Rozdział I

Anna Szymańska, Szymon Wojtulewicz

Algorytmy Probabilistyczne i Aproksymacyjne 2024/25

Macierze sąsiedztwa

$$\mathrm{A}_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli istnieje krawędź } (x, y) \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

$$\mathrm{M}_{xe} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x \text{ jest końcem } e \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

$$\mathrm{N}_{xe} = \begin{cases} -1 & \text{jeśli } x \text{ jest początkiem } e \\ 1 & \text{jeśli } x \text{ jest końcem } e \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

$$\mathrm{L}_{xy} = \begin{cases} -A_{xy} & \text{jeśli } x \neq y \\ \deg(x) & \text{jeśli } x = y \end{cases}$$

$$\mathrm{L} = \mathrm{D}-\mathrm{A} = \mathrm{N}\mathrm{N}^T$$

$$\mathrm{Q}_{xy} = \begin{cases} A_{xy} & \text{if } x \neq y \\ \deg(x) & \text{if } x = y \end{cases}$$

$$\mathrm{Q} = \mathrm{D}+\mathrm{A} = \mathrm{M}\mathrm{M}^T$$

$$\mathrm{D}_{xx} = \deg(\mathrm{x})$$

Macierze sąsiedztwa

Własności

- L, Q są dodatnio półokreślone
- dla dowolnego wektora u

$$u^T L u = \sum_{x\sim y} (u_x - u_y)^2$$

$$u^T Q u = \sum_{x\sim y} (u_x + u_y)^2$$

$$\mathrm{L} = \mathrm{D}-\mathrm{A} = \mathrm{N}\mathrm{N}^T$$

$$\mathrm{Q} = \mathrm{D}+\mathrm{A} = \mathrm{M}\mathrm{M}^T$$

$$x^{\mathrm{T}}\mathrm{L}x = x^{\mathrm{T}}(\mathrm{D}-\mathrm{A})x = \sum_i \mathit{deg}(i)\cdot x_i^2 - \sum_{i\sim j} a_{ij}\cdot x_i x_j = \sum_{i\sim j} (x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2) = \sum_{i\sim j} (x_i - x_j)^2$$

Wartości własne i widmo macierzy

Wektor własny $\boldsymbol{v}$ i wartość własna $\boldsymbol{\theta}$

$$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{v}$$

Wielomian charakterystyczny

$$p_A(\boldsymbol{\theta}) = \det(A - \boldsymbol{\theta}\mathrm{I})$$

Widmo macierzy

$$\sigma(A) = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{C} : p_A(\boldsymbol{\theta}) = 0\}$$

$$\sigma(A) = \{(\boldsymbol{\theta}, k_{\boldsymbol{\theta}}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^+ : p_A(\boldsymbol{\theta}) = 0\}$$

Widmo grafu skończonego Γ

- (Zwykłe) widmo $\sigma(A)$
- Widmo Laplace'a $\sigma(L)$

Wielomian charakterystyczny

- Γ - graf skierowany na n wierzchołkach
- C - regularny podgraf skierowany stopnia 1
- $c(C)$ - liczba cylki grafu C

Wtedy

$$p_A(t) = \det(tI - A) = \sum_{i=0}^{n} c_i t^{n-i} \quad \text{gdzie} \quad c_i = \sum_{C \in \Gamma} (-1)^{c(C)}$$

bo

$$\det M = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) M_{1\sigma(1)} \cdots M_{n\sigma(n)}$$

Krotność wartości własnych

- algebraiczna - krotność pierwiastka wielomianu charakterystycznego
- geometryczna - wymiar przestrzeni liniowej rozpiętej na odpowiadających wektorach własnych

	Macierz A	**Macierz L**
k-regularny	$A\mathbb{1} = k\mathbb{1}$ $k=\theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_n$	$L = k\mathbf{I} - A$ $\mu_i = k - \theta_i$
dopełnienie	$\bar{A} = \mathbf{J} - \mathbf{I} - A$	$\bar{L} = n\mathbf{I} - \mathbf{J} - L$ $0,\ n - \mu_n, \ldots, n - \mu_2$
dopełnienie grafu k-regularnego	$\bar{A} = \mathbf{J} - \mathbf{I} - A$ $n-k-1,\ -1-\theta_n, \ldots, -1-\theta_2$	
dwudzielny	$A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^{T} & 0 \end{bmatrix}$ $\theta_i = -\theta_n$	widmo L i Q są równe

Dla nieskierowanego grafu Γ wszystkie wartości własne są zerowe wtw $E(\Gamma) = \emptyset$.

