Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Licenciatura em Ciências da Computação

Análise

folha de exercícios 1 — 2017/2018

• Curvas e superfícies de nível. Gráficos de funções de duas variáveis

1. Para cada função f definida nas alíneas seguintes, determine o domínio e o valor de f nos pontos indicados. Faça um esboço gráfico do domínio de f.

(a) $f(x,y) = 2x - y^2, \quad (-2,5),\ (0,-2);$

(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{2x - y^2}, \quad (-2,1),\ (-1,0);$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, \quad (2,1),\ (-1,-1);$

(d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x - 2y}, \quad (2,3),\ (-1,4);$

(e) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}, \quad (2,0),\ (-1,2);$

(f) $f(x,y) = \ln(x^2 + y), \quad (1,0),\ (0,1);$

(g) $f(x,y) = \dfrac{y}{\ln(x^2 - y)}, \quad (0,-e),\ (e,0);$

(h) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2} - \sqrt{y^2 - 4}, \quad (1,2),\ (-1,3);$

(i) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}, \quad (3,1),\ (-1,-3);$

(j) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}, \quad (2,1),\ (2,-1).$

2. Considere a função definida por $f(x,y) = \dfrac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}$.

(a) Determine o domínio de f.

(b) Calcule o valor que f assume nos pontos da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$.

3. Esboce pelo menos 4 curvas de nível, para cada uma das funções $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

(a) $f(x,y) = x + y;$

(b) $f(x,y) = 3x + 3y;$

(c) $f(x,y) = x^2 + y^2;$

(d) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2;$

(e) $f(x,y) = xy;$

(f) $f(x,y) = y - x^2.$

4. Esboce algumas curvas de nível e os gráficos das funções $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

(a) $f(x,y) = x - y + 2;$

(b) $f(x,y) = x^2 + 4y^2;$

(c) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2};$

(d) $f(x,y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}.$

5. Esboce o gráfico das superfícies seguintes:

(a) $z = 3;$

(b) $x^2 + y^2 + z^2 = 9;$

(c) $z = x^2 + y^2 + 4;$

(d) $z = 5 - x^2 - y^2;$

(e) $z = y^2;$

(f) $2x + 4y + 3z = 12;$

(g) $x^2 + y^2 = 4;$

(h) $x^2 + z^2 = 4.$

6. Considere o gráfico da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y^2$. Descreva, por palavras, os gráficos das funções definidas por:

(a) $g(x,y) = x^2 + y^2 + 3;$

(b) $h(x,y) = 5 - x^2 - y^2;$

(c) $k(x,y) = x^2 + (y-1)^2.$

7. Faça um esboço gráfico do domínio de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2};$

(b) $f(x,y,z) = -\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 25}\,.$

8. Descreva as superfícies de nível associadas a cada uma das funções:

(a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2;$

(b) $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2;$

(c) $f(x,y,z) = x + 2y + 3z;$

(d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2.$

- **Limite e continuidade**

9. Calcule o limite das seguintes funções quando (x, y) tende para $(0,0)$ segundo as rectas $y = 0$, $x = 0$ e $y = mx$, com $m \neq 0$.

(a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

(e) $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$

(f) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^4}{(x^2+y^4)^2}$

Diga, justificando, se existe limite destas funções quando (x, y) tende para $(0,0)$.

10. Determine, caso existam, os limites seguintes.

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (2x - y^2)$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} y \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-2}{3+xy}$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}{x^2+y^2}$

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}$

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-2xy+5y^2}{3x^2+4y^2}$

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x^2y}{x^3+y^3}$

(h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x-y}{x^2-y^2}$

(j) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{3xy}{(x-1)^2+(y-2)^2}$

(k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{yx^4}{1+x^4}$

(l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^3+y) \operatorname{sen} \dfrac{1}{y+x}$

11. Determine o valor da constante k de modo que a função

$$g(x,y) = \begin{cases} \cos(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ k & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

seja contínua em $(x, y) = (0,0)$.

12. Estude a continuidade na origem das funções seguintes.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \neq x \\ 0 & \text{se } y = x \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} (x+y) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

13. Discuta a continuidade das funções apresentadas a seguir.

(a) $f(x,y,z) = x^2y + x^3y^2 + z$

(b) $f(x,y) = \ln(x+y-1)$

(c) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{5x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{se } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{2x^2+3y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$