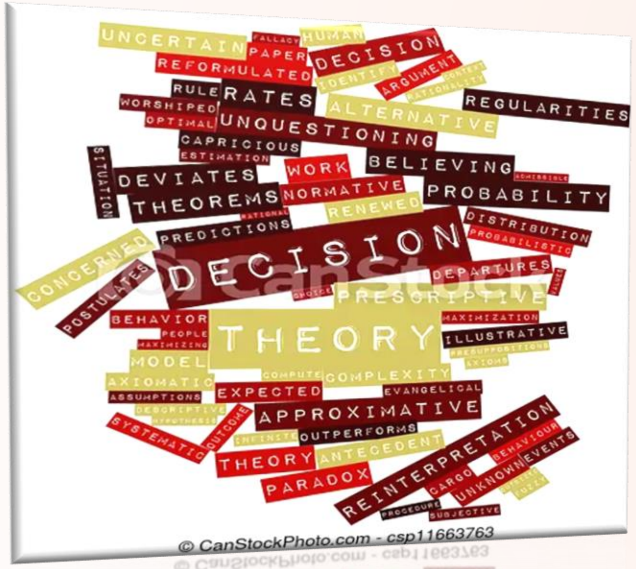
LÝ THUYẾT QUYẾT ĐỊNH



(Decision theory)

Biên soạn: ThS.Phạm Đình Tài
pdtai@ntt.edu.vn
0985.73.39.39

TOÁN HỌC XÁC SUẤT

- *Tính toán xác suất*
- *Xác suất có điều kiện*
- *Định lý Bayse*
- *Bài toán của tiên nghiệm chưa biết*

I. Tính toán ngẫu nhiên

VÍ DỤ:

- Hãy tưởng tượng rằng bạn tung một con xúc xắc truyền thống và công bằng hai lần. Có chính xác 36 kết quả có thể xảy ra:
- Bạn nhận được 1 trong lần đầu tiên và 1 trong lần thứ hai, hoặc 1 ở lần đầu tiên và 2 ở lần thứ hai, hoặc 2 ở lần đầu tiên và 1 ở lần thứ hai, v.v.
- Mỗi kết quả được biểu diễn bằng hai số **〈 i, j 〉**
- Các nhà toán học gọi đây là một cặp có thứ tự - trong đó i đề cập đến kết quả của cuộn đầu tiên và j đến cuộn thứ hai. Vì vậy, ví dụ, **〈 1, 4 〉** và **〈 4, 1 〉** là hai kết quả khác nhau.

Tính toán ngẫu nhiên

〈 1,1 〉	〈 1,2 〉	〈 1,3 〉	〈 1,4 〉	〈 1,5 〉	〈 1,6 〉
〈 2,1 〉	〈 2,2 〉	〈 2,3 〉	〈 2,4 〉	〈 2,5 〉	〈 2,6 〉
〈 3,1 〉	〈 3,2 〉	〈 3,3 〉	〈 3,4 〉	〈 3,5 〉	〈 3,6 〉
〈 4,1 〉	〈 4,2 〉	〈 4,3 〉	〈 4,4 〉	〈 4,5 〉	〈 4,6 〉
〈 5,1 〉	〈 5,2 〉	〈 5,3 〉	〈 5,4 〉	〈 5,5 〉	〈 5,6 〉
〈 6,1 〉	〈 6,2 〉	〈 6,3 〉	〈 6,4 〉	〈 6,5 〉	〈 6,6 〉

(bảng I)

- Gọi S là tập hợp tất cả các kết quả có thể có của thí nghiệm ngẫu nhiên.
- S được gọi là không gian mẫu. Trong ví dụ, S là hữu hạn, nhưng người ta có thể dễ dàng hình dung các trường hợp trong đó S là vô hạn.
- Ví dụ: nếu chúng ta tung một con súc sắc cho đến khi sáu con lật lên và lấy số con lăn cần thiết để lấy con số sáu làm kết quả của một thử nghiệm ngẫu nhiên, thì không gian mẫu sẽ là S = {1, 2, 3, … } . Bộ này nhiều vô số kể.

