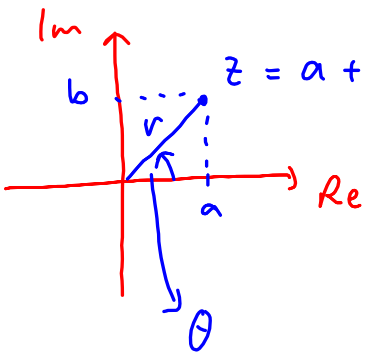
Komplekse tall



$$z = a + ib = re^{i\theta} \quad , \quad \bar{z} = a - ib$$

Vanlige regneregler, med

$$i^2 = -1$$

Divisjonstriks: $$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}}$$

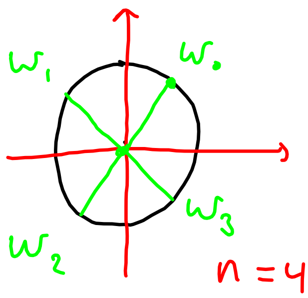
$$re^{i\theta} \cdot se^{iw} = rs\, e^{i\theta + iw} = rs\, e^{i(\theta + w)}$$

n-te røtter $\quad z = re^{i\theta}$ der $\theta \in [0, 2\pi)$

$$w_0 = \left(re^{i\theta}\right)^{1/n} = r^{1/n}\left(e^{i\theta}\right)^{1/n} = r^{1/n} e^{i(\theta/n)}$$

$$w_+ = e^{i(2\pi/n)}$$

$$w_1 = w_+ w_0 \quad \text{osv.}$$



Algebraens fundamentalteorem

$$P(z) = c_n z^n + \cdots + c_1 z + c_0$$

har kompleks faktoriserg

$$P(z) = c_n (z - r_1) \cdots (z - r_n)$$

Reell faktorisering for reelle polynomer $P(z)$ finnes ved å gange sammen faktorer som tilsvarer konjugerte røtter.

eks. $(z - i)(z + i)(z - 1) = (z^2 + 1)(z - 1)$

$$= z^3 - z^2 + z - 1 = P(z)$$

Røtter for $P(z)$: $z = i$, $z = -i$, $z = 1$

Komp. faktorisering: $P(z) = (z - i)(z + i)(z - 1)$

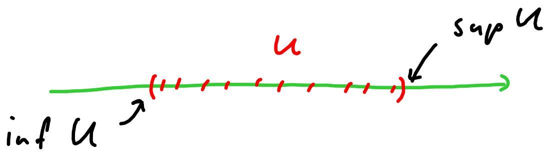
Reell — " — : $P(z) = (z^2 + 1)(z - 1)$

Følger

$a_1, a_2, a_3, \ldots$

Følgen voksende og oppad begrenset $\Rightarrow$ Konv.
– – – avtakende " nedad – – – $\Rightarrow$ Konv.

Fra kompl. hetsprins. sup U og inf U fins hvis begrenset U



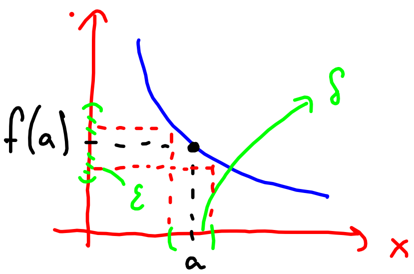
Grensedefinisjon og triks for å finne hva følger konvergerer mot: Analogt med

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \quad \text{for funksjoner } f.$$

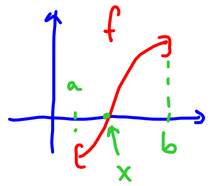
Kontinuitet (kap. 5)

f kont. i a : For hver $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{hvis } |x - a| < \delta \quad (\text{og } x \in D_f)$$



Skjæringssetningen :



f kont, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ ⟹ fins $x \in (a,b)$ med $f(x) = 0$

Ekstremalverdisetningen:

f kont på $[a,b]$

⇒ f har et maks og et minimum

Def. av $\lim_{x \to a} f(x) = L$: ε - δ

Derivasjon (kap 6 og 7)

$$f'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eks.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0) \quad \text{dvs.}$$

f kont. i $x = 0$.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin h - h}{h^2} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{2h}$$

$$\stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{h \to 0} \frac{-\sin h - 0}{2} = \underline{\underline{0}}$$

