \frac{2}{3} a \right) e^{-a} + \pi/2 \sqrt{a} [\Phi(\sqrt{a}) - 4a(1 + (a/3))(1 - \Phi(\sqrt{a}))] \right\}}{\sum_i \gamma_i^{(1)} [1 + ((1 - \alpha_i)/\alpha_i) \lg(1 - \alpha_i)] d + \sum_i \gamma_i^{(2)} [1 + ((1 - \alpha_i)/\alpha_i) \lg(1 - \alpha_i)] l}. \quad (22)$$

Im Grenzfall $a = 0$ kann Gl. (22) mit den entsprechenden Resultaten von Teil I, Gln. (15), (60) und (61) verglichen werden. Der Vergleich zeigt, daß die Formeln von Teil I in die exakte Formel (22) übergehen, wenn man wieder, wie in [Abschn.] II.2a $-(\lg \delta)/\lambda$ durch den Ausdruck $\sum_i \gamma_i [1 + ((1 - \alpha_i)/\alpha_i) \lg(1 - \alpha_i)]$ ersetzt.

Leider kann Gl. (22) praktisch nicht ohne weiteres angewendet werden, da die elastische Streuung der Neutronen an den Uranatomen eventuell eine erhebliche Rolle spielt, also auch Atome der Gruppe b vorkommen. Wir gehen daher zu Behandlung des Falles 2 über:

Fall 2: $\gamma_{ib} = 0$. Hier muß die Integralgleichung (10) unter den durch das physikalische Problem vorgesehenen Randbedingungen gelöst werden. Die Integralgleichung (10) ist ausführlich in der Literatur behandelt worden durch G. Wick: 13 Lincei Rend. 23, 775, 1936 und O. Halpern, R. Lueneburg und O. Clark: Phys.

Rev. **53**, 173, 1938. Die dort gewonnenen Lösungsmethoden sind jedoch zu schwerfällig für die weitere Rechnung. Wir begnügen uns daher mit einer Näherungsmethode, die *E. Fermi*, Ric. Scient. II, 1936 angegeben hat. *Fermi* bemerkt, daß die Diffusion von Neutronen in dem durch (10) dargestellten Problem ähnlich abläuft, wie die Diffusion von Neutronen, die sich nur auf einer Linie bewegen können, wobei man in letzterem Fall (der gewissermaßen die Projektion der drei-dimensionalen Bewegung auf die z -Achse darstellt) die freien Weglängen um den Faktor $\sqrt{3}$ reduzieren muß. Statt der verschiedenen Winkel ζ unterscheidet man also nur $N(v, z, +1) = N_+$ und $N(v, z, -1) = N_-$ und ersetzt die Integralgleichung (10) durch

$$\pm \frac{\partial N_{\pm}}{\partial z} + \left(\sum_i \gamma'_i + \frac{\gamma'_U}{u^2} \right) N_{\pm} = \frac{1}{2} \sum_b \gamma'_b (N_+ + N_-) , \quad (23)$$

wobei $\gamma'_i = \sqrt{3} \gamma_i$, $\gamma'_U = \sqrt{3} \gamma_U$ gesetzt ist. Wir benützen weiter die Abkürzungen

$$\sum_a \gamma'_a + \frac{\gamma'_U}{u^2} = A , \quad \sum_b \gamma'_b = B . \quad (24)$$

Es sind dann die beiden simultanen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_+}{\partial z} + \left(A + \frac{B}{2} \right) N_+ - \frac{B}{2} N_- &= 0 , \\ -\frac{\partial N_-}{\partial z} + \left(A + \frac{B}{2} \right) N_- - \frac{B}{2} N_+ &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

zu lösen. Die Lösung lautet

$$N_+ = C_+ e^{\alpha z} , \quad N_- = C_- e^{\alpha z} , \quad \text{wobei}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha + A + \frac{B}{2} & -\frac{B}{2} \\ -\frac{B}{2} & -\alpha + A + \frac{B}{2} \end{vmatrix} = 0 , \quad \text{d. h.} \quad \alpha^2 = A(A+B) \quad \text{und} \quad (26)$$

$$\frac{C_+}{C_-} = \frac{B/2}{\alpha + A + (B/2)} = \frac{-\alpha + A + (B/2)}{B/2} . \quad (27)$$

- 14 Im Gebiet 1 muß die Lösung symmetrisch um den Punkt $z = 0$ sein. Sie lautet dann

$$\begin{aligned} N_+ &= C \left[\frac{B}{2} e^{+|\alpha|z} + \left(|\alpha| + A + \frac{B}{2} \right) e^{-|\alpha|z} \right] , \\ N_- &= C \left[\left(|\alpha| + A + \frac{B}{2} \right) e^{+|\alpha|z} + \frac{B}{2} e^{-|\alpha|z} \right] . \end{aligned} \quad (28)$$

