ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

ACRÓNIMOS

1 DESAROLLO MATEMÁTICO

En este capítulo haremos el estudio matemático de la teoría de curvas elípticas. En el apartado 1.1 se desarrolla la teoría básica, mientras que en el apartado 1.3 se particulariza a curvas elítipcas sobre cuerpos finitos.

Las referencias utilizadas para el desarrollo matemático han sido sido [4], [1] y [3].

1.1 TEORÍA BÁSICA DE CURVAS ELÍPTICAS

En este apartado se tratarán las ecuaciones de Weierstrass, las operaciones de adicción y duplicación, los puntos proyectivos, los endomorfismos de curvas elípticas y la estructura de los puntos de torsión.

Las principales referencias utilizadas en este capítulo han sido [4] y [1].

1.1.1 *Definición de curva elíptica*

En esta apartado veremos la definición general de curva elíptica aunque posteriormente simplificaremos la ecuación que la define.

Definición 1.1

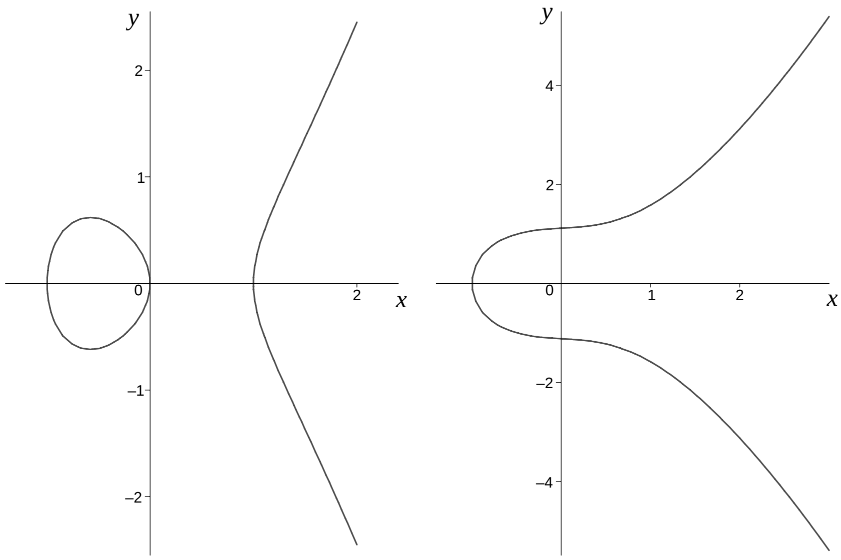
Una *curva elíptica* E se define por una una ecuación de la forma

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \tag{1}$$

donde $a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 \in K$ y $\Delta \neq 0$, siendo Δ el *discriminante* de E y definiéndose como:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta &= -d_2^2 d_8 - 8d_4^3 - 27d_6^2 + 9d_2d_4d_6 \\
d_2 &= a_1^2 + 4a_2 \\
d_4 &= 2a_4 + 4a_2 \\
d_6 &= a_3^2 + 4a_6 \\
d_8 &= a_1^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Si L es una extensión del cuerpo K, entonces el conjunto de puntos *L-racionales* de E es $E(L) = \{\infty\} \cup \{(x, y) \in L \times L : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6\}$.



(a) $E_1 : y^2 = x^3 - x$ (b) $E_2 : y^2 = x^3 + x$

Figura 1: Curvas elípticas sobre $\mathbb{R}$

Nota 1.2 (comentarios de la definición 1.1)**.**

- La ecuación (1) se conoce como la *ecuación de Weierstrass*.
- Diremos que E *está definida sobre* K y lo notaremos E/K. A K lo llamaremos *cuerpo base*.
- La condición $\Delta \neq 0$ asegura que la curva elíptica no tenga puntos *singulares*, esto es, puntos que anulen las derivadas parciales de la función polínomica

  $$f(x, y) = y^2 + a_1xy + a_3y - x^3 - a_2x^2 - a_4x - a_6$$

  asociada a la curva elíptica. Esto asegura que no haya puntos en los que la curva tenga dos o más rectas tangentes.
- El punto ∞ lo llararemos *punto del infinito*. Es el único punto en la recta del infinito que satisface la forma proyectiva de la ecuación de Weierstrass (véase apartado 1.1.5).

Ejemplo 1.3 (curvas elípticas sobre $\mathbb{R}$)**.** Consideramos las curvas elípticas:

$$E_1 : y^2 = x^3 - x$$
$$E_2 : y^2 = x^3 + x$$

definidas sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Los puntos $E_1(\mathbb{R})$ y $E_2(\mathbb{R})$ se han representado en la Figura 1.

1.1.2 *Ecuaciones de Weierstrass simplificadas*

Nuestro objetivo es transformar la ecuación (1) por una ecuación más sencilla. En este apartado veremos varias transformaciones según la característica del cuerpo base.

Definición 1.4

Dos curvas elípticas E_1 y E_2 definidas sobre K y dadas por las ecuaciones de Weierstrass:

$$E_1 : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$
$$E_2 : y^2 + a_1'xy + a_3'y = x^3 + a_2'x^2 + a_4'x + a_6'$$

se dicen que son *isomorfas sobre K* si existen $u, r, s, t \in K$, $u \neq 0$, tal que el cambio de variables lineal

$$(x, y) \mapsto (u^2x + r, u^3y + u^2sx + t) \tag{3}$$

transforma la ecuación E_1 en la ecuación E_2. La transformación (3) se llama un cambio de variables admisible.

El cambio de variables (3) es el único que deja «fijo» el punto del infinito y preserva la forma de la ecuación de Weierstrass. No vamos a entrar en más detalle, pero puede consultar [3, prop. III.3.1b] para más informácion.

Una ecuación de Weierstrass

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

puede simplificarse considerablemente aplicando cambios de variables admisibles. Veamos el caso en el que la característica del cuerpo base no es ni 2 ni 3.

Lema 1.5

Si $\mathrm{char}(K) \neq 2, 3$, entonces el cambio de variables admisible

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x - 3a_1^2 - 12a_2}{36}, \frac{y - 3a_1x}{216} - \frac{a_1^3 + 4a_1a_2 - 12a_3}{240}\right)$$

transforma E en la curva

$$y^2 = x^3 + ax + b \tag{4}$$

donde $a, b \in K$. El discriminante de esta curva es $\Delta = -16(4a^3 + 27b^2)$.

Demostración. Basta aplicar el cambio de variables y ver que efectivamente se obtiene la expresión (4). En su lugar, veamos el proceso por el cual se obtuvo dicha simplificación.

Dada la ecuación de Weierstrass (1), sumamos en ambos lados por $(a_1 a_3 x)/2 + a_3^2/4 + (a_1^2 x^2)/4$ (podemos dividir por 2 ya que $\text{char}(K) \neq 2$) para completar el cuadrado:

$$\left(y + \frac{a_1 x}{2} + \frac{a_3}{2}\right)^2 = x^3 + \left(a_2 + \frac{a_1^2}{4}\right)x^2 + \left(a_4 + \frac{a_1 a_3}{2}\right)x + \left(a_6 + \frac{a_3^2}{4}\right)$$

Haciendo $y_1 = y + (a_1 x)/2 + a_3/2$, obtenemos

$$y_1^2 = x^3 + a_2' x^2 + a_4' x + a_6'$$

para algunas constafntes $a_2', a_4', a_6' \in K$. Finalmente, sustituyendo $x_1 = x + a_2'/3$ (podemos dividir por 3 ya que $\text{char}(K) \neq 3$) resulta

$$y_1^2 = x_1^3 + a x_1 + b$$

para algunas constante $a, b \in K$. Para obtener el discriminante Δ basta sustiuir el valor de las constantes $a_4 = a,\ a_6 = b$ y $a_1 = a_3 = a_2 = 0$ en (2). □

Nota 1.6 (comentarios del lema 1.5)**.**

- Si el cuerpo base tiene característica 2, la ecuación anterior (4) no es válida ya que tiene puntos singulares.
- Para cuerpos base con característica 3, la ecuación anterior (4) si es válida, pero existan curvas que no tienen esta forma.

