Departamento de Matemática | Universidade do Minho

Álgebra — Resolução — 1º teste – 5 dez 2020

Lic. em Ciências de Computação/Lic. em Matemática - 2º ano — duração: duas horas

Nome ______________________________

Curso ______________________ Número ______________

**Responda no próprio enunciado, colocando uma cruz no quadrado correspondente. Cada questão está cotada com 0,8 valores numa escala de 0 a 20. Respostas erradas não têm qualquer penalização.**

**Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente:**

1. Seja $(S, *)$ um grupóide não comutativo. Então, para todos $a, b \in S$, $a * b \neq b * a$. V☐ F☒

1. Sejam $(S, *)$ um grupóide e $a, b \in S$ tais que $a * b \neq b * a$. Então, $(S, *)$ é um grupóide não comutativo. V☒ F☐

1. Sejam $(S, *)$ um grupóide e $a, b \in S$. Se $a * b = b * a$ então $*$ é comutativa. V☐ F☒

1. Sejam $S$ um conjunto e $a, b \in S$. Se $*$ é uma operação binária em $S$, então $a * b = b * a$. V☐ F☒

---

2. Se $G$ é um grupo e $a, b \in G$ são tais que $a^2 \neq b^2$ então $a \neq b$. V☒ F☐

2. Se $G$ é um grupo e $a, b \in G$ são tais que $a^2 = b^2$ então $a^3 = b^3$. V☐ F☒

2. Se $G$ é um grupo e $a, b \in G$ são tais que $a^2 = b^2$ então $a = b$. V☐ F☒

2. Se $G$ é um grupo e $a, b \in G$ são tais que $a \neq b$ então $a^2 \neq b^2$. V☐ F☒

---

3. Dado um conjunto qualquer $X$, é possível definir em $X$ uma operação binária $*$ tal que $(X, *)$ é um grupo. V☐ F☒

3. Dado um conjunto finito qualquer $X$, é possível definir em $X$ uma operação binária $*$ tal que $(X, *)$ é um grupo. V☐ F☒

3. Dado um conjunto finito não vazio qualquer $X$, é possível definir em $X$ uma operação binária $*$ tal que $(X, *)$ é um grupo. V☒ F☐

3. Existe um conjunto finito $X$ tal que $(X, *)$ não é grupo qualquer que seja a operação binária $*$ definida em $X$. V☒ F☐

---

4. Um subconjunto não vazio $H$ de um grupo é um seu subgrupo se $ab^{-1} \in H$ sempre que $a, b \in H$. V☒ F☐

4. Um subconjunto $H$ de um grupo é um seu subgrupo se $ab^{-1} \in H$ sempre que $a, b \in H$. V☐ F☒

4. Um subconjunto não vazio $H$ de um grupo é um seu subgrupo se $ab \in H$ sempre que $a, b \in H$. V☐ F☒

4. Um subconjunto não vazio $H$ de um grupo é um seu subgrupo se $a^{-1}b^{-1} \in H$ sempre que $a, b \in H$. V☐ F☒

---

5. A intersecção de dois subgrupos de um grupo pode ser vazia. V☐ F☒

5. A união de dois subgrupos de um grupo nunca é um subgrupo desse grupo. V☐ F☒

5. Se $G$ é abeliano então a união de dois subgrupos de $G$ é um subgrupo de $G$. V☐ F☒

5. Se $G$ é um grupo e $H, K \subseteq G$ são tais que $H < G$ e $H \cap K < G$ então $K < G$. V☐ F☒

5. Se o produto de dois subgrupos de um grupo $G$ é um subgrupo de $G$ então $G$ é abeliano. V☐ F☒

---

6. Um subgrupo não trivial de um grupo não abeliano é um grupo não abeliano. V☐ F☒

6. Um subgrupo de um grupo abeliano é um grupo abeliano. V☒ F☐

6. Existem grupos não abelianos que admitem subgrupos não triviais abelianos. V☒ F☐

6. Existem grupos abelianos que admitem subgrupos não abelianos. V☐ F☒

---

7. Qualquer subgrupo de um grupo define classes laterais esquerdas. V☒ F☐

7. Um subgrupo $H$ de um grupo é uma classe lateral esquerda módulo $H$. V☒ F☐

7. Se $H$ é um subgrupo de um grupo $G$ e $a, b \in G$ então as classes laterais $aH$ e $Hb$ são iguais ou disjuntas. V☐ F☒