Im Gebiet 2 jedoch ist für $z \geq d/2$ nur die Lösung mit negativem α zu brauchen, also

$$\begin{aligned} N_+ &= C \left(|\alpha| + A + \frac{B}{2} \right) e^{-|\alpha|z}, \\ N_- &= C \frac{B}{2} e^{-|\alpha|z}. \end{aligned} \quad (29)$$

Unter Einbeziehung der partikulären Lösung (9) erhalten wir daraus als Grenzbedingung an der Stelle $z = d/2$:

$$\begin{aligned} N_0 \frac{\sum_a \gamma_i^{(1)}}{\sum_a \gamma_i^{(1)} + (\gamma_U/u^2)} + C_1 \left[\frac{B_1}{2} e^{|\alpha_1|d/2} + \left(|\alpha_1| + A_1 + \frac{B_1}{2} \right) e^{-|\alpha_1|d/2} \right] \\ = N_0 + C_2 \left(|\alpha_2| + A_2 + \frac{B_2}{2} \right) e^{-|\alpha_2|d/2}, \\ N_0 \frac{\sum_a \gamma_i^{(1)}}{\sum_a \gamma_i^{(1)} + (\gamma_U/u^2)} + C_1 \left[\left(|\alpha_1| + A_1 + \frac{B_1}{2} \right) e^{|\alpha_1|d/2} + \frac{B_1}{2} e^{-|\alpha_1|d/2} \right] \\ = N_0 + C_2 \frac{B_2}{2} e^{-|\alpha_2|d/2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Schließlich folgt:

$$\begin{aligned} C_1 \left\{ \left[\left(|\alpha_1| + A_1 + \frac{B_1}{2} \right) \left(|\alpha_2| + A_2 + \frac{B_2}{2} \right) - \frac{B_1 B_2}{4} \right] e^{|\alpha_1|d/2} \right. \\ \left. + \left[\frac{B_1}{2} \left(|\alpha_2| + A_2 + \frac{B_2}{2} \right) - \frac{B_2}{2} \left(|\alpha_1| + A_1 + \frac{B_1}{2} \right) \right] e^{-|\alpha_1|d/2} \right\} \\ = N_0 \frac{\gamma_U}{u^2 \sum_a \gamma_i^{(1)} + \gamma_U} (|\alpha_2| + A_2). \end{aligned} \quad (31)$$

Damit ist der Verlauf der Neutronendichte im Inneren der Platte abgeleitet; für ihre Gesamtzahl ergibt sich dann nach (18)

$$\int_{-d/2}^{+d/2} dz (N_+ + N_-) = \frac{2C_1}{|\alpha_1|} (|\alpha_1| + A_1 + B_1) (e^{|\alpha_1|d/2} - e^{-|\alpha_1|d/2}). \quad (32)$$

Für die weitere Rechnung führen wir statt u zweckmäßigerweise die Variable t ein durch die Beziehung

$$u^2 = \gamma_U d \sqrt{3} t^2. \quad (33)$$

Ferner setzen wir

$$d \sum_a \gamma_i^{(1)} \sqrt{3} = a \sqrt{3} = a' , \quad d \sum_b \gamma_i^{(1)} \sqrt{3} = b \sqrt{3} = b' ,$$

$$\frac{B_2}{2(A_2 + |\alpha_2|)} = \varepsilon . \quad (34)$$

Dann wird

$$A_1 d = 1/t^2 + a' ; \quad B_1 d = b' \quad \text{und} \quad |\alpha_1| d = \eta/t^2 , \quad \text{wobei} \quad (35)$$

$$\eta = \sqrt{(1 + a' t^2)[1 + (a' + b') t^2]} . \quad (36)$$

In diesen Variablen wird schließlich

$$n_{\text{abs}} = v_r^2 N_0 \sqrt{\frac{\gamma_U d}{3}} \int dt \left\{ \frac{a'}{1 + a' t^2} \right.$$

$$+ 2(a' + b' + (1 + \eta)/t^2)(1 - e^{-\eta/t^2}) [\eta(1 + a' t^2) \{a' + (b'/2) + (1 + \eta)/t^2$$

$$+ \varepsilon(a' + (1 + \eta)/t^2) + [(b'/2) - \varepsilon(a' + (1 + \eta)/t^2)] e^{-\eta/t^2} \}^{-1} \Bigg\} . \quad (37)$$

Im Grenzfall $a' = b' = \varepsilon = 0$ müßte sich das gleiche Resultat ergeben, wie aus Gl. (20), wenn man dort $a = 0$ setzt. Dies ist nun nicht genau der Fall, da die Gl. (27) wegen der Benützung der *Fermischen* Approximation nur näherungsweise gültig ist. Es ergibt sich aus Gl. (20) für $a = 0$:

$$n_{\text{abs}} = 8 N_0 v_r^2 \sqrt{\gamma_U \pi d/3} , \quad (38)$$

dagegen aus Gl. (37) für $a' = b' = \varepsilon = 0$:

