1 ARITMÉTICA DE LAS CURVAS ELÍPTICA

En el apartado 1.1 se introducen las curvas elípticas. Se explican las operaciones de grupo adicción y duplicacíon para los puntos de una curva elíptica, junto con su estructura fundamental y otras propiedades.

Las principales referencias usadas en este capítulo han sido [4] y [1].

1.1 INTRODUCCIÓN A LAS CURVAS ELÍPTICAS

Definición 1.1.1. Una *curva elíptica* E se define por una una ecuación de la forma

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \tag{1}$$

donde $a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 \in K$ y $\Delta \neq 0$, donde Δ es el *discriminante* de E y se define como:

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= -d_2^2d_8 - 8d_4^3 - 27d_6^2 + 9d_2d_4d_6 \\ d_2 &= a_1^2 + 4a_2 \\ d_4 &= 2a_4 + 4a_2 \\ d_6 &= a_3^2 + 4a_6 \\ d_8 &= a_1^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Si L es una extensión del cuerpo K, entonces el conjunto de puntos *L-racionales* de E es:

$$E(L) = \{\infty\} \cup \{(x, y) \in L \times L : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 = 0\}$$

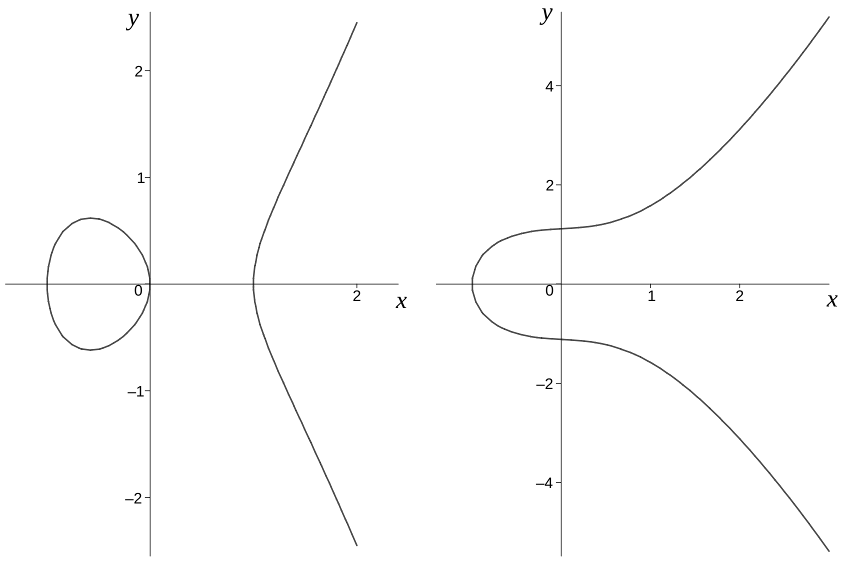
Nota 1.1.1 (comentarios de la definición 1.1.1)**.**

- La ecuación (1) se conoce como la *ecuación de Weierstrass*.
- Diremos que E *está definida sobre* K y lo notaremos E/K. A K lo llamaremos *cuerpo base*.
- La condición $\Delta \neq 0$ asegura que la curva elíptica es «suave», esto es, no hay puntos en los que la curva tenga dos o mas rectas tangentes.
- El punto ∞ es el único punto en la línea del infinito que satisface la forma proyectiva de la ecuación de Weierstrass (véase **??**).

Ejemplo 1.1.1 (curvas elípticas sobre $\mathbb{R}$)**.** Consideramos las curvas elípticas:

$$\begin{aligned} E_1 &: y^2 = x^3 - x \\ E_2 &: y^2 = x^3 + x \end{aligned}$$

definidas sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Los puntos $E_1(\mathbb{R})$ y $E_2(\mathbb{R})$ se han representado en la Figura 1.



