



Engenharia de Computação

Estrutura de Dados 2

Aula 16 – Árvore B – Remoção

Prof. Muriel de Souza Godoi
muriel@utfpr.edu.br

Árvore B – Relembrando Propriedades

- Para uma Árvore-B de ordem **m**:
 - cada página tem, no máximo, **m** descendentes
 - cada página, exceto a raiz e as folhas, tem no mínimo $\lceil m/2 \rceil$ descendentes
 - a raiz tem, no mínimo, **dois** descendentes - a menos que seja uma folha
 - todas as folhas estão no **mesmo nível**
 - uma página não folha que possui k descendentes contém **k-1** chaves
 - uma página folha contém, no mínimo $\lceil m/2 \rceil - 1$ e, no máximo, **m-1** chaves

Remoção de chaves

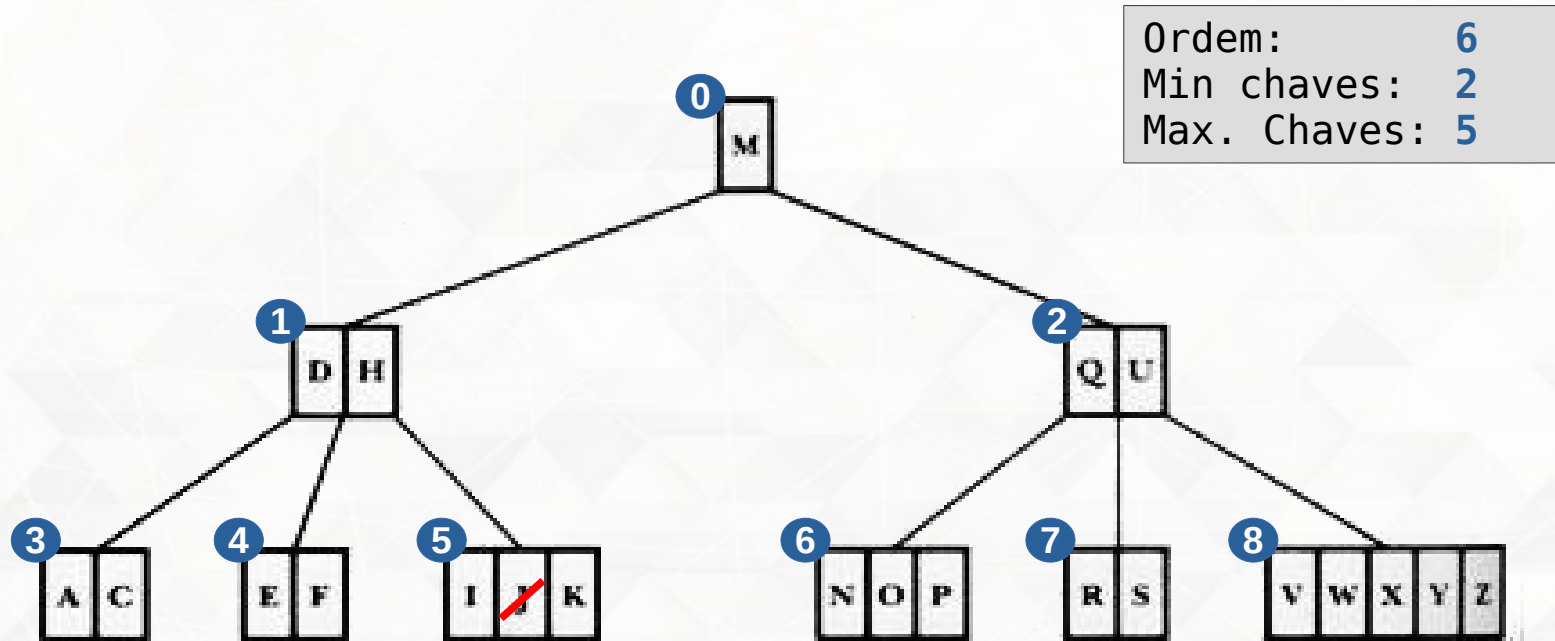
- O **split** garante a manutenção das propriedades da Árvore B durante a inserção
- Essas propriedades **precisam ser mantidas**, também, durante a eliminação de chaves
- Há vários casos para se analisar!