$$n_{\text{abs}} = 4 N_0 v_r^2 \sqrt{\gamma_U \pi d/\sqrt{3}} .$$

Die *Fermische* Methode liefert also einen um etwa 10% zu hohen Wert. An diesem Ergebnis läßt sich die Genauigkeit der *Fermischen* Methode gut beurteilen. Um im Grenzfall $a' = b' = \varepsilon = 0$ das richtige Resultat zu erhalten, erniedrigen wir das zweite Glied der rechten Seite von (37) um den betreffenden Betrag und erhalten als näherungsweise gültige Endformel:

$$16 \quad n_{\text{abs}} = N_0 v_r^2 \sqrt{\gamma_U d} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1 + a' t^2} \left\{ \frac{a'}{\sqrt[4]{3}} \right.$$

$$+ 4(a' + b' + (1 + \eta)/t^2)(1 - e^{-\eta/t^2})/3 [\eta \{a' + (b'/2) + (1 + \eta)/t^2$$

$$+ \varepsilon(a' + (1 + \eta)/t^2) + [(b'/2) - \varepsilon(a' + (1 + \eta)/t^2)] e^{-\eta/t^2} \}^{-1} \Bigg\} . \quad (39)$$

Die Berechnung von w erfolgt dann wie in Gl. (20) bis (22). Die Diskussion der physikalischen Bedeutung der Formeln (20) und (39) beginnen wir mit dem

Fall 1: $b = b' = 0$. Die Gleichung für n_{abs} enthält hier zwei Glieder. Das erste gibt die Absorption an, die dadurch zustande kommt, daß Neutronen in der Platte durch einen Stoß etwa mit einem O-Atom so weit verlangsamt werden, daß sie danach in einem U-Atom eingefangen werden. Dieses Glied stimmt daher überein mit dem Ausdruck für die Absorption in homogenen Lösungen: [Abschn.] II.2a, Gl. (24). Das zweite Glied in (20) oder (39) stellt die Absorption der Neutronen dar, die aus dem Gebiet 2 mit einer Energie in der Nähe der Resonanzenergie in die Platte eindringen. Dieses Glied wird mit wachsenden Werten von a' geringer, da die Streuung der Neutronen in der Platte einen Teil der Neutronen wieder aus der Platte austreten läßt; dadurch die Zunahme von a' wird naturgemäß das „Albedo“ erhöht, also die Absorption verringert, trotz des größeren Weges, den manche Neutronen in der Platte zurücklegen müssen. Bei sehr dünnen Platten überwiegt der letztere Effekt den ersteren, d.h. die Absorption nimmt mit wachsender Streuung ab, bei größeren Dicken überwiegt jedoch das erste Glied, die Absorption nimmt dann mit wachsender Streuung zu.

Bei der Streuung ohne Verlangsamung (Fall 2: $a = 0$, $b \neq 0$) zeigt sich naturgemäß nur die zweite Wirkung, die Anzahl der absorbierten Neutronen nimmt mit wachsender Streuung ab. Allerdings wäre es unrichtig, aus diesem Ergebnis zu schließen, daß die Anwesenheit streuender Substanzen in der Platte für die praktische Verwendung in der Uranmaschine günstig sei. Denn diese Streuung wirkt sich im allgemeinen für die Absorption der *thermischen* Neutronen ungefähr ebenso ungünstig aus, wie für die Resonanzneutronen; was also durch eine Verkleinerung von w gewonnen werden kann, das wird nachher durch Verringerung der Anzahl der Spaltungsprozesse wieder verloren. Die Variation des zweiten Gliedes dürfte sich also gegen die entsprechenden Änderungen im thermischen Gebiet ungefähr kompensieren, und es kommt darauf an, das erste Glied in (20) und (39) möglichst klein zu machen. Es ist daher zweckmäßig, statt U_3O_8 stets metallisches Uran in den Platten zu verwenden.

Die numerische Auswertung der Formeln (20) und (39) zeigt, daß für U_3O_8 -Platten einer Dicke bis zu etwa 3 cm der Einfluß der Bremsung und Streuung in der Platte gering ist. Für solche Platten bleiben also die Formeln von I, Gln. (15) bis (17) und (60) bis (62) in Gültigkeit, wenn der Ausdruck $-\lambda/\lg \delta$ durch $\{\sum_i \gamma_i [1 + ((1 - \alpha_i)/\alpha_i) \lg(1 - \alpha_i)]\}^{-1}$ ersetzt wird. Aus diesem Grunde kann man auch schließen, daß für die Zylinder des *Anderson-Fermi-Szilardschen* Experiments, deren Durchmesser 5 cm betrug, mit den Formeln von Teil I unter Berücksichtigung der genannten Änderung in guter Näherung gerechnet werden kann. Auch hier dürfte die Streuung und Bremsung in den Uransichten nur eine geringe Rolle spielen. Für diesen wichtigsten Fall, in dem Streuung und Bremsung in der Uranschicht keine erhebliche Rolle spielen, soll die Formel für w noch einmal explizit angeschrieben werden. Aus den genannten Überlegungen in Teil I, in Übereinstimmung mit [Abschn.] II.2b, Gl. (38) folgt, daß die Anzahl der absorbierten Neutronen gegeben ist durch

$$n_{\text{abs.}} = \sum_r N_{0r} v_r^2 \sqrt{\gamma_{\text{Ur}} \pi} \int df \sqrt{x} . \quad (40)$$

