C 题：最佳广告费用及其效应

摘要 ：本文从经济经验上着眼，首先用回归建立了基本模型，从预期上描述了售价变化与预期销售量的关系和广告费变化与销售量增长因子的关系。 其次从基本模型出发， 我们构造出预期时间利润最大模型，得到了利润在预期的条件下获得最大利润 116610 元时的最佳广告费用 33082 元和售价 5.9113 元。

一 问题的分析与假设

（1）销售量的变化虽然是离散的，但对于大量的销售而言，可设销售量的变化随售价的增加而线性递减。

（2）销售增长因子虽然也是离散的，但当广告费逐渐增加时，可设销售增长因子也是连续变化的。

（3）要使预期利润达到最大， 买进的彩漆应为模型理论上的预期最大利润时的销售量相等。

二 模型的基本假设与符号说明

（一）基本假设

1. 假设彩漆的预期销售量不受市场影响。
2. 彩漆在预期时间内不变质，并且价格在预期内不波动。

（二）符号说明

x：售价（元） ；

y：预期销售量（千桶） ；

y^*：回归拟合预期销售量（千桶） ；

$\bar{y}$：预期销售量的均值（千桶） ；

$\bar{x}$：售价的平均值（元） ；

A_0：x 与 y 的回归常数；

A_1：x 与 y 的回归系数；

ε ：x 与 y 的随机变量；

k ：销售增长因子；

m ：广告费（万元） ；

B_0 ：k 与 m 的非线性回归系数；

B_1 ：k 与 m 的非线性回归系数；

B_2 ：k 与 m 的非线性回归常数；

η ：k 与 m 的随机变量；

Z ：预期利润（元） 。

三 模型的建立

（一）售价与预期销售量的模型。

根据条件（表 1）描出散点图，假设售价与预期销售量为线性关系，得基本模型

$$y = A_0 + A_1 x + \varepsilon$$

假定 9 组预期值 (x_i, y_i)，i=1,2,⋯,9；符合模型

$$\begin{cases} y_i = A_0 + A_1 x_i + \varepsilon, \\ i = 1,2,\ldots,9; \\ \varepsilon_i \sim N(0, \sigma_1^2), \ i = 1,2,\ldots,9; \end{cases}$$

用 OLS 法得 A_0 和 A_1 的最小而乘估计

$$\hat{A}_1 = \sum_{i=1}^{9}(x_i - \bar{x})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{9}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -0.1948$$

$$\hat{A}_0 = \bar{y} - \hat{A}_1 \bar{x} = 30.6681$$

利用 Matlab 解得售价与预期销售量的线性回归方程的模型，并得到线性回归方程与预期价拟合图 1(计算机程序见附录 1)

