

广告与利润决策中的数学建模

冯 宁

(常州轻工职业技术学院, 常州 213004)

[摘 要] 根据以往的统计资料或市场销售经验,运用数学知识及计算技术工具构建和求解数学模型,解决商品推销中如何确定商品价格和广告费的支出,以获取最大利润的问题.

[关键词] 广告利润; 决策; 数学模型

[中图分类号] O29 [文献标识码] A [文章编号] 1671-6191(2002)04 - 0014 - 04

在市场经济中,推销商品的重要手段之一是做广告,而做广告要出广告费,每个企业、商家都会精打细算,关注某种商品,出多少广告费使得销售量最大,利润最高.因此,广告与利润决策直接影响着企业、商家的经济效益.下面介绍一种利用数学知识及计算技术工具帮助决策的方法.

问题:某医药公司有一大批保健品.根据以往统计资料,零售价增高,则销售量减少,若做广告,可使销售量增加.现在已知该保健品的进价是每盒40元,请帮助决策一下,如何确定保健品的价格和花多少广告费,使公司获利最大.

1 问题的分析

利润是销售收入与支出之差,销售收入是零售单价与实际销售量之积,而销售量与零售单价有关,实际销售量又与预期销售量及广告后销售量的提高有关.在这个问题中,涉及多个随机变量,一般可用统计的方法来建立数学模型.首先,预期销售量与价格的高低相关,价高量少,价低量大,其相关关系,可根据以往的统计资料或市场销售经验分析求得;其次,销售量的提高与广告费用也是相关的,做广告,可扩大商品品牌的知名度,进而提高销售量.其销售量增加的程度可用售量提高因子来表示,这种售量提高因子与广告费用的关系,也可根据以往的统计资料或销售经验.

为建立模型,引入以下记号:

x — 销售单价; y — 预期销售量; z — 广告费; k — 售量提高因子; c — 成本单价; S — 实际销售量; P — 利润.

2 模型的建立

根据收集到的销售量与价格的关系的统计数据,作出散点图;由散点图,可近似判断出这两个变量的关系曲线 $y=f(x)$,再用曲线拟合法,得到曲线的回归方程.同样方法,根据收集到的售量提高因子 k 与广告费 z 的关系的统计数据,判断出这两个变量的近似曲线 $k=g(z)$,并求得回归方程.

一般地,实际销售量 S 等于预期销售量 y 乘以售量提高因子 k ,即 $S=k \cdot y$.于是,利润 p 可表示为:

收稿日期: 2002-09-27

作者简介: 冯宁(1957-),女,常州轻工职业技术学院基础部数学教研室教师.

$$P = \text{收入} - \text{支出} = \text{销售收入} - \text{成本支出} - \text{广告费} = Sx - Sc - z = ky(x - c) - z$$

由上可知: $y = f(x)$, $k = g(z)$, 所以利润 P 只是 x 和 y 的函数. 利润 P 最大就转化为求 $P(x, z)$, 当 x, z 为何值时, 达到最大值.

3 模型的求解

根据以往该保健品的销售统计资料, 可查得:

表1 预期销售量与价格的关系

单价 x (元)	40	50	60	70	80	90	100	110	120
销量 y (千盒)	820	750	680	640	580	560	500	440	390

表2 销量提高因子与广告费的关系

广告费 z (万元)	0	1	2	3	4	5	6	7
销量提高因子 k	1.00	1.35	1.65	1.80	1.90	1.95	1.90	1.75

(1) 求出销量与价格的关系 $y = f(x)$

下面介绍利用数据分析的流行软件 Excel 作回归分析.

操作要点: 进入 Excel 工作表, 在第一、第二列分别输入相应的数据, 插入“图表”, 在弹出对话框中“图表类型”的选项中, 选择“散点图”, 即可得到数据点的直观图, 如图 1 所示.

