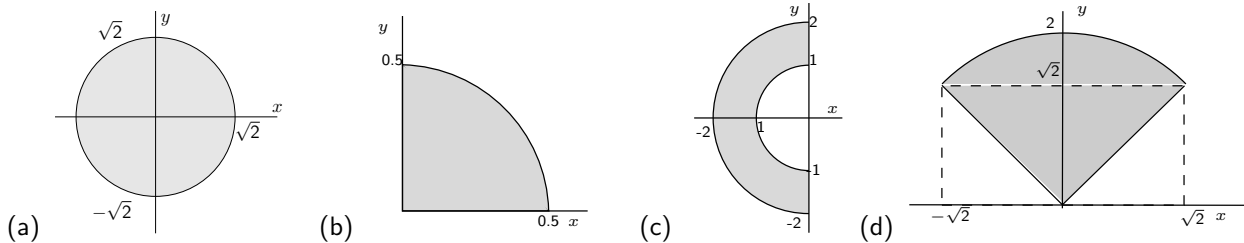


Análise

folha de exercícios 7

2017/2018

1. Para cada uma das figuras escreva, usando coordenadas polares, $\iint_D f \, dA$ como um integral iterado.



2. Seja D o disco unitário: $x^2 + y^2 \leq 1$. Calcule

$$\iint_D e^{x^2+y^2} \, dx \, dy$$

recorrendo a uma mudança para coordenadas polares.

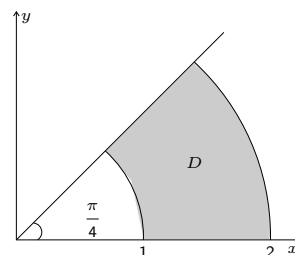
3. Esboce a região de integração de cada um dos seguintes integrais iterados.

(a) $\int_0^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(r, \theta) r \, d\theta \, dr;$ (b) $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^1 f(r, \theta) r \, dr \, d\theta;$ (c) $\int_0^{2\pi} \int_1^2 f(r, \theta) r \, dr \, d\theta$

4. Usando coordenadas polares, calcule o integral da função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

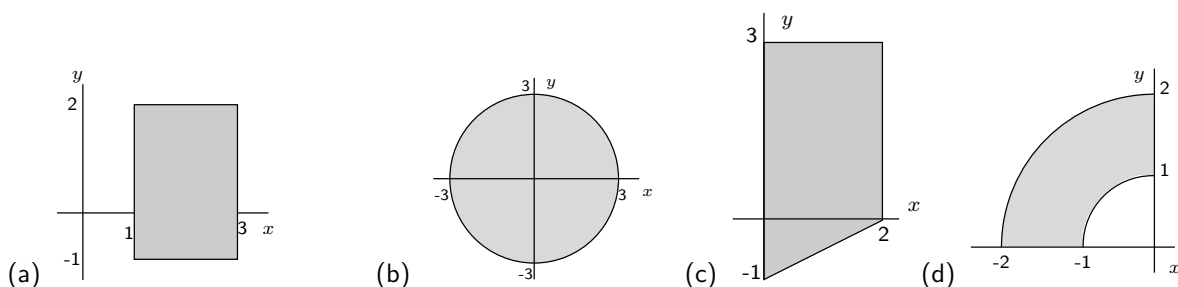
sobre a região indicada na figura.



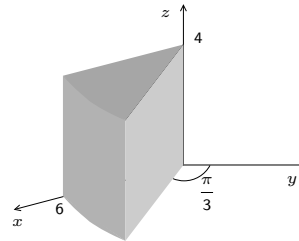
5. Converta os seguintes integrais para coordenadas polares e determine o seu valor.

(a) $\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy \, dx;$ (b) $\int_0^{\sqrt{6}} \int_{-x}^x dy \, dx;$ (c) $\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} dx \, dy .$

6. Cada uma das seguintes figuras representa um domínio de integração dupla. Para cada uma delas, indique o tipo de coordenadas (cartesianas ou polares) mais indicado a usar na integração. Escreva o respetivo integral para uma função arbitrária $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.



7. Recorrendo a coordenadas cilíndricas, descreva a região indicada na figura.



8. Usando coordenadas cilíndricas, calcule $\iiint_U f \, dV$ onde $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

e a descrição de U em coordenadas cilíndricas, U^* , é $0 \leq r \leq 4$, $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$ e $-1 \leq z \leq 1$.

9. Esboce a região de integração do seguinte integral triplo

$$\int_0^{\pi/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^1 f(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

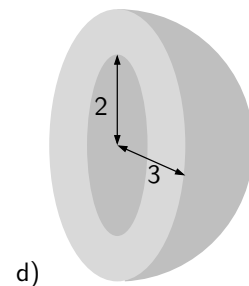
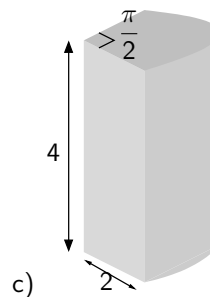
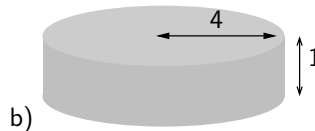
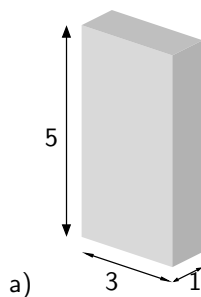
10. Usando coordenadas esféricas, calcule $\iiint_U f \, dV$ sendo $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

e U a região inferior da esfera de centro na origem e raio 5.

11. Calcule o volume de um cone de gelado compreendido entre a superfície definida por $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$ e o cone definido por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

12. Para cada figura, indique qual o tipo de coordenada mais indicada para descrever a região U . Escreva um integral triplo iterado sobre U para uma função arbitrária f .



13. Recorrendo a uma mudança de variáveis adequada, calcule cada um dos seguintes integrais

(a) $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ onde D é o disco $x^2 + y^2 \leq 4$;

(b) $\iiint_B z e^{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$ onde $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 2 \leq z \leq 3\}$;

(c) $\iiint_E \frac{dx \, dy \, dz}{\sqrt{2 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}}$ onde E é a esfera unitária.