



TRABAJO FIN DE GRADO

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

CURVAS ELÍPTICAS EN CRIPTOGRAFÍA

Autor

Adrián Homero Ranea Robles

Tutor

Pascual Jara

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Granada, Julio de 2016

CURVAS ELÍPTICAS EN CRIPTOGRAFÍA

Autor

Adrián Homero Ranea Robles

Tutor

Pascual Jara

RESUMEN

En este trabajo se estudia la criptografía asimétrica basada en curvas elípticas, sus protocolos criptográficos y se explica el programa informático desarrollado para trabajar con curvas elípticas y esquemas criptográficos.

Primero se estudian las curvas elípticas sobre un cuerpo arbitrario y se particulariza a cuerpos finitos. Posteriormente, se introduce la criptografía de llave pública con curvas elípticas y se tratan cuestiones de seguridad y de implementación además de ejemplos de esquemas criptográficos. Finalmente, se explica el proceso de diseño, implementación, testeo y documentación del programa informático desarrollado.

Palabras clave: teoría de curvas elípticas, criptografía asimétrica, criptografía con curvas elípticas, cuerpos finitos, protocolos criptográficos.

ABSTRACT

In this project, it is studied elliptic curve theory, its application in cryptography and elliptic curve cryptographic protocols. It is also explained the computer program we have developed in this field.

Every main topic is going to be explained briefly starting with elliptic curve theory.

ELLIPTIC CURVE THEORY

First, an elliptic curve is defined and some concepts related to such as rational points, discriminant, point at infinity or base field. Some examples of elliptic curves over the field of real numbers and their graphs are given.

Then, the general Weierstrass equation shown in the elliptic curve definition is simplified by changes of variable depends on the base field characteristic. If the characteristic is different from two or three, the general equation can be replaced with the short Weierstrass equation. The simplified equation for elliptic curves with base field of characteristic two is given as well.

After that, the chord-and-tangent method is explained. This is a geometric method, given two points on an elliptic curve, to produce a third point on the curve. The basic idea of this method is drawing the line between the two points, taking the point on the elliptic curve which intersect this line and reflecting this last point over the x-axis. If the two points given are the same, the method changes slightly.

An addition law for the set of points of an elliptic curve with explicit algebraic formulas are given by inspiring in the chord-and-tangent method. Only the formulas for the elliptic curves defined over a field with characteristic different from two or three are given. Later, we will show the formulas for elliptic curve defined over the finite field with characteristic two.

After proving these formulas define a valid binary operation, we prove the first theorem. This result affirms that the set of points of an elliptic curve with this composition law forms an abelian group. The fact that the set of rational points with this law is a group, is a first step to apply elliptic curves in cryptography.

The next step is the double-and-add method. This algorithm allows to compute the addition of a point to itself much more efficient than the naïve method in some base fields such as the finite fields.

Then, projective space is introduced as a quotient space. It is considered the equivalence classes, called projective points, and it is de-

defined some concepts such as line at infinity, points at infinity projective form of a Weierstrass equation and projective coordinates.

After this, endomorphisms of elliptic curves are studied. The concept of endomorphism is defined and a simplified representation with rational functions is given for endomorphisms of an elliptic curve defined over a base field whose characteristic is different from two or three. Then, some key concepts such as the degree or the separability of an endomorphism are defined. After these definitions, some results about endomorphisms are proved: a characterization of separability, some relations between the degree and the kernel of an endomorphism, the surjectivity of endomorphisms, the separability of the multiplication endomorphism and a technical result about the sum of endomorphisms.

Torsion points and torsion subgroups are the next step to be studied. The previous results are used in order to prove a crucial theorem about the structure of torsion subgroups. In this proof, the multiplication endomorphism and the structure theorem for finite abelian groups play important roles.

It is possible to associate an endomorphism of an elliptic curve to a matrix with integers entries thanks to this theorem. The target is computing the degree of an endomorphism by using the determinant of the associate matrix. This simplification allows to compute the degree of a linear combination of endomorphisms which will be necessary to prove Hasse's theorem.

In order to prove the previous simplification, it is necessary the Weil pairing. This pairing between the product of torsion subgroups and the group of n th roots of unity has many useful properties. By using these properties, it is computed the degree of a linear combination of endomorphisms.

We move forward and we consider elliptic curves over finite fields. These curves are the ones which are used in public-key cryptography.

We start with a special case of the previous general theorem about the subgroup structure, but in this case it is applied to elliptic curves over finite fields.

Algebraic formulas for the addition law are given for elliptic curves over finite fields with characteristic two. The concept of supersingularity arises in this kind of elliptic curves.

Then, a well-known example of endomorphism of elliptic curves over finite field is shown, the Frobenius endomorphism. Some properties about the Frobenius endomorphism are proved. These results are about its separability, its degree or the relation between the group of rational points and the kernel of a Frobenius endomorphism variant.

By using almost all the results proved since the beginning, Hasse's theorem is proved. The most crucial results used in the proof are the identification between the group of rational points and the kernel of

a Frobenius endomorphism variant, the separability of this endomorphism, the relation between the kernel and the degree of an endomorphism, and last but not least the Weil pairing which simplified the degree computation of a linear endomorphism combination.

Elliptic curve theory is left and we continue with its application in cryptography.

ELLIPTIC CURVE CRYPTOGRAPHY

To begin with, we discuss the intractable problems which some public-key schemes are based on. These are the integer factorization problem and the discrete logarithm problem. System examples based on each problem are RSA and elliptic curve systems.

An estimation of the key sizes for RSA and elliptic curve systems is shown for different security levels. This estimation demonstrates that elliptic curve systems need smaller parameters rather than RSA for the same level of security. In fact, private-key operations for elliptic curve cryptography are more efficient than for RSA, although public-key operations for RSA are faster than for ECC. Anyway, elliptic curve cryptography can be very useful in environments with power consumption, storage, operations or processing power limited thanks to its smaller parameters.

Then, the elliptic curve discrete logarithm problem is defined. The security of elliptic curve public-key cryptosystems depends on the hardness of this problem. Therefore, the most important attacks on the discrete logarithm problem are considered such as Pollard's rho algorithm, Pohling-Hellman algorithm and isomorphism attacks. For each one of the attacks presented, conditions over the discrete logarithm problem are given in order to resist these attacks.

In order to describe elliptic curve cryptographic protocol later, some elements must be described before. One of them is the domain parameters. These parameters describe an elliptic curve, the finite field which the elliptic curve is defined over, a base point and the order of the point. The other one is the key pair. It is described the generation of the public and private key, which it is based on the elliptic curve discrete logarithm problem.

Some examples of elliptic curve cryptography protocol are given. The first one is a key-agreement protocol, the Elliptic Curve Diffie-Hellman. This procedure allows two participants to securely exchange a point on an elliptic curve, although none of them initially knows the point. The second protocol is a digital signature scheme, the Elliptic Curve Digital Signature Algorithm. This procedure allows a participant to sign a digital document and another participant to verify the signature is valid.

Later, the computer developed program is described. It has been written in python 3 and it hasn't used any external library in its logic,

although some external libraries have been used to generate the documentation and to test the software.

It is split in four main modules: elemental arithmetic, finite fields, elliptic curves and cryptographic schemes. The first module implements the integers modulo a prime and polynomials with integers coefficients. The second module implements the element of a finite field and the arithmetic operations in these fields. The third module implements the group of points of some kind of elliptic curves such as elliptic curve the field of rational numbers and elliptic curves over finite field of characteristic different from two and three and of characteristic two. The last module implements the Elliptic Curve Diffie-Hellman and Elliptic Curve Digital Signature Algorithm protocols. There is an additional module which contains a list of common parameters domain used in real-world applications.

A complete program documentation with many examples of usage has been attached. The documentation has been written in HTML with the help of the sphinx library to provide an user-friendly dynamic way to show all the functions, classes and modules and how they interact.

All the functionality has been tested, not only with unit tests but also with property-based tests. It is described the ideas behind property-based testing which is extremely powerful in application with many algebraic elements like ours. The library hypothesis has been used to write this kind of tests.

In the last chapter, conclusions are included about the project and it is discussed some ways of future development such as identity based cryptography, hyperelliptic curves or a more deep study about the attacks on the elliptic curve discrete logarithm problem.

Keywords: elliptic curve theory, public-key cryptography, elliptic curve cryptography, finite fields, cryptographic protocols.

Yo, **Adrián Homero Ranea Robles**, alumno de la titulación Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas de la **Facultad de Ciencias** y de la **Escuela Técnica Superior De Ingenierías Informática y de Telecomunicación** de la **Universidad de Granada**, con DNI XXXXXXXXX, autorizo la ubicación de la siguiente copia de mi Trabajo Fin de Grado en la biblioteca de ambos centros para que pueda ser consultada.

Granada, 10 de julio de 2016

Adrián H. Ranea Robles

D. **Pascual Jara**, Profesor del Departamento de Álgebra de la Universidad de Granada.

Informa:

Que el presente trabajo, titulado *Curvas elípticas en criptografía*, ha sido realizado bajo su supervisión por **Adrián Homero Ranea Robles**, y autorizo la defensa de dicho trabajo ante el tribunal que corresponda.

Y para que conste, expido y firmo el presente informe en Granada a 8 de julio de 2016.

Pascual Jara

AGRADECIMIENTOS

Quería agradecer en primer lugar a la Universidad de Granada y sus profesores, por darme la oportunidad de formarme. En especial, al tutor de este trabajo, Pascual Jara, por su ayuda constante a lo largo de este proyecto.

Finalmente, mi mayor agradecimiento a mi familia por no dejar de apoyarme nunca.

ÍNDICE GENERAL

1	INTRODUCCIÓN	1
1.1	Contextualización	1
1.2	Problema a abordar	1
1.3	Técnicas matemáticas e informáticas	2
1.4	Contenido de la memoria	2
1.5	Fuentes consultadas	4
2	OBJETIVOS DEL TRABAJO	5
3	DESARROLLO MATEMÁTICO	7
3.1	Teoría básica de curvas elípticas	7
3.2	Puntos de torsión	22
3.3	Curvas elípticas sobre cuerpos finitos	28
4	DESARROLLO INFORMÁTICO	35
4.1	Criptografía con curvas elípticas	35
4.2	Protocolos criptográficos	38
4.3	Criptografía con curvas elípticas con Python	41
5	CONCLUSIONES Y VÍAS FUTURAS	51
A	APÉNDICE	53
	BIBLIOGRAFÍA	55

INTRODUCCIÓN

1.1 CONTEXTUALIZACIÓN

Las curvas elípticas han sido estudiadas por los matemáticos desde la antigüedad y se han utilizado para resolver un abanico variado de problemas. Un ejemplo es el problema de los números congruentes que pregunta por la clasificación de los enteros positivos que aparecen como el área de un triángulo rectángulo cuyos lados sean números racionales. Otro ejemplo ha sido el Último Teorema de Fermat que afirma que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones no triviales para x, y y z cuando n es más grande que 2.

La aplicación de las curvas elípticas en la criptografía vino mucho después. En 1985, Neal Koblitz y Victor Miller propusieron independientemente utilizar las curvas elípticas para diseñar sistemas criptográficos de llave pública. Desde entonces, se ha publicado una gran cantidad de estudios sobre la seguridad y la eficiencia de las implementaciones de la criptografía con curvas elípticas. A finales de la década de los 90, los sistemas con curvas elípticas empezaron a recibir aceptación comercial cuando organizaciones de estándares acreditadas especificaron protocolos con curvas elípticas y compañías privadas incluyeron dichos protocolos en sus productos de seguridad.

Recientemente, se ha comenzado a investigar el uso de curvas hiperelípticas, una generalización de las curvas elípticas, para aplicarlas a sistemas criptográficos de llave pública. Sin embargo, estos sistemas son menos seguros o son menos eficientes que los sistemas que usan curvas elípticas.

Uno de los principales problemas al que se enfrenta la criptografía con curvas elípticas, y los principales criptosistemas de llave pública, son los ordenadores cuánticos. En 1994, Shor presentó un algoritmo para un ordenador cuántico capaz de calcular logaritmos discretos y factorizar enteros, principales problemas matemáticos en los que se basa la criptografía de llave pública, de forma eficiente. Sin embargo, hasta la fecha no se ha podido construir un ordenador cuántico con la capacidad suficiente para resolver instancias de estos problemas no triviales.

1.2 PROBLEMA A ABORDAR

El problema abordado ha sido la realización de un estudio teórico-práctico sobre las curvas elípticas en criptografía y la implementación de diversos protocolos criptográficos con curvas elípticas.

En el estudio teórico, se abarca la teoría de curvas elípticas desde un punto de vista formal y riguroso. En primer lugar, se tratan las curvas elípticas sobre un cuerpo arbitrario y posteriormente se particulariza a curvas elípticas sobre cuerpos finitos.

Nótese que un estudio exhaustivo sobre la teoría de curvas elípticas hubiera sido inviable debido a la enorme extensión que cubre este campo. Serge Lang, autor de esta materia, escribió en la introducción de uno de sus libros: «It is possible to write endlessly on elliptic curves». Por ello, hemos elegido la parte más representativa de esta materia en relación con su aplicación en la criptografía.

En el estudio práctico, se introduce la criptografía de llave pública con curvas elípticas y se hace énfasis en cuestiones de seguridad y de implementación además de explicar algunos ejemplos de esquemas criptográficos con curvas elípticas. Análogamente al estudio teórico, la criptografía con curvas elípticas es un campo muy amplio y de la multitud de aspectos técnicos presentes hemos abarcado los más cruciales.

Por ultimo, se ha desarrollado un programa informático que implementa diversos protocolos criptográficos con curvas elípticas y así aplicar el estudio teórico-práctico realizado. Este programa también permite hacer cálculos con curvas elípticas y cuerpos finitos y ha sido ampliamente testado y bien documentado.

1.3 TÉCNICAS MATEMÁTICAS E INFORMÁTICAS

Las principales áreas matemáticas junto con los conceptos y resultados utilizados se han recogido en la tabla 1.

Por otro lado, las herramientas de la ingeniería informática empleadas se han recogido en la tabla 2.

Estas tablas no pretenden ser exhaustivas, sino mostrar una idea de los conocimientos que han servido de base para hacer un estudio sobre la criptografía con curvas elípticas. Los conceptos, resultados y técnicas obtenidas en el trabajo no están presentes en estas tablas.

Como todas las herramientas listadas en las tablas 1 y 2 se explican en las enseñanzas del doble grado, no volveremos a explicar dichas herramientas y nos limitaremos a utilizarlas, haciendo énfasis en los nuevos conceptos, técnicas y resultados.

1.4 CONTENIDO DE LA MEMORIA

En el capítulo 3 se realiza el estudio matemático-teórico sobre curvas elípticas. Incluye el desarrollo de la teoría básica en el apartado 3.1, los puntos de torsión se abarcan en el apartado 3.2 y por último se particulariza la teoría de curvas elípticas sobre cuerpos finitos en el apartado 3.3.

ÁREAS MATEMÁTICAS	CONCEPTOS O RESULTADOS
Teoría de números	Los anillos de enteros módulo un entero positivo, el algoritmo extendido de Euclides y el teorema chino del resto.
Teoría de cuerpos	Conceptos como la característica o la clausura algebraica de un cuerpo y los cuerpos finitos y el automorfismo de Frobenius.
Teoría de grupos	Conceptos como el orden, la suma directa, el logaritmo discreto, los homomorfismos entre grupos o el núcleo de un homomorfismo y teoremas como el primer teorema de isomorfía, el teorema de Lagrange para el orden de un grupo o el teorema de estructura para grupos abelianos finitos y los grupo de las raíces de n -ésimas de la unidad y los grupos cíclicos finitos.
Geometría algebraica	El concepto de curva, el espacio afín y el espacio proyectivo.

