COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA

Aula Teórico-Prática – Ficha 5

INTEGRAIS DE LINHA

1. Calcule os seguintes integrais ao longo da linha indicada:

a) $\int_C (2-y)dx + (x)dy$, sendo $C : \vec{r}(t) = \left(t - \operatorname{sen}(t)\right)\vec{i} + \left(1-\cos(t)\right)\vec{j}$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) $\int_C (2xy)dx + (x^2 + z)dy + (y)dz$, em que C é o segmento de recta que liga o ponto $P = (1,0,2)$ ao ponto $Q = (5,8,0)$.

c) $\int_C (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, onde C é a linha que liga os pontos $O = (0,0)$ e $P = (3,-1)$, situada sobre o gráfico da função $y = 1 - |1-x|$.

d) $\int_C \frac{(x+y)dx + (y-x)dy}{x^2 + y^2}$, sendo C a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, percorrida no sentido retrógrado.

e) $\int_C (y)dx + (z)dy + (x)dz$, onde C é a linha de intersecção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x + y = 2$, percorrida no sentido directo quando vista da origem do referencial.

f) $\int_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, em que C é o quadrado com vértices nos pontos $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (-1,0)$ e $D = (0,-1)$, percorrido no sentido directo.

2. Considere o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ e a linha, L, parametrizada por $\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\operatorname{sen}(t)\vec{j}$, $t \in [0, 2\pi]$ e $a > 0$. Calcule, recorrendo à definição, o valor do integral de linha $\int_L \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$, sendo L percorrida no sentido retrógrado.

3. Confirme o resultado obtido no exercício 2.:

a) Verificando que o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ é gradiente.

b) Usando o teorema de Green.

4. Verifique que o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j}$ é gradiente e determine o valor de $\int_L \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ ao longo do caminho, L, parametrizado por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$, $t \in [0,2]$.

5. Confirme o resultado obtido no exercício 4. recorrendo à definição de integral de linha.

6. Verifique que o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = 3x\left(x^2 + y^4\right)^{1/2}\vec{i} + 6y^3\left(x^2 + y^4\right)^{1/2}\vec{j}$ é gradiente e calcule o valor de $\int_L \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ ao longo da curva $y = -\left(1 - x^2\right)^{1/2}$, entre os pontos $P = (-1,0)$ e $Q = (1,0)$.

7. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = (2xy + z^2)\vec{i} + (x^2 - 2yz)\vec{j} + (2xz - y^2)\vec{k}$. Mostre que $\vec{f}(x,y,z)$ é gradiente e calcule o valor de $\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$, em que C é uma linha que liga o ponto $P = (1,0,1)$ ao ponto $Q = (3,2,1)$.

8. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = (e^{2y} - 2xy)\vec{i} + (2xe^{2y} - x^2 + 1)\vec{j}$ e a linha, C, parametrizada por $\vec{r}(u) = ue^u\vec{i} + (1+u)\vec{j}$, $u \in [0,1]$. Calcule o valor de $\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$:

a) Usando a definição de integral de linha.

b) Verificando que o campo vectorial é gradiente e recorrendo ao teorema fundamental para o integral de linha.

9. Mostre que o integral de linha $\int_{(1,0,2)}^{(-2,1,3)} (6xy^3 + 2z^2)dx + (9x^2y^2)dy + (4xz + 1)dz$ é independente do caminho e calcule-o.

10. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=(2xy+z^2)\vec{i}+x^2\vec{j}+2xz\vec{k}$ e a linha, C, parametrizada por $\vec{r}(u)=2u\vec{i}+(u^2+2)\vec{j}-u\vec{k}$, $u\in[0,1]$. Calcule o valor de $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$:

a) Usando a definição de integral de linha.

b) Verificando que o campo vectorial é gradiente e recorrendo ao teorema fundamental para o integral de linha.

11. Considere o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=\left(2xz+\operatorname{sen}(y)\right)\vec{i}+x\cos(y)\vec{j}+x^2\vec{k}$ e a linha, C, parametrizada por $\vec{r}(u)=\cos(u)\vec{i}+\operatorname{sen}(u)\vec{j}+u\vec{k}$, $u\in[0,2\pi]$. Verifique que o campo vectorial é gradiente e calcule o valor de $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$, recorrendo ao teorema fundamental para o integral de linha.

12. Calcule o valor de $\int_C (x^2y)dx+(y)dy+(xz)dz$, sendo C a parcela da curva de intersecção da superfície cilíndrica $y-2z^2=1$ com o plano $z=x+1$, definida entre os pontos $P=(0,3,1)$ e $Q=(1,9,2)$.

