

# EDCO4B

# ESTRUTURAS DE DADOS 2

Aula 07 - Heap Sort

Prof. Rafael G. Mantovani

# Licença

Este trabalho está licenciado com uma Licença CC BY-NC-ND 4.0:



maiores informações:

[https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.pt\\_BR](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.pt_BR)

# Roteiro



- 1** Introdução
- 2** Heaps
- 3** Heap Sort
- 4** Exemplo
- 5** Exercícios
- 6** Referências

# Roteiro

- 1** Introdução
- 2** Heaps
- 3** Heap Sort
- 4** Exemplo
- 5** Exercícios
- 6** Referências

# Introdução



**Algoritmos de  
Ordenação**

# Introdução

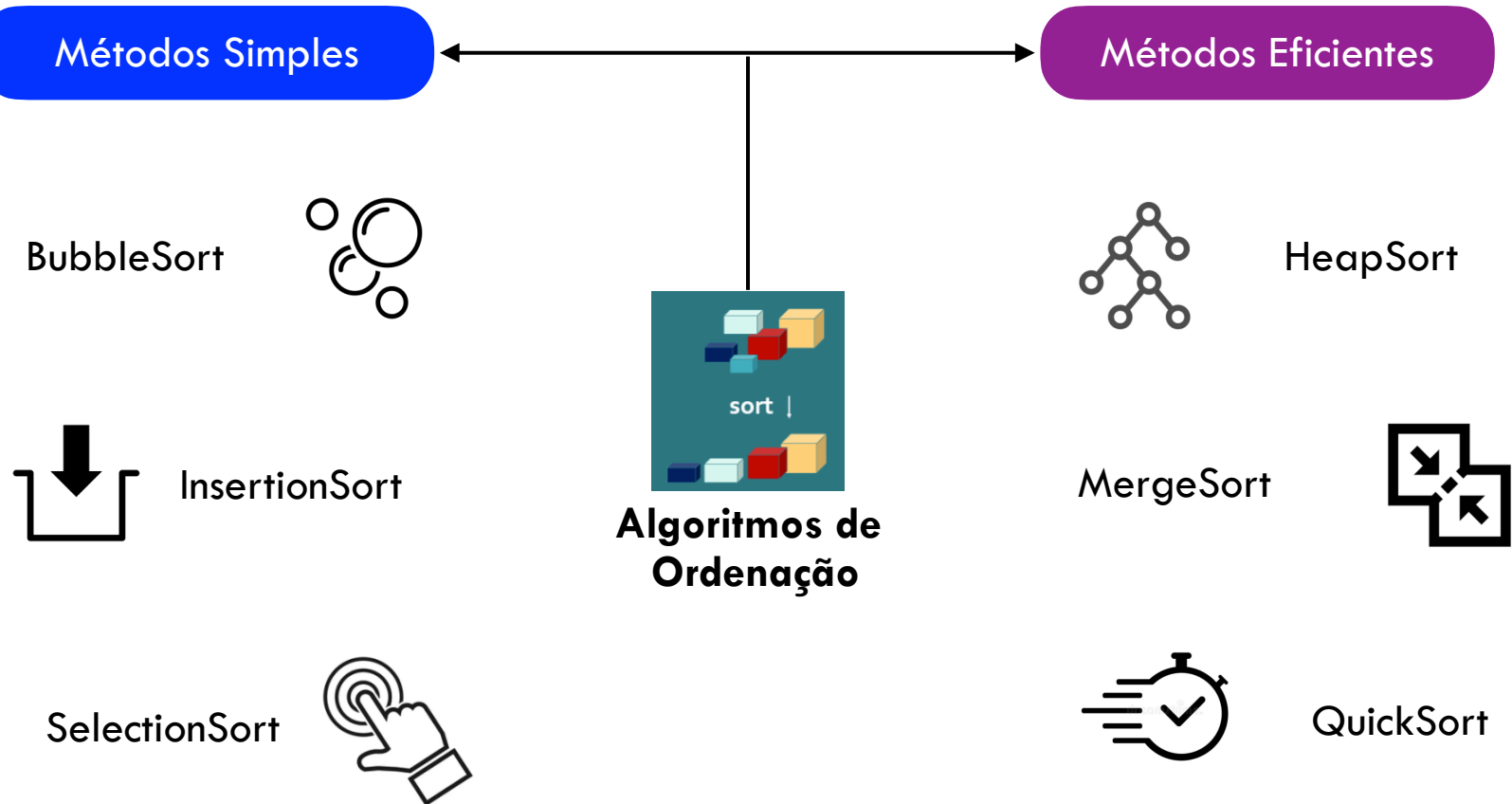
Métodos Simples

Métodos Eficientes

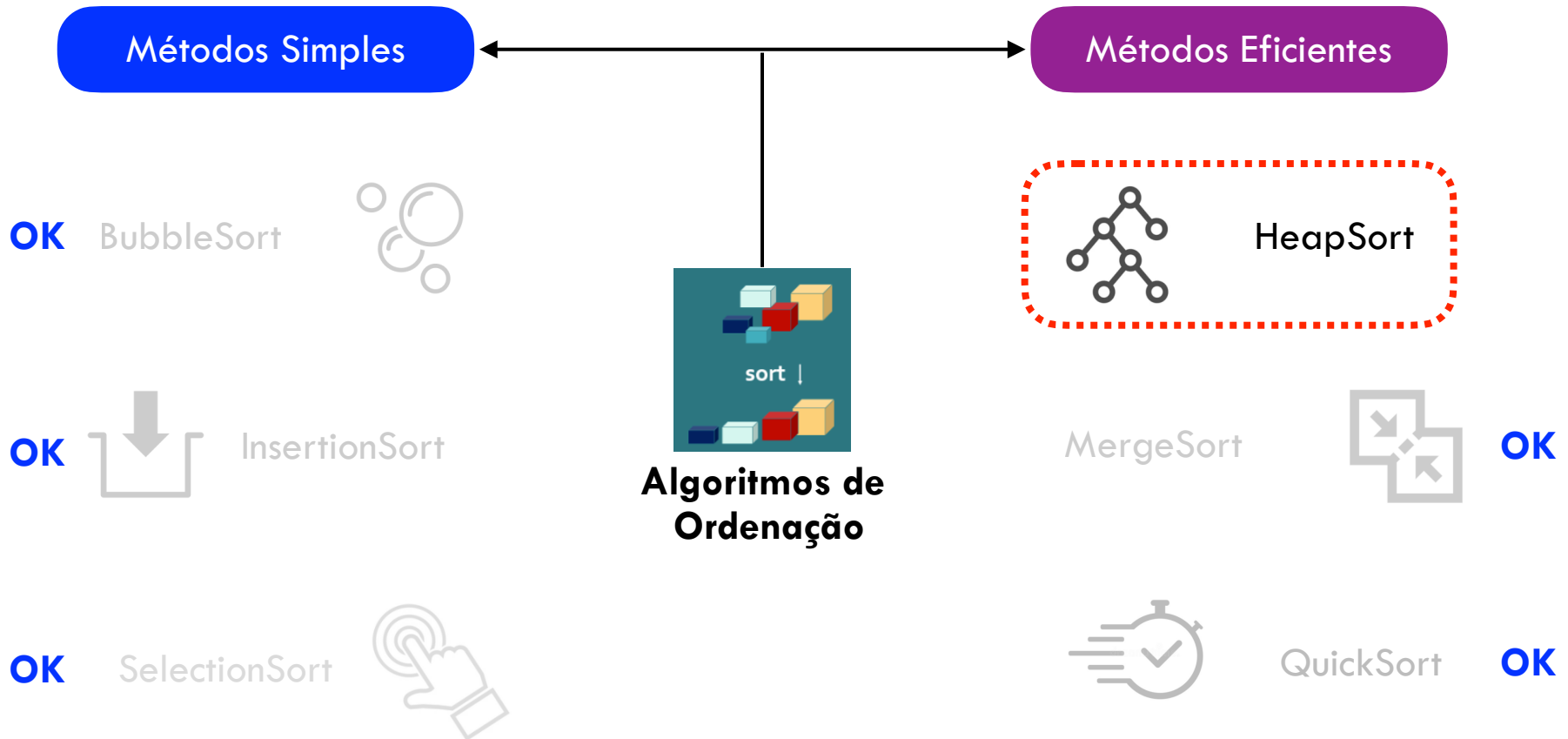


**Algoritmos de  
Ordenação**

# Introdução



# Introdução





# Roteiro



- 1 Introdução
- 2 Heaps
- 3 Heap Sort
- 4 Exemplo
- 5 Exercícios
- 6 Referências

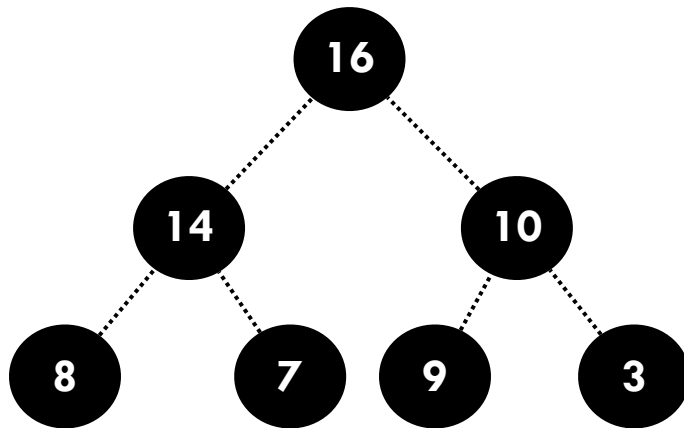
# Heap



- **Heap:** estrutura de dados em array que pode ser vista como uma árvore binária quase completa

# Heap

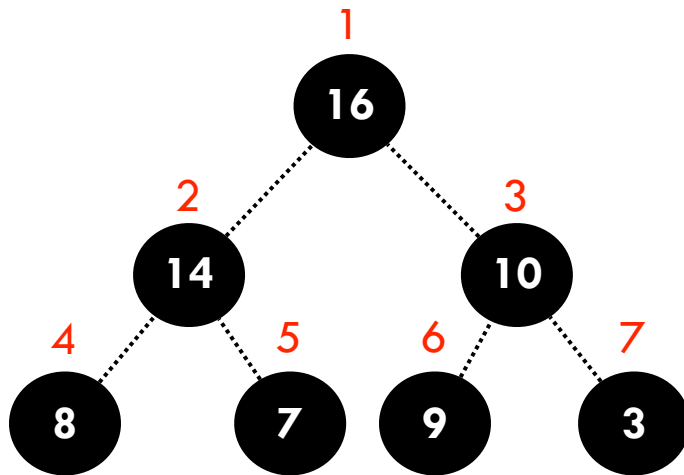
- **Heap:** estrutura de dados em array que pode ser vista como uma árvore binária quase completa



a) heap como árvore binária

# Heap

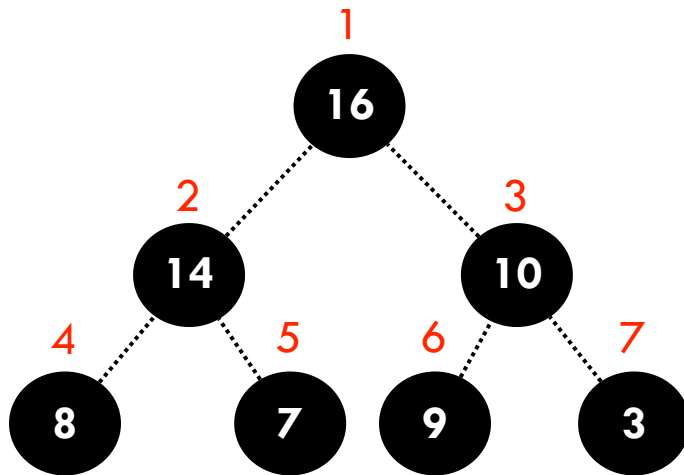
- **Heap:** estrutura de dados em array que pode ser vista como uma árvore binária quase completa



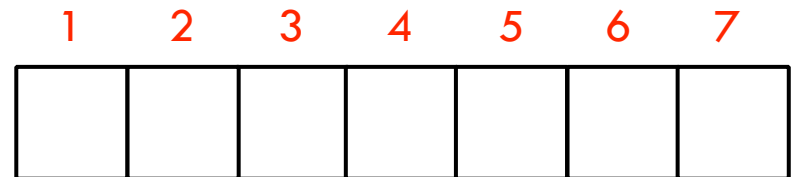
a) heap como árvore binária

# Heap

- **Heap:** estrutura de dados em array que pode ser vista como uma árvore binária quase completa



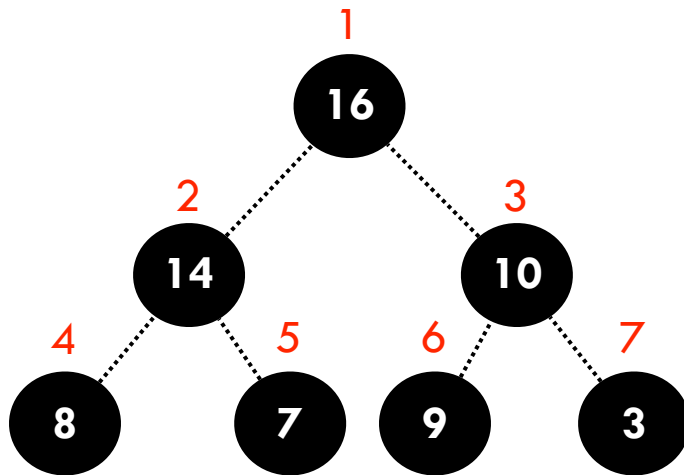
a) heap como árvore binária



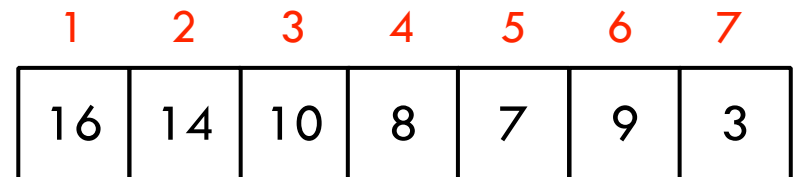
b) heap como array

# Heap

- **Heap:** estrutura de dados em array que pode ser vista como uma árvore binária quase completa



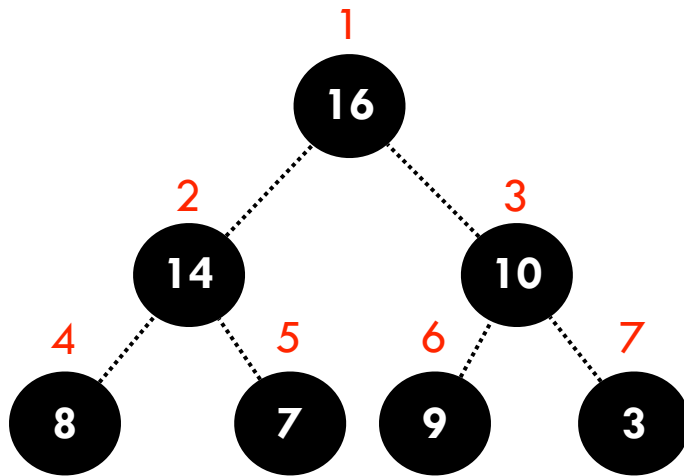
a) heap como árvore binária



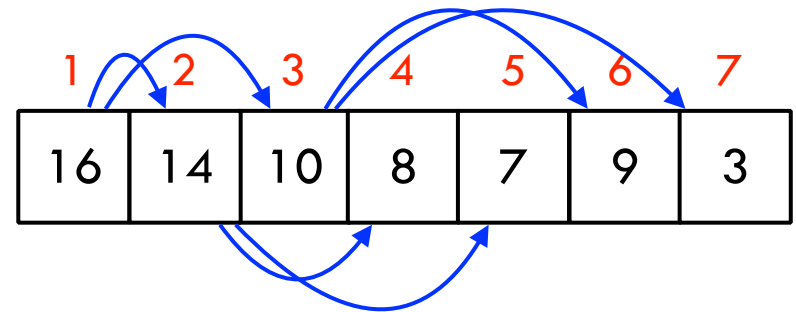
b) heap como array

# Heap

- **Heap:** estrutura de dados em array que pode ser vista como uma árvore binária quase completa



a) heap como árvore binária



b) heap como array

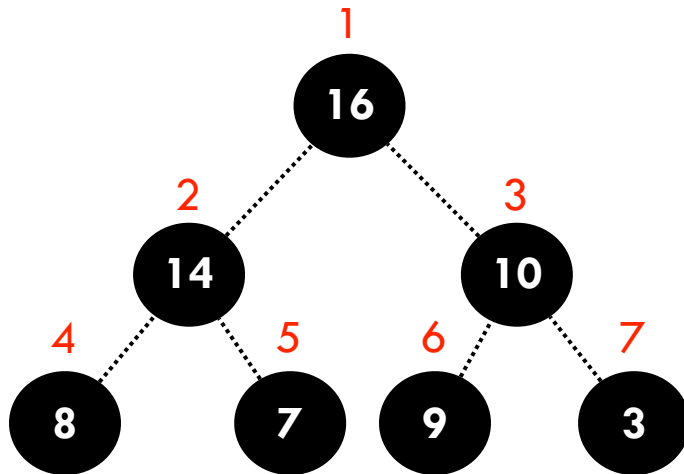
# Heap

- \*  $\text{Pai}(i) = \text{floor}(i/2)$
- \*  $\text{Esquerda}(i) = 2*i$
- \*  $\text{Direita}(i) = 2*i + 1$

