

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Ларин Петр Михайлович

Необходимые условия разрешимости
задач гарантированного поиска

05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор Е. В. Шикин

Москва, 2004 г.

Оглавление

1	Предварительные замечания и постановка задачи	4
1.1	Классические модели поиска	4
1.2	Гарантированный поиск	7
1.2.1	Базовая модель поиска	7
1.2.2	Модель гарантированного поиска	8
1.2.3	Постановка задач гарантированного поиска	11
1.3	Цель работы, основные результаты	15
1.4	Переменные информационные множества	17
1.4.1	Примеры информационных множеств	17
1.4.2	Упреждающая, остаточная и следящая области	18
1.4.3	Критерии разрешимости задач гарантированного поиска	23
2	Необходимые условия разрешимости задач гарантированного поиска на плоскости	25
2.1	Дискретная модель поиска	25
2.1.1	Определение дискретной модели	25
2.1.2	Связь между информационными множествами дискретной и стандартной моделей	27
2.2	Динамика информационных множеств в дискретной модели	28
2.3	Функция периметра	32
2.3.1	Определение функции периметра	32
2.3.2	Свойства функции периметра	33
2.3.3	Примеры функций периметра	40
2.3.4	Функции периметра выпуклых множеств	54
2.4	Необходимые условия разрешимости	70
2.4.1	Необходимые условия разрешимости задачи патрулирования	71
2.4.2	Необходимые условия разрешимости задачи обнаружения	73
2.4.3	Необходимые условия разрешимости обобщенной задачи патрулирования	74
2.4.4	Траектории уклонения	76

2.5	Применение к конкретным задачам поиска	78
2.5.1	Поиск в круговой области	78
2.5.2	Поиск в прямоугольной области	80
2.6	Основное уравнение	80
3	Выводы и обобщения	82
3.1	Некоторые выводы	82
3.1.1	Построение оптимальных траекторий	82
3.1.2	Независимость от продолжительности поиска	82
3.1.3	Моделирование и визуализация на ЭВМ	83
3.2	Обобщения	84
3.2.1	Задачи с несколькими ищущими	84
3.2.2	Задачи в трехмерном пространстве	87
3.2.3	Задачи на сфере	92
A	Программное обеспечение	100
A.1	Библиотека <i>Search</i>	100
A.1.1	Численные функции	102
A.1.2	Классы, представляющие функцию периметра вы- пуклых многоугольников	111
A.2	Программа «Периметр»	124
A.3	Текст работы	124

Глава 1

Предварительные замечания и постановка задачи

Настоящая глава носит вводный характер. В ней сообщаются необходимые сведения о задачах гарантированного поиска и о методах, применяющихся при исследовании этих задач. В конце главы формулируется цель настоящей работы.

1.1 Классические модели поиска

Теория поиска — сравнительно молодая математическая дисциплина. Первые систематические исследования по поиску были проведены во время Второй мировой войны с целью получения прикладных математических методов для военных операций. Основоположником теории поиска считается американский ученый Бернард Купман, работавший во время войны в группе по исследованию операций Военно-морского флота США. В своей классической работе (военном отчете) от 1946 г. [34] Купман описал подход к моделированию поискового процесса, оказавшийся весьма удачным как с точки зрения дальнейшего развития теоретических методов, так и с точки зрения практического применения. О пионерском характере работы говорит полное отсутствие библиографии. В течение всей жизни Купмана эта работа постоянно дополнялась и обростала новыми идеями и методами, и в 1980 г., незадолго до смерти ученого, вышла в виде книги с тем же названием [38]. Из 358 страниц этого издания 180 занимают технические приложения.

Неудивительно, что основными объектами поиска, интересовавшими военно-морские силы, были такие, как вражеские корабли и подводные лодки, а также собственные приводнившиеся летчики. Однако Купман замечает, что теория поиска — вполне абстрактная дисциплина и может весьма успешно использоваться и в невоенных областях, таких как поиск полезных ископаемых, преступников, очагов заражения, электронных

сигналов и т. д.

В связи с тем, что упомянутый отчет [34] был засекречен вплоть до 1958 г., основополагающими работами по поиску принято считать цикл статей Купмана [35, 36, 37]. В [29, 30, 31, 32] можно найти популярное изложение ключевых понятий поисковой модели Купмана.

Прибор-детектор, осуществляющий поиск (например, человеческий глаз), в модели Купмана описывается функцией — профилем обнаружения $P(x)$, задающим вероятность обнаружения цели данным прибором на расстоянии x от продольной оси движения прибора. Функция определяется на некотором отрезке $[-x_0, x_0]$, представляющем собой диапазон действия прибора. Величина

$$W = \int_{-x_0}^{x_0} P(x) dx \quad (1.1)$$

имеет размерность длины и представляет собой интегральную характеристику детектора, называемую эффективной шириной поиска. Нетрудно видеть, что данное определение W эквивалентно следующему, также данному Купманом. Пусть объект, осуществляющий поиск, движется среди неподвижных равномерно распределенных объектов-целей со скоростью v . Тогда

$$W = \frac{n}{Nv}, \quad (1.2)$$

где n — количество объектов, обнаруживаемых прибором за единицу времени, а N — полное количество объектов на единице площади. Величина W является объективной характеристикой поискового прибора-детектора. В практических приложениях используются таблицы величины W для различных приборов, условий поиска и т. д.

Мы видим, что с самого своего возникновения теория поиска активно использовала аппарат теории вероятностей. Это было обусловлено характером приложений, из которых эта теория выросла.

В [22] автор рассматривает различные постановки поисковых задач, включающие поиск как неподвижных, так и движущихся целей; поиск как одиночным ищущим, так и «большой системой» ищущих. Однако для всех формулировок общим остается вероятностный характер используемых моделей: при помощи вероятностей описывается априорное и апостериорное распределение положения цели, а также возможности ищущих. Целевой функционал теории, подлежащий максимизации, также представляет собой вероятность обнаружения за заданное время. В [7] траектории ищущего и цели более конкретизированы, однако задача ищущего также состоит в максимизации вероятности обнаружения.

В [33] к задачам поиска применяется аппарат теории игр. Рассмотрим характерный пример («поиск на k дугах»). Два игрока (ищущий объект и цель) перемещаются по графу, имеющему две вершины O и

A , соединенные k непересекающимися ребрами b_i , $1 \leq i \leq k$, единичной длины. На траектории ищущего объекта и цели накладываются следующие ограничения: скорость ищущего не превышает 1, а скорость цели не превышает величины $w > 1$. Цель считается обнаруженной при точечной встрече игроков.

Автор вводит функцию выигрыша, для пары траекторий игроков определяемую как время, истекшее с момента начала игры до момента обнаружения. Множества допустимых траекторий игроков выполняют роль множеств чистых стратегий.

Однако в качестве поисковых стратегий рассматриваются не чистые, а смешанные стратегии (вероятностные распределения на множествах чистых стратегий). Требуется найти оптимальную смешанную стратегию ищущего, которая была бы решением смешанного расширения сформулированной игры.

Автор показывает, что оптимальной смешанной стратегией ищущего будет следующая стратегия. В момент времени $t = 0$ ищущий находится в точке O . Из множества $\{1, 2, \dots, k\}$ он с равной вероятностью выбирает число i и в течение промежутка времени $t \in (0, 1)$ с максимальной (единичной) скоростью движется по дуге b_i в точку A . Там он снова делает независимый равновероятный выбор числа j из множества $\{1, 2, \dots, k\}$ и при $t \in (1, 2)$ с максимальной скоростью по дуге b_j движется обратно в O и т. д.

Хочется подчеркнуть, что в качестве решения задачи поиска рассматривается именно смешанная стратегия. С практической точки зрения это может быть интерпретировано следующим образом. Поисковая ситуация повторяется много раз, и при каждом повторении действия игроков не коррелируют с их действиями в предыдущие разы. Смешанная стратегия позволяет ищущему объекту обеспечить *среднее* время обнаружения, не превосходящее известную величину (значение игры в рассмотренном примере). Однако такой подход ничего не говорит, да и не может говорить об исходе каждого конкретного повторения поисковой ситуации.

С другими примерами поисковых задач в терминах теории игр можно познакомиться в [14, 15, 16].

Таким образом, анализ классических работ по поиску приводит к следующему выводу. Характерной чертой рассматриваемых в этих работах моделей является существенное использование понятия вероятности для описания свойств участников поискового процесса и обстоятельств этого процесса. Такими свойствами и обстоятельствами могут быть как несовершенство прибора-детектора, не обеспечивающего гарантированного обнаружения, так и недостаток информации о местонахождении разыскиваемого объекта, и повторяемость поисковой ситуации во времени, и другие факторы. Поэтому данный подход к моделированию поисковых

ситуаций, а также соответствующий класс задач было бы уместно охарактеризовать как *вероятностный поиск*.

1.2 Гарантированный поиск

В противовес вероятностному, *гарантированный поиск* не использует аппарата теории вероятностей. Применяя терминологию теории игр, можно сказать, что в качестве поисковых стратегий в гарантированном поиске используются чистые стратегии, т. е. траектории. Для формального определения модели гарантированного поиска рассмотрим сначала некоторую более общую поисковую модель, которую мы будем называть *базовой*.

1.2.1 Базовая модель поиска

В данной модели имеются два основных объекта, *ищущий* и *уклоняющийся*. Данные объекты, или, как мы их будем называть, *игроки*, представляются точками, перемещающимися по таким множествам, как отрезок прямой, полупрямая, прямая, плоскость, плоское множество, граф. Данное множество, по которому двигаются игроки, называется *поисковым множеством* или *поисковым пространством*. Будем обозначать его через Q_0 .

Мы всегда будем предполагать, что на Q_0 задана некоторая метрика ρ .

Положения ищущего и уклоняющегося в момент времени t будем обозначать через $S(t)$ и $H(t)$ соответственно. Сами функции $S(t) : T \rightarrow Q_0$ и $H(t) : T \rightarrow Q_0$ будем называть *траекториями*. Область определения этих функций $T \subset \mathbb{R}$ в зависимости от типа задачи может представлять собой отрезок, полупрямую или всю числовую прямую. На траектории накладываются определенные ограничения, иными словами, задаются множества допустимых траекторий D_S и D_H , по которым только и могут двигаться игроки. Базовыми ограничениями являются требование непрерывности траектории и требование «ограниченности скорости» (это может быть, например, условие Липшица, если допускаются недифференцируемые траектории).

Целью ищущего является такое сближение с уклоняющимся, которое можно было бы интерпретировать как «поймку» или «обнаружение». На математическом языке это означает, что расстояние между игроками становится не больше некоторой величины r (имеет место *r -встреча*):

$$|S(t^*) - H(t^*)| \leq r. \quad (1.3)$$

Параметр r называется *радиусом обнаружения*. Обычно полагается $r > 0$. В случае $r = 0$ говорят о *точечной встрече*. Цель уклоняющегося — воспрепятствовать обнаружению.

В рамках описанной модели поискового процесса можно формулировать разнообразные задачи поиска. Как правило, поисковая задача состоит в отыскании определенного способа действия одного из игроков, удовлетворяющего заданным условиям. Такой способ действия называется *поисковой стратегией*. В рамках данной базовой модели мы не будем давать общего определения поисковой стратегии. Заметим лишь, что это определение меняется от одного класса задач поиска к другому и при этом является тесно связанным с практической интерпретацией задач данного класса. Также заметим, что в общем случае понятие поисковой стратегии вовсе не обязательно сводится к понятию траектории.

1.2.2 Модель гарантированного поиска

Термин *гарантированный* означает, что одна фиксированная траектория, являющаяся решением задачи гарантированного поиска, должна обеспечивать обнаружение при каждом повторении поисковой ситуации, т. е. для любой траектории-нарушителя $H(t)$ уклоняющегося из множества допустимых. То есть, поставленная задача имеет решение, если

$$\exists S^* : \forall H \in \mathcal{H} \exists t^* = t^*(H) : |S^*(t^*) - H(t^*)| \leq r. \quad (1.4)$$

Здесь \mathcal{H} обозначает множество траекторий-нарушителей, и его конкретный вид зависит от поставленной перед ищущим задачи. Например, если решается задача патрулирования подмножества $Q \subset Q_0$, то \mathcal{H} состоит из всех траекторий из D_H , проходящих через Q .

С практической точки зрения можно сказать, что в отличие от вероятностного поиска, где гарантируется некий средний результат при условии многократного повторения, здесь гарантируется успешное обнаружение для каждого конкретного случая независимо от действий уклоняющегося. Это может быть важно, например, когда поисковая ситуация уникальна и возникает всего один раз, или когда критическим является исход каждого повторения ситуации, а не некий средний параметр.

Тот факт, что одной-единственной траекторией-решением $S^*(t)$ обнаружение гарантируется для любой траектории уклоняющегося, можно перефразировать следующим образом: $S^*(t)$ никак не зависит от действий уклоняющегося. То есть ищущий никак не корректирует свои действия в зависимости от движения уклоняющегося. Напротив, уклоняющийся может использовать какую угодно информацию об ищущем (включая положение и скорость ищущего в текущий и даже будущие моменты времени) и как угодно корректировать свое поведение, пытаться противодействовать обнаружению, но это ему все равно не поможет. Вышесказанное можно сформулировать и следующим образом: в модели гарантированного поиска ищущий является *полностью неинформированным*, а уклоняющийся — *полностью информированным*.

Гарантированному поиску можно дать и следующую интерпретацию: в поисковом процессе участвует не один, а несколько уклоняющихся, возможно, бесконечное их число. Можно даже считать, что в каждой точке имеется по уклоняющемуся. Тем не менее ищущий одной траекторией-решением должен обнаружить их всех.

Следует отметить, что описанная выше модель гарантированного поиска не является единственно возможной и что в работах по гарантированному поиску встречаются и другие модели. Так, в [24, 28] рассматривается задача в поисковом пространстве с препятствиями (выемками), при этом условием обнаружения является не сближение игроков, а их попадание в зону прямой видимости друг друга.

Примечательно, что гарантированный поиск в некотором смысле рассматривается уже у Купмана (см. [34, 38]). В п. 1.1 мы упомянули о введенной Купманом характеристике поискового прибора — эффективной ширине поиска W . В развитие этой модели Купман вводит понятие приложенного поискового усилия (*effort*) E , эквивалентное дистанции, пройденной поисковым прибором, понятие эффективной площади поиска (*area effectively swept*) $Z = EW$, а также понятие поискового покрытия (*coverage*) — безразмерную величину C , равную отношению эффективной площади к полной фактической площади территории, на которой производился поиск A :

$$C = \frac{Z}{A}. \quad (1.5)$$

Величина покрытия C характеризует, насколько тщательно была исследована данная территория. При многократном обследовании одной и той же территории C может превышать 1.

Для количественной оценки эффективности поискового процесса вводится величина D — отношение количества обнаруженных целей к полному количеству имеющихся равномерно распределенных целей. Купман исследует зависимость $D(C)$. Данная зависимость будет разной для различных способов исследования территории. Купман выделяет 2 крайних случая: «случайный» поиск и «гарантированный» поиск. Случайный поиск — это предельный случай, когда профиль обнаружения $P(x) \ll 1$, а количество обследований одной и той же территории велико. Для случайного поиска справедлива формула Купмана:

$$D(C) = 1 - e^{-C}. \quad (1.6)$$

Противоположный крайний случай, который мы и отождествляем с гарантированным поиском, имеет место при однократном сканировании территории при помощи детектора с $P(x) \equiv 1$. Для этого случая, очевидно,

$$D(C) = C. \quad (1.7)$$

Купман далее указывает на то, что в реальных поисковых ситуациях зависимость $D(C)$ лежит между двумя указанными предельными случаями (и нередко близка к сформулированному им закону обратных кубов). Для нас здесь примечателен сам факт данного рассмотрения зависимости вида функции $D(C)$, характеризующей эффективность поиска, от вида используемой поисковой модели.

В литературе по теории дифференциальных игр рассматриваются задачи преследования (см. [1, 13, 16]). Этот класс задач близок к теории гарантированного поиска в том смысле, что в нем строятся детерминированные модели без применения понятий теории вероятности. Однако само понятие преследования говорит о том, что преследуемый объект уже обнаружен и постоянно находится в поле зрения преследующего, и поэтому собственно в поиске потребности нет. Преследующий является гораздо более информированным, нежели ищущий; в этом принципиальная разница между поиском и преследованием.

В начале 1990-х Е. В. Шикин, С. М. Губайдуллин и А. Г. Чхартишвили предложили для решения задач гарантированного поиска наглядно-геометрический подход, предполагающий использование вспомогательных переменных информационных множеств. Настоящая работа основана на применении данного метода, и о нем будет подробно рассказано ниже. Изложение наглядно-геометрического метода, а также основные свойства информационных множеств содержатся в [23, 24, 26, 27, 28].

В рамках наглядно-геометрического метода получен ряд интересных результатов. В [6] формулируются достаточные условия успешности гарантированного поиска на цилиндре и торе, и приводятся соответствующие траектории.

В [24] аналогичные результаты приводятся для патрулирования круговой области и поиска на сфере, а в [25] — для поиска на поверхностях вращения и на звездных поверхностях.

В [8, 9] решается задача уклонения от пары прямолинейно движущихся отрезков.

В обзоре [28] проводится анализ основных результатов по поиску по состоянию на 1995 г. Авторы классифицируют поисковые задачи с точки зрения информированности игроков и применения геометрических методов. Обзор содержит обширную библиографию. Авторы также приводят новые собственные результаты, связанные с вариациями в модели гарантированного поиска. В частности, показывается, каким образом возможно гарантированное обнаружение уклоняющегося на всей плоскости при условии, что уклоняющийся движется равномерно и прямолинейно.

В последнее время, после выхода обзора [28], интересные результаты в области гарантированного поиска получены А. А. Скворцовым и С. Б. Березиным. А. А. Скворцов в [17, 18, 19, 21] предлагает следующие методы решения поисковых задач в n -мерных областях:

- Пусть имеется траектория, решающая задачу поиска в $(n - 1)$ -мерной области Σ . Тогда при выполнении определенных условий эта траектория может быть «развернута» еще в одном измерении для решения поисковой задачи в n -мерной цилиндрической области $\Sigma \times [0, H]$.
- Пусть имеется траектория, решающая задачу поиска в n -мерной области V , и пусть Ω — выпуклое подмножество V . Тогда траектория, получающаяся проецированием на Ω исходной траектории, будет решением поисковой задачи в Ω .

Данная методика применяется, в частности, для нахождения достаточных условий поиска и соответствующих поисковых траекторий в прямоугольнике, круговом цилиндре и произвольных ограниченных выпуклых областях в двух- и трехмерном случае.

Также в [20, 21] А. А. Скворцов описывает метод исследования задач поиска, основанный на моделировании и визуализации поискового процесса на ЭВМ.

Применение ЭВМ, численных методов и методов компьютерной графики для исследования и решения задач поиска является основным направлением исследований С. Б. Березина (см. [2, 3, 4, 5]). Перенос на ЭВМ рутинных вычислительных операций позволяет ему рассматривать постановки задач с поисковыми множествами сложной формы и с участием нескольких ищущих. Основные результаты, полученные С. Б. Березиным, состоят в следующем:

- Разработан и реализован эффективный и устойчивый к ошибкам округления метод моделирования на ЭВМ поиска на плоскости.
- Данный метод применен к решению таких задач, как определение минимальных ресурсов ищущих, достаточных для успешного поиска.
- Аналитически доказаны достаточные условия разрешимости задач поиска в монотонном многоугольнике, кольце и кольцеобразной области. При этом соответствующие поисковые траектории строятся либо аналитически, либо на ЭВМ при помощи упомянутого метода.

1.2.3 Постановка задач гарантированного поиска

Приведем три формулировки задач гарантированного поиска, основанные на базовой модели, изложенной в п. 1.2.1. Разница между этими формулировками состоит в определении множества траекторий-нарушителей \mathcal{H} .

Задачи в рамках данных формулировок будут предметом нашего исследования в основной части настоящей работы. Поскольку поисковое

пространство Q_0 в них представляет собой плоскость или ее подмножество, мы будем называть их задачами *гарантированного поиска на плоскости*.

Будем предполагать, что на плоскости введена обычная евклидова метрика $\rho(x, y) = |x - y| = (x - y, x - y)$.

Общим для всех трех формулировок является вид множеств допустимых траекторий ищущего D_S и уклоняющегося D_H :

$$T = [\tau_a, \tau_b], \quad (1.8)$$

$$D_S = \{S : |S(t_2) - S(t_1)| \leq |t_2 - t_1|\}, \quad (1.9)$$

$$D_H = \{H : |H(t_2) - H(t_1)| \leq w |t_2 - t_1|\}, \quad (1.10)$$

$$0 < w < 1 \quad (w = \text{const}). \quad (1.11)$$

Прокомментируем данные соотношения. Во-первых, условие (1.8) говорит о том, что поисковая задача рассматривается на конечном отрезке времени. Во-вторых, от траекторий не требуется дифференцируемости, но при этом условия Липшица следует рассматривать как ограничение сверху на скорость игроков. В-третьих, максимальная скорость ищущего нормирована единицей. Это сделано для того, чтобы вместо двух параметров, максимальных скоростей игроков, обойтись одним — их отношением. В-четвертых, последнее неравенство говорит о том, что уклоняющийся подвижен, при этом его максимальная скорость меньше максимальной скорости ищущего.

Далее, общим для трех формулировок будет также условие обнаружения. Уклоняющийся считается обнаруженным, если в некоторый момент t^* выполнено неравенство

$$|S(t^*) - H(t^*)| \leq r, \quad (1.12)$$

причем радиус обнаружения является ненулевым (и фиксированным):

$$r > 0 \quad (r = \text{const}). \quad (1.13)$$

Сформулируем теперь сами задачи.

Задача патрулирования на плоскости. В этой задаче поисковое пространство представляет собой всю плоскость:

$$Q_0 = \mathbb{R}^2. \quad (1.14)$$

На плоскости задано ограниченное множество $Q \subset Q_0$. Требуется найти такую траекторию $S^*(t)$ ищущего, что для некоторых моментов τ'_a, τ'_b , удовлетворяющих неравенствам

$$\tau_a \leq \tau'_a \leq \tau'_b \leq \tau_b, \quad (1.15)$$

выполняется следующее условие: если, вне зависимости от того, по какой траектории $H(t)$ движется уклоняющийся, для некоторого $t \in [\tau'_a, \tau'_b]$ оказывается $H(t) \in Q$, то существует момент времени $t^* = t^*(H)$, для которого выполняется условие обнаружения (1.12):

$$|S^*(t^*) - H(t^*)| \leq r. \quad (1.16)$$

Подчеркнем, что игроки могут двигаться по всей плоскости ввиду условия (1.14).

Таким образом, множество траекторий-нарушителей \mathcal{H} состоит из всех траекторий, удовлетворяющих условию (1.10) и проходящих через Q .

Приведенная формулировка не уточняет, откуда берутся параметры τ'_a и τ'_b . Возможны, как минимум, два варианта. Первый вариант — эти величины задаются в качестве входных параметров задачи, т. е. требуется найти решение $S^*(t)$, удовлетворяющее указанному условию с заданными τ'_a, τ'_b . Второй вариант заключается в том, что τ'_a и τ'_b не фиксируются, и нужно найти такую траекторию $S^*(t)$, для которой сформулированное условие выполняется хоть для каких-то τ'_a, τ'_b . Мы намеренно не уточняем формулировку в том, что касается τ'_a и τ'_b , т. к. все дальнейшие рассуждения будут справедливы для обоих приведенных вариантов формулировок. Тем не менее, следует помнить, что, строго говоря, речь может идти о разных задачах, которые мы объединяем одним термином «задача патрулирования».

Задача обнаружения в ограниченном множестве. В данной задаче поисковое пространство Q_0 — ограниченное плоское множество. Требуется найти такую траекторию $S^*(t)$ ищущего, что независимо от того, по какой траектории $H(t)$ движется уклоняющийся, он будет гарантированно обнаружен, т. е. существует момент времени $t^* = t^*(H)$, для которого выполняется условие (1.16).

Здесь множество траекторий-нарушителей \mathcal{H} состоит из всех траекторий, удовлетворяющих условию (1.10) и лежащих в Q_0 .

Обобщенная задача патрулирования. Эта постановка идентична постановке задачи патрулирования на плоскости с той лишь разницей, что поисковое пространство Q_0 является произвольным плоским множеством (ограниченным либо неограниченным). При этом сохраняется требование $Q \subset Q_0$, а также требование ограниченности Q . Множество траекторий-нарушителей \mathcal{H} состоит из всех траекторий, удовлетворяющих условию (1.10), лежащих в Q_0 и проходящих через Q .

Про параметры τ_a и τ_b можно дословно повторить сказанное про τ'_a и τ'_b : мы не уточняем, фиксированы ли они условиями задачи или яв-

ляются результатом ее решения. В дальнейших рассуждениях это будет неважно.

С учетом вышесказанного, будем считать, что задача патрулирования полностью задается тройкой (Q, w, r) , задача обнаружения — тройкой (Q_0, w, r) , а обобщенная задача патрулирования — четверкой (Q_0, Q, w, r) .

Все дальнейшие рассмотрения в работе проводятся для сформулированных в этом параграфе задач патрулирования и обнаружения и обобщенной задачи патрулирования. Там, где рассуждения будут вестись сразу для всех трех формулировок, мы будем говорить просто о «задаче гарантированного поиска с параметрами (Q_0, Q, w, r) », помня при этом, что параметр Q может и не быть задан.

Пример 1.1. В [24] авторы задаются вопросом (в нашей терминологии): круг какого максимального радиуса можно патрулировать на плоскости? Используя введенную терминологию, можно сказать, что рассматривается задача патрулирования на плоскости с Q , представляющим собой круговую область. Авторы строят траекторию $S^*(t)$, обеспечивающую патрулирование круга с радиусом, меньшим $r/(\pi w)$. Обозначая через R_1 точную верхнюю грань величин радиусов круговых областей, которые можно патрулировать на плоскости, можно сказать, что авторами обоснована оценка

$$R_1 \geq \frac{r}{\pi w}. \quad (1.17)$$

По аналогии с задачей патрулирования, можно рассмотреть также и задачу обнаружения в круге, т. е. задачу обнаружения с Q_0 , являющимся круговой областью. Обозначив через R_2 точную верхнюю грань величин радиусов круговых областей, в которых возможно обнаружение, легко показать, что из (1.17) следует оценка

$$R_2 \geq r \left(1 + \frac{1}{\pi w} \right) \quad (1.18)$$

(см. [10]). В то же время из формулы для достаточных условий поиска в выпуклых областях, полученной А. А. Скворцовым в [17] следует, что

$$R_2 \geq r \sqrt{1 + \frac{1}{4w^2}}. \quad (1.19)$$

Объединяя две последние оценки, получим:

$$R_2 \geq r \max \left\{ 1 + \frac{1}{\pi w}, \sqrt{1 + \frac{1}{4w^2}} \right\}. \quad (1.20)$$

1.3 Цель работы, основные результаты

При помощи упомянутого выше наглядно-геометрического метода, разработанного Е. В. Шикиным, С. М. Губайдуллиным и А. Г. Чхартишвили, эти исследователи, а также А. А. Скворцов, С. Б. Березин и др. получили целый ряд интересных результатов. Постановки, рассмотренные в их работах, весьма разнообразны, при этом общее направление работ можно охарактеризовать как построение конкретных поисковых траекторий для определенных классов поисковых множеств. Можно также сказать, что были сформулированы *достаточные условия разрешимости* задач гарантированного поиска в терминах параметров, определяющих эти задачи: Q_0 , Q , w , r , при этом обоснованием достаточных условий выступают построенные траектории.

В отдельных (тривиальных и близких к ним) случаях удавалось сформулировать необходимые и достаточные условия, однако для содержательных задач этого пока сделано не было. На фоне упомянутых результатов бросается в глаза отсутствие работ по отысканию общих содержательных *необходимых условий разрешимости*, чему и посвящена диссертация. Необходимые условия разрешимости задач гарантированного поиска позволяют, например,

- отсеивать заведомо неразрешимые задачи;
- сравнивать разрывы между необходимыми и имеющимися достаточными условиями.

Однако, что также важно, необходимые условия связаны с действиями уклоняющегося. Здесь прослеживается прямая аналогия со связью между достаточными условиями и действиями ищущего. Действительно, пусть выполнены достаточные условия разрешимости. Это означает, что существует траектория $S^*(t)$, гарантирующая обнаружение независимо от траектории уклоняющегося. При этом действия уклоняющегося в некотором смысле остаются в тени. Поэтому отыскание достаточных условий сосредоточивает наше внимание на действиях ищущего и сродни «игре» на его стороне. В случае, когда достаточные условия не выполнены, а необходимые — выполнены, мы ничего не можем сказать об исходе поиска. Пусть теперь необходимые условия не выполнены. Мы можем выразить этот факт через отрицание утверждения (1.4):

$$\forall S \exists H(S) \in \mathcal{H} : \forall t^* |S(t^*) - H(t^*)| > r. \quad (1.21)$$

Как видно, здесь фигурирует функция $H(S)$, сопоставляющая каждой траектории ищущего S траекторию H уклонения от S . Поскольку уклонение теперь возможно от любой траектории, в тени остаются действия ищущего, а акцент переходит на действия уклоняющегося. Таким образом, отыскание необходимых условий сродни «игре» за уклоняющегося.

Настоящая работа посвящена получению нетривиальных общих необходимых условий разрешимости задач гарантированного поиска (сформулированных выше задач патрулирования, обнаружения и обобщенных задач патрулирования).

Основные результаты работы:

- Наглядно-геометрический метод, ранее применяемый в основном для получения достаточных условий разрешимости, адаптирован для отыскания необходимых условий. Тем самым подтверждена эффективность данного метода и его потенциал. Адаптация метода производится в пп. 2.1 и 2.2.
- Получены содержательные необходимые условия разрешимости широкого класса задач гарантированного поиска: задачи патрулирования (п. 2.4.1), задачи обнаружения (п. 2.4.2) и обобщенной задачи патрулирования (п. 2.4.3). Указан алгоритм построения траектории уклонения от произвольной траектории ищущего в случае невыполнения данных условий (п. 2.4.4).
- Полученные условия применены к некоторым конкретным поисковым множествам и проведено сравнение с достаточными условиями разрешимости, полученными ранее другими исследователями (пп. 2.5, 3.2.3).
- Построена дискретная модель поискового процесса (пп. 2.1 и 2.2). При том, что эта модель в основном использовалась как средство доказательства, указано на ее самостоятельную ценность, в особенности как средство моделирования и визуализации поискового процесса на ЭВМ (п. 3.1.3).
- Введена и подробно исследована вспомогательная конструкция, использованная в формулировках необходимых условий разрешимости некоторых классов задач — функция периметра плоских множеств (п. 2.3). В этом контексте особо рассмотрен класс плоских выпуклых множеств (п. 2.3.4). Для выпуклых многоугольников указан алгоритм построения функции периметра. Доказана теорема о сходимости функции периметра последовательности многоугольников, аппроксимирующей произвольное выпуклое множество, к функции периметра этого множества. Упомянутый алгоритм реализован в виде компьютерной программы, прилагающейся к диссертации (приложение А).
- При том, что вышеперечисленные результаты подробно рассмотрены для поиска одним ищущим в плоских областях, проведены

полноценные обобщения на трехмерный случай, случай нескольких ищущих и случай поиска на сферической поверхности (п. 3.2). Данные обобщения подтверждают широкую применимость использованного метода.

Основные результаты работы опубликованы в [8, 9, 10, 11, 12].

1.4 Переменные информационные множества

Мы переходим к изложению базовых понятий наглядно-геометрического метода, на использовании которого основана настоящая работа.

1.4.1 Примеры информационных множеств

Под переменным информационным множеством мы будем понимать отображение, каждому моменту времени $t \in T$ (или $t \in T'$ для некоторого подмножества $T' \subset T$) сопоставляющее множество $\mathcal{E}(t) \subset Q_0$.

Простейшим примером переменного информационного множества является *круг обнаружения*. Действительно, условие обнаружения (1.12) может быть интерпретировано следующим образом: с ищущим жестко связан круг радиуса r и обнаружение уклоняющегося равносильно его попаданию в этот круг. Вводя обозначение

$$B(x, R) = \{y \in Q_0 : |x - y| \leq R\}, \quad (1.22)$$

получаем, что круг обнаружения задается выражением

$$B(S(t), r). \quad (1.23)$$

Круг обнаружения представляет собой частный случай другого переменного информационного множества — *контрольного множества*. Контрольным множеством мы будем называть множество, попадание в которое уклоняющегося в момент t равносильно его обнаружению в тот же момент t . В случае сформулированных задач гарантированного поиска контрольное множество — это круг, однако для задач других типов контрольное множество может быть иным.

Другим примером служит *область неопределенности* ([28]). В простейшем случае она определяется следующим образом. Пусть нам известно, что в момент времени $t = 0$ уклоняющийся находится в точке $x \in Q_0$. Тогда в произвольный момент $t > 0$ вследствие условия (1.10) про уклоняющегося будет известно, что он находится во множестве $B(x, wt)$. Множество, несущее такую информацию об уклоняющемся, и называется областью неопределенности.

1.4.2 Упреждающая, остаточная и следящая области

Введем три переменных информационных множества, которые активно применяются в гарантированном поиске. Пусть задана траектория ищущего $S(t)$.

Определение. *Упреждающей областью $\mathcal{A}(S; t)$ для траектории ищущего $S(t)$ в момент времени t называется информационное множество, состоящее из всех точек множества Q_0 , обладающих следующим свойством: если уклоняющийся находится в этой точке, то независимо от его траектории $H(t)$ он обязательно будет обнаружен ищущим в некоторый момент $t^* = t^*(H) \geq t$ при условии, что ищущий будет двигаться по траектории $S(t)$:*

$$\mathcal{A}(S; t) = \{x \in Q_0 : \forall H \in D_H : H(t) = x \exists t^* \geq t : |S(t^*) - H(t^*)| \leq r\}. \quad (1.24)$$

На неформальном языке можно сказать, что упреждающая область образована всеми точками, лежащими достаточно близко к ищущему в направлении его движения, откуда уклоняющийся не успевает «отскокить» и попадает в круг обнаружения.

Определение. *Остаточной областью $\mathcal{R}(S; t)$ для траектории ищущего $S(t)$ в момент времени t называется информационное множество, состоящее из всех точек множества Q_0 , обладающих следующим свойством: если уклоняющийся находится в этой точке, то независимо от его траектории $H(t)$ он обязательно был обнаружен ищущим в некоторый момент $t^* = t^*(H) \leq t$ при условии, что ищущий двигался по траектории $S(t)$:*

$$\mathcal{R}(S; t) = \{x \in Q_0 : \forall H \in D_H : H(t) = x \exists t^* \leq t : |S(t^*) - H(t^*)| \leq r\}. \quad (1.25)$$

Неформально можно сказать, что остаточная область — это «шлейф», образованный всеми точками, лежащими достаточно близко к ищущему в направлении, противоположном направлению его движения, куда уклоняющийся не успевает попасть, если он избежал встречи с кругом обнаружения.

Определение. *Следящей областью $\mathcal{T}(S; t)$ называется объединение упреждающей и остаточной областей:*

$$\mathcal{T}(S; t) = \mathcal{A}(S; t) \cup \mathcal{R}(S; t). \quad (1.26)$$

Замечание 1. Из определений следует, что круг обнаружения включается во все три области. Рассмотрим, например, упреждающую область.

