Aula 14

19 Novembro

Primitivação por partes

Teorema:

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções de classe C^1. Então é válida a seguinte

fórmula de primitivação por partes

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Dem. Sabemos que $(fg)' = f'g + f \cdot g'$

Atendendo a que existem as primitivas de $f'g$ e fg', obtemos que:

$$\int (fg)'(x)\,dx = \int f'(x) \cdot g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

isto é,

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

uma vez que

$$\int (fg)'(x)\,dx = f(x)g(x) + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

Teorema:

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções de classe C^1. Então é válida a seguinte

fórmula de primitivação por partes

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Na prática procura-se decompor a função a primitivar num produto de dois fatores, um dos quais é necessário saber primitivar (este fator corresponde à função f', o outro à função g); o método resultará se soubermos também primitivar o produto de uma primitiva do primeiro fator (f) pela derivada (g') do segundo

Exemplos:

① $\int x \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \, x - \int (-\cos x) \, 1 \, dx$

$f'(x) = \operatorname{sen} x \qquad f(x) = -\cos x$

$g(x) = x \qquad g'(x) = 1$

$= -x\cos x + \int \cos x \, dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C, \; C \in \mathbb{R}$

② $\int x^2 e^x \, dx = e^x x^2 - \int e^x \cdot 2x \, dx = e^x x^2 - 2 \underbrace{\int x e^x \, dx}$

$f'(x) = e^x \qquad f(x) = e^x$

$g(x) = x^2 \qquad g'(x) = 2x$

$f'(x) = e^x \qquad f(x) = e^x$

$g(x) = x \qquad g'(x) = 1$

$= e^x x^2 - 2 \left[e^x x - \int e^x \, 1 \, dx \right]$

$= e^x \cdot x^2 - 2 e^x x + 2 \int e^x \, dx$

$= e^x \cdot x^2 - 2 x e^x + 2 e^x + C, \; C \in \mathbb{R}$

③ $\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$

$f'(x) = x \qquad f(x) = \frac{x^2}{2}$

$g(x) = \ln x \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$

$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx =$

$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C, \ C \in \mathbb{R}$

④ $\int \ln x \, dx = \int 1 \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx$

$f'(x) = 1 \qquad f(x) = x$

$g(x) = \ln x \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$

$= x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C, \ C \in \mathbb{R}$

⑤ $$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \underbrace{\int e^x \cos x \, dx}$$

$f'(x) = e^x \qquad f(x) = e^x \qquad\qquad f'(x) = e^x \qquad f(x) = e^x$

$g(x) = \operatorname{sen} x \qquad g'(x) = \cos x \qquad\qquad g(x) = \cos x \qquad g'(x) = -\operatorname{sen} x$

$$= e^x \operatorname{sen} x - \left[e^x \cos x - \int e^x (-\operatorname{sen} x) dx \right]$$

$$= e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

Então,

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$\Leftrightarrow \int e^x \operatorname{sen} x \, dx + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2 \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Exercícios:

(6) $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

(7) $\int \operatorname{arcsen} x \, dx$