UNIVERSIDADE DO MINHO

Licenciatura em Ciências da Computação

Análise Numérica

Duração: 2 horas — 7 de janeiro de 2019

TESTE 2 (COM CONSULTA)

Escreve na tua folha de respostas os comandos executados no Matlab.

1. De uma função f conhecem-se os valores a seguir tabelados

x	-1	0	1/2	1
f(x)	-6	-7	-21/4	-2

a) Mostra que não existe nenhum polinómio de grau exatamente igual a 3 que interpola f nos pontos dados.

b) Se pretendermos usar interpolação linear para aproximar o valor de $f(0.1)$, quais dos nós e valores nodais tabelados devemos usar para, em princípio, produzir uma melhor aproximação? Justifica a tua escolha.

c) Seja q o polinómio de grau o menor possível que interpola f nos nós $x_0 = -1, x_1 = 0$ e $x_2 = 1/2$. Seja r o polinómio de grau o menor possível que interpola f nos nós $x_1 = 0, x_2 = 1/2$ e $x_3 = 1$. A partir das diferenças divididas produzidas no Matlab com

```
>> T=TabDifDiv([-1,0,1/2,1], [-6,-7,-21/4,-2])
```

usa a fórmula interpoladora de Newton para determinar $q(x)$ e $r(x)$ (nota: não é necessário "simplificar"as expressões obtidas).

d) O cálculo de $p_2(x)$ usando a expressão anterior requer 8 operações aritméticas mas este número pode ser reduzido se reorganizarmos o cálculo. De que maneira?

2. **a)** Usa uma das *function* desenvolvidas nas aulas para calcular $p_3(1.35)$ e $p_3(2.99)$ onde p_3 é o polinómio de grau 3 que interpola o logaritmo natural nos nós $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$ e $x_3 = 4$.

b) Tendo em conta a expressão do erro do polinómio interpolador, qual dos erros

$$|log(1.35) - p_3(1.35)|$$

$$|log(2.99) - p_3(2.99)|$$

te parece que deverá ser menor? Porquê?

c) Sabendo que

$$\max_{x\in[1,4]} |W(x)| = W(2.5)$$

onde

$$W(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

é o polinómio nodal, determina M tal que

$$|p_3(x) - log(x)| \leq M$$

para todo $x \in [1,4]$. Apresenta os cálculos efetuados.

3. Seja

$$I = \int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

a) No Matlab executa as instruções seguintes

```
x=-1:0.2:1; y=exp(-x.^2/2); Q=0.2*sum([(y(1)+y(end))/2, y(2:end-1)])
```

para calcular $Q \approx I$ com uma conhecida regra de quadratura. Escreve o resultado obtido e diz qual a regra usada.

b) Usa a expressão do erro de truncatura da regra anterior para mostrar que

$$|I - Q| < 0.01$$

c) Com uma *function* do Matlab desenvolvida nas aulas, calcula as aproximações $S1$ e $S2$ dadas pela regra composta de Simpson com $h = 0.2$ e $h = 0.1$ respetivamente.

d) A partir das aproximações $S1$ e $S2$ podemos produzir outra aproximação dada por

$$S3 = \frac{16 * S2 - S1}{15}.$$

Por que razão é de esperar que $S3$ seja melhor aproximação do que $S2$?

4. Considera o sistema

$$\begin{bmatrix} 1+2^{-49} & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+2^{-49} \\ 26 \\ 42 \\ 58 \end{bmatrix}.$$

a) Usa a *function* GaussElimPP desenvolvida nas aulas para resolver o sistema.

b) Tendo em conta que a solução exata é $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, a que se devem os elevados erros da aproximação obtida?

questão	1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	3a	3b	3c	3d	4a	4b	Total
cotação	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	2	20

