Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Geometria

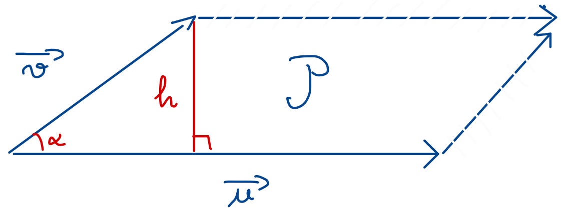
Licenciatura em Ciências da Computação
13/07/2020
Exame de recurso

Todas as respostas devem ser justificadas e os cálculos devem ser apresentados.

---

1. Seja $\mathcal{A}$ um **plano** euclidiano associado ao espaço vetorial E.
   Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dois vetores não paralelos de E e $\mathcal{P}$ o paralelogramo formado por $\overrightarrow{u}$ e por $\overrightarrow{v}$.
   (a) Mostre que área$(\mathcal{P}) = \sqrt{\|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2 - (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2}$.
   (b) Suponha agora que $\mathcal{A}$ está munido de um referencial ortonormado e considere os vetores
   $$\overrightarrow{p} = (1,1) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{q} = (1,-2).$$
   Determine a área do paralelo formado pelos vetores $\overrightarrow{p}$ e $\overrightarrow{q}$.

a



$\alpha = \measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

Temos que área$(\mathcal{P}) = b \cdot h$ onde $b = \|\overrightarrow{u}\|$ e h é tal que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{h}{\|\overrightarrow{v}\|}$. Portanto área$(\mathcal{P}) = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \operatorname{sen}(\alpha)$.

área$(\mathcal{P})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) = \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2(1 - \cos^2\alpha)$
usando a fórmula fundamental da trigonometria.
Recordando que $\cos \measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|}$ vem

área$(\mathcal{P})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2\left(1 - \dfrac{(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2}\right) = \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2 - (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2$

Como área$(\mathcal{P}) > 0$ vem área$(\mathcal{P}) = \sqrt{\|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2 - (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2}$.

b Como o referencial de A é ortonormado:
$\|\overrightarrow{p}\| = \sqrt{2}$, $\|\overrightarrow{q}\| = \sqrt{5}$ e $\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q} = -1$
Usando a alínea anterior, área$(\mathcal{P}) = \sqrt{2\times 5 - 1} = 3$

2. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano tridimensional munido de referencial ortonormado.

Considere os subespaços afins

$$\pi_1 = (0,0,1) + \langle (1,0,-1), (1,-1,1) \rangle \quad \text{e} \quad \pi_2 = (1,-1,1) + \langle (0,1,-2), (-2,1,0) \rangle.$$

(a) Mostre que π_1 e π_2 são planos.

(b) Mostre que π_1 e π_2 são subespaços paralelos.

(c) Determine a distância entre π_1 e π_2.

(d) Seja r a reta perpendicular a π_1 e incidente em $(0,0,1)$. Determine a interseção de r e π_2.

a Para mostrar que π_1 é um plano basta justificar que $\vec{u_1}$ e $\vec{v_1}$ são linearmente independentes.

Como $\nexists\, \alpha \in \mathbb{R}: \ \vec{u_1} = \alpha \vec{v_1}$ ou $\vec{v_1} = \alpha \vec{u_1}$, então $\vec{u_1}$ e $\vec{v_1}$ não são proporcionais, logo são linearmente independentes.

Analogamente se mostra que π_2 é um plano.

b Equação cartesiana de π_1:

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -x - 2y - (z-1) = 0 \iff x + 2y + z = 1$$

Equação cartesiana de π_2

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff (x-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y+1) \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff 2(x-1) + 4(y+1) + 2(z-1) = 0 \iff x + 2y + z = 0$$

Como ambos os planos são da forma $x + 2y + z = k$ então podemos concluir que são planos paralelos.

c Como π_1 e π_2 são paralelos então $d(\pi_1, \pi_2) = d(P, Q)$ onde P é um ponto de π_1 e Q é a projeção ortogonal de P em π_2

Escolhendo $P = (0,0,1)$ $(= A_1)$ vem

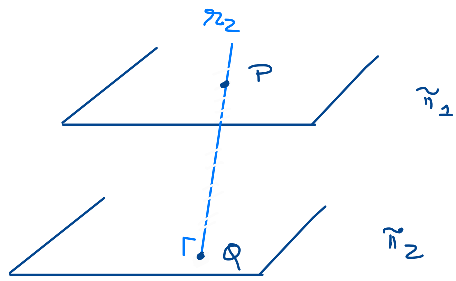
$$Q = P - \frac{\overrightarrow{A_2P} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}, \quad \text{onde } A_2 = (1,-1,1) \in \pi_2$$

e $\vec{n} = (1,2,1)$ vetor normal a π_2.