En la mayor parte del trabajo, desarollaremos la teoría de curvas elípticas utilizando la ecuación de Weierstrass simplificada (4). Sin embargo, como los cuerpos finitos de característica dos son de especial interés en computación, ocasionalmente señalaremos que modificaciones son necesarias para los cuerpos base de característica dos. Veamos la primera modificación.

Lema 1.7

Si la característica de K es 2, hay dos casos que considerar. Si $a_1 \neq 0$, entonces el cambio de variables admisible

$$(x, y) \mapsto \left(a_1^2 x + \frac{a_3}{a_1}, a_1^3 y + \frac{a_1^2 a_4 + a_3^2}{a_1^3}\right)$$

transforma E en la curva

$$y^2 + xy = x^3 + ax^2 + b$$

donde $a, b \in K$. Tales curvas se llaman *no supersingulares* (véase 1.35) y tienen discriminante $\Delta = b$. Si $a_1 = 0$, entonces el cambio de variables admisible

$$(x, y) \mapsto (x + a_2, y)$$

transforma E en la curva

$$y^2 + cy = x^3 + ax + b$$

donde $a, b, c \in K$. Tales curvas se llaman *supersingulares* (véase 1.35) y tienen discriminante $\Delta = c^4$.

Demostración. Basta sustituir el cambio de variables en la ecuación general de Weierstrass y operar. □

1.1.3 *Ley de grupo*

En este apartado veremos como dotar de estructura de grupo al conjunto de puntos una curva elíptica. Para ello definiremos una ley de composición o ley de grupo y le daremos sentido a la «suma» de puntos.

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo K. El siguiente método geométrico permite dados dos puntos en $E(K)$ producir un tercero en $E(K)$. Este método será la base para definir la ley de grupo.

Algoritmo 1.8 (Método de la cuerda y la tangente)

Dados dos puntos P y Q , veamos como producir un tercer punto R. En primer lugar si P y Q son distintos, los pasos son:

1. Se dibuja una recta L de P a Q.
2. Esta recta intersecta la curva elíptica en un tercer punto.
3. Tomamos R como la reflexión de este punto sobre el eje-x.

Si los puntos P y Q son iguales, los pasos son:

1. Se dibuja la línea tangente L a la curva elíptica en P.
2. Esta línea intersecta la curva elíptica en un segundo punto.
3. Tomamos R como la reflexión de este punto sobre el eje-x.

Esto método se puede apreciar en la figura 2.

Nota 1.9 (comentarios del algoritmo 1.14)**.** El hecho de que $L \cap E$, contando multiplicidades, consiste en exactamente tres puntos (no necesariamente distintos) es un caso especial del teorema de Bézout [2, sec. I.7.8]. Sin embargo, como a continuación vamos a dar fórmulas

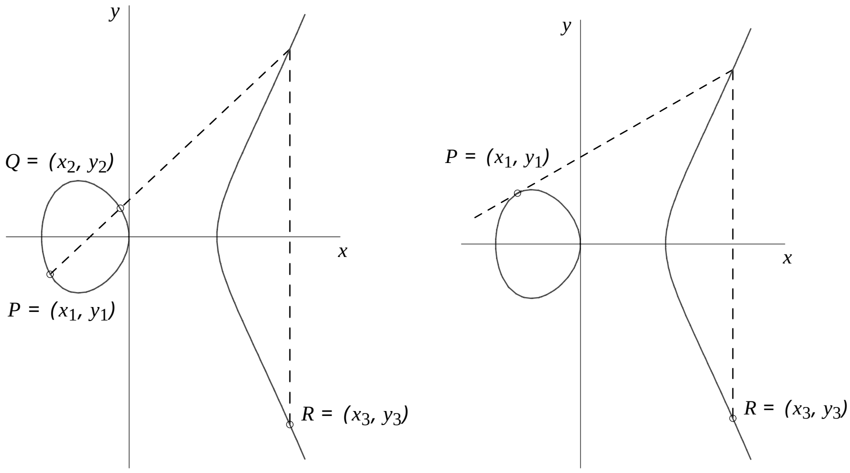


Figura 2: Método de la cuerda y la tangente

explícitas, haremos la demostración utilizando dichas fórmulas y no será necesario utilizar un teorema tan general.

Inspirándonos en el método de la cuerda y la tangente, definimos la siguiente ley de composición para el grupo de puntos de una curva elíptica.

Definición 1.10 (ley de grupo)

Sea E una curva elíptica definida por la ecuación $y^2 = x^3 + ax + b$ sobre un cuerpo K de característica distinta de 2 y 3. Definimos la operación binaria

$$+ : E(K) \times E(K) \to E(K)$$

como sigue:

1. $P + \infty = \infty + P = P$, para todo $P \in E(K)$.

2. Si $P = (x, y) \in E(K)$, entonces $(x, y) + (x, -y) = \infty$. El punto $(x, -y)$ se denotará por $-P$ y se llamará el *opuesto* de P. Además, $-\infty = \infty$.

3. Sea $P = (x_1, y_1) \in E(K)$ y $Q = (x_2, y_2) \in E(K)$, donde $P \neq \pm Q$. Entonces $P + Q = (x_3, y_3)$, donde

$$x_3 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2 - x_1 - x_2$$
$$y_3 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x_1 - x_3) - y_1.$$

4. Sea $P = (x_1, y_1) \in E(K)$, donde $P \neq -P$. Entonces $2P = (x_3, y_3)$ donde:

$$x_3 = \left(\frac{3x_1^2 + a}{2y_1}\right)^2 - 2x_1$$
$$y_3 = \left(\frac{3x_1^2 + a}{2y_1}\right)(x_1 - x_3) - y_1.$$

Demostración. Tenemos que comprobar que $+$ es una operación binaria válida, esto es, que a cada par de elementos de $E(K) \times E(K)$ le corresponde un único elemento de $E(K)$. Como la casuística anterior es total y exclusiva, basta ver que $+$ es una operación cerrada. Los casos $a)$ y $b)$ son triviales. Veamos los otros dos casos con detalle.

CASO $c)$ Supongamos $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, $P, Q \in E(K)$ con $P \neq \pm Q$. Consideramos la recta que los contiene:

$$L : y = m(x - x_1) + y_1, \text{ donde } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Nótese que $x_2 \neq x_1$ ya que $P \neq \pm Q$. Para hallar la intersección de L con E sustituimos y:

$$(m(x - x_1) + y_1)^2 = x^3 + ax + b$$

Podemos reescribir esto de la forma

$$0 = x^3 - m^2x^2 + b'x + c' \tag{5}$$

para algunas constantes $b', c' \in K$. Así, las raíces de esta cúbica es justamente $L \cup E$.

