Manifold Learning Homework 2

安捷 1601210097

2017-03-01

习题 (24). *Proof 1.*

$$\|\cdot\|_p^* = \|\cdot\|_q$$

由于 Holder inequality

Theorem. 对于任意的 $p > 1, q > 1$，如果满足

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

那么有如下关系成立

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

由于 $\|\mathbf{y}\|_p \leq 1$，因此有 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq \|\mathbf{x}_q\|$，因此有 $\|\mathbf{x}\|_p^* = \|\mathbf{x}\|_q$ □

Proof 2.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathrm{tr}\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{y}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{y} \mathbf{B}\right)$$

其中，有

$$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{y} \mathbf{B} = \mathbf{V}$$

$\mathbf{V}$ 为对角矩阵且对角线元素为矩阵 $\mathbf{y}$ 的特征值

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{y} \mathbf{B}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{V}\right)$$

又有

$$\|\mathbf{y}\|_2 \leq 1$$

所以 V 的元素的绝对值都小于等于 1，因此有

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{V}\right) \leq \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} |\lambda_{\mathrm{i}}| = \|\mathbf{x}\|_*$$

□

Proof 3. 由 $p=2,q=2$ 时的 Holder inequality，即 Cauthy inequality

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \sum_{ij}\mathbf{x}_{ij}\mathbf{y}ij \leq \left(\sum_{ij}|\mathbf{x}_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{ij}|\mathbf{y}_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\mathbf{x}\|_F$$

所以有

$$\|\mathbf{x}\|_F^* = \|\mathbf{x}\|_F$$

□

习题 (28)**.** *Proof (2.20).*

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{XY}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{X}\left(\mathbf{t}\right)\mathbf{Y}\left(\mathbf{t}\right)}{\partial t}\\ &= \frac{\partial\left(\mathbf{X}\left(\mathbf{t}\right)\mathbf{Y}\left(\mathbf{t}\right)\right)_{ij}}{\partial t}\end{aligned}$$

其中 $\partial\left(\mathbf{X}\left(\mathbf{t}\right)\mathbf{Y}\left(\mathbf{t}\right)\right)_{ij}$ 表示两矩阵乘积的第 i,j 个元素，下面考虑 $\partial\left(\mathbf{X}\left(\mathbf{t}\right)\mathbf{Y}\left(\mathbf{t}\right)\right)_{ij}$ 关于 t 的偏导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{X}\left(\mathbf{t}\right)\mathbf{Y}\left(\mathbf{t}\right)_{ij}}{\partial t} &= \frac{\partial\sum_{k=1}^{n}\mathbf{X}_{ik}\left(t\right)\mathbf{Y}_{kj}\left(t\right)}{\partial t}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\left(\mathbf{X}_{ik}\left(t\right)\mathbf{Y}_{kj}\left(t\right)\right)}{\partial t}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathbf{X}_{ik}\left(t\right)}{\partial t}\mathbf{Y}_{kj}\left(t\right) + \frac{\partial\mathbf{Y}_{kj}\left(t\right)}{\partial t}\mathbf{X}_{ik}\left(t\right)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathbf{X}_{ik}\left(t\right)}{\partial t}\mathbf{Y}_{kj}\left(t\right)\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathbf{Y}_{kj}\left(t\right)}{\partial t}\mathbf{X}_{ik}\left(t\right)\right)\\ &= \left(\frac{\mathbf{X}\left(t\right)}{\left(t\right)}\mathbf{Y}\left(t\right)\right)_{ij} + \left(\frac{\partial\mathbf{Y}\left(t\right)}{\partial t}\mathbf{X}\left(t\right)\right)_{ij}\\ &\left(\frac{\mathbf{X}\left(t\right)}{\partial t}\mathbf{Y}\left(t\right) + \frac{\partial\mathbf{Y}\left(t\right)}{\partial t}\mathbf{X}\left(t\right)\right)_{ij}\end{aligned}$$

所以有

$$\frac{\partial\mathbf{XY}}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial t}\mathbf{Y} + \frac{\partial\mathbf{Y}}{\partial t}\mathbf{X}$$

□

Proof (2.25).

$$\frac{\partial\left(\mathbf{a}^T\mathbf{x}\right)}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{a}$$

$$\frac{\partial\left(\mathbf{a}^T\mathbf{x}\right)}{\partial\mathbf{x}_i} = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}_i\mathbf{x}_i\right)}{\partial\mathbf{x}_i} = \mathbf{a}_i$$

所以有

$$\frac{\partial\left(\mathbf{a}^T\mathbf{x}\right)}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{a}$$

□

Proof (2.26).

$$\frac{\partial\left(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\right)}{\partial\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)\mathbf{x}$$

考虑导数的第 k 个元素，有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\right)}{\partial\mathbf{x}_k} &= \frac{\partial\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}_k\mathbf{A}_{kj}\right)\mathbf{x}_j\right)}{\partial\mathbf{x}_i} \\
&= \frac{\partial\left(\sum_{k\neq i}\mathbf{x}_k\mathbf{A}_{ki}\mathbf{x}_i+\sum_{j\neq i}\mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_j\mathbf{x}_i+\mathbf{A}_{ii}\mathbf{x}_i^2\right)}{\partial\mathbf{x}_i} \\
&= \sum_{k\neq i}\mathbf{A}_{ki}\mathbf{x}_k+\sum_{j\neq i}\mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_j+2\mathbf{A}_{ii}\mathbf{x}_i \\
&= \sum_{t=1}^{n}\mathbf{A}_{ti}\mathbf{x}_t+\sum_{t=1}^{n}\mathbf{A}_{it}\mathbf{x}_t \\
&= \left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)_i\mathbf{x}
\end{aligned}$$

所以有

$$\frac{\partial\left(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\right)}{\partial\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)\mathbf{x}$$

□

Proof $\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\mathbf{X}}$.

$$\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\mathbf{X}}$$

首先看

$$\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\mathbf{X}_{ij}}$$

有

$$\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\mathbf{X}_{ij}} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T$$

其中为只有第 i 行为 1，其余行皆为 0 的向量，则有

$$\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\mathbf{X}} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\\ \vdots\\ \mathbf{e}_n\end{pmatrix}\left(\mathbf{e}_1^T,\mathbf{e}_2^T,\mathbf{e}_3^T,\ldots,\mathbf{e}_n^T\right)$$

□

习题 (29)**.**

$$\langle \mathcal{A}^* (\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathcal{A}(y) \rangle$$

所以有

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}^* (x), \mathbf{Y} \rangle &= (Y_{11} + Y_{12} - Y_{31} + 2Y_{33})\, x \\ &= \langle \begin{pmatrix} x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 2x \end{pmatrix}, \mathbf{Y} \rangle\end{aligned}$$

因此

$$\mathcal{A}^* (x) = \begin{pmatrix} x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 2x \end{pmatrix}$$

习题 (33)**.** *Proof.* □