Пусть x — произвольная точка, лежащая в круге обнаружения в момент t . Тогда для любой такой траектории H , что $H(t) = x$, в момент времени $t^* = t$ выполняется условие обнаружения, а значит $x \in \mathcal{A}(S; t)$.

Замечание 2. Заметим, что в работах по гарантированному поиску встречаются по-разному определяемые разновидности упомянутых информационных областей; при этом уточняется, какая же именно разновидность рассматривается, например «стандартная», «полная», «тонкая», «приграничная» следящая область (см., например, [24]). В нашем рассмотрении, однако, мы предпочитаем отказаться от подобной терминологии. Тем не менее, если бы мы ей следовали, то вышеприведенные определения соответствовали бы «полной» следящей области. Стандартная следящая область при этом является ее подмножеством; тонкая и приграничная следящие области при их наличии также включаются в нее.

Рассмотрим простейшие свойства данных областей.

Определение. Пусть a — некоторая константа. *Обращением направления отсчета времени* будем называть отображения $\sigma_a : D_S \rightarrow D_{S,a}$, $\sigma_a : D_H \rightarrow D_{H,a}$, действующие следующим образом:

$$\sigma_a(S) = S_a, \quad \sigma_a(H) = H_a, \quad (1.27)$$

где

$$S_a(t) = S(a - t), \quad H_a(t) = H(a - t), \quad (1.28)$$

а множества $D_{S,a}$ и $D_{H,a}$ определяются теми же условиями (1.8)–(1.11), что и D_S , D_H соответственно, с той лишь разницей, что областью определения функций $S_a \in D_{S,a}$ и $H_a \in D_{H,a}$ вместо множества T является множество T_a , задаваемое следующим образом:

$$T_a = \{t' : \exists t \in T : t' = a - t\}. \quad (1.29)$$

Лемма 1.1 (Свойство двойственности). *При обращении направления отсчета времени упреждающая и остаточная области переходят одна в другую, т. е.*

$$\mathcal{A}(S_a; t_1) = \mathcal{R}(S; t_2), \quad \mathcal{R}(S_a; t_1) = \mathcal{A}(S; t_2) \quad (1.30)$$

при $t_1 + t_2 = a$, т. е. при $S_a(t_1) = S(t_2)$.

Хотя утверждение почти очевидно, приведем доказательство.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(S_a; t_1) &= \{x \in Q_0 : \forall H \in D_H : H(t_1) = x \\
&\quad \exists t^* \geq t_1 : |S_a(t^*) - H(t^*)| \leq r\} = \\
&= \{x \in Q_0 : \forall H \in D_H : H(a - t_2) = x \\
&\quad \exists t^* \geq a - t_2 : |S(a - t^*) - H(t^*)| \leq r\} = \\
&= \{x \in Q_0 : \forall H_a \in D_H : H_a(t_2) = x \\
&\quad \exists t' = a - t^* \leq t_2 : |S(a - t^*) - H_a(a - t^*)| \leq r\} = \\
&= \{x \in Q_0 : \forall H_a \in D_H : H_a(t_2) = x \\
&\quad \exists t' \leq t_2 : |S(t') - H_a(t')| \leq r\}. \quad (1.31)
\end{aligned}$$

Заметим, что отображение σ_a определено на всех элементах D_S и D_H и является взаимно однозначным. Поэтому в определениях (1.24) и (1.25) вместо $H(t)$ можно писать $H_a(t)$. С учетом этого замечания последнее из выражений в (1.31) совпадает с определением $\mathcal{R}(S; t_2)$. Второе из тождеств (1.30) доказывается аналогично. \square

Лемма 1.2. *Следящая область не изменяется при обращении направления отсчета времени:*

$$\mathcal{T}(S_a; t_1) = \mathcal{T}(S; t_2) \quad (1.32)$$

при $t_1 + t_2 = a$.

Доказательство. Очевидно. \square

Определение. *Приведенной задачей* гарантированного поиска будем называть задачу, совпадающую с любой из описанных в п. 1.2.3, за исключением условия обнаружения (1.12), которое трансформируется в

$$H(t^*) \in \mathcal{T}(S; t^*), \quad (1.33)$$

т. е. уклоняющийся считается обнаруженным при попадании в следящую область, построенную по траектории ищущего (следящая область является контрольным множеством).

Задачи, описанные в п. 1.2.3, будем в этом пункте называть «обычными».

Лемма 1.3. *Приведенная задача эквивалентна обычной в том смысле, что приведенная задача разрешима тогда и только тогда, когда разрешима соответствующая обычная задача, причем решение приведенной задачи является решением обычной задачи и наоборот.*

Доказательство. Пусть $S(t)$ — решение обычной задачи. По какой бы траектории ни двигался уклоняющийся, в некоторый момент он окажется в круге обнаружения, а значит, и в следящей области. Поэтому $S(t)$ будет решением приведенной задачи.

Пусть теперь $S(t)$ — решение приведенной задачи. Это означает, что уклоняющийся рано или поздно попадает в $\mathcal{T}(S; t)$, т. е. либо в $\mathcal{A}(S; t)$, либо в $\mathcal{R}(S; t)$. В первом случае уклоняющийся будет, а во втором — был гарантированно обнаружен в смысле обычной задачи, и поэтому $S(t)$ будет ее решением. \square

Пример 1.2. Пусть ищущий движется по бесконечной прямолинейной траектории с постоянной скоростью α , $0 < \alpha \leq 1$, при этом $Q_0 = \mathbb{R}^2$ (например, вектор $S(t)$ равен $(\alpha t, 0)$ для $-\infty < t < +\infty$). Построим упреждающую, остаточную и следящую области для такой траектории.

Случай $\alpha \leq w$. Покажем, что при $\alpha \leq w$ все три области сводятся к кругу обнаружения. Рассмотрим сначала упреждающую область. Выше было показано, что круг обнаружения всегда принадлежит упреждающей области. Таким образом, нужно показать, что любая точка, лежащая вне круга обнаружения, упреждающей области не принадлежит, т. е. что из нее возможно успешное уклонение от ищущего. Последнее очевидно: уклоняющемуся, если он находится в полуполосе на пути движения ищущего, достаточно двигаться со скоростью w параллельно траектории ищущего. Если же уклоняющийся находится вне указанной области, ему достаточно оставаться неподвижным. Поэтому упреждающая область совпадает с кругом обнаружения. Далее, обращение направления отсчета времени приводит к той же самой задаче, поэтому по лемме 1.1 остаточная, а значит, и следящая области также совпадают с кругом обнаружения.

Случай $\alpha > w$. Проведем следующее построение (рис. 1). Пусть S — ищущий, движущийся по прямой b_1b_2 вправо со скоростью α , SR и ST — радиусы круга обнаружения, перпендикулярные направлению движения, a_1a_2 и c_1c_2 — прямые, описываемые точками R и T . Построим на полупрямой Sb_1 точку P , такую что касательные PW и PX к кругу обнаружения образуют угол

$$\theta = \arcsin \frac{w}{\alpha} \quad (1.34)$$

с прямой b_1b_2 , и такую же точку Q на полупрямой Sb_2 . Покажем, что упреждающая область — это область, ограниченная дугой WVX и отрезками PW и PX . Круг обнаружения включается в упреждающую область. Рассмотрим область, ограниченную дугой WUX и отрезками

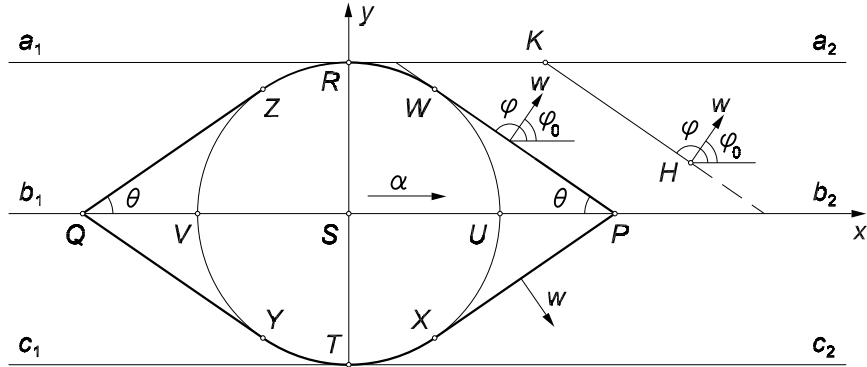


Рис. 1

PW , PX . Прямая PW движется со скоростью w , поэтому, если уклоняющийся находится в полуплоскости, уже ей пройденной, он не сможет ее догнать, и по той же причине не сможет догнать прямую PX . Поскольку вся область $PWUX$ движется со скоростью $\alpha > w$, уклоняющийся рано или поздно должен будет ее покинуть, а так как он не может этого сделать через отрезки PW и PX , он обязательно попадет на дугу WUX , т. е. в круг обнаружения. Следовательно, область $PWUX$ принадлежит упреждающей области. Покажем теперь, что помимо этой области и круга обнаружения других точек в упреждающей области нет. Если уклоняющийся находится за пределами области $a_2RW PXTc_2$, для уклонения он может просто оставаться на месте. Пусть уклоняющийся находится в произвольной точке H внутри этой области (уточним, что сами дуги RW , TX и отрезки PW , PX из нее исключаются, т. к. по доказанному принадлежат упреждающей области).

Рассмотрим траекторию уклонения, начинающуюся в H , причем уклоняющийся движется равномерно со скоростью w под углом

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta = \arccos \frac{w}{\alpha} \quad (1.35)$$

к направлению движения ищущего, в сторону ближайшей из прямых a_1a_2 , c_1c_2 . Дальнейшее рассмотрение удобно провести в системе координат, жестко связанной с ищущим (ось абсцисс направлена вдоль его движения). В этой системе компоненты скорости уклоняющегося равны

$$(w \cos \varphi_0 - \alpha, w \sin \varphi_0). \quad (1.36)$$

Найдем отсюда угол φ между вектором скорости уклоняющегося и осью абсцисс в подвижной системе:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{w \sin \varphi_0}{w \cos \varphi_0 - \alpha} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta - \frac{\alpha}{w}} = -\operatorname{tg} \theta. \quad (1.37)$$

Таким образом, $\varphi = \pi - \theta$, и в подвижной системе рассматриваемая траектория параллельна отрезку PW (или PX , если начальная точка H лежит ближе к c_1c_2). Это означает, что если точку H можно соединить хотя бы с одной из прямых a_1a_2 , c_1c_2 отрезком HK , параллельным PW (при соединении с a_1a_2) или параллельным PX (при соединении с c_1c_2) и не проходящим через круг обнаружения, то такая точка лежит вне упреждающей области, т. к. построенный отрезок представляет собой траекторию уклонения в подвижной системе. Очевидно, что данным свойством обладает любая точка из области $a_2RW PXTc_2$, поэтому эта область с упреждающей областью не пересекается.

Таким образом, доказано, что упреждающая область — это область, ограниченная дугой WVX и отрезками PW , PX . Применяя лемму 1.1, получаем, что остаточная область — это область, ограниченная дугой ZUY и отрезками QZ , QY . Наконец, следящая область — это область $PWRZQYTX$.

1.4.3 Критерии разрешимости задач гарантированного поиска

Лемма 1.4. $S^*(t)$ является решением задачи патрулирования с параметрами (Q, w, r) тогда и только тогда, когда для соответствующих τ_a , τ_b , τ'_a , τ'_b ($\tau_a \leq \tau'_a \leq \tau'_b \leq \tau_b$) выполнено условие

$$T(S^*; t) \supset Q \quad \forall t \in [\tau'_a, \tau'_b]. \quad (1.38)$$

Доказательство. Пусть $S^*(t)$ является решением. Это означает, что если уклоняющийся в произвольный момент времени $t \in [\tau'_a, \tau'_b]$ оказывается в произвольной точке $x \in Q$, то существует момент t^* , в который выполняется условие обнаружения. Вследствие произвольности t и x это и означает, что выполняется условие (1.38).

Пусть теперь для произвольной траектории $S^*(t)$ выполнено условие леммы. Пусть уклоняющийся в произвольный момент времени $t \in [\tau'_a, \tau'_b]$ оказывается в произвольной точке $x \in Q$. Тем самым он оказывается в следящей области и существует момент t^* , в который выполняется условие обнаружения. Значит, $S^*(t)$ будет решением. \square

Замечание. Приведенный критерий справедлив и для обобщенной задачи патрулирования, т. к. условие $Q_0 = \mathbb{R}^2$ в доказательстве не используется.

Лемма 1.5. Следующие пять утверждений эквивалентны:

1. $S^*(t)$ является решением задачи обнаружения с параметрами (Q_0, w, r) ;
2. $T(S^*; t) = Q_0 \quad \forall t \in [\tau_a, \tau_b]$;

3. $\mathcal{T}(S^*; t) = Q_0$ в некоторый момент $t \in [\tau_a, \tau_b]$;

4. $\mathcal{A}(S^*; \tau_a) = Q_0$;

5. $\mathcal{R}(S^*; \tau_b) = Q_0$.

Доказательство. Покажем, как из утверждения 1 следует утверждение 2. Пусть $S^*(t)$ — решение, t_0 — произвольный момент из отрезка $[\tau_a, \tau_b]$ и $x \in Q_0$ — произвольная точка. Предположим, что $x \notin \mathcal{T}(S^*; t_0)$, из чего следует, что $x \notin \mathcal{A}(S^*; t_0)$ и $x \notin \mathcal{R}(S^*; t_0)$. Это означает, что существует траектория уклоняющегося $H(t)$, такая что $H(t_0) = x$ и что уклоняющийся не был обнаружен вплоть до момента t_0 и не будет обнаружен после t_0 . Полученное противоречие с тем, что $S^*(t)$ — решение задачи доказывает, что $x \in \mathcal{T}(S^*; t_0)$, а из произвольности t_0 и x следует утверждение 2.

Очевидно, что из утверждения 2 следует утверждение 3 для произвольного t .

Покажем, как из утверждения 3 следует утверждение 1. Пусть $H(t)$ — произвольная траектория уклоняющегося. В момент t уклоняющийся находится в следящей области, а значит либо в остаточной, либо в упреждающей области (или в обеих сразу). В первом случае он был, во втором — будет обнаружен. Из произвольности $H(t)$ следует, что $S^*(t)$ — решение задачи.

Аналогичным образом устанавливается эквивалентность утверждений 1, 4 и 5. \square

Приведенные выше леммы позволяют сформулировать критерии разрешимости задач гарантированного поиска: задача патрулирования (или задача обнаружения, или обобщенная задача патрулирования) разрешима тогда и только тогда, когда существует хотя бы одна траектория, удовлетворяющая условиям соответствующей леммы.

Глава 2

Необходимые условия разрешимости задач гарантированного поиска на плоскости

Мы будем искать необходимые условия разрешимости задач гарантированного поиска по следующей схеме. Будет определено вспомогательное переменное множество $T_\lambda(S; t)$, содержащее в себе $T(S; t)$. Основным преимуществом использования множества $T_\lambda(S; t)$ является существование алгоритма, позволяющего его строить, в отличие от неконструктивно определенного $T(S; t)$. Для $T_\lambda(S; t)$ будет показано, что при определенных условиях на параметры Q_0, Q, w, r для любой траектории $S(t)$ и любого момента $t \in T$ выполняется соотношение $Q \notin T_\lambda(S; t)$ или $Q_0 \notin T_\lambda(S; t)$, что согласно критерию означает неразрешимость задачи. Логическое отрицание полученных условий на параметры Q_0, Q, w, r даст нам искомые необходимые условия разрешимости.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится наложить на множество Q_0 следующие ограничения. Будем предполагать, что (а) Q_0 связно, и (б) ∂Q_0 либо пусто, либо представляет собой кусочно-гладкую кривую. При выполнении этих условий будем говорить, что Q_0 принадлежит классу Ω .

2.1 Дискретная модель поиска

2.1.1 Определение дискретной модели

Для построения вспомогательного множества $T_\lambda(S; t)$ рассмотрим следующую вспомогательную поисковую модель. Эта модель является нестандартной в том смысле, что она отличается от базовой модели, описанной

в п. 1.2.1. В то же время можно сказать, что она некоторым образом аппроксимирует базовую модель.

Определение. *Дискретной моделью поиска* мы будем называть модель, в которой обнаружение возможно только в фиксированные моменты времени

$$t_n = t_0 + n\lambda, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \lambda > 0. \quad (2.1)$$

В остальные моменты обнаружения не происходит, как бы близко ни находились игроки.

Можно сказать, что в дискретной модели контрольное множество непусто только в моменты времени, задаваемые (2.1).

В дальнейшем при сопоставлении задачи в дискретной модели задаче в стандартной модели для упрощения рассуждений всегда будем считать, что начало и конец области определения траекторий игроков в стандартной модели $T = [\tau_a, \tau_b]$ совпадают с некоторыми моментами t_n , т. е. существуют такие p и q , что

$$\tau_a = t_p, \quad \tau_b = t_q. \quad (2.2)$$

Задачи гарантированного поиска (патрулирования, обнаружения и обобщенная задача патрулирования) очевидным образом переносятся на случай дискретной модели. Однако сделаем уточнение по поводу обозначений. Мы сохраним, в рамках дискретной модели, обозначения параметров Q_0 , Q и w , а также траекторий игроков $S(t)$, $H(t)$. Таким образом, множества допустимых траекторий сохраняют свой прежний вид (1.8)–(1.11). В то же время в силу причин, о которых говорится ниже, радиус обнаружения в дискретной модели получит новое обозначение, а именно ρ . С учетом вышесказанного, условие обнаружения для дискретной модели трансформируется из (1.12) в

$$|S(t^*) - H(t^*)| \leq \rho, \quad (2.3)$$

$$t^* = t_0 + n\lambda, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

В дискретной модели поиска появляется новый параметр λ . Проводя аналогию со сказанным в конце п. 1.2.3 по поводу параметров, задающих ту или иную задачу гарантированного поиска, можно считать, что в рамках дискретной модели задача патрулирования полностью задается четверкой (Q, w, ρ, λ) , задача обнаружения — четверкой (Q_0, w, ρ, λ) , а обобщенная задача патрулирования — пятеркой $(Q_0, Q, w, \rho, \lambda)$. Там, где рассуждения будут вестись сразу для всех трех формулировок, будем говорить о задаче в рамках дискретной модели с параметрами $(Q_0, Q, w, \rho, \lambda)$.

На дискретную модель естественным образом переносятся понятия упреждающей, остаточной и следящей областей. Для того, чтобы различать данные области, построенные в рамках двух разных моделей, мы

для случая дискретной модели будем применять обозначения $\mathcal{A}_\lambda(S; t)$, $\mathcal{R}_\lambda(S; t)$, $\mathcal{T}_\lambda(S; t)$, в которых фигурирует параметр λ , а для базовой модели сохраним старые обозначения без индекса.

2.1.2 Связь между информационными множествами дискретной и стандартной моделей

Лемма 2.1. *Рассмотрим задачу гарантированного поиска с параметрами (Q_0, Q, w, r) в рамках базовой модели и задачу того же типа в рамках дискретной модели с параметрами $(Q_0, Q, w, \rho, \lambda)$. Если выполнено неравенство*

$$\rho \geq r + \frac{\lambda(1+w)}{2}, \quad (2.5)$$

то для произвольной траектории $S(t)$

$$\mathcal{A}_\lambda(S; t) \supset \mathcal{A}(S; t), \quad \mathcal{R}_\lambda(S; t) \supset \mathcal{R}(S; t), \quad \mathcal{T}_\lambda(S; t) \supset \mathcal{T}(S; t) \quad (2.6)$$

для всех $t \in T$.

Доказательство. Докажем второе из соотношений (2.6). Пусть $x \in \mathcal{R}(S; t)$. Это означает, что для любой траектории уклоняющегося $H(t)$, проходящей через x в момент t , в некоторый момент t^* точка $H(t^*)$ лежала в круге обнаружения с центром в $S(t^*)$ и радиусом r . Рассмотрим ближайший к t^* момент времени t_n ; он отстоит от t^* не более чем на $\lambda/2$. Поэтому в момент t_n уклоняющийся находился в круге с центром в $S(t^*)$ и радиусом $r + w\lambda/2$. В свою очередь этот последний круг целиком лежит в круге с центром в $S(t_n)$ радиуса $r + w\lambda/2 + \lambda/2$, т. к. расстояние между $S(t_n)$ и $S(t^*)$ не превосходит $\lambda/2$. Таким образом, любая траектория $H(t)$, продолженная из x назад во времени, приводит нас в круг обнаружения дискретной модели в один из моментов t_n , что означает $x \in \mathcal{R}_\lambda(S; t)$. Вследствие произвольности x и t имеем $\mathcal{R}_\lambda(S; t) \supset \mathcal{R}(S; t)$ для всех $t \in T$.

С помощью леммы 1.1 очевидным образом устанавливается справедливость и остальных соотношений (2.6). \square

Во всех дальнейших рассуждениях мы фиксируем значение ρ следующим образом:

$$\rho = r + \frac{\lambda(1+w)}{2}, \quad (2.7)$$

При этом ρ перестает быть независимым параметром задачи в рамках дискретной модели. Поясним сказанное. В базовой модели фиксирован параметр r , а в дискретной модели — параметр λ . Тем самым, с учетом соотношения (2.7), параметр ρ также оказывается заданным. Для того, чтобы подчеркнуть, что дискретная модель носит вспомогательный характер и строится для аппроксимации базовой модели, мы для ее

описания будем задавать пару (r, λ) вместо пары (ρ, λ) . Поэтому задачи в рамках дискретной модели мы будем далее обозначать (Q_0, Q, w, r, λ) , а не $(Q_0, Q, w, \rho, \lambda)$. Несмотря на то, что r непосредственно не является параметром в дискретной модели, новое обозначение фактически делает его таковым. Это не будет приводить к недоразумениям, если помнить, что под обозначением вида (Q_0, Q, w, r, λ) мы понимаем задачу в рамках дискретной модели, сопоставленную задаче (Q_0, Q, w, r) в рамках стандартной модели, причем параметр λ выбран произвольным образом, а радиус обнаружения дискретной модели ρ задан соотношением (2.7).

2.2 Динамика информационных множеств в дискретной модели

Рассмотрим, что в дискретной модели представляет из себя остаточная область. В моменты t_n (в том числе в момент τ_a) в остаточную область добавляются круги $B(S(t_n), \rho)$, а на интервалах (t_n, t_{n+1}) за счет того, что обнаружения в это время не происходит, остаточная область уменьшается. Очевидно, что уменьшение происходит по следующему закону:

$$\mathcal{R}_\lambda(S; t) = \mathcal{R}_\lambda(S; t_n) \setminus \bigcup_{\substack{x \in Q_0 \\ x \notin \mathcal{R}_\lambda(S; t_n)}} B(x, w(t - t_n)), \quad t \in (t_n, t_{n+1}). \quad (2.8)$$

Поясним, откуда берется данная формула. Пусть $t \in (t_n, t_{n+1})$ и $x \in \mathcal{R}_\lambda(S; t_n)$. Если существует точка $x' \in Q_0 \setminus \mathcal{R}_\lambda(S; t_n)$, такая что $x \in B(x', w(t - t_n))$, то это означает, что существует такая траектория уклоняющегося $H(t)$, что $H(t_n) = x' \notin \mathcal{R}_\lambda(S; t_n)$ и $H(t) = x$. Это означает, что мы не можем гарантировать, что уклоняющийся был обнаружен, если он находится в x в момент t , и поэтому $x \notin \mathcal{R}_\lambda(S; t)$. С другой стороны, если для любой точки $x' \in Q_0 \setminus \mathcal{R}_\lambda(S; t_n)$ оказывается, что $x \notin B(x', w(t - t_n))$, то это гарантирует, что не существует траекторий уклоняющегося, ведущих из $Q_0 \setminus \mathcal{R}_\lambda(S; t_n)$ в $\mathcal{R}_\lambda(S; t)$ за время $[t_n, t]$, что означает, что уклоняющийся, находящийся в x в момент t , был обнаружен, и значит $x \in \mathcal{R}_\lambda(S; t)$.

Лемма 2.2. Пусть $Q_0 = \mathbb{R}^2$. Тогда для произвольной траектории $S(t) \in D_S$ и произвольного момента $t \in [\tau_a, \tau_b]$ множество $\partial \mathcal{R}_\lambda(S; t)$ состоит из конечного числа дуг окружностей.

Доказательство. В момент τ_a $\mathcal{R}_\lambda(S; \tau_a)$ представляет собой круг. Покажем, что ни добавление новых кругов в моменты t_n , ни убывание по закону (2.8) не выводит $\mathcal{R}_\lambda(S; t)$ за пределы указанного класса. Действительно, для добавления новых кругов это справедливо, т. к. объединение двух множеств с границами, состоящими из конечного числа дуг окружностей, снова дает множество из этого класса. Рассмотрим убывание по

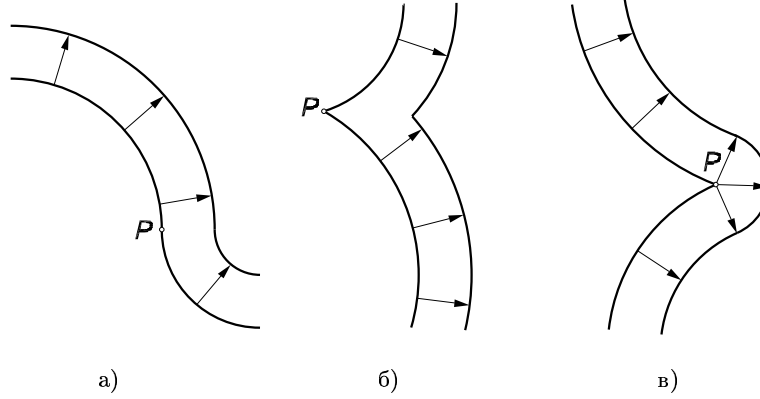


Рис. 2

закону (2.8). Очевидно, что отдельную дугу оно снова переводит в дугу, причем дуга с выпуклостью внутрь множества $\mathcal{R}_\lambda(S; t)$ переходит в дугу большего радиуса, а дуга с выпуклостью наружу — в дугу меньшего радиуса (и в конце концов исчезает совсем). Рассмотрим, что происходит на стыке двух соседних дуг P (рис. 2). Нетрудно видеть, что в случаях (а) и (б) (гладкий стык и стык острием наружу множества) стык переходит в стык такого же типа, а в случае (в) (стык острием внутрь) стык порождает еще одну дугу и переходит в два гладких стыка. \square

Замечание. Как и ранее, вследствие леммы 1.1 доказанное утверждение распространяется на $\mathcal{A}_\lambda(S; t)$ и $\mathcal{T}_\lambda(S; t)$.

Следствие. Если $Q_0 = \mathbb{R}^2$, то $\mathcal{R}_\lambda(S; t)$, $\mathcal{A}_\lambda(S; t)$ и $\mathcal{T}_\lambda(S; t)$ измеримы по Жордану, т. к. ограничены вследствие конечного числа моментов t_n и имеют кусочно-гладкую границу.

Доказанная лемма очевидным образом обобщается на случай произвольного $Q_0 \in \Omega$.

Лемма 2.3. Пусть $Q_0 \in \Omega$. Тогда для произвольной траектории $S(t) \in D_S$ и произвольного момента $t \in [\tau_a, \tau_b]$ множество $\partial\mathcal{R}_\lambda(S; t)$ представляет собой объединение некоторого подмножества ∂Q_0 и не более чем счетного количества дуг окружностей.

Данное утверждение, как и предпоследняя лемма, распространяется на $\mathcal{A}_\lambda(S; t)$ и $\mathcal{T}_\lambda(S; t)$. Поэтому все три области являются измеримыми по Жордану, и применительно к ним мы можем использовать понятие площади. Намереваясь и в дальнейшем проводить рассуждения лишь для $\mathcal{R}_\lambda(S; t)$, а затем распространять получаемые результаты на $\mathcal{A}_\lambda(S; t)$ и $\mathcal{T}_\lambda(S; t)$ с помощью леммы 1.1, обозначим площадь $\mathcal{R}_\lambda(S; t)$ через $Z_\lambda(t)$. Рассмотрим по очереди оба фактора, приводящих к изменению $Z_\lambda(t)$: убывание по закону (2.8) и добавление новых кругов в моменты t_n . Для

убывания на интервале (t_{n-1}, t_n) и для приращения в результате добавления одного круга в момент t_n введем следующие обозначения:

$$\Delta_1 Z_\lambda(t_n) = Z_\lambda(t_n - 0) - Z_\lambda(t_{n-1}), \quad (2.9)$$

$$\Delta_2 Z_\lambda(t_n) = Z_\lambda(t_n) - Z_\lambda(t_n - 0). \quad (2.10)$$

Пределы $Z_\lambda(t_n - 0)$ существуют в силу невозрастания $Z_\lambda(t)$ на интервалах между добавлениями кругов.

Выясним, какой вклад в изменение площади $\mathcal{R}_\lambda(S; t)$ вносится убыванием по закону (2.8). Сперва рассмотрим случай $Q_0 = \mathbb{R}^2$. Обозначим через $p(t)$ периметр множества $\mathcal{R}_\lambda(S; t)$. Однако более удобным для нас будет выбор в качестве аргумента не t , а Z_λ :

$$p(Z_\lambda) = p(Z_\lambda(t)). \quad (2.11)$$

Такое обозначение законно вследствие монотонного убывания $Z_\lambda(t)$ на каждом из отрезков (t_{n-1}, t_n) .

При убывании по закону (2.8) могут существовать моменты, в которые периметр меняется скачкообразно. Это происходит, когда сбли-

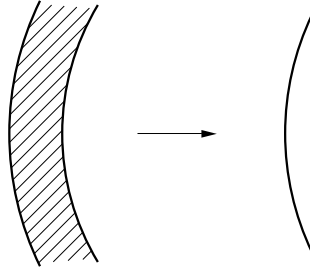


Рис. 3

жаются две лежащие друг напротив друга концентрические дуги (рис. 3). Вследствие того, что количество дуг в $\partial\mathcal{R}_\lambda(S; t)$ конечно, число таких моментов также конечно. В остальные моменты, очевидно, изменение $Z_\lambda(t)$ за счет убывания можно представить в виде

$$-\Delta Z_\lambda = p(Z_\lambda)w\Delta t + O(\Delta t^2) \quad (2.12)$$

или

$$-dZ_\lambda = p(Z_\lambda)w dt. \quad (2.13)$$

Поскольку периметр фигуры площади Z_λ не может быть меньше $2\sqrt{\pi Z_\lambda}$, последнее соотношение можно переписать в виде

$$-dZ_\lambda \geq P(Z_\lambda)w dt, \quad (2.14)$$

где

$$P(Z_\lambda) = 2\sqrt{\pi Z_\lambda}. \quad (2.15)$$

Интегрируя последнее неравенство по t от t_{n-1} до t_n , получаем для изменения $Z_\lambda(t)$ на одном шаге в результате убывания по закону (2.8) следующую оценку:

$$-\Delta_1 Z_\lambda(t_n) \geq w \int_{t_{n-1}}^{t_n} P(Z_\lambda) dt. \quad (2.16)$$

Применяя теорему о среднем, получаем:

$$-\Delta_1 Z_\lambda(t_n) \geq wP(\xi_n)\lambda, \quad (2.17)$$

где $Z_\lambda(t_n - 0) < \xi_n < Z_\lambda(t_{n-1})$.

Перейдем теперь к рассмотрению вклада в изменение площади $\mathcal{R}_\lambda(S; t)$, обусловленного добавлением новых кругов.

Лемма 2.4. *Существует функция $F(w, r, \lambda)$, зависящая только от указанных аргументов, такая, что для приращения площади остаточной области $\Delta_2 Z_\lambda(t_n)$ в результате добавления одного круга (любого, кроме самого первого) в дискретной модели с параметрами (Q_0, Q, w, r, λ) справедлива оценка*

$$\Delta_2 Z_\lambda(t_n) \leq F(w, r, \lambda). \quad (2.18)$$

При этом функция $F(w, r, \lambda)$ допускает разложение

$$F(w, r, \lambda) = F(w, r)\lambda + O(\lambda^2), \quad (2.19)$$

где

$$F(w, r) = 2r \left[w(\pi - \arccos w) + \sqrt{1 - w^2} \right]. \quad (2.20)$$

Доказательство. В момент t_{n-1} к $\mathcal{R}_\lambda(S; t)$ добавился круг $B(S(t_{n-1}), \rho)$, поэтому в момент $t_n = t_{n-1} + \lambda$ в $\mathcal{R}_\lambda(S; t)$ будет содержаться круг $B(S(t_{n-1}), \rho - w\lambda)$. Следовательно, приращение площади за счет добавления в момент t_n круга $B(S(t_n), \rho)$ не превосходит площади множества

$$B(S(t_n), \rho) \setminus B(S(t_{n-1}), \rho - w\lambda). \quad (2.21)$$

Иными словами, приращение площади не превосходит площади множества $B_1 \setminus B_2$, где $B_1 = B(x, \rho)$, $B_2 = B(y, \rho - w\lambda)$, а $|x - y|$ может лежать в пределах от 0 до λ (рис. 4). Покажем, что площадь $B_1 \setminus B_2$ максимальна при $|x - y| = \lambda$. Действительно, если B_2 представить в виде объединения двух непересекающихся множеств $B'_2 = B_2 \cap B_1$ и $B''_2 = B_2 \setminus B'_2$, то становится очевидным, что площадь множества $B_1 \setminus B_2 = B_1 \setminus B'_2$ максимальна, когда площадь B'_2 минимальна, что в свою очередь означает, что площадь B''_2 максимальна, т. е. максимален по площади «кусочек» круга B_2 , выступающий за пределы B_1 , а это, очевидно, достигается при максимальном расстоянии между центрами, т. е. при $|x - y| = \lambda$. Это означает, что в качестве $F(w, r, \lambda)$ можно взять площадь множества $B(x, \rho) \setminus B(y, \rho - w\lambda)$, где $|x - y| = \lambda$. Элементарные, но громоздкие вычисления этой величины приводят к (2.19) и (2.20). \square

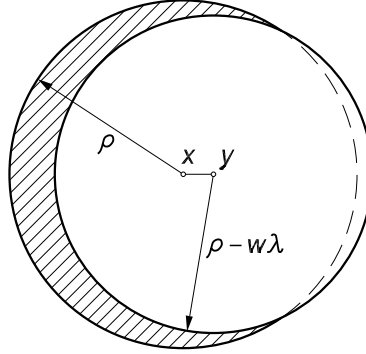


Рис. 4

Складывая обе полученные оценки $\Delta_1 Z_\lambda(t_n)$ и $\Delta_2 Z_\lambda(t_n)$, получаем следующую оценку для полного изменения $Z_\lambda(t)$ на одном шаге дискретной задачи для случая $Q_0 = \mathbb{R}^2$:

$$\Delta Z_\lambda(t_n) = \Delta_1 Z_\lambda(t_n) + \Delta_2 Z_\lambda(t_n) \leq F(w, r, \lambda) - wP(\xi_n)\lambda. \quad (2.22)$$

По своему построению данная оценка справедлива для произвольной траектории ищущего.

Некоторые свойства $F(w, r)$ рассматриваются ниже в п. 3.2.2.