Hierin ist das Integral zu erstrecken über die Oberfläche sämtlicher Uranstücke; \sqrt{x} bedeutet den Mittelwert aus der Quadratwurzel der von einem geradlinig

- 8 durchlaufenden Neutron im Uran zurückgelegten |Strecke. Bei dieser Mittelbildung ist zu berücksichtigen, daß die einfallenden Neutronen nach dem Cosinusetz verteilt sind. (Siehe Teil I): Bei der ebenen Platte ist $\sqrt{x} = 4\sqrt{d}/3$. Bei einem unendlich langen Zylinder vom Durchmesser d ist für einen Punkt auf dem Zylindermantel $x = 0,95 \sqrt{d}$. Die Anzahl der absorbierten Neutronen muß nun geteilt werden durch die Anzahl der emittierten. Das Gesamtvolumen sämtlicher U-Stücke (bzw. U_3O_8 -Stücke) sei V_1 , das den Neutronen zur Verfügung stehende Gebiet 2 sei V_2 . Dann wird schließlich die Wahrscheinlichkeit für Einfangung der Neutronen

$$w = \sum_r \sqrt{\gamma_{Ur}} \pi \int df \sqrt{x} \cdot \left\{ V_1 \sum_i \gamma_i^{(1)} [1 + ((1 + \alpha_i)/\alpha_i) \lg(1 - \alpha_i)] + V_2 \sum_i \gamma_i^{(2)} [1 + ((1 - \alpha_i)/\alpha_i) \lg(1 - \alpha_i)] \right\}^{-1}. \quad (41)$$

Diese Formel wird später für die Diskussion des *Anderson-Fermi-Szilardschen* Experiments verwendet.

Wenn die Streuung und Bremsung in den Uransichten nicht vernachlässigt werden kann, so liegen einstweilen nur die Resultate für die ebenen Platten vor: Gln. (22) und (39). Im Falle $b = 0$, d. h. keine Streuung durch schwere Atome, kann das Resultat für kleine Werte von a , d. h. von $d \sum_a \gamma_i^{(1)}$, nach Potenzen von \sqrt{a} entwickelt werden. Man erhält dann eine übersichtlichere Formel als Gl. (20):

$$n_{\text{abs.}} = n_{0r} v_r^2 \frac{8}{3} \sqrt{\gamma_{Ur}} d\pi \{ 1 - 3\sqrt{\pi} a^{1/2}/4 + a - \sqrt{\pi} a^{3/2}/4 + a^2/10 - + \dots \}. \quad (42)$$

19 II.3 Auswertung der Ergebnisse von Joliot, Halban, Kowarski und Perrin. Vergleich mit anderen Experimenten

Einige Zeit nach dem Abschluß des Teils I ist dem Verfasser eine Arbeit von *Joliot, Halban, Kowarski* und *Perrin* zur Kenntnis gekommen, deren Ergebnisse mit den Schlüssen und Annahmen in Teil I verglichen werden können.

Erstens enthält diese Arbeit eine Angabe über die Wahrscheinlichkeit w der Resonanzeinfangung bei verschiedener Konzentration von Uran im Wasser. Nach [Abschn.] I.2a muß w mit der Quadratwurzel aus dem Urangehalt ansteigen. Dies wird durch die Messungen bestätigt:

$N_{\text{H}}/N_{\text{U}}$	= 140	65	30	
w	= $0,11 \pm 0,02$	$0,14 \pm 0,02$	$0,02 \pm 0,02$	(1)
$w \sqrt{N_{\text{H}}/N_{\text{U}}}$	= $1,3 \pm 0,2$	$1,13 \pm 0,16$	$1,10 \pm 0,1$	

Als Mittelwert können wir setzen

$$w \sqrt{N_{\text{H}}/N_{\text{U}}} = 1,15. \quad (2)$$

Der Vergleich mit Formel (22) von Teil I zeigt, daß die dort unbestimmt gelassene

Größe etwa den Wert $2,13 \pm 0,2$ hat, also an der oberen Grenze der in I diskutierten Werte ($1/2 \leq \kappa \leq 2$) liegt. Dies bedeutet, daß die tiefste Resonanzstelle bei 25 eV nur einen kleinen Teil zur Gesamtaborption beisteuert. Denn Gl. (25) in [Abschn.] II.2a ergibt für den Beitrag der tiefsten Resonanzstelle (es werde jetzt $\sigma_H = 14,8 \cdot 10^{-24}$ und $\sigma_O = 3 \cdot 10^{-24}$ [cm²] gesetzt):

$$w_r = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma_r \sqrt{\sigma_r}}{E_r} \sqrt{\frac{N_U}{N_H}} \frac{\sqrt{\sigma_H + \frac{1}{2} \sigma_O}}{\sigma_H + \frac{1}{2} \cdot 0,114 \sigma_O} = 0,106 \sqrt{\frac{N_U}{N_H}} . \quad (3)$$