Eliminação: Caso 1

- **Caso 1:** eliminação de uma chave em **uma página** folha, sendo que o número mínimo de chaves na página é respeitado: $\lceil m/2 \rceil - 1$
-
- **Solução:** **chave é retirada** e os registros internos à página são **reorganizados**

Eliminação: Caso 1

- Remove a chave **J** da página 5
 - Como a página continua com o número mínimo de chaves, J pode ser removido sem problemas

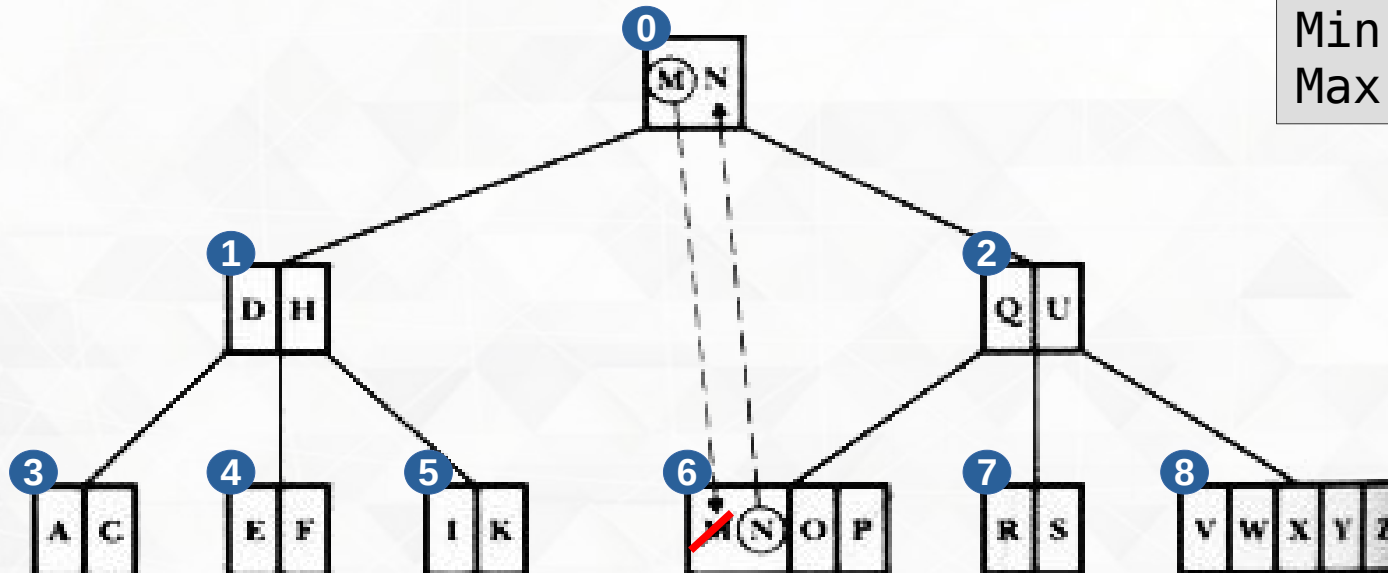


Eliminação: Caso 2

- **Caso 2:** eliminação de uma chave que **não está em uma folha**
- **Solução: sempre eliminamos de páginas folha***
 - Se uma chave deve ser eliminada de uma página que não é folha, **trocamos a chave com sua sucessora** imediata (ou com a predecessora imediata) que está numa folha
 - A seguir, eliminamos a chave da folha
 - Análogo a **AVL**

Eliminação: Caso 2

- Remove a chave **M** da página 0
 - Troca **M** com **N**
 - E apaga **M** da página 6



