Universidade do Minho

Departamento de Matemática

Geometria

Licenciatura em Ciências da Computação

03/06/2020

Quarto Teste

Todas as respostas devem ser justificadas e os cálculos devem ser apresentados.

---

1. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano tridimensional munido de referencial ortonormado. Considere o vetor $\overrightarrow{v} = (1,0,1)$ e o ângulo $\theta = \pi$.

   (a) Apresente a expressão matricial da rotação de ângulo θ em torno do eixo centrado na origem e dirigido por $\overrightarrow{v}$.

   (b) Escolhendo um vetor $\overrightarrow{w}$ conveniente, apresente a expressão analítica da rotação deslizante (ou *twist*) de ângulo θ em torno do eixo centrado na origem e dirigido por $\overrightarrow{v}$ segundo o vetor $\overrightarrow{w}$.

a Como o vetor $\vec{v}$ não é unitário, consideramos $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Seja $M \in A$, e ρ a rotação pretendida.

$$\rho(M) = O + (\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} + \cos\theta\,(\vec{OM} - (\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u}) + \operatorname{sen}\theta\,(\vec{u}\times\vec{OM}).$$

Como $\theta = \pi$, $\cos\theta = -1$ e $\operatorname{sen}\theta = 0$ logo:

$$\rho(M) = O + (\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} - (\vec{OM} - (\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u}) = 2(\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} - M$$

Fazendo $M = (x,y,z)$, temos:

$$\vec{OM}\cdot\vec{u} = \frac{x+z}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} = \left(\frac{x+z}{2}, 0, \frac{x+z}{2}\right)$$

Logo: $\rho(x,y,z) = 2\left(\frac{x+z}{2}, 0, \frac{x+z}{2}\right) - (x,y,z) = (z,-y,x)$.

Representação matricial:
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

b. Um vetor $\vec{w}$ conveniente será qualquer vetor paralelo a $\vec{v}$, pelo que podemos tomar, por exemplo, $\vec{w} = \vec{v}$.

Sendo $\bar{\rho}$ a reflexão deslizante pretendida então:

$$\bar{\rho}(M) = \rho(M) + \vec{v} \Rightarrow \bar{\rho}(x, y, z) = (z+1, -y, x+1).$$

2. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de referencial ortonormado.

   Considere $r = 4$, $\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

   (a) Apresente a transvecção de fator r centrada na origem segundo $\overrightarrow{e_1}$.

   (b) Apresente a transvecção de fator r centrada na origem segundo $\overrightarrow{v}$.

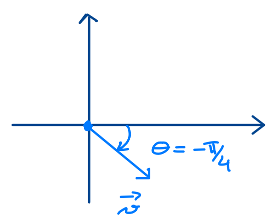
   (c) Apresente a transvecção de fator r centrada em $A = (0, 1)$ segundo $\overrightarrow{v}$.

a. Por definição, tal transvecção tem representação matricial dada por:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

b. O ângulo orientado $\measuredangle(\vec{e_1}, \vec{v}) = -\pi/4$

logo a transvecção pretendida tem representação matricial dada por:



$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{\text{Rotação de ângulo } -\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{\text{Rotação de ângulo } \pi/4} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ou seja: $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Sendo σ a transvecção pretendida, temos: $\sigma(x,y) = (3x+2y, -2x-y)$.

c. Seja $\bar{\sigma}$ a transvecção pretendida, então:

$$\bar{\sigma} = t_{\overrightarrow{OA}} \circ \sigma \circ t_{-\overrightarrow{OA}}$$

Logo: $\bar{\sigma}(x,y) = (0,1) + \sigma(x, y-1) =$

$= (0,1) + (3x + 2(y-1), -2x - (y-1)) =$

$= (3x+2y-2, -2x-y+2)$

ou em representação matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

3. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano tridimensional munido de referencial ortonormado.
   Seja $\Omega = (1,1,1)$ e σ o plano de equação cartesiana $x + z = 0$.

   (a) Determine a expressão analítica da projeção perspectiva desde Ω no plano σ.

   (b) Indique, justificando, qual é o plano excecional da projeção da alínea anterior.

a Seja p a projeção perspectiva pedida, então $p(M) = r_M \cap \sigma$ onde r_M é a reta que incide em Ω e em M.

Como $p(M) \in r_M$ então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $p(M) = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M}$

Fazendo $M = (x,y,z)$, temos: $p(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(x-1, y-1, z-1)$.

Mas como $p(r) \in \sigma$ então $p(r)$ satisfaz a equação cartesiana de σ, logo:

$$1 + \lambda(x-1) + 1 + \lambda(z-1) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-2}{x+z-2}.$$

Portanto: $$p(x,y,z) = (1,1,1) - \frac{2}{x+z-2}(x-1, y-1, z-1) =$$

$$= \left(\frac{-x+z}{x+z-2}, \frac{x-2y+z}{x+z-2}, \frac{x-z}{x+z-2} \right).$$

b. O plano excecional desta projecção perspectiva é o plano paralelo a σ que incide em Ω que é o plano onde p não está definida, ou seja, trata-se do plano de equação cartesiana: $x+z=2$.