Universidade do Minho | 2016/2017
Departamento de Matemática e Aplicações | LCC

Análise
Teste 2 | Duração: 1h30m | Tolerância: 15 minutos | 8 de junho de 2017

1. [2.5 valores] Considere a função f definida por $f(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x^2y + 4$.

   Verifique que $(1,-1)$ e $(-1,-1)$ são pontos de sela e que $(0,0)$ é minimizante local.

2. [2 valores] Use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar o mínimo da função $f(x,y,z) = x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2$ sujeita à restrição $x + y - z = 4$.

   Como resolveria o problema usando o método de redução de dimensão?

3. [3.5 valores] Seja, para uma dada função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$I = \int_{-2}^{0}\int_{-\frac{x}{2}}^{1} f(x,y)\,dy\,dx \;+ \int_{0}^{1}\int_{x^2}^{1} f(x,y)\,dy\,dx\,.$$

   (a) Esboce, num mesmo gráfico, os domínio de integração dos dois integrais.
   (b) Invertendo a ordem de integração, escreva I sob a forma de um único integral.
   (c) Que interpretação geométrica pode ser dada ao valor do integral I quando $f(x,y) \geq 0$?
   (d) Calcule o valor de I para $f(x,y) = 2xy$.

4. [2.5 valores] Considere a região do plano definida por

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq x, \quad y \geq 0\big\}.$$

   (a) Esboce a região D e descreva-a usando coordenadas polares.
   (b) Calcule $\displaystyle\iint_D \cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

5. [2.5 valores] Considere o integral $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{x^2+y^2} y\;dz\,dy\,dx.$

   (a) Escreva o integral apresentado mudando para coordenadas cilíndricas. Observe que a projeção da região de integração no plano xOy é um semicírculo.
   (b) Calcule o valor do integral usando (a).

   Caso não tenha respondido à alínea (a), calcule $\int_0^2\int_0^y\int_0^{x^2+y^2} y\;dz\,dx\,dy$.

6. [1.5 valores] Calcule, usando coordenadas esféricas, $\displaystyle\iiint_E 1\;dx\,dy\,dz$ onde E é a semiesfera definida pelas inequações $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ e $z \geq 0$.

7. [4 valores] Seja $\mathcal{C}$ a curva parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 3t+1),\ t \geq 0$, descrevendo o movimento de uma partícula no espaço.

   (a) Calcule a velocidade e aceleração iniciais da partícula.
   (b) Verifique que a curvatura de $\mathcal{C}$ é constante.
   (c) Calcule os vetores tangente, normal e binormal em cada instante t.
   (d) Determine a equação do plano osculador a $\mathcal{C}$ no ponto $(1,0,1)$.

8. [1.5 valores] Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e considere a curva em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $\mathbf{r}(t) = \big(1 + \operatorname{sen} t, \cos t, f(t)\big),\ t \in \mathbb{R}$. Para que funções f está a curva parametrizada por comprimento de arco? Nesse caso qual o comprimento da curva para $t \in [2,5]$?