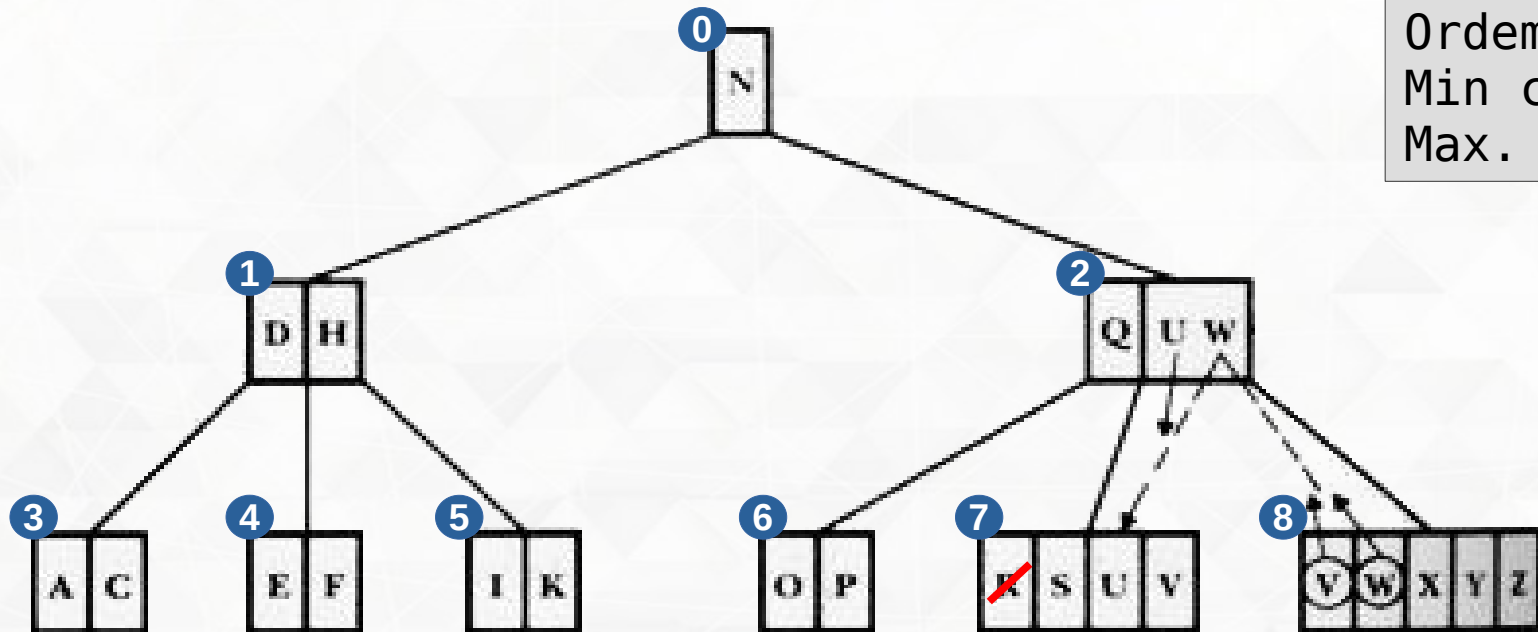
Ordem: 6
Min chaves: 2
Max. Chaves: 5

Eliminação: Caso 3

- **Caso 3:** eliminação causa **underflow** na página (folha)
- **Solução:** **redistribuição**
 - Procura-se uma página irmã (mesmo pai) que contenha mais chaves do que o mínimo: se existir, redistribuem-se as chaves entre essas páginas
 - A redistribuição pode provocar uma alteração na chave separadora que está no nó pai

Eliminação: Caso 3

- Remove a chave **R** da página 7
 - Gera *underflow*
 - Redistribui as chaves entre as páginas **7**, **2**, **8** para reestabelecer o balanceamento entre as folhas



