

# Forelesning nr.3 INF 1411

## Elektroniske systemer

Parallelle og parallell-serielle kretser  
Kirchhoffs strømlov

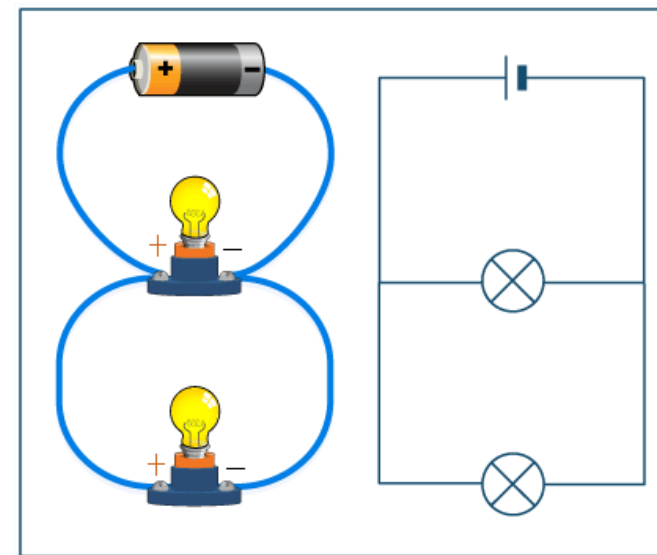
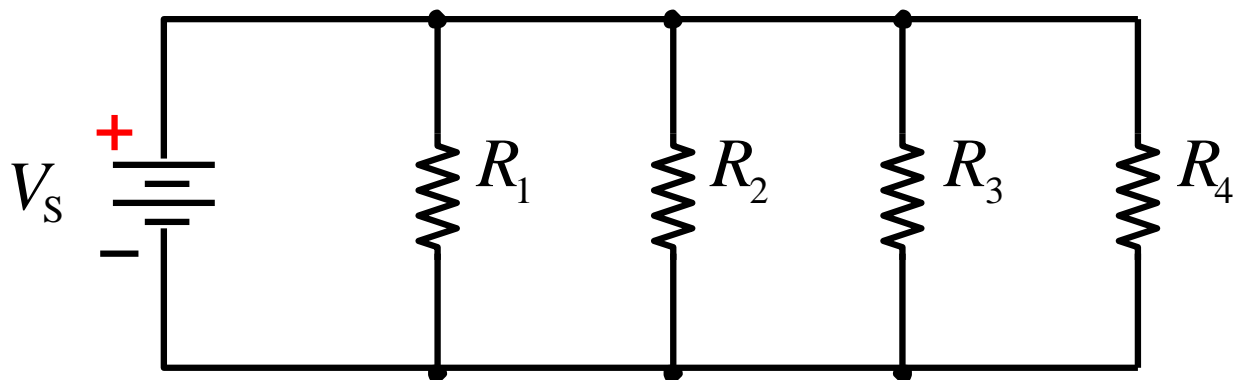


# Dagens temaer

- Parallelle kretser
- Kretser med parallelle og serielle stier
- Effekt i parallelle kretser
- Kirchhoffs strømlov
- Temaene hentes fra Kapittel 5.1-5.7 og 6.1-6.5

## Parallellkrets

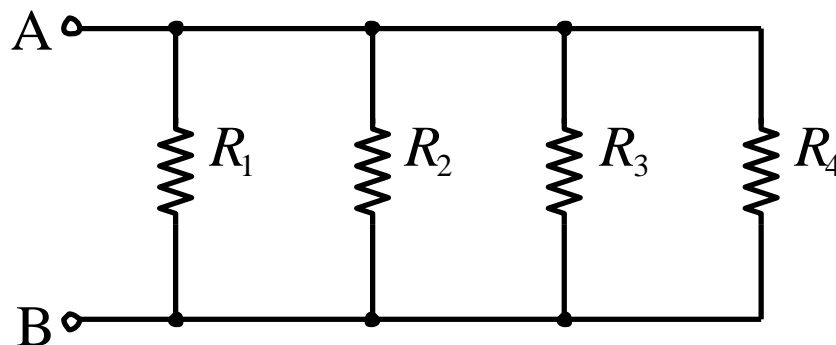
- En krets kalles *parallel* hvis den har mer enn én strømvei mellom terminalene på en spenningskilde



- Alle elementene har samme spenning over seg

## Resistorer i parallell

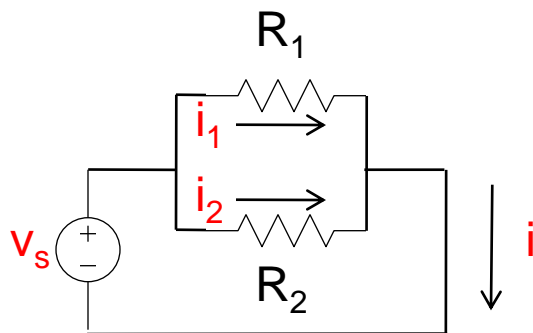
- Resistorer er koblet i *parallell* hvis endepunktene er koblet sammen i det samme nodeparet



- En krets kan også ha resistorer som *lokalt sett* er parallelle (eventuelt serielle)

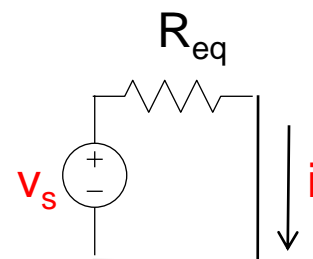
## Ekvivalent parallellmotstand

- Ønsker å finne samlet motstand  $R_{eq}$  uttrykt ved  $R_1$  og  $R_2$
- Hvis  $R_{eq}$  skal være lik  $R_1$  og  $R_2$  i parallell, må spenningen over  $R_{eq}$  være lik spenningen over  $R_1$  og  $R_2$



$$i = i_1 + i_2 \wedge i_1 = \frac{V_s}{R_1} \wedge i_2 = \frac{V_s}{R_2}$$

$$i = \frac{V_s}{R_1} + \frac{V_s}{R_2} = V_s \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$



$$i = \frac{V_s}{R_{eq}} = V_s \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

