Aula 2 (T)

8 Outubro

Observação: Não se confunda a sucessão $(u_n)_n$ com o conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ dos seus termos

Por exemplo:

i) a sucessão $(1, 1, 1, \ldots)$ não é o mesmo que o conjunto $\{1\}$.

ii) as sucessões $(1, 0, 1, 0, \ldots)$ e $(0, 1, 0, 1, \ldots)$ são diferentes mas o conjunto dos seus termos é o mesmo, igual a $\{0, 1\}$

Exemplo: $u_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

Vamos mostrar que esta sucessão é estritamente decrescente.

Temos que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

Mostramos assim que

$$u_{n+1} - u_n < 0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim, $(u_n)_n$ é estritamente decrescente.

Exemplo. $u_n = 1 + (-1)^n, n \in \mathbb{N}$

Temos que:

$$u_1 = 0$$
$$u_2 = 2$$
$$u_3 = 0$$
$$\vdots$$

Assim, temos que $u_1 = 0 < 2 = u_2$

mas $u_2 = 2 > 0 = u_3$.

Consequentemente, a sucessão $(u_n)_n$ não é monótona

Exercício: Mostre que a sucessão $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_n$ é estritamente crescente e majorada, logo convergente

Definição: Ao limite da sucessão $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_n$ chamamos número de Neper e designamo-lo por e

O seu valor numérico é aproximadamente 2,718...

Exemplo. $w_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$

$$w_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{u_n} \times \underbrace{(-1)^n}_{v_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Como

- $\lim_n \frac{1}{n} = 0$

e

- a sucessão $v_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$, é limitada uma vez que

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

concluímos pelo Teorema que

$$\lim_n \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

Resolução alternativa:

Temos que

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

Então

$$\left(\times \frac{1}{n}\right) \qquad -\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\lim\limits_{n} \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n} \frac{1}{n} = 0$,

concluímos pelo Teorema das Sucessões Enquadradas que

$$\lim_{n} \frac{(-1)^n}{n} = 0 .$$

Atenção: $\quad 2 < 3$ mas

$$(\times(-1)) \qquad -2 > -3 \;!$$