7. Se $H$ é um subgrupo de um grupo $G$ e $a \in G$ então as classes laterais $Ha$ e $aH$ têm o mesmo número de elementos. V☐ F☒

7. Se $H$ é um subgrupo de um grupo $G$ e $a, b \in G$ então $aH = bH$ se e só se $ab \in H$. V☐ F☒

---

8. Se $G$ é um grupo e $H < G$ então $|G| = |H|[G : H]$. V☐ F☒

8. Se $G$ é um grupo finito e $H < G$ então $[G : H] \mid |G|$. V☒ F☐

8. Se $G$ é um grupo abeliano de ordem 18, existe $H < G$ tal que $|H| = 6$. V☒ F☐

8. Se $G$ é um grupo de ordem 20 e $H < G$ é tal que $[G : H] = 10$, então, $|H| = 10$. V☐ F☒

---

9. Se $G$ é grupo e $H < G$, então, $H \lhd G$ se e só se $xyx^{-1}H \subseteq H$, para todo $x \in G$ e $y \in H$. V☒ F☐

9. Se $G$ é grupo, então, $H \lhd G$ se e só se $xyx^{-1} \in H$, para todo $x \in G$ e $y \in H$. V☐ F☒

9. Se $G$ é grupo e $H < G$, então, $H \lhd G$ se e só se $xyx^{-1} \in H$, para todo $x \in H$ e $y \in G$. V☐ F☒

9. Se $G$ é grupo, $H \lhd G$ e $a \in G$, então, $ah = ha$ para todo $h \in H$. V☐ F☒

---

10. $\mathbb{Z}_3 \lhd \mathbb{Z}_6$. V☐ F☒

10. Todos os subgrupos de $\mathbb{Z}_6$ são normais em $\mathbb{Z}_6$. V☒ F☐

10. $\mathbb{Z}_6$ admite um subgrupo que não é normal. V☐ F☒

10. $\{[0]_6, [3]_6, [5]_6\} \lhd \mathbb{Z}_6$. V☐ F☒

---

11. Um grupo quociente de um grupo não abeliano é não abeliano. V☐ F☒

11. Existem grupos quociente de grupos infinitos que são também grupos infinitos. V☒ F☐

11. Um grupo quociente de um grupo finito é um grupo finito. V☒ F☐

11. Um grupo quociente de um grupo infinito é um grupo infinito. V☐ F☒

11. Um grupo quociente de um grupo abeliano é abeliano. V☒, F☐

---

12. O grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tem elementos de ordem 4. V☒ F☐

12. O grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tem elementos de ordem 2. V☒ F☐

12. O grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tem elementos de ordem 10. V☒ F☐

12. O grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tem elementos de ordem $n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. V☒ F☐

12. O grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ não tem elementos de ordem 2. V☐ F☒

---

13. Se $\varphi : G \to G'$ é um morfismo de grupos então, para todos $a, b \in G$, $\varphi((ab)^{-1}) = [\varphi(b)]^{-1}\varphi(a^{-1})$. V☒ F☐

13. Se $\varphi : G \to G'$ é um morfismo de grupos e $a \in G$ então $\varphi(< a >) =< \varphi(a) >$. V☒ F☐

13. Se $\varphi : G \to G'$ é um epimorfismo de grupos então $\mathrm{Nuc}\varphi \lhd G'$. V☐ F☒

13. Se $\varphi : G \to G'$ é um morfismo de grupos e $H \lhd G$ então $\varphi(H) \lhd G'$. V☐ F☒

---

14. $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_4$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_8$. V☐ F☒