Tính toán ngẫu nhiên

- Để giữ cho toán học càng đơn giản càng tốt, chúng ta giả sử rằng không gian mẫu là hữu hạn hoặc vô hạn đếm được.
- Đây là một hạn chế đáng kể, vì nó ngụ ý rằng chúng ta sẽ không thể trả lời các câu hỏi như: Xác suất để chọn số thực **r** từ khoảng $1 \geq r \geq 0$ là bao nhiêu?
- Sự kiện A là một tập con của không gian mẫu. Do đó, đầu tiên lăn số 6 và sau đó tung ra số 5, 〈 6, 5 〉 , là một sự kiện.
- Để tung ra 〈 6, 5 〉 hoặc 〈 5, 6 〉 hoặc 〈 1, 1 〉 cũng là một sự kiện, vì 〈 6, 5 〉 hoặc 〈 5, 6 〉 hoặc 〈 1, 1 〉 là một tập con của S.
- Tuy nhiên, tung ra số 6 và không bao giờ kết thúc thử nghiệm ngẫu nhiên không phải là một sự kiện, bởi vì tung ra số 6 không phải là một tập con của S.

Tính toán ngẫu nhiên

- Theo định nghĩa, nếu A và B là các sự kiện, thì A-hoặc-B và A-và- B và không-A và không-B.
- Hơn nữa, với mọi biến cố A, có một phần bù của A, ký hiệu là A^c . Phần bù của A là tập hợp tất cả các sự kiện nằm trong S nhưng không thuộc A.
- Do đó, phần bù của 〈 1, 1 〉 là tập hợp tất cả các sự kiện có thể được xây dựng từ mọi kết quả ngoại trừ 〈 1, 1 〉 trong ma trận. Vì S là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra nên $S^c = \varnothing$, nghĩa là phần bù của S là tập hợp rỗng.

Tính toán ngẫu nhiên

- Xác suất được biểu diễn bằng các số thực từ 0 đến 1 (bao gồm cả các điểm cuối).
- Chúng ta nói rằng một hàm p là một phép đo xác suất chỉ khi (nhưng không phải nếu và chỉ khi) p gán một số $1 \geq p(A) \geq 0$ cho mọi sự kiện A trong S.
- Điều này có nghĩa là p là một hàm nhận một sự kiện làm đối số của nó và sau đó trả về một số từ 0 đến 1 đại diện cho xác suất của sự kiện đó.
- →:

$$\boxed{p(\langle 6, 5 \rangle) = \frac{1}{36} \text{ và } p(\langle 6, 5 \rangle \text{ hoặc } \langle 5, 6 \rangle \text{ hoặc } \langle 1, 1 \rangle) = \frac{3}{36}}$$

Tính toán ngẫu nhiên

- Phép tính xác suất là một lý thuyết tiên đề. Điều này có nghĩa là tất cả các phát biểu đúng (toán học) về xác suất có thể được suy ra từ một tập hợp nhỏ các nguyên tắc cơ bản hoặc tiên đề.
- Hãy xem xét các tiên đề sau đây, lần đầu tiên được đề xuất bởi Kolmogorov vào năm 1933.

(1) Mọi xác suất là một số thực từ 0 đến 1.
(2) Xác suất của toàn bộ không gian mẫu là 1.
(3) Nếu hai sự kiện loại trừ lẫn nhau, thì xác suất một trong số chúng xảy ra bằng xác suất của lần thứ nhất cộng với xác suất của lần thứ hai.

Tính toán ngẫu nhiên

Ba tiên đề này cũng có thể được phát biểu trong toán học.

Kolmogorov 1	$1 \geq p(A) \geq 0$
Kolmogorov 2	$p(S) = 1$
Kolmogorov 3	Nếu $A \cap B = \emptyset$, thì $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

- *Tiên đề đầu tiên: xác suất của mọi sự kiện nằm trong khoảng từ 0 đến 1*
- *Tiên đề thứ hai: xác suất của toàn bộ không gian mẫu là 1; → xác suất là 1 để kết quả của việc lăn một con súc sắc hai lần sẽ là một trong những kết quả được liệt kê trong (bảng 1).*
- *Tiên đề thứ ba: khẳng định nếu hai sự kiện loại trừ lẫn nhau, thì xác suất một trong số chúng xảy ra bằng xác suất lần đầu tiên cộng với xác suất lần thứ hai.*

Tính toán ngẫu nhiên

- Để giải thích chi tiết hơn cách tiếp cận mệnh đề, ta quy định rằng một cặp mệnh đề loại trừ lẫn nhau nếu và chỉ khi nó cho rằng nếu một mệnh đề đúng thì cặp kia phải sai.
- Bằng cách cho A và B là các mệnh đề tùy ý (thay vì các sự kiện), các tiên đề Kolmogorovs có thể được định dạng lại theo cách sau.

