Aula 5

20 Outubro

Exemplo 1. $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{n^7}$

Consideremos a série dos módulos da série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{n^7}$,

isto é, consideremos a série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| (-1)^n \frac{1}{n^7} \right| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^7}$$

Temos que a série dos módulos é convergente porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 7 > 1$

Como a série dos módulos é convergente, então a série dada $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{n^7}$ é também convergente

Dizemos neste caso que a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{n^7}$ é

<u>absolutamente convergente</u>

(porque a sua convergência é acompanhada pela convergência da série dos módulos).

Exemplo 2. $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{n}$

Consideremos a série dos módulos da série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{n}$, isto é, consideremos a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right|$.

Temos que:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}$$

A série dos módulos é a série harmónica, que é divergente. Assim, a partir da natureza da série dos módulos, NADA podemos concluir sobre a natureza da série dada.

No entanto, na aula anterior, concluímos que a série dada $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{n}$ é convergente (usando o Critério de Leibniz).

Como a convergência da série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{n}$ não é acompanhada pela convergência da série dos módulos, concluímos que a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{n}$ é simplesmente convergente.

Primeiro Critério de Comparação

Exemplo 1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2+(-1)^n}{n^3}$

Atendendo a que:

- $0 < \frac{2+(-1)^n}{n^3} \leq \frac{3}{n^3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3}{n^3}$ é convergente

(a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^3}$ é convergente porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 3 > 1$. Então, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3}{n^3}$ é também convergente),

concluímos pelo Primeiro Critério de Comparação que a série dada é convergente

Exemplo 2. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+1}$

Temos que.

$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Mas $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}$ é divergente

Pelo Primeiro Critério de Comparação NADA se pode concluir.

Segundo Critério de Comparação

Exemplo 1 . $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1}$

Temos que $\lim_{n} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n} \frac{n}{n+1} = 1 \in \mathbb{R}^+$

Como $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ é divergente , concluímos pelo Segundo Critério de Comparação que a série dada é divergente

Exemplo 2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{1+n^3}$

Temos que

$$\lim_n \frac{\frac{n}{1+n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{n^3}{1+n^3} = 1 \in \mathbb{R}^+$$

A série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ é convergente porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 2 > 1$

Consequentemente, pelo Segundo Critério de Comparação concluímos que a série proposta é convergente

Critério de Cauchy

Exemplo. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{n^2}{n^3+3n}\right)^n$

Como $\displaystyle\lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{n^2}{n^3+3n}\right)^n} = \lim_n \frac{n^2}{n^3+3n} =$

$$= \lim_n \frac{\frac{n^2}{n^3}}{\frac{n^3+3n}{n^3}} = \lim_n \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n^2}} = 0 < 1,$$

concluímos pelo Critério de Cauchy que a série proposta é convergente.

Critério de d'Alembert

Exemplo: $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Comecemos por recordar que

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n \times (n-1)!$$

Seja $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

Temos que:

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{\dfrac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}} =$$

$$= \lim_n \frac{(n+1)!\,(n+1)!\,(2n)!}{(2n+2)!\,n!\,n!} =$$

$$= \lim_n \frac{(n+1)\,n!\,(n+1)\,n!\,(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!\,n!\,n!}$$

$$= \lim_n \frac{(n+1)(n+1)}{2(n+1)(2n+1)} = \lim_n \frac{n+1}{4n+2} =$$

$$= \lim_{n} \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{4n+2}{n}} = \lim_{n} \frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}} = \frac{1}{4} < 1$$

Pelo Critério de d'Alembert, concluímos que a série proposta é convergente.

Exercício: Calcule a soma da série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + \frac{5^{n-1}}{7^n} \right)$$