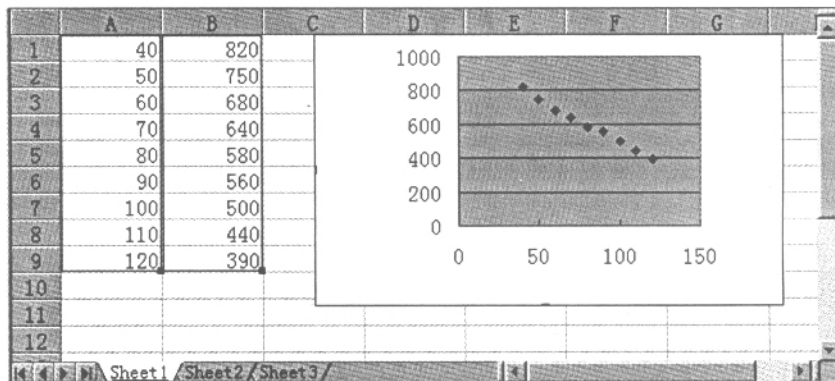


图1 销量与价格数据散点图

观察散点图, 可知这两个变量大致呈线性关系, 考虑用回归直线来拟合. 依次选择“工具”、“数据分析”、“回归”, 即可得到各种统计结果, 如图 2 所示.

由图 2 知所求回归直线方程为 $y = 1007.556 - 5.15x$.

(2) 求出销量提高因子与广告费的关系 $k = f(z)$

下面介绍利用功能强大的数学软件 Mathematica 作回归分析. 由表 2 的数据作出散点图, 如图 3 所示. 从图 3 看出散点近似在一条抛物线上, 可用抛物线 $k = dz^2 + ez + f$ 来拟合.

操作要点: 双击 Mathematica 软件的图标, 进入命令窗口. 在命令窗口输入对数据进行最小二乘拟合的命令:

`Fit[data, funcs, Vars]`

其中 data 为要拟合的数据, funcs 为拟合函数的基, Vars 为拟合的变量, 然后同时按下 Shift 与 Enter 键即可执行上述命令, 过程和结果如下.

`In[1]=Fit[{{0,1},{1,1.35},{2,1.65},{3,1.8},{4,1.9},{5,1.95},{6,1.9},{7,1.75}}, {1,z,z^2}, z]`

`Out[1]=1.00417+0.390476z-0.040476z^2`

即销量提高因子与广告费的回归方程为:

$$k=1.00417+0.390476z-0.040476z^2$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	SUMMARY OUTPUT								
2									
3	回归统计								
4	Multiple	0.99598							
5	R Square	0.991976							
6	Adjusted	0.99083							
7	标准误差	13.56056							
8	观测值	9							
9									
10	方差分析								
11		df	SS	MS	F	Significance F			
12	回归分析	1	159135	159135	865.3867	1.35E-08			
13	残差	7	1287.222	183.8889					
14	总计	8	160422.2						
15									
16		Coefficients	标准误差	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	下限 95.0%	上限 95.0%
17	Intercept	1007.556	14.71667	68.46358	3.73E-11	972.7562	1042.355	972.7562	1042.355
18	X Variable	-5.15	0.175066	-29.4175	1.35E-08	-5.56397	-4.73603	-5.56397	-4.73603

纵截距 x系数

图2 统计结果示意图

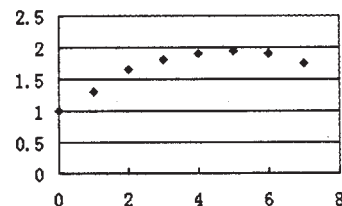
(3) 求利润 $P=ky-(x-c)-z$ 的极值

将 $y=1007.556-5.15x$, $k=1.00417+0.390476z-0.040476z^2$ 代入目标函数 P , 得:

$$P(x,z)=(1.00417+0.390476z-0.040476z^2)(1007.556-5.15x)(x-40)-z$$

由多元函数求极值的方法: 先求两个偏导数 $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$, 然后求满足

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial P}{\partial z}=0 \end{cases} \text{ 的点 } (x_0, z_0). \text{ 仍以 Mathematica 为计算工具.}$$

图3 k 与 z 的数据散点图

操作要点: 在命令窗口依次输入命令: $D[f,x]$ (求导数或偏导数) 和 $Solve[\{\text{方程或方程组}\}, \{\text{变量}\}]$, 然后同时按下 Shift 与 Enter 键便可执行上述命令 (过程和结果如下).

