1 ARITMÉTICA DE LAS CURVAS ELÍPTICA

En el apartado 1.1 se introducen las curvas elípticas. Se explican las operaciones de grupo adicción y duplicacíon para los puntos de una curva elíptica, junto con su estructura fundamental y otras propiedades.

Las principales referencias usadas en este capítulo han sido [4] y [1].

1.1 INTRODUCCIÓN A LAS CURVAS ELÍPTICAS

Definición 1.1.1. Una *curva elíptica* E se define por una una ecuación de la forma

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \tag{1}$$

donde $a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 \in K$ y $\Delta \neq 0$, donde Δ es el *discriminante* de E y se define como:

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= -d_2^2d_8 - 8d_4^3 - 27d_6^2 + 9d_2d_4d_6 \\ d_2 &= a_1^2 + 4a_2 \\ d_4 &= 2a_4 + 4a_2 \\ d_6 &= a_3^2 + 4a_6 \\ d_8 &= a_1^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Si L es una extensión del cuerpo K, entonces el conjunto de puntos *L-racionales* de E es:

$$E(L) = \{\infty\} \cup \{(x, y) \in L \times L : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 = 0\}$$

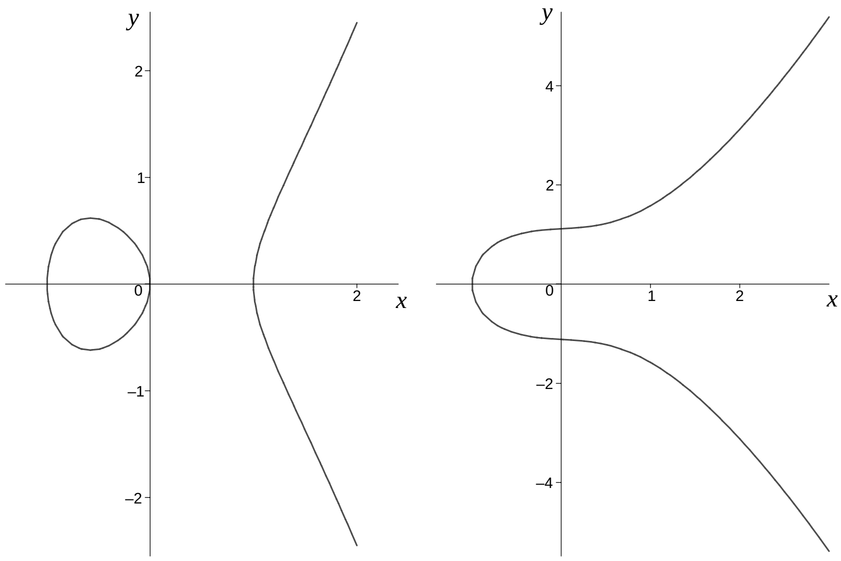
Nota 1.1.1 (comentarios de la definición 1.1.1)**.**

- La ecuación (1) se conoce como la *ecuación de Weierstrass*.
- Diremos que E *está definida sobre* K y lo notaremos E/K. A K lo llamaremos *cuerpo base*.
- La condición $\Delta \neq 0$ asegura que la curva elíptica es «suave», esto es, no hay puntos en los que la curva tenga dos o mas rectas tangentes.
- El punto ∞ lo llararemos *punto del infinito*. Es el único punto en la linea del infinito que satisface la forma proyectiva de la ecuación de Weierstrass (véase **??**).

Ejemplo 1.1.1 (curvas elípticas sobre $\mathbb{R}$)**.** Consideramos las curvas elípticas:

$$E_1 : y^2 = x^3 - x$$
$$E_2 : y^2 = x^3 + x$$

definidas sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Los puntos $E_1(\mathbb{R})$ y $E_2(\mathbb{R})$ se han representado en la Figura 1.



(a) $E_1 : y^2 = x^3 - x$ (b) $E_2 : y^2 = x^3 + x$

Figura 1: Curvas elípticas sobre $\mathbb{R}$

1.1.1 *Ecuaciones de Weierstrass simplificadas*

Definición 1.1.2. Dos curvas elípticas E_1 y E_2 definidas sobre K y dadas por las ecuaciones de Weierstrass:

$$E_1 : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$
$$E_2 : y^2 + a'_1xy + a'_3y = x^3 + a'_2x^2 + a'_4x + a'_6$$

se dicen que son *isomorfas sobre K* si existen $u, r, s, t \in K$, $u \neq 0$, tal que el cambio de variables lineal

$$(x, y) \mapsto (u^2x + r, u^3y + u^2sx + y) \tag{3}$$

transforma la ecuación E_1 en la ecuación E_2. La transformación (3) se llama un cambio de variables admisible.