$\overrightarrow{A_2P} = P - A_2 = (-1, 1, 0)$ $\qquad \overrightarrow{A_2P} \cdot \vec{n} = 1$

$$Q = (0,0,1) - \frac{1}{6}(1,2,1) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$$

$d(P,Q) = \| \overrightarrow{PQ} \| = \| \frac{1}{6}(1,2,1) \| = \sqrt{6}/6$.



d. A interseção pretendida é o ponto Q da alínea anterior.

[Note que também seria possível responder primeiro à alínea d. e depois à c.]

3. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano de dimensão n.

   Seja $h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ uma homotetia. Considere $\mathcal{U}$ um subespaço afim de $\mathcal{A}$ de dimensão k ($k \leq n$). Mostre que $\mathcal{U}$ e $h(\mathcal{U})$ são paralelos.

Suponhamos que h é a homotetia de centro Ω e razão λ. Então:

$h(M) = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M} = \Omega + \lambda(M - \Omega) = (1-\lambda)\Omega + \lambda M$

Temos então que $\vec{h}(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$.

Suponhamos agora que $\mathcal{U}$ tem equação vetorial:

$$\mathcal{U} = A + \langle \vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_k} \rangle.$$

Sabemos que:

$$h(\mathcal{U}) = h(A) + \langle \vec{h}(\vec{u_1}), \vec{h}(\vec{u_2}), \dots, \vec{h}(\vec{u_k}) \rangle$$
$$= h(A) + \langle \lambda\vec{u_1}, \lambda\vec{u_2}, \dots, \lambda\vec{u_k} \rangle.$$

Como $\langle \vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_k} \rangle$ e $\langle \lambda\vec{u_1}, \lambda\vec{u_2}, \dots, \lambda\vec{u_k} \rangle$ são claramente o mesmo subespaço vetorial resulta que $\mathcal{U} \parallel h(\mathcal{U})$.

4. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de referencial ortonormado.

   Considere a aplicação afim $\sigma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ definida por

$$\sigma(x,y) = \left(\frac{3x - 4y + 2}{5}, \frac{-4x - 3y + 4}{5} \right).$$

   (a) Mostre que σ se trata de uma reflexão e determine a sua reta de reflexão.

   (b) Seja r a reta de reflexão de σ. Escolhendo um vetor $\vec{v}$ apropriado, apresente a expressão matricial da reflexão deslizante na reta r segundo o vetor $\vec{v}$.

a. Representação matricial de σ:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Sendo M a matriz principal de σ, temos:

$$MM^t = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = Id$$

Portanto, σ é uma isometria.

Como $\det \sigma = -1$ então σ ou é uma reflexão ou é uma reflexão deslizante.

Calculemos o conjunto de pontos fixos de σ:

$$\sigma(x,y) = (x,y) \iff \begin{cases} \dfrac{3x-4y+2}{5} = x \\ \dfrac{-4x-3y+4}{5} = y \end{cases} \iff \begin{cases} 3x-4y+2 = 5x \\ -4x-3y+4 = 5y \end{cases} \iff \begin{cases} -2x-4y+2=0 \\ -4x-8y+4=0 \end{cases}$$

$$\iff x+2y=1$$

Portanto, σ possui uma infinidade de pontos fixos, a reta de equação cartesiana $x+2y=1$, que é a reta de reflexão.

b. O vetor $\vec{v}$ será um vetor apropriado se for um vetor diretor (ou paralelo) da reta r.

$$x+2y=1 \iff x = 1-2y \implies \begin{cases} x = 1-2\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}, \\ y = \lambda \end{cases} \iff (x,y) = (1,0)+\lambda(-2,1) \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

Podemos tomar $\vec{v} = (-2,1)$.