## Samlet resistans i en parallellkrets

- Den samlede *resistansen*  $R_T$  i en parallellkrets med  $n$  resistorer er lik summen av den *inverse* av resistansen til hvert enkelt element

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

- Konduktansen* til en parallellkrets er lik summen av konduktansen til enkeltelementene:

$$G_T = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

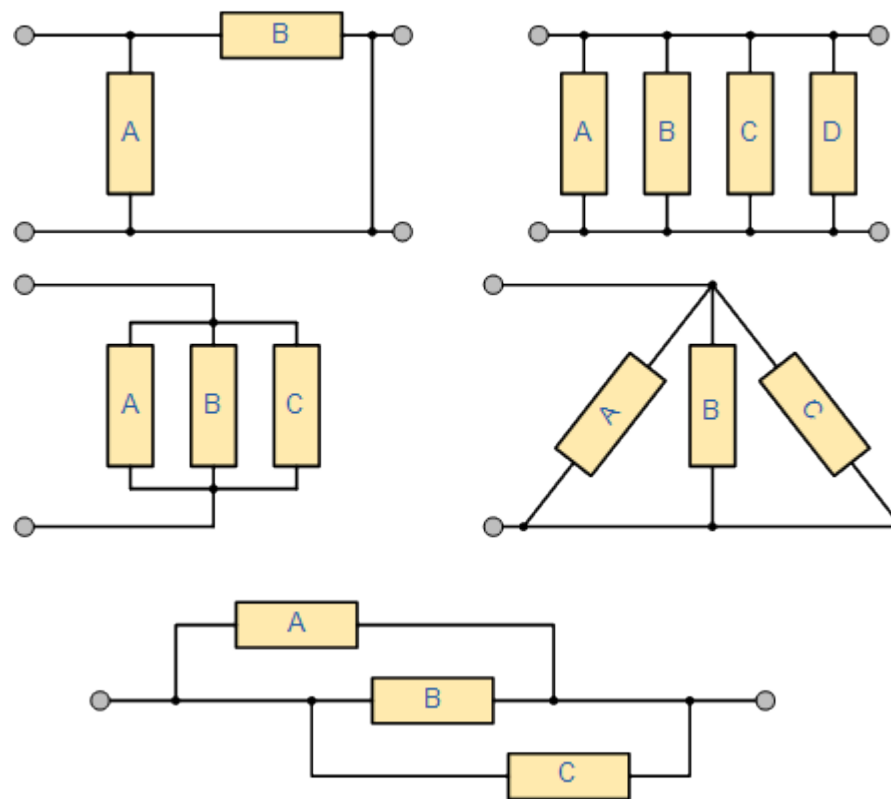
## Samlet resistans i en parallellkrets (forts)

- Hvis alle  $n$  resistorer har samme Ohm-verdi  $R$  blir den totale resistansen i en parallellkobling

$$R_T = \frac{R}{n}$$

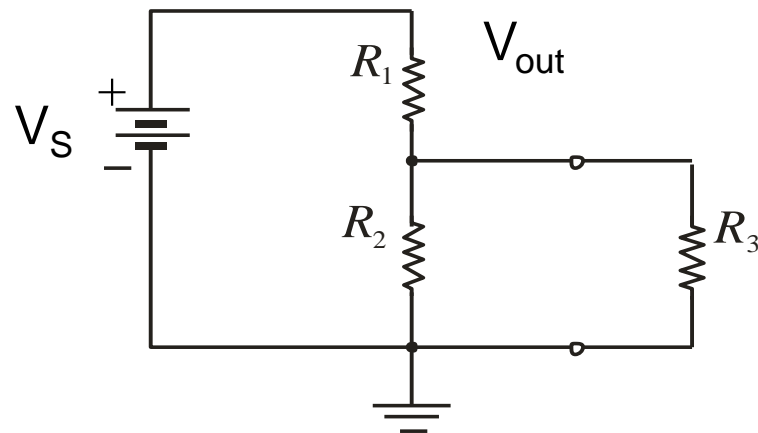
- Notasjonen for resistorer i parallell er

$$R_n || R_m$$



## Spenningsdeler med lastmotstand

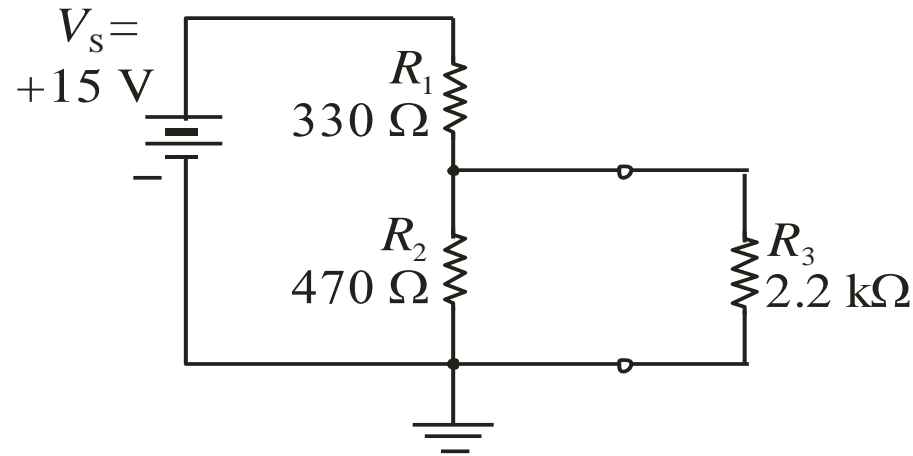
- Hvis en spenningsdeler brukes som forsyningsspenning til f.eks en resistor, vil spenningen synke