RESOLUÇÃO

1. **a)** Um resultado fundamental da teoria da interpolação polinomial é o seguinte: dados $n+1$ pontos $(x_i, y_i),\ i = 0, \cdots, n$, existe e é único o polinómio p de grau não superior a n tal que $p(x_i) = y_i,\ i = 0, \cdots, n$. De facto, os $n+1$ coeficientes do polinómio p são a solução de um sistema de $n+1$ equações (uma para cada ponto) cuja matriz é a chamada matriz de Vandermonde. Se os x_i são distintos, a matriz V tem inversa e o sistema tem uma e uma só solução. Como são dados 4 pontos na tabela, concluímos que existe e é único o polinómio de grau não superior a 3 que interpola os dados. Se, tal como se afirma, este polinómio tem grau 2 então não existe nenhum polinómio de grau 3 interpolador dos dados na tabela. Já de grau 4, existem muitos polinómios interpoladores dos dados uma vez que neste caso o sistema $Va = y$ (a e y denotam o vetor dos coeficientes e o vetor dos valores nodais, respetivamente) é possível e indeterminado.

   b) De

$$\begin{aligned} p_2(x) &= y_0 \times \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \times \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\ &\quad + y_2 \times \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \times \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \end{aligned}$$

resulta, substituindo pelos valores respetivos,

$$\begin{aligned} p_2(1.5) &= 1 \times \frac{(1.5-2)(1.5-3)(1.5-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 3 \times \frac{(1.5-1)(1.5-3)(1.5-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + \\ &\quad + 7 \times \frac{(1.5-1)(1.5-2)(1.5-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + 13 \times \frac{(1.5-1)(1.5-2)(1.5-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}. \end{aligned}$$

Este cálculo envolve 51 operações aritméticas.

   c) Usando a fórmula de Newton, o polinómio interpolador é dado por

$$a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)(x-2) + a_3(x-1)(x-2)(x-3).$$

Como foi dito antes que o polinómio é de grau 2, tal significa que $a_3 = 0$ e tem-se portanto

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)(x-2)$$

onde $a_0 = y_0 = 1$, a_1 é a diferença dividida de primeira ordem relativa aos dois primeiros nós e a_2 é a diferença dividida de segunda ordem relativa aos três primeiros nós. Para calcular estes valores podemos executar

```
>> TabDifDiv([1 2 3 4],[1 3 7 13])
```

que produz o resultado

```
ans =

     1     0     0     0
     3     2     0     0
     7     4     1     0
    13     6     1     0
```

e conclui-se que $a_1 = 2$ e $a_2 = 1$ (confirmando-se que $a_3 = 0$).

d) Escrito na forma

$$p_2(x) = (a_2(x-2) + a_1)\,(x-1) + a_0$$

o cálculo requer apenas 6 operações aritméticas.

2. **a)** Vamos usar a *function* polNewton que implementa a fórmula interpoladora de Newton. Com

```
>> x=1:4; polNewton(x,log(x),1.35),  polNewton(x,log(x),2.99)
```

obtemos

```
ans =

    0.2860
ans =

    1.0954
```

b) Da expressão geral do erro do polinómio interpolador

$$f(x) - p_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

para um certo ponto ξ_x que depende de x e pertence ao intervalo dos nós, resulta neste caso, tendo em conta que $(log)^{(iv)}(x) = -6x^{-4}$,

$$log(x) - p_3(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\frac{(-6\xi_x^{-4})}{4!}.$$

Uma vez que

$$(1.35-1)(1.35-2)(1.35-3)(1.35-4) = -0.9947$$

e

$$(2.99-1)(2.99-2)(2.99-3)(2.99-4) = 0.0199,$$

é de esperar que

$$|log(1.35) - p_3(1.35)| < |log(2.99) - p_3(2.99)|.$$

c) Da expressão do erro do polinómio interpolador dada antes, resulta

$$|p_3(x) - log(x)| \le |W(x)| \times \frac{\max_{x\in[1,4]}|-6x^{-4}|}{4!}$$

e sendo

$$\max_{x\in[1,4]} |W(x)| = W(2.5) = 0.5625$$

e

$$\max_{x\in[1,4]} \frac{6}{x^4} = 6,$$

o erro, qualquer que seja $x \in [1,4]$, é majorado por $M = \frac{6}{4!} \times 0.5625 = 0.1406$