(a) $E_1 : y^2 = x^3 - x$ (b) $E_2 : y^2 = x^3 + x$

Figura 1: Curvas elípticas sobre $\mathbb{R}$

1.1.1 *Ecuaciones de Weierstrass simplificadas*

Definición 1.1.2. Dos curvas elípticas E_1 y E_2 definidas sobre K y dadas por las ecuaciones de Weierstrass:

$$\begin{aligned} E_1 &: y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \\ E_2 &: y^2 + a_1'xy + a_3'y = x^3 + a_2'x^2 + a_4'x + a_6' \end{aligned}$$

se dicen que son *isomorfas sobre K* si existen $u, r, s, t \in K$, $u \neq 0$, tal que el cambio de variables lineal

$$(x, y) \mapsto (u^2x + r, u^3y + u^2sx + y) \tag{3}$$

transforma la ecuación E_1 en la ecuación E_2. La transformación (3) se llama un cambio de variables admisible.

El cambio de variables (3) es el único que deja «fijo» el punto del infinito y preserva la forma de la ecuación de Weierstrass. No vamos a entrar en más detalle, pero puede consultar [3, prop. III.3.1b] para más informácion.

Una ecuación de Weierstrass

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

puede simplificarse considerablemente aplicando cambios de variables admisibles. Usaremos las ecuaciones simplificadas en vez de la general en el resto del trabajo. Vamos a considerar por separado los casos en los que el cuerpo base tenga característica distinta de 2 y 3 o tenga característica 2 o 3.

1. Si la característica de K es distinta de 2 y 3, entonces el cambio de variables admisible

   $$(x, y) \mapsto \left(\frac{x - 3a_1^2 - 12a_2}{36}, \frac{y - 3a_1x}{216} - \frac{a_1^3 + 4a_1a_2 - 12a_3}{240}\right)$$

   transforma E en la curva

   $$y^2 = x^3 + ax + b$$

   donde $a, b \in K$. El discriminante de esta curva es $\Delta = -16(4a^3 + 27b^2)$.

2. Si la característica de K es 2, hay dos casos que considerar. Si $a_1 \neq 0$, entonces el cambio de variables admisible

   $$(x, y) \mapsto \left(a_1^2x + \frac{a_3}{a_1}, a_1^3y + \frac{a_1^2a_4 + a_3^2}{a_1^3}\right)$$

   transforma E en la curva

   $$y^2 + xy = x^3 + ax^2 + b$$

   donde $a, b \in K$. Tales curvas se llaman *no supersingulares* (véase **??**) y tiene discriminante $\Delta = b$. Si $a_1 = 0$, entonces el cambio de variables admisible

   $$(x, y) \mapsto (x + a_2, y)$$

   transforma E en la curva

   $$y^2 + cy = x^3 + ax + b$$

   donde $a, b, c \in K$. Tales curvas se llaman *supersingulares* (véase **??**) y tiene discriminante $\Delta = c^4$.

3. Si la característica de K es 4, entonces hay dos casos que considerar. Si $a_1^2 \neq -a_2$, entonces el cambio de variables admisible

   $$(x, y) \mapsto \left(x + \frac{d_4}{d_2}, y + a_1x + a_1\frac{d_4}{d_2} + a_3\right)$$

donde $d_2 = a_1^2 + a_2$ y $d_4 = a_4 - a_1 a_3$, transforma E en la curva

$$y^2 = x^3 + ax^2 + b$$

donde $a, b \in K$. Tales curvas se llaman *no supersingulares* (véase **??**) y tiene discriminante $\Delta = -a^3 b$. Si $a_1^2 = -a_2$, entonces el cambio de variables admisible

$$(x, y) \mapsto (x, y + a_1 x + a_3)$$

transforma E en la curva

$$y^2 = x^3 + ax^2 + b$$

donde $a, b \in K$. Tales curvas se llaman *supersingulares* (véase **??**) y tiene discriminante $\Delta = -a^3$.

Demostración. La demostración completa puede encontrarse en [3, sec. III.1]. Se trata simplemente de completar cuadrados y realizar sustituciones, por ello aquí solo mostraremos la demostración de la primera simplifación.

