Matemática C
Lista de exercícios 3

1) a) $y = x^2 - 3x + 2$

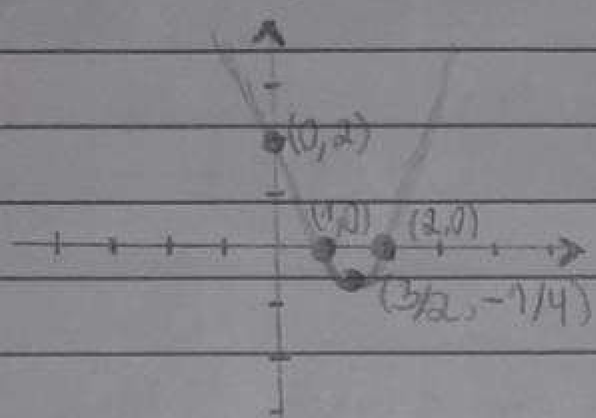
$x_v = -b/2a \rightarrow 3/2$

$a = 1$ $\qquad \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ $\rightarrow x_1 = 2$; $\rightarrow x_2 = 1$

$b = -3$ $\qquad y_v = -\Delta/4a \rightarrow -1/4$

$c = 2$

a)



b) Vértice de ponto mínimo

c) Intervalo de crescimento: $[3/2, +\infty[$

Domínio $\rightarrow \mathbb{R}$

Imagem $= \{ y \in \mathbb{R} \,/\, y \geq -1/4 \}$

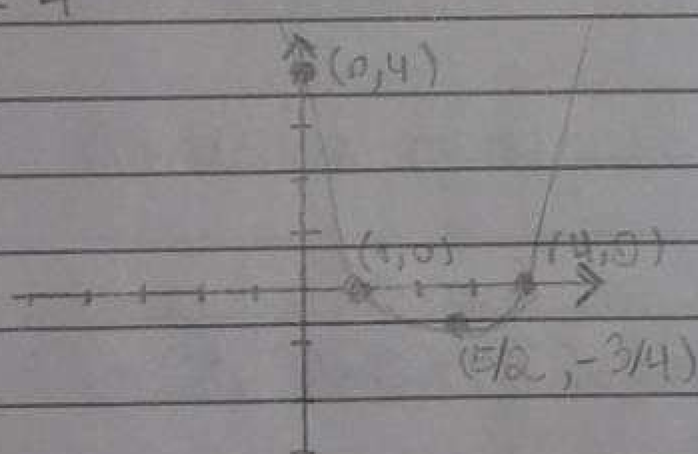
b) $y = q^2 - 5q + 4$

$a = 1$ $\qquad \dfrac{5 \pm 3}{2}$ $\rightarrow x_1 = 4$; $\rightarrow x_2 = 1$

$b = -5$

$c = 4$

a)



