Aula 16

26 Novembro

Primitivação de Funções Racionais

Exemplo. Calcular $\displaystyle\int \frac{2x^5-4x^4+4x^3-4x^2+3x}{\underbrace{(x^2+1)(x-1)^2}_{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}}\,dx$

Passo 1: Neste caso, grau $P=5$ e grau $Q=4$, pelo que é necessário efetuar a divisão dos dois polinómios

$$\begin{array}{r|l} 2x^5-4x^4+4x^3-4x^2+3x & x^4-2x^3+2x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} -2x^5+4x^4-4x^3+4x^2-2x & 2x \\ \cline{1-1} x & \end{array}$$

Resulta

$$\frac{2x^5-4x^4+4x^3-4x^2+3x}{(x^2+1)(x-1)^2} = 2x + \frac{x}{(x^2+1)(x-1)^2}$$

Passo 2. Vamos decompor a fração no segundo membro da última equação em frações simples

(a) Os zeros de $Q(x) = (x^2+1)(x-1)^2$ são:

- $\boxed{x=1}$, real com multiplicidade 2
- $\boxed{x=\pm i}$, par de complexos conjugados com multiplicidade 1

(b) A fração decompõe-se numa soma de três frações simples, duas delas associadas ao zero real de multiplicidade 2 e a outra associada ao par de complexos conjugados de multiplicidade 1

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{Px+Q}{x^2+1}$$

onde A_1, A_2, P e Q são constantes a determinar

c) Da última equação, reduzindo ao mesmo denominador, sai que

$$x = 0x^3 + 0x^2 + 1x + 0$$

$$\begin{aligned} x &= A_1(x^2+1) + A_2(x-1)(x^2+1) + (Px+Q)(x-1)^2 \\ &= (A_2+P)x^3 + (A_1 - A_2 - 2P + Q)x^2 + (A_2+P-2Q)x + (A_1-A_2+Q) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} A_2 + P = 0 \\ A_1 - A_2 - 2P + Q = 0 \\ A_2 + P - 2Q = 1 \\ A_1 - A_2 + Q = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1 = 1/2 \\ A_2 = 0 \\ P = 0 \\ Q = -1/2 \end{cases}$$

Concluímos que

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+1}$$

Passo 3. Do que se viu anteriormente sai que

$$\int \frac{2x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx = \int 2x\,dx + \int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$$

$$= \int 2x\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= x^2 - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Observemos que:

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int (x-1)^{-2}\,dx \underset{R_2}{=} \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C$$

$f(x) = x-1$

$\alpha = -2$

$f'(x) = 1$

$$= \frac{-1}{x-1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Exemplo 1. $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

(i) Zeros de $D(x) = (x-1)(x+1)^2$

$\boxed{x=1}$ real de multiplicidade 1
→ contribui com 1 fração simples

$\boxed{x=-1}$ real de multiplicidade 2
→ contribui com 2 frações simples

(ii) Decomposição em frações simples

$$\frac{2x^2+x+1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{x+1}$$

Reduzindo ao mesmo denominador, da última equação sai

$$2x^2+x+1 = A(x+1)^2 + B_1(x-1) + B_2(x+1)(x-1)$$

$x=1 \rightarrow \quad 4 = 4A \iff A = 1$

$x=-1 \rightarrow \quad 2 = -2B_1 \iff B_1 = -1$

$x=0 \rightarrow \quad 1 = 1+1-B_2 \iff B_2 = 1$

(iii) Cálculo das primitivas

Recorde a observação do exemplo anterior

$$\int \frac{2x^2+x+1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \boxed{\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx} + \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \underset{R_3}{\ln|x-1|} + \underset{R_2}{\frac{1}{x+1}} + \underset{R_3}{\ln|x+1|} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Exemplo 2. $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x - 2}{x^2(x-2)}\,dx$

(i) <u>Zeros de $D(x) = x^2(x-2)$</u>

$\boxed{x=0}$ real de multiplicidade ②
→ contribui com ② frações simples

$\boxed{x=2}$ real de multiplicidade ①
→ contribui com ① fração simples

(ii) <u>Decomposição em frações simples</u>

$$\frac{2x^2 - x - 2}{x^2(x-2)} = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B}{x-2}$$