Sabemos que las raíces de un polinomio están relacionadas con sus coeficientes. De hecho, para un polinomio cúbico mónico $x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ con raíces r, s, t se tiene:

$$\begin{aligned} x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 &= (x - r)(x - s)(x - t) \\ &= x^3 - (r + s + t)x^2 + (rs + rt + st)x - rst \end{aligned}$$

En particular, $r + s + t = -c_2$. Como P y Q están en la intersección, x_1 y x_2 son dos raíces de (5), luego la tercera raíz α es $m^2 - x_1 - x_2$. Sustituyendo α en L resulta $\beta = m(x_3 - x_1) + y_1$, luego $(\alpha, \beta) \in E(K)$. Entonces $(\alpha, -\beta) = (x_3, y_3) \in E(K)$.

CASO $d)$ Sea $P = (x_1, y_1)$, donde $P \neq -P$. Consideramos la recta tangente a E en P

$$L : y = m(x - x_1) + y_1, \text{ donde } m = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1}$$

Nótese que $y_1 \neq 0$ ya que si no estaríamos en el caso b). Hallamos la intersección con E de forma análoga al caso c) y obtenemos la cúbica:

$$0 = x^3 - m^2x^2 + b'x + c'$$

para algunas constantes $b', c' \in K$. Análogamente al caso c), como x_1 es una raíz doble de la cúbica (derívese y evalúe en x_1) tenemos que la tercera raíz α es $m^2 - 2x_1$. Sustituyendo α en L resulta $\beta = m(x_3 - x_1) + y_1$, luego $(\alpha, \beta) \in E(K)$. Entonces $(\alpha, -\beta) = (x_3, y_3) \in E(K)$. □

Nota 1.11 (comentarios de la definición 1.10)**.** Para cuerpos base con característica 2 o 3, las fórmulas cambian. Por ejemplo, si E es una curva elíptica definida sobre un cuerpo K por la ecuación general de Weierstrass (1), el opuesto de un punto $P = (x, y) \in E(K)$ viene dado por

$$-P = (x, -a_1x - a_3 - y)$$

En el apartado 1.3.1 veremos la ley de composición para una curva elíptica sobre un cuerpo finito de característica 2.

Con la operación binaria 1.10, el conjunto de puntos de una curva elíptiptica es un grupo abeliano.

Teorema 1.12

La suma 1.10 de puntos en una curva elíptica E sobre un cuerpo K de característica distinta de 2 y 3 satisface la siguientes propiedades:

- *Conmutatividad*:

$$P_1 + P_2 = P_2 + P_1, \ \forall P_1, P_2 \in E(K).$$

- *Existencia de elemento neutro*:

$$P + \infty = P, \ \forall P \in E(K).$$

- *Existencia de elemento opuesto*:

$$P + (-P) = \infty, \ \forall P \in E(K).$$

- *Asociatividad*:

$$(P_1 + P_2) + P_3 = P_1 + (P_2 + P_3), \ \forall P_1, P_2, P_3 \in E(K).$$

En otras palabras, $(E(K), +, \infty)$ es un grupo abeliano.

Demostración. La conmutatividad es trivial en los casos a), b) y d). Para el caso c) también es fácil ya que la recta que une P_1 y P_2 es la misma que la recta que une P_2 y P_1. La existencia de elemento neutro e inverso también es directo de la definición 1.10.

La asociatividad puede probarse utilizando las fórmulas caso por caso, pero supone un esfuerzo demasiado laborioso. En su lugar, puede abordarse de forma más sofisticada bien estudiando las líneas y sus intersecciones con la curva elíptica en el plano proyectivo [4, sec. 2.4] o bien usando teoremas más generales como el de Riemann-Roch [3, teo. III.3.4.e]. □

Nota 1.13 (comentarios del teorema 1.12)**.** Puede encontrar una versión más general del teorema anterior para cuerpos base de cualquiera característica en [3].

1.1.4 *Multiplicación escalar*

En este apartado veremos un método eficiente para calcular la duplicación reiterada de un punto.

Sea P es un punto de una curva elíptica y k un entero positivo. Denotaremos kP a la suma $P + \ldots + P$ de k-sumandos. El siguiente algoritmo calcula kP más rápido que el método directo (sumar P consigo mismo repetidamente).

Algoritmo 1.14 (multiplicación por duplicación)

Sea k un entero positivo y sea P un punto de una curva elíptica. El siguiente algoritmo calcula kP.

1. Se empieza con $a = k$, $B = \infty$ y $C = P$.
2. Si a es par, se toma $a = a/2$, $B = B$ y $C = 2C$.
3. Si a es impar, se toma $a = a - 1$, $B = B + C$ y $C = C$.
4. Si $a \neq 0$, se va al paso 2.
5. Se devuelve B.

La salida B es kP.

Nota 1.15 (comentarios del algoritmo 1.14)**.**

- El único problema de este método es que el tamaño de las coordenadas incrementa muy rápidamente.
- Si trabajos sobre un cuerpo finito, podemos evitar este incoveniente reduciendo módulo p en cada operación.

1.1.5 *Puntos proyectivos*

En este apartado introduciremos los puntos proyectivos y veremos de donde procede el punto del infinito de una curva elíptica. Como en la mayor parte del trabajo no vamos a trabajar con puntos proyectivos, veremos este apartado de manera más informal.

Sea K un cuerpo. El *espacio proyectivo* dos dimensional sobre K, $\mathbb{P}^2(K)$, esta dado por clases de equivalencia de ternas (x, y, z) con $x, y, z \in K$ y al menos algún x, y, z no nulo. Dos ternas (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) se dicen que son *equivalentes* si existe un elemento no nulo $\lambda \in K$ tal que

$$(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_2, \lambda y_2, \lambda z_3)$$

y en tal caso escribiremos $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$. La clase de equivalencia de una terna solo depende de los ratios entre x, y, z. Por ello, la clase de equivalencia de (x, y, z) la denotaremos por $(x : y : z)$ y diremos que es un *punto proyectivo*.

Si $(x : y : z)$ es un punto proyectivo con $z \neq 0$, entonces $(x : y : z) = (x/z : y/z : 1)$ y de hecho $(x/z, y/z, 1)$ es el único representante de esta clase de equivalencia con $z = 1$. Tenemos así una correspondencia $1 - 1$ entre el conjunto de puntos proyectivos

$$\mathbb{P}^2(K)^* = \{(x : y : z) : x, y, z \in K,\ z \neq 0\}$$

y el *plano afín*

$$\mathbb{A}(K) = \{(x, y) : x, y \in K\}.$$

Si $z = 0$, el conjunto de puntos proyectivos de la forma $(x : y : 0)$ se llaman *recta del infinito* ya que sus puntos no se corresponden con ningúno del plano afín.

La *forma proyectiva* de una ecuación de Weierstrass de una curva elíptica E definida sobre K se obtiene remplazando x por x/z, y por y/z y quitando denominadores. Si alguna terna (x, y, z) no nula satisface la ecuación proyectiva entonces también las satisfacen las ternas $(x', y', z') \in (x : y : z)$. Podemos decir entonces que un punto proyectivo $(x : y : z)$ está en E. Tenemos así una correspondencia 1-1 entre los puntos del plano afín que están en E y los puntos proyectivos de $P^2(K)^*$ que están en E.

Si hacemos $z = 0$ en la forma proyectiva de la ecuación, obtenemos $0 = x^3$ y como alguna componente tiene que ser no nula, tenemos $y \neq 0$. Así, el único punto de la recta del infinito que está en E es el punto $(0 : y : 0) = (0 : 1 : 0)$. Este pusto se corresponde con el punto ∞ de la definición 1.1.