b) Vértice de ponto mínimo

c) Int de crescimento: $[5/2, +\infty[$

Domínio $\rightarrow \mathbb{R}$

Imagem $= \{ y \in \mathbb{R} \,/\, y \geq -3/4 \}$

d) $f(x) = 0$ para $x = 4$ ou $x = 1$

$f(x) > 0$ para $x < 1$ ou $x > 4$

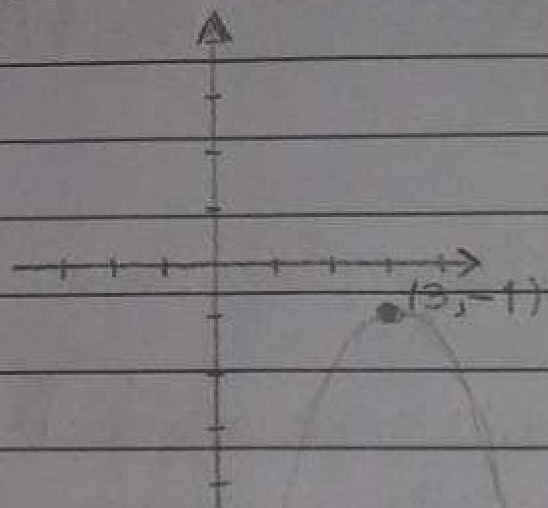
$f(x) < 0$ para $1 < x < 4$

$x = -b/2a \to x = 3$
$y = -\Delta/4a \to y = -1$

c) $y = -x^2 + 6x - 10$

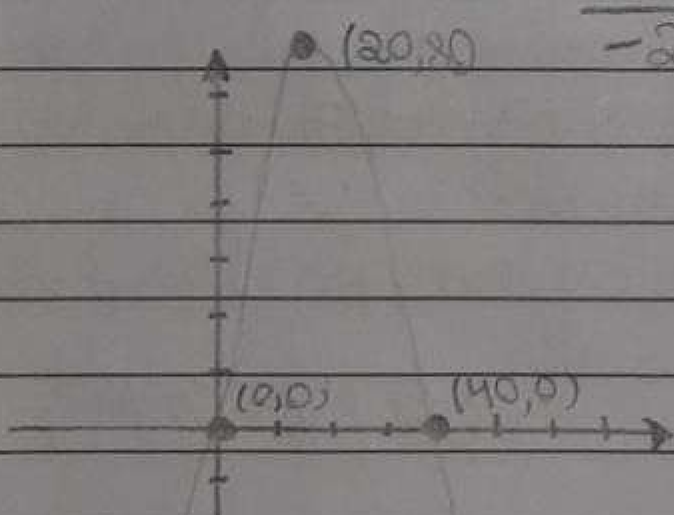
$a = -1$ b) vértice de ponto máximo
$b = 6$
$c = -10$ c) $]-\infty, 3]$ cresce
$[3, \infty[$ Imagem $\{y \in \mathbb{R} / y \leq -1\}$

a)



d) $y = -\frac{x^2}{5} + 8x$ $x = -8 : -\frac{2}{5} \to \frac{40}{2} \to x = 20$

$a = -1/5$ $y = 80$ $v = (20,80)$
$b = 8$
$c = 0$ $x = \frac{-8 \pm 8}{-2/5}$ $\to x_1 = 0 \to (0,0)$; $\to x_2 = 40 \to (40,0)$



b) vértice de ponto máximo

c) cresce em $(-\infty, 20]$ e decresce em $[20, \infty)$
Imagem $= \{y \in \mathbb{R} / y \leq 80\}$

d) $f(x) = 0$ para $x = 0$ ou $x = 40$
$f(x) < 0$ para $x < 0$ ou $x > 0$
$f(x) > 0$ para $x > 0$ ou $x > 40$

DATA/FECHA ___ / ___ / ___
S/L · T/M · Q/M · Q/J · S/V · S/S · D/D

vértice → $(3/2, 9/4)$

$x = -b/2a \rightarrow 3/2$

$y = -\Delta/4a \rightarrow 9/4$

zeros 3 e 0

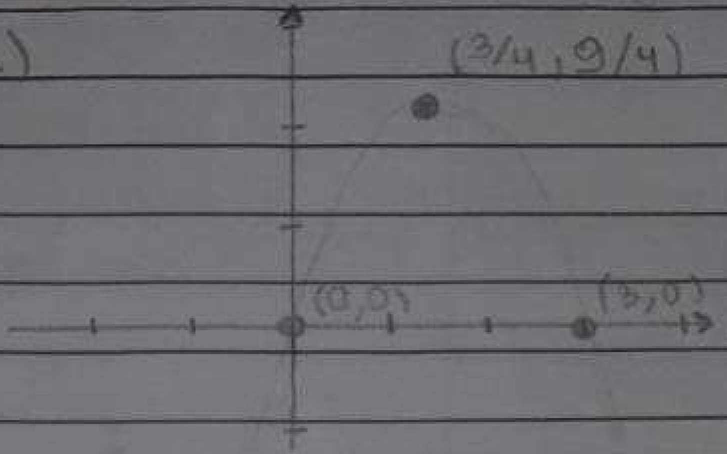
e) $f(u) = -u^2 + 3u$

$a = -1$

$b = 3$

$c = 0$

a)



