Universidade do Minho

Departamento de Matemática

Geometria

Licenciatura em Ciências da Computação

13/07/2020

Exame de recurso

Todas as respostas devem ser justificadas e os cálculos devem ser apresentados.

---

1. Seja $\mathcal{A}$ um **plano** euclidiano associado ao espaço vetorial E.
   Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dois vetores não paralelos de E e $\mathcal{P}$ o paralelogramo formado por $\overrightarrow{u}$ e por $\overrightarrow{v}$.
   (a) Mostre que área$(\mathcal{P}) = \sqrt{\|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2 - (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})^2}$.
   (b) Suponha agora que $\mathcal{A}$ está munido de um referencial ortonormado e considere os vetores
   $$\overrightarrow{p} = (1,1) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{q} = (1,-2).$$
   Determine a área do paralelo formado pelos vetores $\overrightarrow{p}$ e $\overrightarrow{q}$.

2. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano tridimensional munido de referencial ortonormado.
   Considere os subespaços afins
   $$\pi_1 = (0,0,1) + \langle\, (1,0,-1), (1,-1,1)\,\rangle \quad \text{e} \quad \pi_2 = (1,-1,1) + \langle\, (0,1,-2), (-2,1,0)\,\rangle.$$
   (a) Mostre que π_1 e π_2 são planos.
   (b) Mostre que π_1 e π_2 são subespaços paralelos.
   (c) Determine a distância entre π_1 e π_2.
   (d) Seja r a reta perpendicular a π_1 e incidente em $(0,0,1)$. Determine a interseção de r e π_2.

3. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano de dimensão n.
   Seja $h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ uma homotetia. Considere $\mathcal{U}$ um subespaço afim de $\mathcal{A}$ de dimensão k $(k \leq n)$. Mostre que $\mathcal{U}$ e $h(\mathcal{U})$ são paralelos.

4. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de referencial ortonormado.
   Considere a aplicação afim $\sigma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ definida por
   $$\sigma(x,y) = \left(\frac{3x-4y+2}{5}, \frac{-4x-3y+4}{5}\right).$$
   (a) Mostre que σ se trata de uma reflexão e determine a sua reta de reflexão.
   (b) Seja r a reta de reflexão de σ. Escolhendo um vetor $\overrightarrow{v}$ apropriado, apresente a expressão matricial da reflexão deslizante na reta r segundo o vetor $\overrightarrow{v}$.

5. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano tridimensional munido de referencial ortonormado.
   Seja σ a reflexão no plano $z = 0$. Seja ρ a rotação de ângulo π segundo o eixo incidente em $(1,0,1)$ e dirigido por $\overrightarrow{e}_3$. Mostre que $\sigma \circ \rho$ é uma simetria central e indique o seu centro.

6. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de referencial ortonormado.

   (a) Determine o redimensionamento de parâmetros 1 e 2 centrado no ponto $(1, 1)$ segundo as direções principais.

   (b) Determine o redimensionamento de parâmetros 1 e 2 centrado na origem segundo as bissetrizes do terceiro e quarto quadrantes.

7. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de referencial ortonormado.

   Indique, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa.

   "Se s é uma reta de $\mathcal{A}$ e $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ é uma transvecção de fator $r \neq 0$ então $f(s)$ é uma reta perpendicular a s".

Cotações:
1. a) 2 valores, b) 1 valor;
2. a) 1 valor, b) 1.5 valores, c) 2 valores, d)1.5 valores;
3. 1.5 valores
4. a) 1.5 valores, b) 1 valor;
5. 2 valores;
6. a) 1.5 valores, b) 2 valores;
7. 1.5 valores.