Exercício 61: (i) Calcule a distribuição de $Y = Z^2$ no caso $Z \frown N(0,1)$.
(ii) Por meio de simulação, tente descobrir qual a distribuição da soma de duas v.a.'s independentes Y_1 e Y_2 (sendo $Y_i = Z_i^{\,2}$).

Resolução: (i) Representa-se usualmente a fd [fdp] de Z pela letra Φ [ϕ].
Para $y > 0$ temos

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = (Z^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le Z \le \sqrt{y}) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y})$$

donde

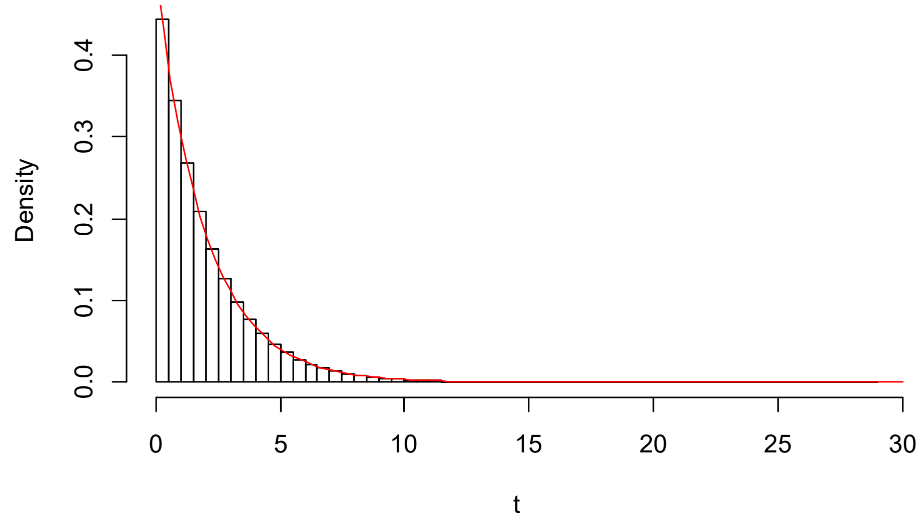
$$f_Y(y) = \tfrac{d}{dy} F_Y(y) = \tfrac{d}{dy}\Phi(\sqrt{y}) - \tfrac{d}{dy}\Phi(-\sqrt{y}) = \phi(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + \phi(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} =$$

$$= \phi(\sqrt{y})\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-y/2}, \quad y > 0$$

Exercício 61: (ii) Por meio de simulação, tente descobrir qual a distribuição da soma de duas v.a.'s independentes Y_1 e Y_2 , com a mesma distribuição de $Y = Z^2$ (diz-se que Y_1 e Y_2 são independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com Y).

Resolução: (ii)

```
# simular 2 amostras de 10^6 valores N(0,1)
x <- rnorm(10^6)
y <- rnorm(10^6)
# amostra da soma dos seus quadrados
t <- x^2 + y^2
# histograma de área unitária:
hist(t,50,freq=F, main="")
# parece uma fdp exponencial com f(0)≈0.5
# sobrepor gráfico da fdp Exp(1/2)
curve(dexp(x,1/2),0,30,add=T,col=2)
# ou o histograma num único comando:
hist(rnorm(10^6)^2+rnorm(10^6)^2,50,freq=F,main="",xlab="t",ylab="freq / fdp")
```



Exercício 64 (cont. do exº 61):

(i) Mostre que a lei de $Y = Z^2$, com $Z \frown N(0,1)$, é uma Gama(1/2, 1/2).

(ii) A partir deste resultado, prove que a soma $Y_1 + Y_2$ (i.e., a soma de duas v.a.'s independentes Y_1 e Y_2 , sendo $Y_i = Z_i{}^2$) tem de facto distribuição Exp(1/2)

Resolução: (i) A fdp obtida foi $$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2}, \quad y > 0$$

Ora a fdp da Gama(α, λ) é dada por $$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

Note-se que $$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y}, \quad y > 0$$

que é a fdp de uma Gama(α, λ) com $\alpha = 1/2$, $\lambda = 1/2$

Exercício 64 (cont. do exº 61):

(i) Mostre que a lei de $Y = Z^2$, com $Z \frown N(0,1)$, é uma Gama(1/2, 1/2).