b) Ponto máximo

c) Cresce para $(-\infty, 3/4[$ e decresce para $]3/4, \infty)$

Imagem ⇒ $\{y \in \mathbb{R} / y \leq 9/4\}$

d) $f(x) = 0$ para $x = 0$ ou $x = 3$

$f(x) > 0$ para $0 < x < 3$

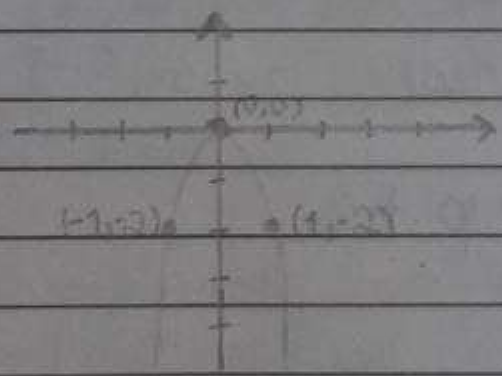
$f(x) < 0$ para $x < 0$ ou $x > 3$

f) $f(x) = -2x^2$ vértice → $(0,0)$

$a = -2$

$b = 0$

$c = 0$



b) Ponto máximo

c) cresce $x < 0$ / decresce $x > 0$

Imagem ⇒ $\{y \in \mathbb{R} / y < 0\}$

d) $f(x) = 0$ para $x = 0$

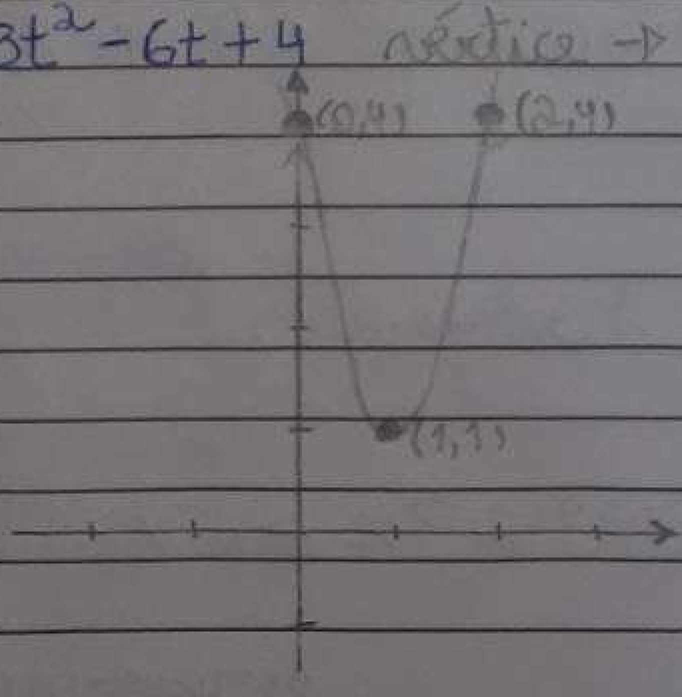
$f(x) < 0$ para $x \in \mathbb{R}$

g) $f(t) = 3t^2 - 6t + 4$ vértice → $(1, 1)$

$a = 3$

$b = -6$

$c = 4$



b) Ponto mínimo

c) cresce $x > 1$ / decresce $x < 1$

Imagem → $\{y \in \mathbb{R} / y > 1\}$

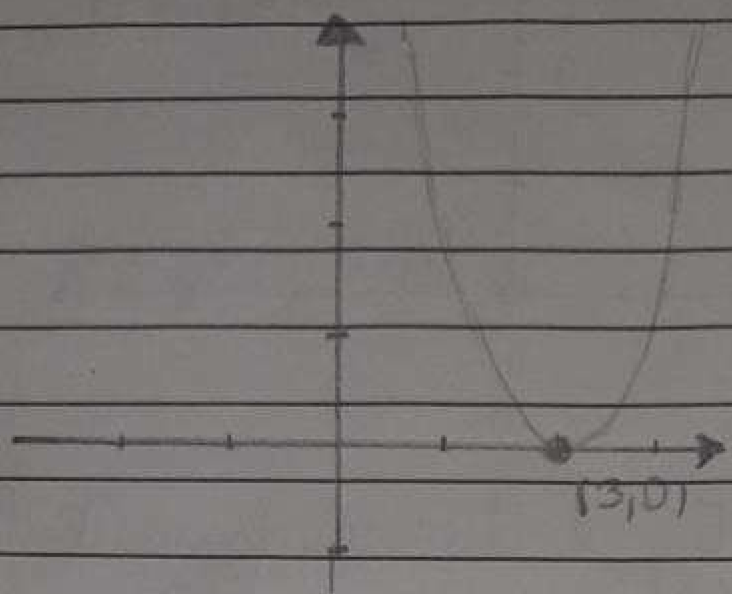
d) $f(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R}$

h) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ vértice $(3,0)$

$a = 1$

$b = -6$

$c = 9$



b) Ponto mínimo

c) Cresce $[3, \infty)$

decresce $(-\infty, 3]$

Imagem $\rightarrow \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$

d) $f(x) \geq 0$ para $x \in \mathbb{R}$

(2) $L(x) = -30x^2 + 360x - 600$

$x = -b/2a \rightarrow 360/60 = 6$

$\therefore$ R: lucro máximo para $x = 6$ unidades

(3) $f(x) = (-m^2 + 1)x^2 - x - 2$

$(-m^2 + 1) < 0 \rightarrow -m^2 < -1 \rightarrow m > \sqrt{1}$

$\therefore$ Resposta $m < -1$, $m > 1$

(4) $f(x) = (p-1)x^2 + (2p-2)x + p + 1$

$a > 0 \rightarrow p - 1 > 0 \rightarrow p > 1$

$\therefore$ Resposta $p > 1$

(5) a) $f(x) = \sqrt{9 - x^2} \rightarrow 9 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 9 \rightarrow x \leq 3$

