

Forelesning nr.5 INF 1411

Elektroniske systemer

RC-kretser

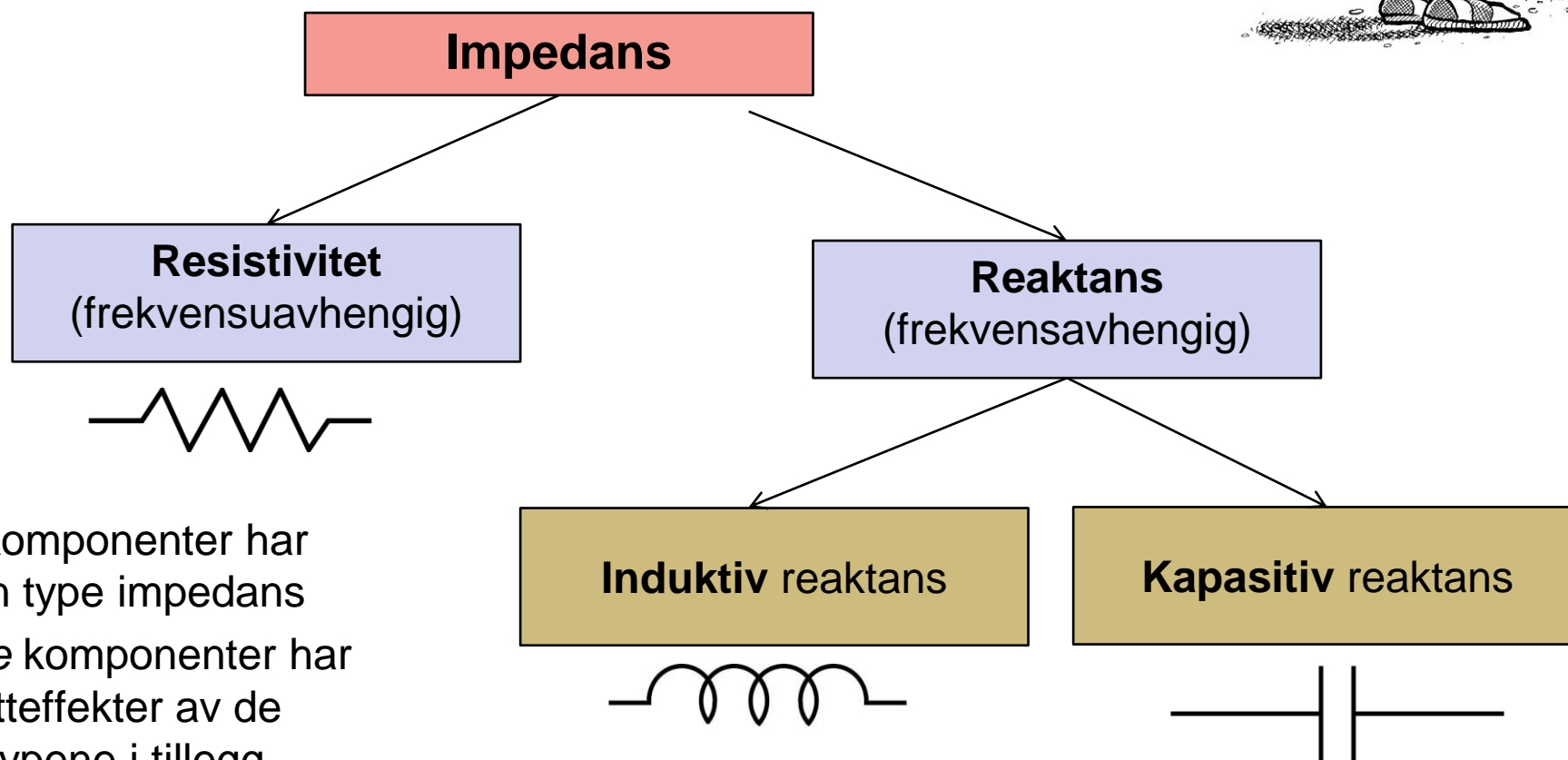


Dagens temaer

- Ulike typer impedans og konduktans
- Kondensatorer i serie og parallell
- Bruk av kondensator
- RC-kretser
 - Impedans og fasevinkler
 - Serielle RC-kretser
 - Parallelle RC-kretser
- Temaene hentes fra kapittel 9.5-9.7, 10.1-10.3