2.3 Функция периметра

2.3.1 Определение функции периметра

Оценка (2.22) была получена для случая $Q_0 = \mathbb{R}^2$. Для того, чтобы распространить ее на случай произвольного $Q_0 \in \Omega$, нам понадобится ввести понятие функции периметра.

В рассуждении, ведущем к формуле (2.22), предполагалось, что убывание по закону (2.8) происходит по всей границе множества $\mathcal{R}_\lambda(S; t)$. Для Q_0 , отличных от \mathbb{R}^2 , это, вообще говоря, не так: если ∂Q_0 и $\partial \mathcal{R}_\lambda(S; t)$ имеют общие участки, то по ним, очевидно, убывания не происходит. Введем понятия *эффективной границы* и *эффективного периметра*. Эффективной границей множества $\mathcal{R}_\lambda(S; t)$ будем называть его границу за исключением участков, совпадающих с ∂Q_0 , а эффективным периметром — длину эффективной границы. Для эффективного периметра будем использовать обозначение p_E :

$$p_E(\mathcal{R}_\lambda(S; t)) = |\partial \mathcal{R}_\lambda(S; t) \setminus \partial Q_0|. \quad (2.23)$$

По аналогии с $p(Z_\lambda(t))$, рассмотрим функцию $p_E(Z_\lambda(t))$, означающую эффективный периметр множества $\mathcal{R}_\lambda(S; t)$. В предыдущем рассуждении мы от функции $p(Z_\lambda)$, вид которой зависит от конкретной траекто-

рии ищущего, перешли к ее оценке снизу $P(Z_\lambda)$. Покажем, как аналогичный переход можно произвести при помощи $p_E(Z_\lambda)$. Функция $p(Z_\lambda)$ имеет смысл минимально возможного периметра для множеств площади Z_λ . Таким образом, для распространения на случай произвольного Q_0 в определении $p(Z_\lambda)$ нужно обычный периметр заменить на эффективный. Итак, мы приходим к следующему определению.

Определение. Функцией периметра $P(Q_0; Z)$ произвольного множества Q_0 называется

$$P(Q_0; Z) = \inf_{\substack{Q \subset Q_0 \\ |Q|=Z}} p_E(Q), \quad (2.24)$$

т. е. точная нижняя грань эффективных периметров всех подмножеств Q_0 площади Z . (Мы использовали обозначение Z вместо Z_λ , чтобы подчеркнуть самостоятельный характер определения $P(Q_0; Z)$, не зависящий от применения в теории поиска.)

Таким образом, оценка (2.22) распространяется на случай произвольного $Q_0 \in \Omega$ при условии замены в ней функции $P(Z_\lambda)$ специального вида (2.15) на соответствующую функцию периметра данного множества Q_0 . При этом можно сказать, что функция (2.15) $P(Z) = 2\sqrt{\pi Z}$ является функцией периметра плоскости.

2.3.2 Свойства функции периметра

Перед тем, как перейти к построению верхних оценок для $\mathcal{R}_\lambda(S; t)$ с помощью оценки (2.22), рассмотрим некоторые свойства функции периметра. Пусть μ обозначает площадь Q_0 , конечную или бесконечную.

1° У каждого множества Q_0 своя функция периметра $P(Q_0; Z)$. Там, где это не вызовет недоразумений, мы будем опускать аргумент Q_0 . Функция периметра для множеств с конечной площадью определяется на $[0, \mu]$, а для множеств с бесконечной площадью — на $[0, +\infty)$.

2° Функция периметра обращается в 0 в $Z = 0$, а для множеств с конечной площадью — еще и в $Z = \mu$ (очевидно):

$$P(Q_0; 0) = 0, \quad (2.25)$$

$$P(Q_0; \mu) = 0 \quad (\mu < \infty). \quad (2.26)$$

3° Функция периметра неотрицательна (очевидно):

$$P(Q_0; Z) \geq 0. \quad (2.27)$$

4° Пусть $\mu < \infty$. Тогда

$$P(Q_0; Z) = P(Q_0; \mu - Z). \quad (2.28)$$

Это следует из того, что точная нижняя грань в определении функции периметра, взятая по множествам площади Z , ничем не отличается от точной нижней грани, взятой по их дополнениям до Q_0 (площади $\mu - Z$), т. к. эффективные периметры множества и его дополнения одинаковы.

5° Если $Q_0 \in \Omega$, то $P(Q_0; Z)$ непрерывна.

Доказательство. Покажем сначала, что $P(Z)$ непрерывна сверху, т. е. что

$$\overline{\lim}_{Z \rightarrow Z_0} P(Z) \leq P(Z_0). \quad (2.29)$$

$P(Z_0) = P_0$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется пара подмножеств Q_0 с площадями Z_0 и $\mu - Z_0$, разделенных эффективной границей длины, не превышающей $P_0 + \varepsilon/2$. Незначительно варьируя эту границу, получим, что множества площади $Z_0 \pm \delta$ и $\mu - Z_0 \mp \delta$ можно ограничить кривыми общей длины не более $P_0 + \varepsilon$, что и означает справедливость (2.29).

Покажем теперь, что $P(Z)$ непрерывна снизу, т. е.

$$\underline{\lim}_{Z \rightarrow Z_0} P(Z) \geq P(Z_0). \quad (2.30)$$

Предположим противное: пусть имеется последовательность $Z_n \rightarrow Z_0$, такая что $P(Z_n) \rightarrow P' < P(Z_0)$. В силу (2.25), (2.26) и (2.27) Z_0 не может равняться 0 или μ . Возможны два варианта: (1) в последовательности Z_n имеется бесконечное число членов $Z_n < Z_0$, и (2) имеется не более чем конечное число таких членов.

Рассмотрим случай (1). Можно считать Z_n состоящим лишь из $Z_n < Z_0$. $P(Z_n) \rightarrow P'$ означает, что найдутся множества, площади которых меньше Z_0 на сколь угодно малую величину, с эффективными периметрами, сколь угодно мало отличающимися от P' . Взяв одно из таких множеств U с площадью, достаточно близкой к Z_0 , и достаточно близким к P' эффективным периметром, построим новое множество, которое будет представлять собой объединение U и кружочка B , такого что он не пересекается с U и его площадь равна разности между Z_0 и площадью U . Мы получим множество площади Z_0 с эффективным периметром, сколь угодно мало отличающимся от $P' < P(Z_0)$, а это противоречит определению $P(Z_0)$. Заметим, что существование B следует из того, что Z_0 не равно 0 или μ .

Случай (2) рассматривается аналогично с той лишь разницей, что все Z_n можно считать большими Z_0 , кружочек B целиком лежит в U и рассматривается не объединение U и B , а их разность. \square

6° Пусть $Q_0 \in \Omega$ и $\mu < \infty$. Тогда на отрезке $[0, \mu/2]$ существует точка Z^* , в которой $P(Q_0; Z)$ достигает глобального максимума.

Доказательство. По 2-й теореме Вейерштрасса $P(Z)$ на отрезке $[0, \mu]$ достигает своего максимального значения, а вследствие свойства 4° максимум найдется и на отрезке $[0, \mu/2]$. \square

7° Установим, на каких именно подмножествах $U \subset Q_0$ реализуется точная нижняя грань в определении функции периметра (2.24). Это позволит нам конструктивно строить функции периметра различных множеств. Сперва предположим, что Q_0 — выпуклое.

Теорема 2.1. Пусть $Q_0 \in \Omega$ и Q_0 выпуклое. Тогда точные нижние грани в определении функции периметра (2.24) реализуются на таких подмножествах $U \subset Q_0$, что каждый связный компонент эффективной границы U представляет собой либо дугу окружности, либо отрезок прямой, причем эти дуги или отрезки в каждом из своих концов либо образуют с ∂Q_0 прямой угол, либо попадают в точку стыка двух гладких участков ∂Q_0 .

Доказательство. Пусть ∂Q_0 некоторым образом параметризована. Выберем на ∂Q_0 две различные точки M и N ; пусть им соответствуют значения параметра u и v . Хорда MN делит Q_0 на две части. Обозначим через $f(u, v)$ площадь той из них, которая лежит слева от вектора MN (рис. 5).

Соединим хордой точки пересечения ∂Q_0 и эффективной границы некоторого подмножества U , и поместим в середину этой хорды O систему полярных координат (рис. 6). Таким образом, эффективную границу можно задать функцией $R(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$, а эффективный периметр — функционалом

$$P[R] = \int_0^\pi \sqrt{R^2(\theta) + \dot{R}^2(\theta)} d\theta. \quad (2.31)$$

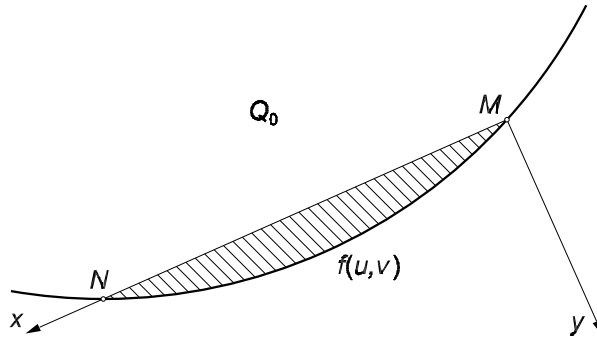


Рис. 5

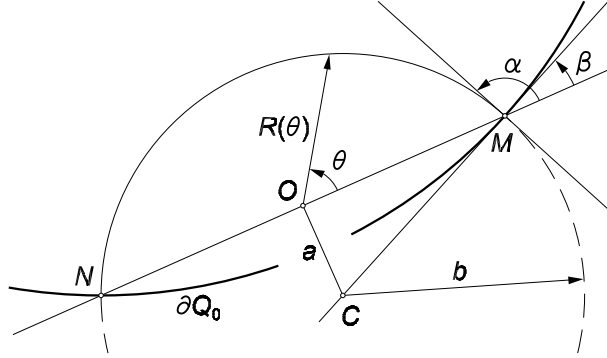


Рис. 6

Площадь U равна

$$Z[R] = Z_1[R] + f(u, v), \quad (2.32)$$

где

$$Z_1[R] = \int_0^\pi \frac{R^2}{2} d\theta. \quad (2.33)$$

Будем считать, что параметру u соответствует точка $\theta = 0$, а параметру v — точка $\theta = \pi$. Мы приходим к следующей вариационной задаче: требуется минимизировать $P[R]$ при неизменном значении $Z[R]$. Запишем эту задачу:

$$\delta L[R] = 0, \quad (2.34)$$

$$L[R] = P[R] + \lambda \{Z_1[R] + f(u, v)\}, \quad (2.35)$$

$$R(0) = R(\pi). \quad (2.36)$$

При этом вариации $\delta R(0) = \delta R(\pi)$, δu и δv не являются независимыми, а связаны определенным образом.

Обычным способом варьируя $P[R] + \lambda Z_1[R]$, получаем уравнение Эйлера для подынтегральной функции плюс условия на границе, которые появляются при интегрировании по частям, т. к. вариация на границе не обращается в 0. Поскольку подынтегральная функция не содержит θ явно, можно сразу записать первый интеграл уравнения Эйлера, содержащий произвольную постоянную D :

$$R^2 + \left(D + \frac{\lambda}{2}\right) \sqrt{R^2 + \dot{R}^2} = 0. \quad (2.37)$$

К (2.37) приводит и обычная задача минимизации периметра при постоянной площади без граничных условий. Как известно, решением является окружность, и его можно записать в виде

$$R(\theta) = \sqrt{b^2 - a^2 \cos^2 \theta} - a \sin \theta, \quad (2.38)$$

где b — радиус окружности, a — расстояние между ее центром C и началом системы полярных координат, и

$$\lambda = -\frac{1}{b}, \quad D = \frac{b^2 - a^2}{2b}. \quad (2.39)$$

В пределе при $\lambda \rightarrow 0$ из (2.38) получается уравнение прямой.

Условия на границе, которые получаются при интегрировании по частям и варьировании неинтегрального члена $f(u, v)$, дадут

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \right|_{\theta=\pi} \delta R(\pi) - \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \right|_{\theta=0} \delta R(0) + \lambda \frac{\partial f}{\partial u} \delta u + \lambda \frac{\partial f}{\partial v} \delta v = 0. \quad (2.40)$$

Рассмотрим, например, условие в точке $\theta = 0$. Положим $\delta v = 0$ и вспомним, что $\delta R(0) = \delta R(\pi)$. Мы получим

$$\left(\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \right|_{\theta=\pi} - \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \right|_{\theta=0} \right) \delta R(0) + \lambda \frac{\partial f}{\partial u} \delta u = 0. \quad (2.41)$$

Обозначим через α угол между хордой и окружностью в точке $\theta = 0$, через β — угол между хордой и ∂Q_0 , а в качестве параметра u выберем длину l хорды при фиксированном v . Элементарные вычисления с учетом соотношений (2.39), $\delta R(0) = \delta l/2$ и $l/(2b) = \sin \alpha$ приводят к выражениям

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \right|_{\theta=\pi} = - \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \right|_{\theta=0} = - \left. \frac{\dot{R}}{\sqrt{R^2 + \dot{R}^2}} \right|_{\theta=0} = -\cos \alpha \quad (2.42)$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial u} \delta u = \frac{l \operatorname{tg} \beta}{2} dl = - \frac{2 \sin \alpha \operatorname{tg} \beta}{\lambda} \delta R(0), \quad (2.43)$$

подстановка которых в (2.41) дает

$$(\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \beta) \delta R(0) = 0, \quad (2.44)$$

откуда в силу произвольности $\delta R(0)$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = -1, \quad (2.45)$$

что и доказывает перпендикулярность ∂Q_0 и эффективной границы U (по доказанному, дуги окружности или отрезка прямой).

В приведенном рассуждении использовалась регулярность ∂Q_0 в точках стыка с эффективной границей. О том, как стыкуются ∂Q_0 и эффективная граница в противном случае, данное утверждение ничего не говорит. \square

Заметим, что в формулировке и доказательстве предполагалось, что эффективная граница множеств, на которых реализуются точные нижние грани в определении функции периметра, состоит лишь из одной дуги или отрезка. Однако это допущение не нужно, если предположить, что проведенное рассуждение относится не ко всей эффективной границе, а к одной из ее связных компонент. Тем не менее, для выпуклых множеств данное допущение оказывается справедливым и будет доказано ниже (см. лемму 2.9).

Покажем, как теперь, зная результат, можно провести более компактное рассуждение (без привлечения вариационного исчисления), притом свободное от предположения о выпуклости Q_0 .

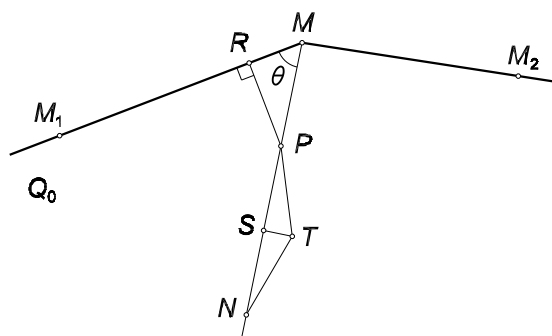
Теорема 2.2. *Пусть $Q_0 \in \Omega$. Тогда точные нижние грани в определении функции периметра (2.24) реализуются на таких подмножествах $U \subset Q_0$, что каждый связный компонент эффективной границы U представляет собой дугу окружности или отрезок прямой.*

Доказательство. Пусть PQ — связный компонент эффективной границы U . Предположим, что PQ не является ни дугой окружности, ни отрезком прямой. Тогда на PQ можно выбрать достаточно малый участок $RS = u$, на котором кривизна непостоянна, но не меняет знак. Обозначим через v отрезок прямой, соединяющий R и S , а через ζ — площадь фигуры, ограниченной u и v . Построим дугу окружности u' , соединяющую R и S , лежащую по ту же сторону от v , что и u , и такую, что площадь кругового сегмента, ограниченного u' и v , равна ζ . Нетрудно видеть, что длина u' строго меньше длины u . Таким образом, кривая $PR \cup u' \cup SQ$ делит Q_0 на множества той же площади, что и кривая PQ , но при этом имеет меньшую длину, что приводит к противоречию с определением точной нижней грани. Малость RS гарантирует, что u' не пересекается ни с ∂Q_0 , ни с другими связными компонентами эффективной границы U . \square

Теорема 2.3. *Пусть $Q_0 \in \Omega$. Тогда точные нижние грани в определении функции периметра (2.24) реализуются на таких подмножествах $U \subset Q_0$, что каждый связный компонент эффективной границы U не пересекает ∂Q_0 либо*

- в гладкой точке ∂Q_0 под прямым углом, либо
- в точке стыка двух гладких участков ∂Q_0 , при этом острие стыка направлено внутрь Q_0 , и оба угла в точке стыка не меньше $\pi/2$.

Доказательство. Предположим противное: пусть для некоторого Z существует такое подмножество U площади Z и с эффективным периметром $P(Q_0; Z)$, что некоторый связный компонент MM' эффективной



границы U пересекает ∂Q_0 либо в гладкой точке не под прямым углом, либо в точке стыка двух гладких участков ∂Q_0 , и при этом острие стыка направлено наружу Q_0 , либо острие стыка направлено внутрь Q_0 , но хотя бы один из углов в точке стыка меньше $\pi/2$ (рис. 7).

Пусть M — рассматриваемая точка стыка MM' и ∂Q_0 . Предположим сначала, что MM' является отрезком прямой, и что в некоторой окрестности точки M оба гладких участка ∂Q_0 : MM_1 и MM_2 — также представляют собой отрезки прямых. Выберем на рассматриваемом участке эффективной границы точку N , достаточно близкую к M . Пусть $|MN| = a$. Между M и N выберем точку P на расстоянии x от M . По условиям теоремы, из двух углов M_1MN M_2MN будет хотя бы один, меньший $\pi/2$; пусть это угол M_1MN . Из точки P опустим перпендикуляр PR на MM_1 . Также построим точку T , лежащую с той же стороны относительно прямой MN , что и M_2 , и такую, чтобы равнобедренный треугольник NPT с основанием NP имел ту же площадь, что и треугольник MPR .

Обозначим через $f(x)$ длину ломаной $NTPR$. Нетрудно видеть, что

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x^4 \sin^2 x \cos^2 x}{(a-x)^2} + (a-x)^2} + x \sin \theta, \quad (2.46)$$

$$f(0) = a, \quad (2.47)$$

$$f'(0) = \sin \theta - 1 < 0, \quad (2.48)$$

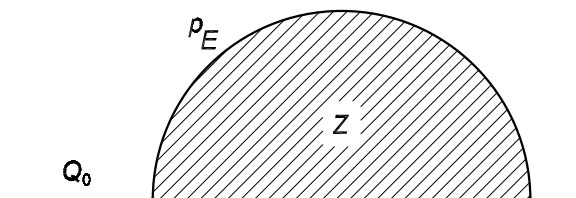


Рис. 8

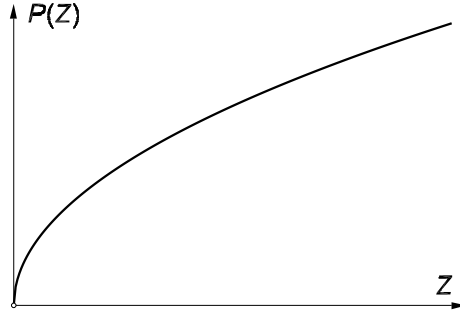


Рис. 9

что означает, что для достаточно малых $x > 0$ ломаная $NTPR$ короче отрезка MN и при этом ограничивает ту же самую площадь. Мы получаем противоречие с тем фактом, что отрезок MN является частью эффективной границы подмножества, на котором реализуется точная нижняя грань в определении функции периметра.

В общем случае, когда MN , M_1N и M_2N не являются прямыми, точку N всегда можно выбрать достаточно близкой к M , чтобы в приведенном рассуждении можно было пренебречь отличием MN , M_1N и M_2N от прямых вследствие их регулярности. \square

2.3.3 Примеры функций периметра

Применяя свойство 7°, найдем функции периметра простейших множеств.

Пример 2.1. Функция периметра полуплоскости. На полуплоскости точная нижняя грань в определении функции периметра реализуется на полукругах, примыкающих к границе множества. Площадь и эффективный периметр полукруга равны соответственно (рис. 8)

$$Z = \frac{\pi R^2}{2}, \quad p_E = \pi R, \quad (2.49)$$

откуда получаем следующее выражение для функции периметра:

$$P(Z) = \sqrt{2\pi Z}. \quad (2.50)$$

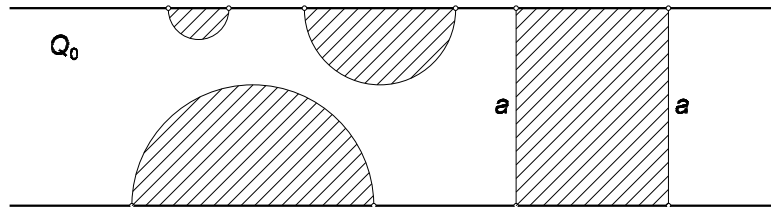


Рис. 10

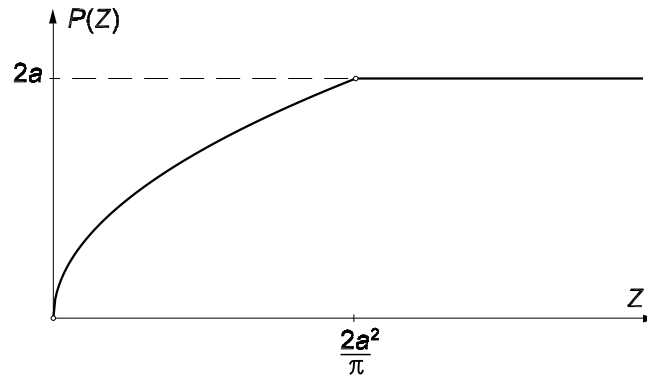


Рис. 11

График функции приведен на рис. 9.

Пример 2.2. Функция периметра полосы. Пусть a обозначает ширину полосы. Для достаточно малых Z точная нижняя грань реализуется, как и в предыдущем примере, на полукругах. Однако, как только Z становится достаточно большим, а именно — когда соответствующий эффективный периметр (длина полуокружности) становится равным $2a$, оптимальным становится не полуокружность, а прямоугольник, эффективный периметр которого равен $2a$ независимо от площади (рис. 10). Таким образом, функция периметра полосы дается следующим выражением:

$$P(Z) = \begin{cases} \sqrt{2\pi Z}, & Z < \frac{2a^2}{\pi}, \\ 2a, & Z \geq \frac{2a^2}{\pi}. \end{cases} \quad (2.51)$$

График функции приведен на рис. 11. Для этого и следующего примеров примечательным является тот факт, что функция периметра неограниченного множества оказывается тем не менее ограниченной.

Пример 2.3. Функция периметра полуполосы. Данный случай рассматривается аналогично предыдущему с той лишь разницей, что для

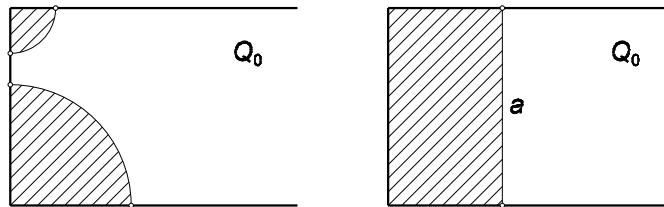


Рис. 12

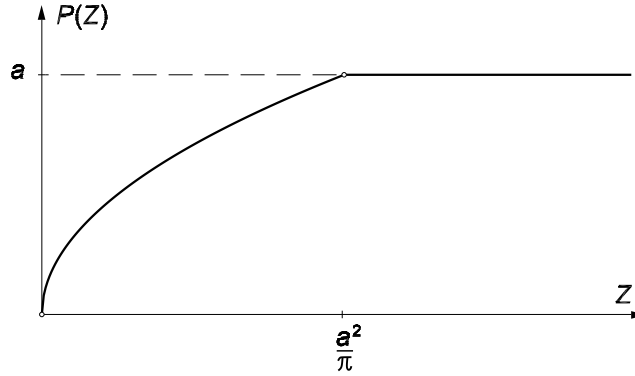


Рис. 13

достаточно малых Z точная нижняя грань реализуется на круговых сегментах с углом $\pi/2$, а эффективный периметр прямоугольников равен a (рис. 12). Функция периметра получается равной

$$P(Z) = \begin{cases} \sqrt{\pi Z}, & Z < \frac{a^2}{\pi}, \\ a, & Z \geq \frac{a^2}{\pi}. \end{cases} \quad (2.52)$$

График функции приведен на рис. 13.

Пример 2.4. Функция периметра плоского угла. Найдем функцию периметра множества, заключенного между двумя полупрямыми, образующими угол θ , $0 < \theta < 2\pi$. Нетрудно видеть, что для $\theta \geq \pi$ функция периметра совпадает с функцией периметра полуплоскости, а для $\theta < \pi$ точная нижняя грань реализуется на множествах, показанных на рис. 14. Таким образом, для функции периметра имеем:

$$P(Z) = \sqrt{2 \min(\theta, \pi) Z}. \quad (2.53)$$

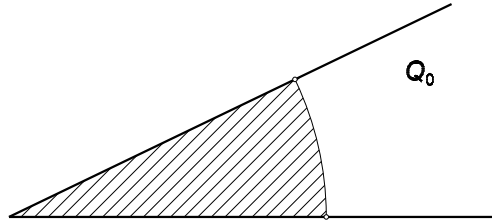


Рис. 14

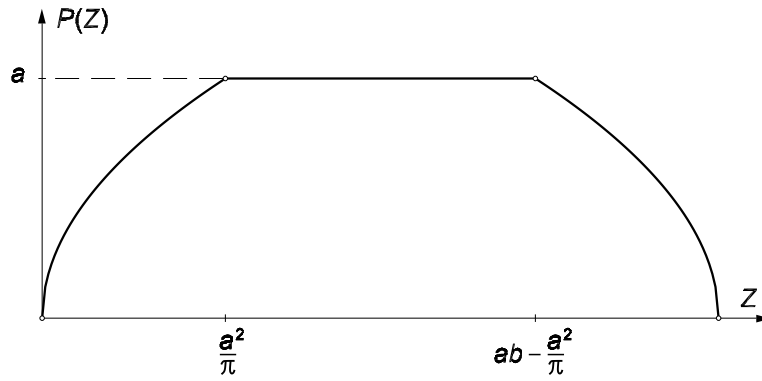


Рис. 15

Пример 2.5. Функция периметра прямоугольника. Обозначим через a и b длины сторон прямоугольника, причем $a \leq b$. Дословно повторяя рассуждения, сделанные для полуполосы, и применяя свойство 4°, получаем

$$P(Z) = \begin{cases} \sqrt{\pi Z}, & Z \in \left[0, \frac{a^2}{\pi}\right), \\ a, & Z \in \left[\frac{a^2}{\pi}, ab - \frac{a^2}{\pi}\right], \\ \sqrt{\pi(ab - Z)}, & Z \in \left(ab - \frac{a^2}{\pi}, ab\right]. \end{cases} \quad (2.54)$$

График функции приведен на рис. 15.

Пример 2.6. Функция периметра равностороннего треугольника. Пусть длина стороны треугольника равна a . Рассуждая по аналогии

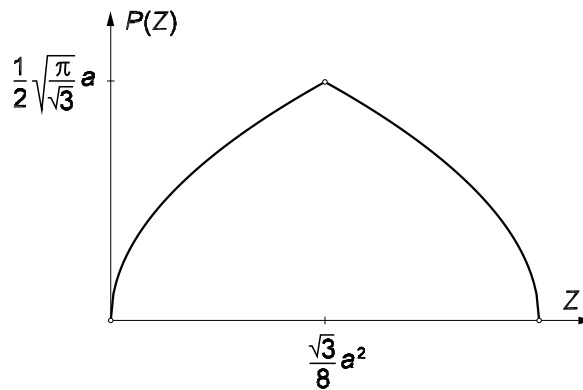


Рис. 16

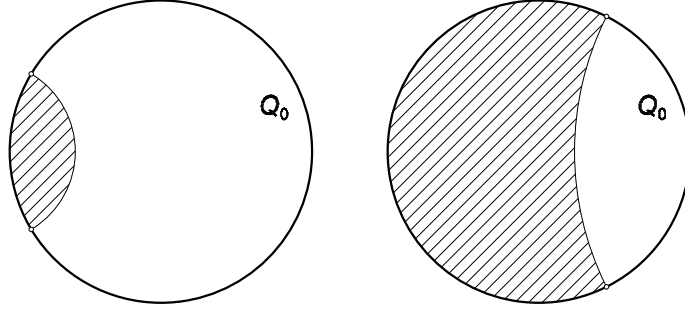


Рис. 17

с плоским углом, мы можем записать:

$$P(Z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\pi Z}{3}}, & Z \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{8}a^2\right], \\ \sqrt{\frac{2\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - Z\right)}, & Z \in \left(\frac{\sqrt{3}}{8}a^2, \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right]. \end{cases} \quad (2.55)$$

График функции приведен на рис. 16.

Пример 2.7. Функция периметра круга. В данном случае точная нижняя грань реализуется на множествах, эффективной границей которых является дуга окружности, ортогональная ∂Q_0 (рис. 17). В отличие от предыдущих примеров, здесь для функции периметра не удастся получить явного выражения. Вводя параметр $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$, для функции периметра единичного круга получаем следующую систему:

$$\begin{cases} P = 2\gamma \operatorname{ctg} \gamma, \\ Z = \frac{\pi}{2} - \gamma - \operatorname{ctg} \gamma + \gamma \operatorname{ctg}^2 \gamma, \end{cases} \quad (2.56)$$

или, после очевидных преобразований,

$$\begin{cases} P = 2\gamma \operatorname{ctg} \gamma, \\ Z = \frac{\pi}{2} - \gamma - \frac{P(2-P)}{4\gamma}. \end{cases} \quad (2.57)$$

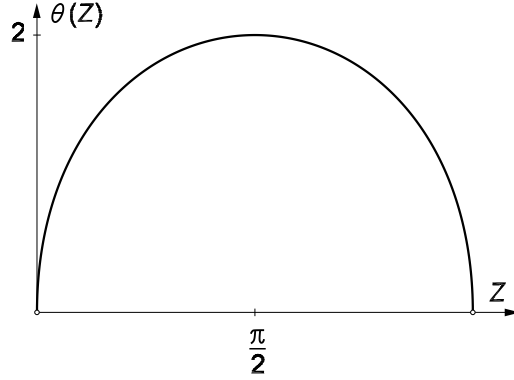


Рис. 18

Исключая γ , получаем:

$$P = \left\{ \frac{\pi}{2} - Z \pm \sqrt{\left(Z - \frac{\pi}{2}\right)^2 - P(2 - P)} \right\} \times \\ \times \operatorname{ctg} \frac{\frac{\pi}{2} - Z \pm \sqrt{\left(Z - \frac{\pi}{2}\right)^2 - P(2 - P)}}{2}. \quad (2.58)$$

(Под знаком котангенса стоит значение γ , выраженное через P и Z .) Анализ корней показывает, что для $Z \in [0, \pi/2]$ следует брать плюс, а для $Z \in [\pi/2, \pi]$ — минус. Будем обозначать функцию периметра единичного круга через $\theta(Z)$. График $\theta(Z)$ приведен на рис. 18. Отметим выражение для производной $\theta(Z)$ через γ :

$$\frac{d\theta}{dZ} = \operatorname{tg} \gamma. \quad (2.59)$$

Обозначим через $\theta(a; Z)$ функцию периметра круга радиуса a . Очевидно, имеем:

$$\theta(a; Z) = a \theta\left(\frac{Z}{a^2}\right). \quad (2.60)$$

Интересным представляется рассмотреть поведение $\theta(a; Z)$ при $a \rightarrow +\infty$ для некоторого фиксированного Z . Перепишем систему (2.56) для произвольного $a > 0$ (при этом P становится функцией a):

$$\begin{cases} \frac{P(a)}{a} = 2\gamma \operatorname{ctg} \gamma, \\ \frac{Z}{a^2} = \frac{\pi}{2} - \gamma - \operatorname{ctg} \gamma + \gamma \operatorname{ctg}^2 \gamma. \end{cases} \quad (2.61)$$

Нетрудно видеть, что $\gamma \rightarrow \pi/2$ при $a \rightarrow +\infty$ (см., например, (2.58), где выражение под знаком котангенса равняется γ с учетом замены

$P \rightarrow P/a, Z \rightarrow Z/a^2$). Нам будет удобно перейти к параметру $\beta = \pi/2 - \gamma$:

$$\begin{cases} \frac{P(a)}{a} = (\pi - 2\beta) \operatorname{tg} \beta, \\ \frac{Z}{a^2} = \beta - \operatorname{tg} \beta + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \operatorname{tg}^2 \beta. \end{cases} \quad (2.62)$$

Разложим правые части в степенной ряд по β в окрестности $\beta = 0$ и возведем первое из них в квадрат:

$$\begin{cases} \frac{P^2(a)}{a^2} = \pi^2 \beta^2 + O(\beta^3), \\ \frac{Z}{a^2} = \frac{\pi}{2} \beta^2 + O(\beta^3). \end{cases} \quad (2.63)$$

Деля первое разложение на второе, переходя к пределу при $a \rightarrow +\infty$ и помня, что при этом $\beta \rightarrow 0$, получаем окончательно:

$$\theta(+\infty; Z) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \theta(a; Z) = \sqrt{2\pi Z}. \quad (2.64)$$

Мы приходим к закономерному выводу: функция периметра круга с радиусом, стремящимся к бесконечности, стремится к функции периметра полуплоскости (см. пример 2.1). Это практически очевидно с геометрической точки зрения: для фиксированного Z всегда можно выбрать такое достаточно большое значение радиуса a , чтобы участок окружности сколь угодно мало отличался от прямой.