Reduzindo ao mesmo denominador, sai

$$2x^2 - x - 2 = A_1(x-2) + A_2 x(x-2) + Bx^2$$

$x=0 \rightarrow -2 = -2A_1 \Leftrightarrow A_1 = 1$
$x=2 \rightarrow 4 = 4B \Leftrightarrow B = 1$
$x=1 \rightarrow -1 = -A_1 - A_2 + B \Leftrightarrow A_2 = 1$

(iii) <u>Cálculo das primitivas</u>

$$\int \frac{2x^2 - x - 2}{x^2(x-2)}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx$$
$$= -\frac{1}{x} + \ln|x| + \ln|x-2| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

<u>Observemos</u> que $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int \underbrace{1}_{\varphi'}\,\underbrace{x^{-2}}_{\varphi^{-2}}\,dx \underset{R_2}{=} \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

Exemplo 3: $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x-1}{(x^2-1)(x-2)}\,dx$

(i) Zeros de $D(x) = (x^2-1)(x-2)$ $= (x-1)(x+1)(x-2)$

$\boxed{x=1}$ real de multiplicidade 1
→ contribui com 1 fração simples

$\boxed{x=-1}$ real de multiplicidade 1
→ contribui com 1 fração simples

$\boxed{x=2}$ real de multiplicidade 1
→ contribui com 1 fração simples

(ii) Decomposição em frações simples

$$\frac{3x^2-4x-1}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

Reduzindo ao mesmo denominador, sai

$$3x^2-4x-1 = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1)$$

$x=1 \rightarrow -2 = -2A \Leftrightarrow A=1$

$x=-1 \rightarrow 6 = 6B \Leftrightarrow B=1$

$x=2 \rightarrow 3 = 3C \Leftrightarrow C=1$

(iii) Cálculo das primitivas

$$\int \frac{3x^2-4x-1}{(x^2-1)(x-2)}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= \ln|x-1| + \ln|x+1| + \ln|x-2| + C,\ C\in\mathbb{R}$$

Exemplo 4 : $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x^2+6x+2}{x(x+1)^3}\,dx$

(i) Zeros de $D(x) = x(x+1)^3$

$\boxed{x=0}$ real de multiplicidade 1

↝ contribui com 1 fração simples

$\boxed{x=-1}$ real de multiplicidade 3

↝ contribui com 3 frações simples

(ii) Decomposição em frações simples

$$\frac{2x^3+5x^2+6x+2}{x(x+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{(x+1)^3} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_3}{x+1}$$

Reduzindo ao mesmo denominador, sai que

$$2x^3+5x^2+6x+2 = A(x+1)^3 + B_1x + B_2x(x+1) + B_3x(x+1)^2$$

$$= A(x^3+3x^2+3x+1) + B_1x + B_2(x^2+x) + B_3(x^3+2x^2+x)$$

$$= Ax^3+3Ax^2+3Ax+A+B_1x+B_2x^2+B_2x+B_3x^3+2B_3x^2+B_3x$$

$$= (A+B_3)x^3 + (3A+B_2+2B_3)x^2 + (3A+B_1+B_2+B_3)x + A$$

donde

$$\begin{cases} 2 = A+B_3 \\ 5 = 3A+B_2+2B_3 \\ 6 = 3A+B_1+B_2+B_3 \\ 2 = A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_3 = 0 \\ B_2 = -1 \\ B_1 = 1 \\ A = 2 \end{cases}$$

(iii) Cálculo das primitivas

$$\int \frac{2x^3+5x^2+6x+2}{x(x+1)^3}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{1}{(x+1)^3}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= 2\ln|x| - \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Observemos que:

- $$\int \frac{1}{(x+1)^3}\,dx = \int \underbrace{1}_{f'}\underbrace{(x+1)}_{f^{-3}}{}^{-3}\,dx \overset{R_2}{=} \frac{(x+1)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2(x+1)^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

- $$\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \int \underbrace{1}_{f'}\underbrace{(x+1)}_{f^{-2}}{}^{-2}\,dx \overset{R_2}{=} \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$