Impedans

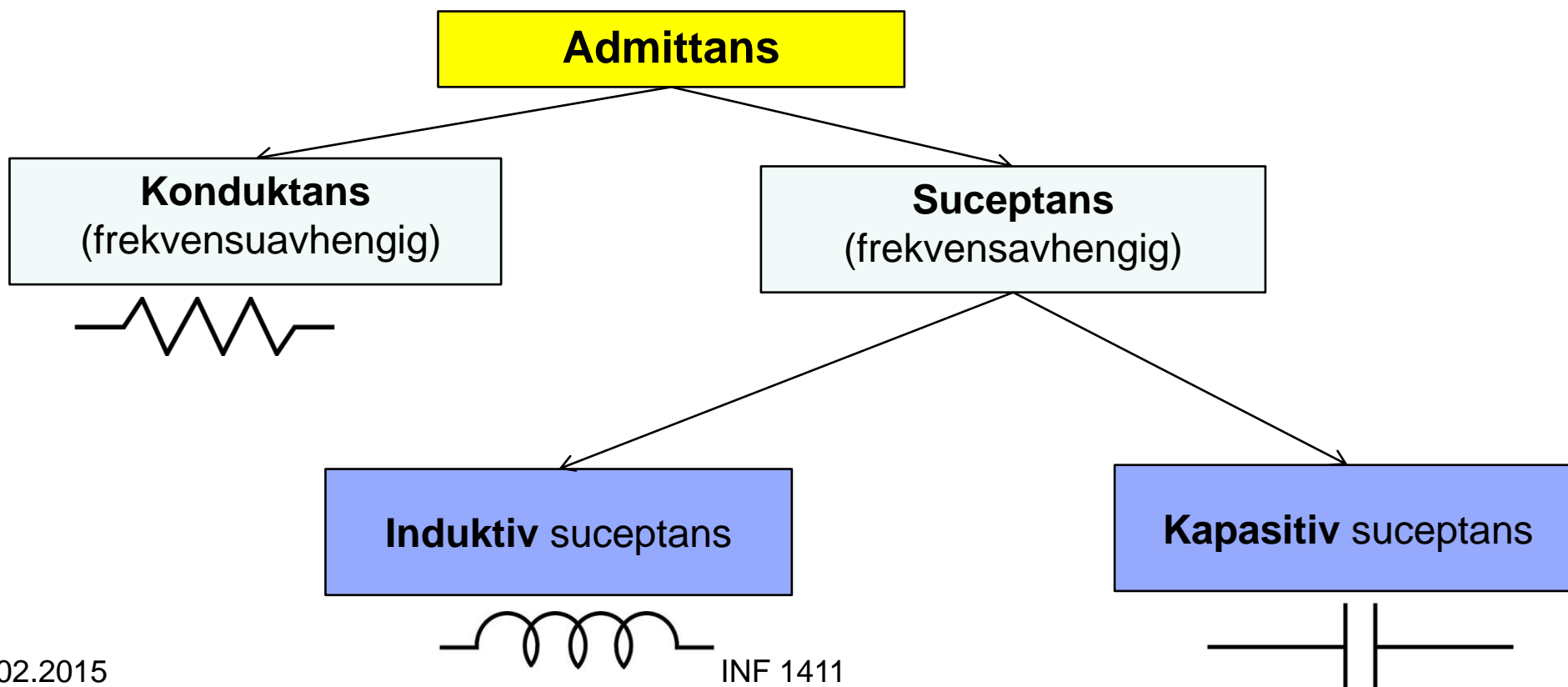
- Forholdet mellom spenning og strøm (V/I) er *impedans*



- Idelle* komponenter har bare én type impedans
- Fysiske* komponenter har parastitteffekter av de andre typene i tillegg

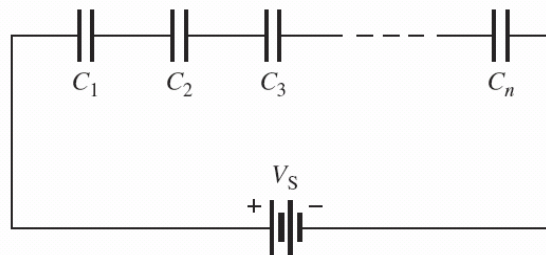
Admittans

- Forholdet mellom strøm og spenning (I/V) heter *admittans*, og er det inverse av impedans.



Kapasitans for seriekoblede kondensatorer

$$V=Q/C$$



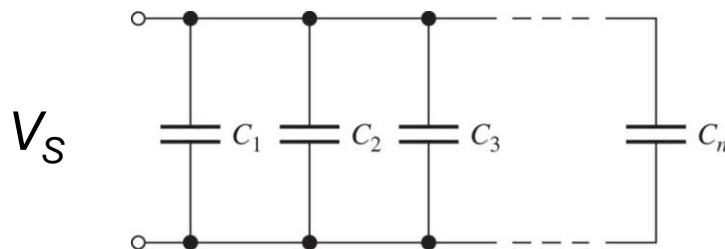
$$I = \frac{Q}{t}$$

- Hver kondensator lagrer samme ladning fordi strømmen mellom hvert element er den samme, dvs $Q_{Tot} = Q_{C1} = Q_{C2} = \dots = Q_{Cn}$
- KVL gir at $V_S = V_{C1} + V_{C2} + \dots + V_{Cn}$
- Dermed blir

$$\frac{Q}{C_{Tot}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} \Rightarrow \frac{1}{C_{Tot}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \Rightarrow C_{Tot} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}}$$

- Uttrykket tilsvarer resistorer i *parallel*

Kapasitans for parallellkoblede kondensatorer



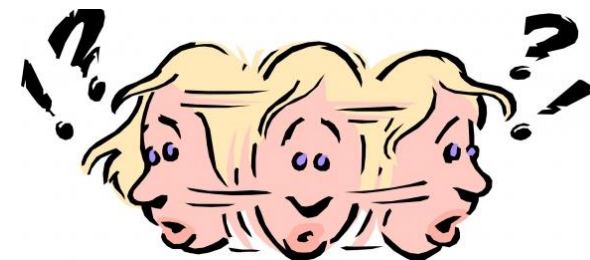
- Den totale ladningen er lik summen av ladningene over hver kondensator: $Q_{Tot} = Q_{C1} + Q_{C2} + \dots + Q_{Cn}$
- Siden $Q=CV$, blir $C_{Tot}V_S = C_1V_S + C_2V_S + \dots + C_nV_S \Rightarrow C_{Tot} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$
- Uttrykket tilsvarer resistorer i *serie*

Kapazitiv reaktans

- En kondensator har frekvensavhengig impedans mot strøm
- Impedansen heter *kapasitiv reaktans* X_c og er definert ved

$$X_c = \frac{1}{2\pi fC}$$

- Jo *større frekvens*, desto *mindre* reaktans
- Jo *større kapasitans*, desto *mindre* reaktans
-
- **NB:** I en ohmsk motstand er R et mål for resistivitet. Kapasitansen C angir derimot *ikke* kapasitiv reaktans



Kapasitiv reaktans seriell krets

- Den totale *kapasitansen* er mindre enn den minste enkeltkapasitansen for kondensatorer i serie
- Den totale *kapasitive reaktansen* til seriekoblede kondensatorer er større enn reaktansen til en enkeltkondensator i kretsen
- Den totale kapasitive reaktansen er summen av de individuelle reaktansene:
$$X_{c(tot)} = X_{C1} + X_{C2} + \dots + X_{Cn}$$
- Den totale *kapasitive reaktansen* er dermed tilsvarende som for den totale resistansen av seriekoblede ohmske motstander