Spacery

Dla naturalnego **h**, mamy $A^{\mathbf{h}}_{\mathbf{xy}}$ równe liczbie spacerów o długości **h** z **x** do **y**.

- $(A^2)_{xx} = \deg(x)$
- $\operatorname{tr}(A^2) = 2|E(\Gamma)|$
- $\operatorname{tr}(A^3) = 6\cdot(\text{liczba trójkątów})$

Ograniczenie średnicy

Niech Γ to spójny graf o średnicy d. Wówczas macierze A, L i Q dla Γ mają co najmniej d+1 różnych wartości własnych każda.

$M \in \mathbb{R}^{V \times V}$ symetryczna dodatnia, t.że $M_{xy} > 0$ wtw $x \sim y$

$\theta_1, \ldots, \theta_t$ - różne wartości własne M

$(M - \theta_1 \mathbf{I}) \cdot \dots \cdot (M - \theta_t \mathbf{I}) = 0$, więc M^t jest kombinacją liniową 1, M, ..., M^{t-i}

Jeśli $d(x, y) = t$, to $M^i_{xy} = 0$ dla $0 \leqslant i < t$ oraz $M^t_{xy} > 0$ $\lightning$

Widmo grafu nieskierowanego

Niech Γ będzie nieskierowanym (multi)grafem, t.że $V(\Gamma) \neq \emptyset$ oraz macierz L ma wartości własne $0 = \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$. Niech ℓ_{xy} będzie (x, y)-minorem macierzy L. Wówczas liczba N drzew rozpinających Γ jest równa:

$$N = \ell_{xy} = \det\left(L + \frac{1}{n^2} J\right) = \frac{1}{n} \mu_2 \cdots \mu_n \quad \text{dla dowolnych} \quad x, y \in V(\Gamma).$$

Niech L^S, $S \subset V(\Gamma)$ to macierz L z usuniętymi rzędami i kolumnami indeksowanymi S. Wtedy $\ell_{xx} = \det(L^{\{x\}})$.
Dowód przez indukcję dla $N = \ell_{xx}$ po n > 1 i deg(x).

Liczba N drzew rozpinających Γ jest równa:

$$N = \ell_{xy} = \det\left(L + \frac{1}{n^2}J\right) = \frac{1}{n}\mu_2 \cdots \mu_n \quad \text{dla dowolnych} \quad x, y \in V(\Gamma).$$

Niech L^S, $S \subset V(\Gamma)$ to macierz L z usuniętymi rzędami i kolumnami indeksowanymi S. Wtedy $\ell_{xx} = \det(L^{\{x\}})$.

- Jeśli n $= 1$, to $\ell_{xx} = 1$. Jeśli deg(x) $= 0$, to $\ell_{xx} = 0$.
- Jeśli xy krawędź, to usunięcie jej z Γ zmniejsza ℓ_{xx} o $\det(L^{\{x,y\}})$. Z indukcji $\det(L^{\{x,y\}})$ to liczba drzew rozpinających, które zawierają krawędź xy. □

Twierdzenie Cauchy'ego-Bineta

Niech A i B będą macierzami rozmiaru m$\times$n. Wówczas

$$\det(AB^\top) = \sum_S \det A_S \det B_S,$$

gdzie S to m-podzbiory kolumn, a A_S (B_S) to podmacierz z A (B) indeksowana S.

