Manifold Learning Homework 1

安捷 1601210097

2017-02-25

习题 (1).

$$\mathrm{tr}\,(\mathrm{A}) = 15$$

习题 (2).

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0.9487 & -0.1778 & 0.2615 \\ 0 & 0.8269 & 0.5623 \\ -0.3126 & -0.5335 & 0.7845 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6993 & 0 \\ 0 & 0 & 14.3007 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9487 & 0 & -0.3126 \\ -0.1778 & 0.8269 & -0.5335 \\ 0.2615 & 0.5623 & 0.7845 \end{pmatrix}$$

习题 (3).

$$\mathrm{A}_{\mathrm{Full-SVD}} = \begin{pmatrix} -0.1409 & 0.8247 & 0.5477 & -0.0037 \\ -0.3439 & 0.4263 & -0.1880 & 0.4131 \\ -0.5470 & 0.0278 & -0.1880 & -0.8153 \\ -0.7501 & -0.3706 & 0.3679 & 0.4058 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25.4624 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2907 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5045 & -0.7608 & -0.4092 \\ -0.5745 & -0.0571 & 0.8165 \\ -0.6445 & 0.6465 & -0.4082 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}_{\mathrm{Thin-SVD}} = \begin{pmatrix} -0.1409 & 0.8247 & 0.5477 \\ -0.3439 & 0.4263 & -0.7276 \\ -0.5470 & 0.0278 & -0.1880 \\ -0.7501 & -0.3706 & 0.3679 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25.4624 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2907 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5045 & -0.7608 & -0.4092 \\ -0.5745 & -0.0571 & 0.8165 \\ -0.6445 & 0.6465 & -0.4082 \end{pmatrix}$$

习题 (4).

$$\mathrm{P_x} = \begin{pmatrix} 0.4794 & -0.1850 & -0.2398 & 0.3973 \\ -0.1850 & 0.9343 & -0.0852 & 0.1412 \\ -0.2398 & -0.0852 & 0.8896 & 0.1830 \\ 0.3973 & 0.1412 & 0.1830 & 0.6968 \end{pmatrix}$$

习题 (5). **Proof**:
首先，考虑矩阵AXB的第k列：

$$\begin{aligned} (\mathrm{AXB})_k &= \mathrm{AXB_k} \\ &= \mathrm{A}\,(\mathrm{x_1}, \mathrm{x_2}, \mathrm{x_3}, \ldots, \mathrm{x_p}) \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ . \\ . \\ . \\ b_{pk} \end{pmatrix} \\ &= (b_{1k}\mathrm{A}, \mathrm{b_{2k}A}, \mathrm{b_{3k}A}, \ldots, \mathrm{b_{pk}A}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= (b_{1k}, b_{2k}, b_{3k}, \ldots, b_{pk})\, \mathrm{A}\, \mathrm{Vec}\,(\mathrm{X})$$
$$= \left(\mathrm{B}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{A}\right) \mathrm{Vec}\,(\mathrm{X})$$

而这一结果正好是最终Vec之后向量对应于开始选取k的行数，需要注意的是，这里的k并不直接对应与最后Vec中的行数，而是AXB经过Vec之后对应的某一个k行，当然，这样选取k最终可以选到Vec (AXB)的所有行

$$\therefore \mathrm{Vec}\,(\mathrm{AXB}) = \left(\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{A}\right) \mathrm{Vec}\,(\mathrm{X})$$

习题 (8)**. Proof**:
两边同乘$\left(\mathrm{A} + \mathrm{UCV}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$，有：

$$\begin{aligned}\mathrm{I} = \mathrm{I} &- \mathrm{U}\left(\mathrm{C}^{-1} + \mathrm{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{U}\right)^{-1}\mathrm{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}\\ &+ \mathrm{UCV}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1} - \mathrm{UCV}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{U}\left(\mathrm{C}^{-1} + \mathrm{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{U}\right)\mathrm{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}\end{aligned}$$

故只需有

$$-\mathrm{U}\left(\mathrm{C}^{-1} + \mathrm{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{U}\right)^{-1} + \mathrm{UC} - \mathrm{UCV}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{U}\left(\mathrm{C}^{-1} + \mathrm{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{U}\right)^{-1} = 0$$

即

$$\mathrm{C} - \left(\mathrm{C}{-}1 + \mathrm{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{U}\right)^{-1} - \mathrm{CV}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{U}\left(\mathrm{C}^{-1} + \mathrm{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{U}\right)^{-1} = 0$$
$$\mathrm{C} - \left(\mathrm{I} + \mathrm{CV}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{U}\right)\left(\mathrm{C}{-}1 + \mathrm{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{U}\right)^{-1} = 0$$

而

$$\mathrm{I} + \mathrm{CV}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{U} = \mathrm{C}\left(\mathrm{C}^{-1} + \mathrm{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{U}\right)$$

故原式得证

习题 (21)**. 1-norm** $= 30$

2-norm $= 25.4624$

∞-norm $= 33$

F-norm $= 25.4951$

Nuclear-norm $= 26.7531$

(2,1)-norm $= 43.0445$