Tabla 1: Principales herramientas matemáticas utilizadas.

ÁREAS INFORMÁTICAS	CONCEPTOS O TÉCNICAS
Criptografía	Criptografía simétrica, asimétrica e híbrida y sus conceptos como criptosistema, llave, cifrado, firma digital, protocolo criptográfico o función hash.
Teoría de la computación	Complejidad temporal y su clasificación en clases, notación O para el análisis de algoritmos y nociones como la intractabilidad o el caso promedio.
Programación	Diseño orientado a objetos (conceptos como clase, herencia o clase abstracta), desarrollo de pruebas o documentación.

Tabla 2: Principales herramientas informáticas utilizadas.

En el capítulo 4 se realiza el desarrollo informático sobre criptografía con curvas elípticas. Incluye una introducción sobre criptografía asimétrica con curvas elípticas en el apartado 4.1, se explican diversos protocolos criptográficos con curvas elípticas en el apartado 4.2 y por último en el apartado 4.3 se abarca el programa desarrollado para trabajar con curvas elípticas y protocolos criptográficos.

Finalmente, el capítulo 5 contiene las conclusiones y las vías futuras. La bibliografía utilizada se abarca en las páginas 55-57. Además se incluye en el anexo un breve análisis del cifrado de diversas páginas web de la Universidad de Granada en la página 53.

1.5 FUENTES CONSULTADAS

Las fuentes consultadas han sido muchas y muy variadas, sin embargo nos limitamos a citar sólo un número mínimo de las mismas bien en forma de texto, bien en formato de página Web en las páginas 55-57.

OBJETIVOS DEL TRABAJO

Los objetivos inicialmente previstos eran:

- Realizar un estudio en profundidad de las curvas elípticas sobre cuerpos finitos y la aritmética de sus puntos.
- Implementar algoritmos para trabajar con la aritmética del grupo de una curva elíptica.
- Implementar protocolos criptográficos basados en curvas elípticas.

Para alcanzar el primer objetivo, estudiamos primero el caso general, esto es, curvas elípticas sobre un cuerpo arbitrario, y después particularizamos a cuerpos finitos. Como la teoría de curvas elípticas es muy extensa, se ha elegido una parte representativa en relación a su aplicación en la criptografía. Así, se ha organizado la parte teórica con el objetivo de llegar al Teorema de Hasse; de esta forma introducimos los conceptos fundamentales de la teoría de curvas elípticas y llegamos a un resultado que consideramos fundamental. Conceptos y técnicas que, por otro lado, nos servirán de base para la parte algorítmica.

Para alcanzar los dos objetivos relacionados con la implementación, previamente realizamos un estudio sobre la criptografía asimétrica con curvas elípticas, haciendo énfasis en los algoritmos y procedimientos que contiene y sus protocolos criptográficos. Análogamente al caso anterior, tuvimos que seleccionar los aspectos más importantes de la criptografía asimétrica con curvas elípticas debido a la multitud de detalles técnicos presentes en este campo.

Con este conocimiento, desarrollamos un programa informático capaz de operar con el grupo de puntos de una curva elíptica y trabajar con protocolos criptográficos. Para ello también tuvimos que implementar la aritmética modular entre enteros y polinomios y la aritmética de cuerpos finitos. Los protocolos criptográficos implementados y utilizados en aplicaciones reales han tenido en cuenta una multitud de detalles técnicos relacionados con la eficiencia y la seguridad, de los cuales solo los más cruciales han sido tenidos en cuenta en nuestra implementación particular.

En la tabla 3 mostramos los objetivos finalmente alcanzados y el apartado de la memoria donde se trata cada objetivo.

Por otro lado, la tabla 4 muestra las materias del Doble Grado en Matemáticas e Ingeniería Informática más relacionadas con el trabajo.

OBJETIVO ALCANZADO	LOCALIZACIÓN
Realizar un estudio en profundidad de las curvas elípticas y la aritmética de sus puntos y particularizarlo a curvas elípticas sobre cuerpos finitos.	Capítulo 3
Realizar un estudio sobre la criptografía asimétrica con curvas elípticas, incluyendo algunos de sus algoritmos y protocolos más importantes.	Sección 4.1
Implementar algoritmos para trabajar con la aritmética modular de enteros y polinomios, de cuerpos finitos y del grupo de una curva elíptica.	Sección 4.3
Implementar protocolos criptográficos basados en curvas elípticas.	Sección 4.3

Tabla 3: Objetivos alcanzandos.

<p>Cálculo I y II. Álgebra I, II, III.</p> <p>Geometría I, II y III.</p> <p>Curvas y superficies.</p> <p>Álgebra conmutativa computacional.</p> <p>Teoría de números y criptografía.</p> <p>Fundamentos de programación.</p> <p>Metodología de la programación.</p> <p>Estructura de datos.</p> <p>Algorítmica.</p> <p>Fundamentos de ingeniería del software.</p> <p>Modelos avanzados de computación.</p> <p>Programación y diseño orientado a objetos.</p> <p>Seguridad y protección de sistemas informáticos.</p>

Tabla 4: Materias del doble grado relacionadas con el trabajo.

DESARROLLO MATEMÁTICO

En este capítulo haremos el estudio matemático de la teoría de curvas elípticas. En el apartado 3.1 se desarrolla la teoría básica, los puntos de torsión son tratados en el apartado 3.2 y por último se particulariza la teoría de curvas elípticas sobre cuerpos finitos en el apartado 3.3.

Las principales referencias utilizadas para el desarrollo matemático han sido [1], [2] y [3].

3.1 TEORÍA BÁSICA DE CURVAS ELÍPTICAS

En este apartado se tratarán las ecuaciones de Weierstrass, las operaciones de adición y duplicación, los puntos proyectivos, los endomorfismos de curvas elípticas y la estructura de los puntos de torsión.

Las principales referencias utilizadas en este capítulo han sido [1] y [2].

3.1.1 Definición de curva elíptica

La siguiente definición la simplificaremos posteriormente.

Definición 3.1

Una *curva elíptica* E se define por una ecuación de la forma

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \quad (1)$$

donde $a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 \in K$ y $\Delta \neq 0$, siendo Δ el *discriminante* de E y definiéndose como:

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= -d_2^2d_8 - 8d_4^3 - 27d_6^2 + 9d_2d_4d_6 \\ d_2 &= a_1^2 + 4a_2 \\ d_4 &= 2a_4 + 4a_2 \\ d_6 &= a_3^2 + 4a_6 \\ d_8 &= a_1^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Si L es una extensión del cuerpo K , entonces el conjunto de puntos *L-rationales* de E es $E(L) = \{\infty\} \cup \{(x, y) \in L \times L \mid y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6\}$.

Nota 3.2 (comentarios de la definición 3.1).

- La ecuación (1) se conoce como la *ecuación de Weierstrass*.
- Diremos que E *está definida sobre* K y lo notaremos E/K . A K lo llamaremos *cuerpo base*.
- La condición $\Delta \neq 0$ asegura que la curva elíptica no tenga puntos *singulares*, esto es, puntos que anulen las derivadas parciales de la función polínómica

$$f(x, y) = y^2 + a_1 xy + a_3 y - x^3 - a_2 x^2 - a_4 x - a_6$$

asociada a la curva elíptica. Esto asegura que no haya puntos en los que la curva tenga *dos o más rectas tangentes*.

- El punto ∞ lo llamaremos *punto del infinito*. Es el único punto en la recta del infinito que satisface la forma proyectiva de la ecuación de Weierstrass (véase apartado 3.1.5).

Ejemplo 3.3 (curvas elípticas sobre \mathbb{R}). Consideramos las curvas elípticas:

$$E_1 : y^2 = x^3 - x$$

$$E_2 : y^2 = x^3 + x$$

definidas sobre el cuerpo \mathbb{R} de los números reales. Los puntos $E_1(\mathbb{R})$ y $E_2(\mathbb{R})$ se han representado en la figura 1. Esta figura se ha tomado de [2].

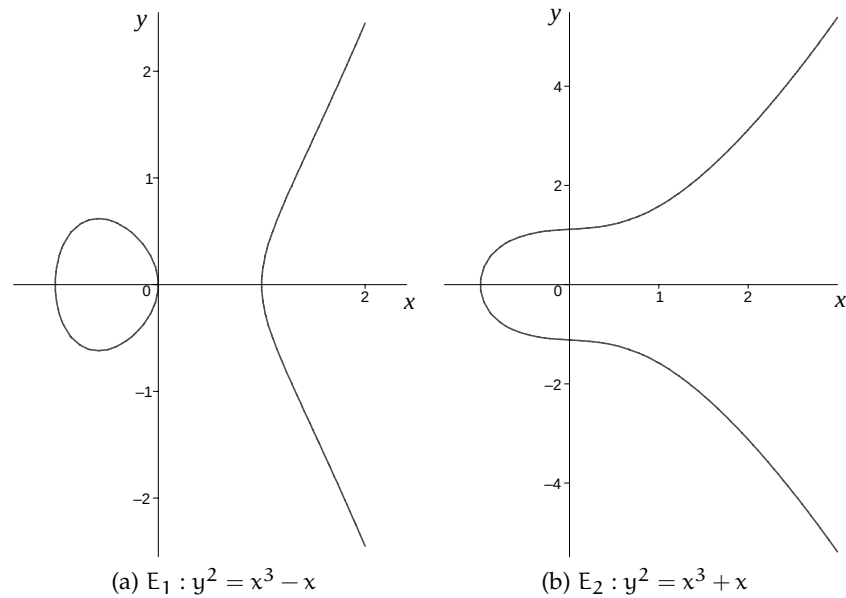


Figura 1: Curvas elípticas sobre \mathbb{R}

3.1.2 Ecuaciones de Weierstrass simplificadas

Nuestro objetivo es transformar la ecuación (1) en una ecuación más sencilla. En este apartado veremos varias transformaciones según la característica del cuerpo base.

Definición 3.4

Dos curvas elípticas E_1 y E_2 definidas sobre K y dadas por las ecuaciones de Weierstrass:

$$E_1 : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

$$E_2 : y^2 + a'_1xy + a'_3y = x^3 + a'_2x^2 + a'_4x + a'_6$$

se dicen que son *isomorfas sobre K* si existen $u, r, s, t \in K$, $u \neq 0$, tal que el cambio de variables lineal

$$(x, y) \mapsto (u^2x + r, u^3y + u^2sx + t) \quad (3)$$

transforma la ecuación E_1 en la ecuación E_2 . La transformación (3) se llama un cambio de variables admisible.

Como es natural, ∞ va a ∞ , no resaltaremos esto en lo que sigue. Por esto, si escribimos $P = (x, y)$, se tendrá $P \neq \infty$.

El cambio de variables (3) es el único que preserva la forma de la ecuación de Weierstrass. No vamos a entrar en más detalle, pero puede consultar [3, prop. III.3.1b] para más información.

Una ecuación de Weierstrass

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

puede simplificarse considerablemente aplicando cambios de variables admisibles. Veamos el caso en el que la característica del cuerpo base no es ni 2 ni 3.

Lema 3.5

Si $\text{char}(K) \neq 2, 3$, entonces el cambio de variables admisible

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x - 3a_1^2 - 12a_2}{36}, \frac{y - 3a_1x}{216} - \frac{a_1^3 + 4a_1a_2 - 12a_3}{240} \right)$$

transforma E en la curva

$$y^2 = x^3 + ax + b \quad (4)$$

donde $a, b \in K$. El discriminante de esta curva es $\Delta = -16(4a^3 + 27b^2)$.

Demostración. Basta aplicar el cambio de variables y ver que efectivamente se obtiene la expresión (4). En su lugar, veamos el proceso por el cual se obtuvo dicha simplificación.

Dada la ecuación de Weierstrass (1), sumamos en ambos lados por $(a_1 a_3 x)/2 + a_3^2/4 + (a_1^2 x^2)/4$ (podemos dividir por 2 ya que $\text{char}(K) \neq 2$) para completar el cuadrado:

$$\left(y + \frac{a_1 x}{2} + \frac{a_3}{2}\right)^2 = x^3 + \left(a_2 + \frac{a_1^2}{4}\right)x^2 + \left(a_4 + \frac{a_1 a_3}{2}\right)x + \left(a_6 + \frac{a_3^2}{4}\right)$$

Haciendo $y_1 = y + (a_1 x)/2 + a_3/2$, obtenemos

$$y_1^2 = x^3 + a_2' x^2 + a_4' x + a_6'$$

para algunas constantes $a_2', a_4', a_6' \in K$. Finalmente, sustituyendo $x_1 = x + a_2'/3$ (podemos dividir por 3 ya que $\text{char}(K) \neq 3$) resulta

$$y_1^2 = x_1^3 + a x_1 + b$$

para algunas constante $a, b \in K$. Para obtener el discriminante Δ basta sustituir el valor de las constantes $a_4 = a$, $a_6 = b$ y $a_1 = a_3 = a_2 = 0$ en (2). \square

Nota 3.6 (comentarios del lema 3.5).

- Si el cuerpo base tiene característica 2, la ecuación anterior (4) no es válida ya que tiene puntos singulares.
- Para un cuerpo base con característica 3, la ecuación anterior (4) si es válida, pero existan curvas que no tienen esta forma.

En la mayor parte del trabajo, desarrollaremos la teoría de curvas elípticas utilizando la ecuación de Weierstrass simplificada (4). Sin embargo, como los cuerpos finitos de característica dos son de especial interés en computación, ocasionalmente señalaremos qué modificaciones son necesarias para los cuerpos base de característica dos. Veamos la primera modificación.

Lema 3.7

Si la característica de K es 2, hay dos casos que considerar. Si $a_1 \neq 0$, entonces el cambio de variables admisible

$$(x, y) \mapsto \left(a_1^2 x + \frac{a_3}{a_1}, a_1^3 y + \frac{a_1^2 a_4 + a_3^2}{a_1^3}\right)$$

transforma E en la curva

$$y^2 + xy = x^3 + ax^2 + b$$

donde $a, b \in K$. Tales curvas se llaman *no supersingulares* (véase 3.35) y tienen discriminante $\Delta = b$. Si $a_1 = 0$, entonces el cambio de variables admisible

$$(x, y) \mapsto (x + a_2, y)$$

transforma E en la curva

$$y^2 + cy = x^3 + ax + b$$

donde $a, b, c \in K$. Tales curvas se llaman *supersingulares* (véase 3.35) y tienen discriminante $\Delta = c^4$.

Demostración. Basta sustituir el cambio de variables en la ecuación general de Weierstrass y operar. \square

3.1.3 Ley de grupo

En este apartado veremos cómo dotar de estructura de grupo al conjunto de puntos una curva elíptica. Para ello definiremos una ley de composición o ley de grupo y le daremos sentido a la «suma» de puntos.

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo K . El siguiente método geométrico permite, dados dos puntos en $E(K)$, producir un tercero en $E(K)$. Este método será la base para definir la ley de grupo.

Versión geométrica del método de la cuerda y la tangente 3.8. Dados dos puntos P y Q , veamos como producir un tercer punto R . En primer lugar si P y Q son distintos, los pasos son:

1. Se dibuja una recta L de P a Q .
2. Esta recta intersecta la curva elíptica en un tercer punto.
3. Tomamos R como la reflexión de este punto sobre el eje- x .

Si los puntos P y Q son iguales, los pasos son:

1. Se dibuja la línea tangente L a la curva elíptica en P .
2. Esta línea intersecta la curva elíptica en un segundo punto.
3. Tomamos R como la reflexión de este punto sobre el eje- x .

Esto método se puede apreciar en la figura 2. Esta figura se ha tomado de [2].