El cambio de variables (3) es el único que deja «fijo» el punto del infinito y preserva la forma de la ecuación de Weierstrass. No vamos a entrar en más detalle, pero puede consultar [3, prop. III.3.1b] para más informácion.

Una ecuación de Weierstrass

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

puede simplificarse considerablemente aplicando cambios de variables admisibles. Usaremos las ecuaciones simplificadas en vez de la general en el resto del trabajo. Vamos a considerar por separado los casos en los que el cuerpo base tenga característica distinta de 2 y 3 o tenga característica 2 o 3.

1. Si la característica de K es distinta de 2 y 3, entonces el cambio de variables admisible

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x - 3a_1^2 - 12a_2}{36}, \frac{y - 3a_1x}{216} - \frac{a_1^3 + 4a_1a_2 - 12a_3}{240}\right)$$

transforma E en la curva

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

donde $a, b \in K$. El discriminante de esta curva es $\Delta = -16(4a^3 + 27b^2)$.

2. Si la característica de K es 2, hay dos casos que considerar. Si $a_1 \neq 0$, entonces el cambio de variables admisible

$$(x, y) \mapsto \left(a_1^2x + \frac{a_3}{a_1}, a_1^3y + \frac{a_1^2a_4 + a_3^2}{a_1^3}\right)$$

transforma E en la curva

$$y^2 + xy = x^3 + ax^2 + b$$

donde $a, b \in K$. Tales curvas se llaman *no supersingulares* (véase **??**) y tienen discriminante $\Delta = b$. Si $a_1 = 0$, entonces el cambio de variables admisible

$$(x, y) \mapsto (x + a_2, y)$$

transforma E en la curva

$$y^2 + cy = x^3 + ax + b$$

donde $a, b, c \in K$. Tales curvas se llaman *supersingulares* (véase **??**) y tienen discriminante $\Delta = c^4$.

3. Si la característica de K es 4, entonces hay dos casos que considerar. Si $a_1^2 \neq -a_2$, entonces el cambio de variables admisible

$$(x, y) \mapsto \left(x + \frac{d_4}{d_2}, y + a_1x + a_1\frac{d_4}{d_2} + a_3\right)$$

donde $d_2 = a_1^2 + a_2$ y $d_4 = a_4 - a_1 a_3$, transforma E en la curva

$$y^2 = x^3 + ax^2 + b$$

donde $a, b \in K$. Tales curvas se llaman *no supersingulares* (véase **??**) y tiene discriminante $\Delta = -a^3 b$. Si $a_1^2 = -a_2$, entonces el cambio de variables admisible

$$(x, y) \mapsto (x, y + a_1 x + a_3)$$

transforma E en la curva

$$y^2 = x^3 + ax^2 + b$$

donde $a, b \in K$. Tales curvas se llaman *supersingulares* (véase **??**) y tiene discriminante $\Delta = -a^3$.

Demostración. La demostración completa puede encontrarse en [3, sec. III.1]. Se trata simplemente de completar cuadrados y realizar sustituciones, por ello aquí solo mostraremos la demostración de la primera simplificación.

En primer lugar, sumando en la ecuación de Weierstrass (1) en ambos lados por $(a_1 a_3 x)/2 + a_3^2/4 + (a_1^2 x^2)/4$, completamos el cuadrado:

$$\left(y + \frac{a_1 x}{2} + \frac{a_3}{2}\right)^2 = x^3 + \left(a_2 + \frac{a_1^2}{4}\right) x^2 + \left(a_4 + \frac{a_1 a_3}{2}\right) x + \left(a_6 + \frac{a_3^2}{4}\right)$$

Haciendo $y_1 = y + (a_1 x)/2 + a_3/2$, obtenemos

$$y_1^2 = x^3 + a_2' x^2 + a_4' x + a_6'$$

para algunas constantes $a_2', a_4', a_6' \in K$. Finalmente, sustituyendo $x_1 = x + a_2'/3$ resulta

