# RECUPERAÇÃO 2

Renan Carlos Loewenstein
Matrícula: 2011100005

① $T(x,y,z) = (3ax - y + z, -x + 5ay - z, x - y + 3az)$

para que os autovalores sejam 1, 2 e 6

$\lambda 1 = 1$
$\lambda 2 = 2$ → Matriz → $\begin{vmatrix} 3a & -1 & 1 \\ -1 & 5a & -1 \\ 1 & -1 & 3a \end{vmatrix}$
$\lambda 3 = 6$

- $\lambda 1 = 1$

$$\begin{vmatrix} 3a-1 & -1 & 1 \\ -1 & 5a-1 & -1 \\ 1 & -1 & 3a \end{vmatrix}$$

$(5a-1) \cdot (3a-1)^2 + 1 + 1 - (5a-1) + (3a-1) + (3a-1)$

↳ resolvendo a equação, vai dar

↳ $45a^3 - 39a^2 + 4 = 0$ ↳ $a1 = 2$
↳ $a2 = 3$

• $\lambda_2 = 2$

$$\begin{vmatrix} 3a-2 & -1 & 1 \\ -1 & 5a-2 & -1 \\ 1 & -1 & 3a-2 \end{vmatrix}$$

$(5a-2).(3a-2)^2 + 2 - (5a-2) + (3a-2) + (3a-2)$

$45a^3 - 78a^2 + 23a + 4 = 0$

$\rightarrow$ NÃO POSSIVEL

• $\lambda_3 = 6$

$$\begin{vmatrix} 3a-6 & -1 & 1 \\ -1 & 5a-6 & -1 \\ 1 & -1 & 3a-6 \end{vmatrix}$$

$(5a-6)(3a-6)^2 + 2 - (5a-6) + (3a-6) + (3a-6)$

$\rightarrow 45a^3 - 234a^2 + 385a - 196 = 0$

$\rightarrow$ resolvendo a equação vamos achar

$\rightarrow a_1 = 7/3$

$\rightarrow a_2 = 28/15$

$\rightarrow a_3 = 1$

② $T: R^3 \to R^3$ / /

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine $T(x,y,z)$

Está em forma de matriz, vamos colocar em espaço tridimensional $(x,y,z)$

★ Transformação Linear

$\to T(1,0,0) = -1.(1,0,0) - 1(0,1,0) - 1(0,0,1) = (-1,-1,-1)$

$\to T(0,1,0) = -1.(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1) = (-1,0,1)$

$\to T(0,0,1) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1) = (0,1,1)$

$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to (x,y,z) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1)$

$\to \alpha_1 = x \; ; \; \alpha_2 = y \; ; \; \alpha_3 = z$

$T(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$

$\to T(x,y,z) = x.T(1,0,0) + y.T(0,1,0) + z.T(0,0,1)$

$\to T(x,y,z) = x(-1,-1,-1) + y(-1,0,1) + z(0,1,1)$

$\to \boxed{T(x,y,z) = (-x-y-z \,,\, -x+z \,,\, y+z)}$

credeal

② b) Matriz de T em relação à base $\beta' = \{(1,1,0),(1,1,1),(0,1,1)\}$

$T(x,y,z) = (-x-y-z, -x+z, y+z)$

✱ $T(1,1,0)$ ⇒ Substituir os valores na primeira coord.

⇒ $(-x-y-z) \Rightarrow (-1,-1,0)$

• $T(1,1,0) = (-1,-1,0)$

✱ $T(1,1,1)$ ⇒ Substituir os valores na segunda coordenada

⇒ $(-x+z) \Rightarrow (-1,0,1)$

• $T(1,1,1) = (-1,0,1)$

✱ $T(0,1,1)$ ⇒ Substituir os valores na terceira coord.