In[1]=D[(1.00417+0.390476z-0.040476z^2)*(x-40)-z,x]

Out[1]=(1007.56-5.15x)(1.00417+0.390476z-0.040476z^2)-5.15(-40+x)(1.00417+0.390476z-0.040476z^2)

In[2]=D[(1.00417+0.390476z-0.040476z^2)*(x-40)-z,z]

Out[2]=-1+(1007.56-5.15x)(-40+x)(0.390476-0.0809524z)

In[3]=Solve[{(1007.56-5.15x)(1.00417+0.390476z-0.040476z^2)-5.15(-40+x)(1.00417+0.390476z-0.040476z^2)=0, -1+(1007.56-5.15x)(-40+x)(0.390476-0.0809524z)=0}, {x,z}]

Out[3]={ {x→85.3333, z→11.7572}, {117.821, z→4.82313}, {x→128., z→-2.11011} }

即 $\frac{\partial P}{\partial x}=(1007.56-5.15x)(1.00417+0.390476z-0.040476z^2)-5.15(-40+x)(1.00417+0.390476-0.040476z^2)$.

$\frac{\partial P}{\partial z}=-1+(1007.56-5.15x)(0.390476-0.0809524z)$.

P 的驻点为 $\begin{cases} x_0=117.821 \\ z_0=4.82313 \end{cases}$. 由于在点 (x_0, z_0) 处, $A=\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}<0, B=\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z}=0, C=\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}<0$

由多元函数极值的充分条件知, 在点 (x_0, z_0) 处利润 P 取最大值. 这时, $x \approx 117.8$ (元), $y \approx 400.782$ (千盒), $z \approx 4.8231$ (万元), $k \approx 1.95$.

即按该方案销售,实际销售量 $S = ky = 1.95 \times 400.782 \approx 781.525$ (千盒),获利润 $P \approx 60754414$ (元).

4 模型说明

一个模型是否反映客观实际,可用已有的数据去验证. 如果由模型计算出来的理论数值与实际数值比较吻合,则模型是成功的;如果理论数值与实际数值差别太大,则模型是失败的;如果理论数值与实际数值部分吻合,则可找原因,发现问题,修改模型.

建立此类模型的关键,是根据以往的信息(统计资料或市场销售经验)作出合理的判断. 当然实际操作中,影响利润的因素很多,如要考虑这种商品在市场上能畅销多久? 此外,该模型的假设中,没有考虑广告的方式,而不同方式的广告所产生销售量的增加也不尽相同,所以当广告形式多样时,还必须比较各种方式所得利润的大小,再作出决策.

Mathematical Model in Strategy of the Advertisements and Profits

FENG Ning

(Changzhou Light Industry Vocational Technology Institute, Changzhou 226371)

[Abstract] The purpose of this paper is to establish the mathematical model utilizing the mathematical knowledge and the technical tools of calculating, so as to solve the problems about the advertisements and profits in promoting sales of goods.

[Key words] advertisements and profits; strategic decisions; mathematical model

(上接第3页)

参考文献:

- [1] Khalid M. Tawarah. A Thermodynamic Study of the Association of the Acid Form of Methyl Orange with Cyclodextrins [J]. Dyes and Pigments, 1992,19.
- [2] Dudley H. Williams. Spectroscopic methods in organic chemistry[M]. McGraw-Hill Publishing Company, 1995.

Explaining the Inclusion Formation of β -cyclodextrin with Cationic Blue X-GRRL

QIU Hong-juan WU Tian-rong

(Textile and Dye Engineering Department of Nantong Textile Vocational Technology College, Nantong 226007)

[Abstract] The inclusion formation of β -cyclodextrin with Cationic Blue X-GRRL was explained by means of UV-visible spectra and the binding constants at different temperature are calculated in this article.

[key words] UV-visible spectra; Cationic Blue X-GRRL; binding constants