(ii) A partir deste resultado, prove que a soma $Y_1 + Y_2$ (i.e., a soma de duas v.a.'s independentes Y_1 e Y_2 , sendo $Y_i = Z_i^{\,2}$) tem de facto distribuição Exp(1/2)

Resolução: (ii) Como a transf. Laplace da soma de v.a. independentes é o produto das respectivas transf. Laplace, temos

$$L_{Y_1+Y_2}(t) = L_{Y_1}(t)\, L_{Y_2}(t) = \left(L_Y(t)\right)^2$$

Ora a transf. Laplace de $X \frown$ Gama(α, λ) é dada por $L_X(t) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda + t}\right)^{\alpha}, \; t > -\lambda$

Logo $L_Y(t) = \left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + t}\right)^{1/2}, \; t > -\lambda$ donde $L_{Y_1+Y_2}(t) = \left(L_Y(t)\right)^2 = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + t}, \; t > -\lambda$

que é a tranf. Laplace da Exp(1/2). Logo $Y_1 + Y_2 \frown$ Exp (1/2).

Exercício 63:

Calcule os momentos $E(X^n)$ no caso $X \frown$ Gama(α, λ) , usando a transf. Laplace

Resolução: Temos a fórmula geral (desde que exista t.Laplace) $E(X^n) = (-1)^n L_X^{(n)}(0)$

Ora a transf. Laplace de $X \frown$ Gama(α, λ) é dada por $L(t) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda + t}\right)^{\alpha}, \; t > -\lambda$

Então $L'(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda + t}\right)^{\alpha} = \lambda^{\alpha} \dfrac{d}{dt}(\lambda + t)^{-\alpha} = \lambda^{\alpha}(-\alpha)(\lambda + t)^{-\alpha-1}, \; t > -\lambda,$

donde $\mu = E(X) = -L'(0) = -\lambda^{\alpha}(-\alpha)(\lambda)^{-\alpha-1} = \dfrac{\alpha}{\lambda}$

Resolução (cont.):

$$L''(t) = \frac{d}{dt}\lambda^{\alpha}(-\alpha)(\lambda+t)^{-\alpha-1} = \lambda^{\alpha}(-\alpha)(-\alpha-1)(\lambda+t)^{-\alpha-2}, \quad t > -\lambda,$$

donde $\mu'_2 = E(X^2) = L''(0) = \lambda^{\alpha}(-\alpha)(-\alpha-1)(\lambda)^{-\alpha-2} = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$

$$L'''(t) = \frac{d}{dt}\lambda^{\alpha}(-\alpha)(-\alpha-1)(\lambda+t)^{-\alpha-2} = \lambda^{\alpha}(-\alpha)(-\alpha-1)(-\alpha-2)(\lambda+t)^{-\alpha-3}, \quad t > -\lambda,$$

donde $\mu'_3 = (X^3) = -L'''(0) = -\lambda^{\alpha}(-\alpha)(-\alpha-1)(-\alpha-2)(\lambda)^{-\alpha-3} = \dfrac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3}$

Generalizando, temos $\boxed{E(X^n) = \dfrac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}{\lambda^n} = \dfrac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\,\lambda^n}}$

porque $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$

Resolução (cont.):

Adicionalmente, calculamos (i) a variância e desvio padrão de X, recorrendo aos cálculos anteriores dos momentos de ordem 1 e 2, como segue

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2} \qquad \text{donde} \quad \sigma = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}$$

(ii) o coeficiente de assimetria de X,

$$\beta_1 = E\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right) = \frac{1}{\sigma^3}E((X-\mu)^3) = \frac{1}{\sigma^3}E(X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3) =$$

$$= \frac{\lambda^3}{\alpha^{3/2}}\left(\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3} - 3\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}\frac{\alpha}{\lambda} + 3\frac{\alpha}{\lambda}\frac{\alpha^2}{\lambda^2} - \frac{\alpha^3}{\lambda^3}\right) = \ldots = \frac{2\alpha}{\alpha^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$