14. Dois grupos finitos com a mesma ordem são isomorfos. V☐ F☒

14. Se $G, H$ e $K$ são grupos tais que $G \simeq H$ e $H \simeq K$ então $G \simeq K$. V☒ F☐

14. Dois grupos finitos isomorfos têm a mesma ordem. V☒ F☐

---

15. Os subgrupos gerados por dois elementos de um grupo finito $G$ com a mesma ordem são isomorfos. V☒ F☐

15. Se $G$ é grupo e $a, b \in G$ são tais que $b \in< a >$ então $a \in< b >$. V☐ F☒

15. Se $G$ é um grupo e $a, b \in G$ são tais que $b \in< a >$, então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a = b^n$. V☐ F☒

15. Dois elementos de um grupo $G$ com a mesma ordem geram o mesmo subgrupo de $G$. V☐ F☒

---

16. Se $G$ é um grupo cíclico e $a, b \in G$ então $< \{a, b\} >$ é um grupo cíclico. V☒ F☐

16. Se $G$ é um grupo cíclico e $H < G$ então $H$ é um grupo cíclico. V☒ F☐

16. Se $G$ é um grupo e $H < G$ é cíclico então $G$ é cíclico. V☐ F☒

16. Existem grupos cíclicos $G$ que admitem subgrupos que não são cíclicos. V☐ F☒

---

17. Sejam $G$ e $H$ dois grupos cíclicos. Então, o produto direto $G \otimes H$ é um grupo cíclico. V☐ F☒

17. $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6$ é um grupo cíclico. V☐ F☒

17. O produto direto de dois grupos cíclicos é um grupo cíclico. V☐ F☒

17. $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_9$ é um grupo cíclico. V☒ F☐

17. $\mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_7$ é um grupo cíclico. V☒ F☐

---

v.s.f.f. $\longrightarrow$

**Em cada uma das questões seguintes, assinale a(s) opção(ões) correta(s):**

18. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ um morfismo de grupos tal que $\varphi((1,0)) = 12$ e $\varphi((0,1)) = 30$. Então, $\varphi(\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$, com

☒ $n = 6$ ☐ $n = 60$ ☐ $n = 18$ ☐ $n = 3$

18. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ um morfismo de grupos tal que $\varphi((1,0)) = 30$ e $\varphi((0,1)) = 20$. Então, $\varphi(\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$, com

☒ $n = 10$ ☐ $n = 5$ ☐ $n = 20$ ☐ $n = 60$

18. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ um morfismo de grupos tal que $\varphi((1,0)) = 15$ e $\varphi((0,1)) = 28$. Então, $\varphi(\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$, com

☒ $n = 1$ ☐ $n = 13$ ☐ $n = 43$ ☐ $n = 15$

18. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ um morfismo de grupos tal que $\varphi((1,0)) = 20$ e $\varphi((0,1)) = 12$. Então, $\varphi(\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$, com

☐ $n = 2$ ☒ $n = 4$ ☐ $n = 60$ ☐ $n = 8$

---

19. Seja $G$ um grupo cíclico de ordem 27. O número de automorfismos em $G$ é

☐ 27 ☐ 4 ☒ 18 ☐ 1

19. Seja $G$ um grupo cíclico de ordem 27. O número de geradores de $G$ é

☒ 18 ☐ 4 ☐ 27 ☐ 1

19. Seja $G$ um grupo cíclico de ordem 27. O número de subgrupos de $G$ é

☐ 18 ☒ 4 ☐ 27 ☐ 1

19. Seja $G$ um grupo cíclico de ordem 27. O número de subgrupos cíclicos de $G$ é

☐ 18 ☐ 13 ☐ 27 ☒ 4

---

20. Sejam $G$ um grupo, $H < G$ e $K \lhd G$. Podemos concluir que:

☐ $\forall h \in H, \forall k \in K,\ hk = kh$
☒ $\forall h \in H, \forall k \in K, \exists k' \in K : hk = k'h$
☐ $\forall h \in H, \forall k \in K, \exists h' \in H : kh = h'k$
☐ $\forall h \in H, \forall k \in K, \exists h' \in H : hk = kh'$

