

Búsqueda Binaria

Quimey Vivas
Leopoldo Taravilse

Avature Argentina

Training Camp 2018

1 Búsqueda Binaria discreta

- Búsqueda binaria en un arreglo
- Más allá de los arreglos

2 Búsqueda binaria continua

- Búsqueda binaria para el cálculo de funciones inversas
- Búsqueda binaria con funciones de imagen booleana
- Algunos comentarios

Contenidos

1 Búsqueda Binaria discreta

- Búsqueda binaria en un arreglo
- Más allá de los arreglos

2 Búsqueda binaria continua

- Búsqueda binaria para el cálculo de funciones inversas
- Búsqueda binaria con funciones de imagen booleana
- Algunos comentarios

Buscando en listas ordenadas

- Uno de los problemas más comunes que existen es el de querer buscar si un número aparece o no en una lista ordenada.

Buscando en listas ordenadas

- Uno de los problemas más comunes que existen es el de querer buscar si un número aparece o no en una lista ordenada.
- Es trivial ver que se puede resolver el problema en $O(n)$ donde n es la cantidad de elementos de la lista, simplemente buscando uno por uno en orden.

Buscando en listas ordenadas

- Uno de los problemas más comunes que existen es el de querer buscar si un número aparece o no en una lista ordenada.
- Es trivial ver que se puede resolver el problema en $O(n)$ donde n es la cantidad de elementos de la lista, simplemente buscando uno por uno en orden.
- Hay una forma de aprovechar el hecho de que el arreglo está ordenado. Esta forma de buscar eficientemente se conoce como búsqueda binaria.

Ejemplo de Búsqueda Binaria

Supongamos que queremos buscar si el número 22 está en el siguiente arreglo:

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

Ejemplo de Búsqueda Binaria

Supongamos que queremos buscar si el número 22 está en el siguiente arreglo:

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

Podemos preguntarnos ¿Es el primer elemento del arreglo el 22? No, ¿Es el segundo elemento del arreglo el 22? Tampoco... y así hasta que nos preguntamos ¿Es el décimo elemento del arreglo el 22? Sí!

Ejemplo de Búsqueda Binaria

Con búsqueda binaria podemos buscar así

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128 .

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

Ejemplo de Búsqueda Binaria

Con búsqueda binaria podemos buscar así

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128 .

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

Ejemplo de Búsqueda Binaria

Con búsqueda binaria podemos buscar así

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128 .

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

Ejemplo de Búsqueda Binaria

Con búsqueda binaria podemos buscar así

1	2	4	6	8	14	15	16	21	22	31	35	44	45	56	87	89	95	99	100	103	112	128	.
1	2	4	6	8	14	15	16	21	22	31	35	44	45	56	87	89	95	99	100	103	112	128	
1	2	4	6	8	14	15	16	21	22	31	35	44	45	56	87	89	95	99	100	103	112	128	
1	2	4	6	8	14	15	16	21	22	31	35	44	45	56	87	89	95	99	100	103	112	128	

Ejemplo de Búsqueda Binaria

Con búsqueda binaria podemos buscar así

```
1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128 .  
1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128  
1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128  
1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128
```

Notemos que en 4 pasos pudimos encontrar el 22 cuando antes nos llevaba 10 pasos.

Código de la búsqueda binaria

```
1 # A es el arreglo ordenado, v es el valor a buscar
2 # Si v esta en A entonces esta en el intervalo [L, R) de A
3 def busqueda_binaria(A, v):
4     L = 0
5     R = len(A)
6     while R - L > 1:
7         M = (L + R) / 2
8         if v < M:
9             R = M
10        else:
11            L = M
12    if A[L] == v:
13        return L
14    return None # Not found
```

¿Funciona? ¿Encuentra la primera aparición de v ? ¿La última? ¿Una cualquiera?

Ejemplo de Búsqueda Binaria

Buscar un número que no está es mucho más costoso con búsqueda lineal, sin embargo con búsqueda binaria es igual de rápido que buscar un número que si está. Busquemos por ejemplo el 23.

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128 .

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

Ejemplo de Búsqueda Binaria

Buscar un número que no está es mucho más costoso con búsqueda lineal, sin embargo con búsqueda binaria es igual de rápido que buscar un número que si está. Busquemos por ejemplo el 23.

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128 .

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

Ejemplo de Búsqueda Binaria

Buscar un número que no está es mucho más costoso con búsqueda lineal, sin embargo con búsqueda binaria es igual de rápido que buscar un número que si está. Busquemos por ejemplo el 23.

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128 .