- Spenningen  $V_{out}$  er nå  $V_{out} = \frac{R_2 || R_3}{R_1 + R_2 || R_3} V_S$
- Siden  $R_2 || R_3 < R_2$ , så synker  $V_{out}$



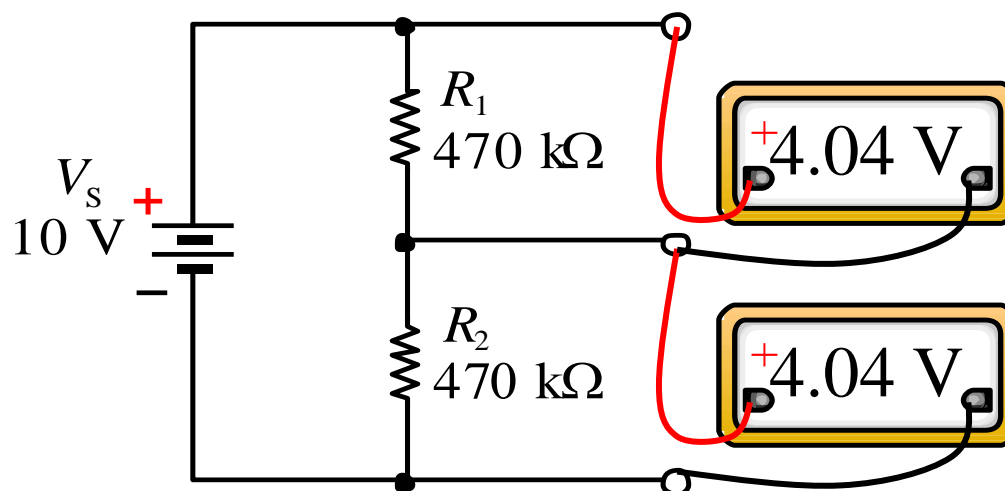
## Eksempel



- **Uten  $R_3$**  er  $V_{out} = V_s \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 15\text{v} \frac{470}{330 + 470} \Omega = 8,81\text{v}$
- **Med  $R_3$**  er  $V_{out} = V_s \frac{R_2 || R_3}{R_1 + R_2 || R_3} = 15\text{v} \frac{470 || 2200}{330 + 470 || 2200} \Omega = 15\text{v} \frac{387}{330 + 387} \Omega = 8,10\text{v}$

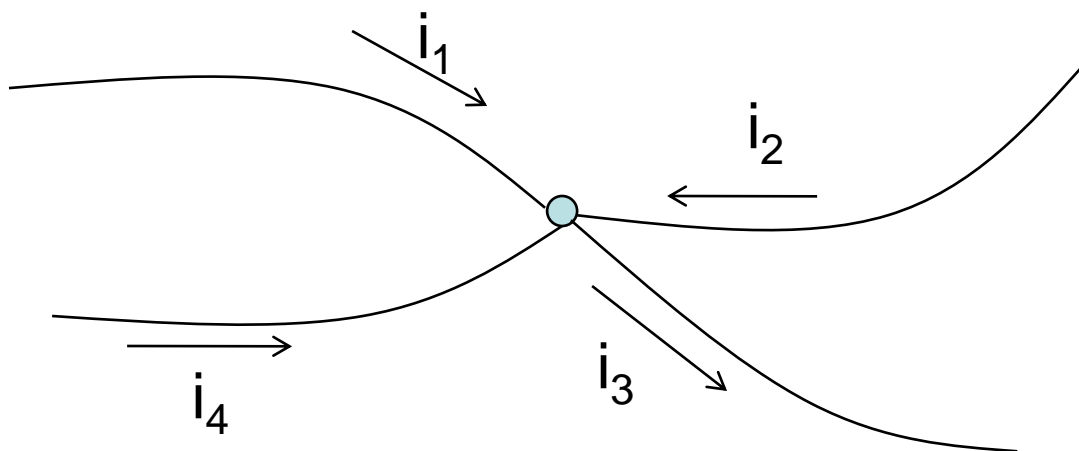
## Påvirkning av spenningmåling

- Et voltmeter kobles i parallell med elementet som det skal måles spenning over, vil introdusere en parallellmotstand
- Her måles spenningen med **ett** voltmeter enten over  $R_1$  eller over  $R_2$
- Hva skjer hvis det brukes **to** voltmetre samtidig?



## Kirchhoffs strømlov (KCL)

- ”Den algebraiske summen av alle strømmene som går inn mot (eller ut av) en node, er lik 0”
  - Strøm kan verken oppstå, lagres eller forsvinne i en node.



$$i_1 + i_2 + (-i_3) + i_4 = 0$$

$$(-i_1) + (-i_2) + i_3 + (-i_4) = 0$$

## Kirchhoffs strømlov (KCL) forts.

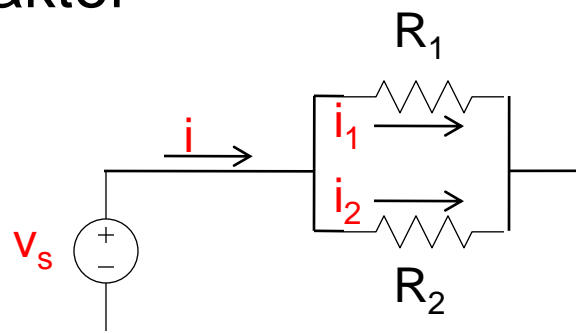
- Det generelle tilfellet er gitt av

$$\sum_{n=1}^N i_n = 0$$

- Forutsetningen er at alle pilene ENTEN peker inn mot noden ELLER ut av noden.
- Hvis noen peker inn og andre ut, velger man retning, og multipliserer strømmene som avviker med -1