3. **a)** Executando no Matlab

```
>> x=-1:0.2:1; y=exp(-x.^2/2); Q=0.2*sum([(y(1)+y(end))/2, y(2:end-1)])
```

obtem-se

```
Q =

    1.7072
```

Trata-se da regra composta dos trapézios com $h = 0.2$ que corresponde a dividir o intervalo de integração [-1,1] em 10 partes de igual amplitude e usar a regra simples dos trapézios em cada um dos sub-intervalos.

b) O erro de truncatura da regra composta dos trapézios é dado por

$$-\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta),$$

com η um ponto entre a e b. De $f(x) = e^{-x^2/2}$ resulta

$$\begin{aligned} f'(x) &= -xe^{-x^2/2} \\ f''(x) &= -e^{-x^2/2} + x^2 e^{-x^2/2} = (x^2-1)e^{-x^2/2} \\ f'''(x) &= 2xe^{-x^2/2} - x(x^2-1)e^{-x^2/2} = -x(x^2-3)e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

No intervalo [-1,1] a derivada f''' anula-se para $x = 0$ (onde atinge um máximo) e sendo

$$\begin{aligned} f''(-1) &= 0 \\ f''(0) &= -1 \\ f''(1) &= 0 \end{aligned}$$

conclui-se que

$$\max_{x\in[-1,1]} |f''(x)| = 1$$

e

$$|I - Q| \leq \frac{0.2^2}{12} \times 2 = 0.0067...$$

c) Um dos argumentos de entrada da *function* simpson é o número n de sub-intervalos usados na regra composta de simpson. Da relação $h = (b-a)/n$, conclui-se que a $h = 0.2$ e $h = 0.1$ correspondem $n = 10$ e $n = 20$, respetivamente. Apresentam-se em seguida as instruções executadas e os resultados obtidos.

```
>> format long
>> S1=simpson2('exp(-x.^2/2)',-1,1,10)

S1 =

   1.711270661732000
```

```
>> S2=simpson2('exp(-x.^2/2)',-1,1,20)

S2 =

   1.711250136460815
```

d) Denotando por I o valor exato do integral e por $I(h)$ a aproximação obtida com a regra composta de Simpson para um certo valor de h, podemos escrever, tendo em conta a expressão do erro desta regra,

$$I = I(h) - \frac{h^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\eta). \tag{1}$$

Duplicando o valor de n, temos

$$I = I(h/2) - \frac{(h/2)^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\theta). \tag{2}$$

Multiplicando (2) por 16 e subtraindo (1) resulta

$$15I = 16I(h/2) - I(h) - \frac{h^4}{180}(b-a)[f^{(iv)}(\theta) - f^{(iv)}(\eta)].$$

Se $f^{(iv)}(\theta)$ e $f^{(iv)}(\eta)$ não forem muito diferentes, podemos desprezar o último termo do segundo membro da igualdade anterior e escrever

$$I \approx \frac{16 \times I(h/2) - I(h)}{15}$$

o que justifica a expressão dada no enunciado para $S3$.

4. **a)** As instruções executadas no Matlab e os resultados obtidos são os seguintes

```
>> A=[1+2^-49 2 3 4; 5 6 7 8; 9 10 11 12; 13 14 15 16];
>> b=[10+2^-49 26 42 58]';
>> x=GaussElimPP(A,b)

x =

    2.0992
    0.1818
   -0.6612
    2.3802
```

b) O sistema é mal condicionado. O número de condição $||A|| \cdot ||A^{-1}||$ é dado por

```
>> cond(A)

ans =

   1.1115e+20
```

e os erros nos dados serão ampliados para produzirem erros muito grandes na solução do sistema.