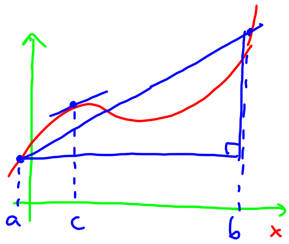
• Derivasjonsregler (Viktig!) $\frac{d}{dx}\left(e^{x^4}\right) = 4x^3 e^{x^4}$

Middelverditeoremet

f kont på $[a,b]$ og deriverbar på (a,b)

$\Rightarrow$ Fins $c \in (a,b)$ slik at

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$



l'Hopitals regel

$\left[\frac{0}{0}\right]$ og $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$: Kan derivere teller og nevner

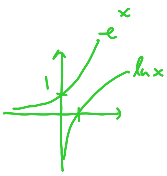
Trikseformen : $[\infty \cdot 0]$, $[\infty - \infty]$

$\underbrace{[0^0],\ [1^\infty] \text{ og } [\infty^0]}$ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

eks. $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} \overset{[\infty^0]}{=} \lim_{x\to\infty}\left(e^{\ln x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$

Eksponent:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$



Ergo $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = e^0 = \underline{\underline{1}}$

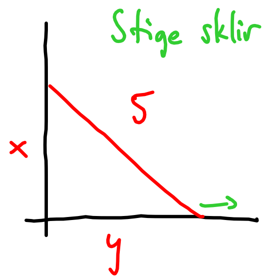
eks $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-(1/x)}}{x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-(1/x)}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1}$

$= \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-(1/x)}}{x^2} =$ verre og verre

Bedre : $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-(1/x)}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(1/x)}{e^{1/x}}$

$\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\cancel{\frac{1}{x^2}}}{e^{1/x}\left(\cancel{-\frac{1}{x^2}}\right)} = 0$

- Koblede hastigheter



$x = x(t)$

$y = y(t)$

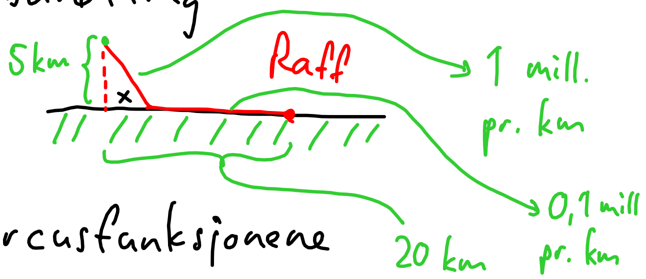
$$x^2 + y^2 = 5^2$$

$$2x \cdot x'(t) + 2y \cdot y'(t) = 0$$

- Asymptoter, inkl. skrå ($y = ax + b$) : $a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ osv.

$$b = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - ax \right]$$

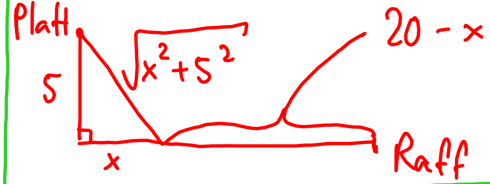
- Anvendelser av funksjonsdrøfting (eks: Oljeledning)



- Omvendte funksjoner, arcusfunksjonene

Eks. $\arctan x$ $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$P(x) = 1 \cdot \sqrt{x^2 + 5^2} + (0,1) \cdot (20 - x)$$



Deriver og sett $P'(x) = 0$

Integrasjon (kap. 8+9)

- Øvresummer, nedresummer, Riemannsummer
- Fundamentalteoremet:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(x)$$

kont.

- Volumer: $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$ om y-aksen

$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$ om x-aksen

(+ buelengde.)

