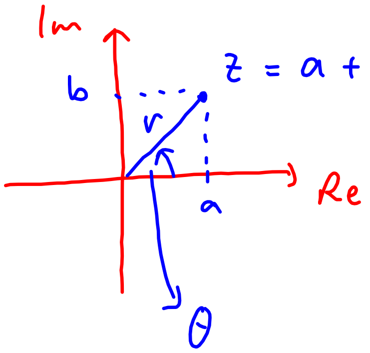
Komplekse fall



$z = a + ib = re^{i\theta}$, $\bar{z} = a - ib$

Vanlige regneregler, med

$i^2 = -1$

Divisjonstriks: $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}}$

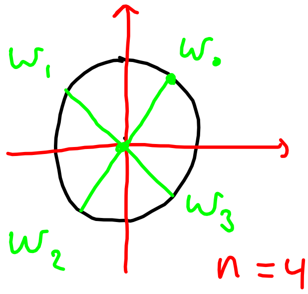
$$re^{i\theta} \cdot se^{iw} = rs\, e^{i\theta + iw} = rs\, e^{i(\theta + w)}$$

n-te røtter $\quad z = re^{i\theta}$ der $\theta \in [0, 2\pi)$

$$w_0 = \left(re^{i\theta}\right)^{1/n} = r^{1/n}\left(e^{i\theta}\right)^{1/n} = r^{1/n} e^{i(\theta/n)}$$

$$w_+ = e^{i(2\pi/n)}$$

$$w_1 = w_+ w_0 \quad \text{osv.}$$



Algebraens fundamentalteorem

$$P(z) = c_n z^n + \cdots + c_1 z + c_0$$

har kompleks faktoriserg

$$P(z) = c_n (z - r_1) \cdots (z - r_n)$$

Reell faktorisering for reelle polynomer $P(z)$ finnes ved å gange sammen faktorer som tilsvarer konjugerte røtter.

eks. $(z - i)(z + i)(z - 1) = (z^2 + 1)(z - 1)$

$$= z^3 - z^2 + z - 1 = P(z)$$

Røtter for $P(z)$: $z = i$, $z = -i$, $z = 1$

Komp. faktorisering: $P(z) = (z - i)(z + i)(z - 1)$

Reell — " — : $P(z) = (z^2 + 1)(z - 1)$

Følger

$a_1, a_2, a_3, \dots$

Følgen voksende og oppad begrenset $\Rightarrow$ Konv.
– – – avtakende " nedad – – – $\Rightarrow$ Konv.

Fra kompl. helsprins. sup $\mathcal{U}$ og inf $\mathcal{U}$ fins hvis begrenset $\mathcal{U}$

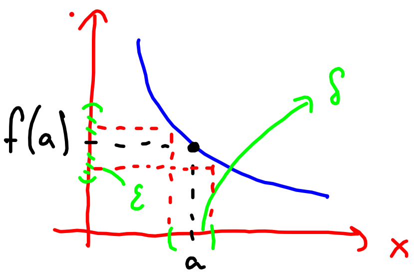
Grensedefinisjon og triks for å finne hva følger konvergerer mot: Analogt med

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \quad \text{for funksjoner } f.$$

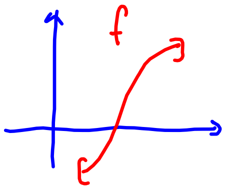
Kontinuitet (kap. 5)

f kont. i a : For hver $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{hvis } |x - a| < \delta$$



Skjæringssetningen :



f kont $\left.\begin{matrix} \\ f(a) < 0 \\ f(b) > 0 \end{matrix}\right\}$ fins $x \in (a,b)$ med $f(x) = 0$

Ekstremalverdisetningen:

f kont på $[a,b]$

$\Rightarrow$ f har et maks og et minimum

Def. av $\lim_{x \to a} f(x) = L$: $\varepsilon - \delta$

Derivasjon (kap 6 og 7)

$$f'(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ekr. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$$ dvs. f kont. i $x = 0$.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h}$$

$=$ etc. (l'Hop ?)

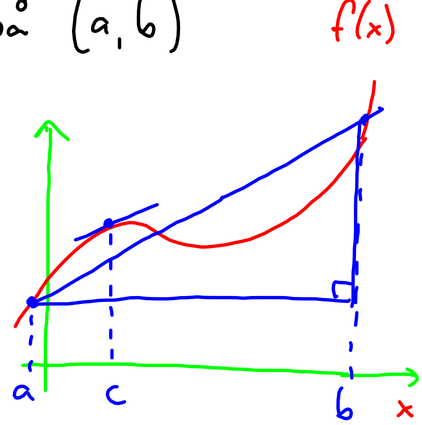
- Derivasjonsregler (Viktig !)

Middelverditeoremet

f kont på $[a,b]$ og deriverbar på (a,b)

$\Rightarrow$ Fins $c \in (a,b)$ slik at

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \, .$$



l'Hopitals regel

$\left[\frac{0}{0}\right]$ og $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$: Kan derivere teller og nevner

Trikseformen : $[\infty \cdot 0]$, $[\infty - \infty]$

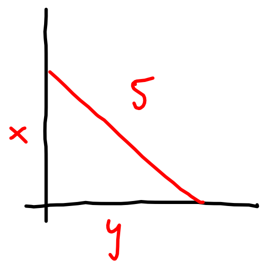
$$\underbrace{[0^0], \ [1^\infty] \text{ og } [\infty^0]}$$

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

eks. $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} \ [\infty^0] = \lim_{x\to\infty} \left(e^{\ln x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$

osv.

- Koblede hastigheter



$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

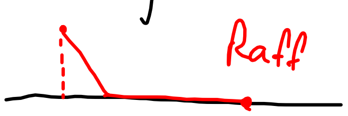
$$x^2 + y^2 = 5^2$$

$$2x \cdot x'(t) + 2y \cdot y'(t) = 0$$

- Asymptoter, inkl. skrå: $a = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ osv.

- Anvendelser av funksjonsdrøfting

  (eks: Oljeledning



- Omvendte funksjoner, arcusfunksjonene

  Eks. arctan x

$\boxed{\text{Integrasjon (kap. 8+)}}$

- Øvresummer, nedresummer, Riemannsummer
- Fundamentalteoremet:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

kont.

- Volumer: $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$ om y-aksen

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx \quad \text{om x-aksen}$$

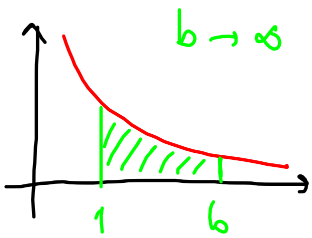
(+ buelengde.)

- Integrasjonsteknikker
  - Substitusjon $\int x e^{x^2}\,dx$ $u = x^2$
  - Delvis integrasjon $\int x e^x\,dx$

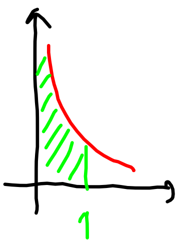
    (varianter, f.eks. I-metoden)
  - Delbrøksoppspalting, inkl. "kvadrat-teknikken"

Uegentlige integraler

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)\,dx$$



p-integraler



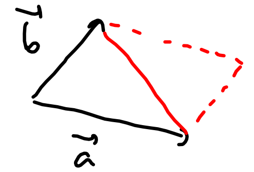
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \quad \begin{cases} \text{konv. hvis } p>1 \\ \text{div. hvis } p\le 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \quad \begin{cases} \text{konv. hvis } p<1 \\ \text{div. hvis } p\ge 1 \end{cases}$$

Grensesammenlikningstesten
Sammenlikningstesten } brukes til å avgjøre konv/div. av uegentlige integraler.

Kap 1 FLVA : Vektorer og matriser

- Skalarprodukt og vinkel mellom n-tupler (inkl. komplekse)
- Vektorprodukt : $\vec{a} \times \vec{b}$
- Determinanter generelt
- $|\vec{a} \times \vec{b}|$ er arealet av rektanglet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$



- $\left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right|$ er volumet av parallellepipedet utspent av $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$.

- I planet : Arealet av parallellogrammet utspent av (a_1, a_2) og (b_1, b_2) er absoluttverdien av

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

- Multiplikasjon av matriser : "Kryss"
- Inverse av matriser $M \cdot M^{-1} = I$
- Overgangsmatriser, ref. studenteksempel forelesning.

$\boxed{\text{Kap 2 FLVA : Funksjoner av flere variable}}$

Partielle deriverte $\frac{\partial f}{\partial x}$ osv.

Gradienten ∇f

Refningsderivert : $f'(\vec{a}; \vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$

f deriverbar

Vektorvaluerte funksjoner : $\vec{F}(x,y) = (xy, 2y)$

- Jacobimatrisen til $\vec{F}$

  Brukes til en lineærtilnærming til $\vec{F}$

  gitt at $\vec{F}$ er deriverbar.