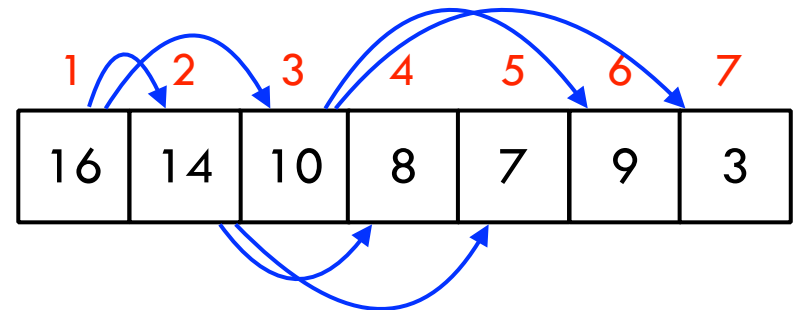


# Heap

\*  $\text{Pai}(i) = \text{floor}(i/2)$   
\*  $\text{Esquerda}(i) = 2*i$   
\*  $\text{Direita}(i) = 2*i + 1$



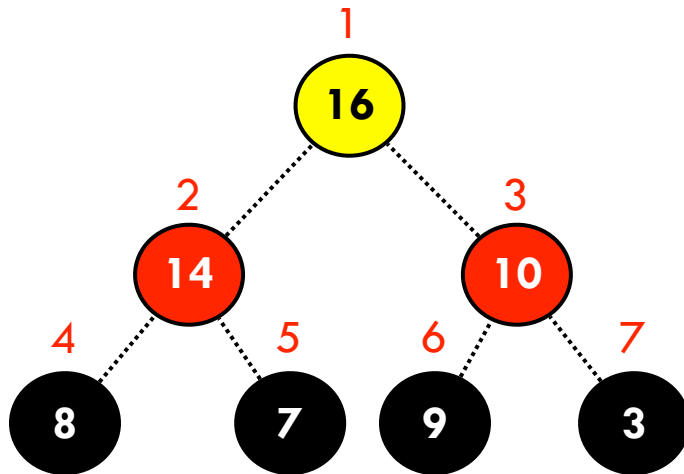
a) heap como árvore binária



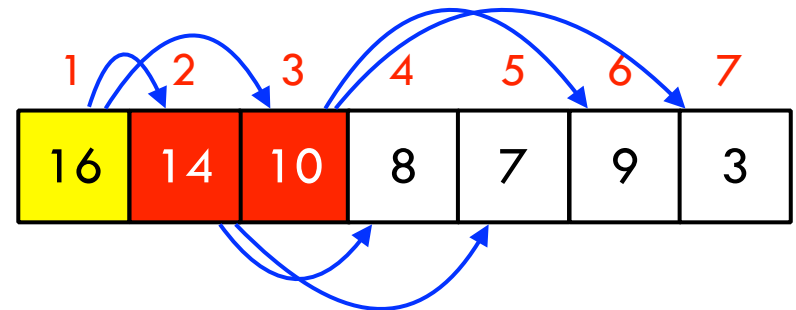
b) heap como array

# Heap

\* Esquerda(1) =  $2 \cdot 1 = 2$   
\* Direita(1) =  $2 \cdot 1 + 1 = 3$



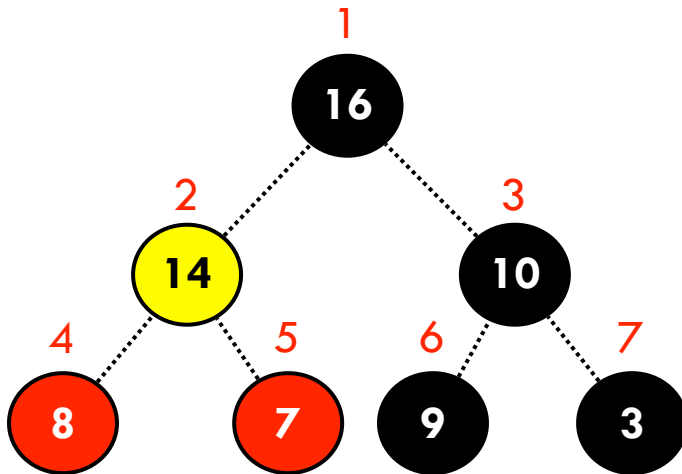
a) heap como árvore binária



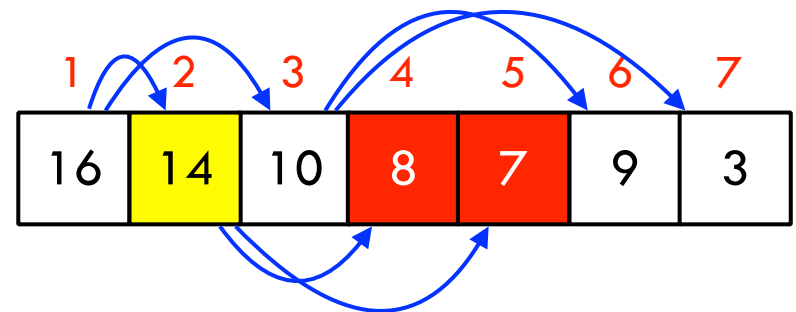
b) heap como array

# Heap

\*  $\text{Pai}(2) = \text{floor}(2/2) = 1$   
\*  $\text{Esquerda}(2) = 2*2 = 4$   
\*  $\text{Direita}(2) = 2*2 + 1 = 5$



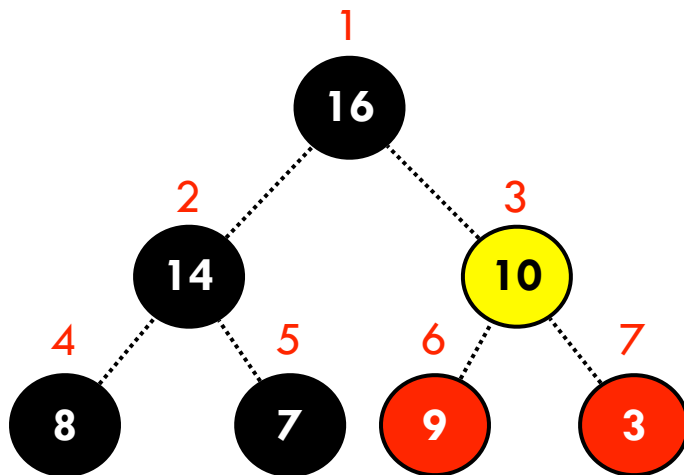
a) heap como árvore binária



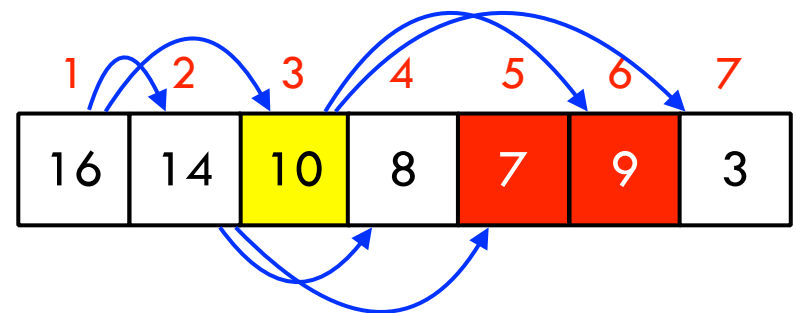
b) heap como array

# Heap

\*  $\text{Pai}(3) = \text{floor}(3/2) = 1$   
\*  $\text{Esquerda}(3) = 2*3 = 6$   
\*  $\text{Direita}(3) = 2*3 + 1 = 7$



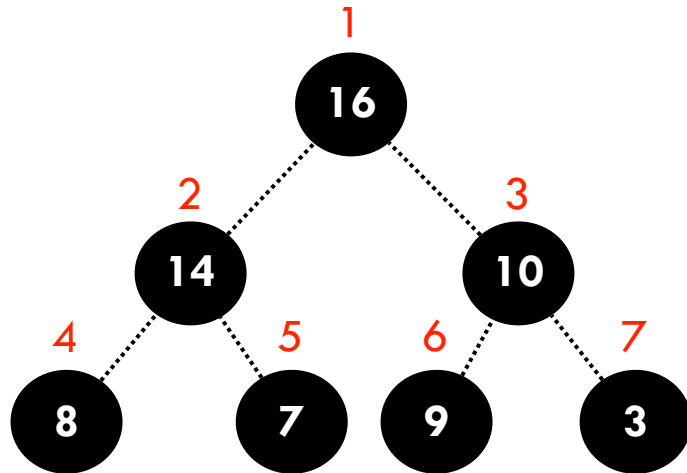
a) heap como árvore binária



b) heap como array

# Heap

- **Heap de máximo:**
  - $A[\text{parent}(i)] \geq A[i]$

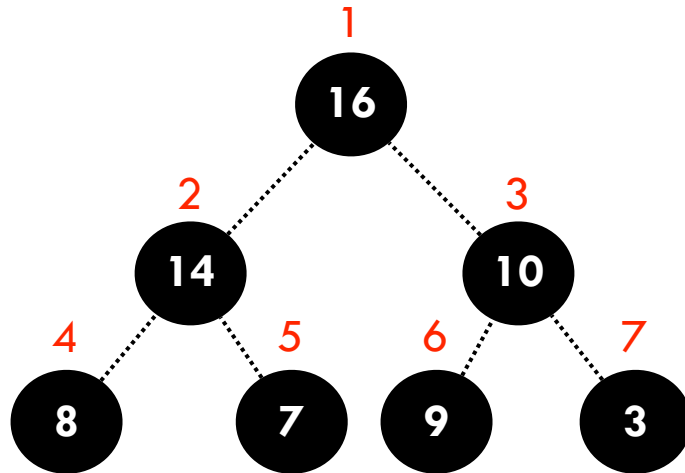


# Heap

- **Heap de máximo:**

- $A[\text{Pai}(i)] \geq A[i]$

Maiores  
valores



Menores  
valores

# Heap

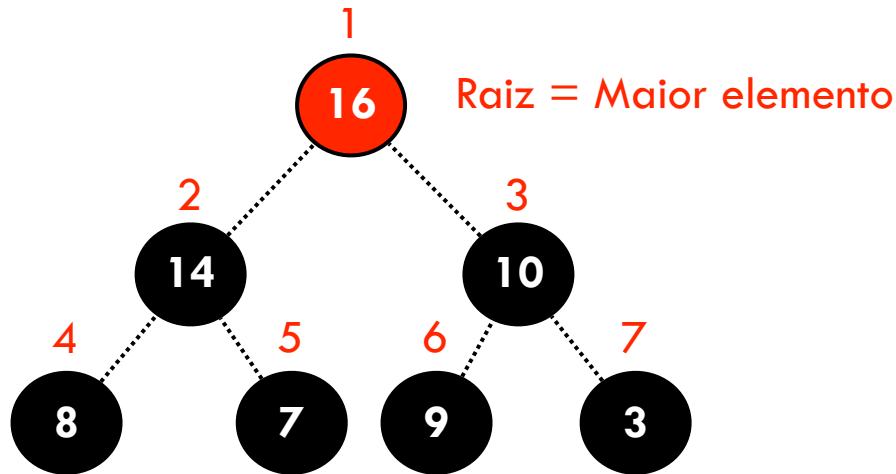
- **Heap de máximo:**

- $A[\text{Pai}(i)] \geq A[i]$

Maiores  
valores

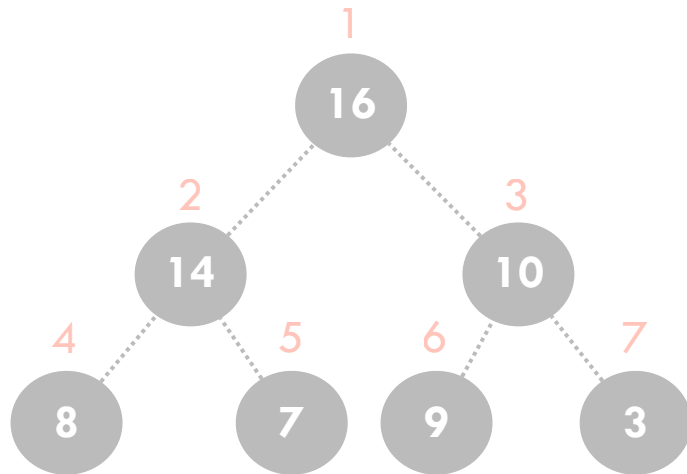


Menores  
valores



# Heap

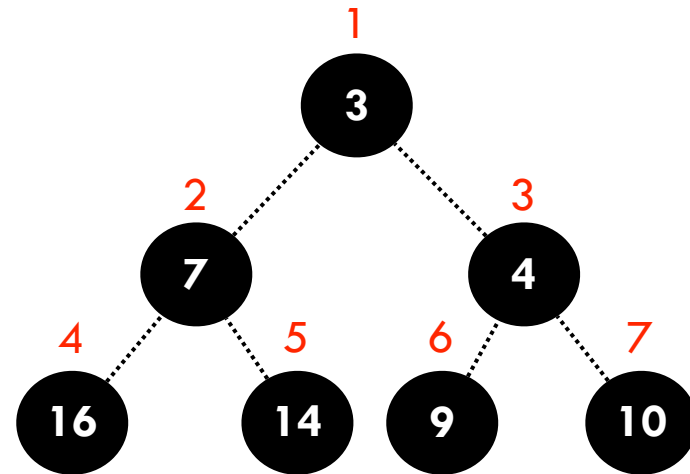
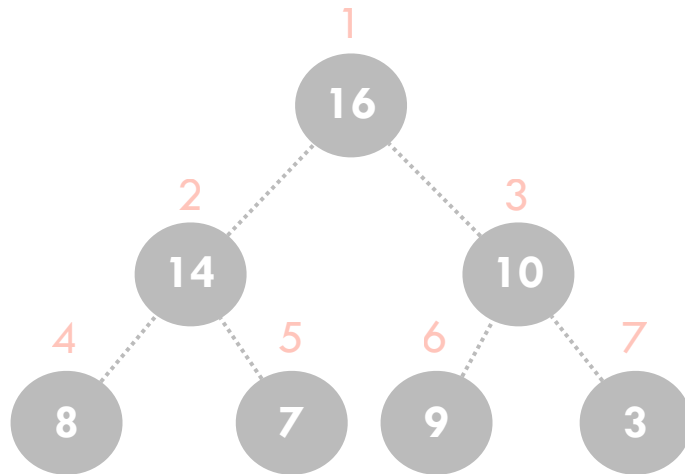
- **Heap de máximo:**
  - $A[\text{Pai}(i)] \geq A[i]$