$$y_1^2 = x_1^3 + a x_1 + b$$

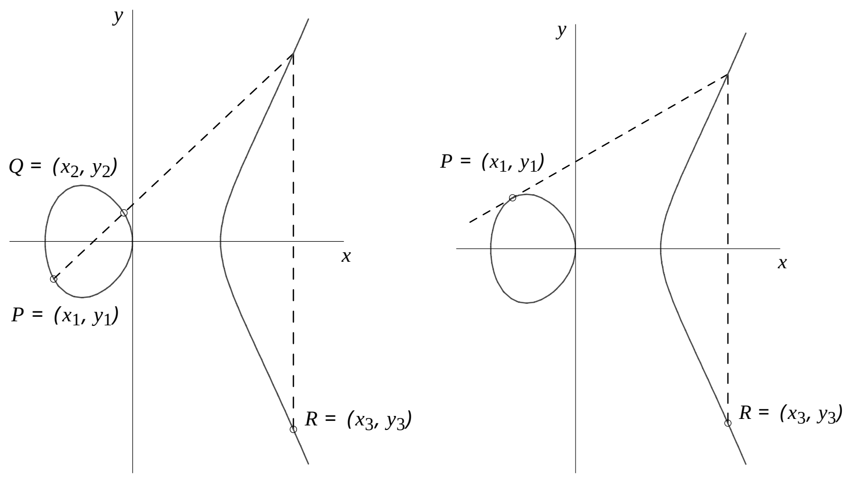
para algunas constante $a, b \in K$. Para obtener el discriminante Δ basta sustiuir el valor de las constantes $a_4 = a,\ a_6 = b$ y $a_1 = a_3 = a_2 = 0$ en (2). □

1.1.2 *Ley de grupo*

Sea E una curva elíptica definida sobre un cuerpo K. Hay un *método de la cuerda y la tangente* para sumar dos puntos en $E(K)$ y obtener un tercer punto en $E(K)$. Junto con esta operación aditiva, el conjunto de puntos $E(K)$ forma un gurpo abeliano con ∞ como elemento neutro.

La regla aditiva se explica fácilmente geométricamente. Sea P y Q dos puntos distintos de una curva elíptica E. Entonces la *suma* R, de P y Q esta definido como sigue. Se dibuja una recta L de P a Q. Esta recta intersecta la curva elíptica en un tercer punto. Entonces R es la reflexión de este punto sobre el eje-x. Esto se puede apreciar en la Figura 2a.

El *doble* R, de P, se define como sigue. Se dibuja la línea tangente L a la curva elíptica en P. Esta línea intersecta la curva elíptica en un segundo punto. Entonces R es la reflexión de esto punto sobre el eje-x. Esto se puede apreciar en la Figura 2b.



(a) Adición: $P + Q = R$ (b) Duplicación: $P + P = P$

Figura 2: Adicción y duplicación geométrica de puntos de una curva elíptica

El hecho de que $L \cap E$, contando multiplicidades, consiste en exactamente tres puntos (no necesariamente distintos) es un caso especial del teorema de Bézout [2, sec. I.7.8]. Sin embargo, como vamos a dar fórmulas explícitas posteriormente en esta sección, no hay necesidad de usar un teorema general.

Definición 1.1.3 (ley de grupo)**.** Sea E una curva elíptica definida por la ecuación $y^2 = x^3 + ax + b$ sobre un cuerpo K de característica distinta de 2 y 3. Definimos la operación binaria $+ : E(K) \times E(K) \to E(K)$ como sigue:

a) $P + \infty = \infty + P = P$, para todo $P \in E(K)$

b) Si $P = (x, y) \in E(K)$, entonces $(x, y) + (x, -y) = \infty$. El punto $(x, -y)$ se denotará por $-P$ y se llamará el *negativo* de P. Además, $-\infty = \infty$.

c) Sea $P = (x_1, y_1) \in E(K)$ y $Q = (x_2, y_2) \in E(K)$, donde $P \neq \pm Q$. Entonces $P + Q = (x_3, y_3)$, donde

$$x_3 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2 - x_1 - x_2, \quad y_3 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x_1 - x_3) - y_1$$

d) Sea $P = (x_1, y_1) \in E(K)$, donde $P \neq \pm P$. Entonces $2P = (x_3, y_3)$ donde:

$$x_3 = \left(\frac{3x_1^2 + a}{2y_1}\right)^2 - 2x_1, \quad y_3 = \left(\frac{3x_1^2 + a}{2y_1}\right)(x_1 - x_3) - y_1$$

Demostración. Tenemos que comprobar que $+$ es una operación binaria válida, esto es, que a cada par de elementos de $E(K) \times E(K)$ le corresponde un único elemento de $E(K)$. Como la casuística anterior es total y exclusiva, basta ver que $+$ es una operación cerrada. Los casos $a)$ y $b)$ son triviales. Veamos los otros dos casos con detalle.