# Strømdivisjon

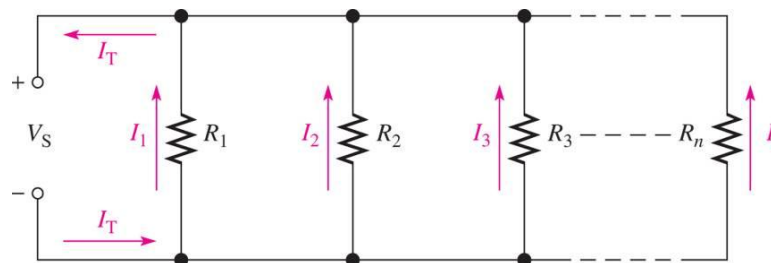
- Ofte ønsker man å kunne skalere (dividere) en strøm med en konstant faktor



$$i_1 = \frac{v_s}{R_1} = \frac{i(R_1 \parallel R_2)}{R_1} \Rightarrow i_1 = i \frac{R_1 R_2}{R_1(R_1 + R_2)} = i \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$
$$i_2 = \frac{v_s}{R_2} = \frac{i(R_1 \parallel R_2)}{R_2} \Rightarrow i_2 = i \frac{R_1 R_2}{R_2(R_1 + R_2)} = i \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

## Strømdivisjon (forts)

- Uttrykket for strømdivisjon kan generaliseres til å gjelde  $n$  parallellkoblede grener



- Strømmen  $I_x$  gjennom én gren er gitt av

$$V_S = I_x R_x \Rightarrow I_x = \frac{V_S}{R_x}$$

- Samtidig er  $V_S$  gitt av den totale strømmen  $I_T$  ganget med den totale resistansen  $R_T$

$$I_x = \frac{V_S}{R_x} = \frac{I_T R_T}{R_x} = \left( \frac{R_T}{R_x} \right) I_T$$

## Effekt i parallellkretser

- Den totale effekten  $P_T$  for  $n$  resistorer i parallell er gitt av

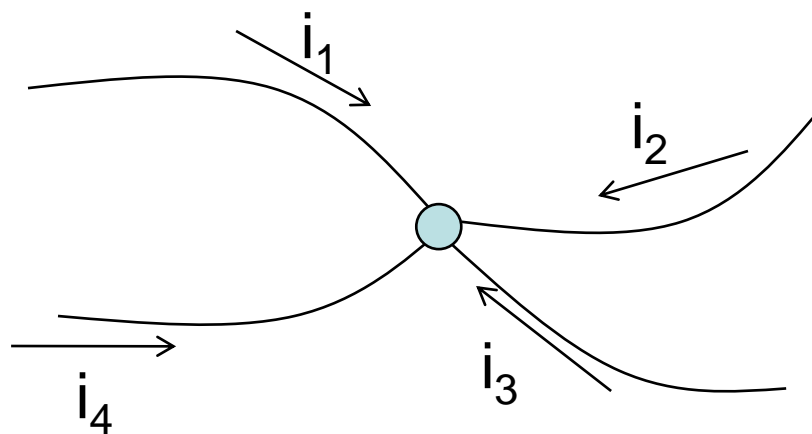
$$P_T = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

- Uttrykt ved strøm, spenning og resistans kan effekten videre skrives som

$$P_T = V_S I_T = I_T^2 R_T = \frac{V_S^2}{R_T}$$

## Spørsmål

- Finn verdien til  $i_1$  når  $i_2=2A$ ,  $i_3=-3A$  og  $i_4=0,5A$

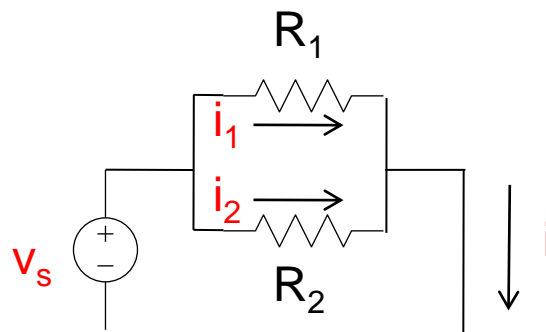


- Hvis strømretningene som vist på bildet er korrekte, hvilke verdier har da  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  og  $i_4$ ?



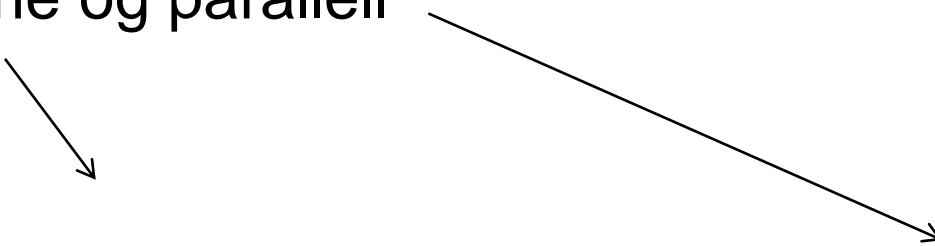
## Spørsmål

- Finn  $V_s$  når  $R_1 = 5\ \Omega$ ,  $R_2 = 5\ \Omega$  og  $i = 2\text{A}$
- Finn  $R_1$  når  $R_2 = 5\ \Omega$ ,  $V_s = 5\text{V}$  og  $i = 4\text{A}$
- Finn  $i_2$  når  $R_1 = 10\ \Omega$ ,  $V_s = 4\text{V}$  og  $i = 2\text{A}$