Kapazitiv reaktans parallellkrets

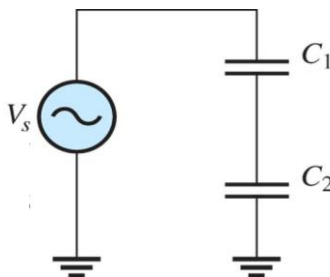
- Total kapasitans er større enn den største enkeltkapasitansen
- Den totale kapasitive reaktansen til parallellkoblede kondensatorer er mindre enn reaktansen til en enkeltkondensator i kretsen
- Det kan vises at den totale kapasitive reaktansen er lik

$$X_{c(tot)} = \frac{1}{\frac{1}{X_{C1}} + \frac{1}{X_{C2}} + \dots + \frac{1}{X_{Cn}}}$$

- Den totale *kapasitive reaktansen* er tilsvarende som for den totale resistansen av parallellkoblede resistorer

Kapazitiv spenningsdeler

- En *kapasitiv* spenningsdeler er en spenningsdeler konstruert med kondensatorer istedenfor ohmske motstander:

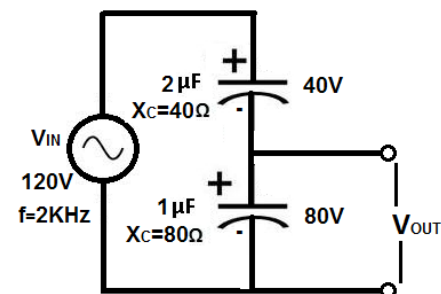
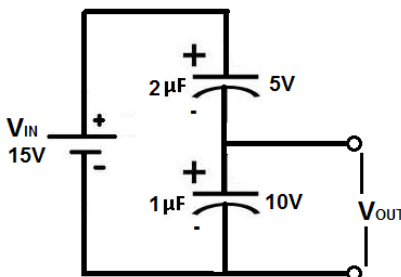
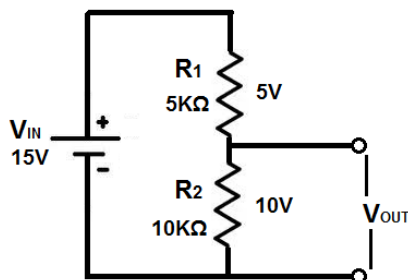


- Ved å bruke KVL kan man vise at spenningsdelingen er gitt av

$$V_x = \frac{X_{C_x}}{X_{C(tot)}} V_s$$

Kapasitiv vs resistiv spenningdeler

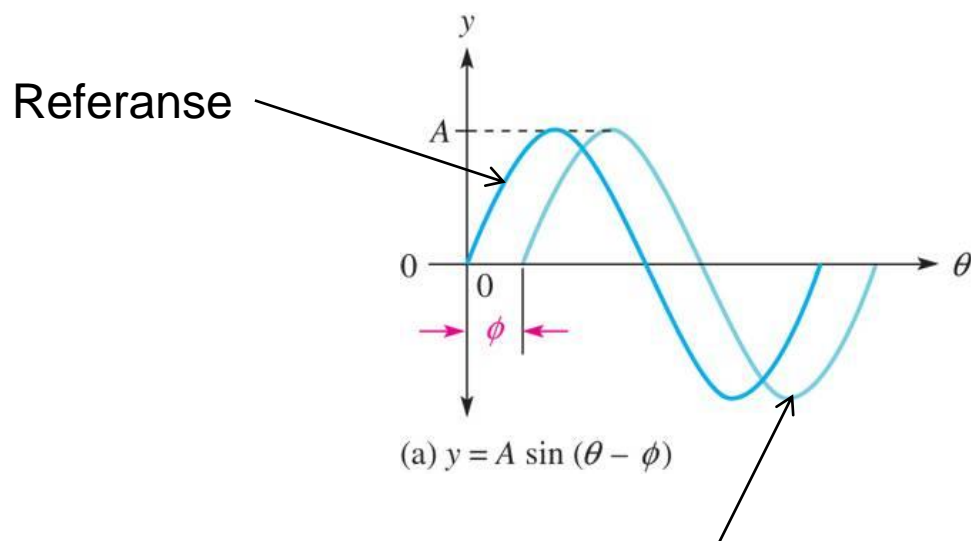
- Ideelt sett oppfører begge seg likt for dc og ac-spenninger



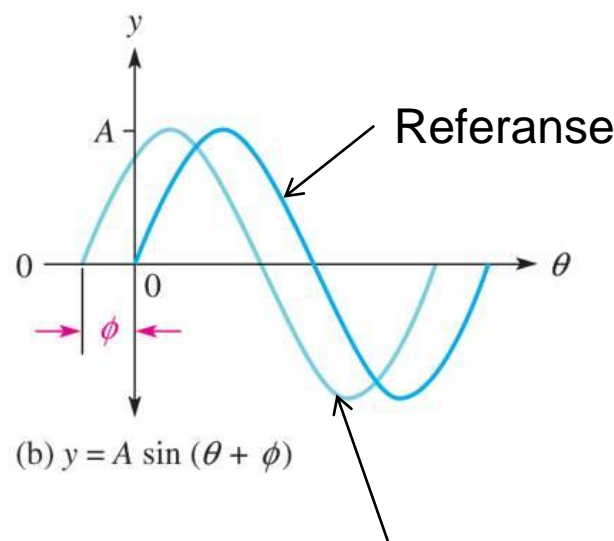
- Trekker strøm for både av og dc
- Samme strøm uavhengig av frekvens
- Samme lastmotstand for kilden for alle frekvenser
- Trekker ikke strøm for dc
- Trekker strøm for ac
- Strømmen er proporsjonal med frekvensen
- Høy lastmotstand for kilden ved lave frekvenser

