

# Manifole Learning Homework 4

安捷 1601210097

2017 年 3 月 24 日

习题 (50). 证明. 已知目标函数为

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \pi_i p_{ij} \left( \frac{g_i}{\sqrt{\pi_i}} - \frac{g_j}{\sqrt{\pi_j}} \right)^2, \quad s.t. \quad \|\mathbf{g}\| = 1 \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \pi_i p_{ij} \frac{g_i^2}{\pi_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \pi_i p_{ij} \frac{g_j^2}{\pi_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \pi_i p_{ij} \frac{g_i g_j}{\sqrt{\pi_i} \sqrt{\pi_j}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \pi_i p_{ij} \frac{g_j g_i}{\sqrt{\pi_j} \sqrt{\pi_i}} \quad (2)$$

由于

$$\sum_{j=1}^k p_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^k \pi_i p_{ij} = \pi_j \quad (3)$$

所以有

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \pi_i p_{ij} \frac{g_i^2}{\pi_i} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \pi_i p_{ij} \frac{g_j^2}{\pi_j} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k g_i^2 = \mathbf{g}^T \mathbf{I} \mathbf{g} \quad (4)$$

而剩余两项可以写为

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \pi_i p_{ij} \frac{g_i g_j}{\sqrt{\pi_i} \sqrt{\pi_j}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \pi_i p_{ij} \frac{g_j g_i}{\sqrt{\pi_j} \sqrt{\pi_i}} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \sqrt{\pi_i} p_{ij} \frac{g_i g_j}{\sqrt{\pi_j}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \sqrt{\pi_j} p_{ji} \frac{g_i g_j}{\sqrt{\pi_i}} \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{g}^T \left( \Pi^{\frac{1}{2}} \mathbf{P} \Pi^{-\frac{1}{2}} + \Pi^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}^T \Pi^{\frac{1}{2}} \right) \mathbf{g} = \Theta \quad (7)$$

其中

$$\Pi = \text{diag}(\pi) \quad (8)$$

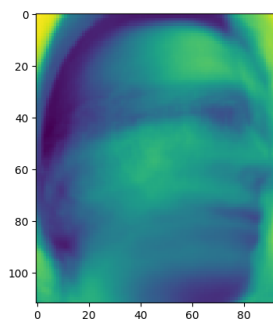
所以原式可以写成矩阵形式

$$\mathbf{g}^T (\mathbf{I} - \Theta) \mathbf{g}, \quad s.t. \quad \|\mathbf{g}\| = 1 \quad (9)$$

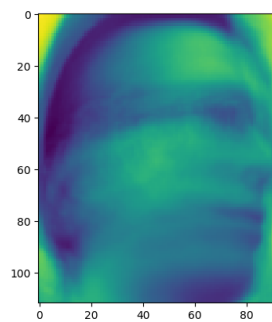
□

**习题 (51).** 在这个问题中我选择了 *UMIST* 数据集中的前两个人脸数据, 分类准确率  $=0.5479$ , 我认为具有较低准确率的原因在于, 欧式距离不能很好的度量两个人脸的相似性, 因为不同视角的人脸的欧式距离很大, 因此, 使用更为合适的距离度量或许可以显著提高分类的准确率。

**习题 (57).** PCA 与标准化 PCA 求得的平均脸如下图所示:



(a) PCA mean face



(b) scaled PCA mean face

图 1: mean face result