$x \geq -3$

$S = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 3\}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 7}{\sqrt{3x^2 - x - 2}}$ $\quad 3x^2 - x - 2 > 0$

$\dfrac{1 \pm 5}{6} \begin{cases} \rightarrow 1 \\ \rightarrow -2/3 \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} / -2/3 > x$ ou $x > 1\}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{6-2x}}{\sqrt{x^2+x-2}} \rightarrow 6-2x \geq 0 \rightarrow 2x \leq 6 \rightarrow x \leq 3$

$0 < x^2+x-2 \rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$ $\rightarrow x_1 > 1$; $\rightarrow x_2 < -2$

$S = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq 3 \text{ ou } x < -2\}$

d) $\sqrt{\frac{3x^2+x-14}{4x-x^2}}$ $\rightarrow 3x^2+x-14 \geq 0$; $\rightarrow -x^2+4x > 0$

$\frac{-1 \pm \sqrt{1+168}}{6}$ $\rightarrow -14/6 = -7/3$; $\rightarrow -12/6 = -2$

$x \geq +2$
$x \leq -7/3$

$-x^2+4x > 0 \rightarrow \frac{-4 \pm 4}{-2}$ $\rightarrow 4$; $\rightarrow 0$

$x < 4$
$x > 0$

$S = \{x \in \mathbb{R} / +2 \leq x < 4 \text{ ou } -7/3 \leq x < 0\}$

6) $h(t) = -t^2 + 6t$

~~Tempo~~
a) Altura máxima
$-b/2a = x \rightarrow 6/2 = 3$ $\rightarrow$ Após 3 segundos

b) Altura máxima
$-\Delta/4a = y \rightarrow 36/4 = 9$ $\rightarrow$ Altura máxima $\rightarrow$ 9 metros

c) Toca o solo
$-t^2+6t$ $\rightarrow$ Após 6 segundos

$\frac{-6 \pm 6}{-2}$ $\rightarrow 0$; $\rightarrow 6$

⑦ 20 refrigeradores por dia

$C(x) = x^2 - 80x + 2000 \rightarrow 20^2 - 80.20 + 2000 = 400 - 1600 + 2000$

Resposta → R$ 800,00

b) 50 refrigeradores por dia

$C(x) = x^2 - 80x + 2000 \rightarrow (50)^2 - 80.50 + 2000 = 2500 - 4000 + 2000$

Resposta → R$ 500,00

c) Custo mínimo

$-b/2a \rightarrow 80/2 \rightarrow$ Resposta: 40 unidades

d) Custo unitário mínimo

$-\Delta/4a \rightarrow \frac{6400 - 8000}{4} = -400 \rightarrow -\Delta = 400$

Resposta → R$ 400,00

⑧ $\frac{x_1 + x_2}{2} = x_v \rightarrow \frac{3 - 1}{2} = 1 \rightarrow x_v$

$-a^2 - b - 3 = 0 \rightarrow -a^2 - b = 3 \rightarrow -a^2 = 3 + b \rightarrow a^2 = -3 - b$

$3a^2 + 3b - 3 = 0 \rightarrow 3a^2 + 3b = 3 \rightarrow 3(-3-b) + 3b \rightarrow$

$\rightarrow -9 - 3b + 3b = 3 \rightarrow b = -2$

$a = 1$

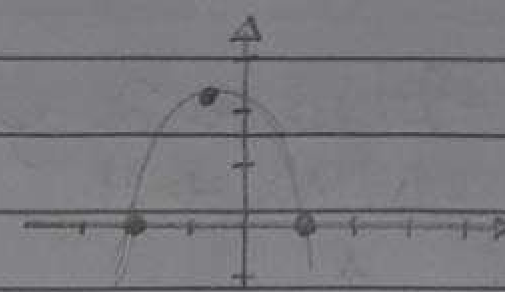
$b = -2$ Imagem $[-4, \infty)$

$c = -3$

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 2, & x < 0 \\ 2x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