## Seriell-parallellkretser

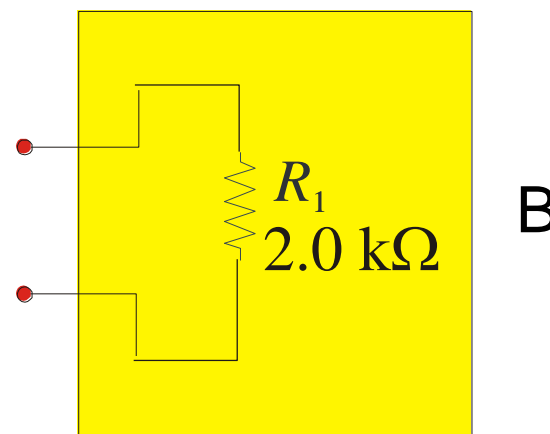
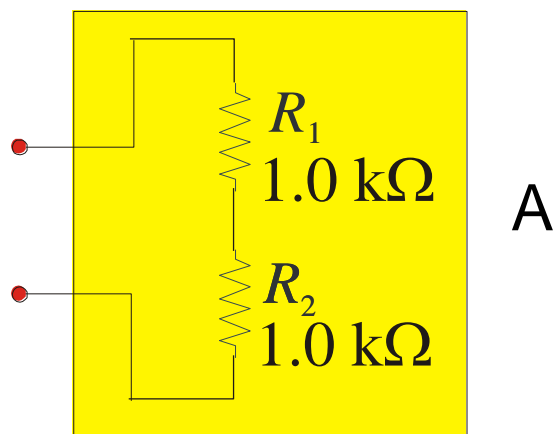
- De fleste kretser er en blanding av serie- og parallell-koblede elementer
- Man ønsker som regel å bruke færrest mulig komponenter
- For å forenkle må man identifisere hvilke elementer som er i serie og i parallell, og benytte formlene for resistorer i hhv serie og parallell


$$R_S = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

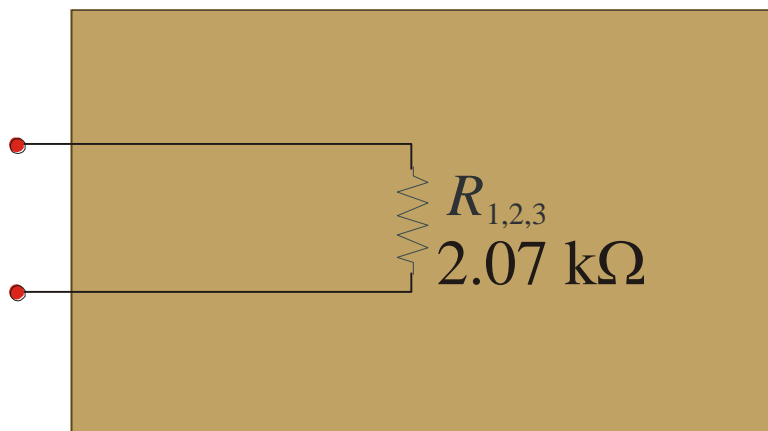
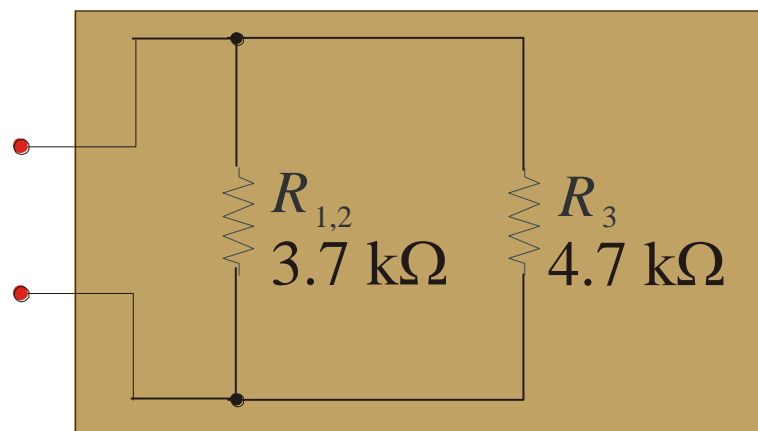
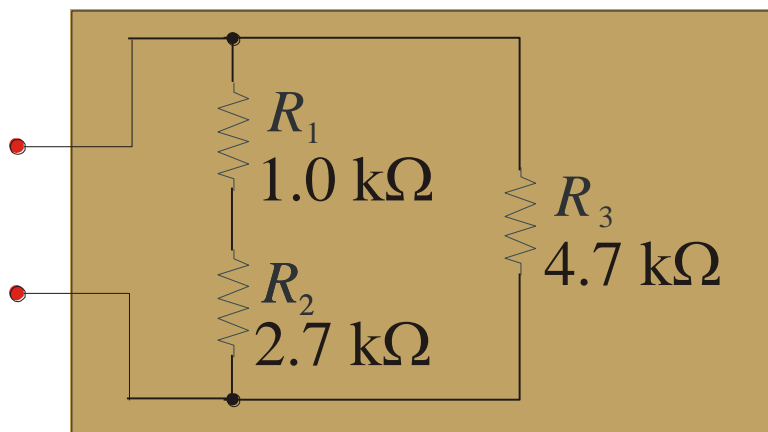
$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

## Seriell-parallellkretser (forts)

- Kretser kalles *ekvivalente* hvis de har de samme elektriske egenskapene mellom et nodepar
- Sett fra «utsiden» har krets A og B de samme elektrisk egenskapene (i dette tilfellet samme resistans)



## Seriell-parallellkretser (forts)



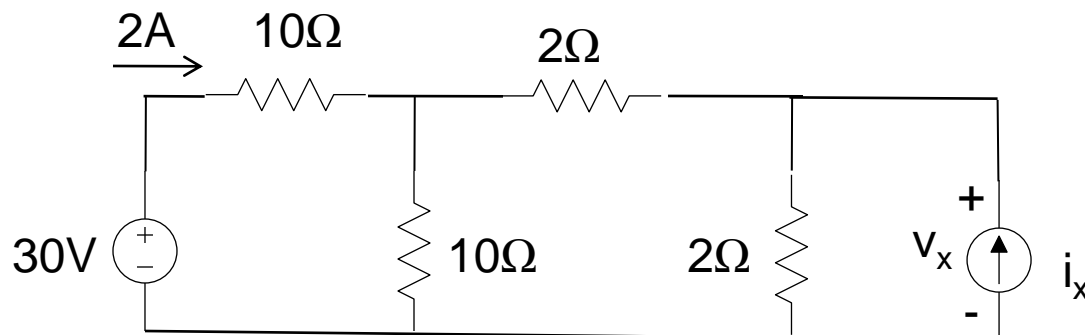
- Målt mellom de røde terminalene er det ikke mulig å avgjøre hva som er forskjellen mellom disse kretsene