Fasedreining

- Hvis et sinussignal forskyves i tid oppstår en *faseforskyvning* eller *fasedreining* φ



Kurven er forskjøvet til høyre, φ er *negativ* og *forsinket* (eng: "lags") i forhold til referansen

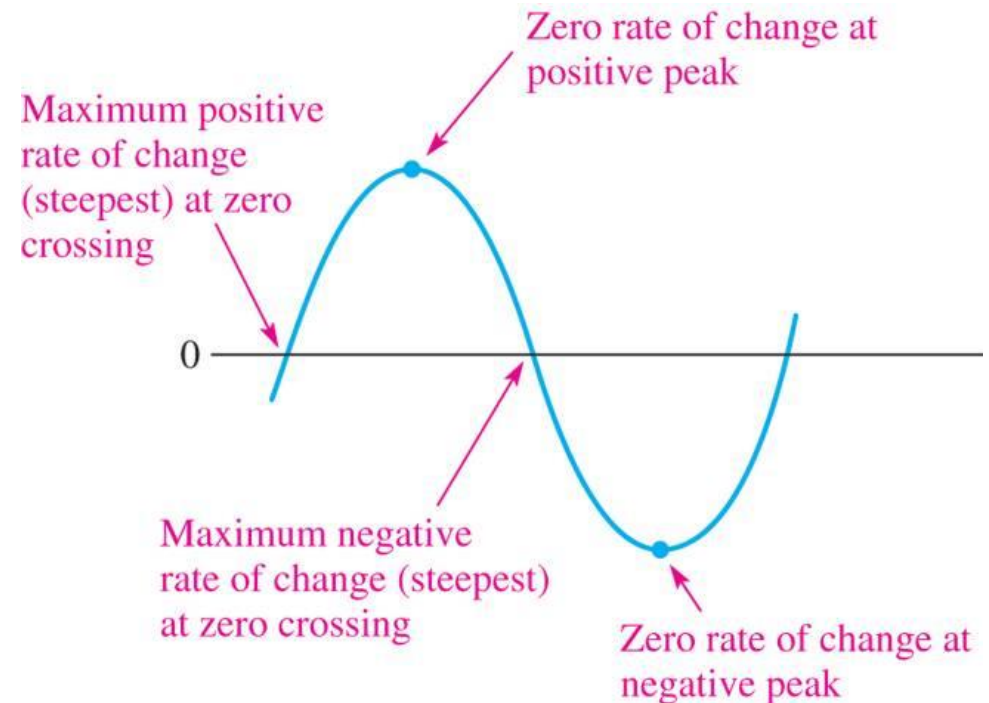


Kurven er forskjøvet til venstre, φ er *positiv* og *leder* (eng: "leads") i forhold til referansen

Faseforhold mellom strøm og spenning

- For en resistor er *strømmen gjennom og spenningen over* i fase, dvs $\varphi=0$
- For en kondensator er det fasedreining mellom strøm og spenning
- Fasedreiningen kan forstås ved å se på når *endringen* i en sinus-kurve er størst og minst

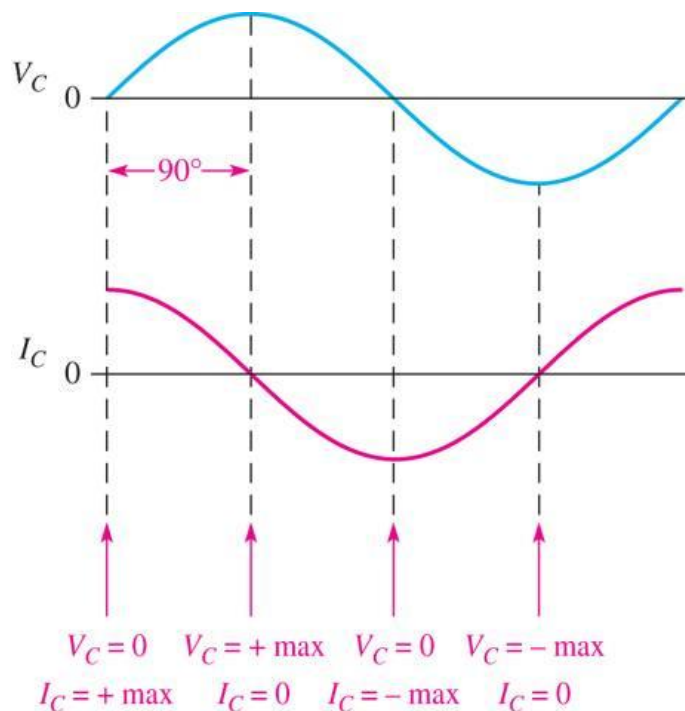
$$i = C \frac{dv}{dt}$$



Faseforhold mellom strøm og spenning (forts)

- Strømmen gjennom en kondensator er størst når *endringen* i spenningen over den er størst, og minst når *endringen* i spenningen er minst