$y^* = 50.422 - 5.1333x$

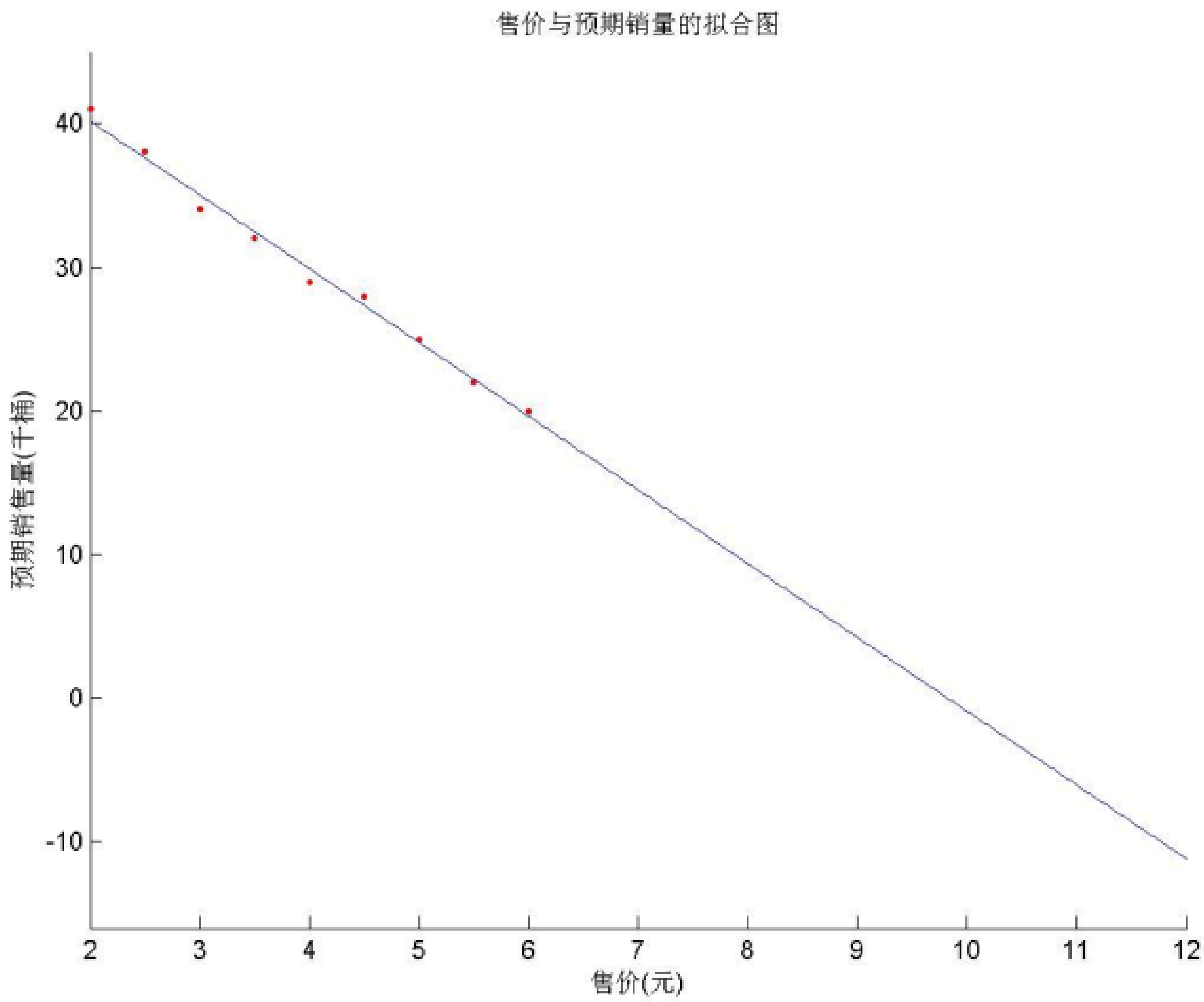

图 1

(二)广告费与销售增长因子的模型

根据条件（表 2）描出散点图，假设广告费与销售因子为非线性关系，得其基本模型

$$k = B_0 m^2 + B_1 m + B_2 + \eta$$

假定 8 组预期值 $(m_j, k_j),\ j = 1,2,\ldots,8$;符号模型

$$\begin{cases} k_j = B_0 m_j^2 + B_1 m_j + B_2 + \eta, \\ j = 1,2,\ldots,8; \\ \eta_j \sim N(0, \sigma_2^2), j = 1,2,\ldots,8; \end{cases}$$

