Aula 6

22 Outubro

2. Considere as seguintes funções:

(a) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

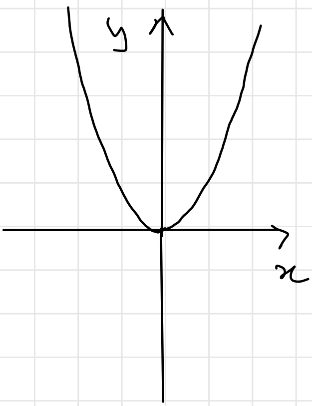
(b) $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x \end{array}$

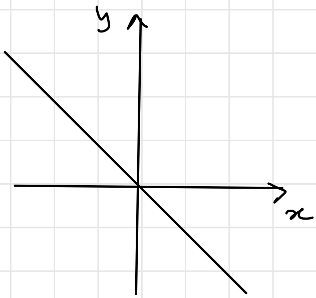
(c) $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$

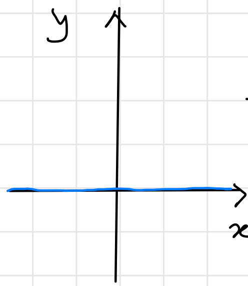
(d) $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in]-1,2] \\ 2 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus]-1,2] \end{cases} \end{array}$

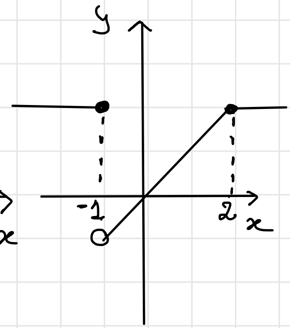
(i) Classifique cada uma delas quanto à injetividade e sobrejetividade.

(ii) Determine $f([-1,1])$, $i([-1,0])$, $i(]-1,3])$, $f^{-1}(\{1\})$, $h^{-1}(\{0\})$ e $g^{-1}(]-1,3])$.









Função f:

- $-1 \neq 1$ mas $f(-1) = f(1) = 1$ Logo f não é injetiva
- $Im(f) = f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[\neq \mathbb{R}$ Logo f não e sobrejetiva

Função g:

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(y) \Rightarrow -x = -y \Rightarrow x = y$

Logo g é injetiva

- $Im(g) = g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ = Conjunto de chegada que é também $\mathbb{R}$

Logo, g é sobrejetiva

Como g é injetiva e sobrejetiva, g é bijetiva

Função h

- $-2 \neq 1$ mas $h(-2) = h(1) = 0$ Logo h não é injetiva

- $Im(h) = \{0\} \neq \mathbb{R}$ Logo h não é sobrejetiva

Função i

- $3 \neq 4$ mas $i(3) = i(4) = 2$ Logo i não é injetiva

- $Im(i) =]-1,2] \neq \mathbb{R}$ Logo i não é sobrejetiva

b) $f([-1,1]) = [0,1]$

$i([-1,0]) =]-1,0] \cup \{2\}$

$i(]-1,3]) =]-1,2]$

$f^{-1}(\{1\}) = \{-1,1\}$

$h^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$ $\qquad g^{-1}(]-1,3]) = [-3,1[$

3. Defina a função composta $g \circ f$ para:

(a) $g(x) = \operatorname{sen} 2x$ e $f(x) = x^2 + \pi/4$, $x \in \mathbb{R}$;

(b) $g(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ e $f(x) = x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + \pi/4) =$

$= \operatorname{sen}\left(2\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{sen}(2x^2 + \pi/2)$, $x \in \mathbb{R}$

$$g \circ f . \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \operatorname{sen}\left(2x^2 + \pi/4\right)$$

b) $(g \circ f)(x) = g(x-2) = \begin{cases} 3 & \text{se } x - 2 \neq 1 \\ 0 & \text{se } x - 2 = 1 \end{cases}$

$= \begin{cases} 3 & \text{se } x \neq 3 \\ 0 & \text{se } x = 3 \end{cases}$

$$g \circ f : \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 3 & \text{se } x \neq 3 \\ 0 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

5. Considere a função $f : [-3,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

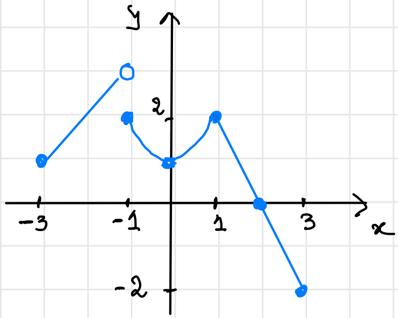
$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{se} \quad -3 \leq x < -1 \\ x^2+1 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 4-2x & \text{se} \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) $f([0,3]) = [-2,1]$;

(b) existe $x \in [1,3]$ tal que $f(x) = -1$;

(c) não existe $x \in [-3,0]$ tal que $f(x) = 2$.



a) Afirmação Falsa

$f([0,3]) = [-2,2] \neq [-2,1]$

b) Afirmação Verdadeira

$f\left(\frac{5}{2}\right) = -1$

$\left(4-2x = -1 \Leftrightarrow -2x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}\right)$

c) Afirmação Falsa

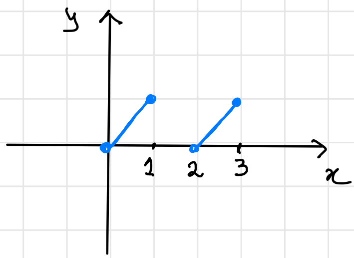
Temos que $f(-1) = 2$

7. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(a) a função $f : [0,1] \cup [2,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x-2 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ é estritamente crescente;

(b) a função $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{sen}(4x) \end{array}$ é periódica de período $\frac{\pi}{2}$;

(c) a função $f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ é minorada mas não é majorada.



a) Afirmação Falsa

Com efeito, temos que

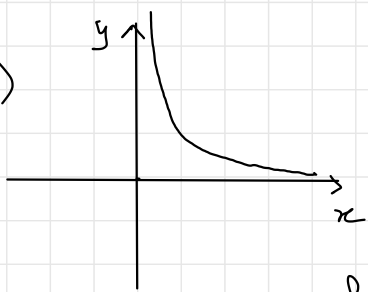
$1 < 2$ mas $f(1) = 1 > 0 = f(2)$

b) Afirmação Verdadeira

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \pi/2 \in \mathbb{R}$ e

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \operatorname{sen}(4x+2\pi) = \operatorname{sen}(4x)$$
$$= f(x).$$

c)



$f(x) > 0, \ \forall x \in]0,+\infty[$ Logo f é minorada. No entanto f não é majorada.

Observemos que $\operatorname{Im}(f) =]0,+\infty[$ e que este conjunto é minorado mas não é majorado

Exercício :

Considere a função $f : [0, 10] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura seguinte.

(a) Determine $f([2, 8])$.

(b) Determine $f^{-1}([2, 3])$.

(c) Indique os pontos de mínimo (minimizantes) local de f.

(d) Indique os pontos de máximo (maximizantes) local de f