Manifole Learning Homework 5

安捷 1601210097

2017 年 3 月 27 日

习题 (76). *Proof.* 首先，由于 $\mathbf{A}$ 是对称矩阵，因此 $\mathbf{A}$ 有特征值分解

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^T \tag{1}$$

其中，Λ 为 inline 首先证明题目中优化问题的解为

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \max(\Lambda_r, 0) & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{U}^T \tag{2}$$

由于

$$\|\mathbf{X}-\mathbf{A}\|_F^2 = \|\mathbf{X}\|_F^2 + \|\mathbf{A}\|_F^2 - 2\langle\mathbf{X}, \mathbf{A}\rangle \tag{3}$$

由 von Neumann 迹定理，有 $\langle\mathbf{X}, \mathbf{A}\rangle < \sum_{i=1}^{N}\alpha_i\beta_i$，其中，$\alpha_i, \beta_i$ 是 $\mathbf{X}, \mathbf{A}$ 的奇异值的顺序和，又由于 $\mathbf{X}$ 是半正定矩阵，因此存在特征值分解

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\Psi\mathbf{V}^T \tag{4}$$

其中 Ψ 是特征值顺序排列组成的对角矩阵，所以要使得原始优化问题取得最小值，必须有 $\mathbf{U} = \mathbf{V}$，否则，无法保证 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{A}$ 有相同的奇异值顺序。上述论断其实有一个问题，即 $\mathbf{A}$ 由于不是半正定矩阵，因此其特征值的顺序与奇异值的顺序并不相同，但实际上这一问题不会影响证明的结果，由于我们后面的证明过程中会使得对应于 $\mathbf{A}$ 的负特征值的 $\mathbf{X}$ 的特征值为 0，因此这一问题不存在。下面考虑 Ψ 的取值，当 $\mathbf{A}$ 有 r 个非负特征值时，显然只需要使得 Ψ 取 $\mathbf{A}$ 的前 r 个特征值即可；若 $\mathbf{A}$ 在前 r 个特征值会出现负特征值，此时，显然当 $\mathbf{X}$ 的对应特征值取为 0 时才能保证优化问题取得最小值，上述证明过程中两步取最值得条件同时满足的情况即为 2式。同时，由于对于 2式而言，其等价于

$$\mathbf{X} = \mathbf{U_r}\Lambda_r\mathbf{U_r}^T \tag{5}$$

□

习题 (77). 这一问题，我尝试了四种不同的距离取法，发现 *Euclidean* 距离区分效果不显著，*Angular* 距离和 *Cosine* 距离计算时间过长，*lp* 距离有比较好的区分度并且计算复杂度较低，绘图如下：

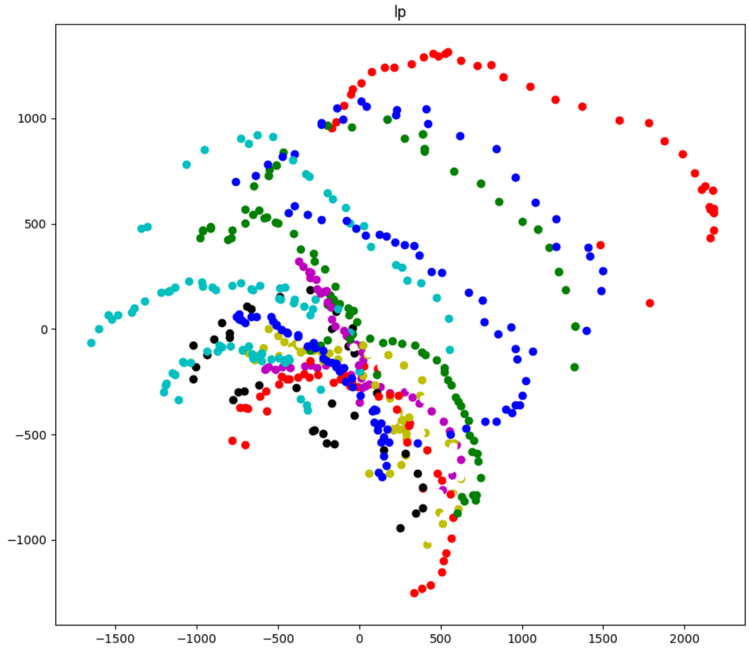

图 1: k=2 时 CMDS 散点图

习题 (93). 这一道题的阈值对识别率有很大的影响，且由于随机投影矩阵的随机性，识别的准确率有很大的方差，我进行了多次的实验，在我设定的阈值情况下，平均准确率大约为 *80%*，每次实验的准确率情况可以运行代码。