Manifole Learning Homework 4

安捷 1601210097

2017 年 3 月 17 日

习题 (50). 证明. 已知目标函数为

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\pi_i p_{ij}\left(\frac{g_i}{\sqrt{\pi_i}}-\frac{g_j}{\sqrt{\pi_j}}\right)^2,\quad s.t.\quad \|\mathbf{g}\|=1 \tag{1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\pi_i p_{ij}\frac{g_i^2}{\pi_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\pi_i p_{ij}\frac{g_j^2}{\pi_j}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\pi_i p_{ij}\frac{g_i g_j}{\sqrt{\pi_i}\sqrt{\pi_j}}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\pi_i p_{ij}\frac{g_j g_i}{\sqrt{\pi_j}\sqrt{\pi_i}} \tag{2}$$

由于

$$\sum_{j=1}^{k}p_{ij}=1,\qquad \sum_{i=1}^{k}\pi_i p_{ij}=\pi_j \tag{3}$$

所以有

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\pi_i p_{ij}\frac{g_i^2}{\pi_i}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\pi_i p_{ij}\frac{g_j^2}{\pi_j}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}g_i^2=\mathbf{g}^T\mathbf{I}\mathbf{g} \tag{4}$$

而剩余两项可以写为

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\pi_i p_{ij}\frac{g_i g_j}{\sqrt{\pi_i}\sqrt{\pi_j}}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\pi_i p_{ij}\frac{g_j g_i}{\sqrt{\pi_j}\sqrt{\pi_i}} \tag{5}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\sqrt{\pi_i}p_{ij}\frac{g_i g_j}{\sqrt{\pi_j}}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\sqrt{\pi_j}p_{ji}\frac{g_i g_j}{\sqrt{\pi_i}} \tag{6}$$

$$=\frac{1}{2}\mathbf{g}^T\left(\Pi^{\frac{1}{2}}\mathbf{P}\Pi^{-\frac{1}{2}}+\Pi^{-\frac{1}{2}}\mathbf{P}^T\Pi^{\frac{1}{2}}\right)\mathbf{g}=\Theta \tag{7}$$

其中

$$\Pi=\mathrm{diag}\left(\pi\right) \tag{8}$$

所以原式可以写成矩阵形式

$$\mathbf{g}^T\left(\mathbf{I}-\Theta\right)\mathbf{g}.\quad s.t.\quad \|\mathbf{g}\|=1 \tag{9}$$

□