En primer lugar, sumando en la ecuación de Weierstrass (1) en ambos lados por $(a_1 a_3 x)/2 + a_3^2/4 + (a_1^2 x^2)/4$, completamos el cuadrado:

$$\left(y + \frac{a_1 x}{2} + \frac{a_3}{2}\right)^2 = x^3 + \left(a_2 + \frac{a_1^2}{4}\right) x^2 + \left(a_4 + \frac{a_1 a_3}{2}\right) x + \left(a_6 + \frac{a_3^2}{4}\right)$$

Haciendo $y_1 = y + \frac{a_1 x}{2} + \frac{a_3}{2}$, obtenemos

$$y_1^2 = x^3 + a_2' x^2 + a_4' x + a_6'$$

para algunas constantes $a_2', a_4', a_6' \in K$. Finalmente, sustituyendo $x_1 = x + \frac{a_2'}{3}$ resulta

$$y_1^2 = x_1^3 + a x_1 + b$$

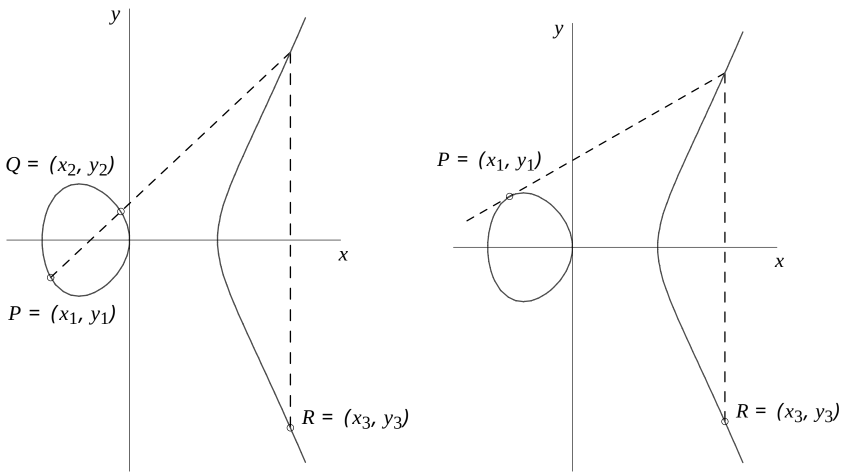
para algunas constante $a, b \in K$. Para obtener el discriminante Δ basta sustiuir el valor de las constantes $a_4 = a,\ a_6 = b$ y $a_1 = a_3 = a_2 = 0$ en (2). □

1.1.2 *Ley de grupo*

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo K. Hay un *método de la cuerda y la tangente* para sumar dos puntos en $E(K)$ y obtener un tercer punto en $E(K)$. Junto con esta operación aditiva, el conjunto de puntos $E(K)$ forma un gurpo abeliano con ∞ como elemento neutro.

La regla aditiva se explica fácilmente geométricamente. Sea P y Q dos puntos distintos de una curva elíptica E. Entonces la *suma* R, de P y Q esta definido como sigue. Se dibuja una recta L de P a Q. Esta recta intersecta la curva elíptica en un tercer punto. Entonces R es la reflexión de este punto sobre el eje-x. Esto se puede apreciar en la Figura 2a.

El *doble* R, de P, se define como sigue. Se dibuja la línea tangente L a la curva elíptica en P. Esta línea intersecta la curva elíptica en un segundo punto. Entonces R es la reflexión de esto punto sobre el eje-x. Esto se puede apreciar en la Figura 2b.



(a) Adicción: $P + Q = R$ (b) Duplicación: $P + P = P$

Figura 2: Adicción y duplicación geométrica de puntos de una curva elíptica

El hecho de que $L \cap E$, contando multiplicidades, consiste en exactamente tres puntos (no necesariamente distintos) es un caso especial del teorema de Bézout [2, sec. I.7.8]. Sin embargo, como vamos a dar fórmulas explícitas posteriormente en esta sección, no hay necesidad de usar un teorema general.

Parte I

APÉNDICE

BIBLIOGRAFÍA

[1] Darrel Hankerson, Alfred J. Menezes y Scott Vanstone. *Guide to Elliptic Curve Cryptography*. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 2003. ISBN: 038795273X.

[2] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Encyclopaedia of mathematical sciences. Springer, 1977. ISBN: 9780387902449.

[3] J.H. Silverman. *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2009. ISBN: 9780387094946.

[4] Lawrence C. Washington. *Elliptic Curves: Number Theory and Cryptography, Second Edition*. 2.ª ed. Chapman & Hall/CRC, 2008. ISBN: 9781420071467.