13. Calcule, usando o teorema de Green, o integral de linha $\oint_C (3xy+y^2)dx+(2xy+5x^2)dy$, sendo C a circunferência de raio unitário e com centro no ponto $P=(1,-2)$.

14. Verifique o resultado obtido no exercício 13. recorrendo à definição de integral de linha.

15. Recorrendo ao teorema de Green, determine o integral de linha $\oint_C (2x^2+xy-y^2)dx+(3x^2-xy+2y^2)dy$, em que $C\ :\ (x-a)^2+y^2=r^2$.

16. Recorrendo ao teorema de Green, calcule o integral de linha $\int_C (y)dx+(3x)dy$, sendo C a fronteira da região, Ω, limitada pelos gráficos das funções $y=2x$ e $y=x^2$, percorrida no sentido retrógrado. Verifique o teorema de Green.

17. Usando o teorema de Green, calcule o integral de linha $\oint_C (x+y)dx+(y^2-x)dy$, sendo $C=C_1\cup C_2$, tal que $C_1 : y=0$, $x\in[-1,1]$ e $C_2 : x^2+y^2=1$, $y\geq 0$. Verifique o teorema de Green.

18. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=y\vec{i}+(z+y)\vec{j}-y\vec{k}$ e a curva, *C*, que é a intersecção das superfícies $y^2+z^2=1$ e $x=y$.

a) Obtenha uma parametrização para a curva *C*.

b) Calcule o integral de linha $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$, se a curva for percorrida no sentido directo quando vista do ponto $P=(1,0,0)$.

19. Considere a a curva, *C*, que é a intersecção das superfícies $z=x^2+y^2$ e $z=8-x^2-y^2$.

a) Obtenha uma parametrização para a curva *C*.

b) Calcule o integral de linha $\int_C (x)dx+(-y)dy+(xyz)dz$, se a curva for percorrida no sentido retrógrado quando vista da origem do referencial.

20. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=z^2\vec{i}+y^2\vec{j}+xz\vec{k}$ e a curva, *C*, que é a intersecção das superfícies $x^2+z^2=a^2$, $a>0$ e $z=y$. Esboce a curva C e determine $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$, se a curva for percorrida no sentido directo quando vista do ponto $P=(0,1,0)$.

21. Usando o teorema de Green, calcule o integral de linha $\int_C (x)dx+(x)dy$, sendo *C* a fronteira da região, Ω, limitada pelos gráficos das funções $y=1-x$ e $y=(x-1)^2$, percorrida no sentido retrógrado. Verifique o teorema de Green.

22. Relativamente aos integrais de linha seguintes, verifique o teorema de Green:

a) $\oint_C (y^2)dx + (x)dy$, sendo C a fronteira da região quadrada, Ω, com vértices nos pontos $O = (0,0)$, $A = (2,0)$, $B = (2,2)$ e $C = (0,2)$.

b) $\oint_C (x^2)dy$, sendo C a fronteira da região rectangular, Ω, com vértices nos pontos $O = (0,0)$, $A = (a,0)$, $B = (a,b)$ e $C = (0,b)$.

c) $\oint_C (4x^3 + 2y^2)dx + (4xy + e^y)dy$, sendo C a fronteira da região, Ω, limitada pelos gráficos das funções $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

23. Recorrendo ao teorema de Green, calcule o integral de linha $\int_C (2xy + 3x^2)dx + (2y)dy$, sendo C a fronteira da região, Ω, do 1º quadrante limitada pelos gráficos das funções $y = 2$, $y = 3 - 2x$ e $y = x^2$, percorrida no sentido directo. Verifique o teorema de Green.

29. Calcule os seguintes integrais de linha em relação ao comprimento de arco:

a) $\int_C (x - y)ds$, onde C é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = 4t\vec{i} + 3t\vec{j}$, $t \in [0,2]$.

b) $\int_C (x^2 + y^2)ds$, em que C é o segmento de recta percorrido entre o ponto $O = (0,0)$ e o ponto $P = (3,9)$.

c) $\int_C (x^2 + y^2)ds$, sendo C o arco da circunferência $x^2 + y^2 = 1$, percorrido entre o ponto $P = (1,0)$ e o ponto $Q = (0,1)$.

d) $\int_C (x + 4\sqrt{y})ds$, sendo C o triângulo com vértices nos pontos $O = (0,0)$, $A = (1,0)$ e $C = (0,1)$, percorrido no sentido retrógrado.

e) $\int_C (z)ds$, onde C é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = t\cos(t)\vec{i} + t\text{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k}$, $t \in [0,t_1]$.