# Heap

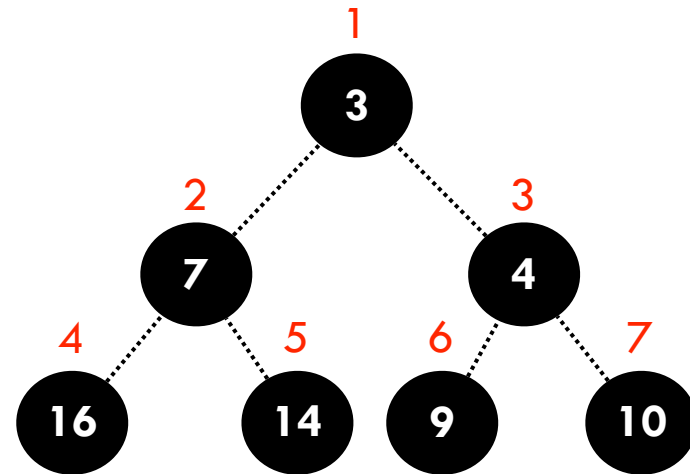
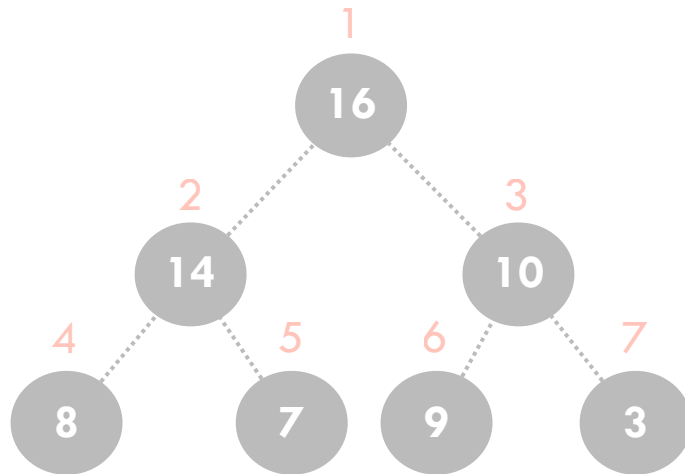
- **Heap de mínimo:**
  - $A[\text{Pai}(i)] \leq A[i]$



# Heap

- **Heap de mínimo:**

- $A[\text{Pai}(i)] \leq A[i]$



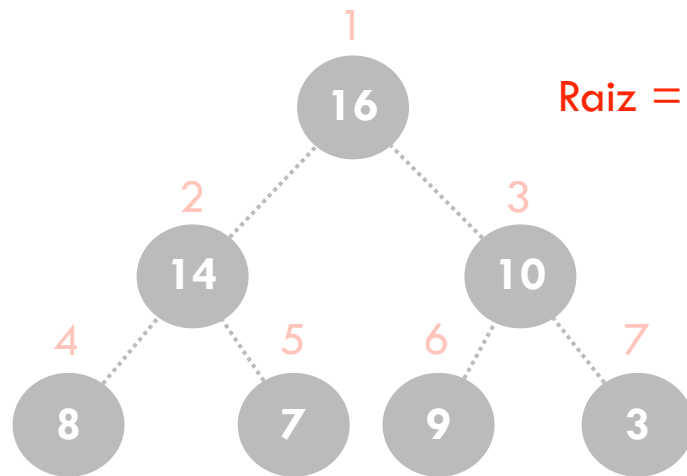
Menores  
valores

Maiores  
valores

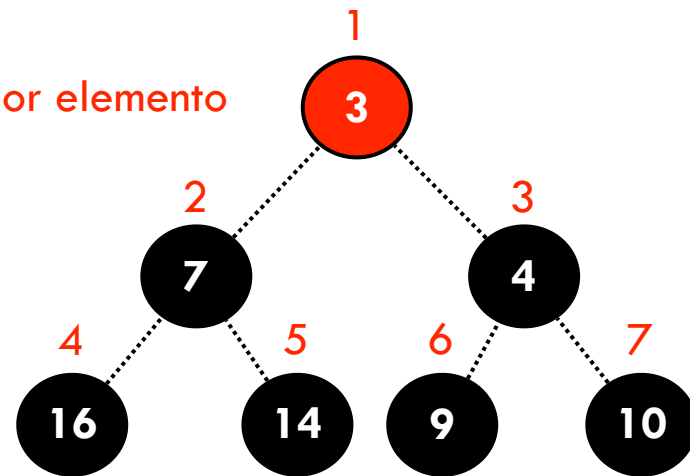
# Heap

- **Heap de mínimo:**

- $A[\text{Pai}(i)] \leq A[i]$



Raiz = Menor elemento



Menores  
valores

Maiores  
valores

# Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Heaps
- 3 Heap Sort
- 4 Exemplo
- 5 Exercícios
- 6 Referências

# Heap Sort



# Heap Sort

## □ Funcionamento

### \* Passos

1. Transformar o heap (vetor) em um max-heap
2. Mover a raiz (maior valor) para o final do vetor (última posição)
3. Reconstrói o heap do vetor restante

# Heap Sort

## □ Desempenho

\* **melhor caso:**  $O(N \log N)$

\* **pior caso:**  $O(N \log N)$

\* **caso médio:**  $O(N \log N)$

# Heap Sort

## □ Desempenho

\* **melhor caso:**  $O(N \log N)$

\* **pior caso:**  $O(N \log N)$

\* **caso médio:**  $O(N \log N)$

**Obs:** Na prática, o HeapSort é mais lento que o QuickSort, exceto no pior caso.



# Heap Sort

## □ Pseudocódigo

1. **HEAPSORT**: ordena o vetor usando heap auxiliar
2. **BUILD-MAX-HEAP**: cria um heap de máximo a partir dos valores aleatórios de um vetor
3. **MAX-HEAPIFY**: mantém a propriedade de heap de máximo de um conjunto de valores

# Heap Sort

- **Pseudocódigo** (mantém heap)

1. **MAX-HEAPIFY** ( $V, i$ )

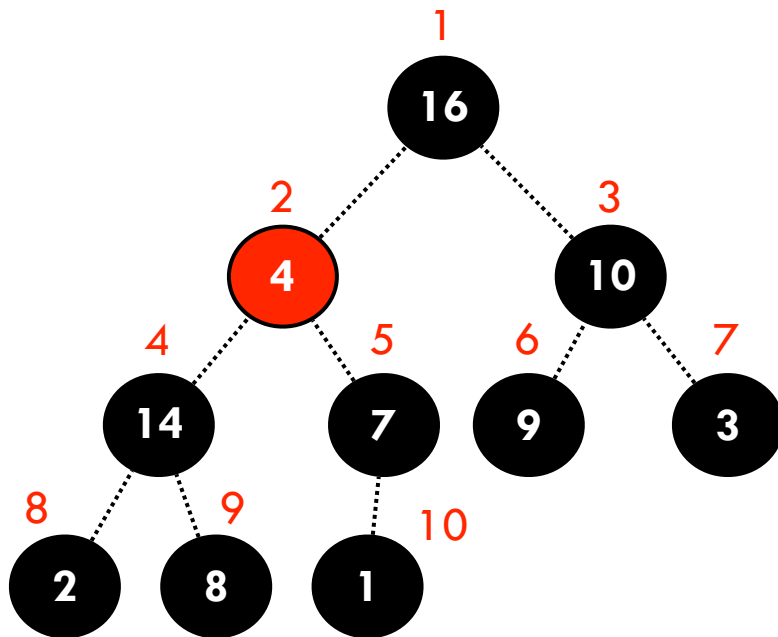
- Entradas:
  - **V**: vetor de elementos
  - **i**: índice da posição para se criar max-heap
- Além disso, em  $V$  podemos obter:
  - **V.tamanho-heap**: tamanho a ser considerado para criar heap
  - **V.tamanho**: tamanho do vetor

# Heap Sort

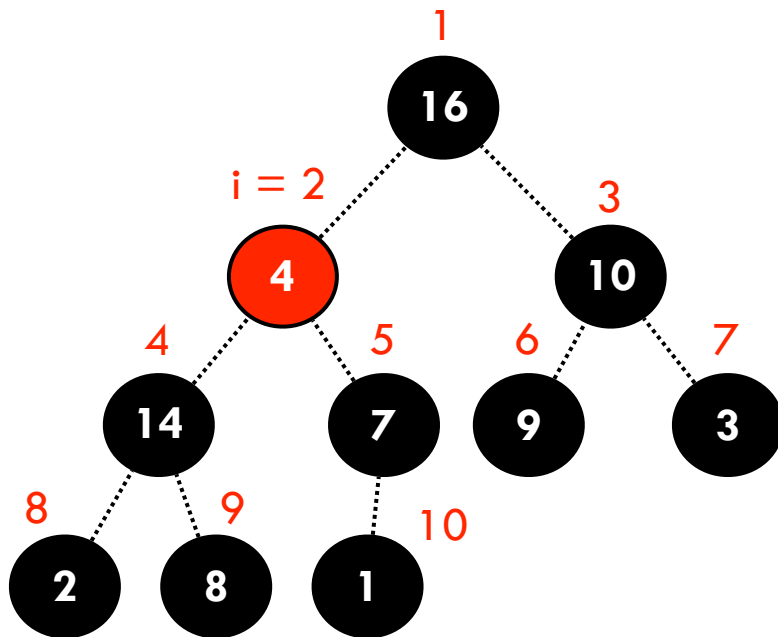
## □ Pseudocódigo (cria heap)

```
1. MAX-HEAPIFY (V, i)
2.   L = Esquerda(i)
3.   R = Direita(i)
4.   se L <= V.tamanho-heap E V[L] > V[i]
5.       maior = L
6.   senão maior = R
7.   se R <= V.tamanho-heap E V[R] > V[maior]
8.       maior = R
9.   se maior != i
10.       troca(V[i], V[maior])
11.       MAX-HEAPIFY (V, maior)
```

# MAX-HEAPIFY



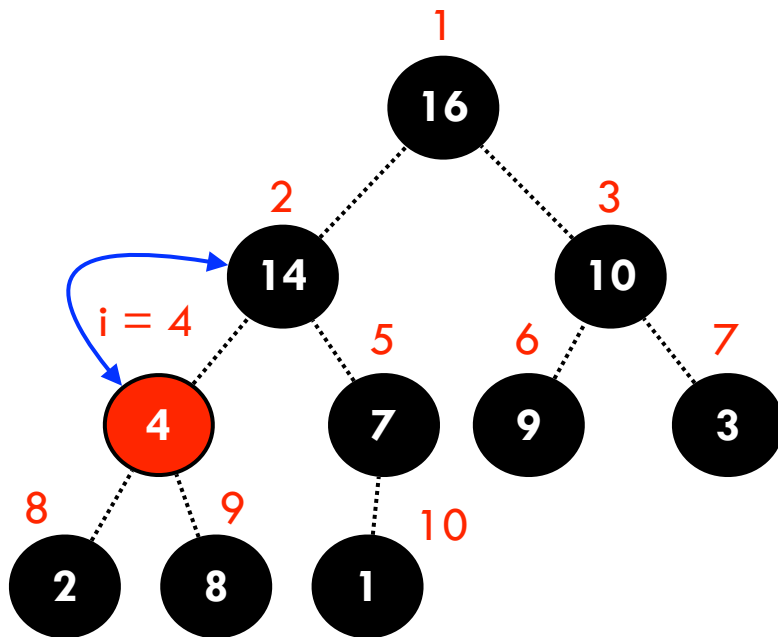
# MAX-HEAPIFY



\* Configuração inicial ( $i = 2$ )  
 $V[2]$  viola a propriedade de heap máximo:  
 $V[2] < V[4]$  e  $V[2] < V[5]$

\* **Solução:** SWAP( $V[2]$ ,  $V[4]$ )

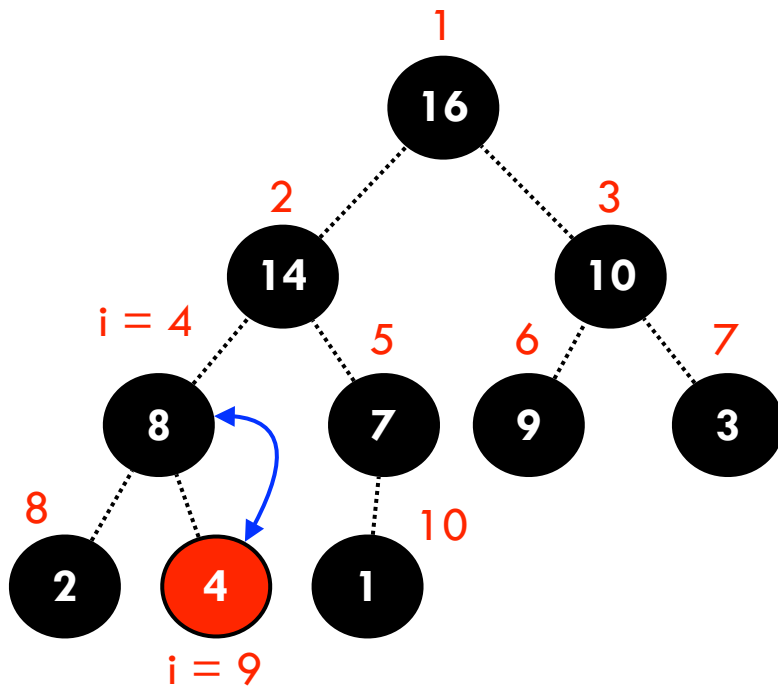
# MAX-HEAPIFY



\* Configuração atual ( $i = 4$ )  
 $v[4]$  viola a propriedade de heap máximo:  
 $V[4] < V[9]$

**Solução:** SWAP( $V[4]$ ,  $V[9]$ )

# MAX-HEAPIFY



Tudo certo agora :)

# Heap Sort

- **Pseudocódigo** (cria max-heap)

## 2. **BUILD-MAX-HEAP** (V)

- Entradas:
  - **V**: vetor de elementos
- Usa **MAX-HEAPIFY** em uma abordagem *bottom up* convertendo o array V em um max-heap
  - iterar de  $N/2$  ... até 1



# Heap Sort

## □ Pseudocódigo (cria heap)

1. **BUILD-MAX-HEAP** (V)
2.     V.tamanho-heap = V.tamanho
3.     Para i = floor(V.tamanho/2) até 1
4.         **MAX-HEAPIFY**(A, i)

# BUILD-MAX-HEAP

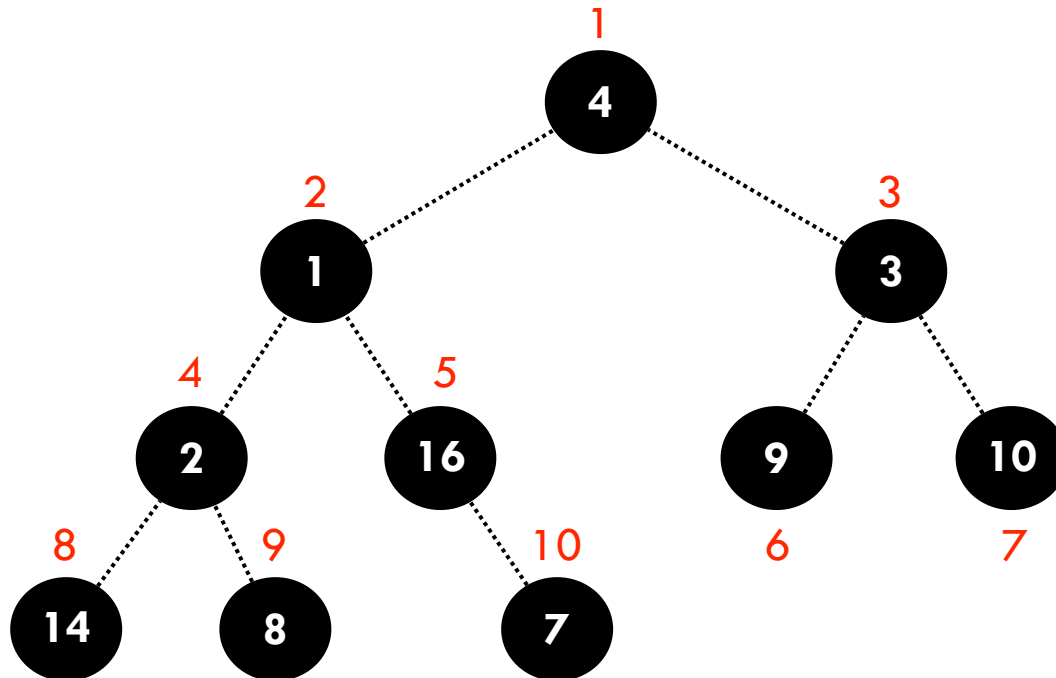
V =

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6 | 7  | 8  | 9 | 10 |
|---|---|---|---|----|---|----|----|---|----|
| 4 | 1 | 3 | 2 | 16 | 9 | 10 | 14 | 8 | 7  |

