Universidade do Minho — 2016/2017

Departamento de Matemática e Aplicações — LCC

Análise

Exame de recurso - modelo — Duração: 2h30m

1. [1.5 valores] Considere a função real definida por
$$f(x,y)=\frac{x^2-4}{\sqrt{y^2+x^2-4}}.$$
   (a) Descreva o domínio de f.
   (b) Calcule dois pontos do domínio que pertencem à curva de nível $f(x,y)=0$.

2. [1.5 valores] Justifique que a função f definida por $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^4y^3}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

   é contínua em $\mathbb{R}^2$.

3. [1.5 valores] Verifique que se $u=\mathrm{e}^{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}$ e $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1$, então
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=u.$$

4. [2.5 valores] Suponha que a temperatura T no ponto (x,y,z) de uma certa região do espaço é dada por
$$T(x,y,z)=10\,z\,x^2\,\mathrm{e}^{-y}\,.$$
   (a) Determine a taxa de variação de T no ponto $P=(1,0,1)$ na direcção de P para $Q=(2,1,1)$.
   (b) Qual a direção segundo a qual a temperatura aumenta mais rapidamente em P? Qual o valor da taxa de crescimento nessa direção?

5. [2.5 valores] Considere a função $f\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y)=3x^2y+y^3-3x^2-3y^2+2.$$
   (a) Verifique que $(0,0)$, $(0,2)$ e $(\pm1,1)$ são os pontos críticos de f.
   (b) Classifique os pontos críticos como pontos de máximo local, mínimo local ou pontos de sela.

6. [3 valores] Seja
$$I=\int_{-1}^{0}\int_{-2x}^{2}f(x,y)\,dy\,dx\;+\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{x}}^{2}f(x,y)\,dy\,dx\;,$$
   para uma dada função $f\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$.
   (a) Esboce os domínios de integração num mesmo sistema de eixos coordenados.
   (b) Invertendo a ordem de integração, escreva I sob a forma de um único integral.
   (c) Que interpretação geométrica pode ser dada a I quando $f(x,y)\geq 0$?
   (d) Calcule o valor de I para $f(x,y)=x+y$.

(Continua)

7. [3 valores] Considere o integral

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2+1}} 2xz\; dz\, dy\, dx.$$

(a) Escreva o integral apresentado mudando para coordenadas cilíndricas. Comece por observar que a projeção da região de integração no plano xOy é um semicírculo.

(b) Calcule o valor do integral usando (a).

8. [2.5 valores] Considere o movimento de uma partícula ao longo de uma trajetória parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (t, t^2 - 1, t)$, $t \geq 0$.

(a) Calcule a velocidade e aceleração iniciais da partícula.

(b) Calcule os vetores tangente e normal em cada instante t.

(c) Determine uma equação do plano normal à curva no ponto $(1, 0, 1)$.

9. [2 valores] Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis e considere a curva em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $\mathbf{r}(t) = \big(f(t), g(t), h(t)\big)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que os vetores $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$ são ortogonais nos pontos em que $\|\mathbf{r}(t)\|$ tem um máximo ou mínimo local.

(b) Verifique o resultado da alínea (a) para a $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$.