30. Usando o teorema de Green, calcule o integral de linha

$$\oint_{C_1} (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy - \oint_{C_2} (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$$

onde C_1 é a circunferência $x^2 + y^2 = b^2$ e C_2 é a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, tal que $0 < a < b$.

31. Seja C a linha de intersecção das superfícies $x^2+y^2=2y$ e $z=1+y$, percorrida no sentido retrógrado quando vista da origem do referencial. Calcule:

a) $\int_C (yz)dx+(xz)dy$.

b) $\int_C (yz)dx+(xz)dy+(xy)dz$.

32. Calcule o integral de linha $\int_C (z)dx+(y^2)dy+(xy)dz$, em que C é a linha de intersecção das superfícies $x^2+y^2=1$ e $x+z=1$, percorrida no sentido directo quando vista do ponto $P=(0,0,3)$.

33. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=x^2y\vec{i}+y^2z\vec{j}+xz^2\vec{k}$ e a linha, C, que é a intersecção das superfícies $x^2+y^2-4=0$ e $z=3$, percorrida no sentido retrógrado quando vista da origem do referencial. Determine o integral de linha $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$.

34. Seja C a linha parametrizada por $\vec{r}(t)=\mathrm{sen}(t)\vec{i}-\cos(t)\vec{j}+\frac{1}{2}\mathrm{sen}(2t)\vec{k}$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Calcule o integral de linha $\int_C (yz+z^2)dx+(xz)dy+(xy+2xz)dz$, se C é percorrida na direcção oposta à definida pela sua parametrização.

36. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{f}(x,y)=x^3\vec{i}+y\vec{j}$ aplicado a um ponto material que se desloca ao longo da parábola $y=3x^2$, entre o ponto $O=(0,0)$ e o ponto $P=(1,3)$.

37. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{f}(x,y,z)=x\vec{i}+xy\vec{j}+xyz\vec{k}$ aplicado a um ponto material que se desloca ao longo do segmento de recta que liga o ponto $P=(0,1,4)$ ao ponto $Q=(1,0,-4)$.

38. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{f}(x,y,z)=x^2\vec{i}+xy\vec{j}+z^2\vec{k}$ aplicado a um ponto material que se desloca ao longo da hélice $\vec{r}(t)=\cos(t)\vec{i}+\mathrm{sen}(t)\vec{j}+t\vec{k}$, entre o ponto $P=(1,0,0)$ e o ponto $Q=(1,0,2\pi)$.

40. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{f}(x,y)=(x+e^{2y})\vec{i}+(2y+2xe^{2y})\vec{j}$ aplicado a um ponto material que se desloca ao longo da linha, *C*, parametrizada por $\vec{r}(t)=3\cos(t)\vec{i}+4\text{sen}(t)\vec{j}$, $t\in[0,2\pi]$. Comece por verificar se o campo de forças é gradiente.

41. Determine o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{f}(x,y,z)=\left(2x\ln(y)-yz\right)\vec{i}+(x^2y^{-1}-xz)\vec{j}-xy\vec{k}$ aplicado a um ponto material que se desloca ao longo do segmento de recta, *C*, que liga o ponto $A=(1,2,1)$ ao ponto $B=(3,2,2)$. Comece por verificar se o campo de forças é gradiente.

45. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=xy\vec{i}+yz\vec{j}+x^2\vec{k}$ e a linha *C* que é a fronteira da região rectangular com vértices nos pontos $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$, $C=(0,1,1)$ e $D=(1,0,1)$. Determine o integral de linha $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$, se a linha *C* é percorrida no sentido retrógrado quando vista da origem do referencial.

46. Calcule o integral de linha $\int_C (2xe^y)dx+(x^2e^y)dy+dz$, sendo *C* a linha parametrizada por $\vec{r}(t)=t\vec{i}+(4-t^2)\vec{j}+\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right)\vec{k}$, $t\in[0,2]$, percorrida na direcção oposta à definida pela sua parametrização.

47. Seja *C* a linha que liga o ponto $P=(1,0,0)$ ao ponto $Q=(0,-1,2)$ e que pertence à intersecção das superfícies $x^2+y^2-1=0$ e $x+y+z=1$. Calcule o integral de linha $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$, em que $\vec{f}(x,y,z)=(2xz+y^2)\vec{i}+2xy\vec{j}+(x^2+3z^2)\vec{k}$.

Soluções: Consultar o manual “Noções sobre Análise Matemática”, Efeitos Gráficos, 2019. ISBN: 978-989-54350-0-5.