Также геометрически очевидным представляется тот факт, что $\theta(a; Z)$ как функция a для фиксированного $Z > 0$ будет монотонно возрастать. Тем не менее докажем это аналитически. Из второго из уравнений (2.61) легко находится производная $d\gamma/da$; дифференцирование первого уравнения по a , подстановка туда $d\gamma/da$ и исключение a приводит к следующему выражению:

$$\frac{dP}{da} = 2 \left\{ 1 - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) \operatorname{tg} \gamma \right\}. \quad (2.65)$$

Нетрудно видеть, что эта функция положительна для $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$ и обращается в 0 в $\gamma = \pi/2$ (что соответствует $a = +\infty$). Таким образом, доказано следующее утверждение:

Лемма 2.5. *Для фиксированного $Z > 0$ $\theta(a; Z)$ как функция a монотонно возрастает от 0 (в $a = \sqrt{Z/\pi}$) до $\sqrt{2\pi Z}$ (в $a = +\infty$).*

Следствие. Функция периметра полуплоскости является мажорантой функции периметра круга любого радиуса:

$$\theta(a; Z) \leq \sqrt{2\pi Z}, \quad (2.66)$$

причем неравенство будет строгим, если исключить $Z = 0$,

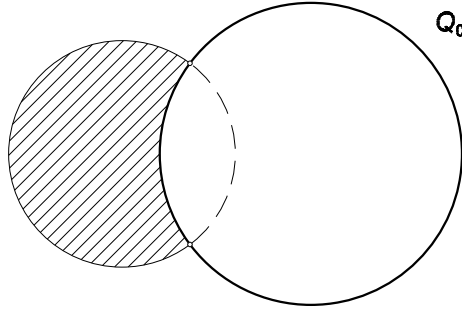


Рис. 19

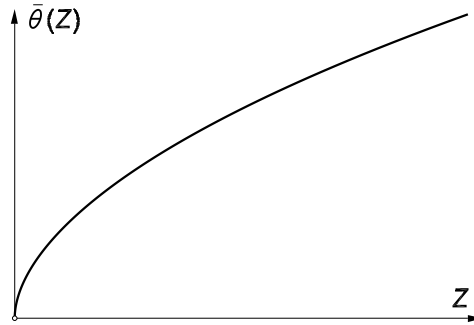


Рис. 20

Пример 2.8. Функция периметра плоскости с выкинутым кругом. Проводя рассуждения по аналогии с предыдущим примером для дуг, показанных на рис. 19, для функции периметра плоскости с выкинутой единичным кругом получаем следующую систему:

$$\begin{cases} P = -2\gamma \operatorname{ctg} \gamma, \\ Z = \frac{\pi}{2} - \gamma - \operatorname{ctg} \gamma + \gamma \operatorname{ctg}^2 \gamma, \end{cases} \quad (2.67)$$

или

$$\begin{cases} -P = 2\gamma \operatorname{ctg} \gamma, \\ Z = \frac{\pi}{2} - \gamma + \frac{P(2+P)}{4\gamma}, \end{cases} \quad (2.68)$$

где $\gamma \in [\pi/2, \pi]$. Исключая γ , получаем:

$$\begin{aligned} -P = & \left\{ \frac{\pi}{2} - Z + \sqrt{\left(Z - \frac{\pi}{2}\right)^2 + P(2+P)} \right\} \times \\ & \times \operatorname{ctg} \frac{\frac{\pi}{2} - Z + \sqrt{\left(Z - \frac{\pi}{2}\right)^2 + P(2+P)}}{2}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

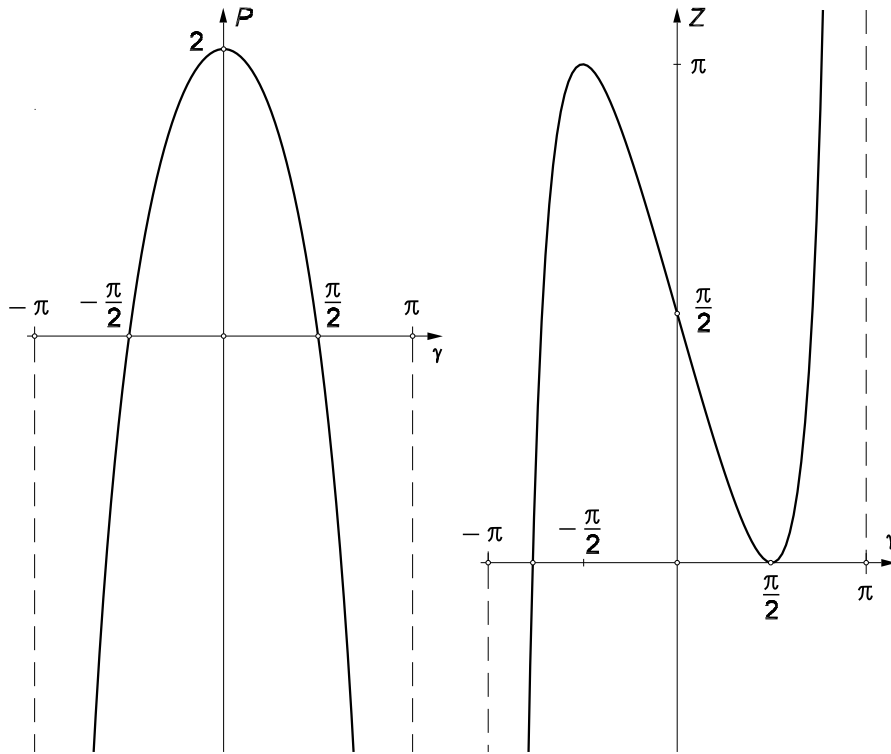


Рис. 21

Обозначая функцию периметра плоскости с выкинутым единичным кругом через $\bar{\theta}(Z)$, а функцию периметра плоскости с выкинутым кругом радиуса a через $\bar{\theta}(a; Z)$, получим:

$$\bar{\theta}(a; Z) = a \bar{\theta}\left(\frac{Z}{a^2}\right). \quad (2.70)$$

График $\bar{\theta}(Z)$ приведен на рис. 20.

Нетрудно видеть, что (2.67) и (2.68) получаются из (2.56) и (2.57) только заменой знака у P . (При этом $\theta(Z)$ и $\bar{\theta}(Z)$ соответствуют разные области изменения параметра γ .) Установим связь между $\theta(Z)$ и $\bar{\theta}(Z)$. Для этого рассмотрим систему (2.56) для $\gamma \in (-\pi, \pi)$. Графики зависимости P и Z от γ приведены на рис. 21. Хорошо видно, что графики задают функцию, определенную на всей числовой прямой и неоднозначную на отрезке $[0, \pi]$. Обозначим ее через $\Theta(Z)$. График $\Theta(Z)$ приведен на рис. 22. Как следует из (2.56), он симметричен относительно вертикальной прямой $Z = \pi/2$. Таким образом, $\theta(Z)$ и $\bar{\theta}(Z)$ — две ветви одной и той же многозначной функции. θ соответствует участок Θ , лежащий выше оси абсцисс, а $\bar{\theta}$ — участок, начинающийся в начале координат и лежащий ниже оси абсцисс (или, после замены $Z \rightarrow \pi - Z$ — симметричный ему участок, начинающийся в точке $(\pi, 0)$). При этом, как это

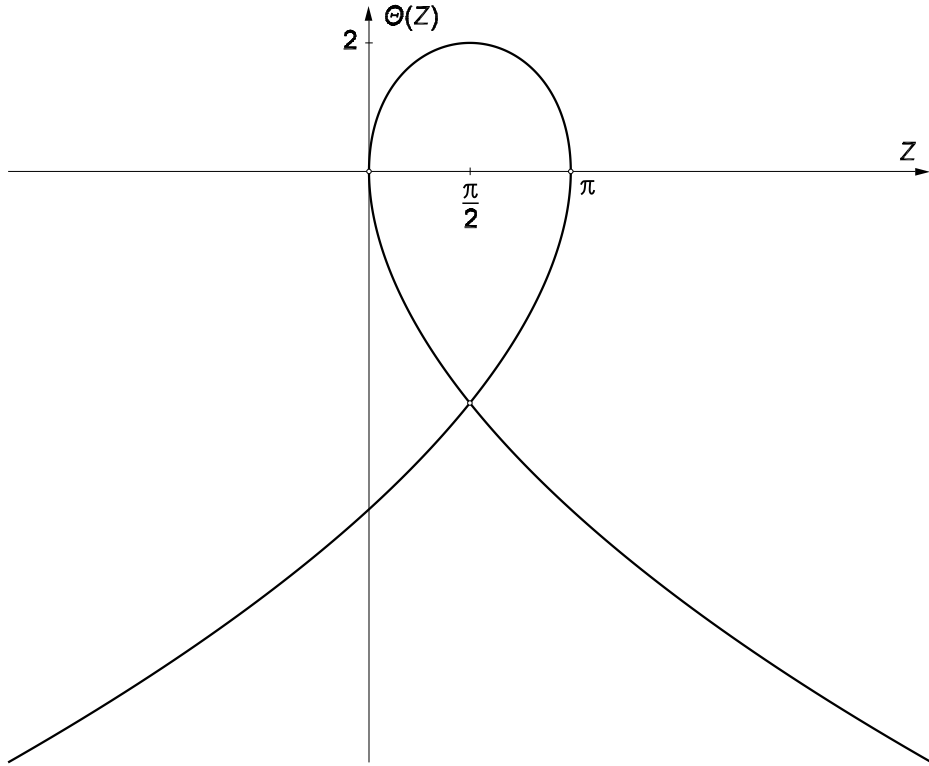


Рис. 22

следует из (2.67), Θ для $\bar{\theta}$ следует брать с противоположным знаком.

Участку, начинающемуся в точке $(\pi, 0)$ и уходящему влево в бесконечность, можно придать и другой смысл. Представим себе, что Z стремится к $+\infty$. Дуги, ортогональные нашей окружности, становятся все большего радиуса, и в $Z = +\infty$ дуга превращается в прямую. Если отождествить точки $Z = +\infty$ и $Z = -\infty$ (как на римановой сфере), то можно сказать, что в этот момент Z проходит точку ∞ и оказывается на другом конце числовой прямой, в зоне отрицательных чисел. Подмножества Q_0 , на которых реализуется точная нижняя грань, теперь лежат со стороны вогнутости дуги, и хотя их площадь бесконечна, мы приписываем им отрицательную площадь, равную площади их дополнения до Q_0 плюс площадь круга. Таким образом, функции $\Theta(Z)$ можно придать смысл *полной* функции периметра круга: помимо функции периметра Q_0 в ней присутствуют со знаком минус две ветви функции периметра дополнения Q_0 до плоскости. Вообще, отвлекаясь от окружности, функцию периметра дополнения произвольного множества Q_0 до плоскости будем называть *внешней функцией периметра* Q_0 и обозначать $\bar{P}(Q_0; Z)$:

$$\bar{P}(Q_0; Z) = P(\mathbb{R}^2 \setminus Q_0; Z). \quad (2.71)$$

Так, $\bar{\theta}(Z)$ будет внешней функцией периметра единичного круга. Понят-

но, что полная функция периметра любого ограниченного множества будет иметь вид, подобный изображенному на рис. 22. Полная функция периметра будет включать собственно функцию периметра и обе ветви внешней функции периметра со знаком минус. При таком подходе свойство симметрии (свойство 4°) $P(Q_0; Z) = P(Q_0; \mu - Z)$ оказывается естественным свойством полной функции периметра любого множества.

Применяя те же рассуждения, что и в предыдущем примере, можно заключить, что $\bar{\theta}(a; Z)$ для фиксированного Z монотонно убывает к $\sqrt{2\pi Z}$. Однако здесь представляется нетривиальным также случай $a \rightarrow 0$, невозможный в предыдущем примере вследствие ограниченности круга. Заменим в (2.67) P на P/a , а Z на Z/a^2 (аналогично (2.61)), разделим квадрат первого уравнения на второе и перейдем к пределу при $\gamma \rightarrow \pi$, что соответствует $a \rightarrow 0$. Мы получим:

$$\bar{\theta}(0; Z) = \lim_{a \rightarrow 0} \bar{\theta}(a; Z) = 2\sqrt{\pi Z}, \quad (2.72)$$

снова очевидный с геометрической точки зрения вывод: $\bar{\theta}(a; Z)$ при фиксированном Z и $a \rightarrow 0$ стремится к функции периметра плоскости, т. е. Q_0 «все меньше отличается» от плоскости. Таким образом, приходим к следующему выводу.

Лемма 2.6. *Для фиксированного $Z > 0$ $\bar{\theta}(a; Z)$ как функция a монотонно убывает от $2\sqrt{\pi Z}$ (в $a = 0$) до $\sqrt{2\pi Z}$ (в $a = +\infty$).*

Следствие. Функция периметра полуплоскости является нижней, а функция периметра плоскости — верхней оценкой функции периметра плоскости с выкинутым кругом любого радиуса:

$$\sqrt{2\pi Z} \leq \bar{\theta}(a; Z) \leq 2\sqrt{\pi Z}, \quad (2.73)$$

причем неравенства будут строгими, если исключить $Z = 0$.

Объединяя (2.66) и (2.73), можно записать:

$$0 \leq \theta(a_1; Z) \leq \sqrt{2\pi Z} \leq \bar{\theta}(a_2; Z) \leq 2\sqrt{\pi Z}. \quad (2.74)$$

В заключение настоящего примера уточним поведение $\bar{\theta}(a; Z)$ при $Z \rightarrow +\infty$. Очевидно, что

$$\bar{\theta}(a; Z) = 2\sqrt{\pi \left[Z - \frac{\pi a^2}{2} + \varepsilon_1(Z) \right]} - 2a + \varepsilon_2(Z), \quad (2.75)$$

где $\varepsilon_1(Z) \rightarrow 0$, $\varepsilon_2(Z) \rightarrow 0$ при $Z \rightarrow +\infty$. Отсюда следует, что

$$\bar{\theta}(a; Z) = 2\sqrt{\pi Z} - 2a + \varepsilon(Z), \quad (2.76)$$

где $\varepsilon(Z) \rightarrow 0$ при $Z \rightarrow +\infty$. Аналогичное рассуждение для произвольного множества приводит к следующему выводу:

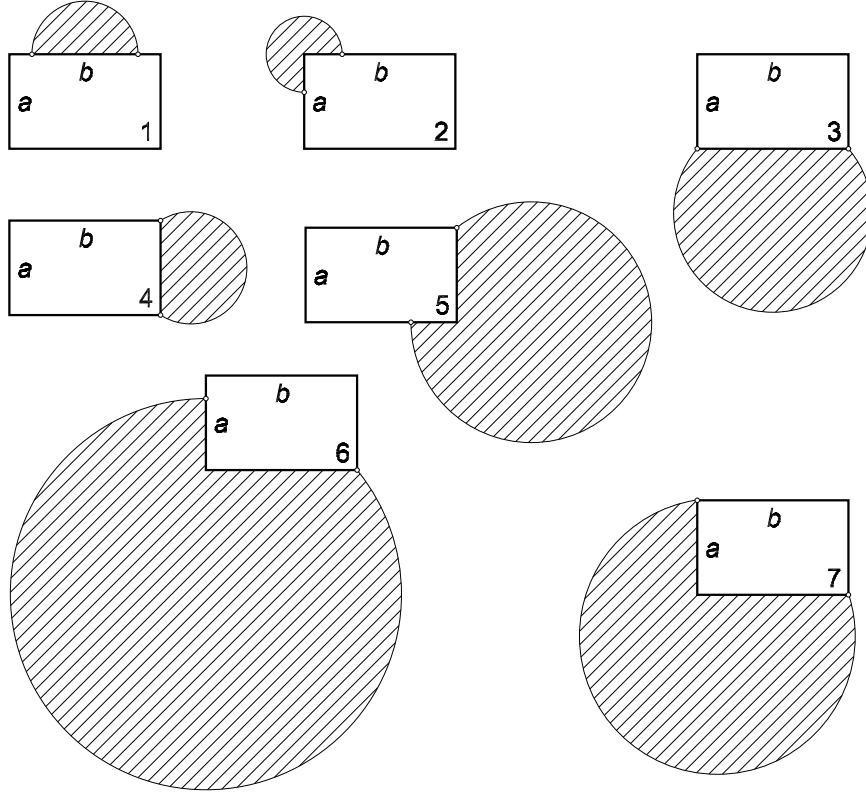


Рис. 23

Лемма 2.7. Пусть Q_0 — ограниченное связное множество. Тогда для внешней функции периметра Q_0 справедливо соотношение:

$$\bar{P}(Q_0; Z) = 2\sqrt{\pi Z} - D(Q_0) + \varepsilon(Q_0; Z), \quad (2.77)$$

где

$$D(Q_0) = \max_{x, y \in Q_0} |x - y|, \quad (2.78)$$

а $\varepsilon(Q_0; Z) \rightarrow 0$ при $Z \rightarrow +\infty$.

Проиллюстрируем введенное в последнем примере понятие полной функции периметра на дополнительных примерах уже изученных множеств.

Пример 2.9. Полная функция периметра прямоугольника. С учетом примера 2.5, нам остается построить внешнюю функцию периметра прямоугольника. Пусть, как и прежде, a и b — длины сторон прямоугольника, причем $a \leq b$. Претендентами на точную нижнюю грань будут семейства множеств, изображенные на рис. 23. Анализ показывает, что в искомую функцию периметра дают вклад только семейства под

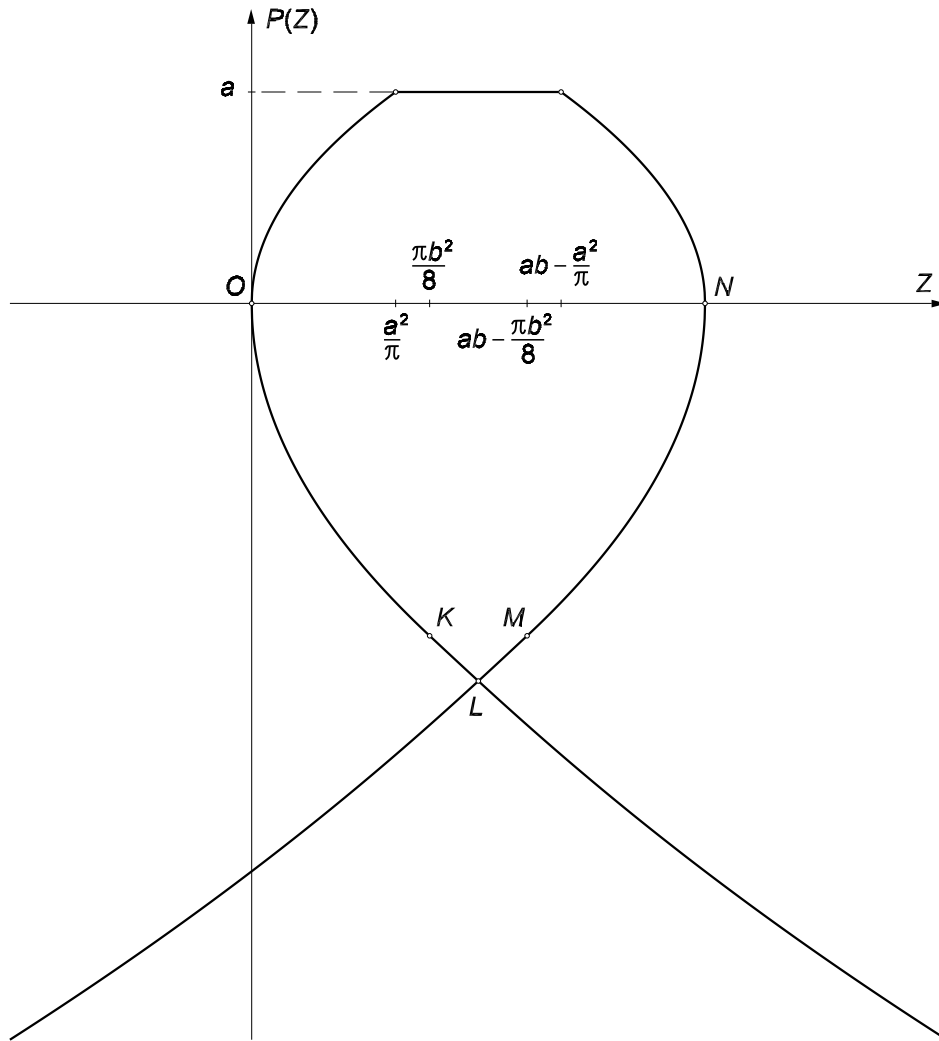


Рис. 24

номерами 1, 3 и 7. Для $Z \in I_1 = [0, \pi b^2/8]$ множества, реализующие точную нижнюю грань представляют собой полукруги, соответствующие семейству 1 на рис. 23. Для $Z \in I_2 = [\pi b^2/8, Z_{a,b}]$, где $Z_{a,b}$ — некоторая функция a и b , эти множества принадлежат семейству 3, а для $Z \in I_3 = [Z_{a,b}, +\infty]$ — семейству 7. Как показывает расчет, появление второй дуги не является оптимальным. На участках I_2 и I_3 явного выражения для $\bar{P}(Z)$ получить не удастся; мы не будем исследовать неявные представления, а ограничимся лишь графиком (рис. 24). Точка K с координатами $(\pi b^2/8, \pi b/2)$ и симметричная ей точка M с координатами $(ab - \pi b^2/8, \pi b/2)$ соответствуют границе между I_1 и I_2 . Тот факт, что изменение поведения $\bar{P}(Z)$ при проходе через эти точки на графике практически незаметно, объясняется отсутствием скачка производной.

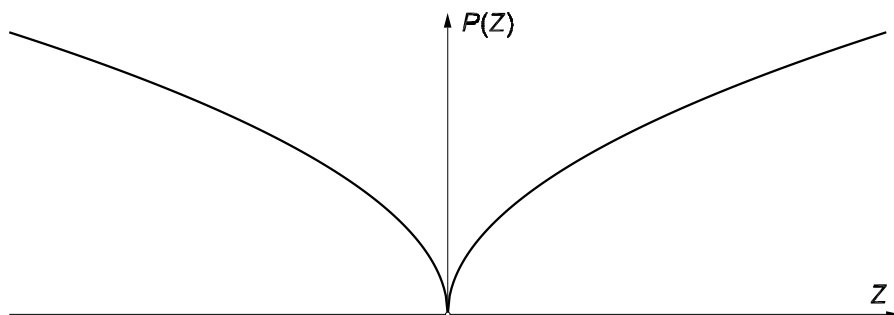


Рис. 25

Точки, соответствующие границе между I_2 и I_3 в $Z = Z_{a,b}$, находятся за пределами рисунка (в них производная претерпевает небольшой скачок).

Рис. 24 соответствует случаю $b < 4a/\pi$. Если увеличивать соотношение b/a , то точки K и M будут приближаться к L и при $b = 4a/\pi$ совпадут с ней. При дальнейшем увеличении b/a K и M переместятся ниже L , причем M окажется левее K . Также, при увеличении b/a быстро растет величина $Z_{a,b}$. Заметим, что если положить $a = 0$, то вышеприведенные рассуждения будут описывать построение полной функции периметра отрезка длины b .

Пример 2.10. Полная функция периметра плоскости. Отражение графика функции периметра плоскости относительно оси ординат даст нам то, что изображено на рис. 25, и это и будет искомой полной функцией периметра, т. к. дополнительное плоскости множество пусто, и внешняя функция периметра отсутствует.

Данный график, как нетрудно видеть, можно также получить из графика полной функции периметра круга, устремив радиус круга к 0 и отразив график относительно оси абсцисс (отражение означает, что Q_0

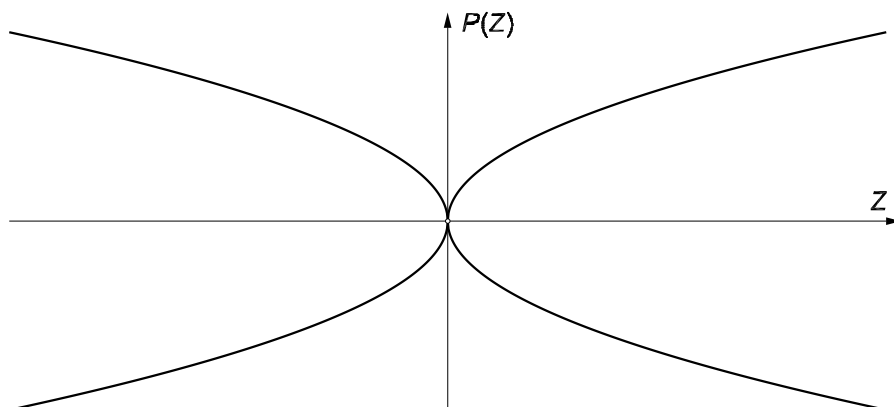


Рис. 26

и $\mathbb{R}^2 \setminus Q_0$ меняются местами).

Пример 2.11. Полная функция периметра полуплоскости. В отличие от предыдущих примеров, в случае полуплоскости как Q_0 , так и $\mathbb{R}^2 \setminus Q_0$ неограниченны. По-видимому, в таком случае свойство симметрии $P(Q_0; Z) = P(Q_0; \mu - Z)$ следует толковать как $P(Q_0; Z) = P(Q_0; -Z)$. Для полуплоскости (см. пример 2.1) $P(Z)$ и $\bar{P}(Z)$, очевидно совпадают, поэтому добавление $\bar{P}(Z)$ даст нам полную параболу $P^2 = 2\pi Z$, а применение свойства симметрии — пару парабол $\pm P^2 = 2\pi Z$ (рис. 26).

2.3.4 Функции периметра выпуклых множеств

Рассмотрим некоторые свойства, присущие функциям периметра выпуклых множеств.

Лемма 2.8. Пусть $Q_0 \in \Omega$ и Q_0 выпуклое. Тогда точные нижние грани в определении функции периметра (2.24) реализуются на таких подмножествах $U \subset Q_0$, что каждый связный компонент эффективной границы U пересекает ∂Q_0 в гладкой точке ∂Q_0 .

Доказательство. Данная теорема является следствием теоремы 2.3 благодаря тому, что из-за выпуклости Q_0 гладкие участки ∂Q_0 могут стыковаться только острием наружу, \square

Лемма 2.9. Пусть $Q_0 \in \Omega$ и Q_0 выпуклое. Тогда эффективная граница любого подмножества, на котором реализуется точная нижняя грань в определении функции периметра (2.24) для множества Q_0 , представляет собой только одну дугу окружности или отрезок прямой.

Доказательство. Предположим, что указанная эффективная граница содержит хотя бы два элемента M_1N_1 и M_2N_2 , где каждый M_iN_i является дугой или отрезком.

Введем следующую классификацию различных случаев формы и взаимного расположения M_1N_1 и M_2N_2 . Каждому конкретному случаю будем сопоставлять пару (k_1, k_2) , где $k_i \in \{-1, 0, 1\}$. Если M_iN_i является отрезком прямой, то $k_i = 0$. Если же M_iN_i является дугой окружности, то $k_i = 1$, при условии, что M_iN_i обращена к другому элементу M_jN_j выпуклостью, и $k_i = -1$, при условии, что M_iN_i обращена к другому элементу M_jN_j вогнутостью.

Очевидно, можно считать, что $k_1 \leq k_2$. Также нетрудно видеть, что с учетом предыдущей леммы и вследствие выпуклости Q_0 , случаи $(-1, -1)$ и $(-1, 0)$ невозможны.

Рассмотрим случай $(-1, 1)$ (рис. 27 а). Согласно предыдущей лемме, ∂Q_0 является гладкой в некоторых окрестностях M_i, N_i . Поэтому в этих окрестностях можно выбрать точки M'_1, N'_1, M'_2, N'_2 , лежащие в

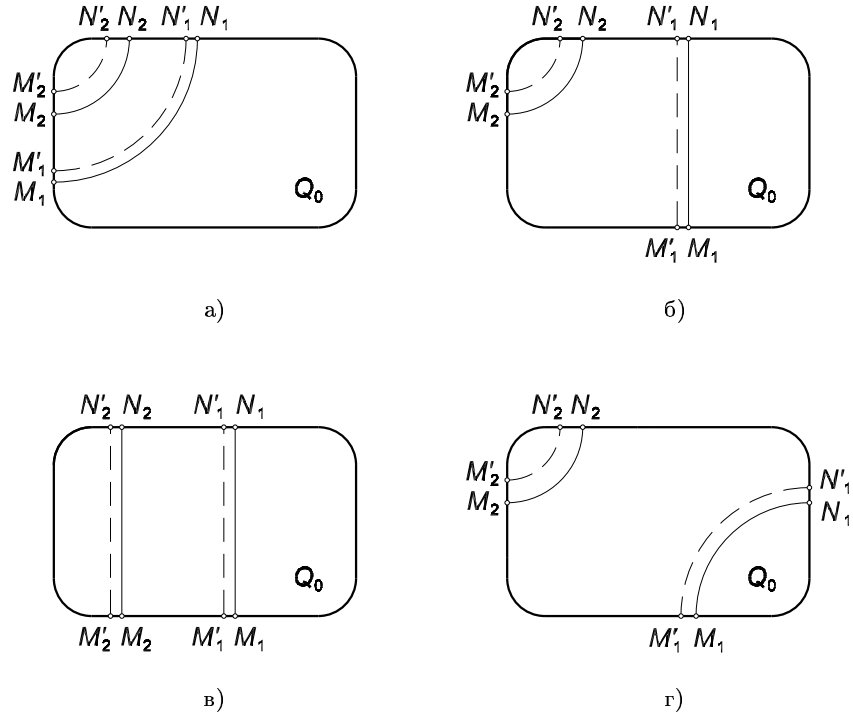


Рис. 27

направлении центра дуг относительно M_1 , N_1 , M_2 и N_2 соответственно, так, чтобы площади фигур $M_1N_1N'_1M'_1$ и $M_2N_2N'_2M'_2$ были равны. Получается, что $M'_1N'_1 \cup M'_2N'_2$ делит Q_0 на пару множеств той же площади, что и $M_1N_1 \cup M_2N_2$, но при этом длина $M'_iN'_i$ меньше длины M_iN_i . Таким образом, построена пара подмножеств Q_0 с той же площадью и с меньшим эффективным периметром, что противоречит определению функции периметра.

Случай $(0, 1)$ (рис. 27 б) рассматривается аналогично с той лишь разницей, что длина $M'_1N'_1$ может оказаться равной длине M_1N_1 ; при этом суммарная длина $M'_1N'_1 \cup M'_2N'_2$ все равно будет меньше длины $M_1N_1 \cup M_2N_2$.

В случае $(0, 0)$ (рис. 27 в), аналогичным образом перемещая оба отрезка с сохранением площадей подмножеств, мы придем либо к случаю $(0, 1)$, либо к полному исчезновению одного из отрезков (при этом эффективный периметр скачкообразно уменьшится, и мы опять получим противоречие).

Рассмотрим случай $(1, 1)$ (рис. 27 г). Пусть l_i — длина, а R_i — радиус дуги M_iN_i . Запишем условие неизменности площадей с точностью до бесконечно малых второго порядка:

$$l_1 dR_1 + l_2 dR_2 = 0, \quad (2.79)$$

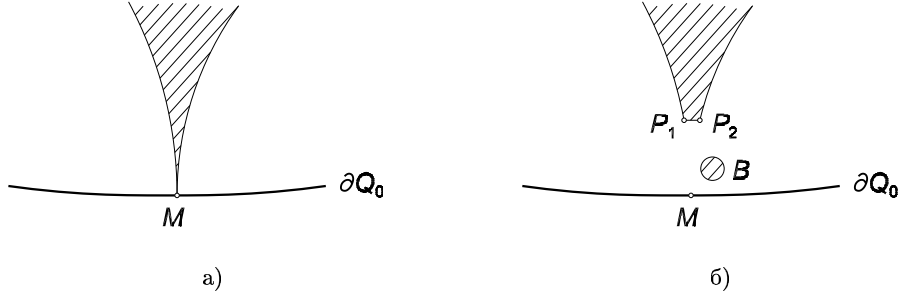


Рис. 28

откуда

$$dR_1 = l_2 dt, \quad (2.80)$$

$$dR_2 = -l_1 dt. \quad (2.81)$$

Для суммарной длины дуг имеем:

$$d(l_1 + l_2) = l_1 l_2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) dt. \quad (2.82)$$

Таким образом, при $R_1 \neq R_2$ для достаточно малых по модулю dt того же знака, что и $R_1 - R_2$, получим уменьшение эффективного периметра.

Если же $R_1 = R_2$, то $d(l_1 + l_2) = 0$. Однако, вводя обозначение

$$\theta_i = \frac{l_i}{R_i}, \quad (2.83)$$

и помня, что $d\theta_i = 0$ вследствие локальной гладкости ∂Q_0 , и $d^2\theta_i \leq 0$ вследствие выпуклости Q_0 , получим

$$d^2(l_1 + l_2) = -\theta_1 \theta_2 (l_1 + l_2) dt^2 + d^2\theta_1 R_1 + d^2\theta_2 R_2 < 0, \quad (2.84)$$

т. е. уменьшение эффективного периметра вне зависимости от знака dt .

В приведенном рассуждении неявно использовался тот факт, что $M_1 N_1$ и $M_2 N_2$ не имеют общих конечных точек. Предположим теперь, что $M_1 = M_2 = M$. Пусть, к примеру, имеет место случай $(1, 1)$ (рис. 28 а). Выберем на MN_i в достаточной близости от M точки P_i . Внутри множества $MN_1 P_1 P_2 N_2$ построим круг B с площадью, равной площади $MP_1 P_2$ (рис. 28 б). Нетрудно видеть, что множество $MN_1 P_1 P_2 N_2 \cup B$ имеет ту же площадь, что и изначальное множество, ограниченное MN_1 и MN_2 , при меньшем эффективном периметре, что опять означает противоречие. Случаи $(-1, 1)$ и $(0, 1)$ рассматриваются аналогично. \square

Лемма 2.10. Пусть $Q_0 \in \Omega$, Q_0 выпуклое и $|Q_0| = \mu$. Тогда

$$\max_{[0, \mu]} P(Q_0; Z) = P\left(Q_0; \frac{\mu}{2}\right). \quad (2.85)$$

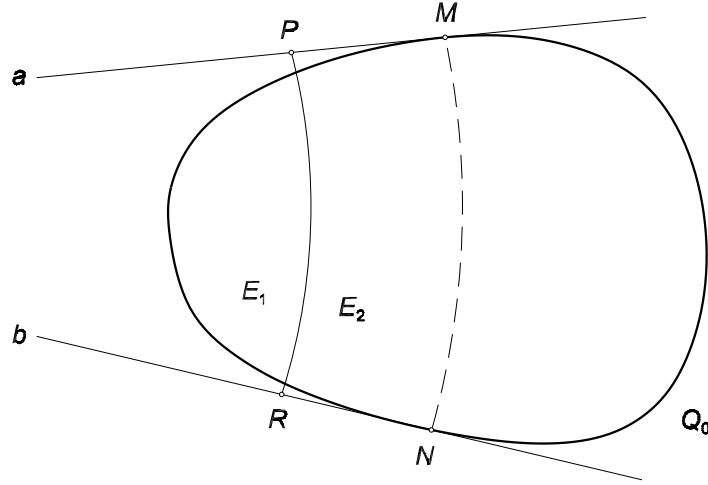


Рис. 29

Доказательство. Пусть эффективная граница подмножества, на котором реализуется точная нижняя грань в определении функции периметра (2.24) для $Z = \mu/2$, представляет собой дугу окружности MN (рис. 29). Согласно лемме 2.8, в точках M и N существуют касательные a, b к ∂Q_0 , а вследствие выпуклости множества Q_0 оно лежит по одну сторону от каждой из этих касательных.

Понятно, что для любого $0 \leq Z < \mu/2$ найдется такая точка P , лежащая на a левее M , что площадь подмножеств E_1 и E_2 , на которые делит Q_0 дуга PR , ортогональная a и b , составляет Z и $\mu/2 - Z$; при этом эффективная граница E_1 и E_2 не превышает длины дуги MN , т. е. $\max P(Q_0; Z)$.