$-x^2 - x + 2 \to -b/2a = x_v \to -1/2 = x_v$ vértice $(-1/2, 9/4)$

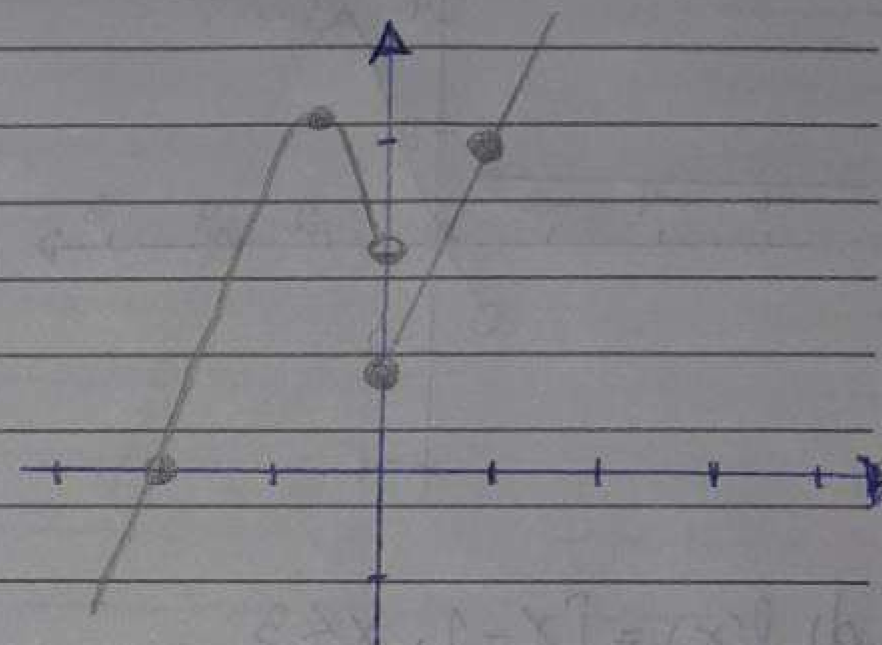
$y_v = -\Delta/4a = 9/4$



$\frac{1 \pm 3}{-2} \begin{cases} \to 1 \\ \to -2 \end{cases} \begin{cases} \to \text{zero} \to (-2,0) \\ \to (1,0) \end{cases}$

x	y = 2x+1
0	1
1	3
2	5

gráfico $\to f(x)$

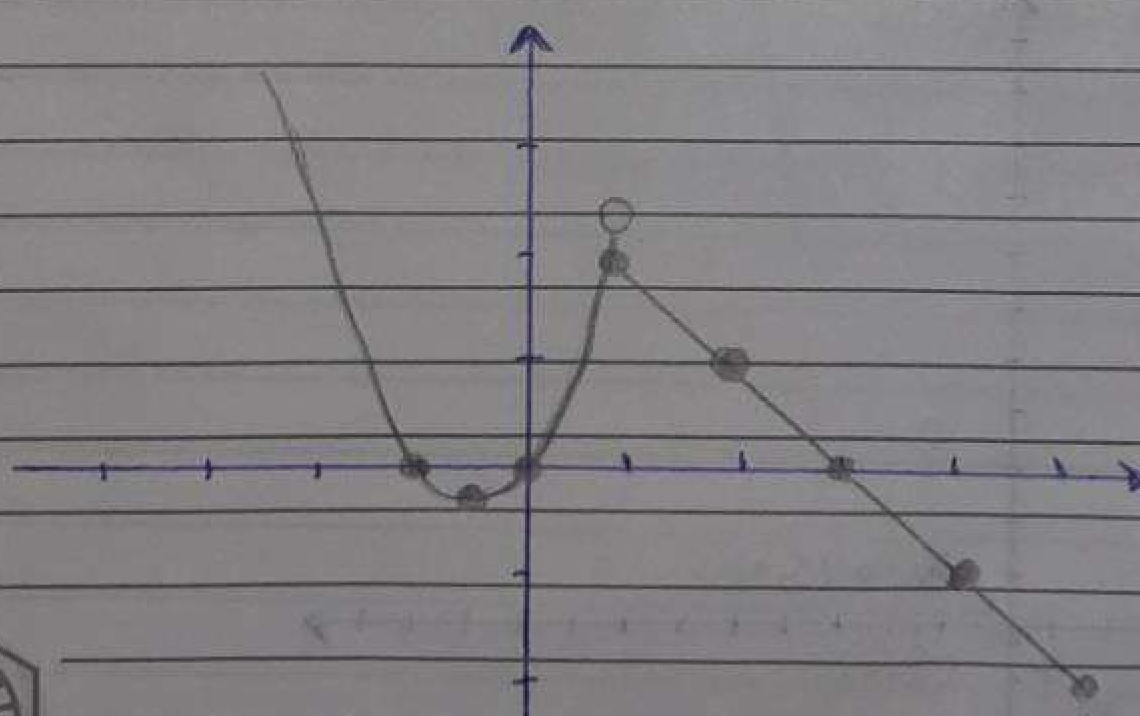


b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \\ 3 - x, & x \geq 1 \end{cases}$