Die unterste Resonanzlinie trägt also, wenn man die Werte $\Gamma_r = 0,12$ eV, $\sigma_r = 2700 \cdot 10^{-24}$ cm² benützt, nur etwa 10% zur gesamten Resonanzabsorption bei. Dieses etwas unplausible Ergebnis deutet darauf hin, daß die Werte für Γ_r und σ_r bei der tiefsten Resonanzlinie noch nicht richtig bestimmt sind. Man kann aber umgekehrt die *Halban-Joliot*sche Arbeit zur Bestimmung der für die Resonanzeinfangung maßgebenden Größe benützen. Aus (3) und (2) ergibt sich

$$\sum_r \frac{\Gamma_r \sqrt{\sigma_r \cdot 10^{24}}}{E_r} = 2,7 \pm 3 \text{ [cm]} . \quad (4)$$

Mit diesem Zahlenwert werden alle folgenden Rechnungen durchgeführt werden. *Halban, Joliot* usw. untersuchen ferner Mischungen von U₃O₈ mit geringen Mengen H₂O in Konzentrationsverhältnissen 1:3, 1:2 und 1:1. Bei der Berechnung von w entsteht hier bei den höchsten U-Konzentrationen eine gewisse Unsicherheit dadurch, daß die Größe β_i für Sauerstoff: $\beta_i = 0,12$ vielleicht nicht mehr als groß gegen die Linienbreite angesehen werden kann. Für die tiefste Resonanzlinie ist β_i allerdings noch groß gegen die Linienbreite; wir nehmen dies daher zunächst für alle Linien an und setzen $\varepsilon_i = 1$; die Sauerstoffatome tragen dann bereits erheblich zur Erhöhung von w bei. Man erhält durch Einsetzen in [Abschn.] II.2a, Gl. (28) unter Benützung von (4):

$$\begin{array}{cccc} N_H/N_U = & 3 & 2 & 1 & 0 \\ w & = 0,50 & 0,585 & 0,73 & 0,99 \end{array} \quad (5)$$

Man könnte diese Daten nun benützen, um aus den Versuchsergebnissen über die Neutronenabsorption in den genannten Substanzen die Anzahl der pro eingefangenes thermisches Neutron im Uran emittierten Spaltungsneutronen X (vgl. [Abschn.] I.1) zu berechnen. Es stellt sich jedoch heraus, daß diese Zahl bei hohen Konzentrationen so empfindlich von w abhängt, daß es zweckmäßiger ist, einen möglichst guten Wert von X vorauszusetzen und w aus den Versuchsergebnissen zu ermitteln. Die Versuchsergebnisse sind bei *Halban, Joliot* usw. bereits ausführlich erörtert, es genügt daher, hier das Ergebnis anzuführen: Für $X = 2,0$ erhält man

$$\begin{array}{cccc} & 3 \text{ H} & 2 \text{ H} & 1 \text{ H} & 0 \text{ H} \\ w_{\text{exp.}} & = 0,50 & 0,585 & 0,66 & (\sim 1) \\ w_{\text{theor.}} & = 0,50 & 0,585 & 0,73 & 0,99 \end{array}$$

Die Übereinstimmung bei 3 H ist durch die Zahl $X = 2,0$ hergestellt. Bei 1 H (d. h. $1/2 \text{ H}_2\text{O}$ pro U) ist die Übereinstimmung nicht so gut, was wahrscheinlich darauf zurückzuführen ist, daß die Linienbreiten hier nicht mehr alle klein gegen die Größe β_i für Sauerstoff sind. (Für die tiefste Resonanzlinie hat, wenn die Angaben $\Gamma_r = 0,12 \text{ eV}$, $\sigma = 2700 \cdot 10^{-24} [\text{cm}^2]$ richtig sind, die Linienbreite in der Variablen u den Wert 0,05, während $\beta_i = 0,12$. Es ist gut möglich, daß die Breiten anderer Resonanzlinien größer sind als 0,1 und dies würde zu einer Verkleinerung von w führen.) Wir betrachten also

$$X = 2,0 \quad (6)$$

als den nach den Messungen von *Halban* usw. wahrscheinlichsten Wert. In Teil I war X durch die Gl. (1) mit w und κ (Gl. (19)) in Verbindung gebracht worden. Setzt man, wie es der Gl. (2) dieses Abschnittes entspricht, $\kappa = 2,13$, so ergäbe sich aus Teil I, Gl. (1) und (19): $X = 1,86$ in hinreichender Übereinstimmung mit (6). Allerdings bedürfen die Grundlagen der Berechnung von w in Teil I noch der Verbesserung, bevor der endgültige Vergleich der *Fermischen* und der *Joliot-Halbanschen* Messungen durchgeführt werden kann.