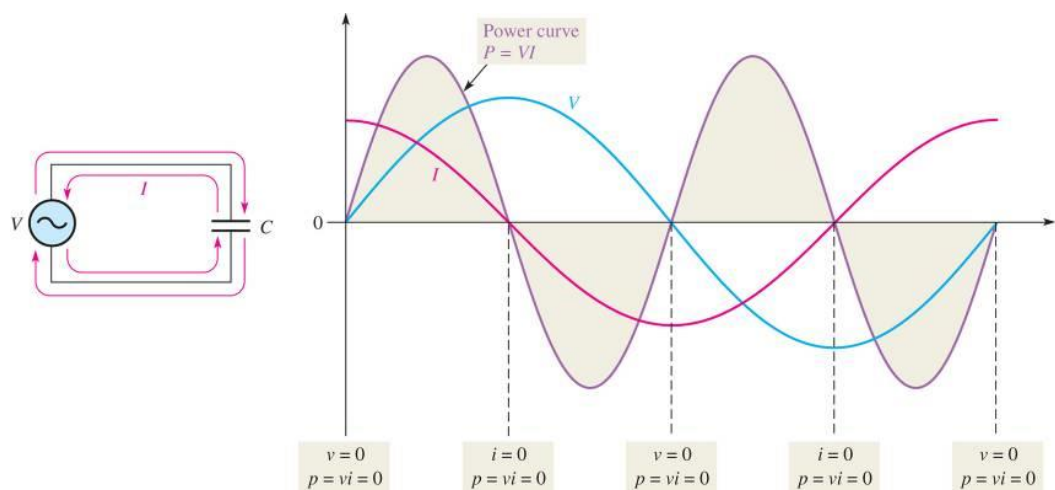
- Når spenningen er på det største (minste) er *endringen* lik 0, dvs strømmen lik 0
- Når spenningen er 0, er *endringen* størst, dvs strømmen er størst
- Strømmen er derfor faseforskøvet med +90 grader i forhold til spenningen



$$i = C \frac{dv}{dt}$$

Effekt i kondensatorer

- En ideel kondensator vil ikke forbruke energi, men kun lagre og deretter avgis energi
- Effekten som lagres når strøm og spenning har samme polaritet vil avgis når strøm og spenning har motsatt polaritet



Effekt i kondensatorer (forts)

- Tre typer effekt i kondensatorer:
 - **Umiddelbar** («instantaneous») effekt (P): Produktet av strøm og spenning på et bestemt tidspunkt
 - **Ekte** («true») effekt (P_{True}): Forholdet mellom lagret og avgitt effekt. For en idell kondensator er denne 0, for en ikke-ideel er den positiv
 - **Reaktiv** effekt (P_r): Raten som en kondensator lager eller avgir effekt med, beregnet utfra rms-verdiene for strøm og spenning:

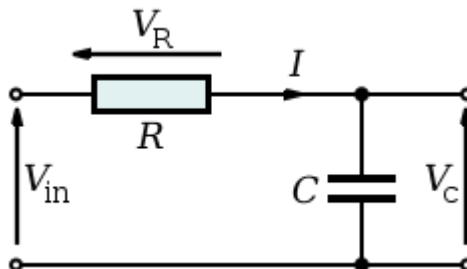
$$P_r = V_{rms} I_{rms}$$

$$P_r = \frac{V_{rms}^2}{X_C}$$

$$P_r = I_{rms}^2 X_C$$

RC-kretser

- RC-kretser består av resistorer og kondensatorer



- RC-kretser er enten serielle eller parallelle, dvs en resistor og en kondensator i serie eller i parallell
- Større og mer kompliserte kretser kan deles opp i mindre serielle og/eller parallelle kretser og analyseres separat
- Lettest å analysere oppførselen for sinussignaler, men bl.a i digitale kretser er oppførselen for pulssignaler viktigere

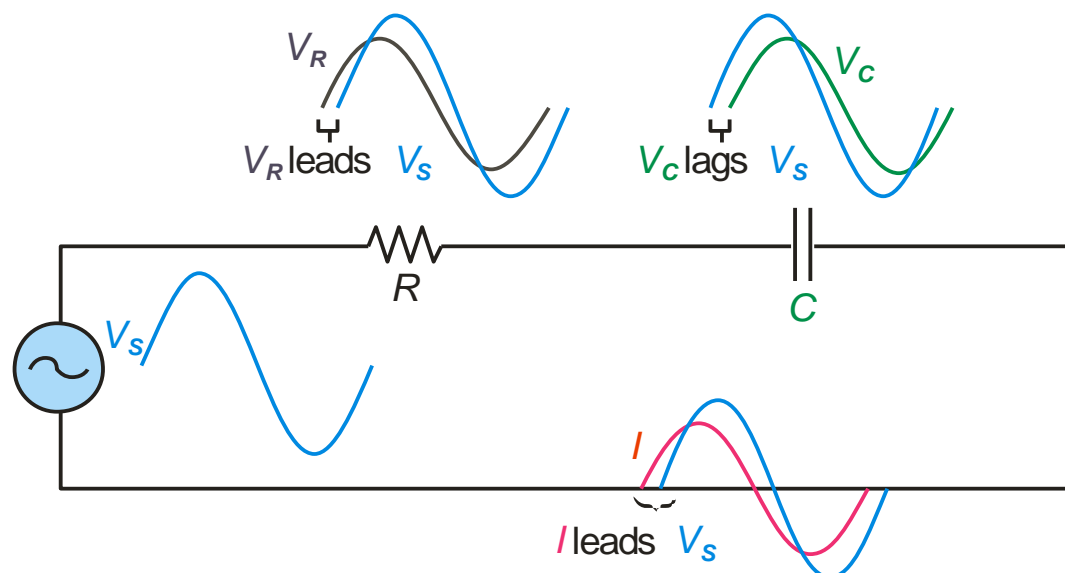
Serielle RC-kretser



- I en ren resistiv krets er strøm og spenning i fase, dvs $\varphi=0$
- I en seriell RC-krets vil det være faseforskyvning mellom
 - Spenningen over hvert element i forhold til de andre elementene
 - Spenningene over elementene i forhold til strømmen
- Strømmen gjennom alle elementene vil være i fase
- Avhengig av forholdet mellom *resistansen* og den *kapasitive reaktansen*, vil faseforskyvningen ligge mellom 0° og 90°

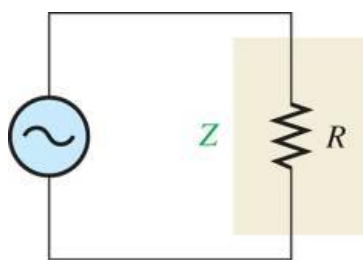
Serielle RC-kretser (forts)