利用 Matlab 解得广告费与销售因子的非线性回归方程的模型，并得非线性回归方程与预期值拟合图 2（计算机程序见附录 2）

$$k = -0.0426m^2 + 0.4092m + 1.0187$$

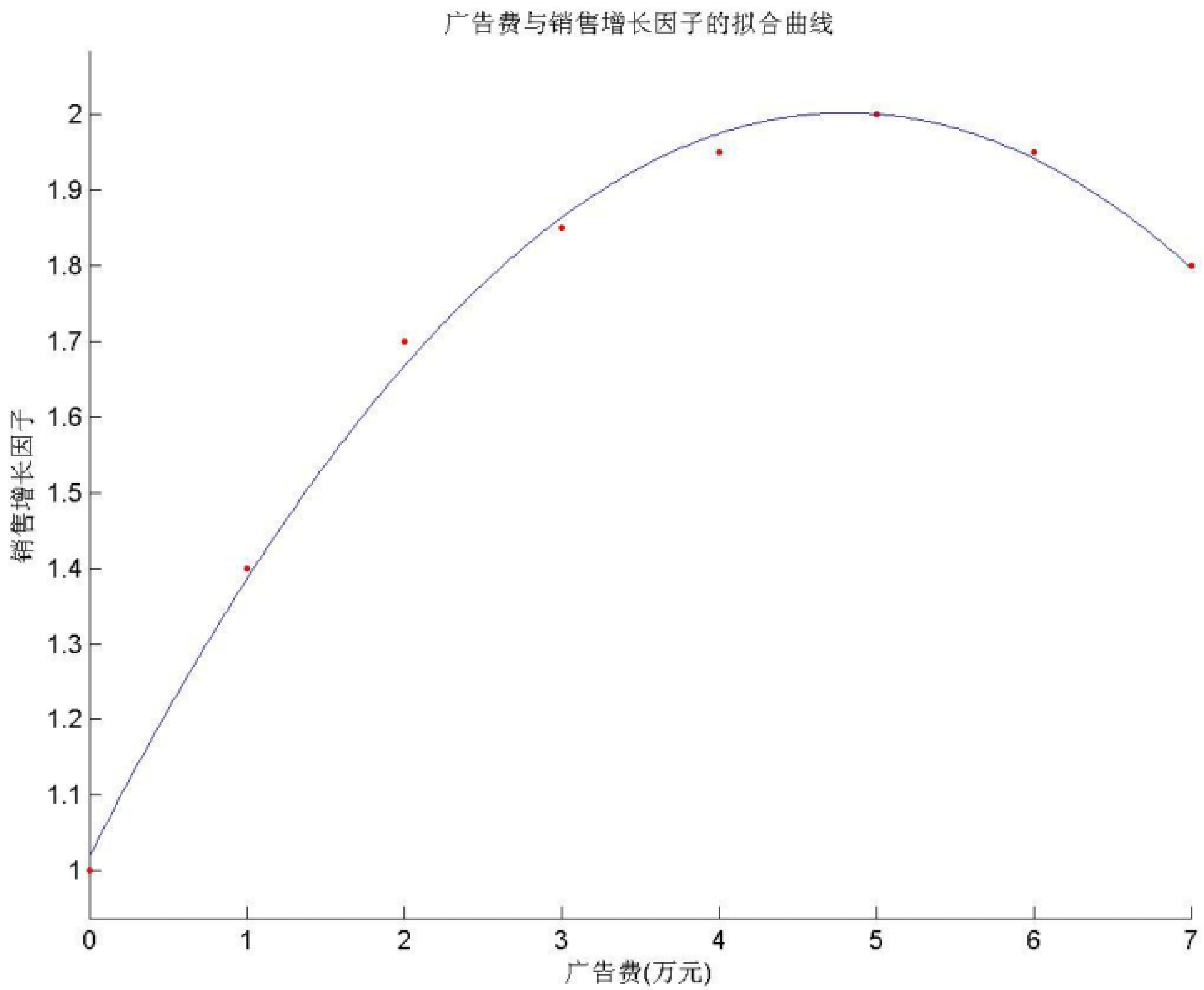

图 2

（三）预期利润的最优模型

为了最大预期利润，建立预期利润的模型函数；

目标函数 $\max Z = k(x-2)y \times 10^3 - m \times 10^4$

限制条件：$\begin{cases} y = 50.4222 - 5.1333x, (2 \le x \le 9.8226) \\ k = -0.0426m^2 + 0.4092m + 1.0187, (0 \le m \le 7). \end{cases}$

解目标函数 max Z 等价与求 min (-Z), 利用 Matlab 解得 min (-Z)(计算机程序见附录 3):

$\min(-Z) = -1.1661\times 10^{5}$;

x=5.9113;

m=3.3082;

所以 $\max Z = 1.1661\times 10^{5}$

（四）检验

1. 由 Matlab 软件得第一个模型的决定系数谓为 0.9909, 误差较小, 因此适用目标函数 max Z;

2. 由 Matlab 软件得第二个模型的决定系数为 0.9970, 误差也较小, 因此也适用目标函数 max Z.