Zeros $\begin{cases} \to 0 \\ \to -1 \end{cases}$

vértice $x_v = -b/2a \to -1/2$ $\to v = (-1/2, -1/4)$

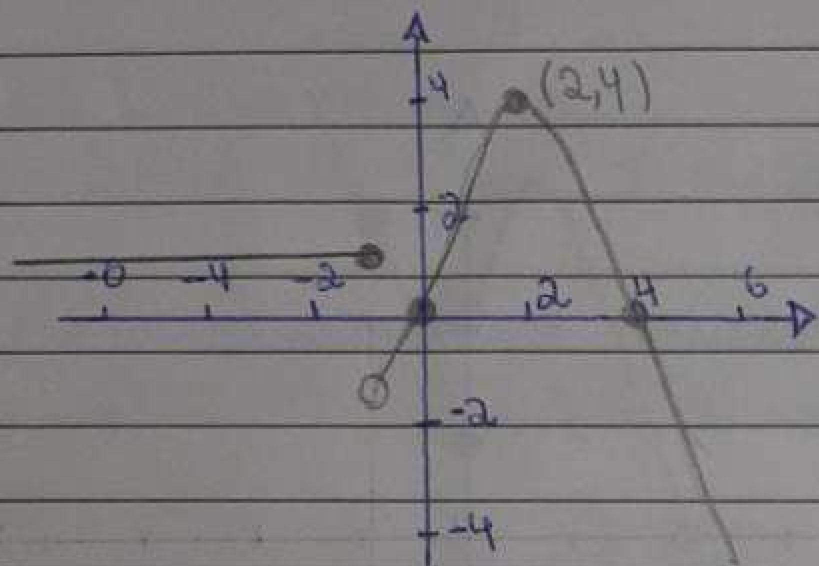
$y_v = -\Delta/4a \to -1/4$



c) $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2, & x > -1 \\ 1, & x \leq -1 \end{cases}$

$-x^2 + 4x \rightarrow$ zeros $\begin{cases} \rightarrow 0 \\ \rightarrow 4 \end{cases}$

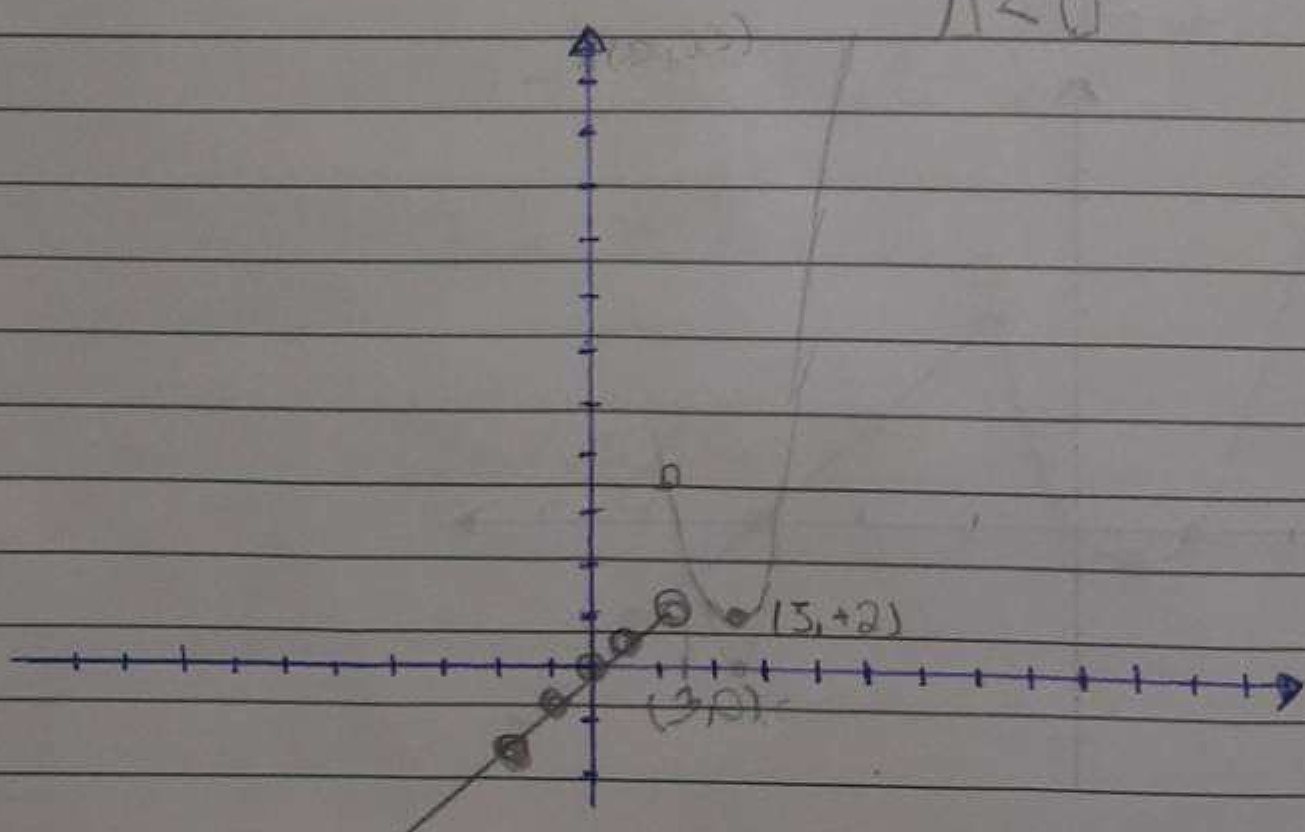
vértice $\rightarrow -b/2a \rightarrow 2$
$\rightarrow -\Delta/4a \rightarrow 4$ $\rightarrow v(2,4)$



d) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 3 \\ x^2 - 10x + 23, & x > 3 \end{cases}$

vértice $x = -b/2a \rightarrow 5$ $(5,-2) \rightarrow$ vértice
$y = -\Delta/4a \rightarrow -2$

$\Delta < 0$



9- $A = 2.(4-(1^2))$

$A = 2.3$

6 unidades

10. a) $-x^2 - x + 2 = 0$

$\Delta = -1^2 - 4.(-1).2$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$x = \frac{+1 \pm \sqrt{9}}{2.(-1)}$

$x' = \frac{1+3}{-2} = -2$

$x'' = \frac{1-3}{-2} = 1$

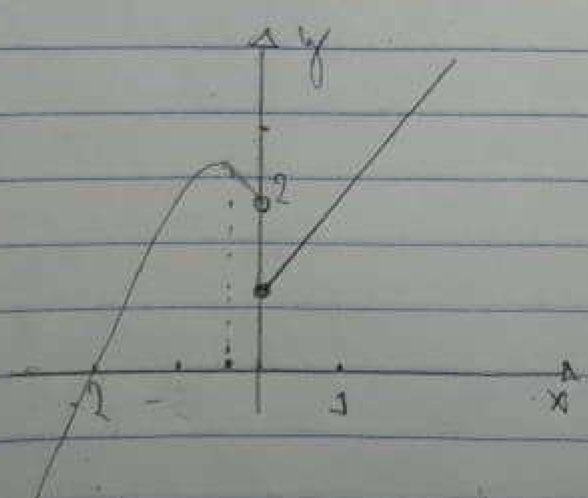
$2x + 1 = 0$

$2x = 1$

$x = \frac{-1}{2}$

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2.(-1)} = \frac{1}{-2}$

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-9}{4(-1)} = \frac{9}{4}$



b) $x^2 + 1 = 0$

$\Delta = 0^2 - 4.1.1$

$\Delta = 4$

11- $L = 6000 - x^2 - (x^2 - 2000x)$

$L = 6000 - x^2 - x^2 + 2000x$

$L = -2x^2 + 2000x + 6000$

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2000}{2(-2)} = \frac{2000}{4} = 500$ unidade