## Analyse av seriell-parallelle kretser

- Ved analyse og design må man ofte finne strømmer og spenninger i noder og grener av en krets, og gjennom seriell- og parallellkoblede elementer
- Ukjente strømmer og spenninger kan være avhengige av andre strømmer og spenninger i kretsen
- Ved å bruke KVL, KCL og Ohms lov kan man i mange tilfeller finne de ukjente strømmene og spenningene

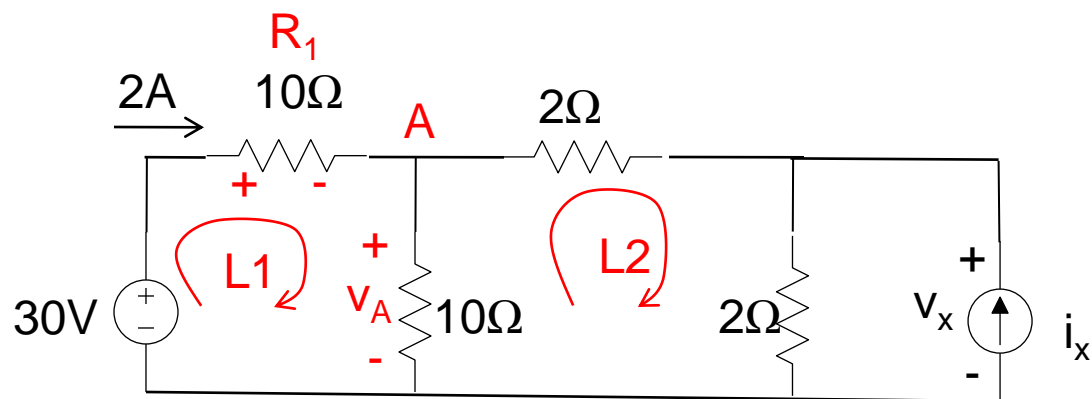
## Eksempel

- Finn spenningen  $v_x$  i kretsen under



- Forberedelse:* Sett navn på "relevante" noder, løkker, strømmer, spenninger og elementer (iterativ prosess)

## Eksempel forts



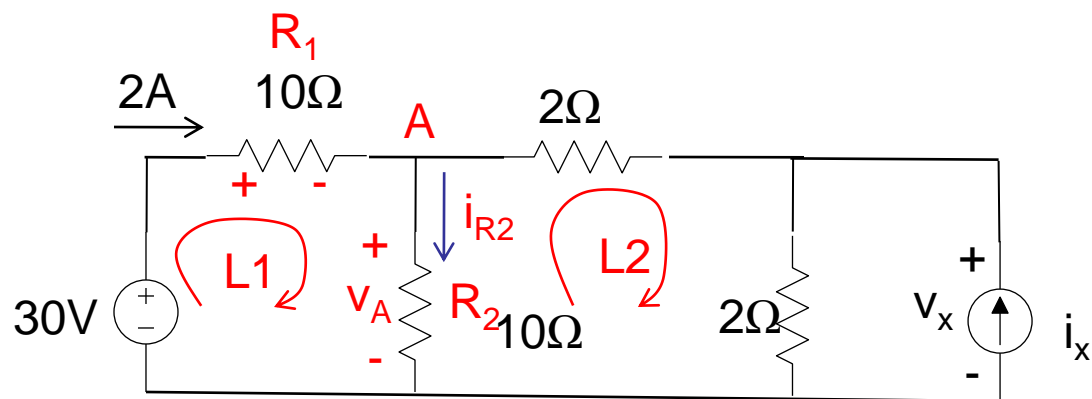
- *Steg 1:* Finn  $v_A$  ved å bruke KVL på løkke L1:

$$-30v + v_{R1} + v_A = 0 \Rightarrow$$

$$-30v + 10\Omega \times 2A + v_A = 0 \Rightarrow$$

$$v_A = 10v$$

## Eksempel forts

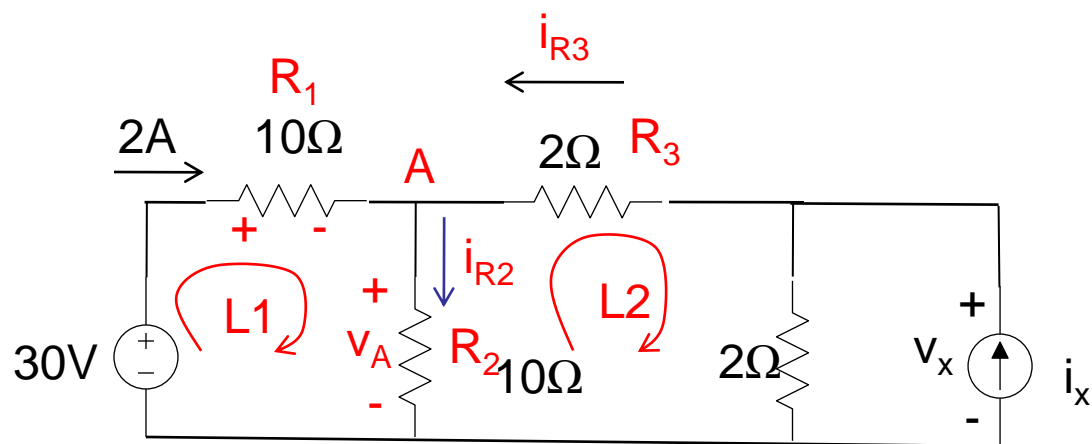


- *Steg 3:* Finn  $i_{R2}$  ved å bruke Ohms lov:

