Manifold Learning Homework 2

安捷 1601210097

2017-03-01

习题 (24)**.** *Proof 1.*

$$\|\cdot\|_p^* = \|\cdot\|_q$$

由于 Holder inequality

Theorem. 对于任意的 $p > 1, q > 1$，如果满足

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

那么有如下关系成立

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

由于 $\|\mathbf{y}\|_p \leq 1$，因此有 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq \|\mathbf{x}_q\|$，因此有 $\|\mathbf{x}\|_p^* = \|\mathbf{x}\|_q$ □

Proof 2.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathrm{tr}\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\mathbf{B}\right)$$

其中，有

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{y}\mathbf{B} = \mathbf{V}$$

$\mathbf{V}$ 为对角矩阵且对角线元素为矩阵 $\mathbf{y}$ 的特征值

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\mathbf{B}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\right)$$

又有

$$\|\mathbf{y}\|_2 \leq 1$$

所以 V 的元素的绝对值都小于等于 1，因此有

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\right) \leq \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} |\lambda_{\mathrm{i}}| = \|\mathbf{x}\|_*$$

□

Proof 3. 由 $p=2, q=2$ 时的 Holder inequality，即 Cauthy inequality

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{ij} \mathbf{x}_{ij} \mathbf{y} ij \leq \left(\sum_{ij} |\mathbf{x}_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{ij} |\mathbf{y}_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\mathbf{x}\|_F$$

所以有

$$\|\mathbf{x}\|_F^* = \|\mathbf{x}\|_F$$

□

习题 (28)**.** *Proof (2.20).*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{XY}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{t})\mathbf{Y}(\mathbf{t})}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \left(\mathbf{X}(\mathbf{t})\mathbf{Y}(\mathbf{t})\right)_{ij}}{\partial t} \end{aligned}$$

其中 $\partial \left(\mathbf{X}(\mathbf{t})\mathbf{Y}(\mathbf{t})\right)_{ij}$ 表示两矩阵乘积的第 i, j 个元素，下面考虑 $\partial \left(\mathbf{X}(\mathbf{t})\mathbf{Y}(\mathbf{t})\right)_{ij}$ 关于 t 的偏导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{t})\mathbf{Y}(\mathbf{t})_{ij}}{\partial t} &= \frac{\partial \sum_{k=1}^{n} \mathbf{X}_{ik}(t)\mathbf{Y}_{kj}(t)}{\partial t} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \left(\mathbf{X}_{ik}(t)\mathbf{Y}_{kj}(t)\right)}{\partial t} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathbf{X}_{ik}(t)}{\partial t} \mathbf{Y}_{kj}(t) + \frac{\partial \mathbf{Y}_{kj}(t)}{\partial t} \mathbf{X}_{ik}(t) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathbf{X}_{ik}(t)}{\partial t} \mathbf{Y}_{kj}(t) \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathbf{Y}_{kj}(t)}{\partial t} \mathbf{X}_{ik}(t) \right) \\ &= \left(\frac{\mathbf{X}(t)}{(t)} \mathbf{Y}(t) \right)_{ij} + \left(\frac{\partial \mathbf{Y}(t)}{\partial t} \mathbf{X}(t) \right)_{ij} \\ & \left(\frac{\mathbf{X}(t)}{\partial t} \mathbf{Y}(t) + \frac{\partial \mathbf{Y}(t)}{\partial t} \mathbf{X}(t) \right)_{ij} \end{aligned}$$

所以有

$$\frac{\partial \mathbf{XY}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \mathbf{Y} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} \mathbf{X}$$

□

Proof (2.25).

$$\frac{\partial \left(\mathbf{a}^T \mathbf{x}\right)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}$$

$$\frac{\partial \left(\mathbf{a}^T \mathbf{x}\right)}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i \mathbf{x}_i\right)}{\partial \mathbf{x}_i} = \mathbf{a}_i$$

所以有

$$\frac{\partial\left(\mathbf{a}^T\mathbf{x}\right)}{\partial\mathbf{x}}=\mathbf{a}$$

□

Proof (2.26).

$$\frac{\partial\left(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\right)}{\partial\mathbf{x}}=\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)\mathbf{x}$$

考虑导数的第 k 个元素，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\right)}{\partial\mathbf{x}_k}&=\frac{\partial\left(\sum_{j=1}^n\left(\sum_{k=1}^n\mathbf{x}_k\mathbf{A}_{kj}\right)\mathbf{x}_j\right)}{\partial\mathbf{x}_i}\\&=\frac{\partial\left(\sum_{k\neq i}\mathbf{x}_k\mathbf{A}_{ki}\mathbf{x}_i+\sum_{j\neq i}\mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_j\mathbf{x}_i+\mathbf{A}_{ii}\mathbf{x}_i^2\right)}{\partial\mathbf{x}_i}\\&=\sum_{k\neq i}\mathbf{A}_{ki}\mathbf{x}_k+\sum_{j\neq i}\mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_j+2\mathbf{A}_{ii}\mathbf{x}_i\\&=\sum_{t=1}^n\mathbf{A}_{ti}\mathbf{x}_t+\sum_{t=1}^n\mathbf{A}_{it}\mathbf{x}_t\\&=\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)_i\mathbf{x}\end{aligned}$$

所以有

$$\frac{\partial\left(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\right)}{\partial\mathbf{x}}=\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)\mathbf{x}$$

□

Proof $\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\mathbf{X}}$.

$$\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\mathbf{X}}$$

首先看

$$\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\mathbf{X}_{ij}}$$

有

$$\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\mathbf{X}_{ij}}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T$$

其中为只有第 i 行为 1，其余行皆为 0 的向量，则有

$$\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\mathbf{X}}=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\\mathbf{e}_2\\\mathbf{e}_3\\\vdots\\\mathbf{e}_n\end{pmatrix}\left(\mathbf{e}_1^T,\mathbf{e}_2^T,\mathbf{e}_3^T,\ldots,\mathbf{e}_n^T\right)$$

□

习题 (29)**.**

$$\langle \mathcal{A}^* (\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathcal{A}(y) \rangle$$

所以有

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}^* (x), \mathbf{Y} \rangle &= (Y_{11} + Y_{12} - Y_{31} + 2Y_{33})\, x \\ &= \langle \begin{pmatrix} x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 2x \end{pmatrix}, \mathbf{Y} \rangle \end{aligned}$$

因此

$$\mathcal{A}^* (x) = \begin{pmatrix} x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 2x \end{pmatrix}$$

习题 (33)**.** *Proof.* □