- Integrasjonsteknikker
  - Substitusjon $\int x e^{x^2}\,dx$ $u = x^2$
  - Delvis integrasjon $\int x e^x\,dx$ $\int \ln x\,dx = \int \underbrace{1}_{G'} \cdot \underbrace{\ln x}_{F}\,dx$

    (varianter, f.eks. I-metoden)
  - Delbrøksoppspalting, inkl. "kvadrat-teknikken"

eks. $\int \arctan\sqrt{x}\,dx = \int u \cdot 2 \cdot \frac{\sin u}{\cos^3 u}\,du = 2 \cdot \int u \cdot \frac{\sin u}{\cos^3 u}\,du$

$u = \arctan\sqrt{x}$ $\tan u = \sqrt{x}$

$x = (\tan u)^2$ $\frac{dx}{du} = 2\tan u \cdot \frac{1}{\cos^2 u} = 2 \cdot \frac{\sin u}{\cos^3 u}$

$dx = 2 \cdot \frac{\sin u}{\cos^3 u}\,du$

$$= 2\left\{ \frac{1}{2} \frac{u}{\cos^2 u} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 u}\,du \right\}$$

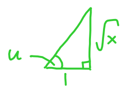
Delvis $F(u) = u$ $G'(u) = \frac{\sin u}{\cos^3 u}$

$F'(u) = 1$ $G(u) = \frac{1}{2} \cos^{-2} u$

$$= \frac{u}{\cos^2 u} - \tan u + C$$

$$= \underline{\underline{(1+x)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C}}$$

$u = \arctan\sqrt{x}$ $\sqrt{x} = \tan u$

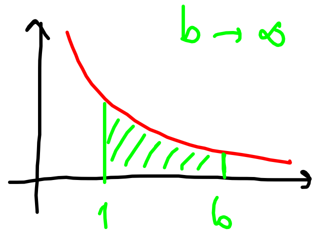


Vi ser at $\cos u = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{x})^2}}$ (hosligg. delt på hyp.)

dvs. $\cos^2 u = \frac{1}{1+x}$

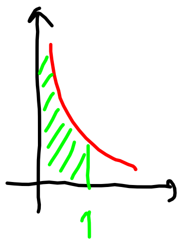
Uegentlige integraler

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)\,dx$$



p-integraler

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \quad \begin{cases} \text{konv. hvis } p>1 \\ \text{div. hvis } p\le 1 \end{cases}$$



$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \quad \begin{cases} \text{konv. hvis } p<1 \\ \text{div. hvis } p\ge 1 \end{cases}$$

Grensesammenlikningstesten
Sammenlikningstesten

brukes til å avgjøre konv/div. av uegentlige integraler.

$$\begin{cases} \int_1^\infty f(x)\,dx \text{ div og } 0\le f(x)\le g(x) \Rightarrow \int_1^\infty g(x)\,dx \text{ div} \\ \int_1^\infty g(x)\,dx \text{ konv og } 0\le f(x)\le g(x) \Rightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx \text{ konv.} \end{cases}$$

eks. $\int_e^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ Konvergerer?

Sml. med $\int_e^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_e^\infty \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ (p-integral med $p=\frac{1}{2}$)

Tar derfor $f(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ og $g(x) = \frac{\ln x}{x^{1/2}}$

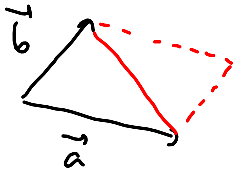
Har da $0\le f(x)\le g(x)$ på hele $[e,\infty)$.

Kap 1 FLVA : Vektorer og matriser

- Skalarprodukt og vinkel mellom n-tupler (inkl. komplekse)
- Vektorprodukt : $\vec{a} \times \vec{b}$
- Determinanter generelt

$$\begin{vmatrix} 2 & 4t & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4t \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 4t \cdot 2 + 4$$

- $|\vec{a} \times \vec{b}|$ er arealet av rektanglet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$



- $\left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right|$ er volumet av parallellepipedet utspent av $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$.

- I planet : Arealet av parallellogrammet utspent av (a_1, a_2) og (b_1, b_2) er absoluttverdien av

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

- Multiplikasjon av matriser : "Kryss"
- Inverse av matriser $M \cdot M^{-1} = I$

M inverterbar
$\Updownarrow$
$\det M \neq 0$

- Overgangsmatriser, ref. studenteksempel forelesning.

Kap 2 FLVA : Funksjoner av flere variable

Partielle deriverte $\frac{\partial f}{\partial x}$ osv.

Gradienten ∇f

Refningsderivert : $f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$

f deriverbar

<u>Vektorvaluerte funksjoner</u> : $\vec{F}(x,y) = (xy, 2y)$

- Jacobimatrisen til $\vec{F}$

Brukes til en lineærtilnærming til $\vec{F}$
gitt at $\vec{F}$ er deriverbar.