Hay situaciones en la que usar coordenadas proyectivas puede ser ventajoso (véase [4, sec 2.6]). Sin embargo, nosotros utilizaremos las coordenadas del plano afín y trataremos el punto del infinito como caso especial cuando sea necesario.

1.1.6 *Endomorfismos*

El principal objetivo de este apartado es probar la proposición 1.20 que será utilizada en la demostración del teorema de Hasse 1.34. Para ello, es necesario utilizar algunos resultados técnicos, los cuales solo los enunciaremos (puede encontrar su demostración en [4, sec. 2.9]).

Definición 1.16

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo K y sea $\overline{K}$ su clasura algebraica. Un *endomorfismo* de E es un homomorfismo $\alpha : E(\overline{K}) \to E(\overline{K})$ dado por funciones racionales (cocientes de polinomios). Dicho de otro modo, α preserva la suma y el elemento neutro de $E(\overline{K})$.

El endomorfismo trivial que lleva cada punto a ∞ lo denotaremos por 0.

Supondremos que α es no trivial a partir de ahora. El siguiente resultado técnico nos facilitará el manejo de endomorfismos de una curva elíptica.

Lema 1.17

Si α es un endomorfismo de una curva elíptica definida por la ecuación de Weierstrass simplificada (4), entonces α se puede escribir como

$$\alpha(x, y) = (r_1(x), r_2(x)y)$$

donde

- $r_1(x) = p(x)/q(x)$, con $p(x), q(x)$ polinomios sin factores comunes.
- Si $q(x) = 0$ para algún punto (x, y), entonces definimos $\alpha(x, y) = \infty$.
- Si $q(x) \neq 0$, entonces $r_2(x)$ está definida.

Definición 1.18

El *grado* de un endomorfismo α es

$$\deg(\alpha) = \text{máx}\{\deg p(x), \deg q(x)\}$$

si α es no trivial. Si $\alpha = 0$, definimos $\deg(0) = 0$.

Definición 1.19

Un endomorfismo α no trivial es *separable* si la derivada $r_1(x)'$ no es idénticamente cero.

El siguiente resultado será crucial en la demostración del teorema de Hasse 1.34. Denotaremos por $|C|$ al número de elementos de un conjunto C.

Proposición 1.20

Sea $\alpha \neq 0$ un endomorfismo separable de una curva elíptica E. Entonces

$$\deg(\alpha) = |\ker(\alpha)|$$

donde $\ker(\alpha)$ es el núcleo del homomorfismo $\alpha : E(\overline{K}) \to E(\overline{K})$. Si $\alpha \neq 0$ no es separable, entonces

$$\deg(\alpha) > |\ker(\alpha)|$$

Demostración. Por el lema 1.17, $\alpha(x,y) = (r_1(x), r_2(x)y)$ con $r_1(x) = p(x)/q(x)$. Supongamo que α es separable. Entonces $r_1' \neq 0$, por lo que $p'q - pq'$ no es el polinomio cero.

Sea S el conjunto de $x \in \overline{K}$ tal que $(pq' - p'q)(x)q(x) = 0$. Sea $(u,v) \in E(\overline{K})$ tal que

1. $u \neq 0,\ v \neq 0,\ (u,v) \neq \infty$,
2. $\deg(p(x) - uq(x)) = \max\{\deg(p), \deg(q)\} = \deg(\alpha)$,
3. $u \notin r_1(S)$ y
4. $(u,v) \in \alpha(E(\overline{K}))$.

Como $p'q - pq'$ no es el polinomio nulo, S es un conjunto finito, por lo que su imagen bajo α es finita. Por otro lado $\alpha(E(\overline{K}))$ es un conjunto infinito. Así, tal (u,v) existe.

Veamos que existen exactamente $\deg(\alpha)$ puntos $(x_1, y_1) \in E(\overline{K})$ tal que $\alpha(x_1, y_1) = (u,v)$. Para tales puntos, se tiene

$$\frac{p(x_1)}{q(x_1)} = u, \quad y_1 r_2(x_1) = v$$

Como $(u,v) \neq \infty$, $q(x_1) \neq 0$ luego $r_2(x_1)$ está definido. Como $v \neq 0$ y $y_1 r_2(x_1) = v$, se tendrá $y_1 = v/r_2(x_1)$, esto es, x_1 determina y_1, por lo que solo tenemos que contar valores de x_1.

Por la propiedad (2), $p(x) - uq(x)$ tiene $\deg(\alpha)$ raíces, contando multiplicidades. Tenemos que ver que $p - uq$ no tiene raíces múltiples. Supongamos que x_0 es una raíz múltiple. Entonces

$$p(x_0) - uq(x_0) = 0, \quad p'(x_0) - uq'(x_0) = 0$$

Multiplicando las ecuaciones $p = uq$ y $uq' = p'$ resulta

$$up(x_0)q'(x_0) = up'(x_0)q(x_0)$$

Como $u \neq 0$, esto implica que x_0 es una raíz de $pq' - p'q$, por lo que $x_0 \in S$. Así $u = r_1(x_0) \in r_1(S)$, contrario u la propiedad (3). Concluimos que $p - uq$ no tiene raíces múltiples y por ello tiene $\deg(\alpha)$ raíces distintas.

Como hay exactamente $\deg(\alpha)$ puntos (x_1, y_1) con $\alpha(x_1, y_1) = (u, v)$, el núcleo de α tiene $\deg(\alpha)$ elementos.

Nótese que como α es un homomorfismo, para cada $(u, v) \in \alpha(E(\overline{K}))$ hay exactamente $\deg(\alpha)$ puntos (x_1, y_1) con $\alpha(x_1, y_1) = (u, v)$. Las hipótesis sobre (u, v) se hicieron para obtener el resultado para al menos un punto, lo cual es suficiente.

Si α no es separable, entonces los pasos de la demostración siguen siendo válidos, excepto que $p' - uq'$ es siempre el polinomio cero en este caso, por lo que $p(x) - uq(x) = 0$ tiene siempre raíces múltiplces y por ello tiene menos de $\deg(\alpha)$ soluciones. $\square$

Veamos un par de resultados que serán útiles para describir la estructura de los puntos de torsión del apartado 1.2.

Proposición 1.21

Sea E una curva elíptica definida sobre el cuerpo K. Sea $\alpha \neq 0$ un endomorfismo de E. Entonces α es sobreyectiva.

Demostración. Sea $(u, v) \in E(\overline{K})$. Como $\alpha(\infty) = \infty$, supongamos que $(u, v) \neq \infty$. Por el lema 1.17, α será de la forma $\alpha(x, y) = (r_1(x), r_2(x)y)$ con $r_1(x) = p(x)/q(x)$. Consideramos el polinomio $p(x) - uq(x)$. Distinguimos dos casos.

Supongamos que $p(x) - uq(x)$ no es un polinomio constante. Entonces tendrá una raíz x_0. Como p y q no tiene raíces en común, $q(x_0) \neq 0$. Sea $y_0 \in \overline{K}$ una raíz cuadrada de $x_0^3 + ux_0 + v$. Como $q(x_0) \neq 0$, $r_2(x)$ está definido y por lo tanto $\alpha(x_0, y_0)$ también y valdrá (u, v') para algún v'. Como $v'^2 = u^3 + au + b = v^2$, tenemos $v' = \pm v$. Si $v' = v$, hemos terminado. Si $v' = -v$, entonces $\alpha(x_0, -y_0) = (u, -v') = (u, v)$.

