Universidade do Minho | 2016/2017
Departamento de Matemática e Aplicações | LCC

Análise
Exame de recurso — 29 de junho de 2017 — Duração: 2h30m

1. [1.5 valores] Considere a função real definida por
$$f(x,y)=\frac{\ln(x^2+y^2-9)}{y^2-4}.$$
   (a) Descreva e esboce graficamente o domínio de f.
   (b) Determine os pontos que pertencem à curva de nível definida por $f(x,y)=0$.

2. [1.5 valores] Considere a função função f definida por $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^4-y^3}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

   Justifique que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ e que a função é contínua apenas para $(x,y)\neq(0,0)$.

3. [2 valores] Uma função f de duas variáveis diz-se *homogénea de grau* n, para n inteiro positivo, se $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$, para todo o valor de t.
   (a) Verifique que $f(x,y)=x^2y+2xy^2+5y^3$ é uma função homogénea de grau $n=3$.
   (b) Para a função da alínea anterior, verifique também que
$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=n(n-1)f(x,y).$$

4. [2.5 valores] Suponha que a temperatura T no ponto (x,y) de uma certa região do plano é dada por
$$T(x,y)=100\,x^2\,\mathrm{e}^{-y}\,.$$
   (a) Determine a taxa de variação de T no ponto $P=(1,0)$ na direcção do vetor $\vec{v}=(2,1)$.
   (b) Qual a direção segundo a qual a temperatura diminui mais rapidamente em P? Qual o valor da taxa de decrescimento nessa direção?

5. [2.5 valores] Considere a função $f\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y)=x^3-3xy+y^3.$$
   (a) Verifique que $(0,0)$ e $(1,1)$ são pontos críticos de f.
   (b) Classifique os pontos críticos dados na alínea anterior como pontos de máximo local, mínimo local ou pontos de sela.

6. [2.5 valores] Considere o integral
$$I=\int_0^1\int_{x^3}^{x+1} x\,dy\,dx.$$
   (a) Esboce a região de integração de I.
   (b) Calcule o valor de I.
   (c) Invertendo a ordem de integração, escreva I como a soma de dois integrais duplos.

(Continua)

7. [3 valores] Considere o integral

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{1} \left(x^2+y^2\right)^2 \, dz \, dy \, dx.$$

(a) Escreva o integral apresentado mudando para coordenadas cilíndricas. Observe que a projeção da região de integração no plano xOy é um quarto de um círculo.

(b) Calcule o valor do integral usando (a).

Caso não tenha respondido à alínea (a), calcule $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{z} \int_0^{x^2+z^2} z \, dy \, dx \, dz.$

8. [2.5 valores] Considere o movimento de uma partícula ao longo de uma trajetória parametrizada por $\mathbf{r}(t) = \left(\sqrt{2}t, \mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}\right), \ t \geq 0$.

(a) Verifique que $\|\mathbf{r}'(t)\| = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}$.

(b) Calcule o comprimento da curva percorrida entre os instantes $t = 0$ e $t = 1$.

(c) Determine as equações da reta tangente e do plano normal à curva na posição inicial.

9. [2 valores] Considere o operador de Laplace ∇^2 definido por

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

onde f é uma função escalar definida num subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

(a) Verifique que para f dada por $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$, se tem $\nabla^2 f = 0$.

(b) Mostre que sendo f e g duas funções escalares definidas em $\mathbb{R}^3$, se tem

$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\left(\overrightarrow{\nabla} f \cdot \overrightarrow{\nabla} g\right).$$