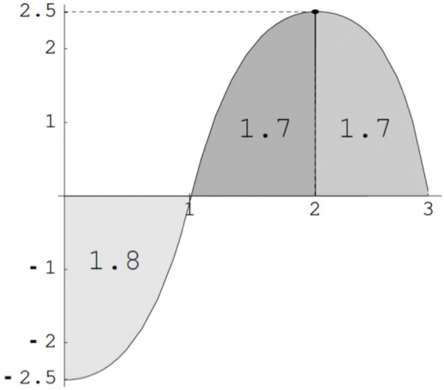
Aula 21

5 Janeiro

Exercício: Na figura estão assinaladas três regiões limitadas entre o gráfico de uma função $f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável, e o eixo das abcissas, que correspondem às abcissas dos intervalos $[0,1]$, $[1,2]$ e $[2,3]$, respetivamente. A área de cada uma destas regiões vem inscrita no seu interior.



Nestas condições, considere a função $F : [-4,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_1^{\frac{4+x}{3}} f(t)\,dt$.

a) Preencha a tabela, determinando os correspondentes valores de $F(x)$:

x	-4	-1	2	5
$F(x)$	1,8	0	1,7	3,4

b) Determine expressões para $F'(x)$ e $F''(x)$.

c) Represente F graficamente.

a) $$F(-4) = \int_1^0 f(t)\,dt = -\int_0^1 f(t)\,dt = -(-1{,}8) = 1{,}8$$

$$F(-1) = \int_1^1 f(t)\,dt = 0$$

$$F(2) = \int_1^2 f(t)\,dt = 1{,}7$$

$$F(5) = \int_1^3 f(t)\,dt = 1{,}7 + 1{,}7 = 3{,}4$$

b) Como f é contínua, pelo Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo, F é derivável e

$$F'(x) = f\left(\frac{4+x}{3}\right)\left(\frac{4+x}{3}\right)' = \frac{1}{3} f\left(\frac{4+x}{3}\right)$$

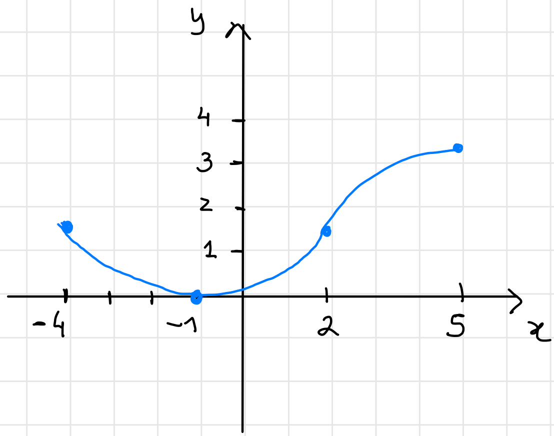
Derivando F' obtemos

$$F''(x) = \left(\frac{1}{3} f\left(\frac{4+x}{3}\right)\right)' = \frac{1}{3}\left(f\left(\frac{4+x}{3}\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{3} f'\left(\frac{4+x}{3}\right)\left(\frac{4+x}{3}\right)'$$

$$= \frac{1}{9} f'\left(\frac{4+x}{3}\right)$$

c)



Temos que:

- $0 < \frac{4+x}{3} < 1 \Rightarrow 0 < 4+x < 3 \Rightarrow -4 < x < -1 \rightarrow f'(x) < 0$

  $f''(x) > 0$

- $1 < \frac{4+x}{3} < 2 \Rightarrow 3 < 4+x < 6 \Rightarrow -1 < x < 2 \rightarrow f'(x) > 0$

  $f''(x) > 0$

- $2 < \frac{4+x}{3} < 3 \Rightarrow 6 < 4+x < 9 \Rightarrow 2 < x < 5 \rightarrow f'(x) > 0$

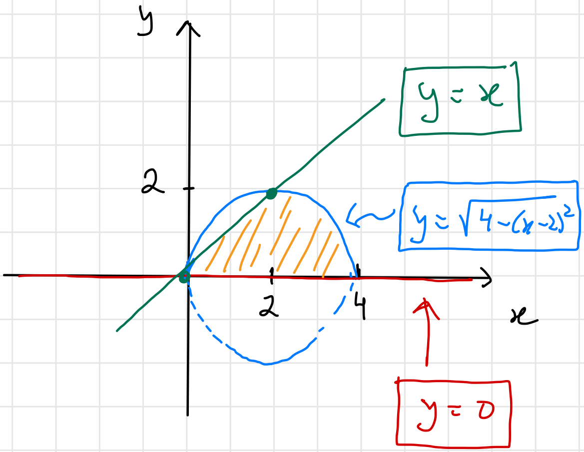
  $f''(x) < 0$

	-4 -1	-1 2	2 5
$f'(x)$	$- \searrow$	$+ \nearrow$	$+ \nearrow$
$f''(x)$	$+ \cup$	$+ \cup$	$- \cap$

Exercício 2. Estabeleça um integral (ou soma de integrais) que dê a área da região

$$\mathcal{R}_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ 0 \leq y \leq x\}$$

$(x-2)^2+y^2=4$ $\qquad$ $y=0$ $\qquad$ $y=x$



$(x-2)^2+y^2=4 \iff$

$\iff y^2 = 4-(x-2)^2$

$\iff y = \pm\sqrt{4-(x-2)^2}$

$$\text{Área}(\mathcal{R}_5) = \int_0^2 (x-0)\,dx + \int_2^4 \left(\sqrt{4-(x-2)^2} - 0\right) dx$$