Widmo grafu nieskierowanego

Twierdzenie Cauchy'ego-Bineta: $\det(AB^\top) = \sum_S \det A_S \det B_S$

Teza: Liczba drzew rozpinających $N = \ell_{xy} = \det\left(L + \frac{1}{n^2}J\right) = \frac{1}{n}\mu_2 \cdots \mu_n$

Szkic:

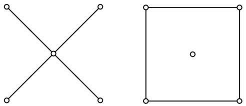
Niech N_x będzie skierowaną macierzą incydencji grafu Γ, bez wiersza x. Wtedy $\ell_{xx} = \det N_x N_x^\mathsf{T}$. Z twierdzenia C-B, wyznaczamy ℓ_{xx} jako sumę kwadratów wyznaczników o rozmiarze $n-1$. Wyznaczniki zerują się, chyba że zbiór S kolumn jest zbiorem krawędzi drzewa rozpinającego, wtedy wyznacznik wynosi ± 1.

Widmo grafu nieskierowanego

Spójne składowe

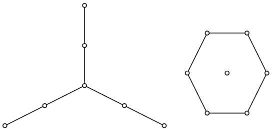
Niech Γ będzie grafem o s spójnych składowych Γ_i.

- Widmo Γ jest sumą widm Γ_i (z krotnościami).
- Wartość własna 0 macierzy L ma krotność s.
- Jeśli Γ jest k-regularny, to k jest największą wartością własną Γ i ma krotność s.



$K_{1,4}$ $\quad$ $K_1 + C_4$

$2^1,\ 0^3,\ (-2)^1$



$\hat{E}_6$ $\quad$ $K_1 + C_6$

$2^1,\ 1^2,\ 0,\ (-1)^2,\ (-2)^1$

Spójne składowe

- Krotność wartości własnej 0 dla macierzy L jest równa liczbie spójnych składowych.

Wystarczy pokazać, że spójny graf Γ ma 0 z krotnością 1 w spektrum L.
$L = NN^T$, więc $Lu = 0$ wtw $N^T u = 0$,
czyli dla każdej krawędzi u przyjmuje taką samą wartość na obu jej końcach.
Jeśli Γ jest spójny, to u jest stały. $\square$

Spójne składowe

- Krotność wartości własnej 0 dla macierzy Q jest równa liczbie dwudzielnych spójnych składowych.

$Q = MM^T$, więc jeśli $MM^T u = 0$, to $M^T u = 0$

Zatem $u_x = -u_y$ dla $x \sim y$.

Liczba niezerowych wartości u to liczba spójnych dwudzielnych składowych. □

Widmo grafu nieskierowanego

Graf Γ jest dwudzielny wtw widmo L i Q jest takie same.

$\Longrightarrow$ Macierz Q można przedstawić jako $Q = DLD^{-1}$, gdzie D to macierz diagonalna z ± 1 na przekątnej. Zatem L i Q mają takie samo widmo.
$\Longleftarrow$ Skoro L i Q mają takie samo widmo, to liczba spójnych składowych Γ jest równa liczbie spójnych dwudzielnych składowych. $\square$

Klika K_n

- $A = \mathbf{J} - \mathbf{I}$
- Widmo
  $(n-1)^1, (-1)^{n-1}$
- Macierz Laplace'a
  $n\mathbf{I} - \mathbf{J}$
- Widmo Laplace'a
  $0^1, n^{n-1}$

Pełny graf dwudzielny $K_{m,n}$

- Widmo
  $\pm\sqrt{mn}, 0^{m+n-2}$
- Widmo Laplace'a
  $0^1, m^{n-1}, n^{m-1}, (m+n)^1$

Widma poszczególnych grafów

Cykl skierowany D_n

- Wektory własne
  $(1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1})^\top$, gdzie $\zeta = e^{2\pi i/n}$
- Widmo
  $e^{2\pi ij/n}$ dla $j = 0, \ldots, n-1$

Cykl nieskierowany C_n

- Macierz sąsiedztwa $A = B + B^T$
- Wektory własne
  $(1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1})^\top$, gdzie $\zeta = e^{2\pi i/n}$
- Widmo
  $2\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$ dla $j = 0, \ldots, n-1$
- Widmo Laplace'a
  $2 - 2\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$ dla $j = 0, \ldots, n-1$