Sendo $\bar{\sigma}$ a reflexão deslizante na reta r segundo o vetor $\vec{v}$, $\bar{\sigma}(M) = \sigma(M) + \vec{v}$

$$\bar{\sigma}(x,y) = \sigma(x,y) + (-2,1) = \left(\frac{3x-4y-8}{5}, \frac{-4x-3y+9}{5}\right)$$

Expressão matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/5 \\ 9/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

5. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano tridimensional munido de referencial ortonormado.

Seja σ a reflexão no plano $z=0$. Seja ρ a rotação de ângulo π segundo o eixo incidente em $(1,0,1)$ e dirigido por $\overrightarrow{e}_3$. Mostre que $\sigma \circ \rho$ é uma simetria central e indique o seu centro.

Seja σ a reflexão no plano $z=0$. Temos $\sigma(M) = M - 2\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\vec{n}$, onde A é um ponto do plano e $\vec{n}$ é um vetor normal ao plano. Podemos tomar $A=(0,0,0)$ e $\vec{n} = (0,0,1)$. Assim:

$$\sigma(x,y,z) = (x,y,z) - 2z(0,0,1) = (x,y,-z)$$

Seja agora $\bar{\rho}$ a rotação de ângulo $\theta = \pi$ no eixo que incide na origem e está dirigido por $\vec{e_3}$. A matriz de $\bar{\rho}$ é

$$\begin{bmatrix} \cos\pi & -\operatorname{sen}\pi & 0 \\ \operatorname{sen}\pi & \cos\pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto $\bar{\rho}(x,y,z) = (-x,-y,z)$

Sendo ρ a rotação de ângulo $\theta = \pi$ no eixo que incide em $A = (1,0,1)$ e está dirigido por $\vec{e_3}$, temos $\rho = t_{\vec{OA}} \circ \bar{\rho} \circ t_{-\vec{OA}}$. Assim:

$$\rho(x,y,z) = (1,0,1) + \bar{\rho}(x-1,y,z-1) = (1,0,1) + (-(x-1),-y,z-1) = (-x+2,-y,z)$$

Logo $\sigma \circ \rho(x,y,z) = \sigma(-x+2,-y,z) = (-x+2,-y,-z) = (2,0,0) - (x,y,z)$

Então $\sigma \circ \rho$ é uma simetria central uma vez que a sua matriz principal é $-Id$ e o centro Ω é tal que $2\Omega = (2,0,0)$, ou seja, $\Omega = (1,0,0)$.

6. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de referencial ortonormado.

(a) Determine o redimensionamento de parâmetros 1 e 2 centrado no ponto $(1,1)$ segundo as direções principais.

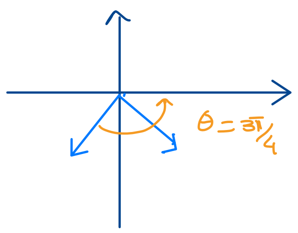
(b) Determine o redimensionamento de parâmetros 1 e 2 centrado na origem segundo as bissetrizes do terceiro e quarto quadrantes.

a. Em coordenadas homogéneas o redimensionamento pretendido é dado por:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b. Observando que a rotação que envia as bissetrizes do terceiro e quarto quadrantes nos eixos principais é a rotação de ângulo $\theta = 3\pi/4$, temos que o redimensionamento pedido é dado por:



$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-3\pi/4) & -\operatorname{sen}(-3\pi/4) \\ \operatorname{sen}(-3\pi/4) & \cos(-3\pi/4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(3\pi/4) & -\operatorname{sen}(3\pi/4) \\ \operatorname{sen}(3\pi/4) & \cos(3\pi/4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

7. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de referencial ortonormado.

   Indique, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa.

   "Se s é uma reta de $\mathcal{A}$ e $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ é uma transvecção de fator $r \neq 0$ então $f(s)$ é uma reta perpendicular a s".

A afirmação é falsa. Consideremos f a transvecção de razão $r = 1$ segundo o vetor $\vec{e_1}$. Temos $f(x, y) = (x + y, y)$. Seja s a reta de equação cartesiana $y = 0$. Então $f(s) = f(\lambda, 0) = (\lambda, 0) = s$. Assim, $f(s) = s$ e não são, obviamente, retas perpendiculares