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

Ejemplo de Búsqueda Binaria

Buscar un número que no está es mucho más costoso con búsqueda lineal, sin embargo con búsqueda binaria es igual de rápido que buscar un número que si está. Busquemos por ejemplo el 23.

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128 .

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

Ejemplo de Búsqueda Binaria

Buscar un número que no está es mucho más costoso con búsqueda lineal, sin embargo con búsqueda binaria es igual de rápido que buscar un número que si está. Busquemos por ejemplo el 23.

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128 .

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

Ejemplo de Búsqueda Binaria

Buscar un número que no está es mucho más costoso con búsqueda lineal, sin embargo con búsqueda binaria es igual de rápido que buscar un número que si está. Busquemos por ejemplo el 23.

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128 .

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

1 2 4 6 8 14 15 16 21 22 31 35 44 45 56 87 89 95 99 100 103 112 128

Complejidad de la búsqueda binaria

La complejidad de la búsqueda binaria es $O(\log n)$ donde n es el tamaño del arreglo. Esto es fácil de probar ya que en cada paso se reduce el espacio de búsqueda a la mitad.

Contenidos

1 Búsqueda Binaria discreta

- Búsqueda binaria en un arreglo
- Más allá de los arreglos

2 Búsqueda binaria continua

- Búsqueda binaria para el cálculo de funciones inversas
- Búsqueda binaria con funciones de imagen booleana
- Algunos comentarios

Funciones monótonas

Cuando tenemos una función f que cumple

$$x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

decimos que f es monótona creciente. Si en cambio f cumple

$$x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

decimos que f es monótona decreciente. Si f es monótona creciente o monótona decreciente decimos que f es monótona.

Cuando una función es monótona creciente (decreciente) podemos aplicar búsqueda binaria para buscar el menor valor de x tal que $f(x) \geq y$ ($f(x) \leq y$) para un y dado.

Ejemplo de búsqueda binaria con funciones monótonas

Pedro estudia Ciencias de la Computación y le quedan por cursar n materias. Él sabe que si hace una sola materia le va a costar 1 unidad de esfuerzo aprobarla, pero si hace una segunda materia le cuesta 2 unidades de esfuerzo para aprobar la segunda materia, y en general, si hace i materias le cuesta i unidades de esfuerzo aprobar la i -ésima materia.

El sabe que hacer un esfuerzo de t unidades o más lo va a estresar y por lo tanto va a dejar la carrera. Cuántos cuatrimestres necesita para recibirse?

Ejemplo de búsqueda binaria con funciones monótonas

- Lo primero que tenemos que hacer es calcular cuántas materias puede hacer por cuatrimestre. Luego es una división.

Ejemplo de búsqueda binaria con funciones monótonas

- Lo primero que tenemos que hacer es calcular cuántas materias puede hacer por cuatrimestre. Luego es una división.
- Para calcular cuántas materias puede hacer por cuatrimestre, sabemos que ese número x cumple con $\frac{x(x+1)}{2} < t$. Luego hacemos búsqueda binaria para encontrar ese máximo valor posible de x .

Contenidos

1 Búsqueda Binaria discreta

- Búsqueda binaria en un arreglo
- Más allá de los arreglos

2 Búsqueda binaria continua

- Búsqueda binaria para el cálculo de funciones inversas
- Búsqueda binaria con funciones de imagen booleana
- Algunos comentarios

Búsqueda binaria continua

- Así como usamos búsqueda binaria cuando tenemos un dominio discreto, también podemos usar búsqueda binaria cuando el dominio es continuo.

Búsqueda binaria continua

- Así como usamos búsqueda binaria cuando tenemos un dominio discreto, también podemos usar búsqueda binaria cuando el dominio es continuo.
- Por ejemplo, tenemos una función f monótona creciente y continua y queremos hallar el mínimo x tal que $f(x) \geq y$.

Búsqueda binaria continua

- Así como usamos búsqueda binaria cuando tenemos un dominio discreto, también podemos usar búsqueda binaria cuando el dominio es continuo.
- Por ejemplo, tenemos una función f monótona creciente y continua y queremos hallar el mínimo x tal que $f(x) \geq y$.
- Como f es continua, si el mínimo x_0 existe tenemos que $f(x) = y$, es decir $x_0 = f^{-1}(y)$.

Ejemplo de búsqueda binaria para encontrar el inverso de una función

- Dado un número x , calcular la raíz cuadrada de x

Ejemplo de búsqueda binaria para encontrar el inverso de una función

- Dado un número x , calcular la raíz cuadrada de x
- ¿Cuál sería el criterio de terminación? ¿Cuántas iteraciones necesitamos?