Ścieżka P_n

- Widmo
  $2\cos\left(\frac{\pi j}{n+1}\right)$ for $j = 1, \ldots, n$
- Wektory własne:
  $u(\zeta) = (1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^n)^\top$
- Widmo Laplace'a
  $2 - 2\cos\left(\frac{\pi j}{n}\right)$ for $j = 0, \ldots, n-1$
- Wektory własne:
  $1 + \zeta^{2n-1}, \ldots, \zeta^{n-1} + \zeta^n$

Grafy liniowe $L(\Gamma)$

- Graf liniowy $L(\Gamma)$ ma zbiór krawędzi Γ jako zbiór wierzchołków
- Wierzchołki sąsiadują, jeśli odpowiadające im krawędzie mają wspólny koniec
- Macierz sąsiedztwa $N^\top N - 2I$, gdzie N to macierz incydencji Γ

Lemat

Niech Γ ma m krawędzi oraz niech $\rho_1 \geqslant \cdots \geqslant \rho_r$ będą dodatnimi wartościami własnymi Laplace'a grafu Γ. Wówczas wartości własne grafu liniowego $L(\Gamma)$ wynoszą $\theta_i = \rho_i - 2$ dla $i = 1, \ldots, r$, oraz $\theta_i = -2$ dla $r < i \leqslant m$.

Macierz Laplace'a Q oraz macierz sąsiedztwa B dla $L(\Gamma)$ spełniają $Q = NN^\top$ oraz $B + 2I = N^\top N$. Wartości własne są takie same. □

Wniosek

Jeśli Γ jest grafem k-regularnym $(k \geqslant 2)$ o n wierzchołkach i liczbie krawędzi $e = kn/2$, oraz wartościach własnych θ_i $(i = 1, \ldots, n)$, to $L(\Gamma)$ jest (2k - 2)-regularny z wartościami własnymi $\theta_i + k - 2$ $(i = 1, \ldots, n)$ oraz $e - n$ razy -2.

Iloczyn kartezjański $\Gamma \Box \Delta$

- $(v, w) \sim (v', w')$ gdy $(v = v'$ i $w \sim w')$ lub $(w = w'$ i $v \sim v')$
- Macierz sąsiedztwa $A_{\Gamma \Box \Delta} = A_\Gamma \otimes I + I \otimes A_\Delta$

- Wartości własne $\theta + \eta$ (zwykłe lub Laplace'a), gdzie θ i η są odpowiednio wartościami własnymi Γ i Δ
- Wektory własne $w_{(x,y)} = u_x v_y$, gdzie u_x i v_y to wektory własne Γ i Δ

Iloczyn Kroneckera $\Gamma \otimes \Delta$

- $(v, w) \sim (v', w')$ gdy $(v \sim v'$ i $w \sim w')$
- Macierz sąsiedztwa $A_{\Gamma \otimes \Delta}$ jest iloczynem Kroneckera macierzy sąsiedztwa Γ i Δ

- Wartości własne $\theta\eta$, gdzie θ i η są odpowiednio wartościami własnymi Γ i Δ
- Wektory własne $w = u \otimes v$ (z $w_{(x,y)} = u_x v_y$), gdzie u i v są wektorami własnymi Γ i Δ

Silny iloczyn $\Gamma \boxtimes \Delta$

- $(v, w) \sim (v', w')$ gdy
  $(v = v'$ i $w \sim w')$ lub
  $(w = w'$ i $v \sim v')$ lub
  $(v \sim v'$ i $w \sim w')$
- Macierz sąsiedztwa
  $((A_\Gamma + \mathbf{I}) \otimes (A_\Delta + \mathbf{I})) - \mathbf{I}$
- Wartości własne
  $(\theta + 1)(\eta + 1) - 1$,
  gdzie θ i η są odpowiednio
  wartościami własnymi Γ i Δ

Czy można rozłożyć K_{10} na grafy Petersena?

