Universidade do Minho

Departamento de Matemática

Geometria

Licenciatura em Ciências da Computação

21/05/2020

Terceiro Teste

Todas as respostas devem ser justificadas e os cálculos devem ser apresentados.

---

1. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano tridimensional munido de referencial ortonormado.

   Sejam h a hometetia de centro $\Omega = (1, 2, 1)$ e razão $\lambda = 3$ e t a translação segundo o vetor $\overrightarrow{v} = (1, -1, 0)$.

   (a) Apresente as expressões matriciais da aplicação h e da aplicação t.

   (b) Justifique se h se trata ou não de uma isometria.

   (c) Determine a aplicação $h \circ t$. Qual é a imagem do plano de equação $y - z = 0$ através desta aplicação?

a) A homotetia de centro Ω e razão λ é a aplicação h definida por:

$$h(M) = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M} = \Omega + \lambda (M - \Omega) = (1-\lambda)\Omega + \lambda M.$$

Fazendo $M = (x, y, z)$ vem

$$h(x,y,z) = -2(1,2,1) + 3(x,y,z) = (-2+3x, -4+3y, -2+3z)$$

Representação matricial de h:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

A translação segundo o vetor $\vec{v}$ é a aplicação t definida por

$t(M) = M + \vec{v}$. Fazendo $M = (x, y, z)$, vem:

$$t(x,y,z) = (x,y,z) + (1,-1,0) = (x+1, y-1, z)$$

Representação matricial de t:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

b. Justificação 1:

Sabemos que uma homotetia de razão 3 é uma semelhança de razão 3, logo não é uma isometria (as isometrias são semelhanças de razão 1).

Justificação 2:

Sendo A a matriz principal de h então $A = 3\,Id$, logo $AA^T = 9\,Id \neq Id$. Portanto h não é isometria.

Justificação 3:

Sejam $O = (0,0,0)$ e $P = (1,0,0)$. Temos $d(O,P) = 1$

$h(O) = (-2,-4,-2)$ e $h(P) = (-2,-4,-2) + (3,0,0) \Rightarrow d(h(O), h(P)) = 3$.

Como $d(h(O), h(P)) \neq d(O,P)$ então h não é isometria.

c. Para determinar $h \circ t$ podemos usar coordenadas homogéneas ou podemos compô-la analiticamente:

$$(h \circ t)(x,y,z) = h(x+1, y-1, z) = (-2+3(x+1), -4+3(y-1), -2+3z) =$$

$$= (1+3x, -7+3y, -2+3z) = (1,-7,-2) + 3(x,y,z).$$

Portanto $h \circ t$ é uma homotetia de razão 3.

Logo, sendo $\pi: y - z = 0$, sabemos que $(h \circ t)(\pi) \parallel \pi$.

Como $\sigma \in \pi$ então $(h \circ t)(\sigma) = (1,-7,-2) \in (h \circ t)(\pi)$.

Portanto a imagem pretendida é o plano paralelo a π e incidente no ponto $(1,-7,-2)$, ou seja, no plano de equação $y - z = -5$.

2. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano tridimensional munido de referencial ortonormado.
   Considere o plano π de equação cartesiana $\pi : x - y = 1$ e o vetor $\overrightarrow{v} = (1,1,0)$.
   Determine a expressão matricial da reflexão deslizante no plano π segundo o vetor $\overrightarrow{v}$.

Seja γ a reflexão deslizante pretendida. Então $\gamma = t \circ \sigma$, onde t é a translação segundo $\overrightarrow{v}$ e σ é a reflexão no plano π.

$t(M) = M + \overrightarrow{v} \Rightarrow t(x,y,z) = (x,y,z) + (1,1,0) = (x+1, y+1, z)$

$$\sigma(M) = M - 2\frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\overrightarrow{n}, \text{ onde } A \in \pi \text{ e } \overrightarrow{n} \perp \pi.$$

Tomamos $A = (1,0,0)$ e $\overrightarrow{n} = (1,-1,0)$. Temos

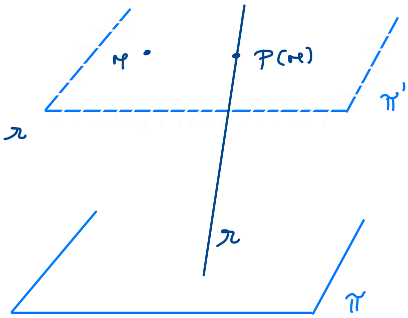
$$\sigma(x,y,z) = (x,y,z) - 2\frac{(x-y-1)}{2}(1,-1,0) =$$

$$= (x,y,z) - (x-y-1, -x+y+1, 0) = (y+1, x-1, z)$$

Logo $\gamma(x,y,z) = (t \circ \sigma)(x,y,z) = (1,1,0) + (y+1, x-1, z) = (y+2, x, z)$

3. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano tridimensional munido de referencial ortonormado.
   Considere um plano $\pi = A + \langle \overrightarrow{n} \rangle^{\perp}$ e uma reta $r = B + \langle \overrightarrow{v} \rangle$, tais que r não é paralela a π.
   Apresente uma expressão analítica para a aplicação $p : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ onde $p(M)$ é para a projeção paralela do ponto M na reta r segundo o plano π.

Seja M um ponto genérico de $\mathcal{A}_3$.



A projeção paralela $p(M)$ de M em r segundo o plano π é a interseção da reta r com o plano paralelo a π que incide em M.

Como $p(M) \in r$ então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $p(M) = B + \lambda \vec{v}$.

Por outro lado, $p(M) \in \pi' = M + \langle \vec{n} \rangle^{\perp}$. Assim

$$(p(M) - M) \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (B + \lambda \vec{v} - M) \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{MB} + \lambda \vec{v}) \cdot \vec{n} = 0.$$

$$\Rightarrow -\overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} + \lambda \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\overrightarrow{BM} \cdot \vec{n}}{\vec{v} \cdot \vec{n}}.$$

(note que como r não é paralela a π, então $\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$)

Logo, $p(M) = B + \dfrac{\overrightarrow{BM} \cdot \vec{n}}{\vec{v} \cdot \vec{n}} \vec{v}$.