В случае, когда MN представляет собой не дугу, а отрезок, рассуждение аналогично, но при этом не имеет значения, берется ли точка P левее или правее M . \square

Лемма 2.11. Пусть $Q_0 \in \Omega$, Q_0 выпуклое и $|Q_0| = \mu$. Пусть для некоторого Z , $0 < Z < \mu$, существует подмножество Q_0 , имеющее площадь Z и эффективный периметр $P(Q_0; Z)$, и эффективная граница которого представляет собой отрезок прямой. Тогда

$$P(Q_0; Z) = \max_{[0, \mu]} P(Q_0; Z). \quad (2.86)$$

Доказательство. Аналогично предыдущей лемме. \square

Рассмотрим задачу построения функции периметра $P(Q_0; Z)$ в частном случае, когда Q_0 представляет собой выпуклый многоугольник L . Обозначим его стороны через f_i , $1 \leq i \leq n$. Следующий простой алгоритм в некотором смысле осуществляет перебор всех дуг и отрезков,

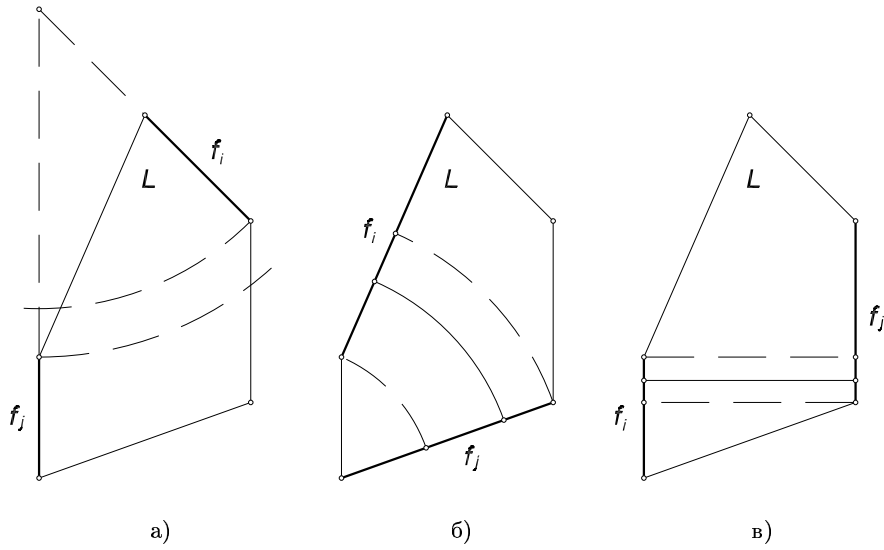


Рис. 30

ортогональных ∂Q_0 и поэтому могущих оказаться эффективными границами подмножеств, на которых реализуется точная нижняя грань в определении функции периметра (2.24). Будем перебирать все пары (f_i, f_j) ; для каждой из таких пар либо вообще не будет существовать дуг или отрезков, ортогональных f_i и f_j (рис. 30 а), либо же таковые будут образовывать однопараметрическое семейство дуг с центром в точке пересечения прямых, на которых лежат f_i и f_j (в случае, если f_i и f_j непараллельны, рис. 30 б) или однопараметрическое семейство отрезков одинаковой длины (в случае параллельности f_i и f_j , рис. 30 в). Для каждого из случаев (б) и (в) построим «функцию периметра пары сторон» $\pi_{ij}(Z)$, выражающую зависимость длины дуги или отрезка MN от площади Z одного из пары множеств, на которые MN делит L . Для определенности будем считать, что $M \in f_i$, $N \in f_j$ и под Z понимается площадь того из двух подмножеств Q_0 , которое лежит справа при движении по MN от M к N ; при этом будет справедливо равенство

$$\pi_{ij}(Z) = \pi_{ji}(\mu - Z). \quad (2.87)$$

Для каждой $\pi_{ij}(Z)$ также необходимо установить область определения D_{ij} , представляющую собой отрезок, для нахождения которого следует учесть крайние точки f_i и f_j , а также возможность пересечения MN с прочими сторонами L (рис. 31). Нетрудно видеть, что если $D_{ij} = [a_{ij}, b_{ij}]$, то $D_{ji} = [\mu - b_{ij}, \mu - a_{ij}]$. (Для упомянутого выше случая (а) удобно положить $D_{ij} = \emptyset$.) Таким образом, указанная процедура даст нам набор функций $\pi_{ij}(Z)$ для некоторых из пар (i, j) , причем для параллельных f_i и f_j функция $\pi_{ij}(Z)$ будет константой. Пусть f_i и f_j непараллельны. Тогда в том случае, когда движение по MN от f_i к f_j

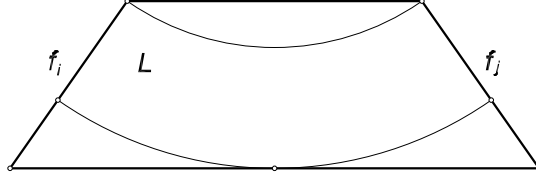


Рис. 31

происходит по часовой стрелке, функция $\pi_{ij}(Z)$ будет иметь вид

$$\pi_{ij}(Z) = \sqrt{2\theta_{ij}(Z + \zeta_{ij})}, \quad (2.88)$$

где θ_{ij} — угол между прямыми a_i и a_j , на которых лежат отрезки f_i и f_j , а ζ_{ij} — площадь фигуры, получаемой вычитанием L из кругового сектора MNP ; здесь P — точка пересечения a_i и a_j (рис. 32). Если f_i и f_j соседние, то $\zeta_{ij} = 0$.

В случае же, когда движение по MN от f_i к f_j происходит против часовой стрелки, функция $\pi_{ij}(Z)$ будет иметь вид

$$\pi_{ij}(Z) = \sqrt{2\theta_{ij}(\mu - Z + \zeta_{ij})}, \quad (2.89)$$

где $\theta_{ij} = \theta_{ji}$, $\zeta_{ij} = \zeta_{ji}$. Однако удобнее оказывается положить

$$\theta_{ij} = -\theta_{ji}, \quad \zeta_{ij} = -\zeta_{ji} - \mu \quad (2.90)$$

с тем, чтобы и в этом случае пользоваться формулой (2.88), как мы в дальнейшем и будем поступать.

Выше подразумевалось, что $i \neq j$. При $i = j$ имеются две функции

$$\pi_{ii}^{(1)}(Z) = \sqrt{2\pi Z}, \quad \pi_{ii}^{(2)}(Z) = \sqrt{-2\pi(Z - \mu)} \quad (2.91)$$

с областями определения

$$D_{ii}^{(1)} = [0, b_{ii}], \quad D_{ii}^{(2)} = [\mu - b_{ii}, \mu] \quad (2.92)$$

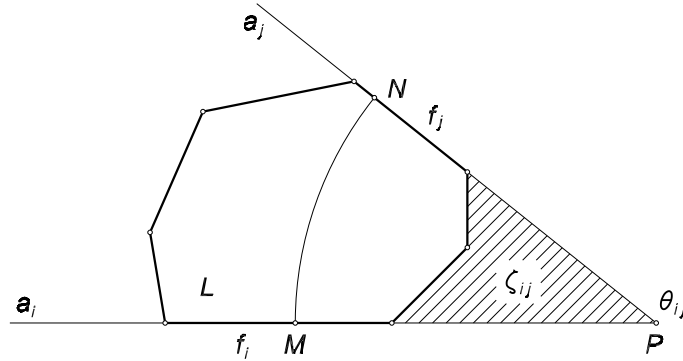


Рис. 32

соответственно. Положим

$$D_{ii} = D_{ii}^{(1)} \cup D_{ii}^{(2)} \quad (2.93)$$

и

$$\pi_{ii}(Z) = \begin{cases} \pi_{ii}^{(1)}(Z), & Z \in D_{ii}^{(1)}, Z \notin D_{ii}^{(2)}, \\ \pi_{ii}^{(2)}(Z), & Z \in D_{ii}^{(2)}, Z \notin D_{ii}^{(1)}, \\ \min\{\pi_{ii}^{(1)}(Z), \pi_{ii}^{(2)}(Z)\}, & Z \in D_{ii}^{(2)} \cap D_{ii}^{(1)}. \end{cases} \quad (2.94)$$

Нетрудно видеть окончательно, что $P(L; Z)$ определяется следующим образом:

$$P(L; Z) = \min_{i,j: D_{ij} \ni Z} \pi_{ij}(Z). \quad (2.95)$$

Действительно, все имеющиеся дуги и отрезки, ортогональные ∂L , «учтены» в функциях $\pi_{ij}(Z)$ в том смысле, что для каждой такой дуги или отрезка, имеющего длину P и ограничивающего подмножество L площади Z , существует пара (i, j) такая, что

$$\pi_{ij}(Z) = P. \quad (2.96)$$

Выбирая в (2.95) из всех дуг и отрезков, ограничивающих подмножество площади Z , кратчайшую, мы и получаем значение функции периметра для значения аргумента Z .

Заметим также, что определение (2.95) делает ясным смысл определения (2.94).

Мы, таким образом, приходим к выводу, что $P(L; Z)$ является кусочно-гладкой с гладкими участками, представляющими собой функции вида (2.88) и константы. Будем обозначать гладкие участки через $\pi_i(Z)$, их параметры — через θ_i, ζ_i , а соответствующие области определения (отрезки) — через $D_i = [a_{i-1}, a_i]$, $1 \leq i \leq m$. Очевидно, что

$$\pi_i(Z) = \pi_{m-i+1}(\mu - Z), \quad (2.97)$$

$$\theta_i + \theta_{m-i+1} = 0, \quad (2.98)$$

$$\zeta_i + \zeta_{m-i+1} + \mu = 0, \quad (2.99)$$

$$a_i + a_{m-i} = \mu. \quad (2.100)$$

Лемма 2.12. Пусть L — выпуклый многоугольник. Тогда гладкие участки $\pi_i(Z)$ функции периметра $P(L; Z)$ стыкуются острием «вверх».

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку стыка $Z = a_i$, в которой

$$\pi_i(Z) = \pi_{i+1}(Z). \quad (2.101)$$

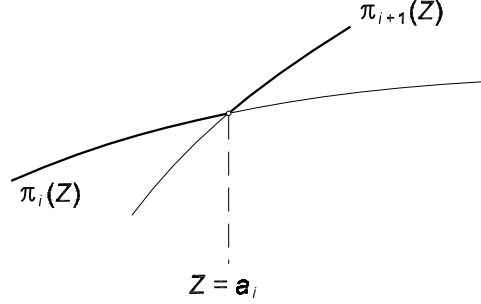


Рис. 33

Предположим, что острое стыка направлено вниз (рис. 33). График функции $\pi_i(Z)$ представляет собой участок графика некоторой функции $\pi_{jk}(Z)$. Поэтому существует дуга или отрезок MN , соединяющий стороны f_j и f_k , ортогональный им, имеющий длину $\pi_{jk}(a_i)$ и ограничивающий подмножество площади a_i . Согласно лемме 2.8, точки M и N являются внутренними точками отрезков f_j и f_k . Это означает, что $\pi_{jk}(Z)$ определена в некоторой окрестности точки a_i . Поэтому для достаточно малых $\varepsilon > 0$ будет выполнено неравенство

$$\pi_{jk}(a_i + \varepsilon) < \pi_{i+1}(a_i + \varepsilon) \quad (2.102)$$

вследствие того, что функции, фигурирующие в обеих частях неравенства, принимают одинаковые значения в точке a_i , а производная $\pi_{i+1}(Z)$ в этой точке больше производной $\pi_{jk}(Z)$. Таким образом, мы приходим к противоречию с тем фактом, что $\pi_{i+1}(Z)$ представляет собой минимальную из всех функций $\pi_{lp}(Z)$, определенных в некоторой окрестности a_i . \square

Лемма 2.13. Пусть L — выпуклый многоугольник. Тогда функция периметра $P(L; Z)$ является выпуклой вверх, т. е.

$$P(L; \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2) \geq \lambda_1 P(L; Z_1) + \lambda_2 P(L; Z_2) \quad (2.103)$$

для любых $Z_i \in [0, \mu]$, $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Доказательство. Данное утверждение следует из выпуклости вверх функций $\pi_i(Z)$ и предыдущей леммы. \square

Суммируя вышесказанное, мы приходим к следующему общему виду функции периметра $P(L; Z)$ произвольного выпуклого многоугольника L . $P(L; Z)$ является кусочно-гладкой. Точки стыка гладких участков $a_0 = 0$, $a_1, a_2, \dots, a_m = \mu$ расположены симметрично относительно точки $\mu/2$:

$$a_i + a_{m-i} = \mu. \quad (2.104)$$

Среди гладких участков $\pi_i(Z)$, $1 \leq i \leq m$, не более, чем один является константой. В случае, когда он имеется, m — количество функций $\pi_i(Z)$ — нечетно, индекс функции-константы равен $(m+1)/2$, а участок, на котором она определена, имеет вид

$$D_{\frac{m+1}{2}} = \left[\frac{\mu}{2} - \eta, \frac{\mu}{2} + \eta \right] \quad (2.105)$$

для некоторого $\eta > 0$. Значение $\pi_{\frac{m+1}{2}}(Z)$ совпадает с максимумом $P(L; Z)$. Необходимым условием наличия участка-константы является наличие в L параллельных сторон.

В случае отсутствия участка-константы m четно.

Для остальных гладких участков $\pi_i(Z)$ функции $P(L; Z)$ справедливы соотношения

$$\pi_i(Z) = \sqrt{2\theta_i(Z + \zeta_i)}, \quad (2.106)$$

причем параметры указанных функций удовлетворяют условиям

$$\theta_i + \theta_{m-i+1} = 0, \quad (2.107)$$

$$\zeta_i + \zeta_{m-i+1} + \mu = 0. \quad (2.108)$$

Для участка-константы естественно положить $\theta_{\frac{m+1}{2}} = 0$. Тогда, как нетрудно видеть, будет справедливо следующее свойство:

$$\theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_m. \quad (2.109)$$

Действительно, если предположить, что $\theta_i \leq \theta_{i+1}$, то между соответствующими функциями будет невозможен стык острием «вверх».

Напоследок отметим, что $P(L; Z)$ вполне задается числом m и наборами

$$a_1, a_2, \dots, a_{[\frac{m}{2}]}, \quad \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{[\frac{m}{2}]}. \quad (2.110)$$

Остальные параметры находятся из условий $a_0 = 0$, $a_m = \mu$, условий симметричности относительно точки $\mu/2$, равенства нулю $P(L; Z)$ на концах области определения и условий непрерывности $P(L; Z)$ в точках стыка a_i .

Лемма 2.14. Пусть L — выпуклый многоугольник, θ — наименьший из его углов, $|L| = \mu$. Тогда для функции периметра $P(L; Z)$ справедлива оценка:

$$P(L; Z) \leq M_{\theta, \mu}(Z), \quad (2.111)$$

где

$$M_{\theta, \mu}(Z) = \begin{cases} \sqrt{2\theta Z}, & Z \in \left[0, \frac{\mu}{2}\right], \\ \sqrt{2\theta(\mu - Z)}, & Z \in \left[\frac{\mu}{2}, \mu\right]. \end{cases} \quad (2.112)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что на первом гладком участке $[a_0, a_1]$ функция $P(L; Z)$ совпадает с $M_{\theta, \mu}(Z)$. Действительно, кандидатами в $\pi_1(Z)$ могут выступать только $\pi_{ij}(Z)$, обращающиеся в 0 в $Z = 0$, т. е. те, у которых $\zeta_{ij} = 0$, а это условие выполнено только в том случае, когда f_i и f_j либо соседние стороны, либо одна и та же сторона. При этом $\pi_1(Z)$ будет задаваться выражением

$$\begin{aligned}\pi_1(Z) &= \min\{\sqrt{2\theta_1 Z}, \sqrt{2\theta_2 Z}, \dots, \sqrt{2\theta_m Z}, \sqrt{2\pi Z}\} = \\ &= \sqrt{2 \min\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m, \pi\} Z} = \\ &= \sqrt{2 \min\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\} Z} = \\ &= \sqrt{2\theta Z} = M_{\theta, \mu}(Z).\end{aligned}\tag{2.113}$$

Аналогичное рассуждение приводит к выводу, что

$$\pi_m(Z) = \sqrt{2\theta(\mu - Z)}.\tag{2.114}$$

Как было указано выше, функции $\pi_i(Z)$ задаются формулами (2.106), а также формулой $\pi_i(Z) = \text{const}$ на отрезках $[a_{i-1}, a_i]$. Однако, как нетрудно видеть, все эти формулы задают некоторые функции на всем отрезке $[0, \mu]$. Для $\pi_i(Z) = \text{const}$ это очевидно; для функций (2.106) несложно убедиться, что в силу их вида выражение под корнем будет неотрицательно для любых $Z \in [0, \mu]$. Обозначим через $\tilde{\pi}_i(Z)$ функцию, получаемую распространением определения $\pi_i(Z)$ на весь отрезок $[0, \mu]$. Нетрудно видеть, что в силу вида функций $\tilde{\pi}_i(Z)$ для любого i , $1 \leq i \leq m-1$ справедливы соотношения:

$$\tilde{\pi}_i(Z) < \tilde{\pi}_{i+1}(Z), \quad Z \in [0, a_i),\tag{2.115}$$

$$\tilde{\pi}_i(Z) = \tilde{\pi}_{i+1}(Z), \quad Z = a_i,\tag{2.116}$$

$$\tilde{\pi}_i(Z) > \tilde{\pi}_{i+1}(Z), \quad Z \in (a_i, \mu],\tag{2.117}$$

откуда следует, что

$$\tilde{\pi}_i(Z) \leq \tilde{\pi}_{i+1}(Z), \quad Z \in [0, a_k], \quad k \leq i,\tag{2.118}$$

$$\tilde{\pi}_i(Z) \geq \tilde{\pi}_{i+1}(Z), \quad Z \in [a_k, \mu], \quad k \geq i.\tag{2.119}$$

Пусть $Z \in [a_i, a_{i+1}]$. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_1(Z) &\geq \tilde{\pi}_2(Z) \geq \dots \geq \tilde{\pi}_{i-1}(Z) \geq \\ &\geq \pi_i(Z) = \tilde{\pi}_i(Z) \leq \tilde{\pi}_{i+1}(Z) \leq \dots \leq \tilde{\pi}_m(Z),\end{aligned}\tag{2.120}$$

т. е.

$$P(L; Z) = \pi_i(Z) \leq \tilde{\pi}_1(Z),\tag{2.121}$$

$$P(L; Z) = \pi_i(Z) \leq \tilde{\pi}_m(Z),\tag{2.122}$$

или

$$P(L; Z) \leq M_{\theta, \mu}(Z). \quad (2.123)$$

□

Следствие 1. Пусть L — выпуклый многоугольник, θ — наименьший из его углов. Тогда $\theta_1 = -\theta_m = \theta$.

Следствие 2. Пусть L — выпуклый многоугольник. Тогда при построении $P(L; Z)$ можно не учитывать функции вида $\pi_{ii}(Z)$, т. к. они заведомо не дадут вклада в $P(L; Z)$.

Следствие 3. Пусть L — выпуклый многоугольник, $|L| = \mu$. Тогда для функции периметра $P(L; Z)$ справедлива оценка:

$$P(L; Z) \leq M_{\pi, \mu}(Z), \quad (2.124)$$

причем неравенство будет строгим, если исключить точки $Z = 0$ и $Z = \mu$.

Следствие 4. Пусть L — выпуклый многоугольник, θ — наименьший из его углов, $|L| = \mu$. Тогда для максимума функции периметра $P(L; Z)$ справедлива оценка:

$$\max_{[0, \mu]} P(L; Z) \leq \sqrt{\theta \mu}. \quad (2.125)$$

Следствие 5. Пусть L — выпуклый многоугольник, $|L| = \mu$. Тогда для максимума функции периметра $P(L; Z)$ справедлива оценка:

$$\max_{[0, \mu]} P(L; Z) < \sqrt{\pi \mu}. \quad (2.126)$$

Пример 2.12. Функция периметра треугольника. Нетрудно видеть, что функция периметра произвольного треугольника равна $M_{\theta, \mu}(Z)$, где θ — наименьший из углов треугольника, а μ — его площадь.

Рассмотрим вышеприведенный алгоритм построения функции периметра выпуклого многоугольника на следующем менее тривиальном примере.

Пример 2.13. Функция периметра правильного шестиугольника. Пусть L — правильный шестиугольник со стороной, равной 1. Площадь L составляет $\mu = 3\sqrt{3}/2$, поэтому областью определения $P(L; Z)$ будет отрезок $[0, 3\sqrt{3}/2]$.

Как было показано выше, функции вида $\pi_{ii}(Z)$ можно исключить из рассмотрения. С учетом этого, а также с учетом симметричности L , достаточно построить три функции: $\pi_{12}(Z)$, $\pi_{13}(Z)$ и $\pi_{14}(Z)$, а также им симметричные относительно середины отрезка $Z = 3\sqrt{3}/4$.

$\pi_{12}(Z)$ определена на участке $[0, \pi/3]$ (рис. 34 а) и, очевидно, равна $\sqrt{4\pi Z/3}$. $\pi_{13}(Z)$ определена на $[\pi/6 - \sqrt{3}/4, 2\pi/3 - \sqrt{3}/4]$ (рис. 34 б).

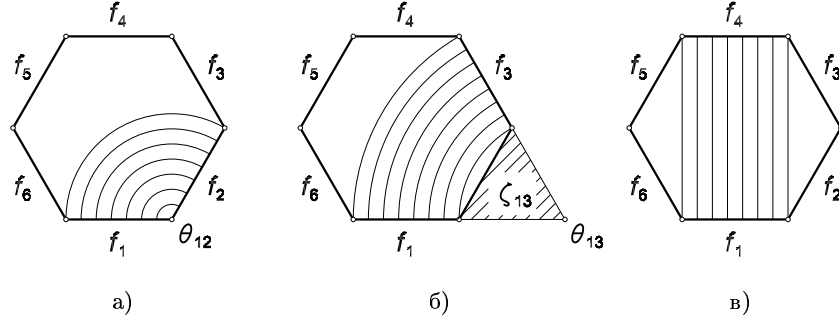


Рис. 34

Как нетрудно видеть, $\zeta_{13} = \sqrt{3}/4$, и поэтому $\pi_{13}(Z) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}\left(Z + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}$. $\pi_{14}(Z)$ является константой, равной $\sqrt{3}$, с областью определения $[\sqrt{3}/4, 5\sqrt{3}/4]$ (рис. 34 в). Перечислим еще раз параметры построенных и симметричных им функций:

$$D_{12} = \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \quad \pi_{12}(Z) = \sqrt{\frac{4}{3}\pi Z}, \quad \theta_{12} = \frac{2\pi}{3}, \quad \zeta_{12} = 0, \quad (2.127)$$

$$D_{13} = \left[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right], \quad \pi_{13}(Z) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}\left(Z + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)},$$

$$\theta_{13} = \frac{\pi}{3}, \quad \zeta_{13} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad (2.128)$$

$$D_{14} = \left[\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right], \quad \pi_{14}(Z) = \sqrt{3}, \quad \theta_{14} = 0, \quad (2.129)$$

$$D_{31} = \left[\frac{7\sqrt{3}}{4} - \frac{2\pi}{3}, \frac{7\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right], \quad \pi_{31}(Z) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}\left(\frac{7\sqrt{3}}{4} - Z\right)},$$

$$\theta_{31} = -\frac{\pi}{3}, \quad \zeta_{31} = -\frac{7\sqrt{3}}{4}, \quad (2.130)$$

$$D_{21} = \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \quad \pi_{21}(Z) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - Z\right)},$$

$$\theta_{21} = -\frac{2\pi}{3}, \quad \zeta_{21} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (2.131)$$

Для того, чтобы получить $P(L; Z)$ согласно (2.95), построим графики $\pi_{ij}(Z)$ и графическим методом определим минимум (рис. 35). График $P(L; Z)$ выделен жирной линией. Решая уравнения

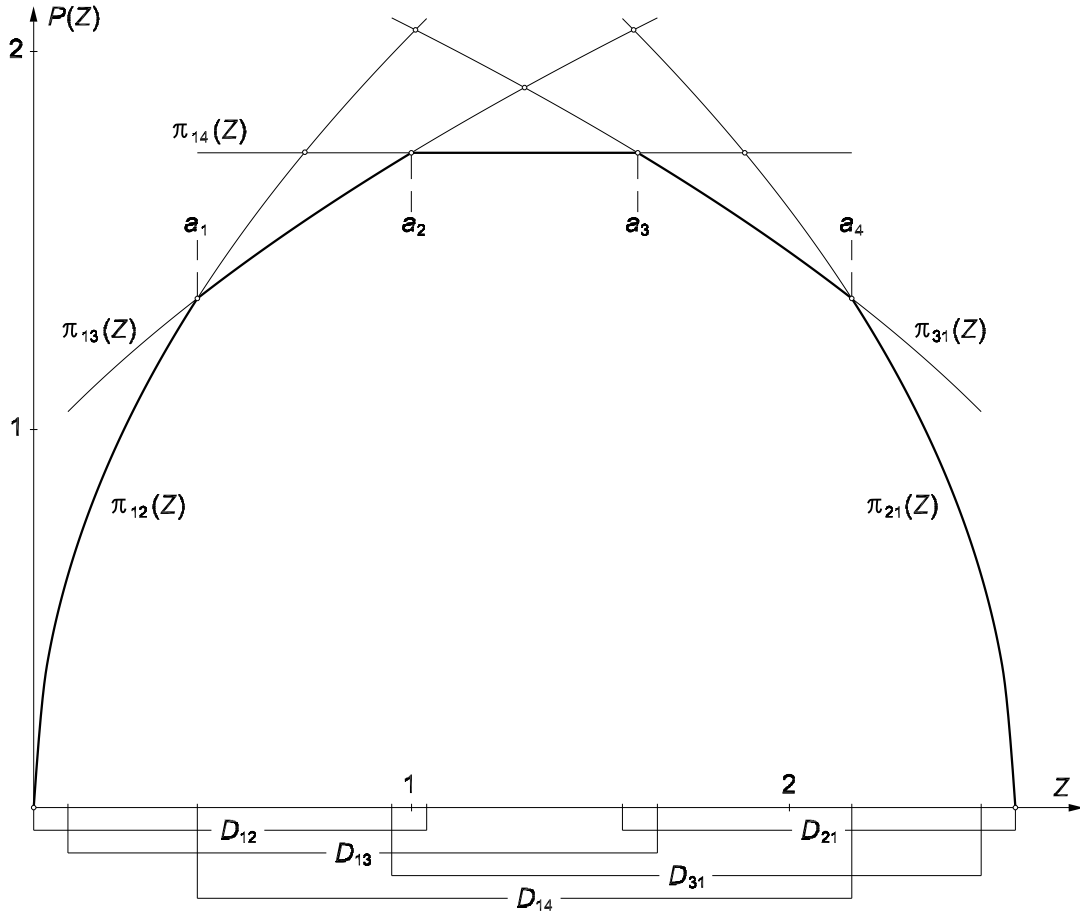


Рис. 35

$$\begin{aligned} \pi_{12}(Z) &= \pi_{13}(Z), \quad \pi_{13}(Z) = \pi_{14}(Z), \\ \pi_{14}(Z) &= \pi_{31}(Z), \quad \pi_{31}(Z) = \pi_{21}(Z), \end{aligned} \quad (2.132)$$

найдем все a_i . Имеем окончательно:

$$m = 5, \quad (2.133)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad a_2 = \frac{9}{2\pi} - \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ a_3 &= \frac{7\sqrt{3}}{4} - \frac{9}{2\pi}, \quad a_4 = \frac{5\sqrt{3}}{4}, \quad a_5 = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \end{aligned} \quad (2.134)$$

$$\theta_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_3 = 0, \quad \theta_4 = -\frac{\pi}{3}, \quad \theta_5 = -\frac{2\pi}{3}, \quad (2.135)$$

$$\pi_1(Z) = \sqrt{\frac{4}{3}\pi Z}, \quad (2.136)$$

$$\pi_2(Z) = \sqrt{\frac{2\pi}{3} \left(Z + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)}, \quad (2.137)$$

$$\pi_3(Z) = \sqrt{3}, \quad (2.138)$$

$$\pi_4(Z) = \sqrt{\frac{2\pi}{3} \left(\frac{7\sqrt{3}}{4} - Z \right)}, \quad (2.139)$$

$$\pi_5(Z) = \sqrt{\frac{4\pi}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - Z \right)}. \quad (2.140)$$

Лемма 2.15. Пусть L — выпуклый многоугольник, $|L| = \mu$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ функция периметра $P(L; Z)$ на участке $[\varepsilon, \mu - \varepsilon]$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\sqrt{\pi/2\varepsilon}$:

$$|P(L; Z_1) - P(L; Z_2)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon}} |Z_1 - Z_2|. \quad (2.141)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что на участке $(0, \mu/2)$ выполняется неравенство

$$P'(L; Z) \leq M'_{\pi, \mu}(Z), \quad (2.142)$$

причем в точках скачка производной $P(L; Z)$ неравенство справедливо для любой из односторонних производных. В этом можно убедиться непосредственным вычислением с учетом того, что $P(L; Z)$ состоит из участков вида (2.106) с $\theta_i < \pi$ и $\zeta_i \geq 0$. Принимая во внимание симметричность обеих функций относительно $Z = \mu/2$, можно написать для произвольного $Z \in (0, \mu)$:

$$|P'(L; Z)| \leq |M'_{\pi, \mu}(Z)|, \quad (2.143)$$

причем в точках скачка производных неравенство справедливо для любой из односторонних производных. В свою очередь, величину $|M'_{\pi, \mu}(Z)|$ на $[\varepsilon, \mu - \varepsilon]$ благодаря выпуклости $M_{\pi, \mu}(Z)$ можно оценить через значения $|M'_{\pi, \mu}(Z)|$ на концах отрезка:

$$|M'_{\pi, \mu}(Z)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon}}. \quad (2.144)$$

□

Вернемся к рассмотрению функций периметра произвольных выпуклых множеств из Ω . Пусть $Q_0 \in \Omega$ и Q_0 выпуклое. Многоугольником, вписанным в Q_0 , будем называть любой многоугольник L , все вершины

которого лежат на ∂Q_0 . Нетрудно видеть, что $L \subset Q_0$ вследствие выпуклости Q_0 . Обозначим через $z(Q_0, L)$ разность между площадями Q_0 и L :

$$z(Q_0, L) = |Q_0| - |L|, \quad (2.145)$$

а через $d(Q_0, L)$ — минимальную величину, удовлетворяющую условию, что любая точка $x \in \partial L$ лежит на расстоянии, не большем $d(Q_0, L)$ от ∂Q_0 :

$$d(Q_0, L) = \max_{x \in \partial L} \min_{y \in \partial Q_0} |x - y|. \quad (2.146)$$

Теорема 2.4. Пусть $Q_0 \in \Omega$, Q_0 выпуклое и $|Q_0| = \mu$. Пусть $\{L_n\}$ — последовательность многоугольников, вписанных в Q_0 , такая, что

$$z(Q_0, L_n) = z_n \rightarrow 0, \quad d(Q_0, L_n) = d_n \rightarrow 0. \quad (2.147)$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(L_n; Z) = P(Q_0; Z), \quad (2.148)$$

причем для любого $\varepsilon > 0$ сходимость будет равномерной на $[\varepsilon, \mu - \varepsilon]$.

Доказательство. Пусть задано произвольное Z , $0 < Z < \mu$. Выберем такое N , чтобы для всех $n \geq N$ выполнялись неравенства

$$z_n < Z, \quad z_n < \mu - Z. \quad (2.149)$$

Пусть $n \geq N$. Рассмотрим функцию периметра $P(L_n)$ в точке Z . Пусть эффективная граница подмножества L_n площади Z , на котором реализуется точная нижняя грань в определении функции периметра (2.24), представляет собой дугу окружности или отрезок MN (рис. 36 а). Согласно условиям теоремы, существует точка $R \in \partial Q_0$, лежащая на расстоянии, не большем d_n от M , и точка S , лежащая на расстоянии, не большем d_n от N . Кривая $RMNS$ имеет длину, не превосходящую

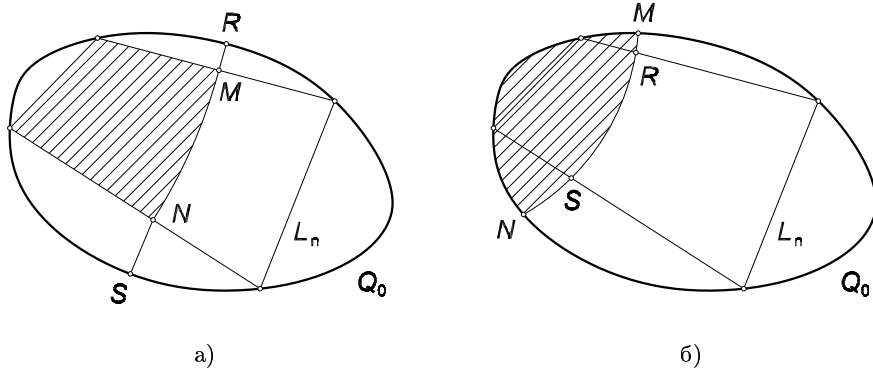


Рис. 36

$P(L_n; Z) + 2d_n$, и делит Q_0 на пару множеств, площадь одного из которых равна $Z + \alpha_n(Z)$, где $0 \leq \alpha_n(Z) \leq z_n$. Поэтому справедливо неравенство

$$P(Q_0; Z + \alpha_n(Z)) \leq P(L_n; Z) + 2d_n. \quad (2.150)$$

Поскольку ∂Q_0 кусочно-гладкая, то $P(Q_0)$ непрерывна, а значит, и равномерно непрерывна на $[0, \mu]$. Это означает, что существует функция $\delta(z)$ определенная для положительных z , неубывающая, и предел которой при $z \rightarrow 0$ равен 0, такая, что

$$|P(Q_0; Z_1) - P(Q_0; Z_2)| \leq \delta(z), \quad (2.151)$$

если $|Z_1 - Z_2| \leq z$. Полагая $Z_1 = Z + \alpha_n(Z)$, $Z_2 = Z$ и учитывая, что $0 \leq \alpha_n(Z) \leq z_n$, имеем:

$$P(Q_0; Z) - \delta(z_n) \leq P(Q_0; Z + \alpha_n(Z)) \leq P(L_n; Z) + 2d_n, \quad (2.152)$$

или

$$P(Q_0; Z) - \delta(z_n) - 2d_n \leq P(L_n; Z). \quad (2.153)$$

Рассмотрим теперь функцию периметра $P(Q_0)$ в точке Z . Пусть эффективная граница подмножества Q_0 площади Z , на котором реализуется точная нижняя грань в определении функции периметра (2.24), представляет собой дугу окружности или отрезок MN (рис. 36 б). В силу (2.149) MN пересекает L_n по некоторой кривой RS (хотя здесь возможен случай, когда $MN \cap L_n$ несвязно, для дальнейших рассуждений это несущественно). Кривая RS имеет длину, не превосходящую $P(Q_0; Z)$, и делит L_n на пару множеств, площадь одного из которых равна $Z - \beta_n(Z)$, где $0 \leq \beta_n(Z) \leq z_n$. Поэтому справедливо неравенство

$$P(L_n; Z - \beta_n(Z)) \leq P(Q_0; Z). \quad (2.154)$$

Вводя, по аналогии с $\delta(z)$, функции $\delta_n(z)$, приходим к неравенству

$$P(L_n; Z) \leq P(Q_0; Z) + \delta_n(z_n), \quad (2.155)$$

объединяя которое с (2.153), получаем:

$$P(Q_0; Z) - \delta(z_n) - 2d_n \leq P(L_n; Z) \leq P(Q_0; Z) + \delta_n(z_n). \quad (2.156)$$

Согласно предыдущей лемме, на отрезке $[\varepsilon, \mu - \varepsilon]$ можно положить

$$\delta_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon}} z \quad (2.157)$$

для всех n , и поэтому оценка (2.156) доказывает равномерную сходимость на $[\varepsilon, \mu - \varepsilon]$. \square

Таким образом, нахождение функции периметра произвольного выпуклого множества $Q_0 \in \Omega$ с заданной точностью сводится к нахождению функции периметра «аппроксимирующего» многоугольника L по описанному ранее алгоритму. Соотношение (2.156) позволяет легко оценить погрешность $|P(Q_0; Z) - P(L; Z)|$ на $[\varepsilon, \mu - \varepsilon]$.