Nota 3.9 (comentarios del algoritmo 3.14). El hecho de que $L \cap E$, contando multiplicidades, consiste en exactamente tres puntos (no necesariamente distintos) es un caso especial del teorema de Bézout [4,

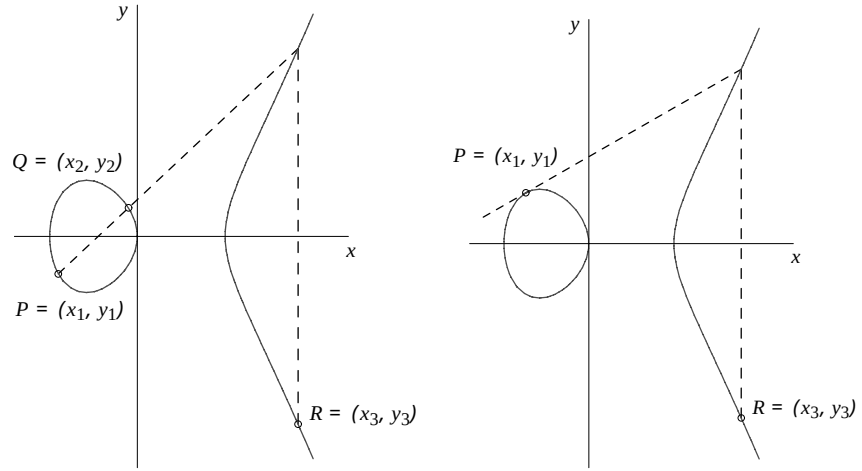


Figura 2: Método de la cuerda y la tangente

sec. I.7.8]. Sin embargo, como a continuación vamos a dar fórmulas explícitas, haremos la demostración utilizando dichas fórmulas y no será necesario utilizar un teorema tan general.

Inspirándonos en el método de la cuerda y la tangente, definimos la siguiente ley de composición para el grupo de puntos de una curva elíptica.

Definición 3.10 (ley de grupo)

Sea E una curva elíptica definida por la ecuación $y^2 = x^3 + ax + b$ sobre un cuerpo K de característica distinta de 2 y 3. Definimos la operación binaria $+$: $E(K) \times E(K) \rightarrow E(K)$ como sigue:

1. $P + \infty = \infty + P = P$, para todo $P \in E(K)$.
2. Si $P = (x, y) \in E(K)$, entonces $(x, y) + (x, -y) = \infty$. El punto $(x, -y)$ se denotará por $-P$ y se llamará el *opuesto* de P . Además, $-\infty = \infty$.
3. Sea $P = (x_1, y_1) \in E(K)$ y $Q = (x_2, y_2) \in E(K)$, donde $P \neq \pm Q$. Entonces $P + Q = (x_3, y_3)$, donde

$$x_3 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2 - x_1 - x_2, \quad y_3 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x_1 - x_3) - y_1.$$

4. Sea $P = (x_1, y_1) \in E(K)$, donde $P \neq -P$. Entonces $2P = (x_3, y_3)$ donde:

$$x_3 = \left(\frac{3x_1^2 + a}{2y_1} \right)^2 - 2x_1, \quad y_3 = \left(\frac{3x_1^2 + a}{2y_1} \right) (x_1 - x_3) - y_1.$$

Demostración. Tenemos que comprobar que $+$ es una operación binaria válida, esto es, que a cada par de elementos de $E(K) \times E(K)$ le corresponde un único elemento de $E(K)$. Como la casuística anterior es total y exclusiva, basta ver que $+$ es una operación cerrada. Los casos a) y b) son triviales. Veamos los otros dos casos con detalle.

CASO c) Supongamos $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, $P, Q \in E(K)$ con $P \neq \pm Q$. Consideramos la recta que los contiene:

$$L : y = m(x - x_1) + y_1, \text{ donde } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Nótese que $x_2 \neq x_1$ ya que $P \neq \pm Q$. Para hallar la intersección de L con E sustituimos y :

$$(m(x - x_1) + y_1)^2 = x^3 + ax + b$$

Podemos reescribir esto de la forma

$$0 = x^3 - m^2x^2 + b'x + c' \quad (5)$$

para algunas constantes $b', c' \in K$. Así, las raíces de esta cúbica son justamente $L \cup E$.

Sabemos que las raíces de un polinomio están relacionadas con sus coeficientes. De hecho, para un polinomio cúbico mónico $x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ con raíces r, s, t se tiene:

$$\begin{aligned} x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 &= (x - r)(x - s)(x - t) \\ &= x^3 - (r + s + t)x^2 + (rs + rt + st)x - rst \end{aligned}$$

En particular, $r + s + t = -c_2$. Como P y Q están en la intersección, x_1 y x_2 son dos raíces de (5), luego la tercera raíz α es $m^2 - x_1 - x_2$. Sustituyendo α en L resulta $\beta = m(x_3 - x_1) + y_1$, luego $(\alpha, \beta) \in E(K)$. Entonces $(\alpha, -\beta) = (x_3, y_3) \in E(K)$.

CASO d) Sea $P = (x_1, y_1)$, donde $P \neq -P$. Consideramos la recta tangente a E en P

$$L : y = m(x - x_1) + y_1, \text{ donde } m = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1}$$

Nótese que $y_1 \neq 0$ ya que si no estaríamos en el caso b). Hallamos la intersección con E de forma análoga al caso c) y obtenemos la cúbica:

$$0 = x^3 - m^2x^2 + b'x + c'$$

para algunas constantes $b', c' \in K$. Análogamente al caso c), como x_1 es una raíz doble de la cúbica (basta derivar y evaluar en x_1) tenemos que la tercera raíz α es $m^2 - 2x_1$. Sustituyendo α en L resulta $\beta = m(x_3 - x_1) + y_1$, luego $(\alpha, \beta) \in E(K)$. Entonces $(\alpha, -\beta) = (x_3, y_3) \in E(K)$. \square

Nota 3.11 (comentarios de la definición 3.10). Para cuerpos base con característica 2 o 3, las fórmulas cambian necesariamente. Por ejemplo, si E es una curva elíptica definida sobre un cuerpo K por la ecuación general de Weierstrass (1), el opuesto de un punto $P = (x, y) \in E(K)$ viene dado por

$$-P = (x, -a_1x - a_3 - y)$$

En el apartado 3.3.1 veremos la ley de composición para una curva elíptica sobre un cuerpo finito de característica 2.

Con la operación binaria 3.10, el conjunto de puntos de una curva elíptica es un grupo abeliano.

Teorema 3.12

La suma 3.10 de puntos en una curva elíptica E sobre un cuerpo K de característica distinta de 2 y 3 satisface las siguientes propiedades:

■ *Conmutatividad:*

$$P_1 + P_2 = P_2 + P_1, \forall P_1, P_2 \in E(K).$$

■ *Existencia de elemento neutro:*

$$P + \infty = P, \forall P \in E(K).$$

■ *Existencia de elemento opuesto:*

$$P + (-P) = \infty, \forall P \in E(K).$$

■ *Asociatividad:*

$$(P_1 + P_2) + P_3 = P_1 + (P_2 + P_3), \forall P_1, P_2, P_3 \in E(K).$$

En otras palabras, $(E(K), +, \infty)$ es un grupo abeliano.

Demostración. La conmutatividad es trivial en los casos a), b) y d). Para el caso c) también es fácil ya que la recta que une P_1 y P_2 es la misma que la recta que une P_2 y P_1 . La existencia de elemento neutro e inverso también es directa de la definición 3.10.

La asociatividad puede probarse utilizando las fórmulas caso por caso, pero supone un esfuerzo demasiado laborioso. En su lugar, puede abordarse de forma más sofisticada bien estudiando las líneas y sus intersecciones con la curva elíptica en el plano proyectivo [1, sec. 2.4] o bien usando teoremas más generales como el de Riemann-Roch [3, teo. III.3.4.e]. \square

Nota 3.13 (comentarios del teorema 3.12). Una versión más general del teorema anterior para cuerpos base de cualquiera característica se encuentra en [3].

3.1.4 Multiplicación escalar

En este apartado veremos un método computacionalmente eficiente para calcular la duplicación reiterada de un punto.

Sea P es un punto de una curva elíptica y k un entero positivo. Denotaremos kP a la suma $P + \dots + P$ de k -sumandos. El siguiente algoritmo calcula kP más rápido que el método directo (sumar P consigo mismo repetidamente).

Algoritmo 3.14 (multiplicación por duplicación). Sea k un entero positivo y sea P un punto de una curva elíptica. El siguiente algoritmo calcula kP .

1. Se empieza con $a = k$, $B = \infty$ y $C = P$.
2. Si a es par, se toma $a = a/2$, $B = B$ y $C = 2C$.
3. Si a es impar, se toma $a = a - 1$, $B = B + C$ y $C = C$.
4. Si $a \neq 0$, se va al paso 2.
5. Se devuelve B .

La salida B es kP .

Nota 3.15 (comentarios del algoritmo 3.14).

- El único problema de este método es que el tamaño de las coordenadas se incrementa muy rápidamente.
- Si trabajamos sobre un cuerpo finito, podemos evitar este inconveniente reduciendo módulo p en cada operación.

3.1.5 Puntos proyectivos

En este apartado introduciremos los puntos proyectivos y veremos de donde procede el punto del infinito de una curva elíptica. Como en la mayor parte del trabajo no vamos a trabajar con puntos proyectivos, veremos este apartado de manera más informal.

Sea K un cuerpo. El *espacio proyectivo* dos dimensional sobre K , $\mathbb{P}^2(K)$, está dado por clases de equivalencia de ternas (x, y, z) con $x, y, z \in K$ y al menos algún x, y, z no nulo. Dos ternas (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) se dicen que son *equivalentes* si existe un elemento no nulo $\lambda \in K$ tal que

$$(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_2, \lambda y_2, \lambda z_2)$$

y en tal caso escribiremos $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$. La clase de equivalencia de una terna solo depende de los ratios entre x, y, z . Por ello, la clase de equivalencia de (x, y, z) la denotaremos por $(x : y : z)$ y diremos que es un *punto proyectivo*.

Si $(x : y : z)$ es un punto proyectivo con $z \neq 0$, entonces $(x : y : z) = (x/z : y/z : 1)$ y de hecho $(x/z, y/z, 1)$ es el único representante de esta clase de equivalencia con $z = 1$. Tenemos así una correspondencia uno-uno entre el conjunto de puntos proyectivos

$$\mathbb{P}^2(K)^* = \{(x : y : z) \mid x, y, z \in K, z \neq 0\}$$

y el *plano afín*

$$\mathbb{A}(K) = \{(x, y) \mid x, y \in K\}.$$

Si $z = 0$, el conjunto de puntos proyectivos de la forma $(x : y : 0)$ se llaman *recta del infinito* ya que sus puntos no se corresponden con ninguno del plano afín.

La *forma proyectiva* de la ecuación de Weierstrass de una curva elíptica E definida sobre K se obtiene reemplazando x por x/z , y por y/z y quitando denominadores. Si alguna terna (x, y, z) no nula satisface la ecuación proyectiva entonces también la satisfacen las ternas $(x', y', z') \in (x : y : z)$. Podemos decir entonces que el punto proyectivo $(x : y : z)$ está en E . Tenemos así una correspondencia uno-uno entre los puntos del plano afín que están en E y los puntos proyectivos de $\mathbb{P}^2(K)^*$ que están en E .

Si hacemos $z = 0$ en la forma proyectiva de la ecuación, obtenemos $0 = x^3$ y como alguna componente tiene que ser no nula, tenemos $y \neq 0$. Así, el único punto de la recta del infinito que está en E es el punto $(0 : y : 0) = (0 : 1 : 0)$. Este punto se corresponde con el punto ∞ de la definición 3.1.

Hay situaciones en la que usar coordenadas proyectivas puede ser ventajoso (véase [1, sec 2.6]). Sin embargo, nosotros utilizaremos las coordenadas del plano afín y trataremos el punto del infinito como caso especial cuando sea necesario.

3.1.6 Endomorfismos

El principal objetivo de este apartado es probar la proposición 3.20 que será utilizada en la demostración del teorema de Hasse 3.34. Para ello, es necesario utilizar algunos resultados técnicos, los cuales solo los enunciaremos (puede encontrar su demostración en [1, sec. 2.9]).

Definición 3.16

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo K y sea \bar{K} su clausura algebraica. Un *endomorfismo* de E es un homomorfismo $\alpha : E(\bar{K}) \rightarrow E(\bar{K})$ dado por funciones racionales (cocientes

de polinomios). Dicho de otro modo, α preserva la suma y el elemento neutro de $E(\overline{K})$.

El endomorfismo trivial que lleva cada punto a ∞ lo denotaremos por 0 .

Supondremos que α es no trivial a partir de ahora. El siguiente resultado técnico nos facilitará el manejo de endomorfismos de una curva elíptica.

Lema 3.17

Si α es un endomorfismo de una curva elíptica definida por la ecuación de Weierstrass simplificada (4), entonces α se puede escribir como

$$\alpha(x, y) = (r_1(x), r_2(x)y)$$

donde r_1 y r_2 son funciones racionales. Supongamos que

- $r_1(x) = p(x)/q(x)$, con $p(x), q(x)$ polinomios sin factores comunes.
- Si $q(x) = 0$ para algún punto (x, y) , entonces definimos $\alpha(x, y) = \infty$.
- Si $q(x) \neq 0$, entonces $r_2(x)$ está bien definida (su denominador no se anula en x , y si éste se anula en x_0 , entonces $q(x_0) = 0$).

Definición 3.18

El *grado* de un endomorfismo α es

$$\deg(\alpha) = \max\{\deg p(x), \deg q(x)\}$$

si α es no trivial. Si $\alpha = 0$, definimos $\deg(0) = 0$.

Definición 3.19

Un endomorfismo α no trivial es *separable* si la derivada $r_1(x)'$ no es idénticamente cero.

El siguiente resultado será crucial en la demostración del teorema de Hasse 3.34. Denotaremos por $|C|$ al cardinal de un conjunto C .

Proposición 3.20

Sea $\alpha \neq 0$ un endomorfismo separable de una curva elíptica E . Entonces

$$\deg(\alpha) = |\ker(\alpha)|$$

donde $\ker(\alpha)$ es el núcleo del homomorfismo $\alpha : E(\bar{K}) \rightarrow E(\bar{K})$. Si $\alpha \neq 0$ no es separable, entonces

$$\deg(\alpha) > |\ker(\alpha)|$$

Demostración. Por el lema 3.17, $\alpha(x, y) = (r_1(x), r_2(x)y)$ con $r_1(x) = p(x)/q(x)$. Supongamos que α es separable. Entonces $r_1' \neq 0$, por lo que $p'q - pq'$ no es el polinomio cero.

Sea S el conjunto de $x \in \bar{K}$ tal que $(pq' - p'q)(x)q(x) = 0$. Sea $(u, v) \in E(\bar{K})$ tal que

1. $u \neq 0, v \neq 0, (u, v) \neq \infty$,
2. $\deg(p(x) - uq(x)) = \max\{\deg(p), \deg(q)\} = \deg(\alpha)$,
3. $u \notin r_1(S)$ y
4. $(u, v) \in \alpha(E(\bar{K}))$.

Como $p'q - pq'$ no es el polinomio nulo, S es un conjunto finito, por lo que su imagen bajo α es finita. Por otro lado $\alpha(E(\bar{K}))$ es un conjunto infinito. Así, tal (u, v) existe.

Veamos que existen exactamente $\deg(\alpha)$ puntos $(x_1, y_1) \in E(\bar{K})$ tal que $\alpha(x_1, y_1) = (u, v)$. Para tales puntos, se tiene

$$\frac{p(x_1)}{q(x_1)} = u, \quad y_1 r_2(x_1) = v$$

Como $(u, v) \neq \infty, q(x_1) \neq 0$ luego $r_2(x_1)$ está definido. Como $v \neq 0$ y $y_1 r_2(x_1) = v$, se tendrá $y_1 = v/r_2(x_1)$, esto es, x_1 determina y_1 , por lo que solo tenemos que contar valores de x_1 .