12- área do triângulo: $b \cdot h / 2$

$A_t = 8 \cdot 6 / 2$

$A_t = 24$

área do retângulo $= 24/2 = 12$

$\frac{8}{x} = \frac{6}{y}$ $\quad y = \frac{6x}{8}$

$x \cdot \frac{6x}{8} = 12$

$\frac{6x^2}{8} = 12$ $\quad 6x^2 = 96$ $\quad 4 \cdot y = 12$

$x^2 = 16$ $\quad y = 3$

$x = 4$

13- $P = 120$

$2x + 2y = 120$

$2y = 120 - 2x$

$y = \frac{120 - 2x}{2}$

$y = 60 - x$

$A = x \cdot y$

$A = x(60 - x)$

$A = 60 - x^2$

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-60}{2 \cdot (-1)} = 30$

$x = 30$

$y = 60 - 30 = 30$ m

14- $y = ax^2 + bx + c$

$0 = a.0^2 + b.0 + c$

$c = 0$

$yv = 4$

$\frac{-\Delta}{4.a} = 4$

$\frac{\Delta}{4a} = -4$

$\frac{\Delta}{a} = -4.4$

$\frac{\Delta}{a} = -16$

$\Delta = b^2 - 4a.c$

$\Delta = b^2 - 4.a.0$

$\Delta = b^2$

$\frac{b^2}{a} = -16$

$xv = 2$

$\frac{-b}{2a} = 2$

$\frac{b}{2a} = -2$

$b = -2.2a$

$b = -4a$

$\frac{b^2}{a} = -16$

$\frac{(-4a)^2}{a} = -16$

$\frac{16a^2}{a} = -16$

$a^{2-1} = \frac{-16}{16}$

$a = -1$

$b = -4a$

$b = -4.(-1)$

$b = 4$

$y = -x^2 + 4x$

15- $f(x) = 3x - x\%$ de $3x$

$f(5) = 3.5 - 5\%$ de 3.5

$f(8) = 3.8 - 8\%$ de 3.8

$f(10) = 3.10 - 10\%$ de 3.10

$= 3x - x\% . 3x$

$3x - \frac{x}{100} . 3x$

$3x - \frac{3x^2}{100}$

$f(x) = 3x - 0{,}03x^2$

Função quadrática

Uma função chama-se quadrática se existem constantes reais a, b e c, $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$

Ex:

- $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$ • $f(x) = x^2$ • $f(x) = \frac{x^2}{2} - 5x$

* Gráfico: O gráfico de uma função tem um formato característico similar a uma letra "U" mais aberto, e é chamado parábola

* Concavidade:

- $a > 0$ = Côncava para cima
- $a < 0$ = Côncava para baixo

* Raízes ou zeros da função

É descobrir o ponto em que a parábola da equação intercepta o eixo Ox. Têm coordenada $y = 0$

A equação $ax^2 + bx + c = 0$ pode ser resolvida utilizando-se a fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \text{, em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

- $\Delta > 0$ = A equação tem duas raízes reais e a parábola intercepta o eixo x em dois pontos.
- $\Delta = 0$ = A equação tem uma raiz real e a parábola intercepta o eixo x em um ponto.
- $\Delta < 0$ = A equação não tem raiz real e a parábola não intercepta o eixo x.

* Ponto em que a parábola intercepta o eixo y:

Encontra-se calculando $f(0) = a.0^2 + b.0 + c = c$

Função Quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- Gráfico → é uma curva chamada parábola

- Zeros → Basta resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$

↳ Os zeros são dados pela fórmula de Bhaskara

↳ $$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

- Quantidade de raízes reais

↳ Depende do resultado do discriminante

↳ $\Delta = b^2 - 4ac$

Se $\Delta > 0$ → há duas raízes reais e distintas ($x_1 = x_2$)

Se $\Delta = 0$ → há duas raízes reais e iguais (raiz dupla)

Se $\Delta < 0$ → não há raiz real (duas raízes complexas)

→ Gráfico da função → $\underbrace{a}_{\text{concavidade}}x^2 + \underbrace{b}_{\text{"cresce ou decresce"}}x + \underbrace{c}_{\text{onde intersecta eixo y}}$

↳ $a > 0$ → concavidade para cima

↳ $a < 0$ → concavidade para baixo

↳ $b > 0$ → intersecta o eixo y crescendo

↳ $b < 0$ → intersecta o eixo y decrescendo

↳ $b = 0$ → intersecta o eixo y "reto"

↳ ($x_1 = x_2$)

↳ $c > 0$ → cruza o y positivo

↳ $c < 0$ → cruza o y negativo

↳ $c = 0$ → cruza o y na origem

Vértice do gráfico

↳ As coordenadas do vértice são fornecidas por:

$$\boxed{x_v = \frac{-b}{2a}} \quad e \quad \boxed{y_v = \frac{-\Delta}{4a}} \rightarrow \boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

$$\boxed{x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}} \rightarrow \boxed{y_v = a.(x_v)^2 + bx_v + c} = f(x_v)$$

→ Valor máximo (ou mínimo)

↳ Coordenada maior ou menor do y

→ Conjunto imagem da função

↳ Conjunto de valores que y pode assumir

↳ $Im = \{y \in \mathbb{R} / y \geq y_v\} \rightarrow a > 0$

↳ $Im = \{y \in \mathbb{R} / y \leq y_v\} \rightarrow a < 0$

→ Estudo do sinal da função

↳ Valores para x nos quais $y > 0$, $y < 0$ e $y = 0$

↳ depende do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$

* Vértice da parábola:

As coordenadas do vértice são:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$