Также, последняя теорема с очевидностью позволяет распространить некоторые утверждения, доказанные для многоугольников, на общий случай произвольного выпуклого множества $Q_0 \in \Omega$.

Лемма 2.16. *Пусть $Q_0 \in \Omega$ и Q_0 выпуклое. Тогда функция периметра $P(Q_0; Z)$ является выпуклой вверх.*

Лемма 2.17. *Пусть $Q_0 \in \Omega$, Q_0 выпуклое и $|Q_0| = \mu$. Тогда для функции периметра $P(Q_0; Z)$ справедлива оценка:*

$$P(Q_0; Z) \leq M_{\pi, \mu}(Z). \quad (2.158)$$

Лемма 2.18. *Пусть $Q_0 \in \Omega$, Q_0 выпуклое и $|Q_0| = \mu$. Тогда для максимума функции периметра $P(Q_0; Z)$ справедлива оценка:*

$$\max_{[0, \mu]} P(Q_0; Z) \leq \sqrt{\pi \mu}. \quad (2.159)$$

Лемма 2.19. *Пусть $Q_0 \in \Omega$, Q_0 выпуклое и $|Q_0| = \mu$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ функция периметра $P(Q_0; Z)$ на участке $[\varepsilon, \mu - \varepsilon]$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\sqrt{\pi/2\varepsilon}$.*

В заключение рассмотрения функций периметра выпуклых множеств отметим, что автором было создано программное обеспечение, способное по приведенному выше алгоритму вычислять функции периметра выпуклых многоугольников. С учетом теоремы 2.4 данное программное обеспечение может применяться также и для аппроксимации функций периметра произвольных выпуклых множеств. Программное обеспечение прилагается к настоящей работе и описано в приложении А.

2.4 Необходимые условия разрешимости

В этом разделе мы при помощи оценки (2.22) установим необходимые условия разрешимости задач гарантированного поиска на плоскости. С учетом (2.9) и (2.10) запишем ее в следующем виде:

$$Z_\lambda(t_n) - Z_\lambda(t_{n-1}) \leq F(w, r, \lambda) - wP(\xi_n)\lambda, \quad (2.160)$$

$$Z_\lambda(t_n - 0) < \xi_n < Z_\lambda(t_{n-1}). \quad (2.161)$$

2.4.1 Необходимые условия разрешимости задачи патрулирования

Теорема 2.5. *Для достаточно малых λ площадь остаточной области в задаче патрулирования (Q, w, r, λ) в дискретной модели не может достигать величины*

$$\frac{F^2(w, r, \lambda)}{4\pi w^2 \lambda^2} + F(w, r, \lambda) \quad (2.162)$$

независимо от траектории ищущего.

Доказательство. Подставим в (2.160) выражение для функции периметра плоскости (2.15):

$$Z_\lambda(t_n) - Z_\lambda(t_{n-1}) \leq F(w, r, \lambda) - 2w\sqrt{\pi\xi_n}\lambda. \quad (2.163)$$

С учетом (2.161), (2.18) и (2.10) можно записать следующую оценку для ξ_n :

$$\xi_n > Z_\lambda(t_n - 0) \geq Z_\lambda(t_n) - F(w, r, \lambda), \quad (2.164)$$

подстановка которой в (2.163) дает

$$Z_\lambda(t_n) - Z_\lambda(t_{n-1}) < F(w, r, \lambda) - 2w\lambda\sqrt{\pi[Z_\lambda(t_n) - F(w, r, \lambda)]}. \quad (2.165)$$

Приравняв правую часть полученного неравенства к нулю и решим полученное уравнение относительно $Z_\lambda(t_n)$. Корнем будет величина (2.162). Предположим, что в момент t_n площадь остаточной области впервые достигла или превзошла величину (2.162). Однако в таком случае получается, что $Z_\lambda(t_{n-1}) > Z_\lambda(t_n)$, т. е. и в момент t_{n-1} площадь была больше (2.162), что противоречит нашему предположению. Остается показать, что и в начальный момент t_a площадь (равная, очевидно, πr^2) меньше величины (2.162). Нетрудно видеть, что величина, стоящая в квадратных скобках в (2.20), строго больше πw при $0 < w < 1$. Поэтому, подставляя (2.20) в (2.162), можно получить следующее разложение:

$$\frac{F^2(w, r, \lambda)}{4\pi w^2 \lambda^2} + F(w, r, \lambda) = (\pi r^2 + c_1) + c_2 \lambda + O(\lambda^2), \quad (2.166)$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, что означает, что величина (2.162) больше πr^2 для достаточно малых λ . \square

Следствие. Для достаточно малых λ площадь упреждающей области в задаче патрулирования (Q, w, r, λ) в дискретной модели не может достигать величины (2.162), а площадь следящей области — величины

$$\frac{F^2(w, r, \lambda)}{2\pi w^2 \lambda^2} + 2F(w, r, \lambda) - \pi \left[r + \frac{\lambda(1+w)}{2} \right]^2. \quad (2.167)$$

Доказательство. Применяя доказанную теорему к задаче с обращенным направлением отсчета времени, для упреждающей области получим ту же оценку, что и для остаточной. Для следящей области, очевидно, можно воспользоваться удвоенной оценкой (2.162), однако мы можем ее улучшить, вычтя площадь круга обнаружения (радиус которого дается выражением (2.7)), т. к. он входит и в упреждающую, и в остаточную области, и поэтому учитывается дважды. \square

Замечание. Оценки (2.162) и (2.167) будут несколько улучшены, см. замечание 2 к теореме 2.9.

Теорема 2.6. *Верхняя Жорданова мера остаточной области в задаче патрулирования (Q, w, r) в базовой модели не может превышать величины*

$$\frac{F^2(w, r)}{4\pi w^2} \quad (2.168)$$

независимо от траектории ищущего.

Доказательство. Пусть для некоторой траектории верхняя Жорданова мера остаточной области в некоторый момент оказывается равной U , где U больше величины (2.168). Рассмотрим ту же траекторию в рамках дискретной модели (Q, w, r, λ) . Для достаточно малых λ площадь остаточной области в дискретной модели будет меньше величины (2.168) (предела (2.162) при $\lambda \rightarrow 0$), а так как она, согласно лемме 2.1, содержит в себе остаточную область задачи в базовой модели, то получается противоречие с определением верхней Жордановой меры. \square

Следствие 1. Верхняя Жорданова мера упреждающей области в задаче патрулирования (Q, w, r) в базовой модели не может превышать величины (2.168), а верхняя Жорданова мера следящей области — величины

$$\frac{F^2(w, r)}{2\pi w^2} - \pi r^2. \quad (2.169)$$

независимо от траектории ищущего.

Следствие 2. Если площадь Q превышает величину (2.169), то задача патрулирования (Q, w, r) неразрешима.

Доказательство. Согласно критерию разрешимости 1.4 для решения должно выполняться условие (1.38), однако в силу предыдущего следствия верхняя Жорданова мера следящей области не может превзойти (2.169), и поэтому указанное условие невыполнимо. \square

2.4.2 Необходимые условия разрешимости задачи обнаружения

Напомним, что в задаче обнаружения множество Q_0 предполагается ограниченным. Очевидно, что при нарушении этого условия задача неразрешима, т. к. обнаружение должно происходить в конечное время.

Теорема 2.7. Пусть хотя бы для одного элемента Z_m множества $\arg \max P(Q_0; Z)$ выполнено неравенство $Z_m > \pi r^2$. Тогда для достаточно малых λ задача обнаружения (Q_0, w, r, λ) , где $Q_0 \in \Omega$, в дискретной модели неразрешима, если

$$\max P(Q_0; Z) > \frac{F(w, r, \lambda)}{w\lambda}. \quad (2.170)$$

Доказательство. Пусть выполнено неравенство (2.170). Вследствие непрерывности $P(Q_0; Z)$ существует интервал I , на котором справедливо неравенство

$$P(Q_0; Z) > \frac{F(w, r, \lambda)}{w\lambda}. \quad (2.171)$$

Согласно (2.160), последовательные значения $Z_\lambda(t_n)$ отстоят друг от друга не более, чем на $F(w, r, \lambda)$. Поскольку $F(w, r, \lambda)$ имеет вид (2.19), λ можно выбрать таким малым, чтобы выполнялось неравенство

$$2F(w, r, \lambda) < |I| \quad (2.172)$$

($|I|$ означает длину интервала I). При этом в I будет попадать не менее 2 членов последовательности $Z_\lambda(t_n)$, а значит — не менее 1 полного шага дискретной модели. Для этого шага в (2.160) $P(\xi_n)$ можно заменить на меньшее значение $F(w, r, \lambda)/(w\lambda)$, что даст

$$Z_\lambda(t_n) - Z_\lambda(t_{n-1}) \leq 0. \quad (2.173)$$

Это означает, что после попадания в I дальнейшее увеличение площади остаточной области невозможно. Очевидно, что выбирая λ достаточно малым, можно добиться, чтобы $Z_\lambda(t)$ гарантированно не могло достичь аргумента максимума $P(Q_0; Z)$. Поэтому соотношение $\mathcal{R}_\lambda(S; \tau_b) = Q_0$ не выполняется ни для какой траектории, и согласно критерию 1.5 задача не имеет решений.

Заметим, что попадание элементов последовательности $Z_\lambda(t_n)$ в I гарантируется тем, что первый из элементов последовательности не превосходит площади круга обнаружения πr^2 , которая для достаточно малых λ может быть сделана сколь угодно близкой к πr^2 , а эта величина, согласно условию теоремы строго меньше хотя бы одного из аргументов максимума Z_m функции $P(Q_0; Z)$. Поэтому в приведенном рассуждении интервал I следует брать лежащим правее Z_m , что всегда возможно. \square

Теорема 2.8. Пусть хотя бы для одного элемента Z_m множества $\arg \max P(Q_0; Z)$ выполнено неравенство $Z_m > \pi r^2$. Тогда задача обноружения (Q_0, w, r) , где $Q_0 \in \Omega$, неразрешима, если

$$\max P(Q_0; Z) > \frac{F(w, r)}{w}. \quad (2.174)$$

Доказательство. Пусть выполнено неравенство (2.174). Тогда для достаточно малых λ будет выполнено и (2.170). Вследствие предыдущей теоремы и леммы 2.1, утверждающей, что остаточная область базовой модели является подмножеством остаточной области дискретной модели, площадь первой также не сможет достигнуть μ , что и означает неразрешимость задачи. \square

2.4.3 Необходимые условия разрешимости обобщенной задачи патрулирования

Теорема 2.9. Рассмотрим обобщенную задачу патрулирования (Q_0, Q, w, r, λ) в дискретной модели. Пусть $Q_0 \in \Omega$, а $P(Q_0; Z)$ либо неограниченна, либо

$$\sup P(Q_0; Z) > \frac{F(w, r, \lambda)}{w\lambda}. \quad (2.175)$$

Тогда для достаточно малых λ площадь остаточной области не может превышать величины

$$Z^* = \inf \left\{ Z : P(Q_0; Z) > \frac{F(w, r, \lambda)}{w\lambda}, Z > \pi r^2 \right\}. \quad (2.176)$$

независимо от траектории ищущего (при условии, что указанное множество непусто).

Доказательство. Пусть $Z_\lambda(t_n) > Z^*$. По свойству точной нижней грани, найдется такая точка $Z_1 < Z_\lambda(t_n)$, что в ней, а значит и в некоторой ее окрестности I выполняется неравенство

$$P(Q_0; Z) > \frac{F(w, r, \lambda)}{w\lambda}. \quad (2.177)$$

Дословно повторяя рассуждение теоремы 2.7, получаем, что $Z_\lambda(t)$ не может выйти из интервала I направо, а значит не может достигнуть значения $Z_\lambda(t_n)$ вопреки нашему предположению. Попадание $Z_\lambda(t)$ в I обеспечивается условием $Z > \pi r^2$ в (2.176). \square

Следствие. Для достаточно малых λ площадь упреждающей области в обобщенной задаче патрулирования в дискретной модели (Q_0, Q, w, r, λ) ,

где $Q_0 \in \Omega$, а $P(Q_0; Z)$ удовлетворяет условиям теоремы, не может превышать величины (2.176), а площадь следящей области — величины

$$Z^* = 2 \inf \left\{ Z : P(Q_0; Z) > \frac{F(w, r, \lambda)}{w\lambda}, Z > \pi r^2 \right\} - \pi \left[r + \frac{\lambda(1+w)}{2} \right]^2 \quad (2.178)$$

(при условии, что указанное множество непусто).

Доказательство. Аналогично следствию из теоремы 2.5. \square

Замечание 1. Обозначим через $P^{-1}(p)$ минимальный элемент множества

$$\{Z : P(Q_0; Z) = p\}, \quad (2.179)$$

превышающий πr^2 . Если $P^{-1}(p)$ существует в некоторой окрестности $p = F(w, r, \lambda)/(w\lambda)$, то выражения (2.176) и (2.178) можно, очевидно, заменить соответственно на

$$Z^* = P^{-1} \left\{ \frac{F(w, r, \lambda)}{w\lambda} \right\}, \quad (2.180)$$

и

$$Z^* = 2P^{-1} \left\{ \frac{F(w, r, \lambda)}{w\lambda} \right\} - \pi \left[r + \frac{\lambda(1+w)}{2} \right]^2. \quad (2.181)$$

В частности, в случае существования у $P(Q_0; Z)$ обратной функции, $P^{-1}(p)$ получается из последней путем сужения области определения.

Замечание 2. С учетом предыдущего замечания, мы можем улучшить оценки (2.162) и (2.167). Для плоскости имеем:

$$P^{-1}(p) = \frac{p^2}{4\pi}, \quad p > 2\pi r, \quad (2.182)$$

откуда верхние оценки на площадь остаточной и упреждающей областей для задачи патрулирования в дискретной модели получаются равными соответственно

$$\frac{F^2(w, r, \lambda)}{4\pi w^2 \lambda^2} \quad (2.183)$$

и

$$\frac{F^2(w, r, \lambda)}{2\pi w^2 \lambda^2} - \pi \left[r + \frac{\lambda(1+w)}{2} \right]^2. \quad (2.184)$$

При этом справедливость неравенства из определения (2.182) для $p = F(w, r, \lambda)/(w\lambda)$ была установлена выше в теореме 2.5.

Теорема 2.10. Рассмотрим обобщенную задачу патрулирования в базовой модели (Q_0, Q, w, r) , где $Q_0 \in \Omega$. Пусть $P(Q_0; Z)$ либо неограниченна, либо

$$\sup P(Q_0; Z) > \frac{F(w, r)}{w}. \quad (2.185)$$

Тогда верхняя Жорданова мера остаточной области не может превышать величины

$$Z^* = \inf \left\{ Z : P(Q_0; Z) > \frac{F(w, r)}{w}, Z > \pi r^2 \right\}. \quad (2.186)$$

независимо от траектории ищущего (при условии, что указанное множество непусто).

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2.6. \square

Следующие следствия извлекаются аналогично следствиям из теоремы 2.6.

Следствие 1. Верхняя Жорданова мера упреждающей области в обобщенной задаче патрулирования (Q, w, r) в базовой модели не может превышать величины (2.186), а верхняя Жорданова мера следящей области — величины

$$2 \inf \left\{ Z : P(Q_0; Z) > \frac{F(w, r)}{w}, Z > \pi r^2 \right\} - \pi r^2 \quad (2.187)$$

независимо от траектории ищущего (при условии, что указанное множество непусто).

Следствие 2. Если площадь Q превышает величину (2.187), то обобщенная задача патрулирования (Q_0, Q, w, r) неразрешима.

Замечание. В случае существования $P^{-1}(p)$ хотя бы в некоторой окрестности $p = F(w, r)/w$ выражения (2.186) и (2.187) можно заменить соответственно на

$$Z^* = P^{-1} \left\{ \frac{F(w, r)}{w} \right\} \quad (2.188)$$

и

$$2P^{-1} \left\{ \frac{F(w, r)}{w} \right\} - \pi r^2. \quad (2.189)$$

2.4.4 Траектории уклонения

При нахождении достаточных условий разрешимости обычно строятся конкретные траектории ищущего, гарантирующие обнаружение. Подобно этому, при рассмотрении необходимых условий представляется естественным, для случая невыполнения этих условий, предложить алгоритм построения траектории уклонения от заданной траектории ищущего. Покажем, как вышеприведенные рассуждения позволяют это сделать.

Рассмотрим, например, задачу обнаружения, заданную тройкой параметров (Q_0, w, r) . Пусть для данного набора параметров не выполнены сформулированные выше необходимые условия обнаружения, и пусть $S(t)$ — произвольная траектория ищущего. Построим траекторию уклонения от $S(t)$. Для этого обратимся к дискретной модели поиска и рассмотрим следующее переменное множество:

$$\bar{T}_\lambda(S; t) = Q_0 \setminus T_\lambda(S; t). \quad (2.190)$$

В п. 2.2 указан алгоритм построения $\mathcal{R}_\lambda(S; t)$. С учетом леммы 1.1, тот же алгоритм применим и для построения $\mathcal{A}_\lambda(S; t)$, что означает, что у нас имеется алгоритмический способ построения $T_\lambda(S; t)$ и $\bar{T}_\lambda(S; t)$.

Из того, что необходимые условия разрешимости не выполнены следует, что по крайней мере для достаточно малых λ множество $\bar{T}_\lambda(S; t)$ непусто для всех $t \in T$. В частности, непустыми будут все множества $\bar{T}_\lambda(S; t_n)$. Рассмотрим $n = p$ и $\bar{T}_\lambda(S; t_p)$, соответствующие начальному моменту поиска $\tau_a = t_p$ (см. (2.2)). Выберем произвольную точку $x_p \in \bar{T}_\lambda(S; t_p)$. Это будет начальная точка траектории уклонения. Далее рассмотрим множество

$$B(x_p, w\lambda) \cap \bar{T}_\lambda(S; t_{p+1}). \quad (2.191)$$

Отметим, что оно непусто. Действительно, круг с центром в x_p радиуса $w\lambda$ представляет собой множество, в котором может находиться уклоняющийся в момент $t_{p+1} = t_p + \lambda$, начавший движение из точки x_p в момент t_p . Предположение о том, что указанное множество пусто означает, что уклоняющийся к моменту t_{p+1} гарантированно обнаруживается, и получается, что точка x_p должна была принадлежать следящей области, что противоречит выбору x_p .

Выберем произвольную точку x_{p+1} из множества (2.191). Траекторией уклонения на участке $[t_p, t_{p+1}]$ будет произвольная траектория, удовлетворяющая условиям:

$$H(t_p) = x_p, \quad H(t_{p+1}) = x_{p+1}. \quad (2.192)$$

То, что такая траектория существует, следует из выбора точек x_p и x_{p+1} . Это может быть, например, траектория прямолинейного движения от x_p к x_{p+1} с максимальной скоростью w и затем, если $|x_p - x_{p+1}| < w\lambda$, ожидания в x_{p+1} . Покажем, что на протяжении всего отрезка $[t_p, t_{p+1}]$ любая траектория $H(t)$, удовлетворяющая (2.192), лежит вне переменного множества $T_\lambda(S; t)$. Для граничных точек отрезка это следует из построения. Предположим, что в некоторый момент $t \in (t_p, t_{p+1})$ оказывается $H(t) \in T_\lambda(S; t)$. Уклоняющийся не может попасть сразу в остаточную область, поэтому можно считать, что $H(t) \in \mathcal{A}_\lambda(S; t)$. Попадание в упреждающую область означает, что уклоняющийся гарантированно будет обнаружен. Однако, поскольку в дискретной модели обнаружение

происходит только в моменты t_n , уклоняющийся может быть обнаружен не ранее ближайшего такого момента, а именно t_{p+1} . А это значит, что в момент t_{p+1} он все еще будет находиться в упреждающей области, что противоречит выбору точки x_{p+1} .

На следующем шаге мы проводим аналогичное рассуждение для x_{p+1} и строим x_{p+2} и т. д. Построенная траектория будет траекторией уклонения от ищущего, действующего в рамках дискретной модели, однако, вследствие леммы 2.1, эта же траектория обеспечит уклонение и в рамках обычной модели.

Суммируя сказанное, мы приходим к следующему алгоритму построения траектории уклонения от заданной траектории $S(t)$ в случае нарушения необходимых условий обнаружения. Сначала мы определяем значение λ , для которого $\bar{T}_\lambda(S; t)$ непусто. Затем по $S(t)$ мы строим множества $\bar{T}_\lambda(S; t_n)$ для всех n от p до q . Далее, начиная с $n = p$, мы последовательно выбираем по точке $x_n \in \bar{T}_\lambda(S; t_n)$. Первая точка x_p выбирается произвольно, а последующие — с условием $|x_n - x_{n-1}| \leq w\lambda$. Существование таких точек обосновано выше. Произвольная траектория уклоняющегося, такая что $H(t_n) = x_n$, и, разумеется, удовлетворяющая (1.10), будет искомой траекторией уклонения.

2.5 Применение к конкретным задачам поиска

2.5.1 Поиск в круговой области

Рассмотрим задачу патрулирования круговой области радиуса a . Согласно результатам п. 2.4.1, данная задача неразрешима, если площадь круга превосходит величину (2.169), т. е. если

$$\pi a^2 > \frac{F^2(w, r)}{2\pi w^2} - \pi r^2, \quad (2.193)$$

что означает, что для разрешимости необходимо, чтобы

$$a \leq \sqrt{\frac{F^2(w, r)}{2\pi^2 w^2} - r^2}. \quad (2.194)$$

С учетом (1.17), для величины R_1 — точной верхней грани величин радиусов круговых областей, которые можно патрулировать на плоскости, можно записать:

$$\frac{r}{\pi w} \leq R_1 \leq \sqrt{\frac{F^2(w, r)}{2\pi^2 w^2} - r^2}. \quad (2.195)$$

Далее, рассмотрим задачу обнаружения в круге радиуса a . Несмотря на сложный вид функции периметра (2.60), максимум $\theta(a; Z)$ находится просто и равен, очевидно, $2a$. С учетом результатов п. 2.4.2, можно

утверждать, что рассматриваемая задача неразрешима при одновременном выполнении следующих неравенств:

$$2a > \frac{F(w, r)}{w}, \quad \frac{\pi a^2}{2} > \pi r^2. \quad (2.196)$$

Однако второе неравенство является следствием первого, что следует из легко устанавливаемого соотношения

$$\frac{F(w, r)}{w} > 2\pi r, \quad (2.197)$$

и поэтому второе неравенство можно опустить. Окончательно получаем, что необходимым условием разрешимости будет

$$a \leq \frac{F(w, r)}{2w}. \quad (2.198)$$

Принимая во внимание (1.20), для величины R_2 — точной верхней грани величин радиусов круговых областей, в которых возможно обнаружение, можно записать:

$$r \max \left\{ 1 + \frac{1}{\pi w}, \sqrt{1 + \frac{1}{4w^2}} \right\} \leq R_2 \leq \frac{F(w, r)}{2w}. \quad (2.199)$$

Наконец, рассмотрим обобщенную задачу патрулирования круга. В обобщенной задаче перемещение игроков происходит не по всей плоскости, а по некоторому ее подмножеству; пусть это будет плоский угол величины θ . Вследствие монотонности соответствующей функции периметра (2.53) можно написать

$$P^{-1}(p) = \frac{p^2}{2 \min(\theta, \pi)}, \quad p > \sqrt{2\pi \min(\theta, \pi)} r. \quad (2.200)$$

Подставляя это выражение в (2.189), получим, что обобщенная задача патрулирования неразрешима, если площадь множества, которое требуется патрулировать, превышает величину

$$\frac{F^2(w, r)}{w^2 \min(\theta, \pi)} - \pi r^2. \quad (2.201)$$

Окончательно получаем следующее необходимое условие разрешимости:

$$a \leq \sqrt{\frac{F^2(w, r)}{\pi w^2 \min(\theta, \pi)} - r^2}. \quad (2.202)$$

Неравенство из определения (2.200) для $p = F(w, r)/w$, очевидно, выполнено, как более слабое неравенство, нежели (2.197).

2.5.2 Поиск в прямоугольной области

Рассмотрим задачу патрулирования прямоугольника со сторонами a и b . Данная задача неразрешима, если площадь прямоугольника превосходит величину (2.169), и поэтому необходимым условием разрешимости будет

$$ab \leq \frac{F^2(w, r)}{2\pi w^2} - \pi r^2. \quad (2.203)$$

Перейдем к рассмотрению задачи обнаружения в прямоугольнике. Пусть $a \leq b$. Согласно примеру 2.5, максимум функции периметра прямоугольника равен a . Поэтому задача обнаружения неразрешима, если

$$a > \frac{F(w, r)}{w}. \quad (2.204)$$

Второе неравенство

$$ab - \frac{a^2}{\pi} > \pi r^2, \quad (2.205)$$

как нетрудно видеть, и здесь оказывается следствием первого и ничего к нему не добавляет. Таким образом, необходимое условие разрешимости имеет вид:

$$a \leq \frac{F(w, r)}{w}. \quad (2.206)$$

Наконец, для обобщенной задачи патрулирования прямоугольника в плоском угле получаем следующее необходимое условие:

$$ab \leq \frac{F^2(w, r)}{w^2 \min(\theta, \pi)} - \pi r^2. \quad (2.207)$$

2.6 Основное уравнение

Найдем уравнение, в наиболее краткой форме выражающее идею изложенного метода. Необходимые условия, полученные в пп. 2.4.1–2.4.3, были выведены из общей оценки (2.22). Разделим ее на λ и формально перейдем к пределу при $\lambda \rightarrow 0$; это соответствует переходу от дискретной модели к базовой. Левая часть выражения будет иметь смысл производной площади остаточной области по времени, приравняем ее к 0:

$$F(w, r) - wP(Q_0; Z) \geq 0. \quad (2.208)$$

Это неравенство выражает собой своеобразный баланс между способностью ищущего исследовать определенную площадь в единицу времени (величина $F(w, r)$) и ценой, которую он должен платить в единицу времени за информацию об отсутствии уклоняющегося на площади Z

(величина $wP(Q_0; Z)$). Необходимым условием возможности продолжения поиска является положительность данного баланса. Приравняем обе части неравенства друг к другу:

$$F(w, r) = wP(Q_0; Z). \quad (2.209)$$

Полученное выражение в некотором смысле описывает границу между областями выполнения и невыполнения необходимых условий. При этом необходимо уточнить, что означает величина Z .

В задачах патрулирования (обычной и обобщенной) Z имеет смысл верхней оценки площади остаточной области. Чтобы перейти к площади следящей области и затем к площади патрулируемого множества Q нужно, очевидно, заменить Z на $(Z + \pi r^2)/2$. Уравнение (2.209) примет следующий вид:

$$F(w, r) = wP\left(Q_0; \frac{|Q| + \pi r^2}{2}\right). \quad (2.210)$$

Для задачи обнаружения (2.208) должно выполняться для всех Z из области определения $P(Q_0; Z)$, поэтому в этом случае уравнение (2.209) следует переписать в виде

$$F(w, r) = w \max P(Q_0). \quad (2.211)$$

Таким образом, уравнение (2.209) в некотором смысле является общим, т. е. не зависящим от типа задачи уравнением границы между областями выполнения и невыполнения необходимых условий. В то же время его вид в наиболее лаконичной форме выражает идею рассуждений — рассмотрение динамики информационной области. Это дает нам право назвать его основным уравнением теории.

Приведенные в настоящем пункте выкладки фактически являются кратким и неформальным повторением доказательств из пп. 2.4.1–2.4.3.

Глава 3

Выводы и обобщения

В этой главе мы сделаем некоторые выводы из результатов, полученных выше, а также покажем, как предложенный метод можно использовать для более широкого, нежели рассмотренный, круга задач, как-то: задачи с несколькими ищущими, задачи в пространствах повышенной размерности и задачи в пространствах с неевклидовой метрикой.

3.1 Некоторые выводы

3.1.1 Построение оптимальных траекторий

Остаточную, упреждающую и следящую области мы неспроста называем информационными множествами. Так, площадь остаточной области в некотором смысле можно отождествить с мерой накопленной нами информации об отсутствии уклоняющегося. Убыль площади, т. е. убыль информации происходит по эффективному периметру, поэтому эффективный периметр — это мера той цены, которую мы вынуждены платить за имеющуюся у нас информацию. Функция периметра $P(Z)$ — это минимально возможная цена, которую надо заплатить за информацию Z . Поэтому оптимальные траектории поиска должны стремиться сделать эффективный периметр остаточной области в каждый момент времени как можно более близким к функции периметра.

3.1.2 Независимость от продолжительности поиска

Вспомним, что траектории ищущего и уклоняющегося определены на отрезке $[\tau_a, \tau_b]$. Интересным оказывается тот факт, что независимо от того, являются ли τ_a и τ_b входными параметрами задачи, результатом ее решения или чем-то иным, все вышеприведенные результаты не зависят от них, а только от Q_0 , Q , w и r . Таким образом, если вышеприведенные необходимые условия оказываются невыполненными при каких-то τ_a , τ_b ,

то никакое увеличение времени продолжительности поиска не изменит ситуацию — при условии, что τ_a и τ_b остаются конечными.

3.1.3 Моделирование и визуализация на ЭВМ

Дискретная модель поиска, введенная в п. 2.1, являлась вспомогательным построением в доказательстве необходимых условий разрешимости. Отметим, однако, и ее самостоятельную ценность для моделирования на ЭВМ поискового процесса и визуализации следящей и других областей. Действительно, определение следящей области в п. 1.4.2 является неконструктивным и непригодным для непосредственного моделирования на ЭВМ. В то же время для следящей области, построенной в рамках дискретной модели, имеется четкий алгоритм построения. Грамотный выбор значения параметра λ позволит достичь баланса между требуемой точностью аппроксимации и имеющимися вычислительными ресурсами.

Заметим, что в работах по гарантированному поиску имеются и другие конструктивно определяемые приближения к следящей области, в частности *стандартная следящая область* (см., например, [24]). Здесь было бы уместно вкратце сравнить данную конструкцию со следящей областью в дискретной модели.

Во-первых, стандартная следящая область является подмножеством, т. е. приближением снизу, в то время как следящая область дискретной модели — надмножеством, или приближением сверху.

Во-вторых, стандартная следящая область для момента t_0 строится по отрезку траектории, соответствующему $t \in [t_0 - r/w, t_0 + r/w]$ и не использует информацию о положении ищущего в другие моменты времени. Следящая же область в дискретной модели строится для всего отрезка времени $[\tau_a, \tau_b]$, на котором производится поиск. Таким образом, стандартная следящая область — в некотором смысле «мгновенная» область, и поэтому возможности по накоплению информации с ее использованием ограничены. Это компенсируется простотой ее построения.

Сделаем еще несколько замечаний по поводу моделирования следящей области на ЭВМ. Выше неоднократно отмечалось, что следящая область в рамках дискретной модели является надмножеством обычной следящей области (приближением сверху). Однако, если радиус обнаружения ρ в дискретной модели фиксировать не выражением (2.7), принятым в работе, а выражением $\rho = r$, то, очевидно, следящая область дискретной модели оказывается подмножеством (приближением снизу). В этом случае она теряет ценность как инструмент доказательства необходимых условий, но сохраняет преимущества как средство моделирования на ЭВМ. Таким образом, следящая область в рамках базовой модели поиска, моделируемая на ЭВМ при помощи следящей области дискретной модели, будет лежать «между» следящими областями дискретной модели, построенными для значений ρ , равных r и (2.7). Есть основа-

ния предполагать сходимость двух данных множеств друг к другу и как следствие — к моделируемой области; соответствующее доказательство представляет несомненный интерес.

Вышеприведенные замечания в целях экономии места сделаны для следящей области, однако дословно переносятся на упреждающую и остаточную области.

Уточним, что для того, чтобы построить следящую область дискретной модели для траектории $S(t)$ и момента $t_0 \in [\tau_a, \tau_b]$, следует построить остаточную область по подробно описанному в п. 2.2 алгоритму на отрезке $[\tau_a, t]$, а также упреждающую область — как остаточную область траектории, в которую переходит $S(t)$ при обращении направления отсчета времени, на отрезке, в который при обращении направления отсчета времени переходит отрезок $[t, \tau_b]$.

3.2 Обобщения

3.2.1 Задачи с несколькими ищущими

Базовая модель поиска, сформулированная в начале работы, предполагает наличие только одного ищущего. Однако описанный метод нахождения необходимых условий разрешимости допускает очевидное обобщение на случай N ищущих, имеющих различные радиусы обнаружения и максимальные скорости. Поскольку условие равенства максимальной скорости ищущего единице теперь обеспечить нельзя, нам будет удобно задать множества допустимых траекторий игроков следующим образом (ср. с (1.8)–(1.11)):

$$T = [\tau_a, \tau_b], \quad (3.1)$$

$$D_S = \{S : |S(t_2) - S(t_1)| \leq w_i^{-1} |t_2 - t_1|\}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3.2)$$

$$D_H = \{H : |S(t_2) - S(t_1)| \leq |t_2 - t_1|\}, \quad (3.3)$$

$$0 < w_i < 1 \quad (w_i = \text{const}), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (3.4)$$

Таким образом, w_i по-прежнему обозначает отношение скорости уклоняющегося к скорости ищущего, а именно оно, а не абсолютные значения фигурирует в формулах. Обнаружение происходит при выполнении хотя бы одного из неравенств:

$$|S(t^*) - H(t^*)| \leq r_i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3.5)$$

где

$$r_i > 0 \quad (r_i = \text{const}), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (3.6)$$

Получим оценки для величин $\Delta_1 Z_\lambda(t_n)$ и $\Delta_2 Z_\lambda(t_n)$ (см. (2.9) и (2.10)) — приращений площади остаточной области за один шаг в дискретной

модели за счет убывания и добавления нового круга. Нетрудно видеть, что оценка (2.17) переходит в

$$-\Delta_1 Z_\lambda(t_n) \geq P(\xi_n)\lambda, \quad (3.7)$$

т. к. максимальная скорость уклоняющегося теперь равна 1. В оценке (2.18) для $\Delta_2 Z_\lambda(t_n)$ функция $F(w, r, \lambda)$ равнялась площади множества, получающегося вычитанием из круга радиуса ρ круга радиуса $\rho - w\lambda$, причем расстояние между центрами кругов равнялось λ . Отсюда легко видеть, что эта оценка переходит в

$$\Delta_2 Z_\lambda(t_n) \leq \sum_{i=1}^N F\left(w_i, r_i, \frac{\lambda}{w_i}\right), \quad (3.8)$$

т. к. теперь мы должны выразить величину площади множества, получающегося вычитанием из круга радиуса ρ_i круга радиуса $\rho_i - \lambda$, с расстоянием между центрами λ/w_i , а эта величина получается заменой в $F(w_i, r_i, \lambda)$ величины λ на λ/w_i .

Основное уравнение в данном случае имеет вид

$$\sum_{i=1}^N \frac{F(w_i, r_i)}{w_i} = P(Q_0; Z). \quad (3.9)$$

Проводя рассуждения с этими модифицированными оценками (например, по сокращенной формальной схеме с использованием основного уравнения, описанной в п. 2.6), можно получить следующие обобщения теорем из предыдущей главы на случай с N ищущими. Чтобы не повторяться, мы не будем приводить промежуточные утверждения о дискретной модели, а сразу сформулируем результат.