# BUILD-MAX-HEAP

V =

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6 | 7  | 8  | 9 | 10 |
|---|---|---|---|----|---|----|----|---|----|
| 4 | 1 | 3 | 2 | 16 | 9 | 10 | 14 | 8 | 7  |



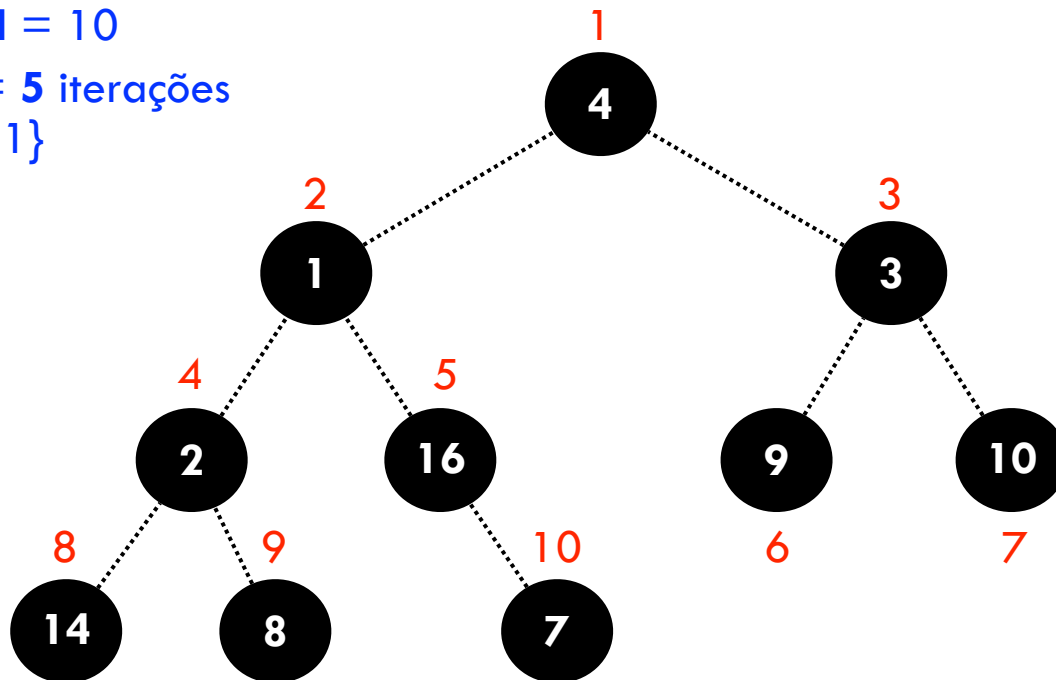
# BUILD-MAX-HEAP

|     |   |   |   |   |    |   |    |    |   |    |
|-----|---|---|---|---|----|---|----|----|---|----|
|     | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6 | 7  | 8  | 9 | 10 |
| V = | 4 | 1 | 3 | 2 | 16 | 9 | 10 | 14 | 8 | 7  |

V.tamanho = **N** = 10

**N**/2 = 10/2 = **5** iterações

i = {5, 2, 3, 4, 1}

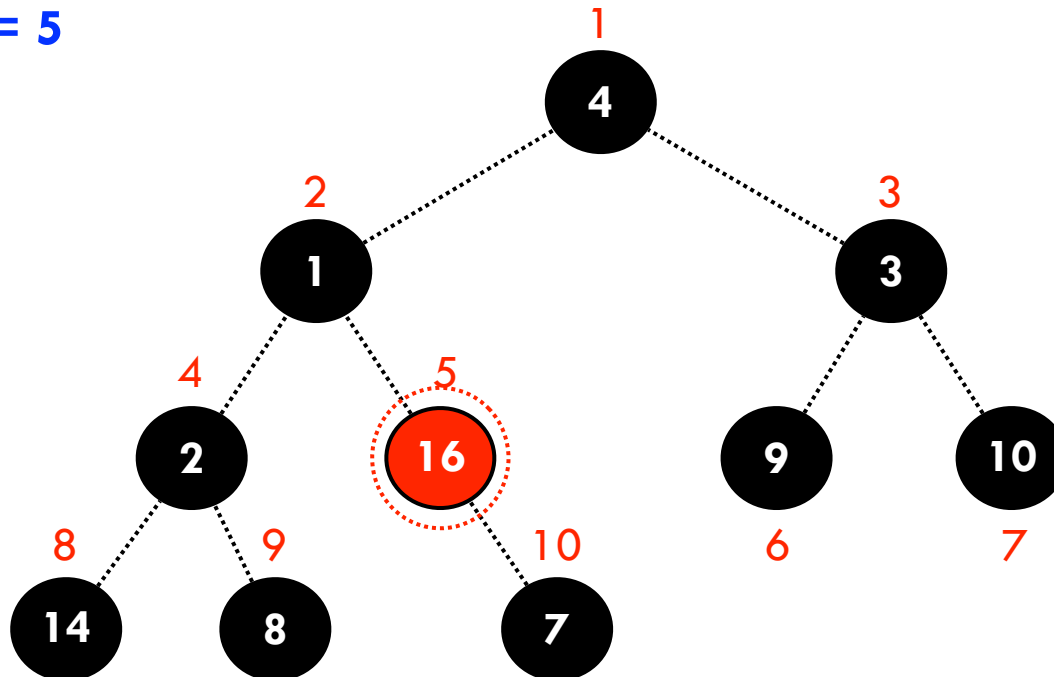


# BUILD-MAX-HEAP

V =

|   |   |   |   |    |   |    |    |   |    |
|---|---|---|---|----|---|----|----|---|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6 | 7  | 8  | 9 | 10 |
| 4 | 1 | 3 | 2 | 16 | 9 | 10 | 14 | 8 | 7  |

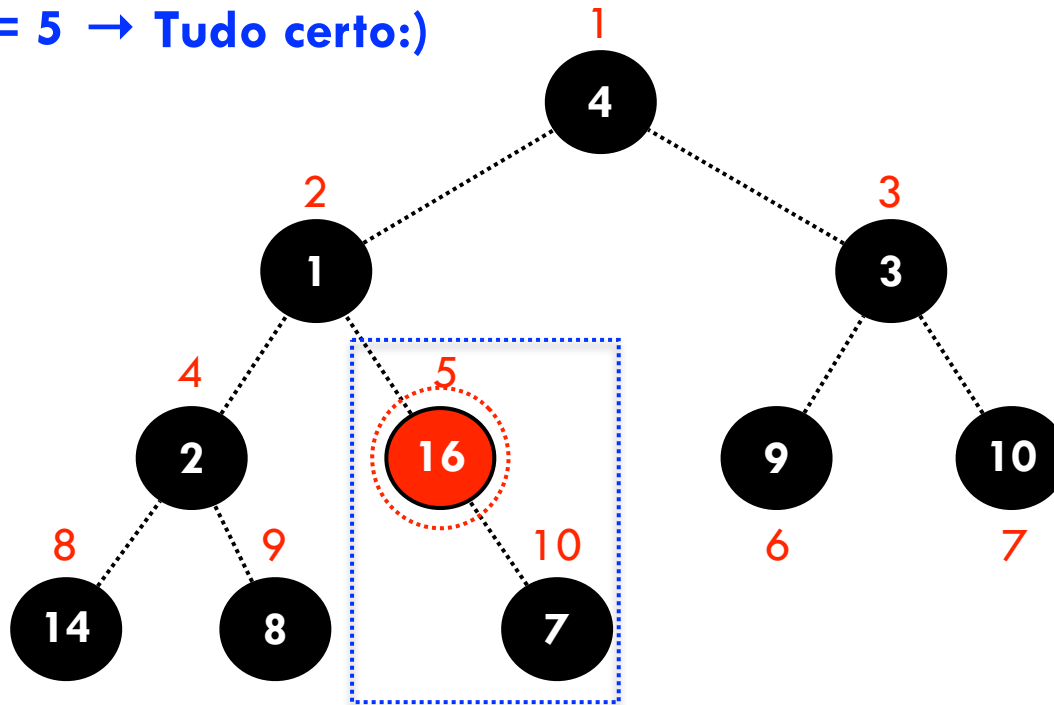
□ iteração  $i = 5$



# BUILD-MAX-HEAP

|     |   |   |   |   |    |   |    |    |   |    |
|-----|---|---|---|---|----|---|----|----|---|----|
|     | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6 | 7  | 8  | 9 | 10 |
| V = | 4 | 1 | 3 | 2 | 16 | 9 | 10 | 14 | 8 | 7  |

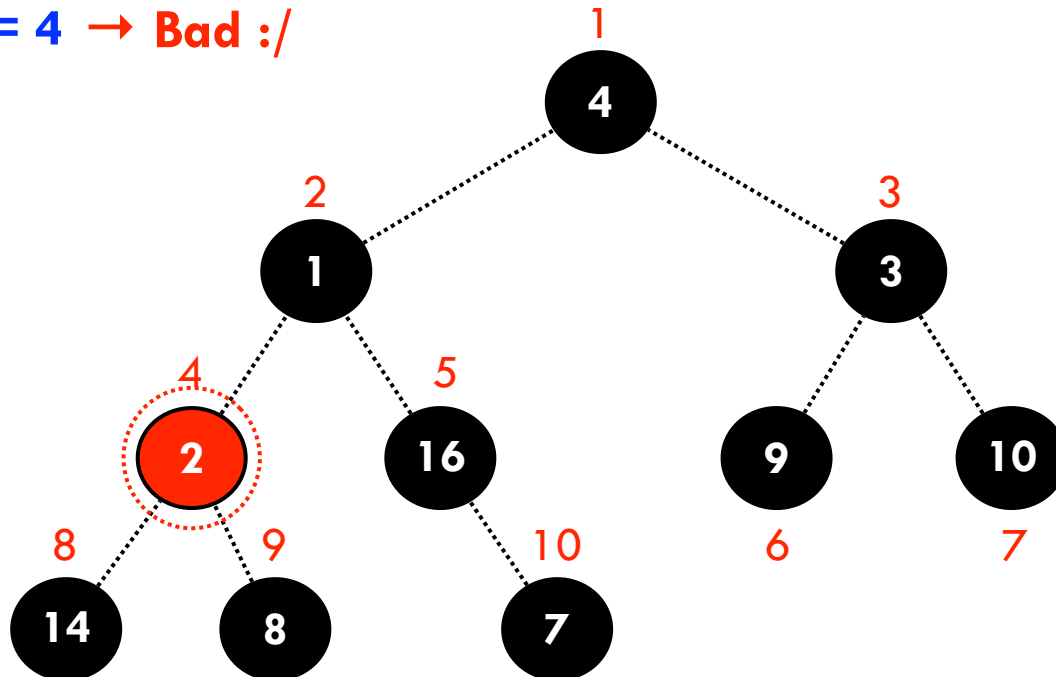
□ iteração  $i = 5 \rightarrow$  Tudo certo:)



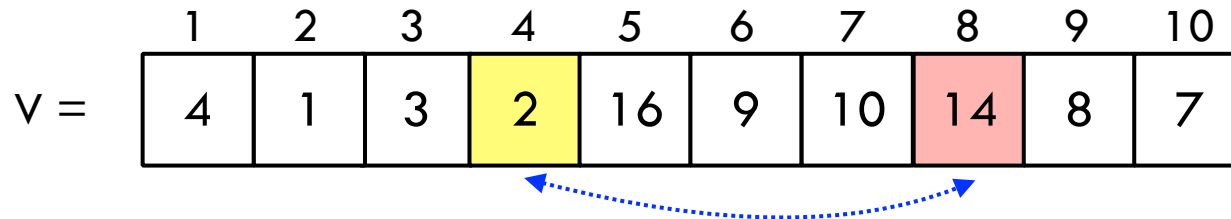
# BUILD-MAX-HEAP

|     |   |   |   |   |    |   |    |    |   |    |
|-----|---|---|---|---|----|---|----|----|---|----|
|     | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6 | 7  | 8  | 9 | 10 |
| V = | 4 | 1 | 3 | 2 | 16 | 9 | 10 | 14 | 8 | 7  |

□ iteração  $i = 4 \rightarrow$  **Bad** :/

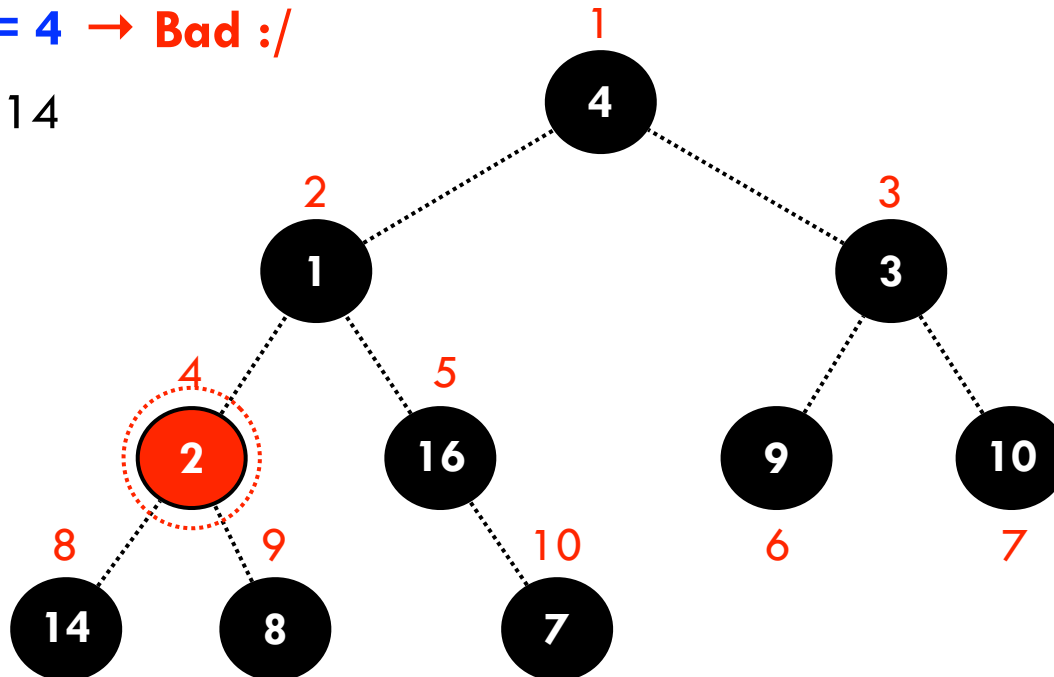


# BUILD-MAX-HEAP



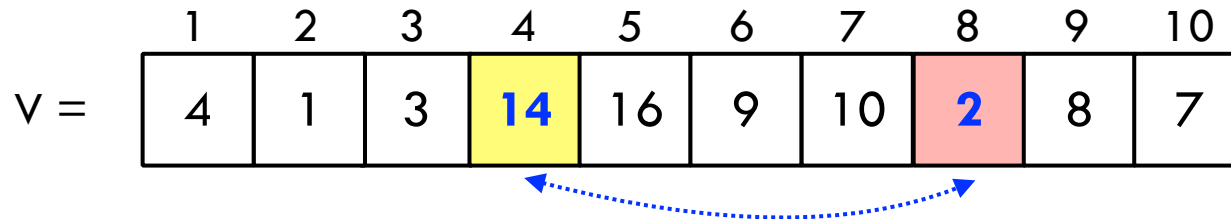
□ iteração  $i = 4 \rightarrow$  **Bad** :/