Supongamos que $p - uq$ es un polinomio constante. Como $E(\overline{K})$ no es finito y el núcleo de α sí es finito, solo un número finito de puntos de $E(\overline{K})$ puede tener como imagen un punto con una componente x dada. Así, bien $p(x)$ o $q(x)$ no es constante. Si p y q son dos polinomios no constantes, entonces hay como mucho una constante u tal que $p - uq$ es constante (si u' fuera otra constante que lo verificara, se tendría $(u' - u)q = (p - uq) - (p - u'q)$ es constante y $(u - u')p = u'(p - uq) - u(p - u'q)$ es constante, lo que implicaría que p y q son constantes). Así, hay al menos dos puntos, (u, v) y $(u, -v)$ para algún v, que no están en la imagen de α. Sea

(u_1, v_1) otro punto. Entonces $\alpha(P_1) = (u_1, v_1)$ para algún P_1. Podemos elegir (u_1, v_1) tal que $(u_1, v_1) + (u, v) \neq (u, \pm v)$, por lo que existe P_2 con $\alpha(P_2) = (u_1, v_1) + (u, v)$. Entonces $\alpha(P_2 - P_1) = (u, v)$ y $\alpha(P_1 - P_2) = (u, -v)$.

□

Proposición 1.22

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo K y sea n un entero no cero. Consideramos el endomorfismo *multiplicación* por n dado por

$$n(P) = nP, \ \forall P \in E(\overline{K})$$

Supongamos que está dado por funciones racionales R_n y S_n, esto es,

$$n(x, y) = (R_n(x), yS_n(x))$$

para todo $(x, y) \in E(\overline{K})$. Entonces

$$\frac{R_n'(x)}{S_n(x)} = n.$$

Por tanto, la multiplicación por n es separable si y sólo si n no es un múltiplo de la característica del cuerpo base.

Para demostrar esta proposición, necesitamos un resultado técnico. La demostración de este lema se puede encontrar en [4, sec 2.9].

Lema 1.23

Sean α_1, α_2, α_3 endomorfismos no triviales de una curva elíptica E con $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$. Supongamos que cada endomorfismo está dado de la siguiente forma

$$\alpha_j(x, y) = (R_{\alpha_j}(x), yS_{\alpha_j}(x))$$

y que existen constantes $c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}$ tal que

$$\frac{R_{\alpha_1}'(x)}{S_{\alpha_1}(x)} = c_{\alpha_1}, \quad \frac{R_{\alpha_2}'(x)}{S_{\alpha_2}(x)} = c_{\alpha_2}.$$

Entonces

$$\frac{R_{\alpha_3}'(x)}{S_{\alpha_3}(x)} = c_{\alpha_3} + c_{\alpha_3}$$

Demostración de la proposición 1.22. Dado un endomorfismo cualquiera α, se tiene

$$\alpha(x, -y) = \alpha(-(x, y)) = -\alpha(x, y).$$

En particular, $R_{-n} = R_n$ y $S_{-n} = -S_n$. Luego $R'_n/S_n = -R'_n/S_n$ y basta probar el resultado para n positivos.

Para $n = 1$, la primera parte de la proposición es cierta. Aplicando el lema anterior, si es cierta para n, también es cierta para $n+1$ (la suma de n y 1). Así,

$$\frac{R'_n(x)}{S_n(x)} = n.$$

Por otro lado, $R'_n(x) \neq 0$ si y solo si $R'_n(x)/S_n(x) \neq 0$, que es equivalente a que la característica de K no divida a n. Por la definición de separabilidad, esto prueba la segunda parte. $\square$

1.2 PUNTOS DE TORSIÓN

En este apartado introduciremos los puntos de torsión y su estructura que jugarán un papel importante en las curvas elípticas sobre cuerpos finitos. También veremos el emparejamiento Weil el cual utilizaremos en la demostración del teorema de Hasse 1.34.

Definición 1.24

Dada una curva elíptica E, un elemento del grupo $E(\overline{K})$ cuyo orden es finito se llamará *punto de torsión*.

Definición 1.25

Llamaremos *subgrupo de n-torsión* al subgrupo de puntos $\overline{K}$-racionales

$$E[n] = \{P \in E(\overline{K}) \mid nP = \infty\}.$$

Estos conjuntos son subgrupos ya que son los núcleos del endomorfismo multiplicación por n (definido en el apartado 1.1.6).

El siguiente resultado da la estructura de los subgrupos de torsión.

Teorema 1.26

Sea E una curva elíptica sobre un cuerpo K y sea n un entero positivo. Si la característica de K no divide a n, o es cero, entonces

$$E[n] \simeq \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n.$$

donde $\oplus$ denota la suma directa de grupos. Por otro lado, si la característica de K es $p > 0$ y $p|n$, entonces

$$E[n] \simeq \mathbb{Z}_{n'} \oplus \mathbb{Z}_{n'} \text{ o } \simeq \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_{n'}$$

donde $n = p^r n'$ con $p \nmid n'$.

Para demostrar este teorema vamos a usar un resultado cuya demostración técnica, extensa y laboriosa omitiremos. Puede consultar su demostración en [4, sec. 3.2].

Proposición 1.27

Sea E una curva elíptica. El endomorfismo multiplicación por n de E tiene grado n^2.

Demostración del teorema 1.26. Supongamos primero que n no es múltiplo de la característica p del cuerpo. Por la proposicion 1.22, como n

no es múltiplo de la característica p, el endomorfismo multiplicación por n es separable. Por la proposición 1.20 y 1.27, el núcleo de este endomorfismo, $E[n]$, tiene orden n^2.

Por el teorema de estructura para grupos abelianos finitos, $E[n]$ es isomorfo a

$$\mathbb{Z}_{n_1} \simeq \mathbb{Z}_{n_2} \simeq \ldots \simeq \mathbb{Z}_{n_k}$$

para algunos enteros $n_1, n_2, ..., n_k$ con $n_i | n_{i+1}$ $\forall i$ y donde Z_{n_i} denota el grupo de enteros módulo n_i.

Sea l un primo que divide a n_1. Por lo que acabamos de ver, $E[l]$ tiene orden l^2. Tenemos así que $l \mid n_i$ $\forall i$ pero $E[l] \subset E[n]$, luego $k = 2$.

Multiplicar por n anula todos los elementos de $E[n] \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2}$, por lo que $n_2 | n$. Como $n^2 = |E[n]| = n_1 n_2$, se tiene $n_1 = n_2 = n$. Así,

$$E[n] \simeq \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n.$$

Supongamos ahora que la característica p divide a n. Primero veamos la estructura de los subgrupos de torsión $E[p^k]$ con $k \geqslant 1$.

Por la proposición 1.22, el endomorfismo multiplicación por p no es separable. Por tanto, por la proposición 1.20, el núcleo $E[p]$ del endomorfismo multiplicación por p tiene orden estrictamente menor que el grado de este endomorfismo, que es p^2 por la proposición 1.27. Como todo elemento de $E[p]$ tiene orden 1 o p, el orden de $E[p]$ es una potencia de p, por lo que debe ser 1 o p. Si $E[p] = \infty$, entonces $E[p^k]$ debe ser trivial $\forall k$.

Supongamos ahora que $E[p]$ tiene orden p. Entonces $E[p^k]$ es cíclico (basta usar como antes el teorema de estructura de grupos abelianos y ver que $k = 1$). Así, $E[p^k]$ no puede tener como orden $p^{k'}$ con $k' > k$. Veamos que justamente el orden es p^k.