⇒ $(y+z) \Rightarrow (0,1,1)$

• $T(0,1,1) = (0,1,1)$

Ou seja,

⇒ $T(1,1,0) = (-1,-1,0)$
$T(1,1,1) = (-1,0,1)$
$T(0,1,1) = (0,1,1)$

Agora ⇓

- $x_1(1,1,0) + y_1(1,1,1) + z(0,1,1) = (-1,-1,0)$

$$\hookrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x+y+z=-1 \rightarrow x=-1-y \\ y+z=0 \quad -y=z \end{cases}$$

$x_1 = -1$
$y_1 = 0$
$z_1 = 0$

$-1-y+y-y=-1$
$\hookrightarrow y=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow z=0$

$$(T(1,1,0))_{\beta'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $x_2(1,1,0) + y_2(1,1,1) + z_2(0,1,1) = (-1,0,1)$

$$\hookrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \rightarrow x=-1-y \\ x+y+z=0 \rightarrow z=1-y \\ y+z=1 \end{cases}$$

$x_2 = -1$
$y_2 = 0$
$z_2 = 1$

$-1-y+y+1-y=0$
$\hookrightarrow y=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow z=1$

$$(T(1,1,1))_{\beta'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $x_3(1,1,0) + y_3(1,1,1) + z_3(0,1,1) = (0,1,1)$

$$\hookrightarrow \begin{cases} x+y=0 \quad x=-y \\ x+y+z=1 \rightarrow z=1-y \\ y+z=1 \end{cases}$$

$x_3 = 0$
$y_3 = 0$
$z_3 = 1$

$-y+y+1-y=1$
$\hookrightarrow y=0 \rightarrow x=0 \rightarrow z=1$

$$(T(0,1,1))_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

/ /

Continuação da 2...

Agora, é só juntar os três vetores achados

↳ Matriz T → $(T(x,y,z))_{\beta'} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

/ /

(3) Matriz é $\rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

Autovalores

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$(3-\lambda)^2 \cdot (5-\lambda) + 1 + 1 - (5-\lambda) + (3-\lambda) + (3-\lambda)$

$-\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36 = 0$

$\hookrightarrow$ resolvendo a equação $\rightarrow \begin{cases} \rightarrow \lambda 1 = 2 \\ \rightarrow \lambda 2 = 3 \\ \rightarrow \lambda 3 = 6 \end{cases}$

Os autovalores são $\hookrightarrow \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{matrix}}$

• $\lambda 1 = 2 \rightarrow (a - 2I) \cdot v$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} a - b + c \\ -a + 3b - c \rightarrow c = -a \\ \end{cases}$$

$C_1 = (1, 0, 1)$ $\hookrightarrow v_1 = (1, 0, -1)$

credeal

continuando a 3...

/ /

• $\lambda_2 = 3 \rightarrow (A - 3I) \cdot v$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -b + c = 0 \\ -a + 2b - c = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} c = b \\ c = b = a \\ a = b \end{matrix}}$$

$C\lambda_2 = \{(ax^2 + ax + a)\}\ a \in \mathbb{R}$

$$\boxed{v_2 = (1,1,1)}$$

• $\lambda_3 = 6$

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -3a + c - b = 0 \\ -a - b - c = 0 \\ -a - b - 3c = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} b = -2a \\ c = a \end{matrix}}$$

$C\lambda_3 = \{(ax^2 - 2ax + a)\ a \in \mathbb{R}\}$

$$\boxed{v_3 = (1,-2,1)}$$

credeal

④ Determinar P que diagonaliza   / /

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

↳ Primeiro, achar os autovalores

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 5 & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \\ 0 & 5 \end{matrix}$$

↳ $(1-\lambda).(3-\lambda).(-1-\lambda) + 2.1.0 + 1.0.5 - 2.0 - (1-\lambda).5 - 0$

↳ $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8$ → Igualar a zero e achar os valores

$(\lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = -2 \ , \ \lambda_3 = 4)$ → esses são os autovalores

↳ Agora, achar os autovetores $(AX = \lambda X)$

- para $\lambda = 1$ ↳ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- para $\lambda = -2$ ↳ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

- para $\lambda = 4$ ↳ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

/ /

Os autovetores são

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \longrightarrow M = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & -1 & 1\\0 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

1▷ Agora, calcular a matriz diagonal usando a fórmula

$$D = M^{-1} . A . M$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & -1/6 & 1/6\\0 & 5/6 & 1/6\end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & -1/6 & 1/6\\0 & 5/6 & 1/6\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 3 & 1\\0 & 5 & -1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & -1 & 1\\0 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

resultado da ▷ multiplicação das duas primeiras é

$$= \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1/3 & -1/3\\0 & 10/3 & 2/3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & -1 & 1\\0 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

2▷ resultado da multiplicação $= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$

Ou seja, a matriz P é ▷

$$P = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$