Por la propiedad (2), $p(x) - uq(x)$ tiene $\deg(\alpha)$ raíces, contando multiplicidades. Tenemos que ver que $p - uq$ no tiene raíces múltiples. Supongamos que x_0 es una raíz múltiple. Entonces

$$p(x_0) - uq(x_0) = 0, \quad p'(x_0) - uq'(x_0) = 0$$

Multiplicando las ecuaciones $p = uq$ y $uq' = p'$ resulta

$$up(x_0)q'(x_0) = up'(x_0)q(x_0)$$

Como $u \neq 0$, esto implica que x_0 es una raíz de $p'q - p'q$, por lo que $x_0 \in S$. Así $u = r_1(x_0) \in r_1(S)$, contrario a la propiedad (3). Concluimos que $p - uq$ no tiene raíces múltiples y por ello tiene $\deg(\alpha)$ raíces distintas.

Como hay exactamente $\deg(\alpha)$ puntos (x_1, y_1) con $\alpha(x_1, y_1) = (u, v)$, el núcleo de α tiene $\deg(\alpha)$ elementos.

Nótese que como α es un homomorfismo, para cada $(u, v) \in \alpha(E(\bar{K}))$ hay exactamente $\deg(\alpha)$ puntos (x_1, y_1) con $\alpha(x_1, y_1) = (u, v)$. Las hipótesis sobre (u, v) se hicieron para obtener el resultado para al menos un punto, lo cual es suficiente.

Si α no es separable, entonces los pasos de la demostración siguen siendo válidos, excepto que $p' - uq'$ es siempre el polinomio cero en este caso, por lo que $p(x) - uq(x) = 0$ tiene siempre raíces múltiples y por ello tiene menos de $\deg(\alpha)$ soluciones. \square

Veamos un par de resultados que serán útiles para describir la estructura de los puntos de torsión del apartado 3.2.

Proposición 3.21

Sea E una curva elíptica definida sobre el cuerpo K . Sea $\alpha \neq 0$ un endomorfismo de E . Entonces α es sobreyectiva.

Demostración. Sea $(u, v) \in E(\bar{K})$. Como $\alpha(\infty) = \infty$, supongamos que $(u, v) \neq \infty$. Por el lema 3.17, α será de la forma $\alpha(x, y) = (r_1(x), r_2(x)y)$ con $r_1(x) = p(x)/q(x)$. Consideramos el polinomio $p(x) - uq(x)$. Distinguimos dos casos.

Supongamos que $p(x) - uq(x)$ no es un polinomio constante. Entonces tendrá una raíz x_0 . Como p y q no tiene raíces en común, $q(x_0) \neq 0$. Sea $y_0 \in \bar{K}$ una raíz cuadrada de $x_0^3 + ux_0 + v$. Como $q(x_0) \neq 0$, $r_2(x)$ está definido y por lo tanto $\alpha(x_0, y_0)$ también y valdrá (u, v') para algún v' . Como $v'^2 = u^3 + au + b = v^2$, tenemos $v' = \pm v$. Si $v' = v$, hemos terminado. Si $v' = -v$, entonces $\alpha(x_0, -y_0) = (u, -v') = (u, v)$.

Supongamos que $p - uq$ es un polinomio constante. Como $E(\bar{K})$ no es finito y el núcleo de α sí es finito, solo un número finito de puntos de $E(\bar{K})$ puede tener como imagen un punto con una componente x dada. Así, bien $p(x)$ o $q(x)$ no es constante. Si p y q son dos polinomios no constantes, entonces hay como mucho una constante u tal que $p - uq$ es constante (si u' fuera otra constante que lo verificara, se tendría $(u' - u)q = (p - uq) - (p - u'q)$ es constante y $(u - u')p = u'(p - uq) - u(p - u'q)$ es constante, lo que implicaría que p y q son constantes). Así, hay al menos dos puntos, (u, v) y $(u, -v)$ para algún v , que no están en la imagen de α . Sea (u_1, v_1) otro punto. Entonces $\alpha(P_1) = (u_1, v_1)$ para algún P_1 . Podemos elegir (u_1, v_1) tal que $(u_1, v_1) + (u, v) \neq (u, \pm v)$, por lo que existe P_2 con $\alpha(P_2) = (u_1, v_1) + (u, v)$. Entonces $\alpha(P_2 - P_1) = (u, v)$ y $\alpha(P_1 - P_2) = (u, -v)$. \square

Proposición 3.22

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo K y sea n un entero no cero. Consideramos el endomorfismo *multiplicación por n* dado por

$$n(P) = nP, \quad \forall P \in E(\bar{K})$$

Supongamos que n está dado por funciones racionales R_n y S_n , esto es,

$$n(x, y) = (R_n(x), yS_n(x))$$

para todo $(x, y) \in E(\bar{K})$. Entonces

$$\frac{R'_n(x)}{S_n(x)} = n.$$

Por tanto, la multiplicación por n es separable si y sólo si n no es un múltiplo de la característica del cuerpo base.

Para demostrar esta proposición, necesitamos un resultado técnico. La demostración de este lema se puede encontrar en [1, sec 2.9].

Lema 3.23

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ endomorfismos no triviales de una curva elíptica E con $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$. Supongamos que cada endomorfismo está dado de la siguiente forma

$$\alpha_j(x, y) = (R_{\alpha_j}(x), yS_{\alpha_j}(x))$$

y que existen constantes $c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}$ tal que

$$\frac{R'_{\alpha_1}(x)}{S_{\alpha_1}(x)} = c_{\alpha_1}, \quad \frac{R'_{\alpha_2}(x)}{S_{\alpha_2}(x)} = c_{\alpha_2}.$$

Entonces

$$\frac{R'_{\alpha_3}(x)}{S_{\alpha_3}(x)} = c_{\alpha_1} + c_{\alpha_2}$$

Demostración de la proposición 3.22. Dado un endomorfismo cualquiera α , se tiene

$$\alpha(x, -y) = \alpha(-(x, y)) = -\alpha(x, y).$$

En particular, $R_{-n} = R_n$ y $S_{-n} = -S_n$. Luego $R'_n/S_n = -R'_n/S_n$ y basta probar el resultado para n positivo.

Para $n = 1$, la primera parte de la proposición es cierta. Aplicando el lema anterior, si es cierta para n , también es cierta para $n + 1$ (la suma de n y 1). Así,

$$\frac{R'_n(x)}{S_n(x)} = n.$$

Por otro lado, $R'_n(x) \neq 0$ si y solo si $R'_n(x)/S_n(x) \neq 0$, que es equivalente a que la característica de K no divida a n . Por la definición de separabilidad, esto prueba la segunda parte. \square

3.2 PUNTOS DE TORSIÓN

En este apartado introduciremos los puntos de torsión y su estructura que jugarán un papel importante en las curvas elípticas sobre cuerpos finitos. También veremos el emparejamiento Weil que utilizaremos en la demostración del teorema de Hasse 3.34.

Definición 3.24

Dada una curva elíptica E , un elemento del grupo $E(\bar{K})$ cuyo orden es finito se llamará *punto de torsión*.

Definición 3.25

Llamaremos *subgrupo de n -torsión* al subgrupo de puntos \bar{K} -racionales

$$E[n] = \{P \in E(\bar{K}) \mid nP = \infty\}.$$

Estos conjuntos son subgrupos ya que son los núcleos del endomorfismo multiplicación por n (definido en el apartado 3.1.6).

El siguiente resultado da la estructura de los subgrupos de torsión.

Teorema 3.26

Sea E una curva elíptica sobre un cuerpo K y sea n un entero positivo. Si la característica de K no divide a n , o es cero, entonces

$$E[n] \simeq \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n.$$

donde \oplus denota la suma directa de grupos. Por otro lado, si la característica de K es $p > 0$ y $p|n$, entonces

$$E[n] \simeq \mathbb{Z}_{n'} \oplus \mathbb{Z}_{n'} \text{ o } \simeq \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_{n'}$$

donde $n = p^r n'$ con $p \nmid n'$.

Para demostrar este teorema vamos a usar un resultado cuya demostración técnica, extensa y laboriosa omitiremos. Puede consultar su demostración en [1, sec. 3.2].

Proposición 3.27

Sea E una curva elíptica. El endomorfismo multiplicación por n de E tiene grado n^2 .

Demostración del teorema 3.26. Supongamos primero que n no es múltiplo de la característica p del cuerpo. Por la proposición 3.22, como n

no es múltiplo de la característica p , el endomorfismo multiplicación por n es separable. Por la proposición 3.20 y 3.27, el núcleo de este endomorfismo, $E[n]$, tiene orden n^2 .

Por el teorema de estructura para grupos abelianos finitos, $E[n]$ es isomorfo a

$$\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$$

para algunos enteros n_1, n_2, \dots, n_k con $n_i | n_{i+1} \forall i$ y donde \mathbb{Z}_{n_i} denota el grupo de enteros módulo n_i .

Sea l un primo que divide a n_1 . Por lo que acabamos de ver, $E[l]$ tiene orden l^2 . Tenemos así que $l | n_i \forall i$ pero $E[l] \subset E[n]$, luego $k = 2$.

Multiplicar por n anula todos los elementos de $E[n] \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2}$, por lo que $n_2 | n$. Como $n^2 = |E[n]| = n_1 n_2$, se tiene $n_1 = n_2 = n$. Así,

$$E[n] \simeq \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n.$$

Supongamos ahora que la característica p divide a n . Primero veamos la estructura de los subgrupos de torsión $E[p^k]$ con $k \geq 1$.

Por la proposición 3.22, el endomorfismo multiplicación por p no es separable. Por tanto, por la proposición 3.20, el núcleo $E[p]$ del endomorfismo multiplicación por p tiene orden estrictamente menor que el grado de este endomorfismo, que es p^2 por la proposición 3.27. Como todo elemento de $E[p]$ tiene orden 1 o p , el orden de $E[p]$ es una potencia de p , por lo que debe ser 1 o p . Si $E[p] = \infty$, entonces $E[p^k]$ debe ser trivial $\forall k$.

Supongamos ahora que $E[p]$ tiene orden p . Entonces $E[p^k]$ es cíclico (basta usar como antes el teorema de estructura de grupos abelianos y ver que $k = 1$). Así, $E[p^k]$ no puede tener como orden $p^{k'}$ con $k' > k$. Veamos que justamente el orden es p^k .

Supongamos que existe un elemento P de orden p^j . Por la proposición 3.21, el endomorfismo multiplicación por p es sobreyectivo, así que existirá un punto Q tal que $pQ = P$. Como

$$p^j Q = p^{j-1} P \neq \infty \quad \text{pero} \quad p^{j+1} Q = p^j P = \infty$$

Q tiene orden p^{j+1} . Por inducción, hay puntos de orden $p^k \forall k$. Por tanto, $E[p^k]$ es cíclico de orden p^k .

Escribiendo $n = p^r n'$ con $r \geq 0$ y $p \nmid n'$, resulta

$$E[n] \simeq E[n'] \oplus E[p^r].$$

donde $E[n'] \simeq \mathbb{Z}_{n'} \oplus \mathbb{Z}_{n'}$, ya que $p \nmid n'$. Acabamos de ver que $E[p^r] \simeq 0$ o \mathbb{Z}_{p^r} . El teorema chino del resto nos dice que

$$\mathbb{Z}_{n'} \oplus \mathbb{Z}_{p^r} \simeq \mathbb{Z}_{n'p^r} \simeq \mathbb{Z}_n$$

por lo que concluimos con

$$E[n] \simeq \mathbb{Z}_{n'} \oplus \mathbb{Z}_{n'} \quad \text{o} \quad \mathbb{Z}_{n'} \oplus \mathbb{Z}_n.$$

□

3.2.1 Endomorfismos y matrices

Los subgrupos de torsión nos permiten reducir cuestiones sobre los endomorfismos a cálculos con matrices. Para ello, dado un endomorfismo α , vamos a asociarle una matriz con entradas en \mathbb{Z}_n que describirá la acción de α sobre una base de $E[n]$.

Definición 3.28

Sea n un entero positivo no divisible por la característica de K y $\alpha : E(\overline{K}) \rightarrow E(\overline{K})$ un homomorfismo (no necesariamente dado por funciones racionales). Definimos la matriz α_n dada por

$$\alpha_n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

donde los $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_n$ se obtienen de la siguiente forma:

- Se elige una *base* $\{\beta_1, \beta_2\}$ de $E[n] \simeq \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$.
- Se expresan las imágenes de β_1, β_2 por α en función de dicha base y se toman como a, b, c, d los coeficientes, esto es,

$$\alpha(\beta_1) = a\beta_1 + c\beta_2, \quad \alpha(\beta_2) = b\beta_1 + d\beta_2.$$

Los resultados que simplifican el cálculo del grado de un endomorfismo al cálculo del determinante de la matriz asociada son los siguientes.

Proposición 3.29

Sea α un endomorfismo de una curva elíptica E definido sobre un cuerpo K . Sea n un entero positivo no divisible por la característica de K . Entonces

$$\det(\alpha_n) \equiv \deg(\alpha) \pmod{n}.$$

Proposición 3.30

Sean α y β endomorfismos de E y sean a, b enteros. Consideramos el endomorfismo $a\alpha + b\beta$ definido por

$$(a\alpha + b\beta)(P) = a\alpha(P) + b\beta(P).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \deg(a\alpha + b\beta) &= a^2 \deg(\alpha) + b^2 \deg(\beta) \\ &\quad + ab(\deg(\alpha + \beta) - \deg(\alpha) - \deg(\beta)) \end{aligned}$$

Para demostrar ambas proposiciones, necesitamos introducir el emparejamiento Weil.

3.2.2 Emparejamiento Weil

El emparejamiento de Weil sobre un subgrupo de torsión de una curva elíptica es una herramienta principal en el estudio de las curvas elípticas. En este trabajo se utilizará para probar la proposición 3.29 que será necesaria para probar el teorema de Hasse 3.34.

Sea E una curva elíptica sobre un cuerpo K y sea n un entero no divisible por la característica de K . Consideramos el grupo μ_n de las raíces n -ésimas de la unidad en \bar{K} , esto es,

$$\mu_n = \{x \in \bar{K} \mid x^n = 1\}.$$

Como la característica de K no divide a n , la ecuación $x^n = 1$ no tiene raíces múltiples y por lo tanto μ_n es un grupo cíclico de orden n .

Proposición 3.31

Sea E una curva elíptica sobre un cuerpo K y sea n un entero positivo no divisible por la característica de k . Entonces existe un emparejamiento

$$e_n : E[n] \times E[n] \rightarrow \mu_n$$

llamado *emparejamiento Weil* que satisface las siguientes propiedades:

1. e_n es «lineal» en cada variable, esto es,

$$e_n(S_1 + S_2, T) = e_n(S_1, T)e_n(S_2, T)$$

$$e_n(S, T_1 + T_2) = e_n(S, T_1)e_n(S, T_2)$$

$$\forall S, S_1, S_2, T, T_1, T_2 \in E[n].$$

2. e_n es no degenerada en cada variable, esto es,

$$e_n(S, T), \forall T \in E[n] \implies S = \infty$$

$$e_n(S, T), \forall S \in E[n] \implies T = \infty$$

3. $e_n(T, T) = 1, \forall T \in E[n]$.

4. $e_n(T, S) = e_n(S, T)^{-1}, \forall S, T \in E[n]$.

5. $e_n(\sigma S, \sigma T) = \sigma(e_n(S, T))$ para todo automorfismo σ de \overline{K}/K .