Supongamos existe un elemento P de orden p^j. Por la proposicion 1.21, el endomorfismo multiplicación por p es sobreyectivo, así que existirá un punto Q tal que $pQ = P$. Como

$$p^j Q = p^{j-1} P \neq \infty \quad \text{pero} \quad p^{j+1} Q = p^j P = \infty$$

Q tiene orden p^{j+1}. Por inducción, hay puntos de orden p^k $\forall k$. Por tanto, $E[p^k]$ es cíclico de orden p^k.

Escribiendo $n = p^r n'$ con $r \geqslant 0$ y $p \nmid n'$, resulta

$$E[n] \simeq E[n'] \oplus E[p^r].$$

donde $E[n'] \simeq \mathbb{Z}_{n'} \oplus \mathbb{Z}_{n'}$, ya que $p \nmid n'$. Acabamos de ver que $E[p^r] \simeq 0$ o $\mathbb{Z}_{p^r}$. El teorema chino del resto nos dice que

$$\mathbb{Z}_{n'} \oplus \mathbb{Z}_{p^r} \simeq \mathbb{Z}_{n' p^r} \simeq \mathbb{Z}_n$$

por lo que concluimos con

$$E[n] \simeq \mathbb{Z}_{n'} \oplus \mathbb{Z}_{n'} \quad \text{o} \quad \mathbb{Z}_{n'} \oplus \mathbb{Z}_n.$$

$\square$

1.2.1 *Endomorfismos y matrices*

Los subgrupos de torsión nos permiten reducir cuestiones sobre los endomorfismos a cálculos con matrices. Para ello, dado un endomorfismo α, vamos a asociarle una matriz con entradas en $\mathbb{Z}_n$ que describirá la acción de α sobre una base de $E[n]$.

Definición 1.28

Sea n un entero positivo no divisible por la característica de K y $\alpha : E(\overline{K}) \to E(\overline{K})$ un homomorfismo (no necesariamente dado por funciones racionales). Definimos la matriz α_n dada por

$$\alpha_n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

donde los $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_n$ se obtienen de la siguiente forma:

- Se elige una *base* $\{\beta_1, \beta_2\}$ de $E[n] \simeq \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$.
- Se expresan las imagénes de β_1, β_2 por α en función de dicha base y se toman como a, b, c, d los coeficientes, esto es,
$$\alpha(\beta_1) = a\beta_1 + c\beta_2, \quad \alpha(\beta_2) = b\beta_1 + d\beta_2.$$

Los resultados que simplifican el cálculo del grado de un endomorfismo al cálculo del determinante de la matriz asociada son los siguientes.

Proposición 1.29

Sea α un endomorfismo de una curva elíptica E definido sobre un cuerpo K. Sea n un entero positivo no divisible por la característica de K. Entonces

$$\det(\alpha_n) \equiv \deg(\alpha) \pmod{n}.$$

Proposición 1.30

Sean α y β endomorfismos de E y sean a, b enteros. Consideramos el endomorfismo $a\alpha + b\beta$ definido por

$$(a\alpha + b\beta)(P) = a\alpha(P) + b\beta(P).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \deg(a\alpha + b\beta) &= a^2 \deg(\alpha) + b^2 \deg(\beta) \\ &\quad + ab(\deg(\alpha + \beta) - \deg(\alpha) - \deg(\beta)) \end{aligned}$$

Para demostrar ambas proposiciones, necesitamos introducir el emparejamiento Weil.

1.2.2 *Emparejamiento Weil*

El emparejamiento de Weil sobre un subgrupo de torsión de una curva elíptica es una herramienta principal en el estudio de las curvas elípticas. En este trabajo se utilizará para probar la proposición 1.29 que será necesaria para probar el teorema de Hasse 1.34.

Sea E una curva elíptica sobre un cuerpo K y sea n un entero no divisible por la característica de K. Consideramos el grupo μ_n de las raíces n-ésimas de la unidad en $\overline{K}$, esto es,

$$\mu_n = \{x \in \overline{K} \mid x^n = 1\}.$$

Como la característica de K no divide a n, la ecuación $x^n = 1$ no tiene raíces múltiples y por lo tanto μ_n es un grupo cíclico de orden n.

Proposición 1.31

Sea E una curva elíptica sobre un cuerpo K y sea n un entero positivo no divisible por la característica de k. Entonces existe un emparejamiento

$$e_n : E[n] \times E[n] \to \mu_n$$

llamado *emparejamiento Weil* que satisface las siguientes propieades:

1. e_n es bilineaer en cada variable, esto es,
$$e_n(S_1 + S_2, T) = e_n(S_1, T)e_n(S_2, T)$$
$$e_n(S, T_1 + T_2) = e_n(S, T_1)e_n(S, T_2)$$
$\forall S, S_1, S_2, T, T_1, T_2 \in E[n]$.
2. e_n es no degenerada en cada variable, esto es,
$$e_n(S, T),\ \forall T \in E[n] \implies S = \infty$$
$$e_n(S, T),\ \forall S \in E[n] \implies T = \infty$$
3. $e_n(T, T) = 1,\ \forall T \in E[n]$.
4. $e_n(T, S) = e_n(S, T)^{-1},\ \forall S, T \in E[n]$.
5. $e_n(\sigma S, \sigma T) = \sigma(e_n(S, T))$ para todo automorfismo (endomorfismo biyectivo) σ de $\overline{K}$ tal que σ sea la identidad en los coeficientes de E.

6. $e_n(\alpha S, \alpha T) = e_n(S,T)^{\deg(\alpha)}$ para todo endomorfismo α de E .

La proposición anterior requiere un estudio avanzado y detallado sobre curvas elípticas para realizar su demostración. Como no es nuestro objetivo hacer una teoría exhaustiva sobre curvas elípticas, el lector interesado puede consultar [4, cap. 11] para más información.

Corolario 1.32

Sea $\{T_1, T_2\}$ una base de $E[n]$. Entonces $e_n(T_1, T_2)$ es un raíz n-ésima de la unidad que genera μ_n (también llamada raíz *primitiva*).

Demostración. Vamos a usar la siguiente caracterización. Si ζ es una raíz n-ésima de la unidad, entonces ζ es una raíz primitiva si y solo si

$$\zeta^k = 1 \iff n \mid k.$$

Supongamos $e_n(T_1, T_2) = \zeta$ con $\zeta^d = 1$. Entonces $e_n(T_1, dT_2) = 1$. Por (1) y (3), $e_n(T_2, dT_2) = e_n(T_2, T_2)^d = 1$. Sea $S \in E[n]$. Entonces $S = aT_1 + bT_2$ para algunos enteros a, b. Se verifica

$$e_n(S, dT_2) = e_n(T_1, dT_2)^a e_n(T_2, dT_2)^b = 1.$$

Como esto es válido para cualquier S, (2) implica que $dT_2 = \infty$. Pero $dT_2 = \infty$ si y solo si $n \mid d$, luego ζ es una raíz primitiva. □

Ya podemos realizar las demostraciones pendientes de las proposiciones 1.29 y 1.30.