$$i_{R2} = \frac{10v}{10\Omega} = 1A$$



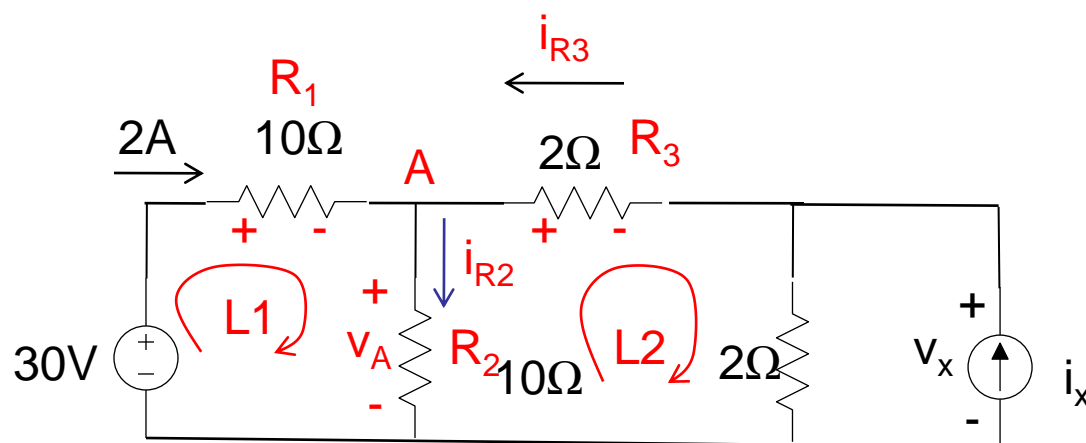
## Eksempel forts



- *Steg 4:* Bruk KCL mot node A

$$2A + i_{R3} = i_{R2} \Rightarrow i_{R3} = 1A - 2A = -1A$$

## Eksempel forts



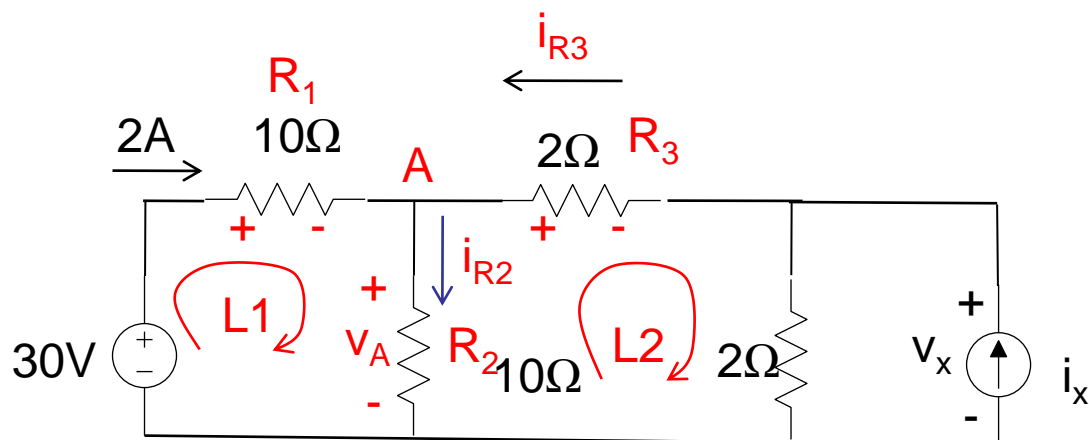
- *Steg 5:* Bruk KVL på løkke L2

$$-v_A + v_{R3} + v_x = 0$$

- Bruker Ohms lov for å finne  $V_{R3}$  som da gir  

$$-10v + 2\Omega \times 1A + v_x = 0 \Rightarrow v_x = 8v$$

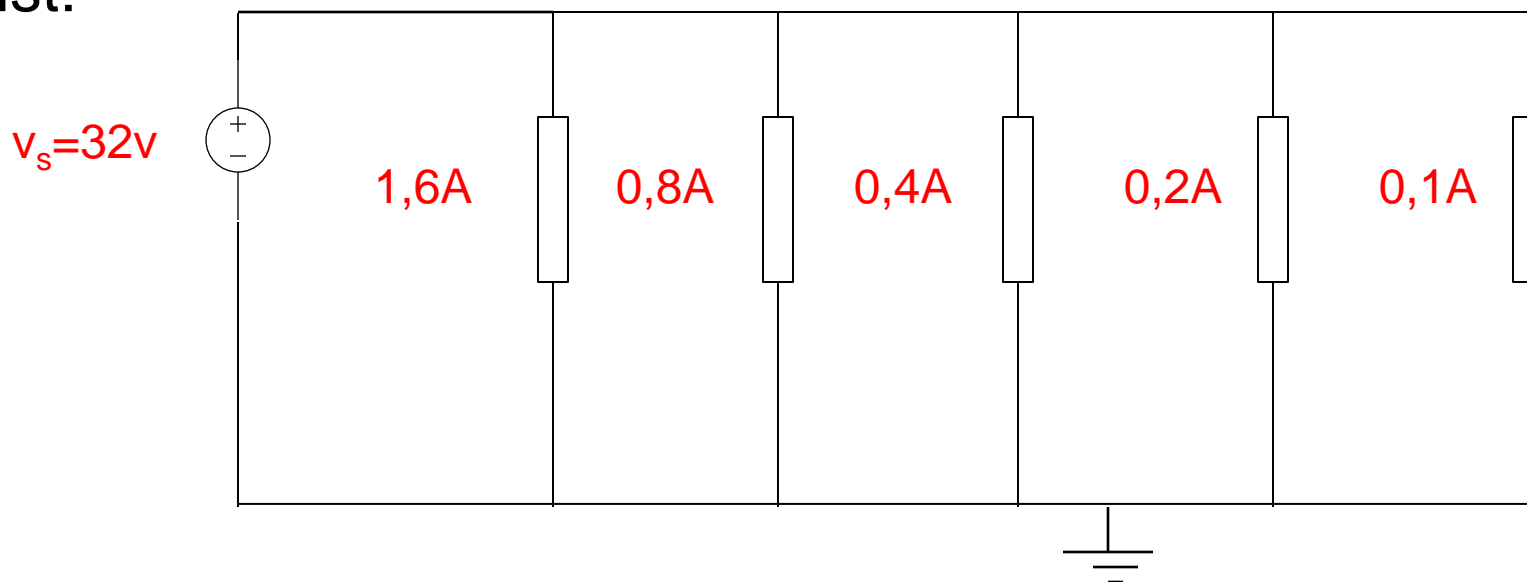
## Eksempel forts



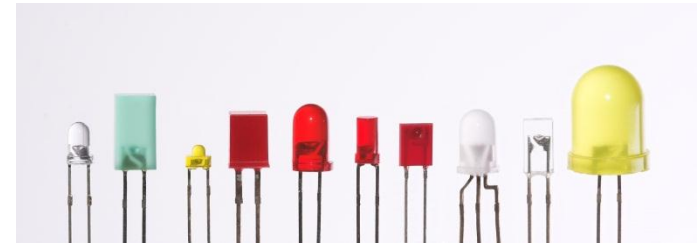
- Vi fant den ukjente spenningen ved bruk av KVL, KCL og Ohms lov
- Det finnes mer systematiske metoder (node og mesh-analyse, superposisjon)
- For større kretser brukes simuleringsverktøy, f.eks LtSPICE

## Nøtt til neste gang

- Gitt en krets som skal brukes til å lage 5 ulike strømmer slik vist:



- Hvis du bare har én motstandsstørrelse tilgjengelig, hvor stor må denne være for at du skal klare deg med så få motstander som mulig?



# Oppsummeringsspørsmål

Spørsmål fra forelesningene 2 og 3



# Spørsmål 1

## Om effekt

- a) Effekt kan være både positiv og negativ
- b) Effekt kan bare være positiv
- c) Effekt kan bare være negativ
- d) Effekt angis uten fortegn

## Spørsmål 2

Energitap pga resistans gjør at energien til elektronene går over til

- a) Varme
- b) Lys
- c) Overføringstap
- d) Alle fenomenene over

## Spørsmål 3

En seriell krets kjennetegnes ved at

- a) Den har kun én kilde
- b) Den har kun ett element
- c) Bare én felles løkke som strømmen går igjennom
- d) Minst en felles løkke som strømmen går igjennom



## Spørsmål 4

Den totale motstanden i en resistiv seriell krets finnes ved å

- a) Multiplisere resistansene til hver enkelt resistor