6. $e_n(\alpha S, \alpha T) = e_n(S, T)^{\deg(\alpha)}$ para todo endomorfismo α de E .

La proposición anterior requiere un estudio avanzado y detallado sobre curvas elípticas para realizar su demostración. Como no es nuestro objetivo hacer una teoría exhaustiva sobre curvas elípticas, el lector interesado puede consultar [1, cap. 11] para más información.

Corolario 3.32

Sea $\{T_1, T_2\}$ una base de $E[n]$. Entonces $e_n(T_1, T_2)$ es una raíz n -ésima de la unidad que genera μ_n , esto es, una raíz *primitiva*.

Demostración. Vamos a usar la siguiente caracterización. Si ζ es una raíz n -ésima de la unidad, entonces ζ es una raíz primitiva si y solo si

$$\zeta^k = 1 \iff n \mid k.$$

Supongamos $e_n(T_1, T_2) = \zeta$ con $\zeta^d = 1$. Entonces $e_n(T_1, dT_2) = 1$. Por (1) y (3), $e_n(T_2, dT_2) = e_n(T_2, T_2)^d = 1$. Sea $S \in E[n]$. Entonces $S = aT_1 + bT_2$ para algunos enteros a, b . Se verifica

$$e_n(S, dT_2) = e_n(T_1, dT_2)^a e_n(T_2, dT_2)^b = 1.$$

Como esto es válido para cualquier S , (2) implica que $dT_2 = \infty$. Pero $dT_2 = \infty$ si y solo si $n \mid d$, luego ζ es una raíz primitiva. \square

Ya podemos realizar las demostraciones pendientes de las proposiciones 3.29 y 3.30.

Demostración de la proposición 3.29. Por el corolario 3.32, $\zeta = e_n(T_1, T_2)$ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad. Por las propiedades del endomorfismo Weil 3.31, se tiene

$$\begin{aligned} \zeta^{\deg(\alpha)} &= e_n(\alpha(T_1), \alpha(T_2)) = e_n(aT_1 + cT_2, bT_1 + dT_2) \\ &= e_n(T_1, T_1)^{ab} e_n(T_1, T_2)^{ad} e_n(T_2, T_1)^{cb} e_n(T_2, T_2)^{cd} \\ &= \zeta^{ad-bc} \end{aligned}$$

donde los coeficientes a, b, c, d son las entradas de la matriz α_n de la definición 3.28. Usando que ζ es una raíz primitiva, tenemos

$$\deg(\alpha) \equiv ad - bc \pmod{n}.$$

\square

Demostración de la proposición 3.30. Sea n un entero no divisible por la característica de K . Representamos α y β por matrices α_n y β_n (con respecto a alguna base de $E[n]$). Entonces $a\alpha_n + b\beta_n$ representa la acción de $a\alpha + b\beta$ sobre $E[n]$. Un cálculo directo resulta

$$\begin{aligned} \det(a\alpha_n + b\beta_n) &= a^2 \det(\alpha_n) + b^2 \det(\beta_n) \\ &\quad + ab(\det(\alpha_n + \beta_n) - \det(\alpha_n) - \det(\beta_n)) \end{aligned}$$

para cualquier matriz α_n y β_n . Por tanto,

$$\begin{aligned} \deg(a\alpha + b\beta) &\equiv a^2 \deg(\alpha) + b^2 \deg(\beta) \\ &\quad + ab(\deg(\alpha + \beta) - \deg(\alpha) - \deg(\beta)) \pmod{n} \end{aligned}$$

Como esto es válido para cualquier n , debe ser una igualdad. \square

3.3 CURVAS ELÍPTICAS SOBRE CUERPOS FINITOS

Sea \mathbb{F}_q un cuerpo finito de q elementos, donde q es la potencia n -ésima de un primo p y sea E una curva elíptica definida sobre \mathbb{F}_q . Como el número de pares (x, y) con $x, y \in \mathbb{F}_q$ es finito, el grupo de puntos $E(\mathbb{F}_q)$ es finito. En este apartado estudiaremos propiedades de este grupo, como el orden, que serán importantes en muchos contextos.

Los dos resultados más importantes se dan en los siguientes dos teoremas.

Teorema 3.33

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo finito \mathbb{F}_q . Entonces

$$E(\mathbb{F}_q) \simeq \mathbb{Z}_n \text{ or } \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2}$$

para algún entero $n \geq 1$ o para algunos enteros $n_1, n_2 \geq 1$ con $n_1 \mid n_2$.

Demostración. Como $E(\mathbb{F}_q)$ es un grupo abeliano finito, será isomorfo a una suma directa de grupos cíclicos

$$\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \dots \mathbb{Z}_{n_r}$$

con $n_i \mid n_{i+1}$. Como, para cada i , el grupo \mathbb{Z}_{n_i} tiene n_i elementos de orden n_i , tenemos que $E(\mathbb{F}_q)$ tiene n_1^r elementos de orden un divisor de n_1 . Por el teorema 3.26, hay hasta n_1^2 (incluso si permitimos coordenadas en la clausura algebraica de \mathbb{F}_q). Por tanto, $r \leq 2$. \square

Teorema 3.34 (Teorema de Hasse)

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo finito \mathbb{F}_q . Entonces el orden de $E(\mathbb{F}_q)$ verifica

$$|q + 1 - |E(\mathbb{F}_q)|| \leq 2\sqrt{q}.$$

Demostración. Véase apartado 3.3.3. \square

3.3.1 Ley de grupo para $E(\mathbb{F}_{2^m})$

En el apartado 3.1.2, clasificamos las curvas elípticas sobre \mathbb{F}_{2^m} según eran supersingulares o no. Ahora podemos definir este concepto.

Definición 3.35

Sea E una curva elíptica sobre un cuerpo base de característica p . Diremos que E es *supersingular* si $E[p] = \{\infty\}$.

Una ventaja de las curvas supersingulares es que los cálculos involucrados en la multiplicación de un punto por un escalar se pueden hacer con aritmética de cuerpos finitos, que es en general más rápida que la aritmética de curvas elípticas [1, cap. 4]. Sin embargo, estas curvas no son seguras en criptografía ya que son vulnerables a un tipo de ataques conocidos como ataques de emparejamiento Weil y Tate [2, cap. 4]. Por este último motivo, sólo vamos a dar las fórmulas de adición para curvas no supersingulares sobre \mathbb{F}_{2^m} .

Fórmulas de adición 3.36

Sea E una curva elíptica definida por la ecuación $y^2 + xy = x^3 + ax^2 + b$ sobre el cuerpo finito \mathbb{F}_{2^m} . Las fórmulas de adición son las siguientes:

- a) $P + \infty = \infty + P = P$, para todo $P \in E(\mathbb{F}_{2^m})$
- b) Si $P = (x, y) \in E(\mathbb{F}_{2^m})$, entonces $(x, y) + (x, x + y) = \infty$ ya que $-P = (x, x + y)$. Además, $-\infty = \infty$.
- c) Sea $P = (x_1, y_1) \in E(\mathbb{F}_{2^m})$ y $Q = (x_2, y_2) \in E(\mathbb{F}_{2^m})$, donde $P \neq \pm Q$. Entonces $P + Q = (x_3, y_3)$, donde

$$x_3 = \lambda^2 \lambda + x_1 + x_2 + a, \quad y_3 = \lambda(x_1 + x_3) + x_3 + y_1$$

$$\text{con } \lambda = (y_1 + y_2)/(x_1 + x_2).$$

- d) Sea $P = (x_1, y_1) \in E(\mathbb{F}_{2^m})$, donde $P \neq -P$. Entonces $2P = (x_3, y_3)$ donde:

$$x_3 = \lambda^2 \lambda + a = x_1^2 + b/x_1^2, \quad y_3 = x_1^2 + \lambda x_3 + x_3$$

$$\text{con } \lambda = x_1 + y_1/x_1.$$

3.3.2 Endomorfismo de Frobenius

En este apartado veremos un ejemplo importante de endomorfismo, que es la generalización el endomorfismo de Frobenius sobre cuerpos de característica p , y que jugará un papel crucial en la teoría de curvas elípticas sobre cuerpos finitos.

Proposición 3.37

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo finito \mathbb{F}_q . La aplicación definida por

$$\phi_q(x, y) = (x^q, y^q), \quad \phi_q(\infty) = \infty$$

es un endomorfismo y se llama *endomorfismo de Frobenius*.

Demostración. Veamos primero que $\phi_q(x, y) \in E(\overline{\mathbb{F}_q})$. Usaremos las siguientes propiedades de los cuerpos finitos de característica p :

$$(a + b)^q = a^q + b^q, \quad \forall a, b \in \overline{\mathbb{F}_q}$$

$$a^q = a, \quad \forall a \in \mathbb{F}_q.$$

Como la demostración es esencialmente la misma para la ecuación de Weierstrass general y la ecuación simplificada para cuerpos base de característica distinta de 2 y 3, usaremos esta última. Tenemos

$$y^2 = x^3 + ax + b,$$

donde $a, b \in \mathbb{F}_q$. Elevando todo a la potencia q -ésima obtenemos

$$(y^q)^2 = (x^q)^3 + a(x^q) + b.$$

Luego (x^q, y^q) está en E . Veamos ahora ϕ_q es un homomorfismo. Sea $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E(\overline{\mathbb{F}_q})$ con $x_1 \neq x_2$. La suma es (x_3, y_3) con

$$x_3 = m^2 - x_1 - x_2, \quad y_3 = m(x_1 - x_3) - y_1, \quad \text{donde } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Elevando todo a la potencia q -ésima obtenemos

$$x_3^q = m'^2 - x_1^q - x_2^q, \quad y_3^q = m'(x_1^q - x_3^q) - y_1^q, \quad \text{donde } m' = \frac{y_2^q - y_1^q}{x_2^q - x_1^q}.$$

Por tanto,

$$\phi_q(x_3, y_3) = \phi_q(x_1, y_1) + \phi_q(x_2, y_2).$$

Los casos donde $x_1 = x_2$ o uno de los dos puntos es ∞ se comprueban fácilmente. Sin embargo, el caso de añadir un punto consigo mismo presenta una sutileza. Usando las fórmulas, tenemos que $2(x_1, y_1) = (x_3, y_3)$ donde

$$x_3 = m^2 - 2x_1, \quad y_3 = m(x_1 - x_3) - y_1, \quad \text{donde } m = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1}.$$

Cuando elevamos a la potencia q -ésima, obtenemos

$$x_3^q = m'^2 - 2^q x_1^q, \quad y_3^q = m'(x_1^q - x_3^q) - y_1^q, \quad \text{donde } m' = \frac{3^q (x_1^q)^2 + a^q}{2^q y_1^q}.$$

Como $2, 3, a \in \mathbb{F}_q$, tenemos $2^q = 2$, $3^q = 3$, $a^q = a$. Luego hemos obtenido la fórmula para duplicar el punto (x_1^q, y_1^q) de E .

Finalmente, como ϕ_q es un homomorfismo dado por funciones racionales, es un endomorfismo de E . \square

Nótese que este endomorfismo no es más que aplicar el *automorfismo de Frobenius*

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{F}_q} &\rightarrow \overline{\mathbb{F}_q} \\ x &\mapsto x^q\end{aligned}$$

sobre las componentes de un punto. Veamos ahora unas cuantas propiedades de este endomorfismo.

Lema 3.38

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo finito \mathbb{F}_q y sea $(x, y) \in E(\overline{\mathbb{F}_q})$. Entonces

$$(x, y) \in E(\mathbb{F}_q) \iff \phi_q(x, y) = (x, y).$$

Demostración. Usando $a^q = a$, $\forall a \in \mathbb{F}_q$, tenemos

$$\begin{aligned}(x, y) \in E(\mathbb{F}_q) &\iff x, y \in \mathbb{F}_q \\ &\iff \phi_q(x) = x \text{ y } \phi_q(y) = y \\ &\iff \phi_q(x, y) = (x, y).\end{aligned}$$

□

Lema 3.39

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo finito \mathbb{F}_q . Entonces ϕ_q no es separable y es de grado q .

Demostración. Como $q = 0$ en \mathbb{F}_q , la derivada de x^q es idénticamente cero, luego ϕ_q no es separable. Por otro lado, ϕ_q tiene grado q aplicando la definición de grado de un endomorfismo. □

Proposición 3.40

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo finito \mathbb{F}_q , donde q es una potencia de un primo p . Sean r, s enteros no nulos. El endomorfismo $r\phi_q + s$ es separable si y solo si $p \nmid s$.

Demostración. Podemos escribir el endomorfismo multiplicación por r como

$$r(x, y) = (R_r(x), yS_r(x))$$

por el lema 3.17. Entonces

$$\begin{aligned}(R_{r\phi_q}(x), yS_{r\phi_q}(x)) &= (\phi_q r)(x, y) = (R_r^q(x), y^q S_r^q(x)) \\ &= (R_r^q(x), y(x^3 + ax + b)^{(q-1)/2} S_r^q(x)).\end{aligned}$$

Así,

$$c_{r\phi_q} = R'_{r\phi_q}/S_{r\phi_q} = qR_r^{q-1}R'_r/S_{r\phi_q} = 0.$$

Además, $c_s = R'_s/S_s = s$ por la proposición 3.22. Por el lema 3.23,

$$R'_{r\phi_q+s}/S_{r\phi_q+s} = c_{r\phi_q+s} = c_{r\phi_q} + c_s = 0 + s = s$$

Por lo tanto, $r\phi_q + s$ es separable si y solo si $R'_{r\phi_q+s} \neq 0$ y esto ocurre si y solo si $p \nmid s$. \square

Proposición 3.41

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo finito \mathbb{F}_q y consideremos el endomorfismo $\phi_q^n - 1$ con $n \geq 1$. Entonces

1. $\ker(\phi_q^n - 1) = E(\mathbb{F}_{q^n})$.
2. $\phi_q^n - 1$ es separable, por lo que $|E(\mathbb{F}_{q^n})| = \deg(\phi_q^n - 1)$.

Demostración. Como ϕ_q^n es el endomorfismo de Frobenius para el cuerpo \mathbb{F}_{q^n} , (1) es consecuencia del lema 3.38. (2) se tiene aplicando las proposiciones 3.40 y 3.20. \square

Lema 3.42

Sean r, s enteros. Entonces $\deg(r\phi_q - s) = r^2q + s^2 - rsa$.

Demostración. La proposición 3.30 implica que

$$\begin{aligned} \deg(r\phi_q - s) &= r^2 \deg(\phi_q) + s^2 \deg(-1) \\ &\quad + rs(\deg(\phi_q - 1) - \deg(\phi_q) - \deg(-1)). \end{aligned}$$

Como $\deg(\phi_q) = q$ y $\deg(-1) = 1$, el resultado se deduce de 3.41 y 3.33. \square

3.3.3 Teorema de Hasse

Tenemos ya todas las herramientas para probar el teorema de Hasse.

Teorema (3.34)

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo finito \mathbb{F}_q . Entonces el orden de $E(\mathbb{F}_q)$ verifica

$$|q + 1 - |E(\mathbb{F}_q)|| \leq 2\sqrt{q}.$$

Demostración del teorema 3.34. Sea

$$\alpha = q + 1 - |E(\mathbb{F}_q)| = q + 1 - \deg(\phi_q - 1)$$

donde estamos usando proposición 3.41. Veamos que $|\alpha| \leq 2\sqrt{q}$.

Como $\deg(r\phi_q - s) \geq 0$, el lema 3.42 implica que

$$q \left(\frac{r}{s}\right)^2 - \alpha \left(\frac{r}{s}\right)^2 + 1 \geq 0.$$

para cualesquiera enteros r, s . Como el conjunto de los racionales es *denso* en \mathbb{R} , tenemos que

$$qx^2 - \alpha x + 1 \geq 0$$

para todo número real x . Así, el discriminante de este polinomio es negativo o cero, lo que implica que $\alpha^2 - 4q \leq 0$, luego $|\alpha| \leq 2\sqrt{q}$. \square

Nota 3.43 (comentarios del teorema 3.34).