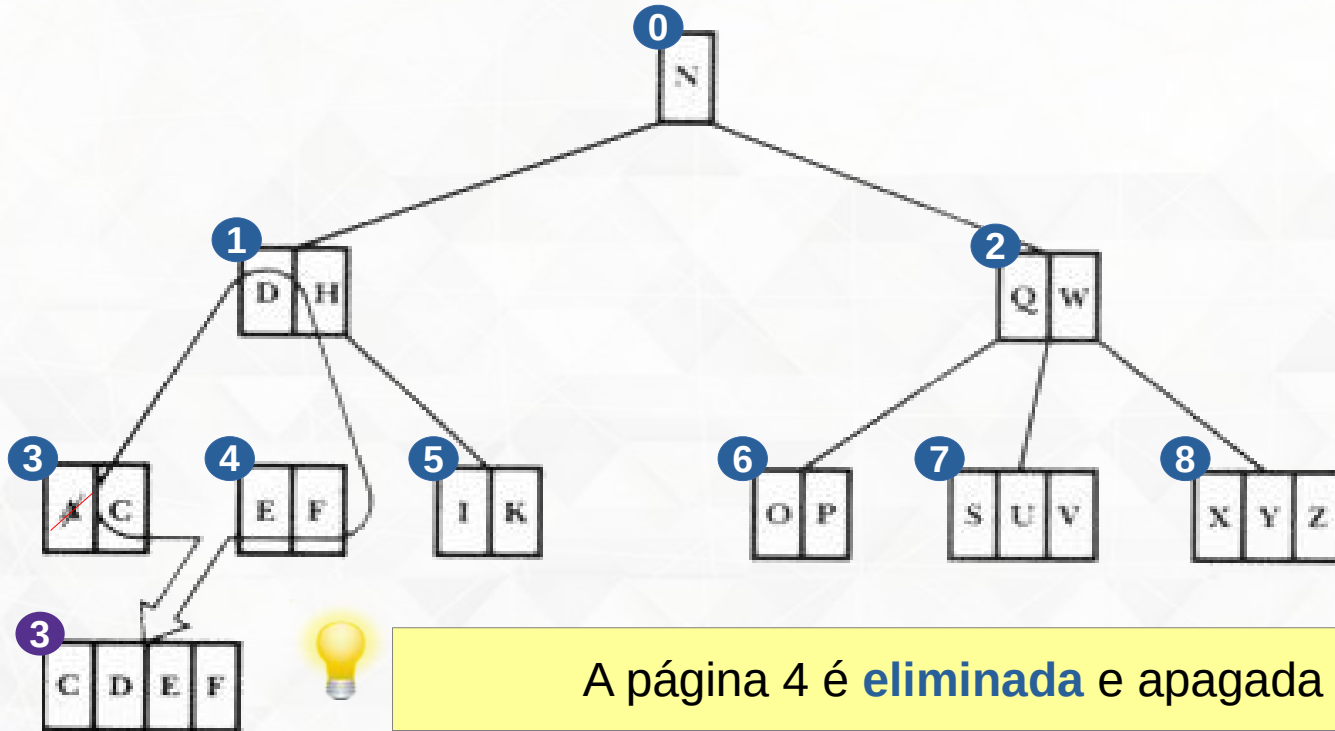
Ordem:	6
Min chaves:	2
Max. Chaves:	5

Eliminação: Caso 4

- **Caso 4:** ocorre *underflow* e a redistribuição não pode ser aplicada
 - **Não existem chaves suficientes para dividir** entre as duas páginas irmãs. A que sofreu *underflow* tem $m/2-2$ chaves, e a outra, $m/2-1$ chaves
- **Solução: concatenação**
 - Combina-se o conteúdo das duas páginas ($m-3$) mais a chave separadora da página pai para formar uma única página com $m-2$ chaves
 - A concatenação é o **inverso do processo de split**
 - Como consequência, a eliminação na página pai também pode causar *underflow*
 - Uma página é liberada (registro eliminado do arquivo de dados)

Eliminação: Caso 4

- Remove a chave **A**
 - Gera *underflow*, mas não pode usar redistribuição
 - Concatenas a páginas **3** e **4**, mais a chave **D** (1)



Ordem:	6
Min chaves:	2
Max. Chaves:	5

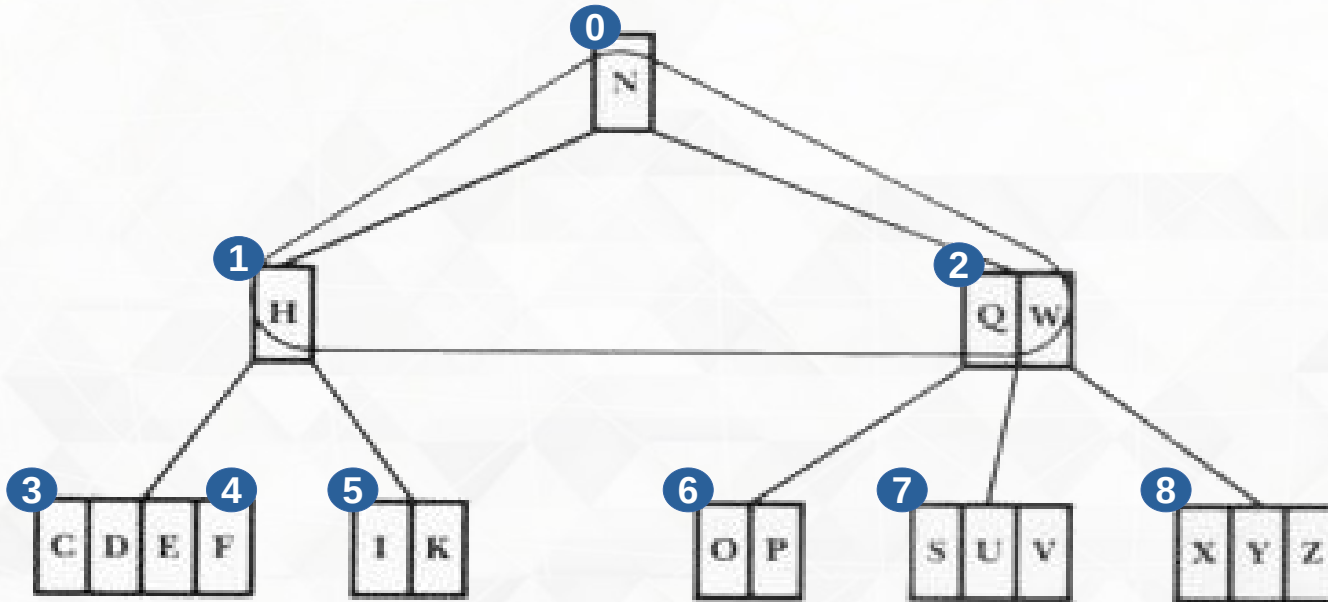
A página 4 é **eliminada** e apagada do arquivo físico