In Teil I war für die Dichte des U_3O_8 , das *Anderson*, *Fermi* und *Szilard* in ihrem Versuch benützt hatten, fälschlicherweise 8 eingesetzt worden, während die Dichte in Wirklichkeit nur 3,3 betragen hat. Außerdem wollen wir jetzt für die Berechnung der exakten Formel ([Abschn.] III.2b, Gl. (41)) zu Grunde legen (von Bremsung und Streuung im Uran kann hier wahrscheinlich abgesehen werden). Aus [Abschn.] II.3, Gl. (4) finden wir, daß bei einer Dichte des U_3O_8 von 3,3

$$\sum_r \sqrt{\gamma_{Ur}} = 0,0578 \text{ cm}^{-1/2} .$$

- 22 Ferner ist in U_3O_8 : $\gamma_{\text{O}} = 0,059 \text{ cm}^{-1}$; im Wasser $\gamma_{\text{H}} = 0,87$ und $\gamma_{\text{O}} = 0,10$. Der charakteristische Faktor $1 + (1 - \alpha)/\alpha \lg(1 - \alpha)$ hat für O den Wert 0,114. Die Gesamtoberfläche aller Zylinder betrug in *Fermis* Experiment $\pi(5 \cdot 60 + 2 \cdot 6,25) \cdot 52 = \pi \cdot 16250 \text{ cm}^2$, ihr Gesamtvolumen $V_1 = \pi \cdot 6,25 \cdot 60 \cdot 52 = \pi \cdot 19500 \text{ cm}^3$. Schließlich ergibt sich nach [Abschn.] II.2b, Gl. (41):

$$w = \frac{\pi \cdot 3535}{\pi \cdot 131 + 0,88 \cdot V_2} .$$

Eine gewisse Unsicherheit entsteht nun bei der Berechnung von V_2 . Die Neutronendichte ist sicher gegen den Rand des Gefäßes zu sehr gering. Als den Neutronen „zur Verfügung stehendes“ Volumen muß man mindestens das Volumen ansehen, das zwischen den U_3O_8 -Zylindern und unmittelbar an deren Rand liegt. Dies beträgt nach der Zeichnung in der Arbeit

$$\pi(32^2 \cdot 70 - 19500) = \pi \cdot 24200 \text{ cm}^3 .$$

Es könnte aber auch einen Radius haben, der etwa 5 cm größer ist, und man müßte es dann etwa zu

$$\pi(32^2 \cdot 70 - 19500) = \pi \cdot 52100 \text{ cm}^3$$

ansetzen. Die entsprechenden Werte für w werden 0,165 und 0,077. Man wird wohl schließen müssen, daß w zwischen beiden Werten liegt. Wenn die Neutronendichte, wie aus den Versuchen von *Halban* etc. zu schließen ist, im Inneren der Apparatur viel größer ist als außen, so liegt w wohl nahe an der oberen Grenze. Benützt man nun die Gl. (1) von Teil I: $x = 3,2/(1 - w) - 2$, so erhält man aus dem *Anderson-Fermi-Szilardschen* Experiment:

$$1,84 \geq X \geq 1,47 .$$

Dabei dürfte X nahe an der oberen Grenze liegen. Der *Fermische* Wert für X ist also 10 – 20% niedriger als der *Halbansche*.

Ferner ist neuerdings eine Arbeit von *Bradt* (Helv. Physica Acta **XII**, 553, 23 1939) erschienen, die ebenfalls eine Messung von X beabsichtigt. Da bei der Ausrechnung der experimentellen Ergebnisse die Einfangung eines Neutrons in U_{92}^{238} völlig vernachlässigt wurde, können die bei *Bradt* angegebenen Werte von X nicht verwendet werden. Die experimentellen Ergebnisse müssen also neu ausgewertet werden: *Bradt* benützt eine Neutronenquelle in einem großen Wasserbehälter, die einmal von einer U_3O_8 , ein anderes Mal von einer ebenso streuenden PbO -Schicht umgeben wird. Er mißt die Anzahl N thermischer Neutronen im Wasser und stellt fest, daß diese Gesamtzahl in dem Experiment mit U_3O_8 um $5,6 \pm 0,7\%$ höher ist als in dem mit PbO :

$$\frac{\Delta N}{N} = 0,056 .$$

Die Neutronendichte in der Umgebung der U_3O_8 -Schicht war $5,63 \cdot 10^{-5} N$ [cm^{-3}], und es wird angenommen, daß die Dichte im Inneren der Schicht überall diesen gleichen Wert gehabt habe. Die Anzahl der U-Atome in der Schicht war $4,24 \cdot 10^{24}$. Die Anzahl der im Uran pro sec erzeugten Spaltungsneutronen ist also (der Einfangwirkungsquerschnitt für U bei thermischer Geschwindigkeit ist $3,4 \cdot 10^{-24} cm^2$)

$$\begin{aligned} n &= 5,63 \cdot 10^{-5} \cdot N \cdot 4,44 \cdot 10^{24} \cdot X \cdot 3,4 \cdot 10^{-24} \\ &= 8,5 \cdot 10^{-4} \cdot v_{th} \cdot N \cdot X . \end{aligned}$$