Kolmogorov 1	**$1 \geq p(A) \geq 0$**
Kolmogorov 2	Nếu A là chân lý logic thì $p(A) = 1$
Kolmogorov 3	Nếu A và B loại trừ lẫn nhau thì $p(A \vee B) = p(A) + p(B)$

Các định lý

- Định lý 1: $\boxed{p(A) + p(\neg A) = 1}$
- Định lý 2: Nếu A và B tương đương về mặt logic thì $p(A) = p(B)$
- Định lý 3:

(i) $P(A \vee B) = p(A) + p(B) - p(A \wedge B)$

Và

(i) $P(A \rightarrow B) = p(\neg A) + p(B) - p(\neg A \wedge B)$

2. Xác suất có điều kiện

- Nhiều phát biểu về xác suất là có điều kiện.
- **Ví dụ**, một người ra quyết định ghé thăm một nhà hàng sang trọng có thể muốn xác định xác suất rằng cá trong thực đơn là tươi nếu đó là thứ Hai (ở hầu hết các nhà hàng, xác suất điều kiện này là thấp)
- Để tính toán xác suất có điều kiện, trước hết chúng ta cần xác định khái niệm.
- Định nghĩa sau đây về ý nghĩa của việc nói về xác suất của A cho trước B, viết tắt là $p(A \mid B)$, Giả sử $p(B) \neq 0$

Định nghĩa 1: $\boxed{p(A \mid B) = (p(A \cap B))/(p(B))}$

Xác suất có điều kiện

Ví dụ:

- Bạn tung một con xúc xắc hai lần.
- Cho rằng tung đầu tiên là 5, xác suất để tổng số vượt quá 9 là bao nhiêu? Cần rất ít suy nghĩ để thấy rằng câu trả lời $1/3$, bởi vì lần thứ hai bạn tung con súc sắc, bạn phải nhận được 5 hoặc 6. (phép tính trực quan này phù hợp với kết quả chúng ta nhận được nếu chúng ta áp dụng Định nghĩa 1).
- Đặt A = tổng vượt quá 9 (tức là 10, 11 hoặc 12) và đặt B = tung đầu tiên là 5. Bằng cách nhìn vào (bảng 1), ta thấy rằng có chính xác hai kết quả loại trừ lẫn nhau trong đó tổng số vượt quá 9 và lăn đầu tiên là 5, 〈 5, 5 〉 và 〈 5, 6 〉 . Ta có:

$$\mathrm{p}(A \cap B) = \frac{2}{36} \quad \text{Và} \quad \mathrm{p}(B) = \frac{6}{36} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathrm{p}(A\,|B) = \frac{p(\frac{2}{36})}{p(\frac{6}{36})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$$

Xác suất có điều kiện

- Khi tung hai viên xúc xắc, ta ngầm cho rằng kết quả của lần tung thứ hai không phụ thuộc vào kết quả của lần tung đầu tiên. → 2 lần độc lập
- Tất nhiên, điều mong muốn là làm cho hiểu biết trực quan về tính độc lập chính xác hơn, và điều này có thể đạt được bằng cách nhận thấy rằng khái niệm độc lập có liên quan chặt chẽ với khái niệm xác suất có điều kiện.
- Nếu xác suất A không phụ thuộc vào B, thì xác suất đó là p (A) = p (A | B).
  - Định nghĩa 2

$$\boxed{\text{A độc lập với B nếu và chỉ khi } p(A) = p(A \mid B).}$$

3. Định lý Bayes

Định lý Bayes chỉ ra cách các xác suất có điều kiện có thể đảo ngược, điều này có tầm quan trọng lớn trong nhiều ứng dụng của lý thuyết xác suất.

Ví dụ, một kỹ sư đã quan sát thấy một vết nứt hàn trong một bộ phận quan trọng của hộp số. Kỹ sư muốn tính xác suất hộp số bị hỏng (B) khi xuất hiện vết nứt hàn (A). Thống kê cho thấy 90% tất cả các hộp số bị hỏng đều có vết nứt do hàn.

- Do đó, $p(A \mid B) = 0,9$.
- Hơn nữa, kỹ sư biết rằng 10% tất cả các hộp số bị hỏng trong thời gian tuổi thọ dự đoán của chúng và 20% của tất cả các hộp số có vết nứt do hàn.
- → $p(B) = 0,1$ và $p(A) = 0,2$.