CASO $c)$ Supongamos $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, $P, Q \in E(K)$ con $P \neq \pm Q$. Consideramos la recta que los contiene:

$$L : y = m(x - x_1) + y_1, \text{ donde } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Nótese que $x_2 \neq x_1$ ya que $P \neq \pm Q$. Para hallar la intersección de L con E sustituimos y:

$$(m(x - x_1) + y_1)^2 = x^3 + ax + b$$

Podemos reescribir esto de la forma

$$0 = x^3 - m^2x^2 + b'x + c' \tag{4}$$

para algunas constantes $b', c' \in K$. Así, las raíces de esta cúbica es justamente $L \cup E$.

Sabemos que las raíces de un polinomio están relacionadas con sus coeficientes. De hecho, para un polinomio cúbico mónico $x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ con raíces r, s, t se tiene:

$$\begin{aligned} x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 &= (x - r)(x - s)(x - t) \\ &= x^3 - (r + s + t)x^2 + (rs + rt + st)x - rst \end{aligned}$$

En particular, $r + s + t = -c_2$. Como P y Q están en la intersección, x_1 y x_2 son dos raíces de (4), luego la tercera raíz α es $m^2 - x_1 - x_2$. Sustituyendo α en L resulta $\beta = m(x_3 - x_1) + y_1$, luego $(\alpha, \beta) \in E(K)$. Entonces $(\alpha, -\beta) = (x_3, y_3) \in E(K)$.

CASO $d)$ Sea $P = (x_1, y_1)$, donde $P \neq -P$. Consideramos la recta tangente a E en P

$$L : y = m(x - x_1) + y_1, \text{ donde } m = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1}$$

Nótese que $y_1 \neq 0$ ya que si no estaríamos en el caso $b)$. Hallamos la intersección con E de forma análoga al caso $c)$ y obtenemos la cúbica:

$$0 = x^3 - m^2x^2 + b'x + c'$$

para algunas constantes $b', c' \in K$. Análogamente al caso $c)$, como x_1 es una raíz doble de la cúbica (derívese y evalúe en x_1) tenemos que la tercera raíz α es $m^2 - 2x_1$. Sustituyendo α en L resulta $\beta = m(x_3 - x_1) + y_1$, luego $(\alpha, \beta) \in E(K)$. Entonces $(\alpha, -\beta) = (x_3, y_3) \in E(K)$. □

Teorema 1.1.1. La suma 1.1.3 de puntos en una curva elíptica E sobre un cuerpo K de característica distinta de 2 y 3 satisface la siguientes propiedades:

- *Conmutatividad.* $P_1 + P_2 = P_2 + P_1,\ \forall P_1, P_2 \in E(K)$.
- *Existencia de elemento neutro.* $P + \infty = P,\ \forall P \in E(K)$.
- *Existencia de elemento opuesto.* $P + (-P) = \infty,\ \forall P \in E(K)$.
- *Asociatividad.* $(P_1 + P_2) + P_3 = P_1 + (P_2 + P_3),\ \forall P_1, P_2, P_3 \in E(K)$.

En otras palabras, $(E(K), +, \infty)$ es un grupo abeliano.

Demostración. La conmutatividad es trivial en los casos $a)$, $b)$ y $d)$. Para el caso $c)$ también es fácil ya que la recta que une P_1 y P_2 es la misma que la recta que une P_2 y P_1. La existencia de elemento neutro e inverso también es directo de la definición 1.1.3.

La asociatividad puede probarse utilizando las fórmulas caso por caso, pero supone un esfuerzo demasiado laborioso. En su lugar, puede abordarse de forma más sofisticada bien estudiando las líneas y sus intersecciones con la curva elíptica en el plano proyectivo [4, sec. 2.4] o bien usando teoremas más generales como el de Riemann-Roch [3, teo. III.3.4.e]. □

Parte I

APÉNDICE

BIBLIOGRAFÍA

[1] Darrel Hankerson, Alfred J. Menezes y Scott Vanstone. *Guide to Elliptic Curve Cryptography*. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 2003. ISBN: 038795273X.

[2] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Encyclopaedia of mathematical sciences. Springer, 1977. ISBN: 9780387902449.

[3] J.H. Silverman. *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2009. ISBN: 9780387094946.

[4] Lawrence C. Washington. *Elliptic Curves: Number Theory and Cryptography, Second Edition*. 2.ª ed. Chapman & Hall/CRC, 2008. ISBN: 9781420071467.