□ Trocar 2 e 14



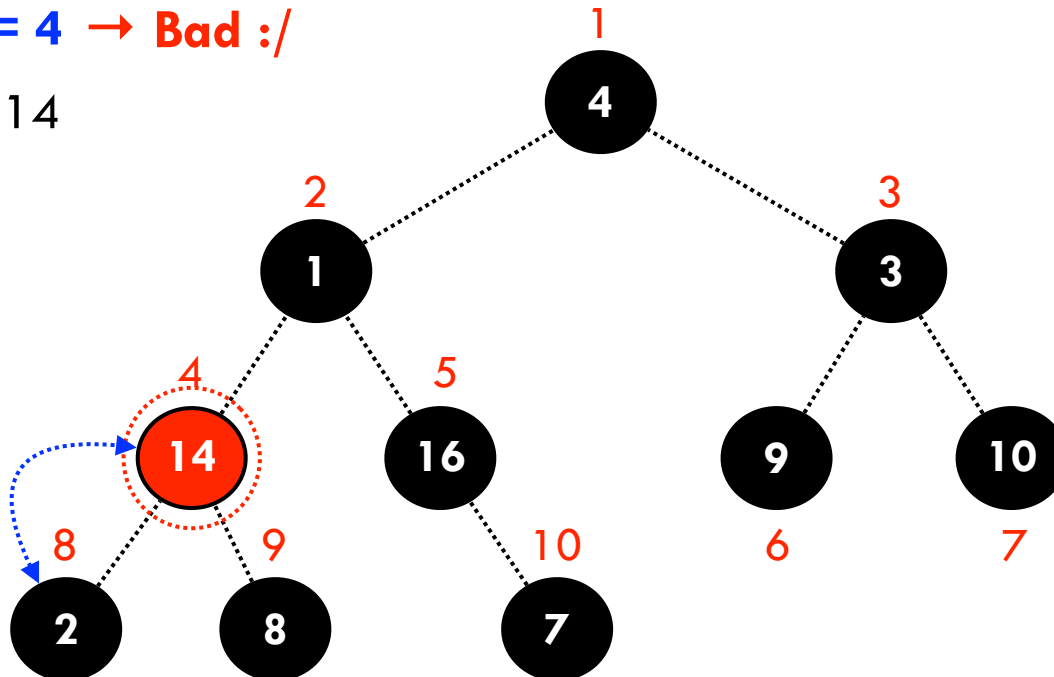


# BUILD-MAX-HEAP



□ iteração  $i = 4 \rightarrow$  **Bad** :/

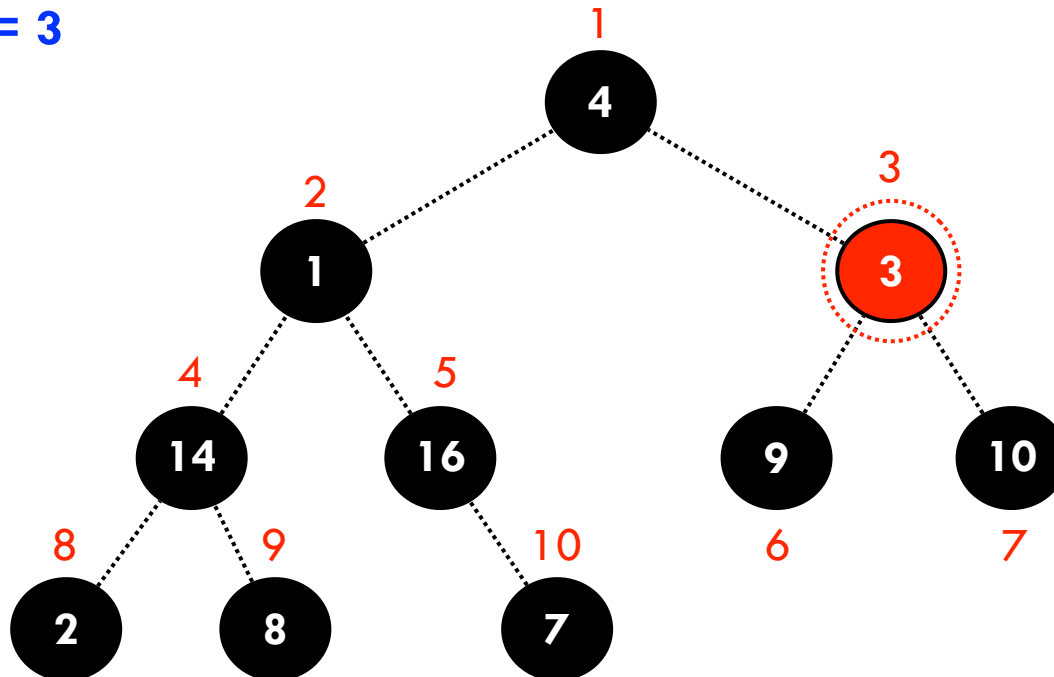
□ Trocar 2 e 14



# BUILD-MAX-HEAP

|     |   |   |   |    |    |   |    |   |   |    |
|-----|---|---|---|----|----|---|----|---|---|----|
|     | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6 | 7  | 8 | 9 | 10 |
| V = | 4 | 1 | 3 | 14 | 16 | 9 | 10 | 2 | 8 | 7  |

□ iteração  $i = 3$

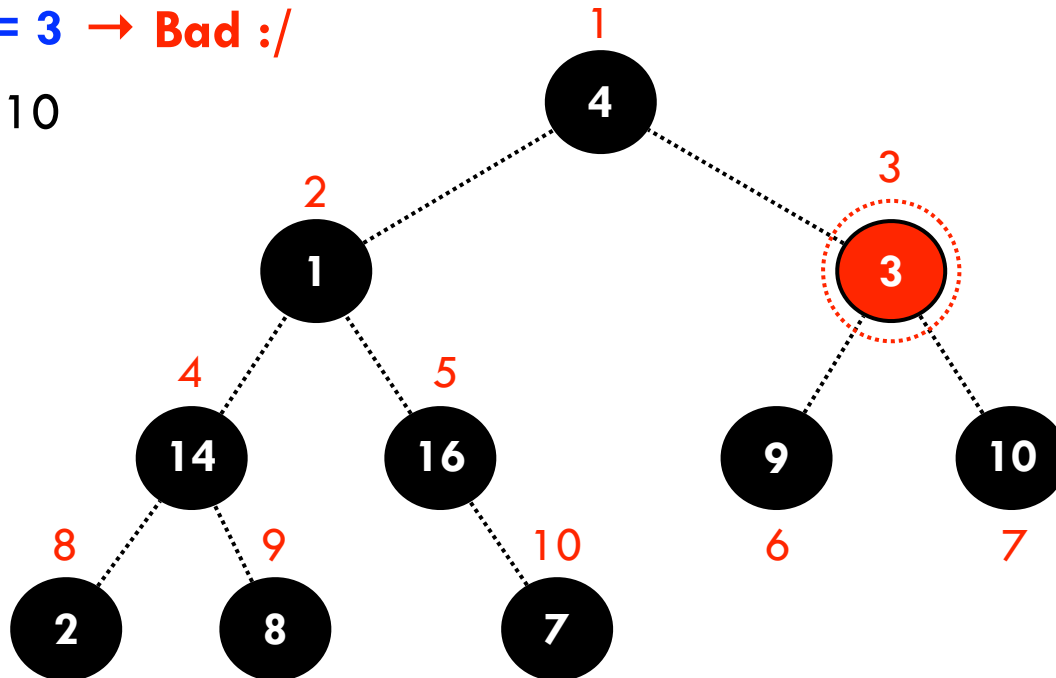


# BUILD-MAX-HEAP

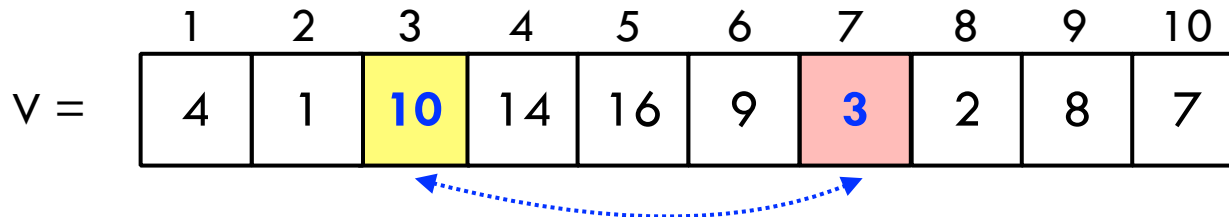
|     |   |   |   |    |    |   |    |   |   |    |
|-----|---|---|---|----|----|---|----|---|---|----|
|     | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6 | 7  | 8 | 9 | 10 |
| V = | 4 | 1 | 3 | 14 | 16 | 9 | 10 | 2 | 8 | 7  |

□ iteração  $i = 3 \rightarrow$  **Bad** :/

□ Trocar 3 e 10

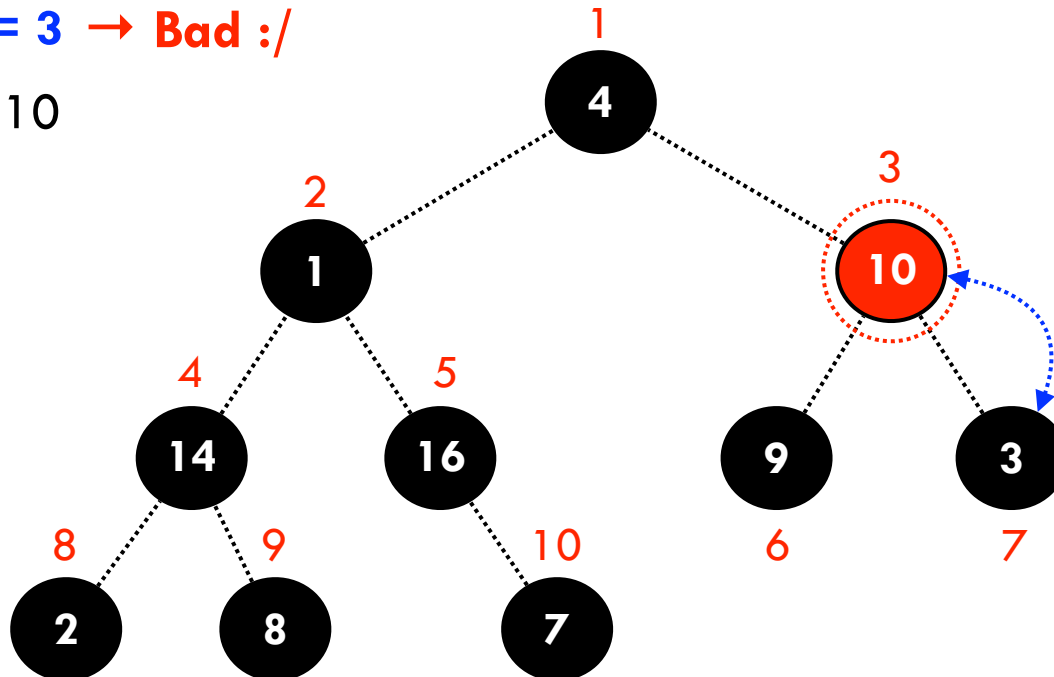


# BUILD-MAX-HEAP



□ iteração  $i = 3 \rightarrow$  **Bad** :/

□ Trocar 3 e 10

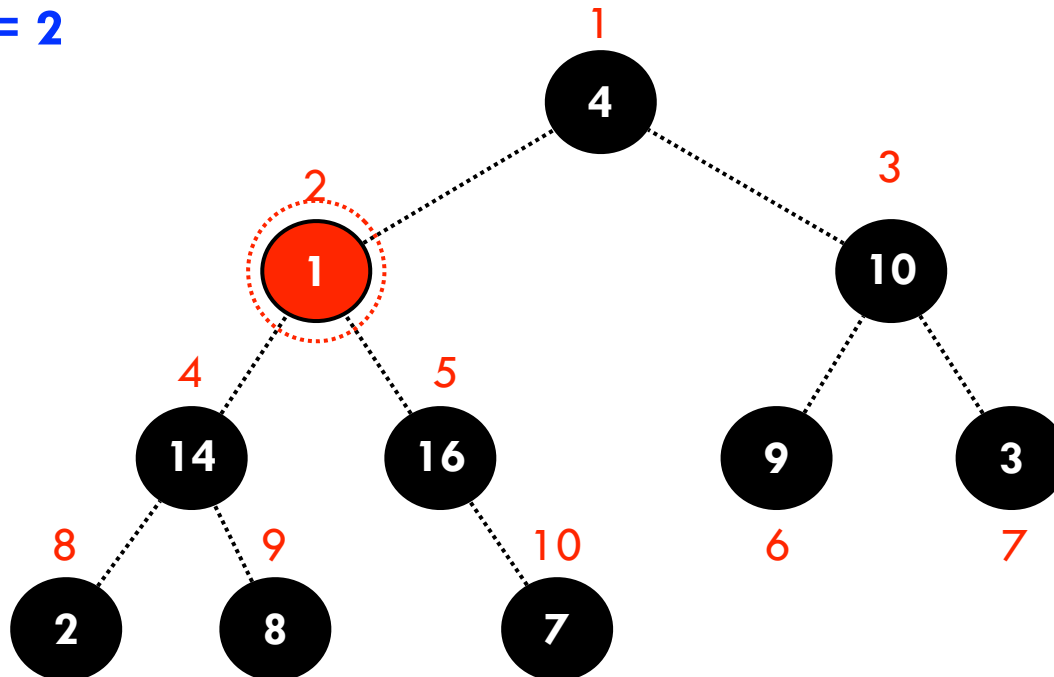


# BUILD-MAX-HEAP

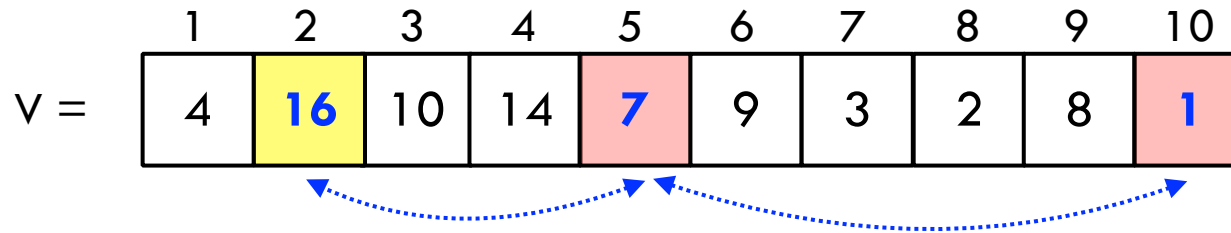
V =

|   |   |    |    |    |   |   |   |   |    |
|---|---|----|----|----|---|---|---|---|----|
| 1 | 2 | 3  | 4  | 5  | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 4 | 1 | 10 | 14 | 16 | 9 | 3 | 2 | 8 | 7  |