A_1, A_2, A_3 - macierze sąsiedztwa kopii GP w K_{10}

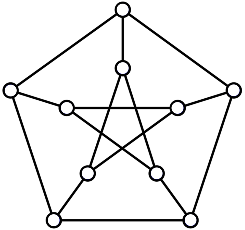
A_1, A_2 mają wspólny wektor własny u dla wartości 1.

Mamy $u \perp \mathbb{1}$, bo $\mathbb{1}$ jest wektorem dla wartości 3 w GP.

$Au = (\mathbf{J} - \mathbf{I})u = 0 - u = (-1)u$

$A_3u = Au - A_1u - A_2u = -3u$

Zatem -3 jest wartością własną A_3. $\lightning$



$3^1,\ 1^5,\ (-2)^4$

Twierdzenie Witsenhausena

Niech Γ będzie grafem o macierzy sąsiedztwa A, który ma dekompozycję krawędziową na r pełnych grafów dwudzielnych. Wówczas $r \geqslant n_+(A)$ oraz $r \geqslant n_-(A)$, gdzie n_+ i n_- oznaczają odpowiednio liczbę dodatnich i ujemnych wartości własnych.

u_i, v_i - wektory charakterystyczne stron podziału i-tego grafu dwudzielnego

$A = \sum_i A_i$, gdzie $A_i = u_i v_i^T + v_i u_i^T$

w - wektor ortogonalny do u_i, $w^T A w = 0$

Wektor w nie może być wybrany z przestrzeni rozpiętej przez wektory własne macierzy A odpowiadające dodatnim (ujemnym) wartościom własnym. $\square$

Czy można rozłożyć K_n na grafy dwudzielne?

Twierdzenie Grahama-Pollaka

Dla dowolnego rozkładu krawędziowego K_n na pełne grafy dwudzielne mamy co najmniej $n-1$ składowych.

Graf K_n ma wartość własną -1 o krotności $n-1$. $\square$

Automorfizmy grafu Γ

- Automorfizm grafu Γ to permutacja π zbioru wierzchołków X, taka że $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi(x) \sim \pi(y)$
- Transformacja liniowa $P_\pi(u)_x = u_{\pi(x)}$ dla $u \in V$ oraz $x \in X$
- $AP_\pi = P_\pi A$
- P_π zachowuje przestrzeń własną V_θ dla każdej wartości własnej θ macierzy A
- $m(\theta) = \dim V_\theta$

Jeśli wszystkie wartości własne są proste, to grupa automorfizmów Γ jest elementarną 2-grupą abelową.

Twierdzenie

Niech grupa automorfizmów Γ będzie przechodnia na X. Wówczas Γ jest regularny stopnia k.

(i) Jeśli $m(\theta) = 1$ dla pewnej wartości własnej $\theta \neq k$, wtedy $v = |X|$ jest parzyste i $\theta \equiv k \pmod 2$. Jeśli Γ jest dodatkowo przechodnia krawędziowo, to Γ jest dwudzielny i $\theta = -k$.

(ii) Jeśli $m(\theta) = 1$ dla dwóch różnych wartości własnych $\theta \neq k$, to $v \equiv 0 \pmod 4$.

(iii) Jeśli $m(\theta) = 1$ dla wszystkich wartości własnych θ, to Γ ma co najwyżej dwa wierzchołki.

Niech Γ będzie grafem z co najmniej dwoma wierzchołkami i widmem Laplace'a $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$. Wtedy $\mu_2(\Gamma)$ jest nazywana algebraiczną spójnością Γ.

Monotoniczność

Niech Γ i Δ będą grafami rozłącznymi krawędziowo na tym samym zbiorze wierzchołków, a $\Gamma \cup \Delta$ ich sumą. Mamy $\mu_2(\Gamma \cup \Delta) \geqslant \mu_2(\Gamma) + \mu_2(\Delta) \geqslant \mu_2(\Gamma)$.