Demostración de la proposición 1.29. Por el corolario 1.32, $\zeta = e_n(T_1, T_2)$ es una raíz n-ésima primitivda de la unidad. Por la propiedades del endomorfismo Weil 1.31, se tiene

$$\begin{aligned}
\zeta^{\deg(\alpha)} &= e_n(\alpha(T_1), \alpha(T_2)) = e_n(aT_1 + cT_2, bT_1 + dT_2) \\
&= e_n(T_1, T_1)^{ab} e_n(T_1, T_2)^{ad} e_n(T_2, T_1)^{cb} e_n(T_2, T_2)^{cd} \\
&= \zeta^{ad-bc}
\end{aligned}$$

donde los coeficientes a, b, c, d son las entradas de la matriz α_n de la definición 1.28. Usando que ζ es una raíz primitiva, tenemos

$$\deg(\alpha) \equiv ad - bc \pmod{n}.$$

□

Demostración de la proposición 1.30. Sea n un entero no divisible por la característica de K. Representamos α y β por matrices α_n y β_n (con respecto a alguna base de $E[n]$). Entonces $a\alpha_n + b\beta_n$ representa la acción de $a\alpha + b\beta$ sobre $E[n]$. Un cálculo directo resulta

$$\begin{aligned}\det(a\alpha_n + b\beta_n) &= a^2 \det(\alpha_n) + b^2 \det(\beta_n) \\ &\quad + ab(\det(\alpha_n + \beta_n) - \det(\alpha_n) - \det(\beta_n))\end{aligned}$$

para cualquier matriz α_n y β_n. Por tanto,

$$\begin{aligned}\deg(a\alpha + b\beta) \equiv\ & a^2 \deg(\alpha) + b^2 \deg(\beta) \\ & + ab(\deg(\alpha + \beta) - \deg(\alpha) - \deg(\beta)) \pmod{n}\end{aligned}$$

Como esto es válido para cualquier n, debe ser una igualdad. $\square$

1.3 CURVAS ELÍPTICAS SOBRE CUERPOS FINITOS

Sea $\mathbb{F}_q$ un cuerpo finito de q elementos, donde q es la potencia n-ésima de un primo p y sea E una curva elíptica definida sobre $\mathbb{F}_q$. Como el número de pares (x, y) con $x, y \in \mathbb{F}_q$ es finito, el grupo de puntos $E(\mathbb{F}_q)$ es finito. En este aparatado estudiaremos las propiedades de este grupo, como el orden, que serán importantes en muchos contextos.

Los dos resultados más importantes se dan en los siguientes dos teoremas.

Teorema 1.33

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$. Entonces

$$E(\mathbb{F}_q) \simeq \mathbb{Z}_n \text{ or } \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2}$$

para algún entero $n \geqslant 1$ o para algunos enteros $n_1, n_2 \geqslant 1$ con $n_1 \mid n_2$.

Demostración. Como $E(\mathbb{F}_q)$ es un grupo abeliano finito, será isomorfo a una suma directa de grupos cíclicos

$$\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \ldots \mathbb{Z}_{n_r}$$

con $n_i \mid n_{i+1}$. Como, para cada i, el grupo Z_{n_i} tiene n_1 elementos de orden un divisor de n_1, tenemos que $E(\mathbb{F}_q)$ tiene n_1^r elementos de orden un divisor de n_1. Por el teorema 1.26, hay hasta n_1^2 (incluso si permitimos coordenadas en la clasura algebraica de $\mathbb{F}_q$). Por tanto, $r \leqslant 2$. □

Teorema 1.34 (Teorema de Hasse)

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$. Entonces el orden de $E(\mathbb{F}_q)$ verifica

$$|q + 1 - |E(\mathbb{F}_q)|| \leqslant 2\sqrt{q}.$$

Demostración. Véase apartado 1.3.3. □

1.3.1 *Ley de grupo para cuerpos base de característica 2*

En el apartado 1.1.2, clasificamos las curvas elípticas sobre $\mathbb{F}_{2^m}$ según eran supersingulares o no. Ahora podemos definir este concepto.

Definición 1.35

Sea E una curva elíptica sobre un cuerpo base de característica p. Diremos que E es *supersingular* si $E[p] = \{\infty\}$.

Una ventaja de las curvas supersingulares es que los cálculos involucrados en la multiplicación de un punto por un escalar se pueden hacer con aritmética de cuerpos finitos, que es en general más rápida que la aritmética de curvas elípticas [4, cap. 4]. Sin embargo, estas curvas no son seguras en criptografía ya que son vulnerables a un tipo de ataques conocidos como ataques de emparejamiento Weil y Tate [1, cap. 4]. Por este último motivo, sólo vamos a dar las fórmulas de adicción para curvas no supersingulares sobre $\mathbb{F}_{2^m}$.

Fórmulas de adicción 1.36

Sea E una curva elíptica definida por la ecuación $y^2 + xy = x^3 + ax^2 + b$ sobre el cuerpo finito $\mathbb{F}_{2^m}$. Las fórmulas de adicción son las siguientes:

a) $P + \infty = \infty + P = P$, para todo $P \in E(\mathbb{F}_{2^m})$

b) Si $P = (x, y) \in E(\mathbb{F}_{2^m})$, entonces $(x, y) + (x, x + y) = \infty$ ya que $-P = (x, x + y)$. Además, $-\infty = \infty$.

c) Sea $P = (x_1, y_1) \in E(\mathbb{F}_{2^m})$ y $Q = (x_2, y_2) \in E(\mathbb{F}_{2^m})$, donde $P \neq \pm Q$. Entonces $P + Q = (x_3, y_3)$, donde

$$x_3 = \lambda^2\lambda + x_1 + x_2 + a, \quad y_3 = \lambda(x_1 + x_3) + x_3 + y_1$$

con $\lambda = (y_1 + y_2)/(x_1 + x_2)$.

d) Sea $P = (x_1, y_1) \in E(\mathbb{F}_{2^m})$, donde $P \neq -P$. Entonces $2P = (x_3, y_3)$ donde:

$$x_3 = \lambda^2\lambda + a = x_1^2 + b/x_1^2, \quad y_3 = x_1^2 + \lambda x_3 + x_3$$

con $\lambda = x_1 + y_1/x_1$.

1.3.2 *Endomorfismo de Frobenius*

En este apartado veremos un ejemplo importante de endomorfismo. Jugará una papel crucial en la teoría de curvas elípticas sobre cuerpos finitos.

Proposición 1.37

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$. La aplicación definida por

$$\phi_q(x,y) = (x^q, y^q), \quad \phi_q(\infty) = \infty$$

es un endomorfismo y se llama *endormofirsmo de Frobenius*.

Demostración. Veamos primero que $\phi_q(x,y) \in E(\overline{\mathbb{F}_q})$. Usaremos las siguientes propiedades de los cuerpos finitos:

$$\begin{aligned}(a+b)^q &= a^q + b^q, \ \forall a,b \in \overline{\mathbb{F}_q}\\ a^q &= a, \ \forall a \in \mathbb{F}_q.\end{aligned}$$

Como la demostración es esencialmente la misma para la ecuación de Weirstrass general y la ecuación simplificada para cuerpos base de característica distinta de 2 y 3, usaremos está última. Tenemos

$$y^2 = x^3 + ax + b,$$

donde $a, b \in Fq$. Elevando todo a la potencia q-ésima obtenemos

$$(y^q)^2 = (x^q)^3 + a(x^q) + b.$$

Luego (x^q, y^q) está en E. Veamos ahora ϕ_q es un homorfismo. Sea $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E(\overline{\mathbb{F}_q})$ con $x_1 \neq x_2$. La suma es (x_3, y_3) con

$$x_3 = m^2 - x_1 - x_2, \ y_3 = m(x_1 - x_3) - y_1, \text{ donde } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Elevando todo a la potencia q-ésima obtenemos

$$x_3^q = m'^2 - x_1^q - x_2^q, \ y_3^q = m'(x_1^q - x_3^q) - y_1^q, \text{ donde } m' = \frac{y_2^q - y_1^q}{x_2^q - x_1^q}.$$