Eliminação: Caso 5

- **Caso 5:** *underflow* da página pai, como consequência da concatenação
- **Solução:**
 - utiliza-se **redistribuição** ou **concatenação** novamente

Eliminação: Caso 5

- *Underflow* da página 1 por propagação
 - Não podemos redistribuir então concatenamos



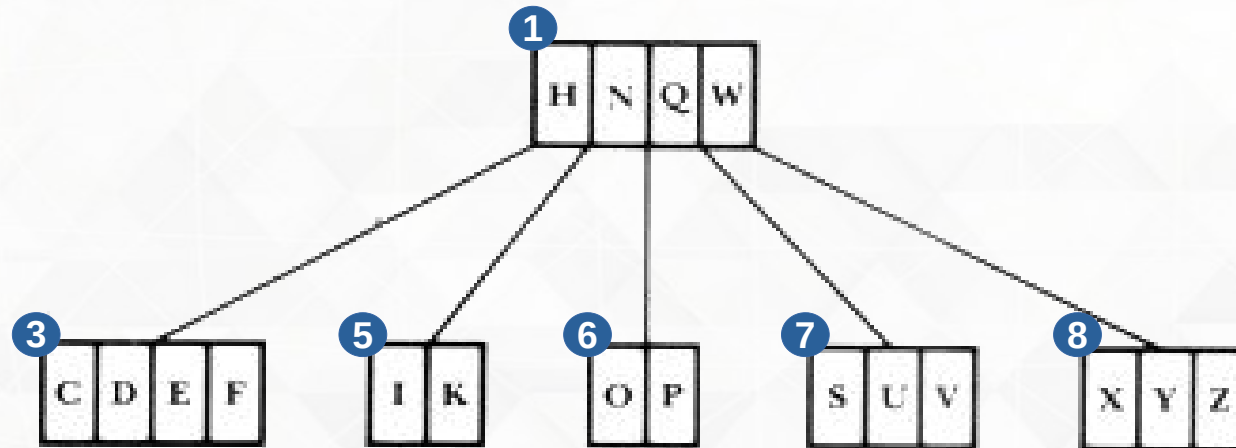
Ordem:	6
Min chaves:	2
Max. Chaves:	5

Eliminação: Caso 6

- **Caso 6: diminuição da altura** da árvore
 - Ocorre quando o nó raiz tem **uma única chave** e ele faz **parte de uma concatenação**
- **Solução:**
 - **concatenação** nos seus nós filhos

Eliminação: Caso 6

- Diminuição da altura
- Uma vez que a raiz só tem um filho ela é absorvida pela nova raiz (1)



Ordem:	6
Min chaves:	2
Max. Chaves:	5



As páginas 0 e 2 são **eliminadas** e apagadas do arquivo físico

Algoritmo de Eliminação em Árvores B

- 1) Se a chave não estiver numa folha, troque-a com sua sucessora*
- 2) Elimine a chave da folha
- 3) Se a página continuar com o número mínimo de chaves, fim
- 4) Se a página tem uma chave a menos que o mínimo, verifique as páginas irmãs a esquerda e a direita
 - 4.1) se uma delas tiver mais do que o número mínimo de chaves, aplique redistribuição
 - 4.2) senão concatene a página com uma das irmãs e a chave separadora do pai
- 5) Se ocorreu concatenação, aplique os passos de 3 a 6 para a página pai
- 6) Se a última chave da raiz for removida, a altura da árvore diminui

Exercício

- Usando o algoritmo anterior, **remova** as chaves A, B, Q, R e M da Árvore B de ordem 5 abaixo