□ iteração  $i = 2$



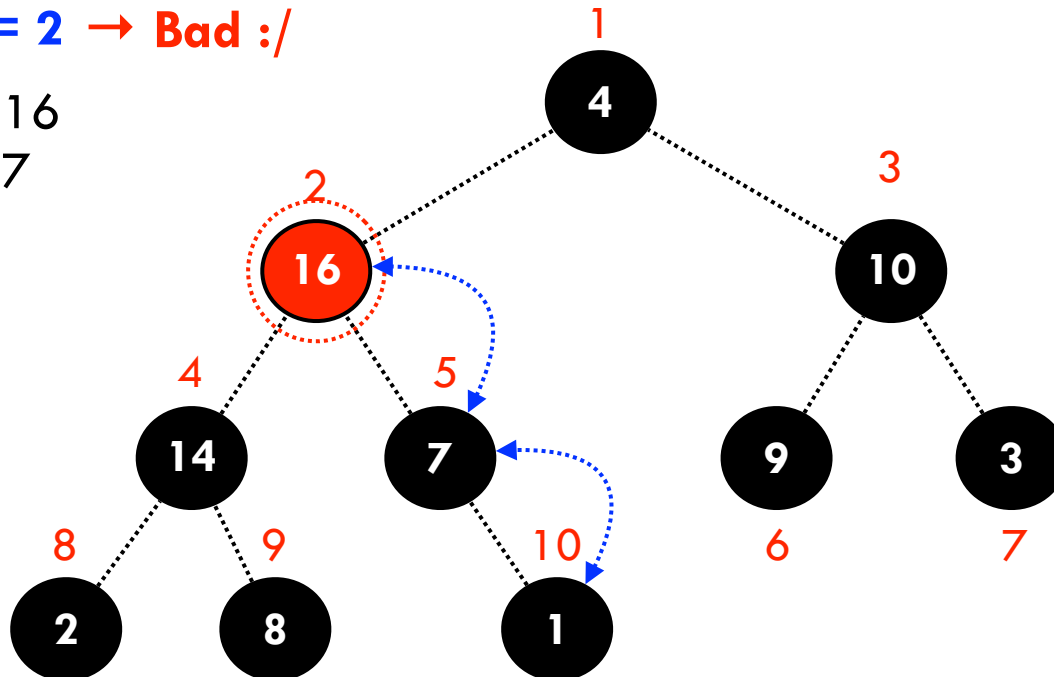
# BUILD-MAX-HEAP



□ **iteração i = 2** → **Bad** :/

□ Trocar 1 e 16

□ Trocar 1 e 7

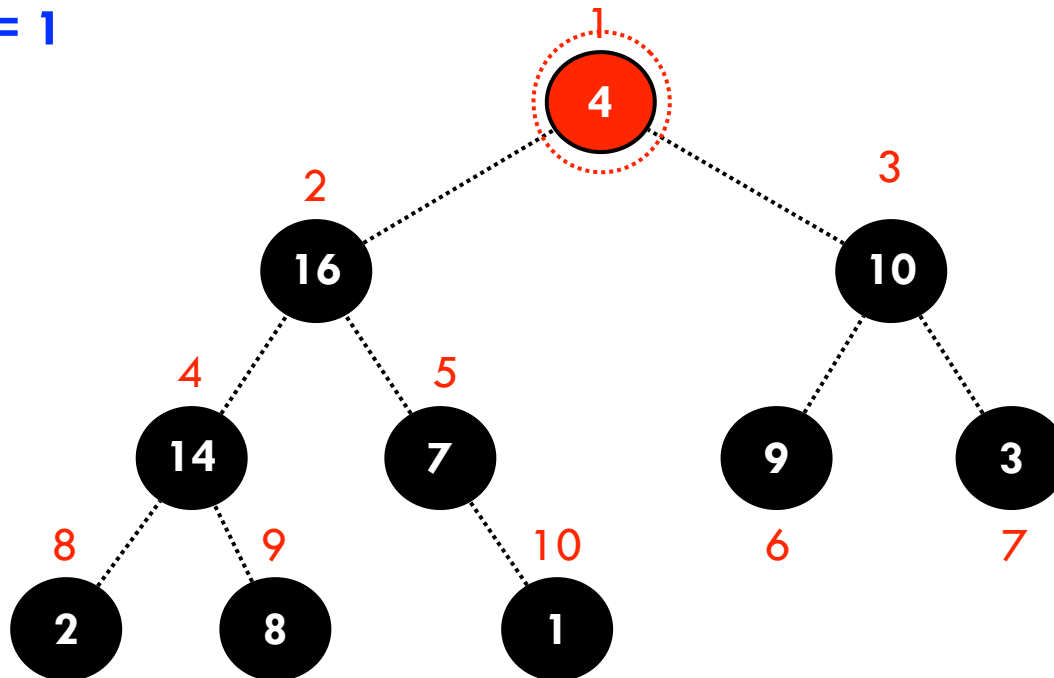


# BUILD-MAX-HEAP

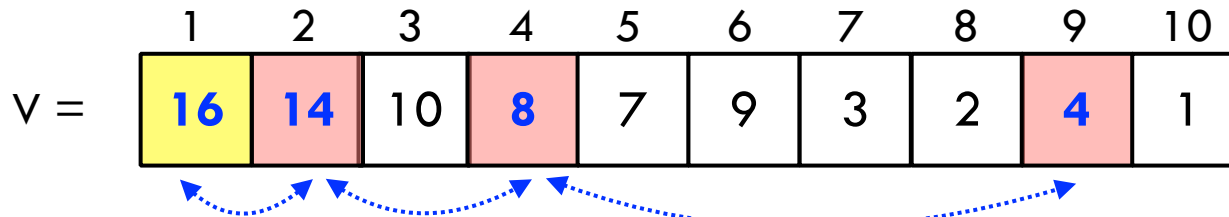
V =

|   |    |    |    |   |   |   |   |   |    |
|---|----|----|----|---|---|---|---|---|----|
| 1 | 2  | 3  | 4  | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 4 | 16 | 10 | 14 | 7 | 9 | 3 | 2 | 8 | 1  |

□ iteração  $i = 1$



# BUILD-MAX-HEAP

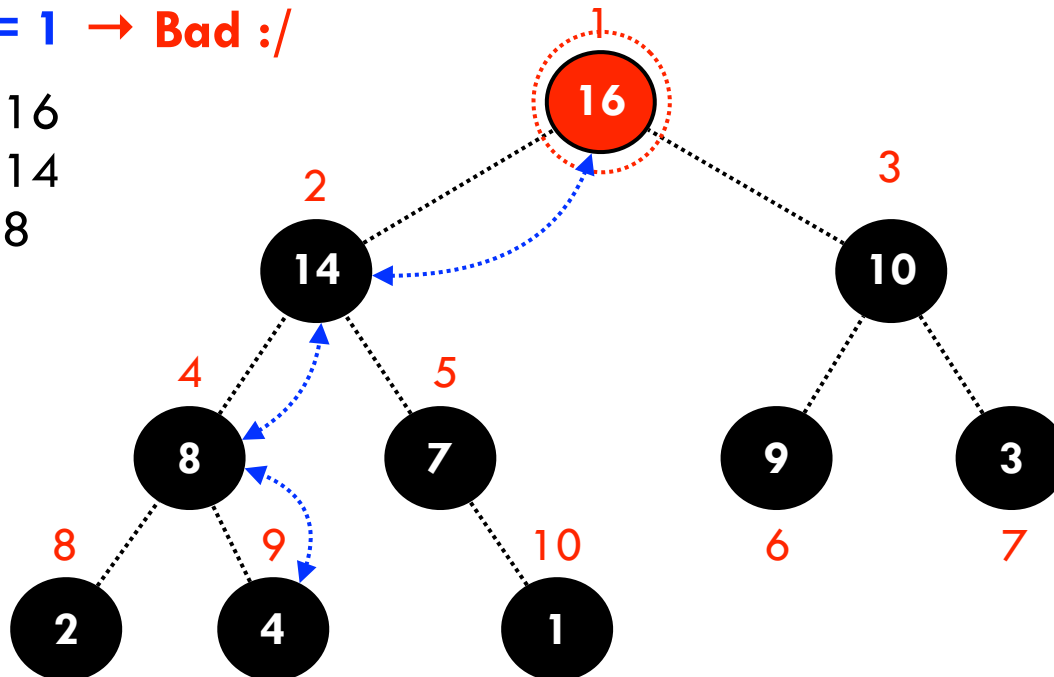


□ **iteração  $i = 1 \rightarrow \text{Bad} :/$**

□ Trocar 4 e 16

□ Trocar 4 e 14

□ Trocar 4 e 8



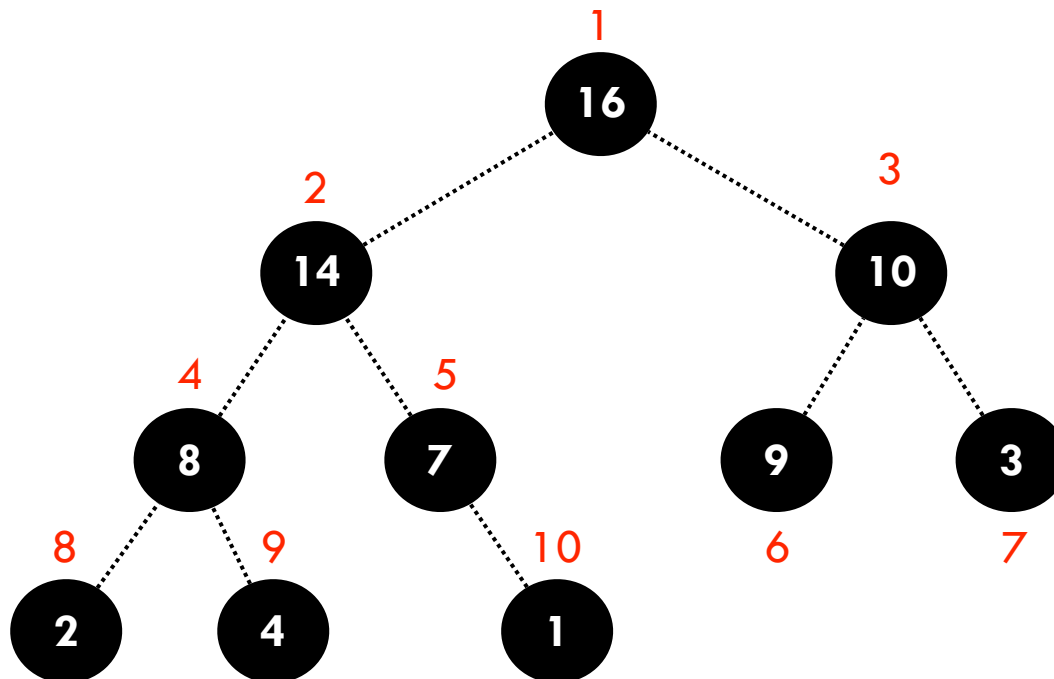


# BUILD-MAX-HEAP

V =

|    |    |    |   |   |   |   |   |   |    |
|----|----|----|---|---|---|---|---|---|----|
| 1  | 2  | 3  | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 16 | 14 | 10 | 8 | 7 | 9 | 3 | 2 | 4 | 1  |

□ Final!



# Heap Sort

## □ Pseudocódigo (função principal)

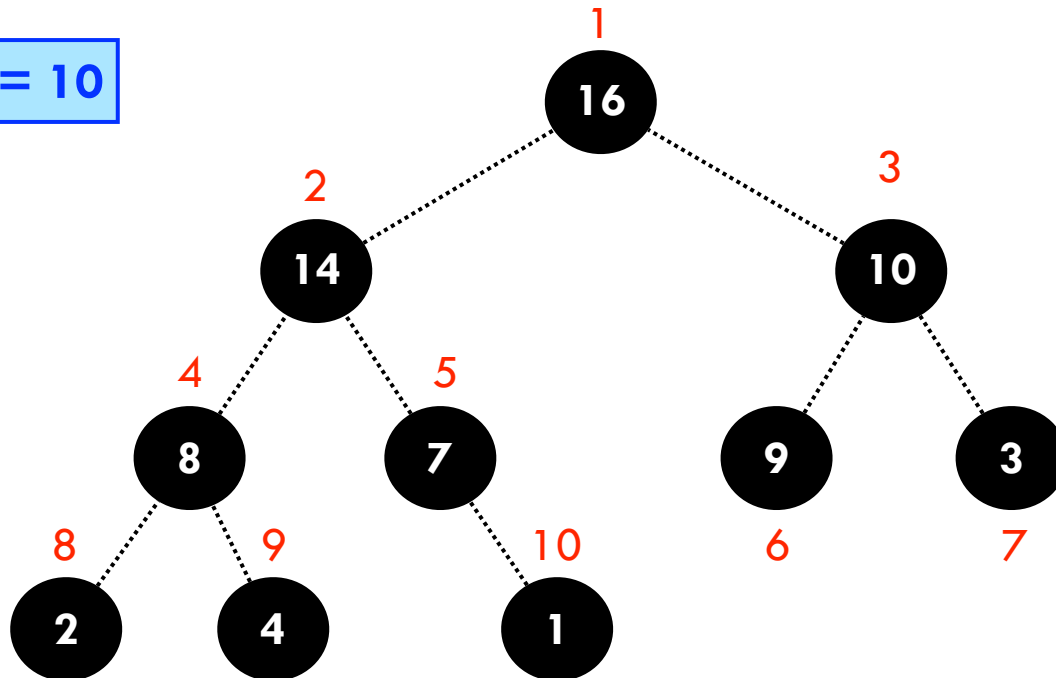
1. **HEAPSORT** (V)
2.     **BUILD-MAX-HEAP**(A)
3.     **Para**  $i = V.tamanho$  até 2
4.         Troca( $V[1]$ ,  $V[i]$ )
5.          $V.tamanho\text{-}heap = V.tamanho\text{-}heap - 1$
6.         **MAX-HEAPIFY**(A, 1)

# HEAP SORT

V =

|    |    |    |   |   |   |   |   |   |    |
|----|----|----|---|---|---|---|---|---|----|
| 1  | 2  | 3  | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 16 | 14 | 10 | 8 | 7 | 9 | 3 | 2 | 4 | 1  |

□ iteração  $i = 10$



# HEAP SORT

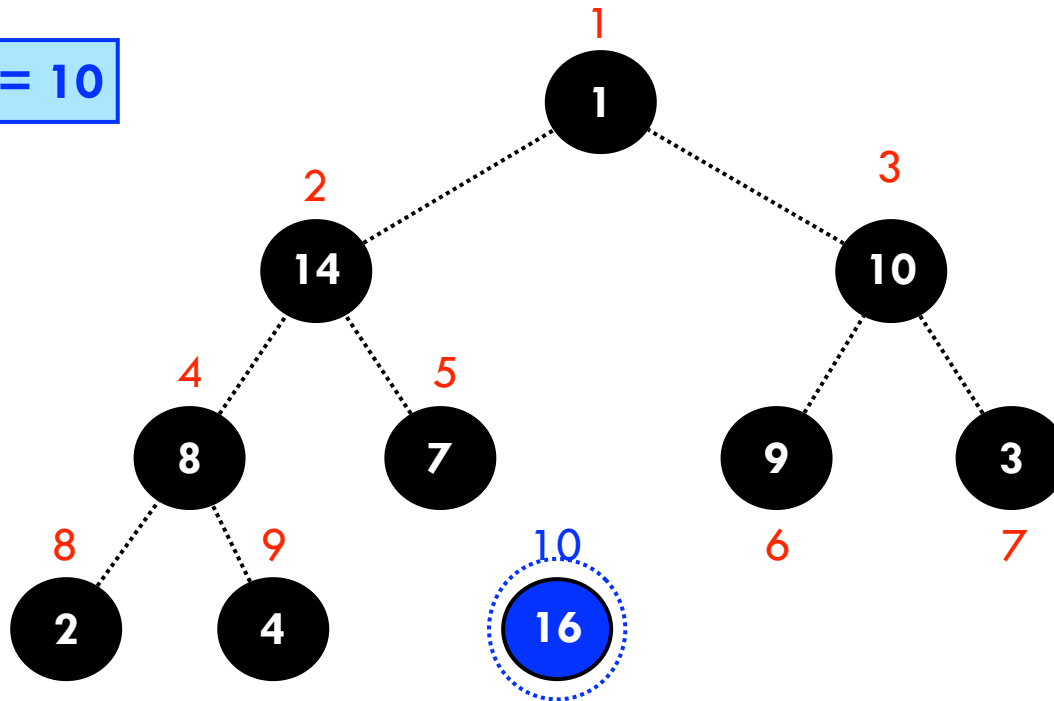
V =

|   |    |    |   |   |   |   |   |   |    |
|---|----|----|---|---|---|---|---|---|----|
| 1 | 2  | 3  | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 14 | 10 | 8 | 7 | 9 | 3 | 2 | 4 | 16 |