Die Anzahl der pro sec im Wasser absorbierten Neutronen ist

$$N \cdot v_{th} \cdot \sigma_H \cdot N_H = \Delta N \cdot v_{th} \cdot \sigma_H \cdot 6,7 \cdot 10^{22} .$$

Wenn man die Einfangung der Neutronen in Resonanzniveaus von U völlig vernachlässigt, ferner annimmt, daß PbO überhaupt nicht absorbiert, so ergibt sich durch Differenzbildung

$$\begin{aligned} 8,5 \cdot 10^{-4} \cdot v_{th} \cdot N(X - 1) &= \Delta N \cdot v_{th} \cdot \sigma_H \cdot 6,7 \cdot 10^{22} , \\ X - 1 &= \frac{\Delta N}{N} \sigma_H \cdot 7,9 \cdot 10^{25} . \end{aligned}$$

Bevor man die experimentellen Werte von $\Delta N/N$ einsetzt, kann man noch eine 24

Korrektur anbringen für die Spaltungsprozesse, die durch schnelle Neutronen in U hervorgerufen werden. Der korrigierte Wert von $\Delta N/N$ ist:

$$\Delta N/N = 0,051 \pm 0,007 .$$

Der Wert von X hängt nunmehr in der Hauptsache von σ_{rH} ab. In Teil I wurde $\sigma_{rH} = 0,3 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ angenommen. Dieser Wert ist etwas niedriger als der von *Fermi* und *Amaldi* gemessene ($0,31 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$). Neuerdings haben jedoch *Frisch*, *Halban* und *Koch* einen noch erheblich niedrigeren Wert gefunden: $0,22 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ (nach Umrechnung mit dem hier benützten Wert von v_{th}). Betrachtet man – was wohl etwas willkürlich ist – die Werte 0,3 und 0,22 als obere bzw. untere Grenze, so findet man:

$$1,89 \leq X \leq 2,21 .$$

Durch Berücksichtigung der Resonanzabsorption, die in diesem Experiment keinen großen Einfluß hat, würden sich diese Werte etwa erhöhen; die Berücksichtigung einer eventuellen Absorption von PbO würde die Werte erniedrigen. Da über die Absorption von PbO nichts bekannt ist, kann man also der Bestimmung von X durch *Bradt* kein hohes Gewicht beilegen.

Schließlich haben *Zinn* und *Szilard* noch eine Bestimmung von X unternommen, die jedoch von ihnen selbst als vorläufig und ungenau bezeichnet wird. Sie finden

$$X \sim 1,4 .$$

Faßt man alle bisherigen Versuchsergebnisse zusammen, so wird man etwa

$$X = 1,9 \pm 0,2$$

ansetzen. Der wahrscheinliche Fehler $\pm 0,2$ dieses Ergebnisses ist leider noch so groß, daß er für die Möglichkeit der Uranmaschine entscheidende Bedeutung hat.

25

II.4 Verbesserung früherer Ergebnisse auf Grund der neuen experimentellen Daten

Unter der Voraussetzung

$$X = 1,9 \quad \text{und} \quad \sum_r \Gamma_r \sqrt{\sigma_r \cdot 10^{24} / E_r} = 2,7 \text{ cm} \quad (1)$$

sollen die wichtigsten Daten der Uranmaschine neu berechnet werden. Zunächst soll eine Lösung von Uran, in dem das *Isotop* 235 um den Faktor f *angereichert* ist, in Wasser untersucht werden. Wenn die Wirkungsquerschnitte für Einfangung bzw. für Spaltung in gewöhnlichem Uran $1,4 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ bzw. $2 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ sind, so sind sie im angereicherten Uran $1,4 \cdot 10^{-24}$ und $2f \cdot 10^{-24}$. Bei jedem Spaltungsprozeß entstehen im Mittel $(1,9 \cdot 3,4)/2 = 3,23$ Neutronen. Bezeichnet

man wieder das Verhältnis der Atomzahlen von U und H mit $\alpha (\alpha = N_U/N_H)$, so wird in Analogie zu [Teil] I, Gl. (22), unter Berücksichtigung von [Teil] II.3, Gl. (2):

$$\begin{aligned} v &= -v N_H \cdot 10^{-24} (0,3 + (1,4 + 2f) \alpha - 2f \cdot 3,23 \alpha (1 - 1,15 \sqrt{\alpha})) \\ &= -v N_H \cdot 10^{-24} (0,3 - (4,46f - 1,4) \alpha + 7,43f \cdot \alpha^{3/2}) . \end{aligned} \quad (2)$$