Теорема 3.1. *Если площадь Q превышает величину*

$$\frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{F(w_i, r_i)}{w_i} \right\}^2 - \pi \max_{1 \leq i \leq N} r_i^2, \quad (3.10)$$

то задача патрулирования $(Q, \{w_i\}, \{r_i\})$ с N ищущими неразрешима.

Замечание 1. В последнем выражении мы не можем вычесть площади всех кругов обнаружения, т. к. они могут частично перекрываться.

Замечание 2. В случае одинаковых ищущих ($r_i = r$, $w_i = w$ для всех i) выражение (3.10) переходит в

$$\frac{N^2 F(w, r)}{2\pi w^2} - \pi r^2. \quad (3.11)$$

Теорема 3.2. Пусть хотя бы для одного элемента Z_m множества $\arg \max P(Q_0; Z)$ выполнено неравенство

$$Z_m > \pi \sum_{i=1}^N r_i^2. \quad (3.12)$$

Тогда задача обнаружения $(Q_0, \{w_i\}, \{r_i\})$, где $Q_0 \in \Omega$, с N ищущими неразрешима, если

$$\max P(Q_0; Z) > \sum_{i=1}^N \frac{F(w_i, r_i)}{w_i}. \quad (3.13)$$

Замечание. В случае одинаковых ищущих условия переходят в

$$Z_m > N\pi r^2 \quad (3.14)$$

и

$$\max P(Q_0; Z) > \frac{NF(w, r)}{w}. \quad (3.15)$$

Теорема 3.3. Рассмотрим обобщенную задачу патрулирования $(Q_0, Q, \{w_i\}, \{r_i\})$, где $Q_0 \in \Omega$, с N ищущими. Пусть $P(Q_0; Z)$ либо неограниченна, либо

$$\sup P(Q_0; Z) > \sum_{i=1}^N \frac{F(w_i, r_i)}{w_i}. \quad (3.16)$$

Тогда, если площадь Q превышает величину

$$2 \inf \left\{ Z : P(Q_0; Z) > \sum_{i=1}^N \frac{F(w_i, r_i)}{w_i}, Z > \pi \sum_{i=1}^N r_i^2 \right\} - \pi \max_{1 \leq i \leq N} r_i^2, \quad (3.17)$$

то задача неразрешима (при условии, что указанное множество непусто).

Замечание 1. Обозначим через $P^{-1}(p)$ минимальный элемент множества

$$\{Z : P(Q_0; Z) = p\}, \quad (3.18)$$

превышающий

$$\pi \sum_{i=1}^N r_i^2. \quad (3.19)$$

Если $P^{-1}(p)$ существует в некоторой окрестности точки

$$p = \sum_{i=1}^N \frac{F(w_i, r_i)}{w_i}, \quad (3.20)$$

то последнее выражение можно заменить на

$$2P^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{F(w_i, r_i)}{w_i} \right\} - \pi \max_{1 \leq i \leq N}^2 r_i. \quad (3.21)$$

Замечание 2. В случае одинаковых ищущих выражения (3.17) и (3.21) переходят соответственно в

$$2 \inf \left\{ Z : P(Q_0; Z) > \frac{NF(w, r)}{w}, Z > N\pi r^2 \right\} - \pi r^2 \quad (3.22)$$

и

$$2P^{-1} \left\{ \frac{NF(w, r)}{w} \right\} - \pi r^2. \quad (3.23)$$

Пример 3.1. Рассмотрим задачу обнаружения с N одинаковыми ищущими в круге радиуса a . С учетом того, что максимум функции периметра круга равен $2a$, получаем, что задача неразрешима, если

$$a > \frac{NF(w, r)}{2w}, \quad (3.24)$$

или, что то же самое, если площадь круга превышает

$$\frac{\pi N^2 F^2(w, r)}{4w^2}. \quad (3.25)$$

Данный пример иллюстрирует интересный факт, непосредственно следующий из трех приведенных теорем: для задачи с N ищущими с ростом N площадь, для которой согласно необходимым условиям задача становится неразрешимой, растет пропорционально N^2 . На первый взгляд, естественным было бы ожидать роста, пропорционального N : если один ищущий может гарантировать поиск на территории площади Z , то N смогут это сделать на территории площади NZ . Это практически очевидно, если ищущие находятся далеко друг от друга и действуют независимо. Однако представим двух ищущих, находящихся на расстоянии $2r$ друг от друга и движущихся перпендикулярно соединяющему их отрезку. Возвращаясь к примеру 1.2, можно заключить, что площадь следящей области вырастет в квадратичной зависимости (примерно в 4 раза) по сравнению с площадью следящей области одного ищущего. Это говорит о том, что квадратичный рост площади вместо ожидаемого линейного следует отнести на счет *взаимодействия* ищущих друг с другом.

3.2.2 Задачи в трехмерном пространстве

На примере трехмерного случая рассмотрим, какие изменения вносит повышение размерности Q_0 и Q . Пусть множество допустимых траекторий по-прежнему задается выражениями (1.8)–(1.11).

Переход к случаю трех измерений приводит к тому, что вместо площади остаточной, упреждающей и следящей областей мы будем работать с их объемом. Поэтому величина Z теперь будет обозначать объем. С учетом этого посмотрим, во что трансформируются оценки $\Delta_1 Z_\lambda(t_n)$ и $\Delta_2 Z_\lambda(t_n)$.

Для оценки $\Delta_1 Z_\lambda(t_n)$ нам понадобится распространить на трехмерный случай понятие функции периметра $P(Q_0; Z)$. Понятно, что роль периметра теперь будет играть площадь; для нее мы будем использовать прежнее обозначение P . Эффективной границей множества $Q \subset Q_0$, как и раньше, мы будем называть множество $\partial Q \setminus \partial Q_0$, а «эффективным периметром» p_E — площадь эффективной границы. С учетом сделанных оговорок определение функции периметра (2.24) для трехмерного случая не изменяется ($|Q|$ теперь трактуем как объем Q).

Задача патрулирования на \mathbb{R}^2 в трехмерном случае трансформируется в задачу патрулирования в \mathbb{R}^3 . Найдем функцию периметра \mathbb{R}^3 . Исключая радиус из выражений для объема и площади поверхности шара, получаем:

$$P(\mathbb{R}^3; Z) = \sqrt[3]{36\pi} Z^{\frac{2}{3}}. \quad (3.26)$$

С учетом сказанного, оценка (2.17)

$$-\Delta_1 Z_\lambda(t_n) \geq wP(\xi_n)\lambda, \quad (3.27)$$

где $Z_\lambda(t_n - 0) < \xi_n < Z_\lambda(t_{n-1})$, остается в силе.

Перейдем к получению оценки величины $\Delta_2 Z_\lambda(t_n)$. В трехмерном случае в качестве оценки следует взять объем множества, получаемого вычитанием из шара радиуса ρ шара радиуса $\rho - w\lambda$, причем расстояние между центрами шаров равно λ . Обозначим эту величину через $G(w, r, \lambda)$. Интересным является тот факт, что для $G(w, r, \lambda)$, в отличие от $F(w, r, \lambda)$ — двумерного аналога $G(w, r, \lambda)$, удастся получить компактное выражение:

$$G(w, r, \lambda) = \pi\lambda (1+w)^2 \left[r(r+\lambda) + \frac{1}{6} \lambda^2(1+w) \right]. \quad (3.28)$$

Однако в утверждениях, относящихся к базовой модели, используется не сама функция $G(w, r, \lambda)$, а величина

$$G(w, r) = \left. \frac{\partial G(w, r, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}, \quad (3.29)$$

являющаяся аналогом $F(w, r)$ (см. (2.20)). Имеем:

$$G(w, r) = \pi r^2(1+w)^2. \quad (3.30)$$

Интересным представляется сделать небольшое отступление и выяснить, что общего у $F(w, r)$ и $G(w, r)$. Мы ограничимся рассмотрением

их поведения в $w = 0$ и $w = 1$. Для $w = 0$ имеем:

$$\lim_{w \rightarrow 0} F(w, r) = F(0, r) = 2r, \quad (3.31)$$

$$\lim_{w \rightarrow 0} G(w, r) = G(0, r) = \pi r^2. \quad (3.32)$$

Данные величины совпадают с численными значениями введенного в [33] понятия *максимальной скорости поиска* (*maximal discovery rate*) — максимальной площади (объема), который может исследовать ищущий за единицу времени, или, на формальном языке, величины

$$\sup_S \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left| \bigcup_{t \in [0, \tau]} B(S(t), r) \setminus B(S(0), r) \right|, \quad (3.33)$$

где $B(x, r)$ означает круг или шар радиуса r с центром в x , а $|\cdot|$ — площадь или объем. Данное совпадение не случайно и является следствием очевидной схожести определений. При этом ясно, что максимальная скорость поиска совпадает с максимально возможной длиной (площадью) сечения круга (шара) обнаружения прямой (плоскостью), что мы и наблюдаем в (3.31) и (3.32).

Для $w = 1$ имеем:

$$\lim_{w \rightarrow 1} F(w, r) = F(1, r) = 2\pi r, \quad (3.34)$$

$$\lim_{w \rightarrow 1} G(w, r) = G(1, r) = 4\pi r^2. \quad (3.35)$$

Совпадение этих величин с длиной окружности и площадью сферы тоже неслучайно. $F(1, r, \lambda)$ и $G(1, r, \lambda)$ равны

$$|B(x, \rho) \setminus B(y, \rho - \lambda)|, \quad (3.36)$$

причем $|x - y| = \lambda$. Это означает, что второй круг (шар) целиком лежит в первом, и поэтому указанная величина не изменится, если мы положим $x = y$:

$$|B(x, \rho) \setminus B(y, \rho - \lambda)| = |B(x, \rho) \setminus B(x, \rho - \lambda)|. \quad (3.37)$$

Понятно, что тогда будет справедливо разложение

$$|B(x, \rho) \setminus B(x, \rho - \lambda)| = |\partial B(x, r)| \lambda + O(\lambda^2), \quad (3.38)$$

а поскольку коэффициент при λ равен $F(1, r)$ или $G(1, r)$, мы закономерно приходим к (3.34) и (3.35).

На рис. 37 приведены графики $F(w, 1)$ и $G(w, 1)$.

Итак, в качестве оценки величины $\Delta_2 Z_\lambda(t_n)$ можно взять определенную выше функцию $G(w, r, \lambda)$, а в качестве аналога $F(w, r)$ — функцию $G(w, r)$. Основное уравнение принимает вид

$$G(w, r) = wP(Q_0; Z). \quad (3.39)$$

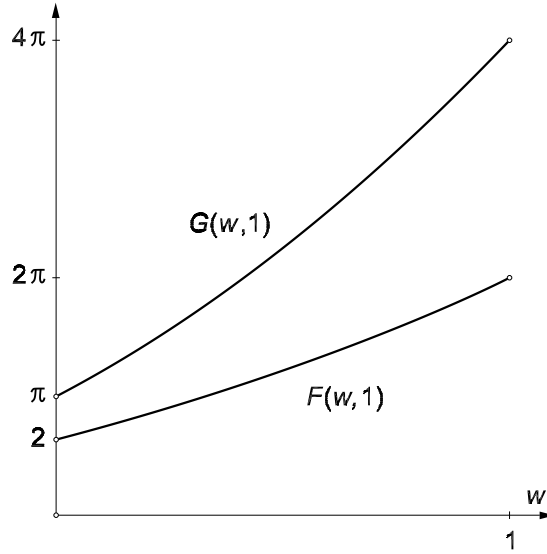


Рис. 37

Мы теперь готовы сформулировать необходимые условия разрешимости задач гарантированного поиска в трехмерном случае.

Теорема 3.4. *Если объем Q превышает величину*

$$\frac{1}{3} \pi r^3 \left[\left(\sqrt{w} + \frac{1}{\sqrt{w}} \right)^3 - 4 \right], \quad (3.40)$$

то задача патрулирования (Q, w, r) в \mathbb{R}^3 неразрешима.

Доказательство. В качестве отправной точки удобно взять выражение (2.189). Оно было получено для обобщенной задачи патрулирования на плоскости. В трехмерном случае оно, очевидно, переходит в

$$2P^{-1} \left\{ \frac{G(w, r)}{w} \right\} - \frac{4}{3} \pi r^3. \quad (3.41)$$

С учетом (3.26) имеем:

$$P^{-1}(p) = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{\pi}}. \quad (3.42)$$

Подставляя в (3.41) это выражение, а также выражение (3.30) для $G(w, r)$, получаем (3.40). \square

Теорема 3.5. *Пусть хотя бы для одного элемента Z_m множества $\arg \max P(Q_0; Z)$ выполнено неравенство $Z_m > 4\pi r^3/3$. Тогда задача обнаружения (Q_0, w, r) , где $Q_0 \in \Omega$, неразрешима, если*

$$\max P(Q_0; Z) > \pi r^2 \left(w + \frac{1}{w} + 2 \right). \quad (3.43)$$

Доказательство. Данное неравенство получается аналогично (2.174) с заменой $F(w, r)$ на $G(w, r)$. \square

Теорема 3.6. *Рассмотрим обобщенную задачу патрулирования (Q_0, Q, w, r) , где $Q_0 \in \Omega$. Пусть $P(Q_0; Z)$ либо неограниченна, либо*

$$\sup P(Q_0; Z) > \pi r^2 \left(w + \frac{1}{w} + 2 \right). \quad (3.44)$$

Тогда, если объем Q превышает величину

$$2 \inf \left\{ Z : P(Q_0; Z) > \pi r^2 \left(w + \frac{1}{w} + 2 \right), Z > \frac{4}{3} \pi r^3 \right\} - \frac{4}{3} \pi r^3, \quad (3.45)$$

то задача неразрешима (при условии, что указанное множество непусто).

Замечание. Обозначим через $P^{-1}(p)$ минимальный элемент множества

$$\{Z : P(Q_0; Z) = p\}, \quad (3.46)$$

превышающий $4\pi r^3/3$. Если $P^{-1}(p)$ существует в некоторой окрестности точки

$$p = \pi r^2 \left(w + \frac{1}{w} + 2 \right), \quad (3.47)$$

то последнее выражение можно заменить на

$$2P^{-1} \left\{ \pi r^2 \left(w + \frac{1}{w} + 2 \right) \right\} - \frac{4}{3} \pi r^3. \quad (3.48)$$

Пример 3.2. Задача патрулирования в \mathbb{R}^3 шара радиуса, превышающего

$$r \sqrt[3]{\frac{1}{4} \left(\sqrt{w} + \frac{1}{\sqrt{w}} \right)^3 - 1}, \quad (3.49)$$

неразрешима.

Интересным здесь представляется провести сравнение с задачей патрулирования круга в двумерном случае (п. 2.5.1). Необходимые условия разрешимости задачи патрулирования требуют, чтобы площадь (объем) круга (шара) не превышали определенной функции от w и r (эти функции заданы выражениями (2.169) и (3.40)). Нормируем эти функции делением на πr^2 и $4\pi r^3/3$ соответственно. Мы получим следующие функции (не зависящие от r):

$$g_2(w) = \frac{2\{w(\pi - \arccos w) + \sqrt{1 - w^2}\}^2}{\pi^2 w^2} - 1, \quad (3.50)$$

$$g_3(w) = \frac{1}{4} \left(\sqrt{w} + \frac{1}{\sqrt{w}} \right)^3 - 1. \quad (3.51)$$

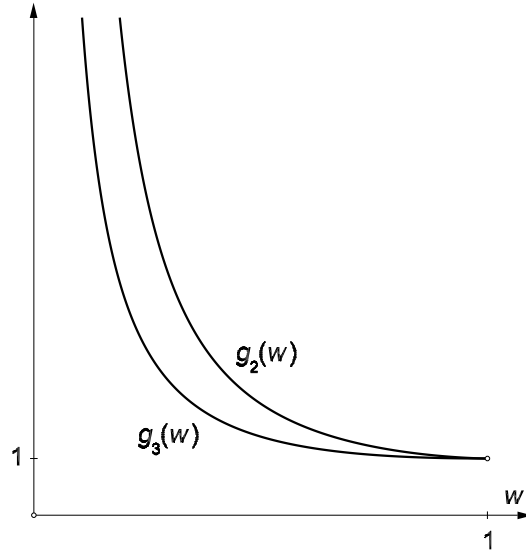


Рис. 38

Их графики приведены на рис. 38. Исходя из них, можно сказать, что рост размерности при прочих равных условиях приводит к снижению возможности эффективного гарантированного поиска.

Пример 3.3. Рассмотрим задачу обнаружения в шаре радиуса a . Мы не будем исследовать функцию периметра шара, однако ее максимум, очевидно, равен πa^2 . Отсюда можно заключить, что если a превышает

$$r \left(\sqrt{w} + \frac{1}{\sqrt{w}} \right), \quad (3.52)$$

то задача неразрешима. Условие $Z_m > 4\pi r^3/3$, как и раньше, оказывается лишь следствием.

3.2.3 Задачи на сфере

Рассмотрим задачу поиска на сфере радиуса a . Расстояние между двумя точками в данном случае задается длиной дуги большого круга, соединяющей точки (меньшей из двух); соответствующим образом модифицируется определение круга $B(x, R)$, в частности круга обнаружения.

Ограниченность сферы вкупе с отсутствием границ позволяет нам рассматривать одновременно задачу обнаружения на всей сфере и задачу патрулирования некоторого подмножества сферы. В обеих формулировках Q_0 представляет собой всю сферу; мы ограничимся только ими и не будем рассматривать задачу обнаружения и обобщенную задачу патрулирования, в которых Q_0 было бы произвольным подмножеством сферы.

Функция периметра сферы находится легко и оказывается равной

$$P(Z) = 2\sqrt{Z\left(\pi - \frac{Z}{4a^2}\right)}. \quad (3.53)$$

Как и следовало ожидать, предел этой функции при $a \rightarrow +\infty$ совпадает с функцией периметра плоскости. Максимум $P(Z)$ равен $2\pi a$, а обратная функция ($0 \leq Z \leq 2\pi a^2$) —

$$P^{-1}(p) = 2\pi a^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{p^2}{4\pi^2 a^2}}\right). \quad (3.54)$$

Основной трудностью в данной задаче является получение аналога функции $F(w, r)$, которая определяется как

$$F(w, r) = \frac{\partial F(w, r, \lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0}, \quad (3.55)$$

где $F(w, r, \lambda)$ есть площадь множества $B(x, \rho) \setminus B(y, \rho - w\lambda)$, причем $|x - y| = \lambda$. Во избежание путаницы, для сферы вместо $F(w, r)$ будем использовать обозначение $H_a(w, r)$. Весьма громоздкие вычисления приводят к следующему выражению для $H_a(w, r)$:

$$\begin{aligned} H_a(w, r) = & 2aw \sin \frac{r}{a} \left\{ \pi - \arccos \left(\frac{aw}{r} \sin \frac{r}{a} \right) \right\} + \\ & + \frac{2a^2 \left(\cos \frac{r}{a} - \frac{aw}{r} \sin \frac{r}{a} \right) \left(\cos \frac{r}{a} - \frac{aw^2}{r} \sin \frac{r}{a} \right) + 2r^2 \left(1 - \frac{a^2 w^2}{r^2} \sin^2 \frac{r}{a} \right)^2}{r \sqrt{1 - \frac{a^2 w^2}{r^2} \sin^2 \frac{r}{a}} \sqrt{\left(\cos \frac{r}{a} - \frac{aw^2}{r} \sin \frac{r}{a} \right)^2 + \frac{r^2}{a^2} \left(1 - \frac{a^2 w^2}{r^2} \sin^2 \frac{r}{a} \right)^2}} - \\ & - 2a^2 \frac{\cos \frac{r}{a} - \frac{aw}{r} \sin \frac{r}{a}}{r \sqrt{1 - \frac{a^2 w^2}{r^2} \sin^2 \frac{r}{a}}} \cos \frac{r}{a}. \quad (3.56) \end{aligned}$$

Отвлечемся на время от задач поиска и рассмотрим свойства $H_a(w, r)$. Легко устанавливается следующий закономерный факт:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} H_a(w, r) = 2r \left[w(\pi - \arccos w) + \sqrt{1 - w^2} \right] = F(w, r). \quad (3.57)$$

(см. (2.20)). Сходимость имеет место для любого $w \in [0, 1]$ и будет равномерной по w на $[0, 1 - \varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$. В $w = 1$ при $a \rightarrow +\infty$ оказывается, что

$$H_a(1, r) \sim \frac{4a}{\sqrt{3}}, \quad (3.58)$$

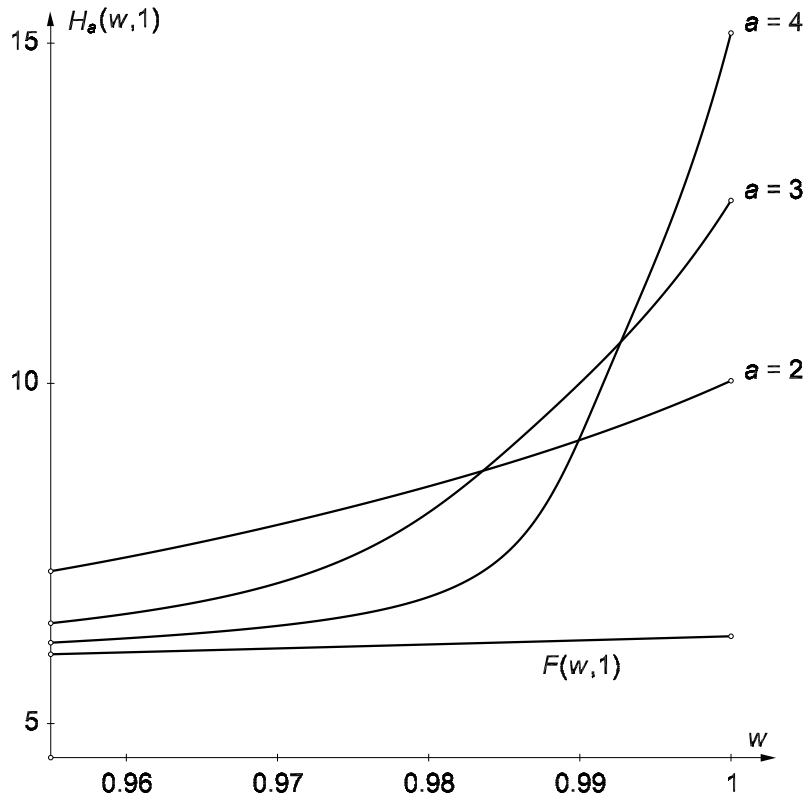


Рис. 39

и сходимости нет. На рис. 39 приведены графики $H_a(w, 1)$ для $a = 2, 3, 4$, иллюстрирующие характер поведения функции в окрестности $w = 1$ (на остальном участке изменения w функция $H_a(w, 1)$ мало отличается от $F(w, r)$ уже для небольших значений a).

Заметим, что

$$H_a(w, r) = aH_1(w, r/a). \quad (3.59)$$

Введем обозначение

$$H(w, r) = H_1(w, r) \quad (3.60)$$

и от рассмотрения $H_a(w, r)$ перейдем к рассмотрению $H(w, r)$. Эта функция нечетна по параметру r , поэтому

$$\left. \frac{\partial^2 H(w, r)}{\partial r^2} \right|_{r=0} = 0. \quad (3.61)$$

Из (3.57) и (3.61) следует, что для $w \in [0, 1)$ в окрестности $r = 0$ справедливо разложение

$$H(w, r) = 2r \left[w(\pi - \arccos w) + \sqrt{1 - w^2} \right] + O(r^3). \quad (3.62)$$

В то же время

$$H(1, r) = \frac{4}{\sqrt{3}} + 2\pi r + O(r^3), \quad (3.63)$$

поэтому

$$0 = \lim_{w \rightarrow 1-0} H(w, 0) \neq \lim_{r \rightarrow +0} H(1, r) = \frac{4}{\sqrt{3}}. \quad (3.64)$$

Рассмотрим подробнее, что происходит в окрестности особой точки $K = (w = 1, r = 0)$. Для этого получим следующее разложение в $w = 1$ по степеням $w - 1$:

$$H(w, r) = \frac{4}{\sqrt{3}} + 2\pi r + \frac{8\sqrt{3}}{r^2}(w - 1) + O(w - 1)^2, \quad (3.65)$$

тогда как из (3.62) следует, что в окрестности $w = 1, r = 0$

$$H(w, r) \sim 2\pi wr. \quad (3.66)$$

Приравняем два последних разложения:

$$\frac{4}{\sqrt{3}} + 2\pi r + \frac{8\sqrt{3}}{r^2}(w - 1) \simeq 2\pi wr. \quad (3.67)$$

При $(w, r) \rightarrow K$ получаем:

$$r^2 \simeq 6(1 - w). \quad (3.68)$$

Таким образом, вблизи K кривая $r^2 = 6(1 - w)$ является своеобразным водоразделом, в окрестности которого поведение $H(w, r)$ резко меняется с (3.65) на (3.66).

К соотношению (3.68) можно прийти и другим путем. Рассмотрим определение $H_a(w, r)$ (3.56). Обратим внимание, что если во втором слагаемом правой части (3.56) пренебречь членами в числителе и знаменателе, умножаемыми на r^2 :

$$2r^2 \left(1 - \frac{a^2 w^2}{r^2} \sin^2 \frac{r}{a} \right)^2, \quad \frac{r^2}{a^2} \left(1 - \frac{a^2 w^2}{r^2} \sin^2 \frac{r}{a} \right)^2 \quad (3.69)$$

то это слагаемое с точностью до знака выражения

$$\cos \frac{r}{a} - \frac{aw^2}{r} \sin \frac{r}{a} \quad (3.70)$$

совпадает с третьим слагаемым правой части (3.56). Таким образом, знак выражения (3.70) определяет, складываются ли близкие по значению абсолютные величины второго и третьего слагаемых правой части (3.56) или они вычитаются (что и обуславливает скачок в поведении $H(w, r)$). Полагая в (3.70) $a = 1$ и приравнявая выражение 0, получим:

$$w^2 = r \operatorname{ctg} r = 1 - \frac{r^2}{3} + O(r^4), \quad (3.71)$$

или, в окрестности K ,

$$(1+w)(1-w) \simeq \frac{r^2}{3}, \quad (3.72)$$

т. е. (3.68).

Сделаем несколько замечаний, касающихся вычисления $H(w, r)$ на ЭВМ. Во-первых, в окрестности $r = 0$ выражения

$$\cos r - \frac{w}{r} \sin r, \quad \cos r - \frac{w^2}{r} \sin r, \quad 1 - \frac{w^2}{r^2} \sin^2 r \quad (3.73)$$

следует вычислять не непосредственно по формулам, а, например, разложением в степенной ряд по r . Рассмотрим последнее из трех выражений. Вблизи $r = 0$ оно имеет вид

$$1 - (1 + \varepsilon(r)). \quad (3.74)$$

Представление вещественных чисел в ЭВМ характерно тем, что существует такое число ε_0 , что для любого $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ результат вычисления значения выражения $1.0 + \varepsilon$ в точности равен 1.0. Поэтому, пользуясь формулами (3.74) при $|\varepsilon(r)| \rightarrow \varepsilon_0$, мы получим значительные потери в точности, а при $|\varepsilon(r)| < \varepsilon_0$ результат будет равен 0. Аналогичное явление наблюдается и для остальных выражений (3.73). Вычисление этих выражений путем разложения в степенные ряды позволяет избежать указанных проблем и сохранить точность вплоть до $r = 0$.

Во-вторых, по сходным причинам будут наблюдаться значительные потери в точности при вычислении второго слагаемого в правой части (3.56), только здесь роль $\varepsilon(r)$ играют члены (3.69). Одним из способов избежать этих потерь является вычисление $H(w, r)$ в окрестности $r = 0$ при помощи выражения (3.62). При этом следует помнить, что в окрестности особой точки K данное разложение можно применять только для

$$|r| < k\sqrt{6(1-w)}, \quad (3.75)$$

где $k > 1$ — коэффициент, зависящий от используемой программной среды и требуемой точности.

В-третьих, как было показано, $w = 1$ является особым случаем, и поэтому в окрестности $r = 0$ здесь следует воспользоваться разложением (3.63).

Указанные нюансы вычисления $H_a(w, r)$ и $H(w, r)$ на ЭВМ учтены автором в созданной им библиотеке программного обеспечения. Эта библиотека прилагается к настоящей работе и описана в приложении А.

Вернемся к рассмотрению задач поиска на сфере. Основное уравнение в данном случае имеет вид

$$H_a(w, r) = wP(Q_0; Z). \quad (3.76)$$

Проводя аналогию с плоским случаем, можно прийти к следующим выводам. Пусть максимум функции периметра превышает $H_a(w, r)/w$, т. е.

$$a > \frac{H_a(w, r)}{2\pi w}, \quad (3.77)$$

а радиус обнаружения меньше $\pi a/2$ (этим обеспечивается требование, чтобы первый элемент дискретной последовательности не превосходил $\arg \max P(Z)$). Тогда задача обнаружения на сфере неразрешима. Расчеты показывают, что требование $r < \pi a/2$ автоматически выполняется при выполнении (3.77) и потому избыточно.

Далее, пусть выполнено неравенство (3.77). Тогда задача патрулирования подмножества сферы неразрешима, если его площадь превышает величину

$$2P^{-1} \left\{ \frac{H_a(w, r)}{w} \right\} - 2\pi a^2 \left(1 - \cos \frac{r}{a} \right), \quad (3.78)$$

при том, однако, условии, что

$$P^{-1} \left\{ \frac{H_a(w, r)}{w} \right\} > 2\pi a^2 \left(1 - \cos \frac{r}{a} \right). \quad (3.79)$$

$P^{-1}(p)$ и $H_a(w, r)$ заданы (3.54) и (3.56) соответственно.

Предпримем простейшую визуализацию полученных необходимых условий разрешимости, задаваемых выражениями (3.77) и (3.78) (при этом справедливость соотношения (3.79) устанавливается, например, численным путем). Пусть $a = 1$, что соответствует поиску на единичной сфере. Рассмотрим уравнения

$$1 - \frac{H(w, r)}{2\pi w} = 0 \quad (3.80)$$

и

$$2P^{-1} \left\{ \frac{H(w, r)}{w} \right\} - 2\pi(1 - \cos r) - Z = 0. \quad (3.81)$$

Первое из них задает некоторую зависимость между параметрами w и r , график которой приведен на рис. 40 (кривая OPQ). Для области, лежащей под кривой, необходимые условия разрешимости задачи обнаружения на единичной сфере не выполнены. Обратим внимание на точку P ($w \approx 0.809$, $r \approx 1.104$), в которой график достигает максимума. Понятно, что если в некоторой точке (w_1, r) необходимые условия не выполнены, то они заведомо не выполнены и в (w_2, r) , где $w_2 > w_1$. Поэтому необходимые условия разрешимости задачи обнаружения не выполнены также и для точек, находящихся в заштрихованной области, несмотря на то, что они лежат над кривой.

Наличие точки P выглядит нелогично, однако данный факт, по-видимому, связан с несовершенством применяемой модели. Понятно, что

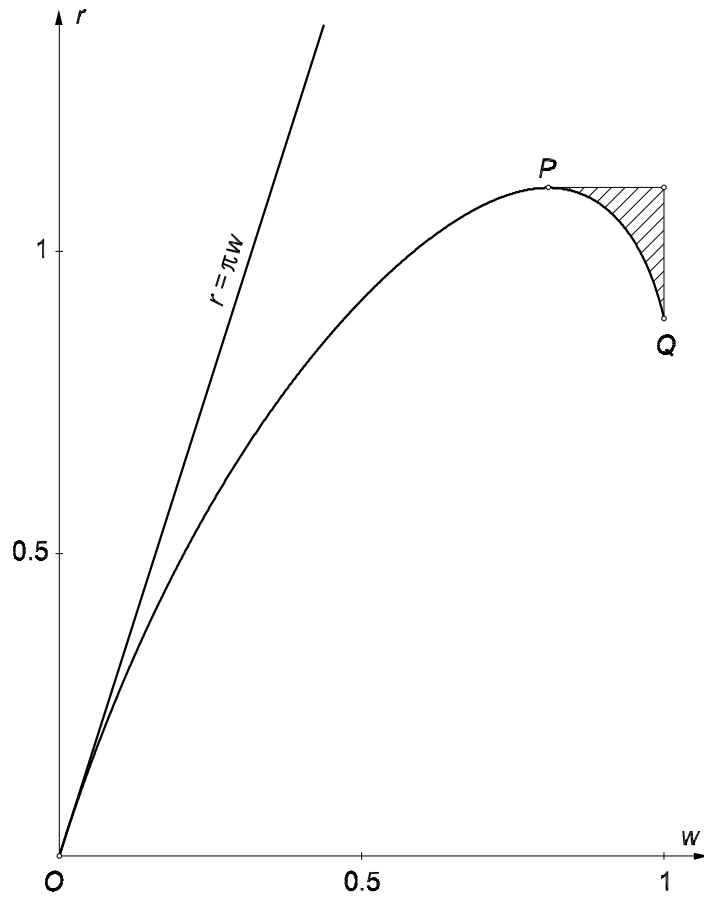


Рис. 40

если бы модель описывала необходимые и достаточные условия, а не только необходимые, то рассматриваемый график был бы монотонным и точки, подобные P , отсутствовали бы.

На рис. 40 для сравнения также приведен график $r = \pi w$. В [24] доказывается, что для точек, лежащих над этой прямой, выполнены достаточные условия разрешимости, и строится соответствующая поисковая траектория. Сближение необходимых и достаточных условий представляется крайне интересным. Отметим, что в начале координат графики касаются.

Уравнение (3.81) задает зависимость между w , r и Z . На рис. 41 приведены графики зависимости Z от w для некоторых фиксированных значений r . Для точек, лежащих над кривыми, не выполняются необходимые условия разрешимости задачи патрулирования на единичной сфере, т. е. невозможно патрулирование любой области площади Z . Заметим, что и в этом случае немонотонность кривых объясняется особенностями модели, и необходимые условия разрешимости для данного r не

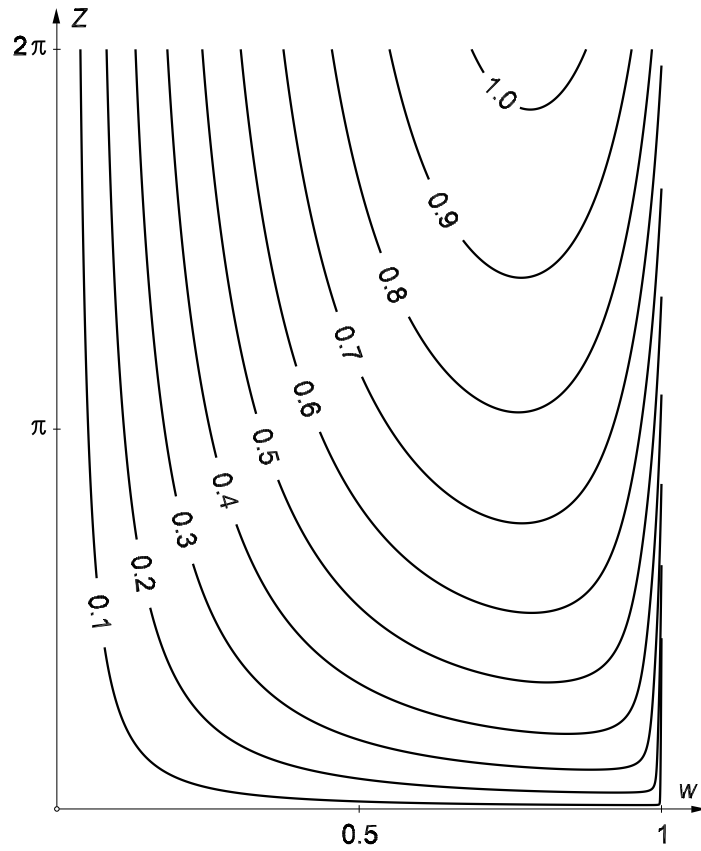


Рис. 41

выполняются не только для точек, лежащих над кривой, соответствующей этому значению r , но и для точек, лежащих над горизонтальным отрезком, соединяющим точку минимума этой кривой с прямой $w = 1$.