Ejemplo de búsqueda binaria para encontrar el inverso de una función

- Dado un número x , calcular la raíz cuadrada de x
- ¿Cuál sería el criterio de terminación? ¿Cuántas iteraciones necesitamos?
- A diferencia del caso de la búsqueda binaria discreta, cuando el dominio de la búsqueda binaria es continuo tenemos que poner un punto de corte arbitrario para la búsqueda binaria.

Ejemplo de búsqueda binaria para encontrar el inverso de una función

- Dado un número x , calcular la raíz cuadrada de x
- ¿Cuál sería el criterio de terminación? ¿Cuántas iteraciones necesitamos?
- A diferencia del caso de la búsqueda binaria discreta, cuando el dominio de la búsqueda binaria es continuo tenemos que poner un punto de corte arbitrario para la búsqueda binaria.
- Podríamos cortar por ejemplo cuándo $R - L < 10^{-9}$ que nos da una precisión aceptable.

Ejemplo de búsqueda binaria para encontrar el inverso de una función

- Dado un número x , calcular la raíz cuadrada de x
- ¿Cuál sería el criterio de terminación? ¿Cuántas iteraciones necesitamos?
- A diferencia del caso de la búsqueda binaria discreta, cuando el dominio de la búsqueda binaria es continuo tenemos que poner un punto de corte arbitrario para la búsqueda binaria.
- Podríamos cortar por ejemplo cuándo $R - L < 10^{-9}$ que nos da una precisión aceptable.
- Cuando el ciclo termina, tanto L como R contienen la respuesta con un error de a lo sumo 10^{-9} .

Ejemplo de búsqueda binaria para encontrar el inverso de una función

- Dado un número x , calcular la raíz cuadrada de x
- ¿Cuál sería el criterio de terminación? ¿Cuántas iteraciones necesitamos?
- A diferencia del caso de la búsqueda binaria discreta, cuando el dominio de la búsqueda binaria es continuo tenemos que poner un punto de corte arbitrario para la búsqueda binaria.
- Podríamos cortar por ejemplo cuándo $R - L < 10^{-9}$ que nos da una precisión aceptable.
- Cuando el ciclo termina, tanto L como R contienen la respuesta con un error de a lo sumo 10^{-9} .
- Método de Newton

Contenidos

1 Búsqueda Binaria discreta

- Búsqueda binaria en un arreglo
- Más allá de los arreglos

2 Búsqueda binaria continua

- Búsqueda binaria para el cálculo de funciones inversas
- Búsqueda binaria con funciones de imagen booleana
- Algunos comentarios

Búsqueda binaria con predicados booleanos

- Ya vimos como hace búsqueda binaria sobre funciones que tienen una imagen numérica y que son monotonas.

Búsqueda binaria con predicados booleanos

- Ya vimos como hace búsqueda binaria sobre funciones que tienen una imagen numérica y que son monotonas.
- Cuando la imagen de la función es booleana, por ejemplo, dado un predicado booleano P , encontrar el mínimo x tal que $P(x)$ es verdadero, también podemos definir monotonía y aplicar búsqueda binaria.

Búsqueda binaria con predicados booleanos

- Ya vimos como hace búsqueda binaria sobre funciones que tienen una imagen numérica y que son monotonas.
- Cuando la imagen de la función es booleana, por ejemplo, dado un predicado booleano P , encontrar el mínimo x tal que $P(x)$ es verdadero, también podemos definir monotonía y aplicar búsqueda binaria.
- Cuando un predicado es falso para todos los $x < x_0$ y verdadero para los $x \geq x_0$ decimos que el predicado monótono. Esto equivale con asignarle 0 a falso y 1 a verdadero, en este caso el predicado es monótono creciente.

Ejemplo de búsqueda binaria con predicados booleanos

Problema

Fito tiene que cruzar un cuarto lleno de dinosaurios desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha. Son dadas las posiciones de los dinosaurios y las dimensiones del cuarto. Se sabe que si pasa a distancia menor a T de un dinosaurio, este lo ve y se lo come.Cuál es el mínimo T tal que Fito puede lograr su objetivo?

Contenidos

1 Búsqueda Binaria discreta

- Búsqueda binaria en un arreglo
- Más allá de los arreglos

2 Búsqueda binaria continua

- Búsqueda binaria para el cálculo de funciones inversas
- Búsqueda binaria con funciones de imagen booleana
- Algunos comentarios

- El caso no monótono:
- Búsqueda ternaria: