

Manifole Learning Homework 5

安捷 1601210097

2017 年 3 月 24 日

习题 (76). *Proof.* 首先, 由于 \mathbf{A} 是对称矩阵, 因此 \mathbf{A} 有特征值分解

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T \quad (1)$$

其中, $\mathbf{\Lambda}$ 为 \mathbf{A} 的特征值, 首先证明题目中优化问题的解为

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \max(\mathbf{\Lambda}_r, 0) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{U}^T \quad (2)$$

由于

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{A}\|_F^2 = \|\mathbf{X}\|_F^2 + \|\mathbf{A}\|_F^2 - 2\langle \mathbf{X}, \mathbf{A} \rangle \quad (3)$$

由 von Neumann 迹定理, 有 $\langle \mathbf{X}, \mathbf{A} \rangle < \sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i$, 其中, α_i, β_i 是 \mathbf{X}, \mathbf{A} 的奇异值的顺序和, 又由于 \mathbf{X} 是半正定矩阵, 因此存在特征值分解

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{\Psi}\mathbf{V}^T \quad (4)$$

其中 $\mathbf{\Psi}$ 是特征值顺序排列组成的对角矩阵, 所以要使得原始优化问题取得最小值, 必须有 $\mathbf{U} = \mathbf{V}$, 否则, 无法保证 \mathbf{X} 与 \mathbf{A} 有相同的奇异值顺序。上述论断其实有一个问题, 即 \mathbf{A} 由于不是半正定矩阵, 因此其特征值的顺序与奇异值的顺序并不相同, 但实际上这一问题不会影响证明的结果, 由于我们后面的证明过程中会使得对应于 \mathbf{A} 的负特征值的 \mathbf{X} 的特征值为 0, 因此这一问题不存在。下面考虑 $\mathbf{\Psi}$ 的取值, 当 \mathbf{A} 有 r 个非负特征值时, 显然只需要使得 $\mathbf{\Psi}$ 取 \mathbf{A} 的前 r 个特征值即可; 若 \mathbf{A} 在前 r 个特征值会出现负特征值, 此时, 显然当 \mathbf{X} 的对应特征值取为 0 时才能保证优化问题取得最小值, 上述证明过程中两步取最值得条件同时满足的情况即为 2 式。同时, 由于对于 2 式而言, 其等价于

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}_r \mathbf{\Lambda}_r \mathbf{U}_r^T \quad (5)$$

□