Định lý Bayes

Do đó, kỹ sư có thể giải quyết vấn đề bằng cách chèn các con số vào phiên bản rất đơn giản sau đây của định lý Bayes, đôi khi được gọi là định luật xác suất nghịch đảo.

Định lý Bayes

$$\boxed{\mathrm{p}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{p(B).p(A|B)}{p(A)}}$$

$$Trong\ \text{đó}\ (\mathrm{A}) \neq 0$$

Định lý Bayes

Bằng cách chèn các số được liệt kê ở trên vào Định lý Bayes, các kỹ sư nhận thấy rằng xác suất hộp số bị hỏng khi xuất hiện vết nứt hàn là khá cao:

$$\boxed{p(B|A) = \frac{0.1\,.\,0.9}{0.2} = 0.45}$$

- Trong nhiều trường hợp, rất khó xác định xác suất vô điều kiện của A và B là bao nhiêu.
- Trong ví dụ về vết nứt hàn, ta đơn giản coi đó là những xác suất vô điều kiện đã được biết trước.
- Tuy nhiên, bằng cách áp dụng Định lý Bayes, có thể loại bỏ ít nhất một trong các xác suất vô điều kiện xuất hiện trong công thức, như tỷ lệ phần trăm của tất cả các hộp số có vết nứt hàn, p(A).

4. Bài toán của tiên nghiệm chưa biết

Có thể dễ dàng hình dung ra các ví dụ rất khó hoặc thậm chí không thể biết trước xác suất.

Ví dụ:

- *Xác suất trước để chuyến bay vũ trụ đầu tiên của con người (của nhà du hành vũ trụ Liên Xô Yuri Gagarin vào năm 1961) sẽ thành công là bao nhiêu?*
- *Hoặc xác suất trước mà ứng cử viên sẽ thắng trong cuộc bầu cử tiếp theo là bao nhiêu?*

Thực tế là các xác suất trước thường khó xác định đã làm nảy sinh một số vấn đề thú vị, được thảo luận rộng rãi.

Bài toán của tiên nghiệm chưa biết

Ví dụ 1:

Tung đồng xu thường được sử dụng để giải thích xác suất tiên nghiệm.

- Người ta có thể lập luận rằng một đồng xu đã cho có hai mặt, cả hai mặt đều có diện tích bề mặt bằng nhau, rằng nó đối xứng.
- Bỏ qua khả năng đồng xu hạ xuống trên cạnh của nó và ở lại đó, điều đó cho thấy rằng xác suất đồng xu hạ xuống mặt ngửa cũng giống như đồng xu hạ xuống mặt sấp.
- Do đó, xác suất tiên nghiệm của một đồng xu mặt ngửa bằng với một đồng mặt sấp, là 50%.

Bài toán của tiên nghiệm chưa biết

Ví dụ 2:

Xúc xắc công bằng sáu mặt được tung. Xác suất tiên nghiệm của việc tung 2, 4 hoặc 6, trong một lần tung xúc xắc là bao nhiêu?.

- Số lượng kết quả mong muốn là 3 (xoay 2, 4 hoặc 6) và tổng cộng có 6 kết quả.
- Xác suất tiên nghiệm cho ví dụ này được tính như sau:
- Xác suất tiên nghiệm = 3/6 = 50%.

→xác suất tiên nghiệm của việc lăn số 2, 4 hoặc 6 là 50%.

Bài toán của tiên nghiệm chưa biết

Ví dụ 3:

Trong một bộ bài tiêu chuẩn, xác suất tiên nghiệm để rút ra một quân át chủ bài là bao nhiêu?

Xác suất tiên nghiệm = 1/52 = 1,92%.

→ xác suất tiên nghiệm để rút được quân át chủ bài là 1,92%.

Bài toán của tiên nghiệm chưa biết

Tóm lại khi nhắc đến xác suất tiên nghiệm cần nắm rõ các vấn đề sau:

- Xác suất tiên nghiệm quy định rằng kết quả của sự kiện tiếp theo không phụ thuộc vào kết quả của sự kiện trước đó.
- Tiên nghiệm cũng loại bỏ những người dùng độc lập về trải nghiệm. Vì các kết quả là ngẫu nhiên và không rút ra được nên bạn không thể suy ra kết quả tiếp theo.

THANK YOU !