- Como la ecuación de Weierstrass tiene al menos dos soluciones para todo $x \in \mathbb{F}_q$, una primera acotación del orden de $E(\mathbb{F}_q)$ es $|E(\mathbb{F}_q)| \in [1, 2q + 1]$. El teorema de Hasse proporciona cotas más optimas:

$$|E(\mathbb{F}_q)| \in [q + 1 - 2\sqrt{q}, q + 1 + 2\sqrt{q}].$$

Como $2\sqrt{q}$ es pequeño respecto a q , $E(\mathbb{F}_q) \approx q$.

- Tres resultados fueron clave para la demostración:
 - La identificación de $E(\mathbb{F}_q)$ con el núcleo de $\phi_q - 1$.
 - La igualdad entre el orden del núcleo y el grado de $\phi_q - 1$ gracias a la separabilidad de $\phi_q - 1$.
 - El emparejamiento Weil, especialmente la parte (6) del teorema 3.31 y su consecuencia 3.41.

En este capítulo haremos el desarrollo informático sobre criptografía con curvas elípticas. En el apartado 4.1 hablaremos sobre criptografía asimétrica utilizando curvas elípticas, explicaremos algunos protocolos criptográficos con curvas elípticas en el apartado 4.2 y por último en el apartado 4.3 hablaremos del programa desarrollado para trabajar con curvas elípticas y protocolos criptográficos.

Las principales referencias utilizadas para el desarrollo informático han sido [2], [5], [1] y [3].

4.1 CRIPTOGRAFÍA CON CURVAS ELÍPTICAS

En esta sección trataremos las ventajas de los sistemas basados en curvas elípticas, el problema del logaritmo discreto y sus ataques y dos aspectos comunes de los protocolos criptográficos que vamos a ver: los parámetros de dominio y las parejas de llaves.

4.1.1 *Ventajas de los sistemas basados en curvas elípticas.*

En los esquemas criptográficos de llave pública, la pareja de llaves se selecciona de tal modo que el problema de calcular la llave privada a partir de la pública sea equivalente a resolver un problema computacional intratable. Los dos principales problemas intratables usados en los sistemas de llave pública son:

- El problema de factorización de enteros.
- El problema del logaritmo discreto, tratado en el apartado 4.1.2.

Un ejemplo de sistema basado en el problema de la factorización es el sistema RSA mientras que un ejemplo basado en el problema del logaritmo discreto son los sistemas basados en curvas elípticas.

La tabla 5, extraída de [2], da estimaciones del tamaño en bits de los parámetros de estos sistemas (el orden n del subgrupo generado por el punto base de los sistemas basados en curvas elípticas, y el módulo n del sistema RSA) bajo un mismo nivel de seguridad. Un *nivel de seguridad* de k bits implica que el mejor algoritmo para romper el sistema toma aproximadamente 2^k pasos.

Las comparaciones de la tabla 5 demuestran para un nivel de seguridad dado, se puede usar parámetros más pequeños en los sistemas basados en curvas elípticas que en el sistema RSA. La diferencia del tamaño de los parámetros es especialmente pronunciada para altos niveles de seguridad.

	Nivel de seguridad (bits)				
	80	112	128	192	256
Sistemas basados en curvas elípticas (parámetro n)	160	224	256	384	514
RSA (módulo n)	1024	2048	3072	8192	15360

Tabla 5: Comparación de tamaños de llaves para niveles de seguridad equivalentes.

Las ventajas en el uso de parámetros más pequeños incluyen velocidad (cálculos más rápidos), y llaves y certificados más pequeños. En particular, las operaciones de llave privada (como la generación de la firma y el descifrado) en los sistemas de curvas elípticas son mucho más eficientes que en el sistema RSA. Por otro lado, las operaciones de llave pública (como la verificación de la firma y el cifrado) en los sistemas RSA son algo más eficientes. Las ventajas de los sistemas basados en curvas elípticas pueden ser importantes en entornos donde la potencia de cómputo, el almacenamiento o el ancho de banda sean limitados.

4.1.2 Problema del logaritmo discreto

Como ya introducimos en el apartado anterior, la dificultad del problema del logaritmo discreto es la base para la seguridad de la criptografía asimétrica sobre curvas elípticas.

Definición 4.1

El *problema del logaritmo discreto sobre curvas elípticas (ECDLP)* es: dada una curva elíptica E definida sobre un cuerpo finito \mathbb{F}_q , un punto $P \in E(\mathbb{F}_q)$ de orden n y un punto $Q \in \langle P \rangle$, encontrar el entero $k \in [0, n-1]$ tal que $Q = kP$. El entero k se llama el *logaritmo discreto de Q respecto a la base P* y se denota $k = \log_P Q$.

El ataque más simple para resolver el ECDLP es el ataque por *fuerza bruta*, esto es, probar todos los valores posibles de k hasta dar con el válido. El tiempo de ejecución es aproximadamente n pasos en el peor caso y $n/2$ pasos en el caso medio. Así, el ataque por fuerza bruta puede ser evitado tomando puntos base cuyo orden n sea suficientemente largo (p. ej. $n > 2^{80}$).

El mejor ataque conocido para curvas arbitrarias es la combinación del *algoritmo de Pohlig-Hellman* y del *algoritmo rho de Pollard* cuyo tiempo de ejecución es exponencial en $\log p$, donde p es el divisor primo más grande de n . Para resistir este ataque, se deben elegir puntos

base cuyo orden n sea divisible por un primo p suficiente grande (p. ej. $p > 2^{160}$).

Además se deben evitar ciertos tipos de curvas para los cuales existen ataques específicos más rápidos que el algoritmo rho de Pollard, llamados *ataques por isomorfismo*. Así pues, se deben evitar curvas *anómalas* (curvas cuyo orden es de la forma $|E(\mathbb{F}_p)| = p$), curvas supersingulares (véase 3.35), curvas con órdenes de la forma $|E(\mathbb{F}_q)| = q - 1$ y curvas sobre \mathbb{F}_{2^m} si m es compuesto. Adicionalmente, se debe comprobar que n no divide a $q^k - 1$ para todo $1 \leq k \leq C$, donde C es suficientemente grande (si $n > 2^{160}$, entonces $C = 20$ basta).

Si se siguen estas restricciones, se cree que el ECDLP no es factible con la tecnología actual. Nótese que no existe prueba matemática de la intratabilidad del ECDLP, esto es, nadie ha probado que no existe un algoritmo eficiente que lo resuelve. Puede encontrar más información sobre el ECDLP y sus ataques en [2, cap. 4] y en [1, cap. 4].

4.1.3 Parámetros de dominio

Los parámetros de dominio de un esquema criptográfico con curvas elípticas describen una curva elíptica E definida sobre un cuerpo finito \mathbb{F}_q , un punto base $P \in E(\mathbb{F}_q)$ y su orden n . Los parámetros deben ser elegidos para que el ECDLP sea resistente a los ataques conocidos.

Definición 4.2

Los *parámetros de dominio* $D = (q, a, b, P, n)$ están constituidos por:

- El orden q del cuerpo finito.
- Dos coeficientes $a, b \in \mathbb{F}_q$ que definen la ecuación de la curva elíptica E sobre \mathbb{F}_q (p. ej. $y^2 = x^3 + ax + b$ si la característica del cuerpo finito es distinta de 2 y 3 o $y^2 + xy = x^3 + ax^2 + b$ si la característica es 2).
- Dos elementos $x_p, y_p \in \mathbb{F}_q$ que definen el punto $P = (x_p, y_p) \in E(\mathbb{F}_q)$. P se conoce como el *punto base*.
- El orden n de P , normalmente un número primo.

A la hora de elegir los parámetros de dominio, existen dos opciones. Por un lado, se pueden generar aleatoriamente y posteriormente validarlos para comprobar que describen una curva elíptica segura. Nótese que para cumplir las restricciones de seguridad es necesario determinar el número de puntos de una curva elíptica. Entre los distintos algoritmos para ello (fuerza bruta, el método de multiplicación

compleja, ...) el mejor es el algoritmo de Schoof-Elkies-Atkin (SEA). En [2, cap. 4] puede encontrar los algoritmos de generación y validación de parámetros de dominio, mientras que en [3, cap. XI] puede encontrar una descripción del algoritmo SEA.

Por otro lado, los parámetros de dominio se pueden elegir de algún *estándar*. Organizaciones como el Instituto Nacional de Normas y Tecnología (NIST) o el Grupo de Estándares para la Criptografía Eficiente (SECG), entre muchos otros, publican parámetros de dominio verificados. En [2, apéndice B] puede encontrar algunas de estas organizaciones y los estándares que han publicado.

4.1.4 Generación de llaves

En los protocolos que vamos a ver, cada participante dispondrá de una pareja de llaves: una llave privada (conocida solo por dicho participante) y una llave pública (publicada al resto de participantes). Esta pareja de llaves estará asociada a unos parámetros de dominio particulares. Para generar la pareja de llaves, se elige un punto aleatorio $Q = dP$ en el grupo $\langle P \rangle$. La correspondiente llave privada es $d = \log_p Q$.

Algoritmo 4.3. Sea $D = (q, a, b, P, n)$ los parámetros de dominio. Los pasos para generar una pareja de llaves son:

1. Seleccionar $d \in [1, n - 1]$ aleatoriamente.
2. Calcular $Q = dP$.
3. Devolver (Q, d) donde Q es la llave pública y d la llave privada.

Nótese que el problema de calcular la llave privada a partir de la llave pública es precisamente el ECDLP. Por eso es crucial que los parámetros de dominio sean seleccionados de tal forma que el ECDLP sea intratable. Además, es necesario que los participantes validen las llaves públicas en todo procedimiento ya que existen ataques efectivos si no se hacen algunas comprobaciones [2, cap. 4].

4.2 PROTOCOLOS CRIPTOGRÁFICOS

En esta sección vamos a ver dos ejemplos de protocolos criptográficos que usan curvas elípticas. El primero será un protocolo de intercambio de llaves y el segundo será un esquema de firma digital. Describiremos ambos protocolos a nivel de introducción. Para detalles técnicos véase [2, cap. 4].

Como es común en criptografía, vamos a representar a los participantes que desean comunicarse como Alicia y Bob y representaremos al atacante por Eva.

4.2.1 Protocolo Diffie-Hellman

El primer protocolo que vamos a ver es el *Protocolo de Intercambio de Llaves Diffie-Hellman para Curvas Elípticas* o ECDH.

Protocolo criptográfico 4.4 (ECDH). El siguiente procedimiento permite a Alicia y Bob intercambiar de forma segura el valor de un punto en una curva elíptica aunque ninguno de los dos conozca inicialmente el valor del punto.

1. Alicia y Bob concuerdan unos parámetros de dominio $D = (q, a, b, P, n)$.
2. Alicia calcula su pareja de llaves (Q_A, d_A) según 4.3.
3. Bob calcula su pareja de llaves (Q_B, d_B) según 4.3.
4. Alicia y Bob intercambian sus llaves pública Q_A, Q_B .
5. Alicia calcula $d_A Q_B$ y Bob calcula $d_B Q_A$. Ambos cálculos devuelven el punto $(d_A d_B)P$.

La utilidad de este protocolo es que permite que Alicia y Bob intercambien una llave por un canal inseguro que pueda ser utilizada posteriormente para transmitir datos sobre un esquema de cifrado simétrico como el Advanced Encryption Standard o AES. Esta llave se suele obtener extrayendo unos cuantos bits de la coordenada x de $(d_A d_B)P$ o evaluando una función hash en dicha coordenada x .

El atacante, Eva, conoce los parámetros de dominio y las llaves públicas Q_A y Q_B , por lo que si Eva fuera capaz de resolver el ECDLP podría encontrar las llaves privadas d_A y d_B y recuperar el punto secreto $(d_A d_B)P$. Sin embargo, en principio Eva no necesita encontrar d_A o d_B . Le basta con resolver el problema de Diffie-Hellman: dados tres puntos $P, d_A P, d_B P$ en $E(\mathbb{F}_q)$, calcular el punto $(d_A d_B)P$. Actualmente, la única forma de resolver el problema de Diffie-Hellman es resolver el problema del logaritmo discreto asociado pero no se sabe si ambos problemas son equivalentes [2].

4.2.2 Protocolo ECDSA

Un *esquema de firma digital* permite a Alicia usar su llave privada para firmar un documento (p. ej. un fichero del ordenador) de tal forma que Bob puede usar la llave pública de Alicia para verificar la validez de la firma. Un ejemplo de esto es el *Algoritmo de Firma Digital para Curvas Elípticas* o ECDSA.

Protocolo criptográfico 4.5 (ECDSA). El siguiente procedimiento permite a Alicia firmar un documento digital y a Bob verificar que la firma es válida.

1. Alicia y Bob concuerdan unos parámetros de dominio $D = (q, a, b, P, n)$, con n primo.
2. Alicia calcula su pareja de llaves (Q, d) según 4.3.
3. Alicia representa el documento con un entero m (por ejemplo con una función hash).
4. Alicia calcula la firma (r, s) de m de la siguiente forma:
 - Selecciona $k \in [1, n - 1]$ aleatoriamente.
 - Calcula el punto $kP = (x, y)$.
 - Calcula \bar{x} como el representante entero del elemento $x \in F_q$.
 - Calcula $s \equiv k^{-1}(m + d\bar{x}) \pmod{n}$.
5. Alicia publica (m, r, s, Q) .
6. Bob verifica la firma de la siguiente forma:
 - Calcula $u_1 \equiv ms^{-1} \pmod{n}$.
 - Calcula $u_2 \equiv rs^{-1} \pmod{n}$.
 - Calcula el punto $X = u_1P + u_2Q$.
 - Calcula v como el representante entero de la coordenada x de X .
 - Comprueba si $v \equiv r \pmod{n}$. En caso afirmativo, la firma es válida. En caso negativo, la firma no es válida.

Demostración de que la verificación de la firma funciona. Si una firma (r, s) de un mensaje m fue generada por el firmador legítimo, entonces $s \equiv k^{-1}(m + dr) \pmod{n}$. Reordenando se tiene

$$k \equiv s^{-1}(m + dr) \equiv s^{-1}m + s^{-1}rd \equiv u_1 + u_2d \pmod{n},$$

Así $X = u_1P + u_2Q = (u_1 + u_2d)P = kP$, por lo que $v = r$ como se requería. \square

Análogamente al protocolo Diffie-Hellman, si Eva, el atacante, pudiera calcular logaritmos discretos, entonces podría calcular la llave privada d y firmar como Alicia en cada mensaje. Por otro lado, si el número aleatorio k se reutiliza, Eva podría recuperar d sin necesidad de resolver el ECDLP. Por ello, k debe ser generando de forma segura, almacenado de forma segura y destruido de forma segura tras haber sido utilizado.

En el paso (3) es recomendable utilizar una función hash para firmar documentos grandes y prevenir varios tipos de ataques. Ejemplo de funciones hash comunes son MD5 (Message-Digest Algorithm 5) y la familia de algoritmos SHA (Secure Hash Algorithm). Puede encontrar más información sobre este protocolo en [2].

4.3 CRIPTOGRAFÍA CON CURVAS ELÍPTICAS CON PYTHON

En esta sección se explica el programa que he desarrollado, Criptografía con Curvas Elípticas con Python o ccepy. Este programa permite trabajar con el grupo de puntos de una curva elíptica y desarrollar protocolos criptográficos que usen curvas elípticas.

