Manifold Learning Homework 3

安捷 1601210097

2017-03-11

习题. 对于图像中位置为 (i, j) 的点来说，不妨认为这一点就位于 0,1 的边界上，切这一点的数值为 0，实际上对于任一点以下推导都是成立的，且边界上的点一定可以在本题中求出 λ 的值。对于第一种梯度的定义方式，在 0 度边界的情形有

$$\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{i,j} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{i,j} = 0$$

所以，$\|\nabla v\| = \frac{1}{2}$。
在 45 度边界的情形有

$$\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{i,j} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{i,j} = \frac{1}{2}$$

所以，$\|\nabla v\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$。对于第二种离散梯度的定义方式，要使二者相同。首先，在 0 度的情形，有

$$\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{i,j} = \frac{\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{i,j} = 0$$

所以，$\|\nabla v\| = \frac{1}{2}$。在 45 度边界的情形有

$$\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{i,j} = \frac{\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{4} = \frac{1+\lambda}{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{i,j} = -\frac{\lambda}{2} - \frac{1-\lambda}{4} = -\frac{1+\lambda}{4}$$

所以，$\|\nabla v\| = \frac{\sqrt{2}(1+\lambda)}{4}$。当 $\lambda = \sqrt{2} - 1$ 时，45 度与 0 度有相同的范数。

习题. 与上题的分析方法相同，在 0 度的情形，有

$$\Delta v\big|_{i,j} = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

在 45 度的情形，有

$$\Delta v\big|_{i,j} = 2\lambda + \frac{1-\lambda}{2} = \frac{1+3\lambda}{2}$$

当 $\lambda = \frac{1}{3}$ 时，45 度与 0 度有相同的值。