Напоследок заметим следующее. Уже для простейшего случая неевклидовой метрики — сферы — получить выражение для аналога $F(w, r)$, т. е. для $H(w, r)$, оказывается очень сложно. Для метрик с переменной кривизной функция, подобная $H(w, r)$ будет к тому же зависеть от координат (u_1, v_1) , (u_2, v_2) обоих кругов, при помощи которых определяется $H(w, r)$, и потребуются найти ее точную верхнюю грань на множестве изменения координат. Таким образом, рассматриваемый метод напрямую не очень подходит для отыскания необходимых условий в пространствах с произвольной метрикой, и модификация метода может заключаться в том, чтобы отыскивать не саму $H(w, r)$, а ее оценки сверху. Также актуальным становится использование программ символьной математики для ЭВМ.

Приложение А

Программное обеспечение

К настоящей работе прилагается следующее программное обеспечение:

- библиотека функций и классов *Search*, реализующая основные функции и алгоритмы, описанные в работе;
- программа «Периметр», реализующая алгоритм построения функции периметра выпуклых множеств;
- текст настоящей работы в электронном виде.

В данном приложении содержится описание перечисленного программного обеспечения.

А.1 Библиотека *Search*

Библиотека *Search* находится на прилагаемом компакт-диске в папке `\Search`. Библиотека написана на языке программирования C++ и предназначена для использования в программах, использующих функции или алгоритмы, приводимые в настоящей работе. Библиотека состоит из следующих файлов:

- заголовочного файла `search.hpp` с необходимой для программиста документацией;
- основного файла `search.cpp`.

Библиотека использует `::operator new` и средства стандартной библиотеки, поэтому следует учитывать возможность возникновения исключений типа `std::exception` и производных, в частности `std::bad_alloc`.

Для некоторых функций библиотеки, принимающих параметры арифметических типов (`double`, `unsigned`), в документации определяются множества допустимых значений этих параметров. Передача функции пара-

метра, значение которого лежит вне заданных пределов является ошибкой на этапе исполнения программы. Данные ошибочные ситуации обрабатываются одним из двух возможных способов, выбор которого производится программистом на этапе компиляции библиотеки при помощи символа `SEARCH_CPP_THROW_RANGE` (см. начало файла `search.cpp`). Если при компиляции библиотеки этот символ определяется посредством `#define`, в ошибочной ситуации будет сгенерировано исключение типа

- `std::invalid_argument`, если хотя бы один из параметров представляет собой `NaN`;
- `std::out_of_range`, если значения всех параметров являются конечными числами или же равны положительной или отрицательной бесконечности, но при этом хотя бы одно из значений лежит вне заданных границ.

При этом функция-член `what` класса исключения при обращении к ней возвратит строку, содержащую имя функции, инициировавшей исключение.

Если же при компиляции символ `SEARCH_CPP_THROW_RANGE` не определяется, функции об обеих приведенных выше ошибочных ситуациях будут сигнализировать не исключением, а возвратом значения `quiet NaN`.

Все функции и классы библиотеки объявлены внутри пространства имен `search`. Содержимое библиотеки можно условно разбить на две части:

- численные функции, не являющиеся членами классов и реализующие некоторые функции, используемые в настоящей работе, в частности функции периметра некоторых множеств;
- классы `convex_polygon` и `convex_polygon_pf`, реализующие алгоритм вычисления функции периметра выпуклых многоугольников, приведенный в п. 2.3.4.

А.1.1 Численные функции

```
double search::f(double w, double r);  
double search::g(double w, double r);  
double search::h(double w, double r, double a = 1.0);
```

Возвращаемое значение

Главный член разложения по λ оценок приращения площади остаточной области в результате добавления одного круга в дискретной модели поиска.

f — двумерный случай, $F(w, r)$, см. (2.20);

g — трехмерный случай, $G(w, r)$, см. (3.30);

h — поверхность сферы радиуса a , $H_a(w, r)$, см. (3.56).

Параметры

w Отношение скоростей

r Радиус обнаружения

a Радиус сферы

Область допустимых значений

$$0.0 \leq w \leq 1.0$$

$$0.0 \leq r \text{ (для } f, g), \quad 0.0 \leq r \leq \pi * a \text{ (для } h)$$

$$0.0 < a$$

```
double search::pf_plane(double z);
```

Возвращаемое значение

Функция периметра неограниченной плоскости, см. (2.15).

Параметры

z Аргумент функции периметра, площадь подмножества

Область допустимых значений

$0.0 \leq z$

```
double search::ipf_plane(double p);
```

Возвращаемое значение

Обратная функция периметра неограниченной плоскости, см. (2.182).

Параметры

p Аргумент обратной функции периметра, эффективный периметр подмножества

Область допустимых значений

$0.0 \leq p$

```
double search::pf_angle(double z, double theta);
```

Возвращаемое значение

Функция периметра плоского угла, см. (2.53).

Параметры

z Аргумент функции периметра, площадь подмножества
theta Величина плоского угла

Область допустимых значений

$0.0 \leq z$

$0.0 < \text{theta} < 2.0 * \pi$

```
double search::ipf_angle(double p, double theta);
```

Возвращаемое значение

Обратная функция периметра плоского угла, см. (2.200).

Параметры

p Аргумент обратной функции периметра, эффективный периметр подмножества
theta Величина плоского угла

Область допустимых значений

$0.0 \leq p$

$0.0 < \text{theta} < 2.0 * \pi$


```
double search::pf_sphere(double z, double a = 1.0);
```

Возвращаемое значение

Функция периметра сферы, см. (3.53).

Параметры

- z Аргумент функции периметра, площадь подмножества
- a Радиус сферы

Область допустимых значений

$$0.0 \leq z \leq 4.0 * \pi * a^2$$
$$0.0 < a$$

```
double search::ipf_sphere(double p, double a = 1.0);
```

Возвращаемое значение

Обратная функция периметра сферы, см. (3.54).

Параметры

- p Аргумент обратной функции периметра, эффективный периметр подмножества
- a Радиус сферы

Область допустимых значений

$$0.0 \leq p \leq 2.0 * \pi * a$$
$$0.0 < a$$

```
double search::pf_circle(double z, double a = 1.0);
```

Возвращаемое значение

Функция периметра круга, см. (2.61).

Параметры

- z Аргумент функции периметра, площадь подмножества
- a Радиус круга

Область допустимых значений

$$0.0 \leq z \leq \pi * a^2$$

$$0.0 \leq a$$

```
double search::ipf_circle(double p, double a = 1.0);
```

Возвращаемое значение

Обратная функция периметра круга, см. (2.61).

Параметры

- p Аргумент обратной функции периметра, эффективный периметр подмножества
- a Радиус круга

Область допустимых значений

$$0.0 \leq p \leq 2.0 * a$$

$$0.0 \leq a$$

```
double search::opf_circle(double z, double a = 1.0);
```

Возвращаемое значение

Внешняя функция периметра круга, см. пример 2.8.

Параметры

- z** Аргумент функции периметра, площадь подмножества
- a** Радиус круга

Область допустимых значений

$$0.0 \leq z$$

$$0.0 \leq a$$

z и **a** не должны равняться $+\infty$ одновременно

```
double search::iopf_circle(double p, double a = 1.0);
```

Возвращаемое значение

Обратная внешняя функция периметра круга, см. пример 2.8.

Параметры

- p** Аргумент обратной функции периметра, эффективный периметр подмножества
- a** Радиус круга

Область допустимых значений

$$0.0 \leq p$$

$$0.0 \leq a$$

p и **a** не должны равняться $+\infty$ одновременно

```
double search::  
pf_rectangle(double z, double a = 1.0, double b = 1.0);
```

Возвращаемое значение

Функция периметра прямоугольника, см. пример 2.9.

Параметры

z Аргумент функции периметра, площадь подмножества
a, b Стороны прямоугольника

Область допустимых значений

$$0.0 \leq z \leq a * b, z < +\infty$$

$$0.0 \leq a < +\infty$$

$$0.0 \leq b < +\infty$$

```
double search::  
ipf_rectangle(double p, double a = 1.0, double b = 1.0);
```

Возвращаемое значение

Обратная функция периметра прямоугольника, см. пример 2.9.

Параметры

p Аргумент обратной функции периметра, эффективный периметр подмножества
a, b Стороны прямоугольника

Область допустимых значений

$$0.0 \leq p \leq \min(a, b)$$

$$0.0 \leq a < +\infty$$

$$0.0 \leq b < +\infty$$

```
double search::  
opf_rectangle(double z, double a = 1.0, double b = 1.0);
```

Возвращаемое значение

Внешняя функция периметра прямоугольника, см. пример 2.9.

Параметры

- z** Аргумент функции периметра, площадь подмножества
- a, b** Стороны прямоугольника

Область допустимых значений

$$\begin{aligned}0.0 &\leq z \\ 0.0 &\leq a < +\infty \\ 0.0 &\leq b < +\infty\end{aligned}$$

```
double search::  
iopf_rectangle(double p, double a = 1.0, double b = 1.0);
```

Возвращаемое значение

Обратная внешняя функция периметра прямоугольника, см. пример 2.9.

Параметры

- p** Аргумент обратной функции периметра, эффективный периметр подмножества
- a, b** Стороны прямоугольника

Область допустимых значений

$$\begin{aligned}0.0 &\leq p \\ 0.0 &\leq a < +\infty \\ 0.0 &\leq b < +\infty\end{aligned}$$

```
double search::pf_3d(double z);
```

Возвращаемое значение

Функция периметра неограниченного трехмерного пространства, см. (3.26).

Параметры

z Аргумент функции периметра, объем подмножества

Область допустимых значений

$$0.0 \leq z$$

```
double search::ipf_3d(double p);
```

Возвращаемое значение

Обратная функция периметра неограниченного трехмерного пространства, см. (3.42).

Параметры

p Аргумент обратной функции периметра, площадь эффективной границы подмножества

Область допустимых значений

$$0.0 \leq p$$

А.1.2 Классы, представляющие функцию периметра выпуклых многоугольников

```
class search::convex_polygon;
```

Описание

Представление выпуклого многоугольника. Основное назначение объектов этого класса — передача информации о выпуклых многоугольниках в конструктор класса `search::convex_polygon_pf`, представляющего функцию периметра выпуклого многоугольника.

Открытые члены

```
convex_polygon();  
convex_polygon(const convex_polygon&);  
convex_polygon& operator = (const convex_polygon&);  
void add_vertex(const point&);  
void reset();  
const_iterator begin() const;  
const_iterator end() const;  
unsigned num_vertices() const;  
double area() const;  
void convex_hull();  
  
class point;  
class const_iterator;
```

```
search::convex_polygon::convex_polygon();
```

Описание

Конструктор по умолчанию, создающий объект, не имеющий вершин.

```
search::convex_polygon::  
convex_polygon(const convex_polygon&);
```

Описание

Конструктор копий, создающий полноценную копию объекта.

```
search::convex_polygon::  
operator = (const convex_polygon&);
```

Описание

Перегруженный оператор присваивания.

```
void search::convex_polygon::  
add_vertex(const point& new_vertex);
```

Описание

Добавить в многоугольник вершину.

Параметры

new_vertex Новая вершина

Замечания

При добавлении вершины в целях повышения эффективности проверка на выпуклость не производится. Это позволяет быстро обрабатывать большие массивы данных. После добавления всех вершин следует вызвать функцию-член `convex_hull`, которая преобразует набор вершин в выпуклый многоугольник.


```
void search::convex_polygon::reset();
```

Описание

Удалить все вершины.

```
search::convex_polygon::const_iterator  
search::convex_polygon::begin() const;
```

Возвращаемое значение

Двунаправленный итератор только для чтения, указывающий на первую вершину многоугольника. Данная функция аналогична одноименной функции-члену контейнерных классов стандартной библиотеки C++.

```
search::convex_polygon::const_iterator  
search::convex_polygon::end() const;
```

Возвращаемое значение

Двунаправленный итератор только для чтения, указывающий на позицию, следующую за последней вершиной многоугольника. Данная функция аналогична одноименной функции-члену контейнерных классов стандартной библиотеки C++.

```
unsigned search::convex_polygon::num_vertices() const;
```

Возвращаемое значение

Текущее количество вершин многоугольника.

```
double search::convex_polygon::area() const;
```

Возвращаемое значение

Текущая площадь многоугольника.

Замечания

В том случае, если в многоугольник добавлялись новые вершины, перед вызовом данной функции необходимо вызвать функцию-член `convex_hull`, в противном случае поведение будет непредсказуемым.

```
void search::convex_polygon::convex_hull();
```

Описание

Заменить множество вершин, добавленных в многоугольник, на выпуклую оболочку этого множества.

Замечания

Данная функция удаляет вершины, лежащие внутри выпуклой оболочки многоугольника. Строго говоря, до ее вызова объект не может считаться многоугольником (даже невыпуклым), а лишь множеством точек. Данная функция должна вызываться после добавления новых вершин перед использованием объекта клиентами, подразумевающими его выпуклость. В частности, такими клиентами являются функция-член `area` и конструктор класса `search::convex_polygon_pf`.

```
class search::convex_polygon::point;
```

Описание

Представление точки на плоскости. Используется функцией-членом `area`, итератором класса, а также классом `search::convex_polygon_pf`.

Открытые члены

```
point() {}  
point(double x, double y) : x(x), y(y) {}  
double x, y;
```

Замечания

В классе имеются и другие открытые члены-функции, реализующие векторную арифметику. Поскольку для пользователя данной библиотеки они не представляют интереса, их описание не приводится (см. файл `search.hpp`).

```
class search::convex_polygon::const_iterator;
```

Описание

Двунаправленный итератор только для чтения, предназначенный для обхода последовательности вершин многоугольника. Порядок вершин имеет смысл только после вызова `convex_hull`. Класс поддерживает стандартный набор операций для итераторов.

Открытые члены

```
const_iterator();  
const_iterator(const const_iterator&);  
const_iterator& operator = (const const_iterator&);  
point operator * () const;  
const point* operator -> () const;  
bool operator == (const const_iterator&) const;  
bool operator != (const const_iterator&) const;  
const_iterator& operator ++ ();  
const_iterator& operator -- ();
```

```
class search::convex_polygon_pf;
```

Описание

Представление функции периметра выпуклого многоугольника. Объект класса `convex_polygon`, для которого нужно построить функцию периметра, передается в качестве параметра единственному конструктору данного класса.

Открытые члены

```
explicit convex_polygon_pf(const convex_polygon&);
unsigned num_vertices() const;
double area() const;
double half_area() const;
double operator () (double);
double pf(double);
double ipf(double);
double maximum();
unsigned num_segments();
double a(unsigned);
double theta(unsigned);
double zeta(unsigned);
double shortest(
    bool&, convex_polygon::point&,
    convex_polygon::point&,
    convex_polygon::point&);
```

Замечания

Конструктор копирования и оператор присваивания объявлены закрытыми членами класса, поэтому копирование и присваивание не поддерживаются.

```
explicit search::convex_polygon_pf::  
convex_polygon_pf(const search::convex_polygon& cp);
```

Описание

Данный конструктор сохраняет информацию о выпуклом многоугольнике. Все изменения, которые будут происходить с объектом `cp` после работы конструктора, никак не скажутся на сконструированном объекте, т. е. функция периметра будет построена для многоугольника в том состоянии, в котором он был передан конструктору. До вызова конструктора необходимо вызвать функцию `cp.convex_hull`.

Параметры

`cp` Объект, представляющий выпуклый многоугольник, для которого требуется построить функцию периметра.

```
unsigned search::convex_polygon_pf::num_vertices() const;
```

Возвращаемое значение

Количество вершин у многоугольника.

```
double search::convex_polygon_pf::area() const;
```

Возвращаемое значение

Площадь многоугольника.

```
double search::convex_polygon_pf::half_area() const;
```

Возвращаемое значение

Половина площади многоугольника (аргумент максимума функции периметра).

```
double search::convex_polygon_pf::operator () (double z);  
double search::convex_polygon_pf::pf(double z);
```

Возвращаемое значение

Значение функции периметра для аргумента z .

Параметры

z Аргумент функции периметра, площадь подмножества

Область допустимых значений

$0.0 \leq z \leq \text{area}()$

Замечания

Данные 2 функции идентичны.

```
double search::convex_polygon_pf::ipf(double p);
```

Возвращаемое значение

Значение обратной функции периметра для аргумента p .

Параметры

p Аргумент обратной функции периметра, эффективный периметр подмножества

Область допустимых значений

$0.0 \leq p \leq \text{maximum}()$

```
double search::convex_polygon_pf::maximum();
```

Возвращаемое значение

Максимум функции периметра.

```
unsigned search::convex_polygon_pf::num_segments();
```

Возвращаемое значение

Количество гладких участков у функции периметра.

```
double search::convex_polygon_pf::a(unsigned i);  
double search::convex_polygon_pf::theta(unsigned i);  
double search::convex_polygon_pf::zeta(unsigned i);
```

Возвращаемое значение

Параметры i -го гладкого участка функции периметра:

a — точка стыка i -го и $i+1$ -го участка, см. (2.104);

theta — параметр θ , см. (2.106);

zeta — параметр ζ , см. (2.106).

Для участка-константы **theta** возвращает 0.0, а **zeta** — значение этой константы.

Область допустимых значений

$0 \leq i \leq \text{num_segments}()$ (для **a**)

$1 \leq i \leq \text{num_segments}()$ (для **theta**, **zeta**)

```
double search::convex_polygon_pf::shortest(
    bool& is_arc, convex_polygon::point& start,
    convex_polygon::point& end, convex_polygon::point& center);
```

Описание

Функция находит кратчайшую кривую, делящую многоугольник на 2 равные по площади части.

Возвращаемое значение

Длина кратчайшей кривой, или, что то же самое, максимум функции периметра.

Параметры

is_arc	Возвращает значение true , если кратчайшая кривая представляет собой дугу окружности, и false , если кривая представляет собой отрезок прямой
start	Возвращает начальную точку кривой
end	Возвращает конечную точку кривой
center	В случае, когда is_arc == true , возвращает центр дуги

Замечания

В случае, когда кривая представляет собой дугу окружности, движение от **start** к **end** происходит против часовой стрелки.

Все 4 параметра возвращают указанные значения только при условии, что возвращаемое значение функции (длина кривой) больше 0.0. Если функция возвращает 0.0, это означает, что имеет место вырожденный случай: площадь многоугольника равна 0.0, при этом значения параметров не изменяются.

Замечания по использованию классов

В классе `convex_polygon_pf` имеется два независимых алгоритма:

- `find_pf` — для построения внутренней структуры, представляющей функцию периметра;
- `find_pf_max` — для вычисления только максимума функции периметра и кратчайшей кривой.

При этом при работе первого из них попутно находится и максимум. Эти алгоритмы являются закрытыми функциями класса и поэтому не вызываются клиентом непосредственно, но их наличие следует учитывать по следующей причине. В данном классе используется принцип отложенных вычислений, т. е.:

- конструктор класса не вызывает упомянутые алгоритмы;
- при первом вызове одной из функций `operator ()`, `pf`, `ipf`, `num_segments`, `a`, `theta` или `zeta` вызывается алгоритм `find_pf`;
- при первом вызове `maximum` или `shortest` вызывается алгоритм `find_pf_max`, при этом для `maximum` он вызывается только при условии, что ранее уже не был вызван `find_pf`.

Алгоритмы `find_pf` и `find_pf_max` могут оказаться достаточно затратными по времени для многоугольников с большим числом вершин, поэтому при первом обращении к одной из вышеперечисленных функций возможны непредвиденные и неприятные для пользователя задержки. Чтобы этого избежать, программисту следует, например, вызвать одну из перечисленных функций для каждого алгоритма в удобное и предсказуемое для пользователя время для того, чтобы отработал соответствующий алгоритм и в дальнейшем задержек не возникало.

Далее приводится пример использования классов. Идентификатор `cli_obj` обозначает некоторый клиентский объект, обеспечивающий функции ввода-вывода.

```

// пустой многоугольник
search::convex_polygon cp;

// заполняем вершинами
double x, y;
while(cli_obj.in >> x >> y)
{
    search::convex_polygon::point pt(x, y);
    cp.add_vertex(pt);
}

// вычисляем выпуклую оболочку
cp.convex_hull();

if(cp.num_vertices() < 3)
{
    // вырожденный случай, нечего считать
    ...
}
else
{
    // инициализируем объект-функцию
    search::convex_polygon_pf pf(cp);

    // даем отработать алгоритму find_pf сейчас
    cli_obj.out << "подождите, пожалуйста...";
    static_cast<void>(pf(0.0));

    // цикл обработки запросов
    double z;
    while(cli_obj.in >> z)
    {
        if(0.0 > z || z > pf.area())
        {
            // значение аргумента за пределами
            // области допустимых значений
            ...
        }
        else
        {
            // находим, какому гладкому участку
            // принадлежит значение z
            unsigned segm(1);
            while(pf.a(segm) < z) ++segm;
        }
    }
}

```

```

// выводим границы этого участка
cli_obj.out << "участок # " << segm;
cli_obj.out << "левая граница: " << pf.a(segm - 1);
cli_obj.out << "правая граница: " << pf.a(segm);

// определяем тип участка и выводим его параметры
if((pf.num_segments() % 2) == 1 &&
    segm == (pf.num_segments() / 2 + 1))
{
    // участок-константа
    cli_obj.out << "участок-константа";
    cli_obj.out << "значение константы: " << pf.zeta(segm);
}
else
{
    // sqrt-участок
    cli_obj.out << "sqrt-участок";
    cli_obj.out << "параметр theta: " << pf.theta(segm);
    cli_obj.out << "параметр zeta: " << pf.zeta(segm);
}

// выводим значение функции периметра
cli_obj.out << "значение функции: " << pf(z);
}
}
}

```

А.2 Программа «Периметр»

Программа «Периметр» находится на прилагаемом компакт-диске в папках `\Perimeter\Russian` и `\Perimeter\English` (версии на русском и английском языках). Каждая из папок содержит следующие файлы:

- исполняемый файл `perimeter.exe`;
- файлы с документацией `perimeter.hlp` и `perimeter.cnt`;
- файлы с примерами `*.txt`.

Программа работает в *Microsoft Windows*. Программа реализует алгоритм вычисления функции периметра выпуклых многоугольников, приведенный в п. 2.3.4. Для этого программа использует описанную выше библиотеку *Search* и, по сути, представляет собой интерактивный пользовательский интерфейс для классов `search::convex_polygon` и `search::convex_polygon_pf`. Программа обеспечивает:

- интерактивный ввод многоугольника при помощи мыши, а также ввод из файла;
- изображение графика $P(Z)$, а также вывод параметров a_i , θ_i и ζ_i в файл;
- изображение подмножества, на котором реализуется точная нижняя грань для Z , равного половине площади многоугольника.

На рис. 42 показано, как выглядит окно программы при вводе многоугольника и при выводе графика.

Инструкция для пользователя находится в файле `perimeter.hlp` и может быть использована как отдельно от программы, так и непосредственно из нее нажатием кнопки «Помощь» (*Help*).

А.3 Текст работы

Электронная копия настоящей работы находится на прилагаемом компакт-диске в папке `\Text` в следующих файлах:

- `thesis.pdf` — полный текст в формате *PDF*;
- `thesis.ps` — полный текст в формате *PostScript*.

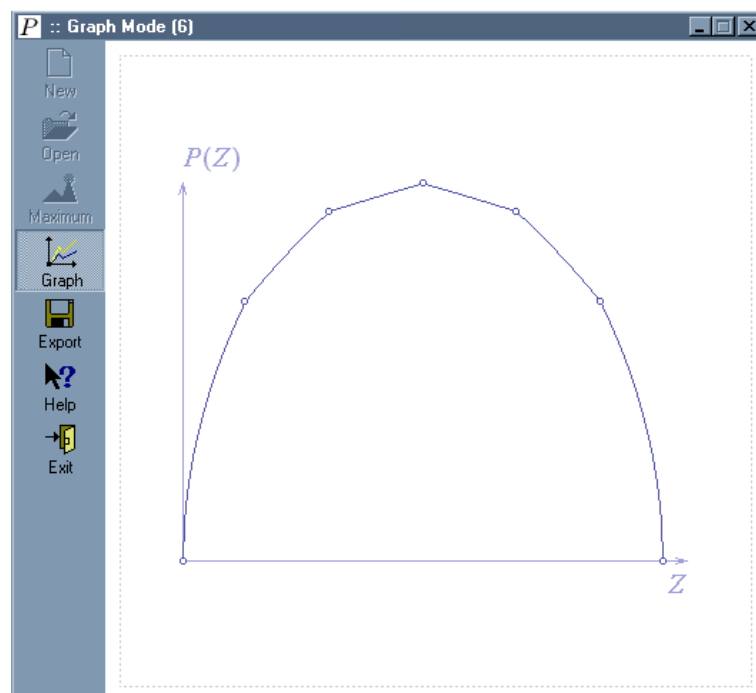
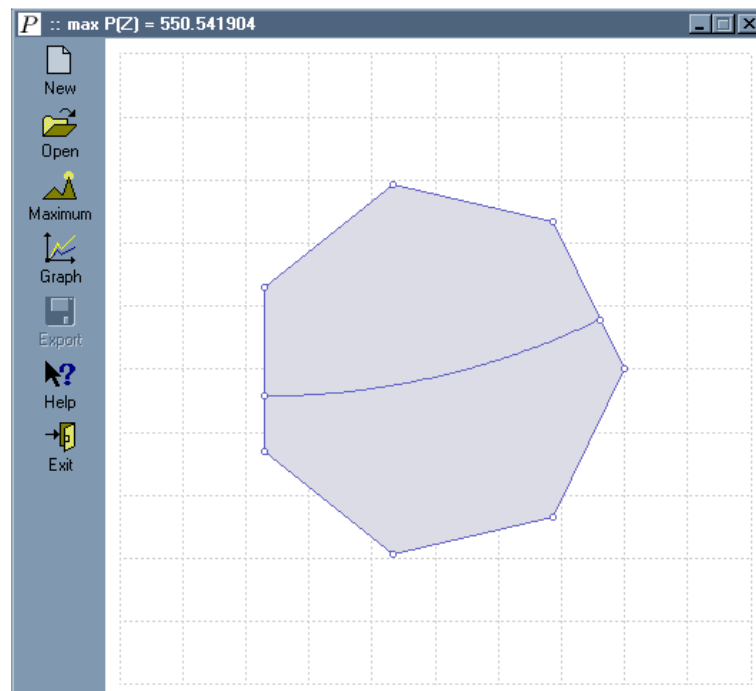


Рис. 42

Литература

- [1] *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. — Пер. с англ. В. И. Аркина и Э. Н. Симаковой. Под ред. М. И. Зеликина. С предисл. Л. С. Понтрягина. — М.: Мир, 1967. — 479 с.
- [2] *Березин С. Б.* Теоретико-множественные операции в задаче визуализации переменных информационных множеств. — МГУ им. М. В. Ломоносова. — М.: 2000. — Деп. в ВИНТИ 24.01.2000, № 127-B2000. — 24 с.
- [3] *Березин С. Б.* Информационные множества в задаче динамического поиска объектов с несколькими ищущими // *Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика.* — 2001. — № 3. — С. 14–18.
- [4] *Березин С. Б.* Решение задач динамического поиска в монотонном многоугольнике. — МГУ им. М. В. Ломоносова. — М.: 2002. — Деп. в ВИНТИ 15.07.2002, № 1330-B2002. — 14 с.
- [5] *Березин С. Б.* Графический подход к исследованию и решению задач динамического поиска. — Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. — МГУ им. М. В. Ломоносова, ф-т ВМиК. — 2002.
- [6] *Губайдуллин С. М., Шижин Е. В.* Следящая область на цилиндре и на торе // *Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика.* — 1992. — № 2. — С. 46–50.
- [7] *Ким Д. П.* Методы поиска и преследования подвижных объектов. — М.: Наука. Физматлит, 1989. — 336 с.
- [8] *Ларин П. М.* Упреждающая область, порождаемая парой ищущих, и ее визуализация. — МГУ им. М. В. Ломоносова. — М.: 1995. — Деп. в ВИНТИ 01.11.1995, № 2910-B1995. — 44 с.
- [9] *Ларин П. М.* Следящая область пары отрезков // *Фундаментальная и прикладная математика.* — 1998. — Т. 4, № 2. — С. 559–566.

- [10] Ларин П. М. О невозможности гарантированного поиска в достаточно большой области. — МГУ им. М. В. Ломоносова. — М.: 1998. — Деп. в ВИНТИ 26.05.1998, № 1629-B1998. — 38 с.
- [11] Ларин П. М. О неразрешимости задач гарантированного поиска в достаточно большой области // *Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика*. — 2000. — № 1. — С. 44–47.
- [12] Ларин П. М. Функция периметра выпуклых множеств. — МГУ им. М. В. Ломоносова. — М.: 2004. — Деп. в ВИНТИ 09.04.2004, № 594-B2004. — 22 с.
- [13] Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования. — Л.: Изд. ЛГУ, 1977. — 221 с.
- [14] Петросян Л. А., Зенкевич Н. А. Оптимальный поиск в условиях конфликта. — Л.: Изд. ЛГУ, 1987. — 76 с.
- [15] Петросян Л. А., Гарнаев А. Ю. Игры поиска: Учебное пособие. — СПб.: Изд. СПбГУ, 1992. — 215 с.
- [16] Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. Теория игр: Учебное пособие. — М.: Высш. шк., Книжный дом «Университет», 1998. — 304 с.
- [17] Скворцов А. А. Динамический поиск в выпуклых областях // *Фундаментальная и прикладная математика*. — 1998. — Т. 4, № 2. — С. 785–790.
- [18] Скворцов А. А. Траектория патрулирования в задаче динамического поиска. — МГУ им. М. В. Ломоносова. — М.: 1998. — Деп. в ВИНТИ 13.05.1998, № 1456-B1998. — 38 с.
- [19] Скворцов А. А. Динамический поиск в трехмерных выпуклых областях // *Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика*. — 1999. — № 3. — С. 20–24.
- [20] Скворцов А. А. Алгоритмическая реализация теоретико-множественных операций на плоскости. — МГУ им. М. В. Ломоносова. — М.: 2000. — Деп. в ВИНТИ 10.07.2000, № 1915-B2000. — 41 с.
- [21] Скворцов А. А. Динамический поиск в выпуклых областях и его визуализация. — Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. — МГУ им. М. В. Ломоносова, ф-т ВМиК. — 2000.

- [22] Хеллман О. Введение в теорию оптимального поиска. — Пер. с англ. Е. М. Столяровой. Под ред. Н. Н. Моисеева. — М.: Наука. Физматлит, 1985. — 246 с.
- [23] Чхартишвили А. Г. Об одном геометрическом свойстве следящей области в задачах поиска // *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика*. — 1992. — № 3. — С. 7–10.
- [24] Чхартишвили А. Г., Шикин Е. В. Метод следящих областей в задачах поиска // *Математический сборник*. — 1993. — Т. 184, № 10. — С. 107–134.
- [25] Чхартишвили А. Г., Шикин Е. В. Динамические задачи поиска и обнаружения на некоторых замкнутых поверхностях // *Дифференциальные уравнения*. — 1993. — Т. 29, № 11. — С. 1948–1957.
- [26] Чхартишвили А. Г., Шикин Е. В. Следящая область в пространстве Лобачевского // *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика*. — 1994. — № 2. — С. 36–41.
- [27] Чхартишвили А. Г., Шикин Е. В. Об одном геометрическом подходе к решению динамических игр поиска // *Дифференциальные уравнения*. — 1994. — Т. 30, № 6. — С. 1097–1098.
- [28] Чхартишвили А. Г., Шикин Е. В. Динамический поиск объектов. геометрический взгляд на проблему // *Фундаментальная и прикладная математика*. — 1995. — Т. 1, № 4. — С. 827–862.
- [29] Frost J. R. Principles of Search Theory, Part I: Detection // *Response: The Journal of Search, Rescue, and Emergency Response*. — 1999. — Vol. 17, no. 2. — Pp. 1–7. — Publ. by National Association for Search and Rescue (NASAR), Chantilly, VA, U.S. — Article also available at: <http://www.isars.org/detection.htm>.
- [30] Frost J. R. Principles of Search Theory, Part II: Effort, Coverage and POD // *Response: The Journal of Search, Rescue, and Emergency Response*. — 1999. — Vol. 17, no. 2. — Pp. 8–15. — Publ. by National Association for Search and Rescue (NASAR), Chantilly, VA, U.S. — Article also available at: <http://www.isars.org/effort.htm>.
- [31] Frost J. R. Principles of Search Theory, Part III: Probability Density Distributions // *Response: The Journal of Search, Rescue, and Emergency Response*. — 1999. — Vol. 17, no. 3. — Pp. 1–10. — Publ. by National Association for Search and Rescue (NASAR), Chantilly, VA, U.S. — Article also available at: <http://www.isars.org/probability.htm>.

- [32] *Frost J. R.* Principles of Search Theory, Part IV: Optimal Effort Allocation // *Response: The Journal of Search, Rescue, and Emergency Response*. — 1999. — Vol. 17, no. 3. — Pp. 11–23. — Publ. by National Association for Search and Rescue (NASAR), Chantilly, VA, U.S. — Article also available at: <http://www.isars.org/allocation.htm>.
- [33] *Gal S.* Search Games. — New York: Academic Press, 1980. — 216 pp.
- [34] *Koopman B. O.* Search and Screening: OEG Report 56. — Washington, D.C.: U.S. Navy Department. Office, Chief of Naval Operations. Operations Evaluation Group, 1946.
- [35] *Koopman B. O.* The Theory of Search, Part I: Kinematic Bases // *Operations Research*. — 1956. — Vol. 4, no. 3. — Pp. 324–346.
- [36] *Koopman B. O.* The Theory of Search, Part II: Target Detection // *Operations Research*. — 1956. — Vol. 4, no. 5. — Pp. 503–531.
- [37] *Koopman B. O.* The Theory of Search, Part III: The Optimum Distribution of Searching Effort // *Operations Research*. — 1957. — Vol. 5, no. 5. — Pp. 613–626.
- [38] *Koopman B. O.* Search and Screening: General Principles with Historical Applications. — New York: Pergamon Press, 1980. — 358 pp.

119992 ГСП-2 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М. В. Ломоносова,
 2-й учебный корпус, ф-т ВМиК.
 Электронная почта: ecrpela@mail.ru

Текст подготовлен при помощи пакета MiKTeX 2.1. www.miktex.org