Der Maximalwert von v liegt bei

$$\alpha_{\max} = \left(\frac{2}{3} \frac{4,46f - 1,4}{7,43f} \right)^2 \quad (3)$$

und beträgt

$$v_{\max} = -v N_H \cdot 10^{-24} (0,3 - 4/27 \cdot (4,46f - 1,4)^3 / (7,43f)^2) . \quad (4)$$

Es ergibt sich also für

f	=	1	1,5	2	2,5	3
α_{\max}	=	0,0775	0,100	0,114	0,123	0,129
v_{\max}	=	-0,223	-0,124	-0,014	+0,098	+0,212

Neutronenvermehrung würde also erst eintreten, wenn das Isotop 235 um den Faktor 2,5 oder mehr angereichert würde. Daß dieses Ergebnis viel ungünstiger ist als in Teil I, liegt seinerseits an dem unerwartet hohen Wert von κ , der aus den Halbanschen Rechnungen folgt, andererseits an dem von Bothe bemerkten Fehler in den Rechnungen zu Tabelle 1 in Teil I. Setzt man für die Einfangung der Neutronen in Wasserstoff den Frisch-Halban-Kochschen Wert $\sigma_r = 0,22 \cdot 10^{-24}$ in (2) ein, so würde schon eine Anreicherung um den Faktor $f = 2$ zur Neutronenvermehrung genügen. Benützt man statt der Lösung eine Anordnung mit einzelnen Schichten, so genügt wohl ein noch etwas kleinerer Wert von f .

Es soll zweitens eine Lösung von Uran in schwerem Wasser untersucht werden. Die Gl. (27) in [Abschn.] II.2a gibt hier $w = 3,83 \sqrt{\alpha} \cdot (\alpha = N_U/N_D)$. Den Wirkungsquerschnitt σ_r für die Einfangung in schwerem Wasser (pro D-Atom gerechnet) wollen wir zunächst unbestimmt lassen. Dann wird

$$v_{D_2O} = -v \cdot N_D \cdot 10^{-24} (\sigma_r \cdot 10^{24} - 0,0069) .$$

Für reines schweres Wasser ist nach den Annahmen von Teil I $\sigma_r = 0,0045 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$; hierfür würde v_{D_2O} positiv, und es würde Neutronenvermehrung eintreten. Wenn das schwere Wasser jedoch 1% gewöhnliches Wasser enthält, so wäre nach den Annahmen von Teil I v_{D_2O} negativ; die Lösung würde sich dann nicht mehr zur Herstellung der Uranmaschine eignen. Allerdings werden die Verhältnisse sicher erheblich günstiger, wenn statt der Lösung einzelne Uranplatten in D_2O verwendet werden. Schweres Wasser wird sich also, wenn die hier angenommenen experimentellen Werte richtig sind, jedenfalls zur Herstellung der Uranmaschine eignen.

Bei einem Gemisch von Uran mit Helium unter hohem Druck wird nach (27) in [Abschn.] II.2a: $w = 5,76$, wenn der Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung der Neutronen von 25 eV an Heliumkernen mit $3 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ angesetzt wird. Da Neutronen im Helium nicht eingefangen werden können, | so wird

$$\nu_{\text{He}} = -v \cdot N_{\text{He}} \cdot 10^{-24} (-3,06\alpha + 37,2\alpha^{3/2}) .$$

Der Maximalwert ist

$$\nu_{\text{He}} = +v \cdot N_{\text{He}} \cdot 0,0031 \cdot 10^{-24} .$$

Es tritt also Neutronenvermehrung ein. Die dazu gehörige Diffusionslänge ist

$$l_{\text{He}} = 31,6/d_{\text{He}} (\text{cm}) ,$$

wobei d_{He} die Dichte des Heliums unter hohem Druck darstellt. Diese Länge ist bei den technisch darstellbaren Dichten noch recht groß, so daß selbst bei einem Druck von 1000 atm Gefäße von mehreren Metern Durchmesser zur Herstellung der Uranmaschine nötig wären.

Schließlich betrachten wir ein Gemisch von U und reiner Kohle. Hier wird $w = 16,1 \sqrt{\alpha}$, also

$$\nu_{\text{C}} = -v \cdot N_{\text{C}} \cdot 10^{-24} (\sigma_r \cdot 10^{24} - 3,06\alpha + 104\alpha^{3/2}) ,$$

und der Maximalwert

$$\nu_{\text{C}}^{\text{max}} = -v \cdot N_{\text{C}} \cdot 10^{-24} (\sigma_r \cdot 10^{24} - 0,00034) .$$

Wenn σ_r , wie in Teil I angenommen wurde, etwa $0,003 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ ist, so genügt also reine Kohle nicht zur Herstellung der Uranmaschine. Auch hier können jedoch die Verhältnisse bei der Verwendung von Uranplatten günstiger werden.

Die Anordnungen, bei denen Uranschichten mit Schichten anderer Substanz abwechseln, sollen in diesem Bericht nicht weiter behandelt werden, da *v. Weizsäcker* ausführliche Berechnungen über diesen Gegenstand durchgeführt hat und wohl demnächst mitteilen wird.