- En seriell RC-krets består av minst én resistor og minst én kondensator
- Spenningen V_R over motstanden R er i fase med strømmen I , og leder over V_S , dvs $\varphi > 0$
- V_R og V_C har 90° fasedreining
- For å finne fasedreiningen mellom V_S og V_C eller mellom V_S og I må man beregne den totale impedansen i kretsen

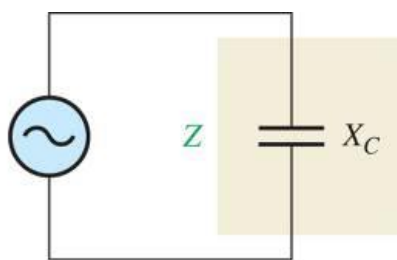


Total impedans i seriell RC-krets

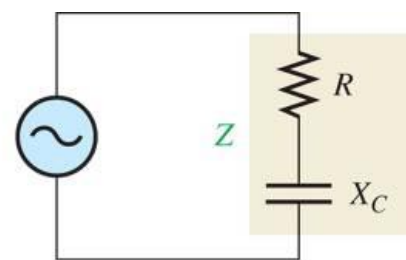
- Impedansen Z er den samlede motstanden mot vekselstrøm i en krets
- Impedansen har en frekvensuavhengig *resistiv* del R og en frekvensavhengig *reaktiv* del X_C



(a) $Z = R$



(b) $Z = X_C$

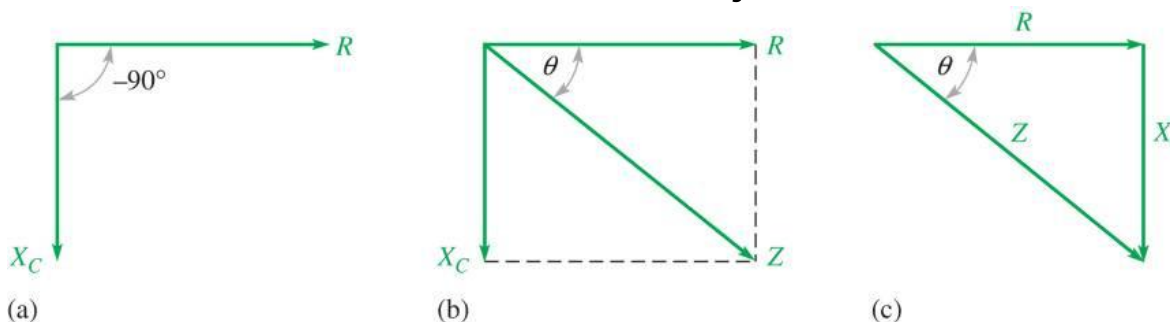


(c) Z includes both R and X_C

- Den resistive og reaktive delen har en fasedreining på -90° i forhold til hverandre

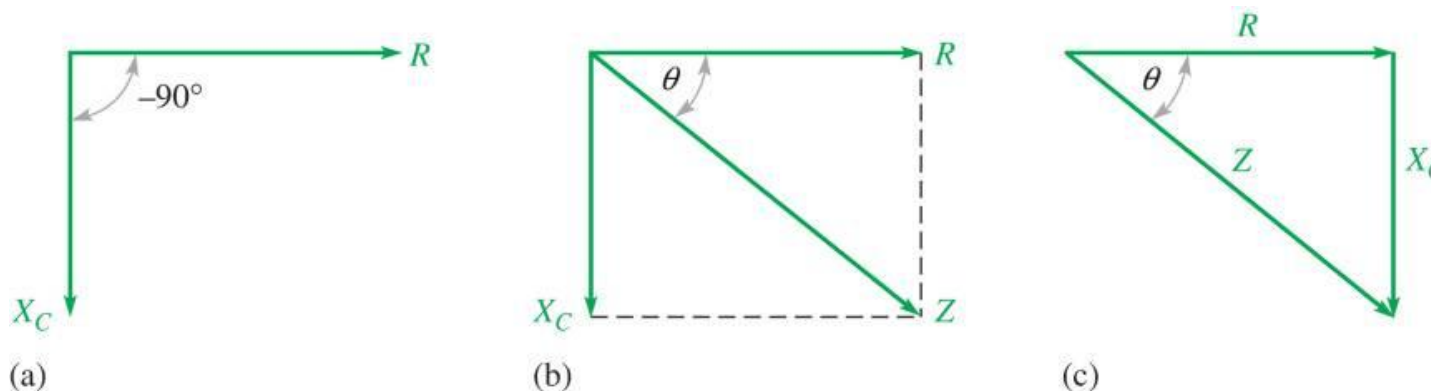
Total impedans i seriell RC-krets (forts)

- Den totale impedansen er gitt av $\mathbf{Z}=\mathbf{R}+\mathbf{X}_C$, merk fete bokstaver: \mathbf{R} og \mathbf{X}_C er vektorer («phasors»).
- \mathbf{Z} finner man ved vektorsummasjon



- Siden \mathbf{Z} er en vektor har den både en fasevinkel θ og en magnitude
- \mathbf{Z} har fortsatt Ohm (Ω) som enhet

Total impedans i seriell RC-krets (forts)



- Magnituden er lengden til **Z** og finnes ved Pythagoras:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

- Fasen θ finnes ved å beregne inverse tangens til vinkelen

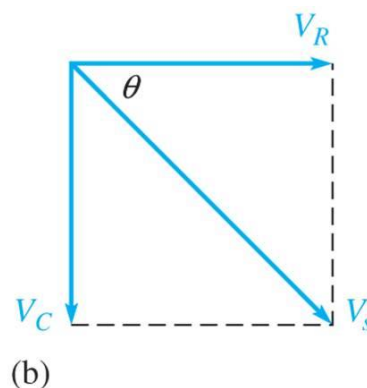
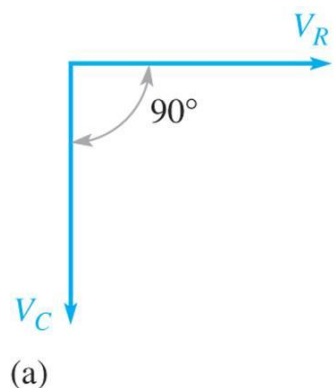
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{X_C}{R}\right)$$