20. Sejam $G$ um grupo, $K < G$ e $H \lhd G$. Podemos concluir que:

☐ $\forall h \in H, \forall k \in K,\ hk = kh$
☐ $\forall h \in H, \forall k \in K, \exists k' \in K : hk = k'h$
☒ $\forall h \in H, \forall k \in K, \exists h' \in H : kh = h'k$
☒ $\forall h \in H, \forall k \in K, \exists h' \in H : hk = kh'$

20. Sejam $G$ um grupo, $K, H \lhd G$. Podemos concluir que:

☐ $\forall h \in H, \forall k \in K,\ hk = kh$
☒ $\forall h \in H, \forall k \in K, \exists k' \in K : hk = k'h$
☒ $\forall h \in H, \forall k \in K, \exists h' \in H : kh = h'k$
☒ $\forall h \in H, \forall k \in K, \exists h' \in H : hk = kh'$

20. Sejam $G$ um grupo, $K < G$ e $H \lhd G$. Podemos concluir que:

☐ $\forall h \in H, \forall k \in K,\ hk = kh$
☐ $\forall h \in H, \forall k \in K, \exists k' \in K : hk = k'h$
☒ $\forall h \in H, \forall k \in K, \exists h' \in H : kh = h'k$
☐ $\forall h \in H, \forall k \in K, \exists k' \in K : kh = hk'$

---

21. Seja $G = \mathbb{Z}_{12} \otimes \mathbb{Z}_8$. Se $H < G$ é tal que $|H| = 8$, então podemos ter

☐ $H =< ([2]_{12}, [4]_8) >$ ☒ $H =< ([6]_{12}, [3]_8) >$ ☒ $H =< ([0]_{12}, [5]_8) >$ ☐ $H = \mathbb{Z}_8$

21. Seja $G = \mathbb{Z}_{12} \otimes \mathbb{Z}_8$. Se $H < G$ é tal que $|H| = 8$, então podemos ter

☐ $H = \mathbb{Z}_8$ ☒ $H =< ([6]_{12}, [7]_8) >$ ☐ $H =< ([2]_{12}, [4]_8) >$ ☒ $H =< ([3]_{12}, [3]_8) >$

21. Seja $G = \mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_{15}$. Se $H < G$ é tal que $|H| = 10$, então podemos ter

☐ $H = \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_5$ ☐ $H =< ([2]_6, [5]_{15}) >$ ☒ $H =< ([3]_6, [9]_{15}) >$ ☒ $H =< ([3]_6, [3]_{15}) >$

21. Seja $G = \mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_{15}$. Se $H < G$ é tal que $|H| = 10$, então podemos ter

☒ $H =< ([3]_6, [3]_{15}) >$ ☐ $H = \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_5$ ☐ $H =< ([5]_6, [2]_{15}) >$ ☒ $H =< ([3]_6, [6]_{15}) >$

---

22. Sejam $G$ um grupo e $a \in G \backslash \{1_G\}$ tal que $a^{18} = 1_G$. Então,

☐ $a^9 = 1_G$ ☐ $a^{24} \neq 1_G$ ☒ $a^{17} \neq 1_G$ ☐ $a^3 = 1_G$

22. Sejam $G$ um grupo e $a \in G \backslash \{1_G\}$ tal que $a^{12} = 1_G$. Então,

☒ $a^{36} = 1_G$ ☐ $a^8 \neq 1_G$ ☐ $a^{13} = 1_G$ ☐ $a^3 \neq 1_G$

22. Sejam $G$ um grupo e $a \in G \backslash \{1_G\}$ tal que $a^{12} = 1_G$. Então,

☒ $a^{24} = 1_G$ ☒ $a^5 \neq 1_G$ ☐ $a^7 = 1_G$ ☐ $a^3 = 1_G$

22. Sejam $G$ um grupo e $a \in G \backslash \{1_G\}$ tal que $a^{18} = 1_G$. Então,

☐ $a^1 = 1_G$ ☒ $a^7 \neq 1_G$ ☒ $a^{36} = 1_G$ ☐ $a^3 = 1_G$

---

23. Sejam $G$ um grupo não abeliano de ordem 21 e $a \in G$. Então,

☐ $o(a) \in \{1, 7\}$ ☐ $o(a) \in \{1, 3, 7, 21\}$ ☐ $o(a) \in \{3, 7\}$ ☒ $o(a) \in \{1, 3, 7\}$