MAX-HEAPIFY



□ iteração i = 10



# HEAP SORT

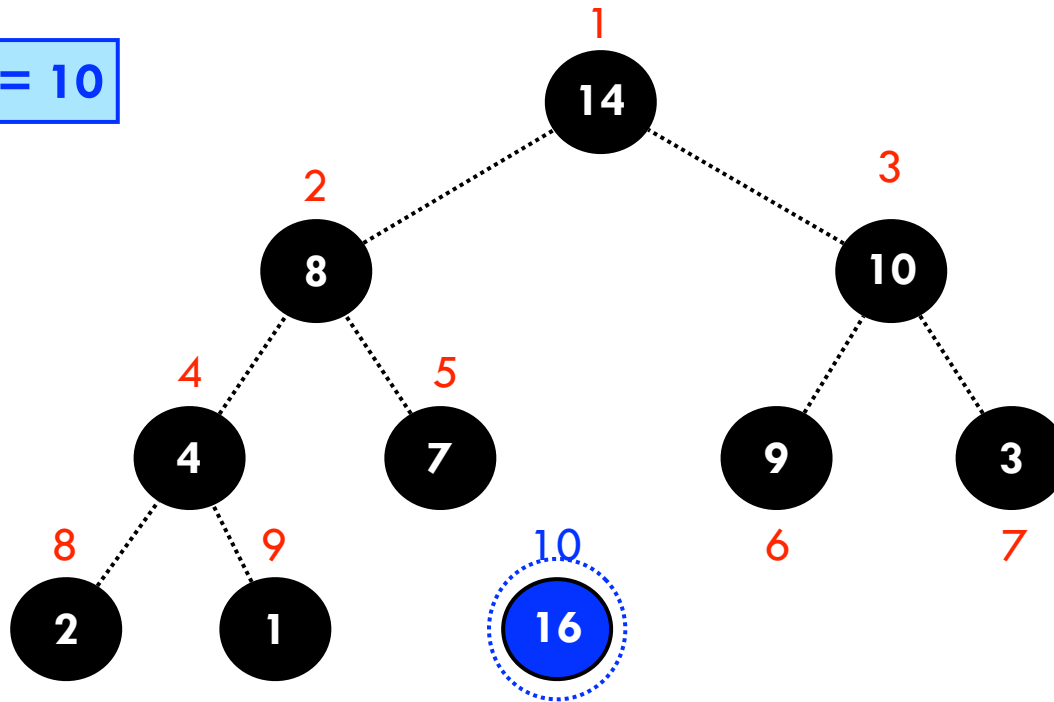
V =

|    |   |    |   |   |   |   |   |   |    |
|----|---|----|---|---|---|---|---|---|----|
| 1  | 2 | 3  | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 14 | 8 | 10 | 4 | 7 | 9 | 3 | 2 | 1 | 16 |

MAX-HEAPIFY



□ iteração i = 10

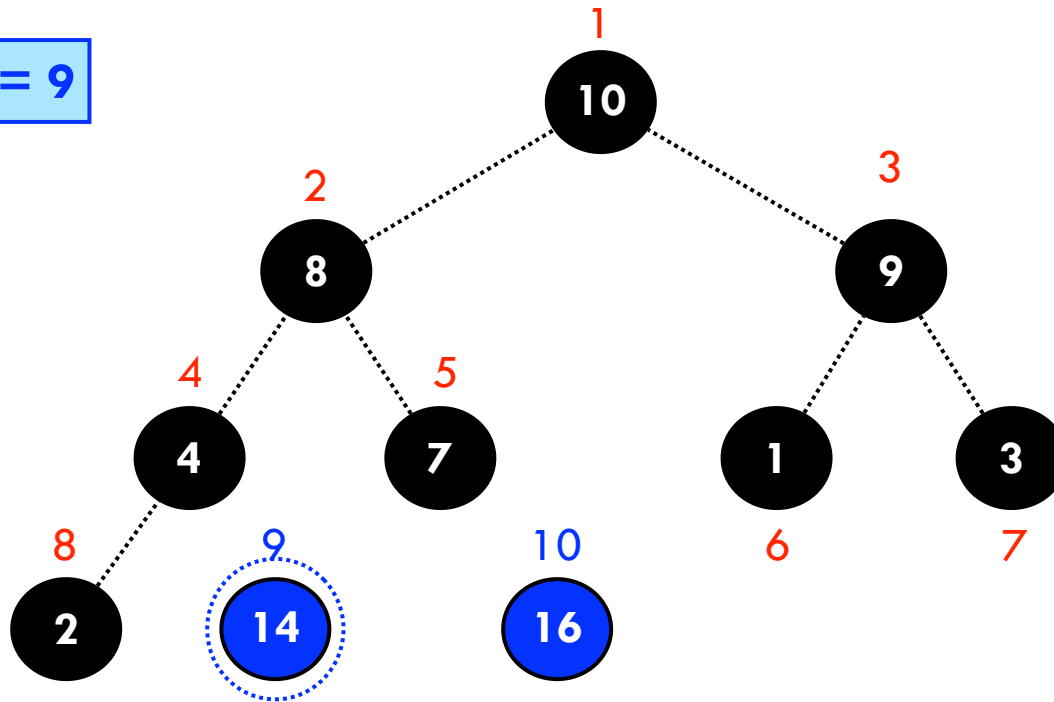


# HEAP SORT

V =

|    |   |   |   |   |   |   |   |    |    |
|----|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| 1  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 |
| 10 | 8 | 9 | 4 | 7 | 1 | 3 | 2 | 14 | 16 |

□ iteração  $i = 9$

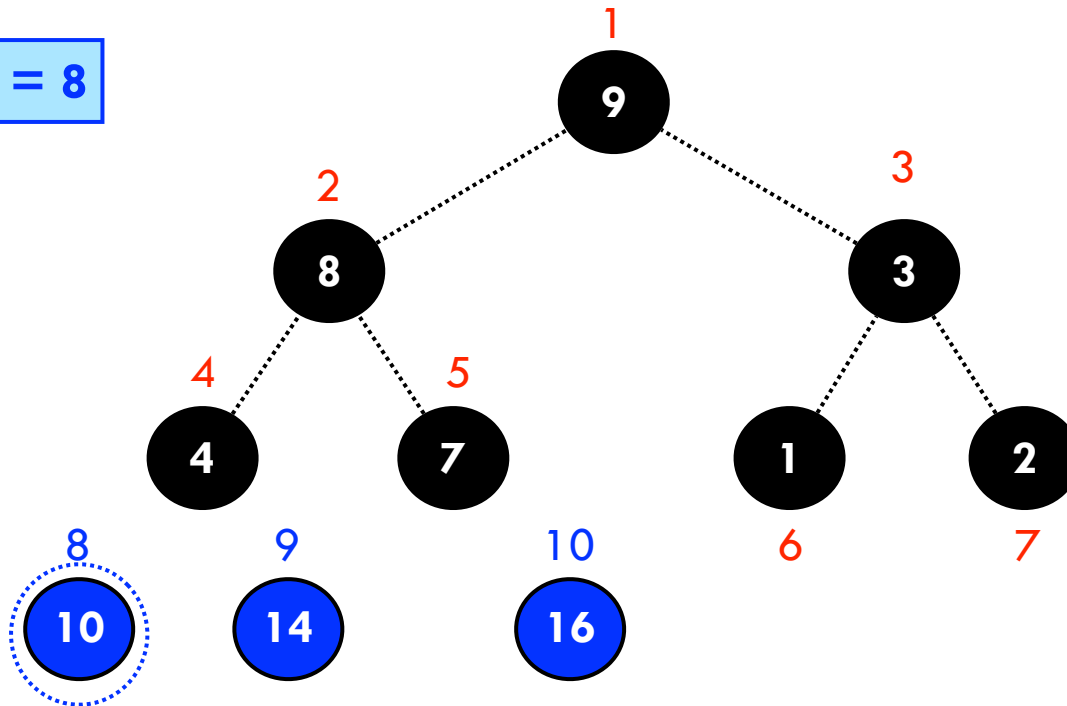


# HEAP SORT

V =

|   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 9 | 8 | 3 | 4 | 7 | 1 | 2 | 10 | 14 | 16 |

□ iteração  $i = 8$

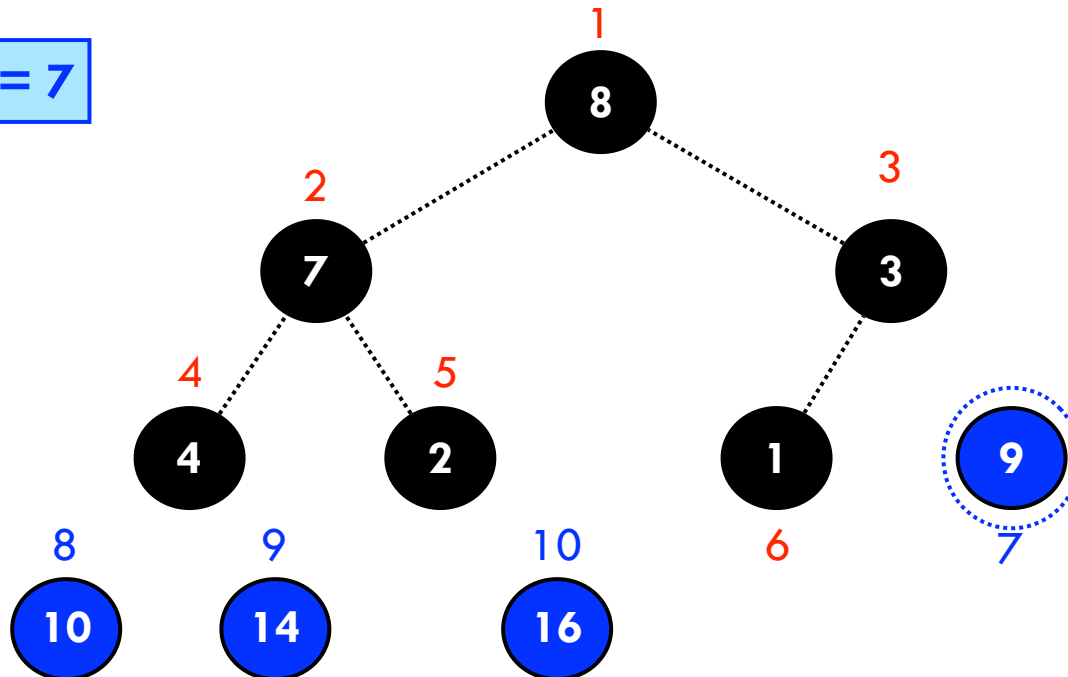


# HEAP SORT

V =

|   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 9 | 8 | 3 | 4 | 7 | 1 | 9 | 10 | 14 | 16 |

□ iteração  $i = 7$



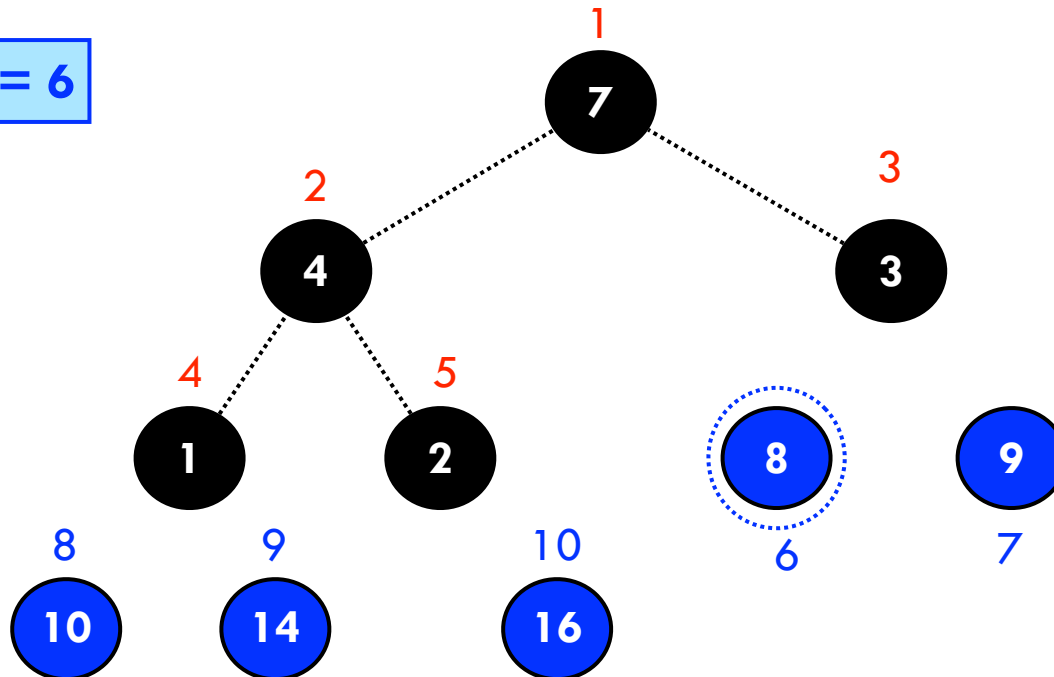


# HEAP SORT

V =

|   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 7 | 4 | 3 | 1 | 2 | 8 | 9 | 10 | 14 | 16 |

□ iteração  $i = 6$

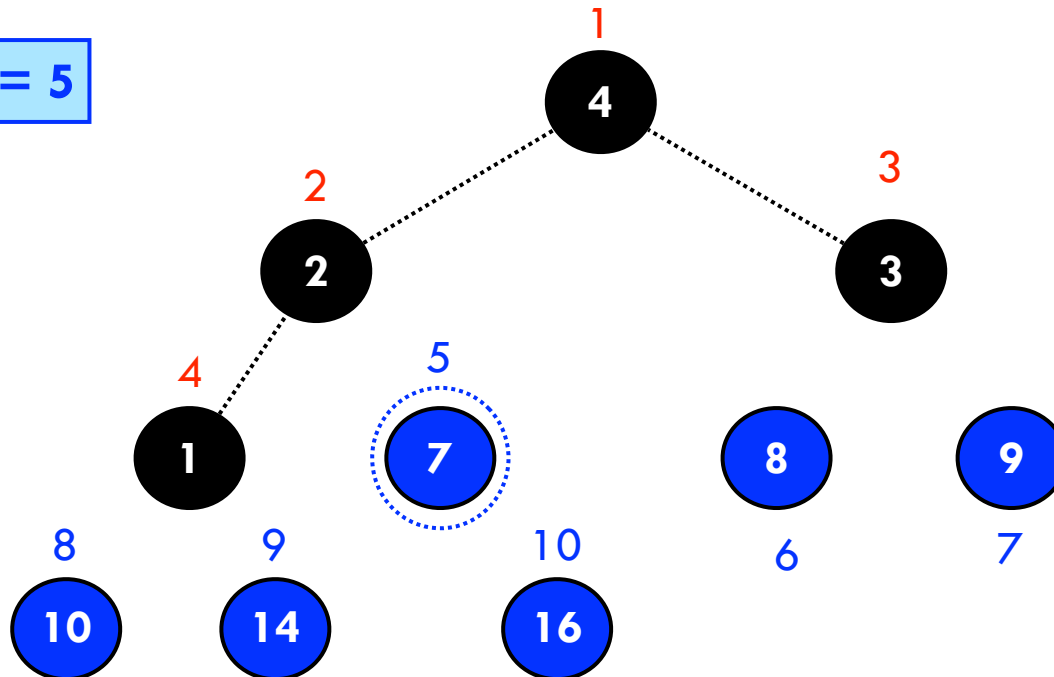


# HEAP SORT

V =

|   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 4 | 2 | 3 | 1 | 7 | 8 | 9 | 10 | 14 | 16 |