Se adjunta a este documento los ficheros con el código fuente del programa y una página web con su documentación.

4.3.1 Motivación

Existen diversos software de álgebra computacional que permiten hacer cálculos sobre curvas elípticas. [1] muestra como usar algunos de los principales ejemplos en este ámbito como Pari, Magma y Sage.

El principal motivo para implementar un programa y no utilizar uno ya existente ha sido para aplicar los conceptos aprendidos en el desarrollo matemático e implementar los algoritmos estudiados en los apartados 4.1 y 4.2 del desarrollo informático. Sin embargo, y no menos importante, otro motivo era crear un programa libre y gratuito, fácil de entender y extender y con una documentación extensa en español.

A diferencia de grandes soluciones como Magma o Sage, ccepy es framework *minimalista*, es decir, provee un conjunto de funcionalidades imprescindibles para cualquiera que desee trabajar con curvas elípticas y a partir de dichas funcionalidades es muy fácil añadir nuevas mejoras. Además, dichas funcionalidades se han implementado siguiendo un diseño lo más simple posible, de tal forma que entender el programa en su totalidad requiere un esfuerzo mínimo comparado con otros software.

4.3.2 Herramientas utilizadas

Se ha utilizado python3 como lenguaje de programación para ccepy. La lógica del programa no usa ninguna biblioteca externa, solo utiliza la biblioteca estándar de python. Por eso, con tener python3 instalado es suficiente para usar ccepy. En la documentación adjunta se detalla como usar este programa.

Sin embargo, para generar la documentación o ejecutar las pruebas, si es necesario instalar bibliotecas externas: sphinx y hypothesis. sphinx se ha utilizado para realizar la documentación mientras que hypothesis se ha utilizado para realizar pruebas basados en propiedades. Estos procesos están detallados en los apartados 4.3.6 y 4.3.5 respectivamente.

Como control de versiones se ha utilizado git.

Por último, aunque no es una herramienta, destacar que se ha utilizado la «Guía de Estilo de Google para Python» para mantener una convención es la escritura del código.

4.3.3 *Arquitectura*

El software ccepy consta de cuatro módulos principales:

```
Aritmética elemental
Cuerpos finitos
Curvas elípticas
Esquemas criptográficos
```

y un módulo secundario Listado de curvas elípticas.

Cada módulo principal usa los módulos anteriores, en el sentido que el módulo de cuerpos finitos usa el de aritmética elemental, el módulo de curvas elípticas usa el módulo de cuerpos finitos (y en consecuencia el de aritmética elemental) y el módulo de esquemas criptográficos usa el módulo de curvas elípticas (y en consecuencia el de cuerpos finitos y aritmética elemental).

4.3.4 *Implementación*

Para implementar ccepy hemos seguido un diseño orientado a objetos ya que los elementos algebraicos que queremos implementar (enteros módulo un primo, elementos de un cuerpo finito, puntos de una curva elíptica) se pueden manejar muy bien representándolos como objetos y clases.

La estructura en directorios es la siguiente:

```
ccepy/
  ccepy/
  docs/
  tests/
```

La carpeta ccepy/ccepy contiene el código fuente los módulos listados en 4.3.3, ccepy/docs contiene la documentación y el código que la genera y por último ccepy/tests contiene las pruebas unitarias y basadas en propiedades.

El objetivo final es conseguir implementar los protocolos criptográficos explicados en el apartado 4.2. Por ello, explicaremos primero lo más esencial, el módulo de aritmética elemental.

Nota 4.6. Este apartado *no* es la documentación. En esta sección se contarán los detalles técnicos de la implementación como la estructura de datos o los algoritmos no triviales utilizados. Para ver un listado de las funciones, las clases con sus atributos y sus métodos diríjase a la documentación adjunta en formato de página web.

4.3.4.1 Módulo de aritmética elemental

Este módulo permite operar con enteros módulo un primo p y polinomios cuyos coeficientes sean enteros módulo un primo p . El código fuente de este módulo está en el archivo `aritmetica_elemental.py`.

Los enteros módulo un primo se han representado con la clase `EnteroModuloP`. Para tener clases distintas para módulos distintos (para que cada clase tenga como atributo de clase el primo con el que se hace el módulo), se ha imitado la filosofía del patrón *factoría*, esto es, hemos creado una función `Zp()` que acepta como parámetro un número primo y devuelve la clase que representa los enteros módulo dicho primo. Podemos ver la función `Zp` como el constructor de cuerpos \mathbb{Z}_p . Esto lo hemos podido hacer ya que python permite definir clases dentro de funciones y devolver definiciones de clases como valor de retorno de una función. Además, hemos utilizado el decorador `@lru_cache()` del módulo `functools` de la biblioteca estándar de python para que llamadas iguales sucesivas a `Zp()` devuelvan el mismo objeto y no se creen copias de una misma clase para un mismo primo.

Además, `EnteroModuloP` es subclase del tipo básico `int`. Así, hemos implementado los operadores $+$, $-$, $*$, $/$ y $**$ simplemente llamando a dichos operadores ya implementados para el tipo de dato `int` y haciendo $\%$ en cada operación. Además, gracias a esta herencia, se permite usar estas operaciones con un dato de tipo `EnteroModuloP` y otro de tipo `int`, devolviendo el resultado como dato de tipo `EnteroModuloP`.

La clase `EnteroModuloP` utiliza el *algoritmo extendido de Euclides* para el cálculo de inversos. El algoritmo, extraído de [5], es el siguiente:

Algoritmo 4.7 (Algoritmo extendido de Euclides para enteros).

ENTRADA: dos enteros no negativos a y b con $a \geq b$.

SALIDA: $d = \text{mcd}(a, b)$ y enteros x, y satisfaciendo $ax + by = d$.

1. Si $b = 0$, tomar $d \leftarrow a$, $x \leftarrow 1$, $y \leftarrow 0$ y devolver (d, x, y) .
2. Inicializar $x_2 \leftarrow 1$, $x_1 \leftarrow 0$, $y_2 \leftarrow 0$, $y_1 \leftarrow 1$.
3. Mientras $b > 0$, hacer lo siguiente:
 - a) $q \leftarrow \lfloor a/b \rfloor$, $r \leftarrow a - qb$, $x \leftarrow x_2 - qx_1$, $y \leftarrow y_2 - qy_1$.
 - b) $a \leftarrow b$, $b \leftarrow r$, $x_2 \leftarrow x_1$, $x_1 \leftarrow x$, $y_2 \leftarrow y_1$ y $y_1 \leftarrow y$.
4. Tomar $d \leftarrow a$, $x \leftarrow x_2$, $y \leftarrow y_2$ y devolver (d, x, y) .

Este algoritmo está encapsulado en la función `alg_euclides()`. Así, el cálculo del inverso de un elemento $a \in \mathbb{Z}_p$ se reduce a calcular el algoritmo de Euclides para la pareja (a, p) y el inverso es el coeficiente x .

Los polinomios con coeficientes enteros módulo un primo se han representando con la clase `PolinomioZp`. Internamente, cada objeto de `PolinomioZp` contiene una lista de python de datos de tipo `EnteroModuloP`.

(que representan los coeficientes del polinomio) y un entero (que representa el primo con el que se hizo módulo los coeficientes). La lista se ha definido como una *propiedad* de python para permitir solo los accesos de lectura.

PolinomioZp implementa los operadores $+$, $-$, $*$, $/$, $\%$ y $**$ para operar entre polinomios más cómodamente. También se ha implementado el método `__hash__()` para poder utilizar posteriormente el decorador `lru_cache()` sobre la función `Fq()` del módulo de cuerpos finitos ya que este decorador requiere que todos los argumentos de la función sobre la que se aplica tengan como representación un número entero y esta representación debe definirse en el método `__hash__()`.

De entre todos los métodos de PolinomioZp, destacamos `es_irreducible()`. Como este método utiliza el *algoritmo extendido de Euclides para polinomios*, vamos a detallar primero este.

Algoritmo 4.8 (Algoritmo extendido de Euclides para polinomios).

ENTRADA: dos polinomios $g, h \in \mathbb{Z}_p[X]$.

SALIDA: $d = \text{mcd}(g, h)$ y polinomios $s, t \in \mathbb{Z}_p[X]$ satisfaciendo $sg + th = d$.

1. Si $h = 0$, tomar $d \leftarrow g$, $s \leftarrow 1$, $t \leftarrow 0$ y devolver (d, s, t) .
2. Inicializar $s_2 \leftarrow 1$, $s_1 \leftarrow 0$, $t_2 \leftarrow 0$, $t_1 \leftarrow 1$.
3. Mientras $h \neq 0$, hacer lo siguiente:
 - a) $q \leftarrow g \text{ div } h$, $r \leftarrow g - hq$.
 - b) $s \leftarrow s_2 - qs_1$, $t \leftarrow t_2 - qt_1$.
 - c) $g \leftarrow h$, $h \leftarrow r$.
 - d) $s_2 \leftarrow s_1$, $s_1 \leftarrow s$, $t_2 \leftarrow t_1$ y $t_1 \leftarrow t$.
4. Tomar $d \leftarrow g$, $s \leftarrow s_2$, $t \leftarrow t_2$ y devolver (d, s, t) .

Este algoritmo está encapsulado en la función `alg_euclides_polinomios()`. Así pues, el método `es_irreducible()` se encarga de ver si un polinomio es irreducible de manera eficiente en $\mathbb{Z}_p[X]$ y para ello utiliza el siguiente procedimiento.

Algoritmo 4.9.

ENTRADA: un primo p y un polinomio mónico $f(x)$ de grado m en $\mathbb{Z}_p[X]$.

SALIDA: verdadero o falso según $f(x)$ sea irreducible o no.

1. Inicializar $u(x) \leftarrow x$.
2. Para i desde 1 hasta $\lfloor m/2 \rfloor$, hacer lo siguiente:
 - a) Calcular $u(x) \leftarrow u(x)^p \bmod f(x)$.
 - b) Calcular $d(x) = \text{mcd}(f(x), u(x) - x)$ usando el algoritmo 4.8.
 - c) Si $d(x) \neq 1$, devolver Falso.

3. Devolver Verdadero.

Nota 4.10. El algoritmo anterior está basado en los siguientes resultados. Sea p un primo y k un entero.

- El producto de todos los polinomios mónicos irreducibles de $\mathbb{Z}_p[X]$ de grado un divisor de k es igual a $x^{p^k} - x$.
- Sea $f(x)$ un polinomio de grado m en $\mathbb{Z}_p[X]$. Entonces $f(x)$ es irreducible en $\mathbb{Z}_p[X]$ si y solo si $\text{mcd}(f(x), x^{p^i} - x) = 1$ para cada i , $1 \leq i \leq \lfloor m/2 \rfloor$.

Estos dos algoritmos y este par de resultados han sido extraídos de [5].

4.3.4.2 Módulo de cuerpos finitos

Este módulo permite operar con elementos de un cuerpo finito de q elementos, donde q será la potencia de un primo. El código fuente de este módulo está en el archivo `cuerpos_finitos.py`.

Los elementos del cuerpo finito p elementos, con p primo, ya están implementados por la clase `EnteroModuloP`. Los elementos del resto de cuerpos finitos, esto es, aquellos con un número de elementos de la forma $q = p^n$ con $n > 1$ se han representado con la clase `ElementoFq`. Análogamente a `EnteroModuloP`, le hemos asociado una función factoría a `ElementoFq`, llamada `Fq()`, que devuelve cada clase para cada número de elementos de un cuerpo finito. También hemos utilizado el decorador `@lru_cache()` sobre `Fq()` para no tener cuerpos finitos iguales duplicados en memoria.

`ElementoFq` es definido como subclase de `PolinomioZp` ya que estamos representado los elementos de un cuerpo finito $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_{p^n}$ como polinomios de $\mathbb{Z}_p[X]$ de hasta grado $n - 1$. El polinomio irreducible de $\mathbb{Z}_p[X]$ de grado n puede especificarse o no; si no se especifica, se elige un polinomio irreducible aleatorio de grado n . Los operadores $+$, $-$, $*$, $/$ y $**$ se han implementado usando los operadores ya implementados para `PolinomioZp`.

Para el cálculo de inversos en \mathbb{F}_q se utiliza el algoritmo de Euclides para polinomios de forma análoga a como se hacía para \mathbb{Z} . Para calcular potencias hemos utilizado el *algoritmo de exponenciación binaria*, más eficiente que el algoritmo de multiplicar el elemento consigo mismo. El algoritmo, sacado de [5], es el siguiente.

Algoritmo 4.11.

ENTRADA: $g(x) \in \mathbb{F}_{p^n}$, un entero $0 \leq k < p^n - 1$ y su representación binaria $k = \sum_{i=0}^t k_i 2^i$.

SALIDA: $g(x)^k \bmod f(x)$.

1. Inicializar $s(x) \leftarrow 1$. Si $k = 0$, devolver $s(x)$.
2. Inicializar $G(x) \leftarrow g(x)$.

3. Si $k_0 = 1$, hacer $s(x) \leftarrow g(x)$.
4. Para i desde 1 hasta t , hacer lo siguiente:
 - a) Calcular $G(x) \leftarrow G(x)^2 \bmod f(x)$.
 - b) Si $k_i = 1$, calcular $s(x) \leftarrow G(x) * s(x) \bmod f(x)$.
5. Devolver $s(x)$.

Para obtener la representación binaria de un entero se ha utilizado la función de la biblioteca estándar de python `bin()`.

4.3.4.3 Módulo de curvas elípticas

Este módulo permite operar con el grupo de puntos de una curva elíptica. El código fuente de este módulo está en el archivo `curvas_elipticas.py`.

Los puntos de una curva elíptica se han representando con distintas clases según el modelo de curva elíptica. Así, hay una clase para el grupo de puntos $E(\mathbb{F}_q)$, con \mathbb{F}_q de característica distinta de 2 y 3, otra clase para $E(\mathbb{F}_{2^m})$ y una última clase para $E(\mathbb{Q})$. Sin embargo, todas heredan de la misma clase y empezaremos por esta clase madre.

La clase `PuntoRacional` es una clase *abstracta*. Esta clase define el comportamiento de algunos métodos y deja sin implementar otros (similar a los métodos *virtuales* de C++). En python, este tipo de clases se crean utilizando la *metaclass* `ABCMeta` y el decorador `@abstractmethod`, ambos del módulo `abc` de la biblioteca estándar. Así, esta clase define el elemento neutro, que se representa como la tupla `(None, None)`, y especifica que los puntos deben representarse con un atributo para la componente x y otro para la componente y y además restringe el acceso para que sea de solo lectura, a través de las propiedades de python. Por último, indica que se deben implementar los métodos `__eq__` (que evalúa la ecuación de la curva elíptica dado un par de componentes) y los operadores aritméticos básicos.

La clase que representa $E(\mathbb{F}_q)$ es la clase `PuntoFqRacional`. Análogamente a `EnteroModuloP`, le hemos asociado una función factoría a `PuntoFqRacional`, llamada `curva_eliptica_sobre_Fq()`, que pasando como argumentos los coeficientes de la ecuación de Weierstrass [4](#) y el cuerpo base, devuelve `PuntoFqRacional` con sus atributos de clase (los coeficientes de la ecuación, el cuerpo base y el discriminante) inicializados. De esta forma, dos curvas sobre \mathbb{F}_q pero con distinta ecuación (distintos coeficientes) son dos clases distintas.

`PuntoFqRacional` crea un punto de la curva pasándole como argumentos la componente x y la componente y . Si dicho punto no estuviera en la curva, se lanza una excepción. Además, `PuntoFqRacional` implementa los operadores $+$, $-$ y $*$ con su significado natural. Para ello, en los métodos especiales `__add__` y `__neg__` se incluyen las fórmulas de adición (véase [3.10](#)); el algoritmo eficiente de multiplicación de un punto por un escalar (véase [3.14](#)) se incluye en el método `__mul__`.