23. Sejam $G$ um grupo não abeliano de ordem 14 e $a \in G$. Então,

☐ $o(a) \in \{1, 2\}$ ☐ $o(a) \in \{1, 2, 7, 14\}$ ☒ $o(a) \in= \{1, 2, 7\}$ ☐ $o(a) \in \{2, 7\}$

23. Sejam $G$ um grupo não abeliano de ordem 15 e $a \in G$. Então,

☐ $o(a) \in \{1, 3\}$ ☐ $o(a) \in \{1, 3, 5, 15\}$ ☐ $o(a) \in \{3, 5\}$ ☒ $o(a) \in \{1, 3, 5\}$

23. Sejam $G$ um grupo não abeliano de ordem 10 e $a \in G$. Então,

☒ $o(a) \in \{1, 2, 5\}$ ☐ $o(a) \in \{1, 2, 5, 10\}$ ☐ $o(a) \in \{2, 5\}$ ☐ $o(a) \in \{1, 2\}$

---

24. Seja $\varphi : G \to G'$ um morfismo não nulo de grupos finitos.

☒ $|G| = 13 \Rightarrow 13 \mid |G'|$ ☒ $|G'| = 13 \Rightarrow 13 \mid |G|$
☐ $|G| = 13 \Rightarrow |G'| = 13$ ☐ $|G'| = 13 \Rightarrow |G| = 13$

24. Seja $\varphi : G \to G'$ um morfismo não nulo de grupos finitos.

☐ $|G| = 5 \Rightarrow |G'| = 5$ ☐ $|G'| = 5 \Rightarrow |G| = 5$
☒ $|G| = 5 \Rightarrow 5 \mid |G'|$ ☒ $|G'| = 5 \Rightarrow 5 \mid |G|$

24. Seja $\varphi : G \to G'$ um morfismo não nulo de grupos finitos.

☐ $|G| = 7 \Rightarrow |G'| = 7$ ☒ $|G| = 7 \Rightarrow 7 \mid |G'|$
☐ $|G'| = 7 \Rightarrow |G| = 7$ ☒ $|G'| = 7 \Rightarrow 7 \mid |G|$

24. Seja $\varphi : G \to G'$ um morfismo não nulo de grupos finitos.

☒ $|G'| = 11 \Rightarrow 11 \mid |G|$ ☐ $|G'| = 11 \Rightarrow |G| = 11$
☒ $|G| = 11 \Rightarrow 11 \mid |G'|$ ☐ $|G| = 11 \Rightarrow |G'| = 11$

---

25. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \to Z_{12}$ o morfismo de grupos definido por $\varphi(n) = [8n]_{12}$. Então,

☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \{0\}$ ☒ $\mathrm{Nuc}\varphi = 3\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = 4\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \mathbb{Z}_3$

25. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \to Z_{18}$ o morfismo de grupos definido por $\varphi(n) = [15n]_{18}$. Então,

☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \{0\}$ ☒ $\mathrm{Nuc}\varphi = 6\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = 5\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \mathbb{Z}_6$

25. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \to Z_{18}$ o morfismo de grupos definido por $\varphi(n) = [10n]_{18}$. Então,

☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \{0\}$ ☒ $\mathrm{Nuc}\varphi = 9\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \mathbb{Z}_9$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = 5\mathbb{Z}$

25. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \to Z_{12}$ o morfismo de grupos definido por $\varphi(n) = [9n]_{12}$. Então,

☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \{0\}$ ☒ $\mathrm{Nuc}\varphi = 4\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = 12\mathbb{Z}$ ☐ $\mathrm{Nuc}\varphi = \mathbb{Z}_4$

---