(五) 建议

虽然在预期上, 投入 33082 元的广告费和售价 5.9113 元, 可以达到预期销售量 20.0777 千桶, 可以达到最大的预期利润, 但市场存在一定风险, 每一种产品都有其生命周期, 即每种产品都会有一个销售量从增长到降低的过程。 李经理买进彩漆时, 应考虑缓冲库存, 即为了预防未来不确定因素（供应和需求得变化）起缓冲作用而保持的额外库存。 确定适当的安全库存水平涉及到在安全库存引起的成本增加与不能满足需求而引起的缺货成本之间的平衡问题, 因此保留一定的库存可以不致使货品中断造成损失, 在买进时应在最佳预期销售量上有一定的增加, 以预防市场风险。

四 模型误差分析

文中基础假设合理, 理论采用已有的数学理论, 所建模型理论可靠, 模型结构简单, 求 解后三个模型均采用 软件, 故误差仅由软件和计算机产生, 模型具有较好的稳定性。

五 模型优缺点及改进方向

优点：

1。误差小, 给出的预计比较准确；

2。适用范围较广, 模型对于其他预计经济优化模型也有一定的适应性；

3。最终模型由简单的模型入手, 思路清晰。

缺点：

1。未能结合市场经济的具体因素给出更接近事实的模型；

2。未能考虑库存, 在各个预期周期之间有可能断货造成损失, 因此不能预测在下一个周期内是否能同样取的最大利润。

参考文献

张国权 2004 数学实验 (第一版), 科学出版社

马正飞 , 殷翔 2002 , 数学计算方法与软件的工程应用 , 化学工业出版社

孙维琦 2004 生产与运作管理 , 机械工业出版社

六 附录

1.

```
x=[2.0 2.5 3.0 3.5 4.0 4.5 5.0 5.5 6.0]
y=[41 38 34 32 29 28 25 22 20]
scatter(x,y,5,'r','filled'),hold on;
Be=inline('b(1)+b(2).*x','b','x');
b=[30.6681 -0.1948]
[beta,Res,Re]=LSQCURVEFIT(Be,b,x,y);
parameters=beta
ss=sum((y-mean(y)).^2);rs=sum(Re.^2);R=(ss-rs)/ss
syms b x;b=beta
y=subs(b(1)+b(2).*x);
ezplot(y,[2.0,12])
title(' 售价与预期销量的拟合图 '),xlabel(' 售价 (元 )'),ylabel(' 预期销售量 (千桶 )')
```

运行结果为：

b（1）＝ 50.4222

b（2）＝ -5.1333

决定系数 R＝0.9909

2.

```
m=[0 1 2 3 4 5 6 7]
k=[1.00 1.40 1.70 1.85 1.95 2.00 1.95 1.80]
scatter(m,k,5,'r','filled'),hold on;
Ae=inline('b(1).*m.^2+b(2).*m+b(3)','b','m');
b=[-0.05 5 0.75]
[beta,Res,Re]=LSQCURVEFIT(Ae,b,m,k);
parameters=beta
ss=sum((k-mean(k)).^2);rs=sum(Re.^2);R=(ss-rs)/ss
syms b m;b=beta
k=subs(b(1).*m.^2+b(2).*m+b(3));
ezplot(k,[0 7])
title(' 广告费与销售增长因子的拟合曲线 '),xlabel(' 广告费 (万元)'),ylabel(' 销售增长因子 ')
```

运行结果为：

b（1）＝ -0.0426

b（2）＝ 0.4092

b（3）＝ 1.0187

决定系数 R＝0.9970

3.

```
>>
f='10^4*x(2)-(x(1)-2)*(50.4222-5.1333*x(1))*10^3*(-0.0426*x
(2).^2+0.4092*x(2)+1.0187)'

f =

10^4*x(2)-(x(1)-2)*(50.4222-5.1333*x(1))*10^3*(-0.0426*x(2)
.^2+0.4092*x(2)+1.0187)

>> x=fminsearch(f,[4.5 3.5]),f=eval(f)

x =

    5.9113    3.3082

f =

  -1.1661e+005
>>
```