□ iteração  $i = 5$

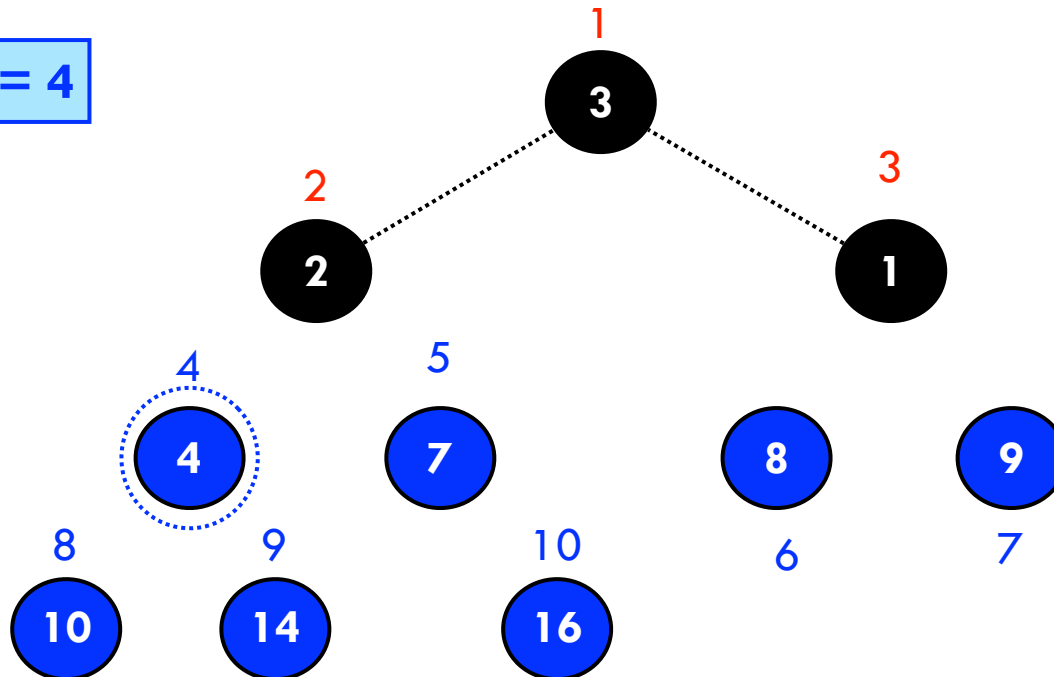


# HEAP SORT

V =

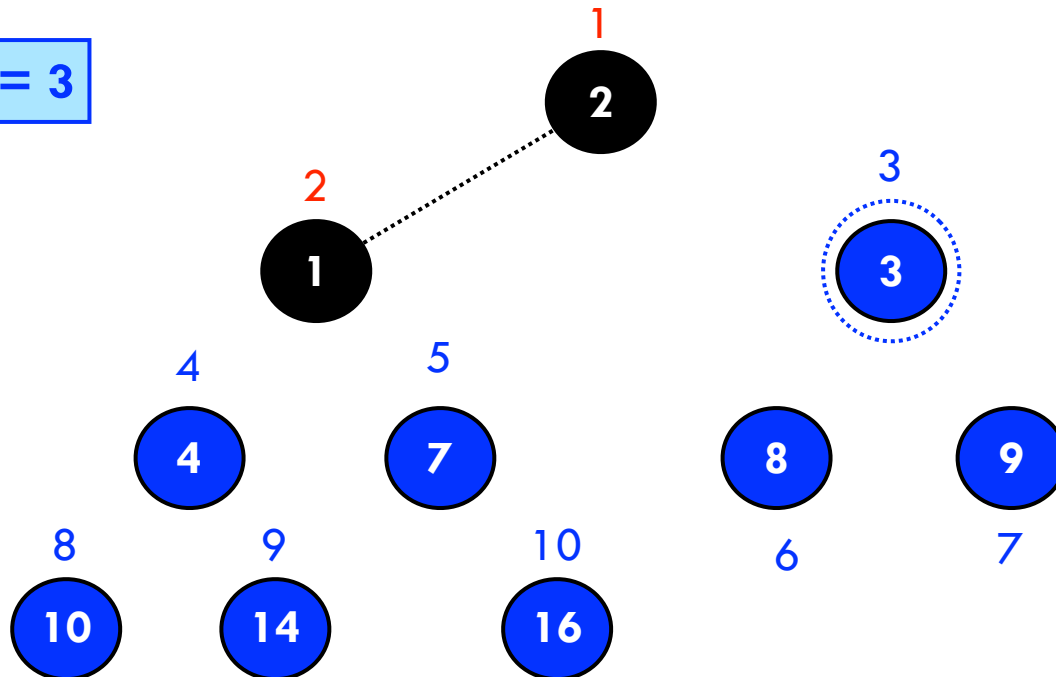
|   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 3 | 2 | 1 | 4 | 7 | 8 | 9 | 10 | 14 | 16 |

□ iteração  $i = 4$



|     | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| v = | 2 | 1 | 3 | 4 | 7 | 8 | 9 | 10 | 14 | 16 |

□ iteração  $i = 3$

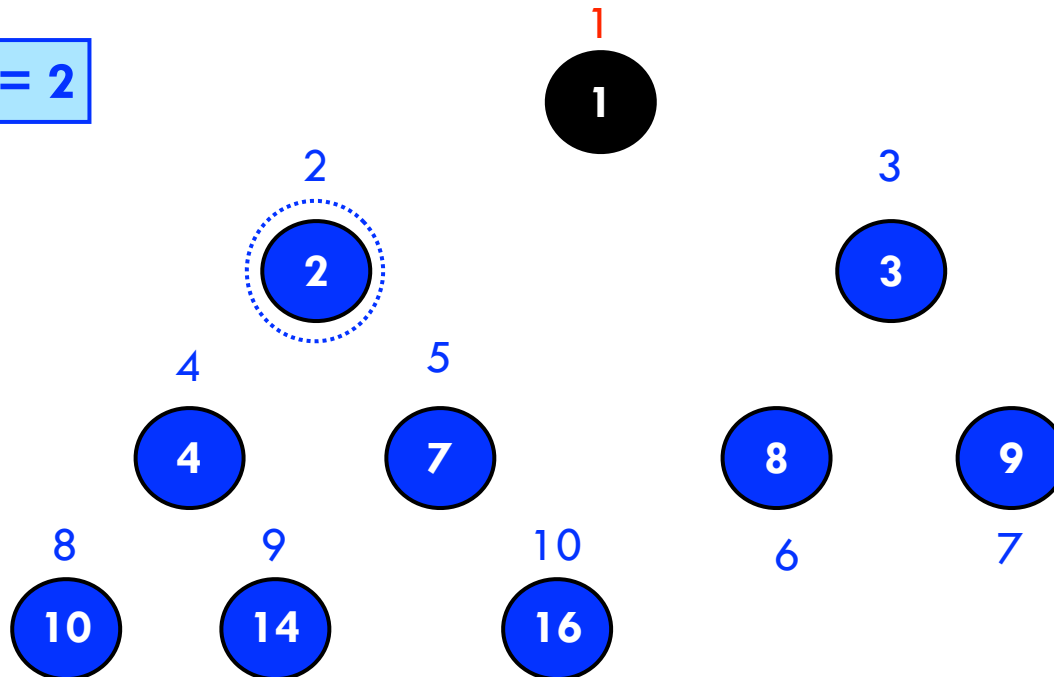


# HEAP SORT

V =

|   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 7 | 8 | 9 | 10 | 14 | 16 |

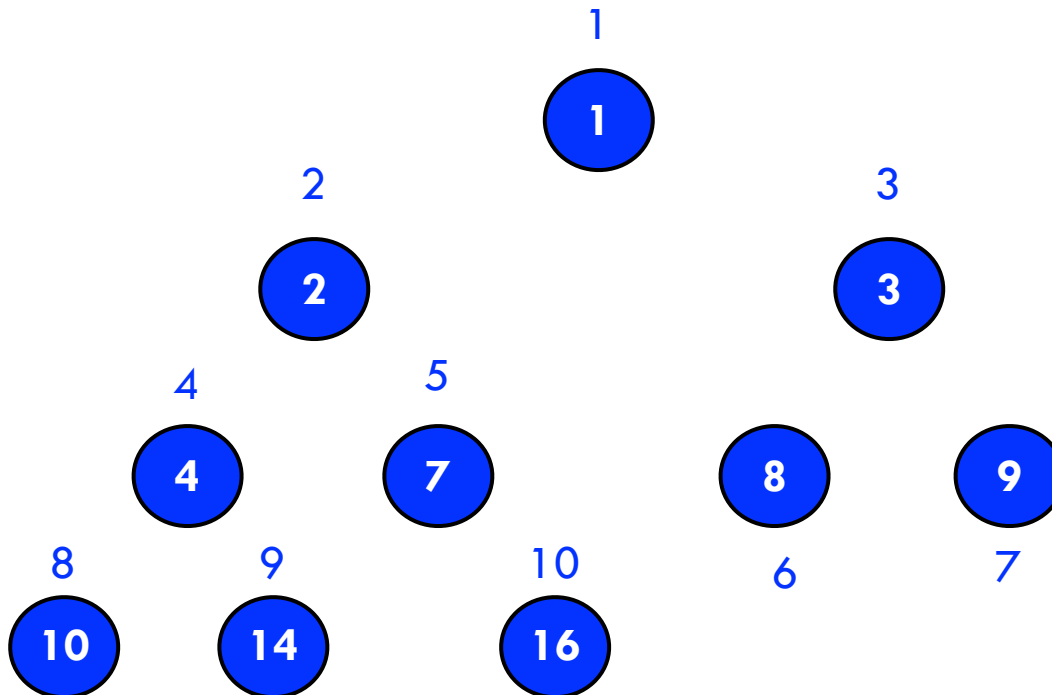
□ iteração  $i = 2$



# HEAP SORT

V =

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 7 | 8 | 9 | 10 | 14 | 16 |



# Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Heaps
- 3 Heap Sort
- 4 Exemplo
- 5 Exercícios
- 6 Referências

# Exemplo

|    |   |    |    |    |    |    |
|----|---|----|----|----|----|----|
| 23 | 4 | 67 | -8 | 90 | 54 | 21 |
|----|---|----|----|----|----|----|

**vetor não ordenado**



# Roteiro



- 1 Introdução
- 2 Heaps
- 3 Heap Sort
- 4 Exemplo
- 5 Exercícios
- 6 Referências

# Exercícios



**HANDS ON :)))**

# Exercícios

1) Reuna-se com seu grupo e execute o teste de mesa (simulação) do algoritmo para as sequências de números apresentadas

Link planilha grupos/sequências de teste:

<https://docs.google.com/spreadsheets/d/1X9IGtcZeAt7j0lIR1W3JPupl2wCtPQgybH0KZm8j-iE/edit?usp=sharing>

# Exercícios

2) Implemente o **heapSort** em C considerando as seguintes funções

```
/* função principal */
```

```
void heapSort(int *v, int N);
```

```
/* constrói heap de máximo a partir do vetor */
```

```
void buildMaxHeap(int *v, int N);
```

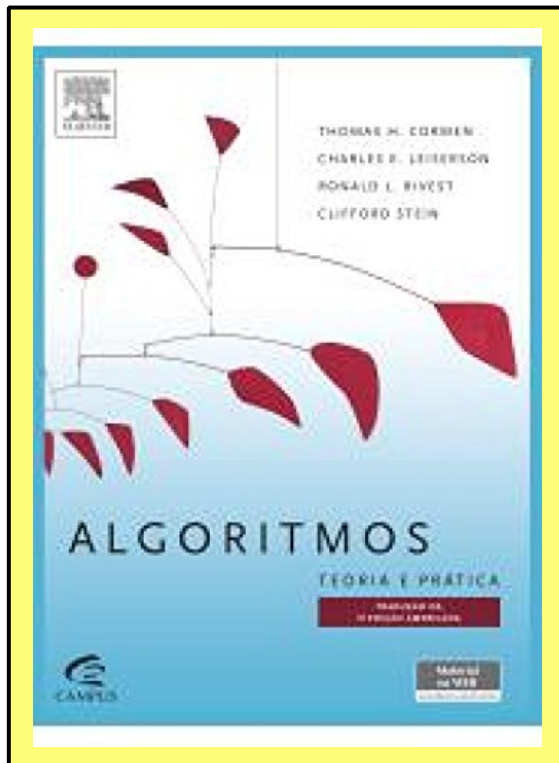
```
/* reconstrói o heap, desconsiderando o elemento já ordenado */
```

```
void maxHeapify(int *v, int i, int heapsize);
```

# Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Heaps
- 3 Heap Sort
- 4 Exemplo
- 5 Exercícios
- 6 Referências

# Referências sugeridas

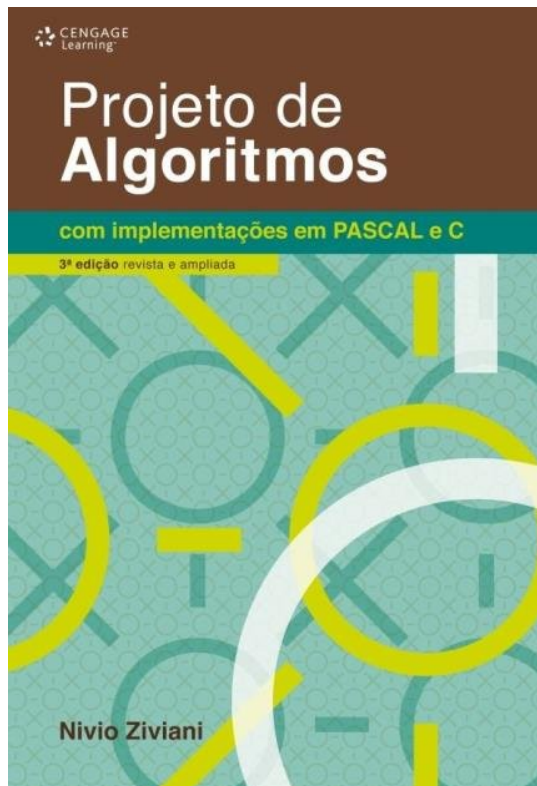


[Cormen et al, 2018]

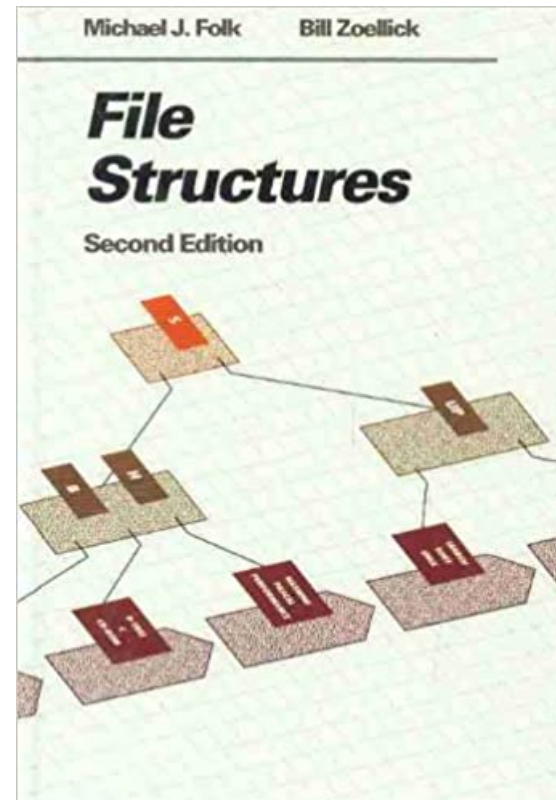


[Drozdek, 2017]

# Referências sugeridas



[Ziviani, 2010]



[Folk & Zoellick, 1992]

# Perguntas?

Prof. Rafael G. **Mantovani**

[rafaelmantovani@utfpr.edu.br](mailto:rafaelmantovani@utfpr.edu.br)