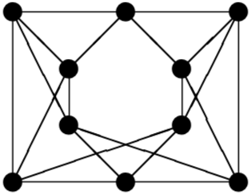
Korzystamy z tego, że $\mu_2(\Gamma) = \min_{\mathrm{u}} \{\mathrm{u}^{\perp} L\mathrm{u} \mid \langle \mathrm{u}, \mathrm{u} \rangle = 1, \ \langle \mathrm{u}, \mathbb{1} \rangle = 0\}$. □

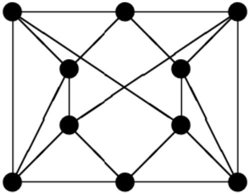
Ograniczenie spójności wierzchołkowej

Niech Γ będzie grafem o zbiorze wierzchołków X. Przypuśćmy, że $D \subset X$ jest takim zbiorem wierzchołków, że podgraf indukowany przez Γ na zbiorze $X \setminus D$ jest niespójny. Wówczas $|D| \geqslant \mu_2(\Gamma)$.

Zakładamy, że Γ zawiera wszystkie krawędzie pomiędzy D i $X \setminus D$. Wybieramy niezerowy wektor u, który przyjmuje 0 na D i stałą wartość na każdej składowej z $X \setminus D$. Dodatkowo spełnia $\langle u, \mathbb{1} \rangle = 0$. Wtedy u jest wektorem własnym L dla wartości własnej $|D|$. $\square$

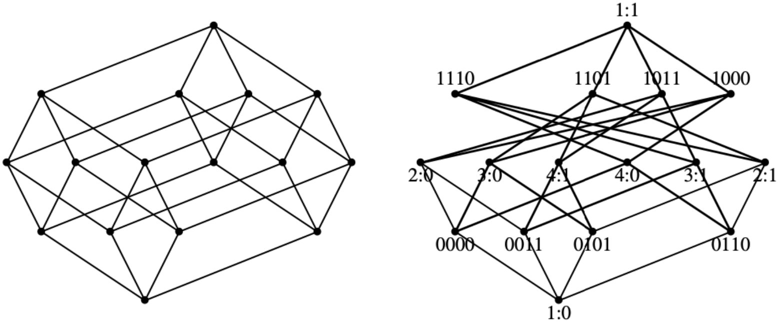
Grafy współwidmowe





Dwa współwidmowe i nie-izomorficzne grafy regularne

Grafy współwidmowe



Kostka 4-wymiarowa (tesseract) i jej widmowa siostra

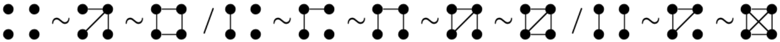
Macierz sąsiedztwa Seidela

$$S_{uv} = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } u = v \\ -1 & \text{jeśli } u \sim v \\ 1 & \text{jeśli } u \not\sim v \end{cases}$$

- $S = \mathbf{J} - \mathbf{I} - 2A$
- Widmo Seidela: widmo macierzy sąsiedztwa Seidela
- Dla grafu regularnego o n wierzchołkach i walencji k:
  $n - 1 - 2k$, $-1 - 2\theta$

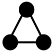
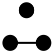
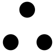
Seidel switching

Niech Γ ma zbiór wierzchołków X, a $Y \subset X$. Macierz diagonalna D z indeksem X ma $D_{xx} = -1$ dla $x \in Y$ oraz $D_{xx} = 1$ w przeciwnym przypadku. Wówczas DSD ma takie samo widmo jak S. Nowy graf, który otrzymujemy przez Seidel switching względem Y, jest Seidel-izospetralny z Γ.



Klasy równoważności grafów na 4 wierzchołkach

Bardzo małe grafy

		A	L	Q	S
1.1		0	0	0	0
2.1		1,-1	0,2	2,0	-1,1
2.2		0,0	0,0	0,0	-1,1
3.1		2,-1,-1	0,3,3	4,1,1	-2,1,1
3.2		$\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}$	0,1,3	3,1,0	-1,-1,2
3.3		1,0,-1	0,0,2	2,0,0	-2,1,1
3.4		0,0,0	0,0,0	0,0,0	-1,-1,2