- b) Addere resistansene til hver enkelt resistor
- c) Addere resistansene til hver enkelt resistor og kilden(e)
- d) Multiplisere resistansene til hver enkelt resistor og spenningskilden

## Spørsmål 5

Ved å koble sammen flere spenningskilder i serie får man

- a) Økt spenning
- b) Økt konduktans
- c) Økt strøm
- d) Redusert resistans

## Spørsmål 6

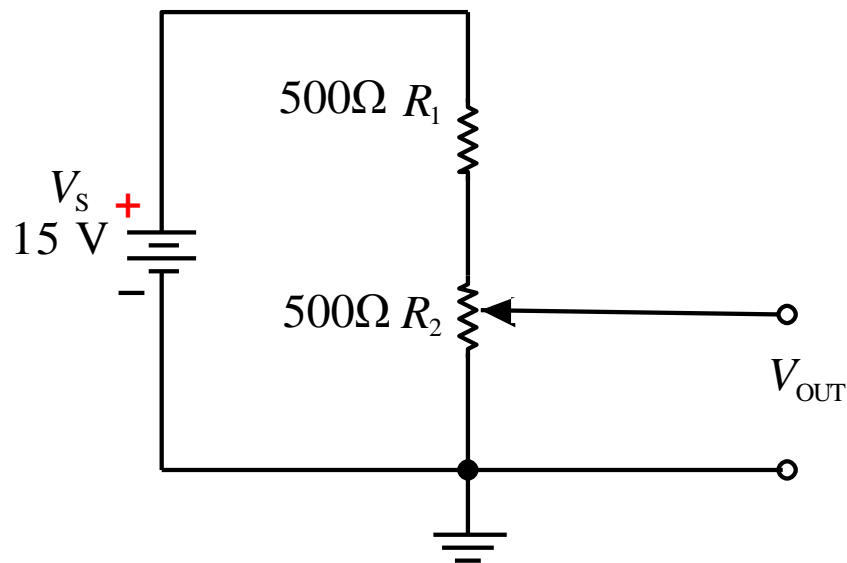
En parallellkrets kjennetegnes ved at

- a) Den har kun en strømkilde
- b) Det finnes kun en strømvei mellom terminalene på spenningskilden
- c) Alle elementene har samme spenning over terminalene
- d) Den har kun én spenningskilde

## Spørsmål 7

Hva er den minste og største verdien  $V_{out}$  kan ha?

- a) Minste verdi=0v, største=12.5v
- b) Minste verdi=0v, største=7.5v
- c) Minste verdi=5v, største=7.5v
- d) Minste verdi=2.5v, største=15v



## Spørsmål 8

For parallellkoblede resistanser er

- a) den totale konduktansen lik summen av enkeltkonduktansene
- b) den totale resistansen lik summen av enkeltresistansene
- c) den totale resistansen større enn den minste enkeltresistansen
- d) den totale resistansen større enn den største enkeltresistansen

## Spørsmål 9

Kirchhoffs strømlov sier at

- a) Summen av strømmene rundt en lukket sti er 0
- b) Den algebraiske summen av strømmene inn mot en node er 0
- c) Den algebraiske summen av spenningene i en node er 0
- d) Summen av resistansene til elementer i en lukket sti er 0

## Spørsmål 10

To kretser er ekvivalente hvis

- a) De inneholder samme antall elementer
- b) Samme antallet strøm- og spenningskilder
- c) Oppbyggingen internt i de to kretsene er identiske
- d) De elektriske egenskapene mellom et nodepar er identiske