Universidade do Minho
Dep. Matemática e Aplicações

Geometria

Licenciatura em Ciências da Computação
02/05/2020
Segundo Teste

Todas as respostas devem ser justificadas e os cálculos devem ser apresentados.

1. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano tridimensional munido de referencial ortonormado. Considere as reta r e s definidas por

$$r = A + \langle\, \overrightarrow{v}\, \rangle = (1,0,1) + \langle\, (3,1,-1)\, \rangle \quad \text{e} \quad s = B + \langle\, \overrightarrow{w}\, \rangle = (2,-1,0) + \langle\, (0,-1,1)\, \rangle.$$

   (a) Verifique que r e s são enviesadas.

   (b) Apresente uma equação do plano π paralelo a r e a s e incidente em $P = (1,0,0)$.

   (c) Apresente uma equação da reta t perpendicular a r e a s e incidente em $P = (1,0,0)$.

a. r e s são enviesadas se e só se $\dim(r+s) = 3$

Para mostrar que tal acontece basta mostrar que $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \neq 0$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,-1,0) - (1,0,1) = (1,-1,-1)$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3(-1-1) = 6 \neq 0$$

b. Se r e s são paralelas a π então $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores diretores de π.

Logo: $\pi = P + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = (1,0,0) + \langle (3,1,-1), (0,-1,1) \rangle$.

c. $$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{e_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \overrightarrow{e_2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \overrightarrow{e_3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (0,-3,-3)$$

$t = P + \langle \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \rangle = (1,0,0) + \langle (0,-3,-3) \rangle = (1,0,0) + \langle (0,1,1) \rangle$.

2. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano tridimensional munido de referencial ortonormado. Considere a reta r definida pela equação vetorial

$$r = A + \langle \overrightarrow{v} \rangle = (1,2,1) + \langle (1,0,1) \rangle.$$

Considere também o plano π definido pela equação cartesiana

$$\pi : x + y + z + 1 = 0.$$

(a) Determine um sistema de equações cartesianas da reta r.

(b) Determine uma equação vetorial do plano π.

(c) Calcule a distância entre a reta r e o plano π.

a. $r: (x,y,z) = (1,2,1) + \lambda(1,0,1), \ \lambda \in \mathbb{R}.$

$$\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2 \\ z = 1+\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2 \end{cases}$$

Sistema de equações cartesianas de r.

b. $\pi: x+y+z+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -1-x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -1-\alpha-\beta \end{cases} \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (x,y,z) = (0,0,-1) + \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,-1), \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\pi = (0,0,-1) + \langle (1,0,-1),(0,1,-1) \rangle$ equação vetorial de π.

c. Verificamos se r é paralela a π

$\overrightarrow{n} = (1,1,1)$ é vetor normal a π, $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 2 \neq 0$, logo $\overrightarrow{v}$ não é vetor diretor de π.

Como r não é paralela a π então $r \cap \pi \neq \emptyset$

Logo $d(r,\pi) = 0$.

3. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano de dimensão 4 munido de referencial ortonormado. Considere o espaço afim $\mathcal{L}$ definido pelo sistema de equações cartesianas

$$\mathcal{L}: \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ y-z+t &= 1 \end{cases}$$

Determine a projeção ortogonal de $P=(1,-1,0,-1)$ em $\mathcal{L}$.

Começamos por determinar uma equação vetorial de $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{L}: \begin{cases} x+y-z=0 \\ y-z+t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z-y \\ y = 1+z-t \\ z=\alpha \\ t=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha-(1+\alpha-\beta) = -1+\beta \\ y = 1+\alpha-\beta \\ z=\alpha \\ t=\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x,y,z,t) = (-1,1,0,0)+\alpha(0,1,1,0)+\beta(1,-1,0,1)$$

$$\mathcal{L} = (-1,1,0,0) + \langle (0,1,1,0),(1,-1,0,1)\rangle := A + \langle \vec{v},\vec{w}\rangle$$

Seja Q a projeção ortogonal de P em $\mathcal{L}$.

Temos $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP}$. $\qquad \overrightarrow{AP} = P-A = (2,-2,0,-1)$

Como $A, Q \in \mathcal{L}$ então $\overrightarrow{AQ} = \lambda\vec{v} + \rho\vec{w}$

Além disso $\overrightarrow{QP} \in \langle \vec{v},\vec{w}\rangle^{\perp}$ pois $Q = \text{proj}_{\mathcal{L}}(P)$.

De $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QP}$ fazendo o produto escalar com $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vem:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP}\cdot\vec{v} = \lambda\,\vec{v}\cdot\vec{v} + \rho\,\vec{w}\cdot\vec{v} \\ \overrightarrow{AP}\cdot\vec{w} = \lambda\,\vec{v}\cdot\vec{w} + \rho\,\vec{w}\cdot\vec{w} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 2\lambda-\rho \\ 3 = -\lambda+3\rho \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 2\lambda+2 \\ \lambda = 3(2\lambda+2)-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ \lambda = 6\lambda+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 4/5 \\ \lambda = -3/5 \end{cases}$$

$$Q = A+\lambda\vec{v}+\rho\vec{w} = (-1,1,0,0) - \frac{3}{5}(0,1,1,0) + \frac{4}{5}(1,-1,0,1) = \left(-\frac{1}{5},-\frac{2}{5},-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right).$$