Serielle kretser og Ohms lov, KVL og KCL

- Når strøm, spenning og impedans er på vektorform, vil fortsatt Ohms lov, KVL og KCL gjelde
- Når man beregner faktiske ampere-, volt- og Ohmverdier samt fasedreining gjelder disse kun for en bestemt frekvens
- Andre frekvenser gir andre \mathbf{Z} -, \mathbf{I} - og \mathbf{V} -verdier og fasedreining φ

Faseforskjell strøm - spenning

- I en seriell RC-krets er strømmen gjennom resistoren og kondensatoren den samme
- For å finne sammenhengen mellom V_S , V_R og V_C bruker man KVL og vektoraddisjon (samme som for å finne \mathbf{Z})

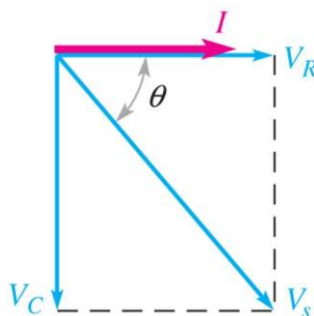


$$V_S = \sqrt{V_R^2 + V_C^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{V_C}{V_R}\right)$$

Faseforskjell strøm - spenning (forts)

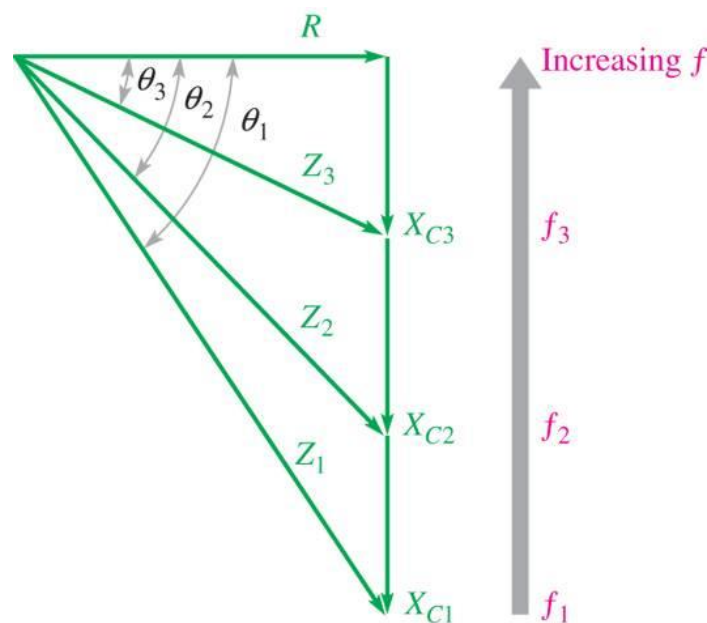
- Siden strømmen I og resistorspenning V_R er i fase, er fase-dreiningen mellom I og V_S lik den mellom V_R og V_S eller X_C og R



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{X_C}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{V_C}{V_R}\right)$$

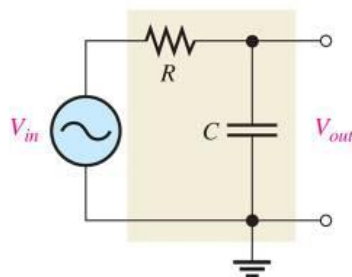
Impedans, fasedreining og frekvens

- Diagrammet under oppsummerer sammenhengen mellom impedans, frekvens og fasedreining

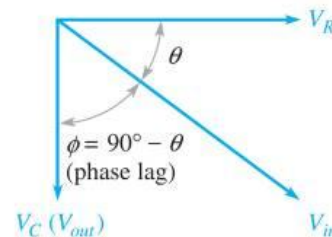


RC lead/lag kretser

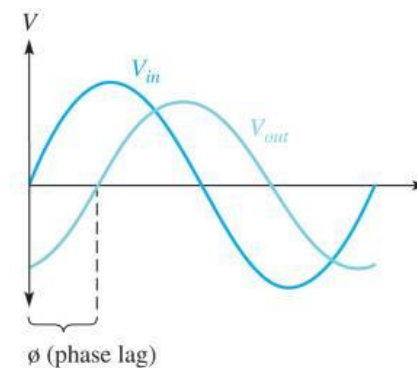
- RC «lead»- og RC «lag»-kretser er faseskiftkretser
- I en RC «lag»-krets er utspenningen V_{out} forskjøvet φ grader i forhold til V_{in}



(a) A basic RC lag circuit



(b) Phasor voltage diagram showing the phase lag between V_{in} and V_{out}



(c) Input and output voltage waveforms

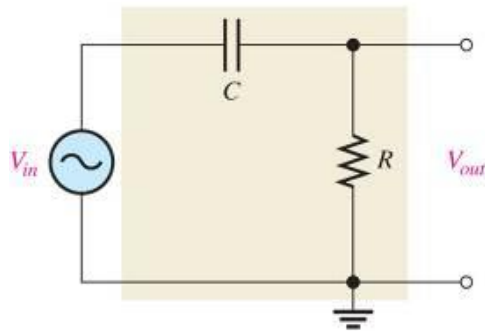
- V_{out} er lik V_C , V_{in} lik V_s og $\varphi = 90^\circ - \theta$
- Kretsen kan også ses på som en spenningsdeler hvor

$$\varphi = 90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{X_C}{R}\right)$$