Por tanto,

$$\phi_q(x_3, y_3) = \phi_q(x_1, y_1) + \phi_q(x_2, y_2).$$

Los casos donde $x_1 = x_2$ o uno de los dos puntos es ∞ se comprueban fácilmente. Sin embargo, el caso de añadir un punto consigo mismo presenta una sutileza. Usando las fórmulas, tenemos que $2(x_1, y_1) = (x_3, y_3)$ donde

$$x_3 = m^2 - 2x_1, \ y_3 = m(x_1 - x_3) - y_1, \text{ donde } m = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1}.$$

Cuando elevamos a la potencia q-ésima, obtenemos

$$x_3^q = m'^2 - 2^q x_1^q, \ y_3^q = m'(x_1^q - x_3^q) - y_1^q, \text{ donde } m' = \frac{3^q (x_1^q)^2 + a^q}{2^q y_1^q}.$$

Como $2, 3, a \in \mathbb{F}_q$, tenemos $2^q = 2, \ 3^q = 3, \ a^q = a$. Luego hemos obtenido la fórmula para duplicar el punto (x_1^q, y_1^q) de E.

Finalmente, como ϕ_q es un homomorfismo dado por funciones racionales, es un endomorfismo de E. □

Nótese que este endomorfismo no es más que aplicar el *automorfismo de Frobenius*

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{F}_q} &\to \overline{\mathbb{F}_q} \\ x &\mapsto x^q \end{aligned}$$

sobre las componentes de un punto. Veamos ahora una cuantas propiedades de este endomorfismo.

Lema 1.38

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$ y sea $(x, y) \in E(\overline{\mathbb{F}_q})$. Entonces

$$(x, y) \in E(\mathbb{F}_q) \iff \phi_q(x, y) = (x, y).$$

Demostración. Usando $a^q = a$, $\forall a \in \mathbb{F}_q$, tenemos

$$\begin{aligned} (x, y) \in E(\mathbb{F}_q) &\iff x, y \in \mathbb{F}_q \\ &\iff \phi_q(x) = x \text{ y } \phi_q(y) = y \\ &\iff \phi_q(x, y) = (x, y). \end{aligned}$$

□

Lema 1.39

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$. Entonces ϕ_q no es separable y es de grado q.

Demostración. Como $q = 0$ en $\mathbb{F}_q$, la derivada de x^q es idénticamente cero, luego ϕ_q no es separable. Por otro lado, ϕ_q tiene grado q aplicando la definición de grado de un endomorfismo. □

Proposición 1.40

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$, donde q es una potencia de un primo p. Sean r, s enteros no nulos. El endomorfismo $r\phi_q + s$ es separable si y solo si $p \nmid s$.

Demostración. Podemos escribir el endomorfismo multiplicación por r como

$$r(x, y) = (R_r(x), yS_r(x))$$

por el lema 1.17. Entonces

$$\begin{aligned} (R_{r\phi_q}(x), yS_{r\phi_q}(x)) = (\phi_q r)(x, y) &= (R_r^q(x), y^q S_r^q(x)) \\ &= (R_r^q(x), y(x^3 + ax + b)^{(q-1)/2} S_r^q(x)). \end{aligned}$$

Así,

$$c_{r\phi_q} = R'_{r\phi_q}/S_{r\phi_q} = qR_r^{q-1}R'_r/S_{r\phi_q} = 0.$$

Además, $c_s = R'_s/S_s = s$ por la proposición 1.22. Por el lema 1.23,

$$R'_{r\phi_q+s}/S_{r\phi_q+s} = c_{r\phi_q+s} = c_{r\phi_q} + c_s = 0 + s = s$$

Por lo tanto, $r\phi_q + s$ es separable si y solo si $R'_{r\phi_q+s} \neq 0$ y esto ocurre si y solo si $p \nmid s$. □

Proposición 1.41

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$ y consideremos el endomorfismo $\phi_q^n - 1$ con $n \geqslant 1$. Entonces

1. $\ker(\phi_q^n - 1) = E(\mathbb{F}_{q^n})$.
2. $\phi_q^n - 1$ es separable, por lo que $|E(\mathbb{F}_{q^n})| = \deg(\phi_q^n - 1)$.

Demostración. Como ϕ_q^n es el endomorfismo de Frobenius para el cuerpo $\mathbb{F}_{q^n}$, (1) es consecuencia del lema 1.38. (2) se tiene aplicando las proposiciones 1.40 y 1.20. □

Lema 1.42

Sean r, s enteros. Entonces $\deg(r\phi_q - s) = r^2q + s^2 - rsa$.

Demostración. La proposición 1.30 implica que

$$\begin{aligned}\deg(r\phi_q - s) = r^2\deg(\phi_q) + s^2\deg(-1)&\\ + rs(\deg(\phi_q - 1) - \deg(\phi_q) - \deg(-1)).&\end{aligned}$$

Como $\deg(\phi_q) = q$ y $\deg(-1) = 1$, el resultado se deduce de 1.41 y 1.33. □

1.3.3 *Teorema de Hasse*

Tenemos ya todas las herramientas para probar el teorema de Hasse.

Teorema (1.34)

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$. Entonces el orden de $E(\mathbb{F}_q)$ verifica

$$|q + 1 - |E(\mathbb{F}_q)|| \leqslant 2\sqrt{q}.$$

Demostración del teorema 1.34. Sea

$$a = q + 1 - |E(\mathbb{F}_q)| = q + 1 - deg(\phi_q - 1)$$

donde estamos usando proposición 1.41. Veamos que $|a| \leqslant 2\sqrt{q}$.

Como $\deg(r\phi_q - s) \geqslant 0$, el lema 1.42 implica que

$$q\left(\frac{r}{s}\right)^2 - a\left(\frac{r}{s}\right)^2 + 1 \geqslant 0.$$

para cualesquiera enteros r, s. Como el conjunto de los racionales es *denso* en $\mathbb{R}$, tenemos que

$$qx^2 - ax + 1 \geqslant 0$$

para todo número real x. Así, el discriminante de este polinomio es negativo o cero, lo que implica que $a^2 - 4q \leqslant 0$, luego $|a| \leqslant 2\sqrt{q}$. □

Nota 1.43 (comentarios del teorema 1.34)**.**

- Como la ecuación de Weierstrass tiene al menos dos soluciones para todo $x \in \mathbb{F}_q$, una primera acotación del orden de $E(\mathbb{F}_q)$ es $|E(\mathbb{F}_q)| \in [1, 2q+1]$. El teorema de Hasse proporciona cotas más optimas:

  $$|E(\mathbb{F}_q)| \in [q + 1 - 2\sqrt{q},\ q + 1 + 2\sqrt{q}].$$

  Como $2\sqrt{q}$ es pequeño respecto a q, $E(\mathbb{F}_q) \approx q$.

- Tres resultados fueron clave para la demostración:
  - La identificación de $E(\mathbb{F}_q)$ con el núcleo de $\phi_q - 1$.
  - La igualdad entre el orden del núcleo y el grado de $\phi_q - 1$ gracias a la separabilidad de $\phi_q - 1$
  - El emparejamiento Weil, especialmente la parte (6) del teorema 1.31 y su consecuencia 1.41.