Las clases `PuntoF2mRacional` y `PuntoQRacional` que representan respectivamente a $E(\mathbb{F}_{2^m})$ y $E(\mathbb{Q})$ se han implementado de forma similar a `PuntoFqRacional`: se crean mediante una función factoría (`curva_eliptica_sobre_F2m` y `curva_eliptica_sobre_Q` respectivamente), heredan de `PuntoRacional` e implementan los operadores $+$, $-$ y $*$ utilizando las fórmulas de adición 3.10 y 3.36 respectivamente.

La clase `PuntoQRacional` se ha implementado para mostrar un ejemplo de una curva elíptica definida sobre un cuerpo distinto a los cuerpos finitos. Se ha utilizado el módulo `fractions` de python para representar a los racionales. Esta clase no será utilizada en el siguiente módulo a diferencia de las otras dos clases.

4.3.4.4 *Módulo de esquemas criptográficos*

Este módulo permite trabajar con protocolos criptográficos asimétricos, como el esquema Diffie-Hellman conocido como ECDH o el algoritmo de firmas digitales conocido como ECDSA. El código fuente de este módulo está en el archivo `esquemas_criptograficos.py`.

El esquema Diffie-Hellman con curvas elípticas (protocolo 4.4) se ha implementado con la clase `ECDH` mientras que el esquema de firmas digitales con curvas elípticas (protocolo 4.5) se ha implementado con la clase `ECDSA`. Ambas clases siguen el mismo arquetipo: cada instancia representa un participante del protocolo, requieren como parámetros los parámetros de dominio (véase 4.2) y en la inicialización se generan la pareja de llaves siguiendo el algoritmo 4.3.

Hemos usado el módulo `hashlib` de la biblioteca estándar de python, en particular la función `sha1()`, para aplicarle el hash a un mensaje la clase `ECDSA`.

Nótese que la implementación de ambos protocolos se ha conseguido en apenas un par de líneas, similar a las descripciones 4.4 y 4.5. Esto se debe a la implementación de los operadores aritméticos para cada clase y el hecho de haber encapsulado toda la complejidad en las clases de los módulos anteriores, como `PuntoFqRacional` o `ElementoFq`. Gracias a esto, la implementación de un protocolo puede hacerse de forma directa e intuitiva.

4.3.4.5 *Listado de curvas elípticas*

Este módulo secundario consiste en una lista de parámetros de dominio obtenidos de los estándares. El código fuente de este módulo está en el archivo `listado_curvas_elipticas.py`.

Este módulo ofrece la función `procesar_parametros_curva_eliptica()`. Pasándole como parámetro el nombre de alguna curva de la del listado, esta función devuelve los parámetros de dominio con los tipos de datos propios de ccepy, de forma que se puede usar, por ejemplo, para instanciar un participante de un esquema criptográfico. Los nombres de cada una de las curvas del listado son:

```

Anomalous
NIST P-224
BN(2,254)
brainpoolP256t1
ANSI FRP256v1
NIST P-256
secp256k1
brainpoolP384t1
NIST P-384

```

4.3.5 Pruebas

Se han utilizado dos tipos de pruebas para garantizar la corrección del programa: pruebas unitarias y pruebas basadas en propiedades.

Las pruebas unitarias se han añadido en los *docstring* de cada función o clase no trivial. Combinando los módulos *doctest* y *unittest* de la biblioteca estándar de python, estas pruebas unitarias se ejecutan automáticamente utilizando los distintos scripts ubicados en *ccepy/tests*. La ventaja de implementar las pruebas unitarias en los *docstring* es que dichos casos de prueba aparecerán en la documentación automáticamente como ejemplo de uso. Explicaremos esto con más detalle en el apartado 4.3.6 de generación de la documentación.

Sin embargo, como se han detectado más errores han sido con las pruebas basadas en propiedades. A diferencia de las pruebas unitarias, en la que se especifica para un caso de prueba la salida que tiene que producir, en las pruebas basadas en propiedades se especifican «propiedades» que debe verificar el código y estas propiedades se verifican para múltiples entradas generadas automáticamente.

Ejemplo 4.12. Supongamos que tenemos la función *suma(x, y)*. Una prueba unitaria en python sería:

```
assert suma(2, 2) == 4
```

Con esto sabemos que la función *suma()* funciona para la entrada (2, 2), pero, ¿y el resto de posibles entradas?. El enfoque alternativo es pensar en propiedades que debe verificar la salida de la función, por ejemplo, la conmutatividad. Así, una prueba basada en propiedades sería:

```
assert suma(x, y) == suma(y, x)
```

y la biblioteca utilizada para hacer pruebas basadas en propiedades se encargaría de generar un gran número de posibles entradas y ver que se verifica dicha propiedad.

Como *ccepy* utiliza estructuras algebraicas, es muy fácil pensar en las propiedades que deben verificar las distintas funciones o clases.

Por ejemplo, para las clases de python que representan cuerpos, anillos o grupos se han tomado como propiedades los axiomas de la definición de cuerpo, anillo o grupo respectivamente.

Para los protocolos criptográficos, también podemos encontrar propiedades. Así, para el protocolo ECDH (véase apartado 4.2.1) se comprueba que el punto que calculan Alicia y Bob es el mismo y si Eva intenta calcular el punto (con llave privada distinta) falla. Para el protocolo ECDSA (véase apartado 4.2.2) se comprueba que Bob siempre verifica la firma de Alicia de un mensaje, que dicha firma no sirve para otro mensaje y que si Eva intenta impersonar a Alicia o falsificar firmas, Bob siempre se percata.

Para implementar estas pruebas hemos usado hypothesis, la biblioteca de referencia de pruebas basadas en propiedades para el lenguaje python. Es fácil de utilizar y presenta algunas ventajas, como la búsqueda eficaz de casos extremos o la simplificación de casos que producen fallos. La hemos utilizado junto con el módulo unittest para organizar las pruebas en clases y permitir su ejecución forma automática. Nótese que para ejecutar los scripts con las pruebas debe tener instalado hypothesis.

4.3.6 Generación de la documentación

La documentación se ha generado con la biblioteca externa sphinx. Para ello se ha rellenado los docstring de las funciones, clases y métodos siguiendo la «Guía de Estilo de Google para Python», ya que sphinx tiene soporte completo para este estilo de docstring. Se ha decidido usar este estilo de docstring frente a otros ya que este nos ha parecido el más legible.

Para las funciones y los métodos, hemos incluido en los docstring una descripción de la funcionalidad, un ejemplo de uso, los argumentos que requiere y el valor que devuelve. Los docstring de las clases contienen una descripción de la entidad que representan, los argumentos para la creación de un objeto y los atributos tanto de clase como de instancia, además de un ejemplo de creación y uso de una instancia de la clase. Adicionalmente, también se ha rellenado el docstring de cada módulo con una descripción de la funcionalidad que ofrece y ejemplo de uso.

Además de los docstring, sphinx también necesita especificar el contenido de cada entrada en la documentación. Esto se hace con ficheros de texto y con el lenguaje de marcado reStructuredText. Así, en ccepy/docs/source se encuentra el código fuente para generar la documentación en formato .rst. El archivo conf.py en este mismo directorio alberga las distintas opciones de generación.

Para generar la documentación en formato de página web, basta ejecutar `make html` en el directorio ccepy/docs y sphinx se generará la página web en ccepy/build.

Hemos tenido un problema ya que sphinx no reconoce las clases que están definidas dentro de funciones. De este modo, si quiere que aparezcan dichas clases en la documentación, debe copiar la definición de la clase temporalmente fuera de la función, generar la documentación y borrar la definición copiada.

Una captura de la documentación puede verse en la figura 3.

[Docs](#) » [Curvas elípticas](#)
[View page source](#)

Curvas elípticas

Aritmética con curvas elípticas.

Este módulo permite operar con el grupo de puntos de una curva elíptica.

Para utilizar las funciones y las clases de este módulo, debe importarlo previamente:

```
# reemplaza ... por la función/clase que desea utilizar
from ccepy.curvas_elipticas import ...
```

Para operar con puntos de una curva elíptica, use las funciones de la forma `curva_eliptica_sobre_*` y los operadores aritméticos habituales.

```
>>> E = curva_eliptica_sobre_Fq(a=2, b=3, p=97) # y^2 = x^3 + 2x + 3 sobre F97
>>> E.coeficientes
Coeficientes(a=2, b=3)
>>> P = E(0, 10)
>>> P
(0,10)
>>> Q = E(3, 6)
>>> Q
(3,6)
>>> P + Q
(85,71)
>>> -P
(0,87)
>>> 3 * P
(23,24)
```

Figura 3: Captura de la documentación.

CONCLUSIONES Y VÍAS FUTURAS

Como hemos visto, la teoría de curvas elípticas es una teoría rica, sofisticada y extensa. Sin embargo, uno de sus aspectos más sorprendentes es su aplicación en la criptografía y como supone una mejora de los sistemas criptográficos ampliamente utilizados. Esta aplicación es un muy buen ejemplo de campo interdisciplinar entre las matemáticas y las ciencias de la computación.

Los objetivos propuestos inicialmente se han alcanzando en su totalidad, sin embargo, la criptografía con curvas elípticas abarca mucho más de lo tratado en este trabajo. Existen así numerosas vías de desarrollo posterior, en la que destacamos algunas:

- La *criptografía basada en identidad*, cuyos esquemas criptográficos más utilizados se basan en los emparejamientos bilineales de curvas elípticas, como el emparejamiento Weil estudiado en la sección 3.2.2.
- Un estudio más profundo acerca de los ataques sobre el problema del logaritmo discreto con curvas elípticas estudiado en el apartado 4.1.2. Como ya explicamos, la seguridad de los sistemas criptográficos viene determinada por los ataques conocidos y en este trabajo se realizó una mera introducción sobre ellos. Estos ataques presenten ideas muy interesantes y usan resultados sutiles para conseguir la mayor eficiencia.
- Las curvas hiperelípticas, una generalización de las curvas elípticas, y su aplicación en la criptografía. Como ya comentamos en la introducción, aún no se han conseguido sistemas basados en curvas hiperelípticas bien más seguros o bien más eficientes que los basados en curvas elípticas. Aún así, es un campo muy reciente y con gran camino por recorrer.
- Desarrollo de algoritmos más eficientes. Mucha de la investigación actual sobre criptografía con curvas elípticas se basa en la búsqueda de algoritmos más eficientes para mejorar la velocidad de estos sistemas. Así, se podría hacer un estudio del estado del arte y desarrollar un nuevo algoritmo que suponga un avance en este ámbito.

APÉNDICE

ESTUDIO DEL CIFRADO DE ALGUNAS PÁGINAS WEB DE LA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Como aplicación del estudio teórico-práctico realizado en los capítulos 3 y 4, hemos considerado de interés hacer un estudio preliminar sobre el cifrado de algunas páginas web de la Universidad de Granada.

En un primer momento pensábamos que, en atención a las políticas de seguridad y no difusión de datos personales, aquellas páginas que tienen acceso a información reservada estaban protegidas. Sin embargo, hemos comprobado que algunas de ellas presentan vulnerabilidades.

Un listado de las páginas visitadas a fecha 30/03/2016 junto con los fallos de seguridad encontrados se presenta a continuación.

PÁGINAS WEB VULNERABLES

Primer fallo de seguridad encontrado

El primer y principal fallo de seguridad que hemos encontrado ha sido la inexistencia de cifrado en el envío de credenciales de las siguientes páginas web:

- <http://fciencias.ugr.es>
- <http://etsiit.ugr.es>
- <http://grados.ugr.es/informaticaymatematicas>
- <http://grados.ugr.es/informatica>
- <http://grados.ugr.es/matematicas>
- <http://sucre.ugr.es> (incluyendo <http://fciencias.ugr.es/aulas/> y la página de reserva de aulas accesible via <http://etsiit.ugr.es>)
- <http://calidad.ugr.es>
- <http://secretariageneral.ugr.es>
- <http://archivo.ugr.es>
- <http://catedras.ugr.es>
- <http://cicode.ugr.es>
- <http://editorial.ugr.es>

- <http://unidadigualdad.ugr.es>
- <http://biotic.ugr.es/pages/intranet>
- <http://internacional.ugr.es>
- <http://ssprl.ugr.es>

Las páginas anteriores disponen de un apartado de *login* y como solo está disponible el protocolo HTTP en vez del protocolo HTTPS, las credenciales podrían ser interceptadas por un usuario malicioso.

Como caso real, supongamos un usuario conectado a la *cvi-ugr* o a otra red wifi pública. Si este ingresara sus credenciales en alguna de las páginas anteriores y en ese momento hubiera un usuario malicioso analizando los paquetes de la red, el usuario malicioso obtendría fácilmente sus credenciales. De hecho, hoy en día existen programas como Wireshark que hacen del análisis de paquetes una tarea muy sencilla.

La solución a este fallo de seguridad es deshabilitar HTTP y utilizar para estas páginas HTTPS exclusivamente.

Además, suponemos que la lista es mucho más extensa, ya que:

- Al igual que fciencias.ugr.es y etsiit.ugr.es, las páginas web de muchos otros centros presentan el mismo fallo.
- Al igual que grados.ugr.es/informatica, grados.ugr.es/matematicas y grados.ugr.es/informaticaymatematicas, las páginas web de muchos otros grados presentan el mismo fallo.

Segundo fallo de seguridad encontrado

El segundo fallo de seguridad que hemos encontrado ha sido la coexistencia de envío de credenciales cifradas y no cifradas de las siguientes páginas web:

- <http://oficinavirtual.ugr.es/ai>
- <http://sede.ugr.es/sede/mis-procedimientos/index.html> (eligiendo sin certificado digital)

Las páginas anteriores se pueden usar tanto con el protocolo HTTP como con el protocolo HTTPS. De este modo, si se utilizan con el protocolo HTTP presentan el mismo fallo que el anterior conjunto de páginas web.

La solución es más sencilla ya que al estar implementado el acceso por HTTPS para estas web, solo hay que deshabilitar HTTP, dejando HTTPS como la única opción.

Nótese que aunque este listado es más breve contiene una de las páginas más críticas de la UGR, oficinavirtual.ugr.es/ai.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Lawrence C. Washington. *Elliptic Curves: Number Theory and Cryptography, Second Edition*. 2.^a ed. Chapman & Hall/CRC, 2008.
- [2] Darrel Hankerson, Alfred J. Menezes y Scott Vanstone. *Guide to Elliptic Curve Cryptography*. Springer-Verlag New York, Inc., 2003.
- [3] J.H. Silverman. *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Springer New York, 2009.
- [4] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer, 1977.
- [5] Alfred J. Menezes, Scott A. Vanstone y Paul C. Van Oorschot. *Handbook of Applied Cryptography*. 1.^a ed. CRC Press, Inc., 1996.

REFERENCIAS WEB

Documentación de las herramientas utilizadas en el desarrollo del programa:

- Georg Brandl. *Sphinx 1.4.4 documentation*. <http://www.sphinx-doc.org/>, último acceso el 10 de julio de 2016.
- David R. MacIver. *Hypothesis 3.4.1 documentation*. <http://hypothesis.readthedocs.io/en/latest/>, último acceso el 10 de julio de 2016.
- Amit Patel et al. *Google Python Style Guide*. <http://google.github.io/styleguide/pyguide.html>, último acceso el 10 de julio de 2016.

Recopilación de parámetros de dominio de diferentes estándares utilizados en criptografía con curvas elípticas:

- Daniel J. Bernstein and Tanja Lange. *SafeCurves: choosing safe curves for elliptic-curve cryptography*. <http://safecurves.cr.yp.to/>, último acceso el 10 de julio de 2016.