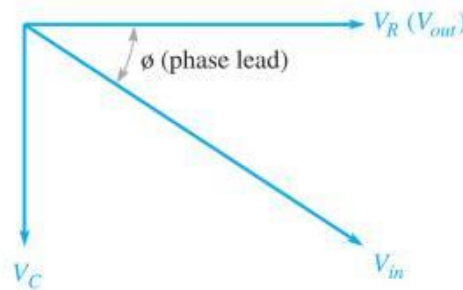
$$V_{out} = \left(\frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \right) V_{in}$$

RC lead/lag kretser (forts)

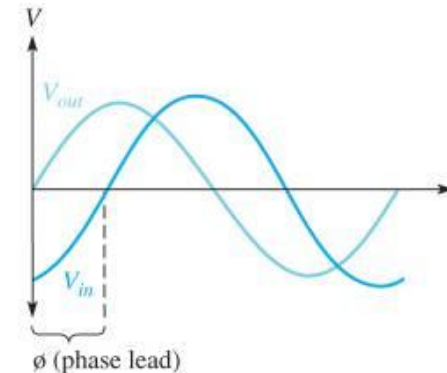
- Ved å bytte om R og C får man en RC-«lead»-krets



(a) A basic RC lead circuit



(b) Phasor voltage diagram showing the phase lead between V_{in} and V_{out}



(c) Input and output voltage waveforms

- Utspenningen tas over resistoren og ϕ og V_{out} er her gitt av R og X_C

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_C}{R}\right)$$

$$V_{out} = \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \right) V_{in}$$

Oppsummeringsspørsmål

- Spørsmål fra forelesningene 4 og 5

Spørsmål 1

For et periodisk ac-signal gjelder følgende:

- a) Snittverdien over en halv periode er forskjellig fra 0
- b) Snittverdien er alltid 0
- c) Bølgeformen gjentar seg etter tiden T
- d) Har ikke en dc-komponent

Spørsmål 2

Et balansert sinussignal er

- a) Alltid positivt
- b) Har fast frekvens
- c) Er sentrert rundt 0
- d) Absoluttverdien til den positive og negative amplituden er like

Spørsmål 3

En kondensator

- a) Kan lagre elektrisk strøm
- b) Har motstand mot elektrisk strøm som er avhengig av frekvensen
- c) Jo større frekvens desto større motstand
- d) Jo større frekvens desto større kapazitiv reaktans

Spørsmål 4

Tidskonstanten til en kondensator sier noe om

- a) Hvor lang tid det tar før den blokkerer for en dc-spenning
- b) Ved hvilken frekvens den begynner å lede en ac-strøm
- c) Ved hvilken frekvens den begynner å sperre en ac-strøm
- d) Hvor lang tid det tar å lade den opp/ut

Spørsmål 5

Hvis kapasitansen minker vil

- a) Reaktansen bli større
- b) Resistansen bli mindre
- c) Frekvensen øke
- d) Perioden bli mindre

Spørsmål 6

Strømmen gjennom en kondensator er

- a) Størst når spenningen er størst
- b) Størst når spenningen er minst
- c) Endringen i spenningen er størst
- d) Endringen i spenningen er minst

Spørsmål 7

Faseforskyvningen mellom strøm og spenning i en resistor er

- a) -90 grader
- b) 90 grader
- c) 180 grader
- d) 0 grader

Spørsmål 8

Faseforskyvningen mellom strøm og spenning i en kondensator er

- a) -90 grader
- b) 90 grader
- c) 180 grader
- d) 0 grader

Spørsmål 9

Susceptans er et uttrykk for

- a) Impedans i en kondensator
- b) Frekvensavhengig admittans
- c) Frekvensuavhengig admittans
- d) Ledningsevne i en resistor

Spørsmål 10

Hvis frekvensen nærmer seg uendelig, hva skjer med den totale impedansen i en RC-krets?

- a) Den blir lik 0
- b) Den blir uendelig stor
- c) Den blir rent resistiv
- d) Den blir rent kapazitiv

Spørsmål

- Hvilke to deler består impedansen i en seriell RC-krets av?
- Hva er enheten for impedans?
- Hva skjer med den kapasitive reaktansen når frekvensen øker?
- Hva skjer med fasedreiningen mellom strømmen gjennom og spenning over en kondensator når frekvensen øker?
- Hvis frekvensen nærmer seg uendelig, hva skjer med den totale impedansen i en RC-krets?
- Hva er en "lead"-krets?
- Hva er en "lag"-krets?

Spørsmål

- Hvilket egenskap uttrykker kapasitans?
- Hva er kapasitiv reaktans?
- Hva er impedans?
- Hvilke tre typer impedans finnes det?
- Hva er admittans?

Spørsmål (forts)

- Den totale kapasitansen for to seriekoblede kondensatorer er
 - a) Mindre enn den minste enkeltkapasitansen
 - b) Større enn den minste enkeltkapasitansen
- Den totale reaktansen for to parallellkoblede kondensatorer er
 - a) Mindre enn reaktansen til den minste enkeltreaktansen
 - b) Større enn reaktansen til den minste enkeltreaktansen

Spørsmål

- Hva er uttrykket for sammenhengen mellom strøm og spenning gjennom en kondensator uttrykt ved
 - Strøm, spenning og kapasitans
 - Spenning, kapasitans og ladning
- Hva vil faseforskyvning (fasedreining) si?
- Hvor stor er faseforskyvningen mellom strøm og spenning i en resistor?
- Hvor stor er faseforskyvningen mellom strøm og spenning i en kondensator?
- Hvor stor er spenningen over en kondensator når strømmen er på sitt største (eller minste)?

Spørsmål (forts)

- Hvor stor er strømmen gjennom en kondensator når spenningen er på sitt største (eller minste)?
- Hvor stor er fasedreiningen mellom strømmen gjennom kondensatoren og resistoren i en seriell RC-krets?
- Hvor stor er fasedreiningen mellom spenningen over kondensatoren og resistoren i en seriell RC-krets?
- Hva er sammenhengen mellom strømmen og spenningen i en rent resistiv krets?