Cónicas e quádricas

João Caramalho Domingues

23/03/2011

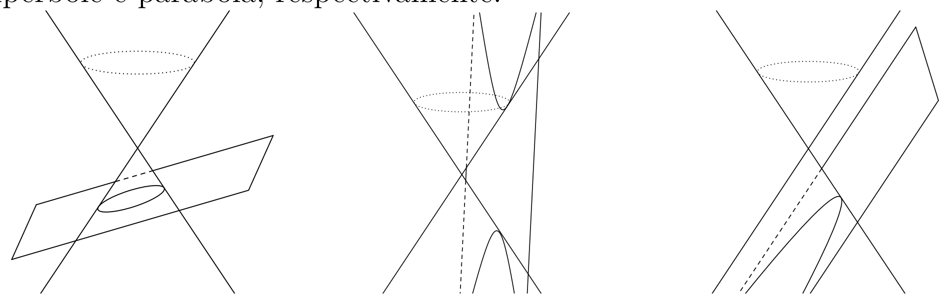
1 Cónicas

1.1 Secções cónicas

Uma *(secção) cónica* é a intersecção de um cone circular recto[1] com um plano.

Uma secção cónica é *degenerada* se incluir o vértice do cone; e *não-degenerada* caso contrário.

A figura seguinte ilustra os três tipos de cónica não-degenerada: elipse, hipérbole e parábola, respectivamente.



Há também três tipos de cónica degenerada: um ponto, duas rectas concorrentes, uma recta.

Nas secções 1.3–1.6 caracterizaremos os três tipos de cónicas não-degeneradas como figuras do plano, utilizando propriedades das distâncias dos seus pontos aos focos e directrizes e obtendo equações na forma canónica; na secção 1.7 veremos que quase toda a equação de segundo grau corresponde a uma cónica, e como reconhecer esta dada aquela; finalmente, na secção 1.8 veremos que de facto toda a secção plana de um cone é uma cónica, degenerada ou não-degenerada, no sentido das secções 1.3–1.6.

[1] Um cone é a superfície formada pelas rectas que incidem num ponto fixo (o *vértice*) e passam por uma curva (a *base*) não complanar com o vértice; um cone circular é um cone cujo base é uma circunferência; um cone circular recto é um cone circular cujo vértice pertence à recta que passa pelo centro da circunferência base e é perpendicular ao plano desta (essa recta é o *eixo* do cone).

1.2 Circunferências

Dados um ponto C e um número $r > 0$, a *circunferência* de *centro* C e *raio* r é o conjunto dos pontos cuja distância a C é r.

Em $\mathbb{R}^2$, como a distância de um ponto (x, y) a um ponto (a, b) é

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

a circunferência de centro (a, b) e raio r é o conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\};$$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ é a *equação* dessa circunferência.

Se escolhermos um referencial cuja origem seja o centro de uma circunferência de raio r, é claro que essa circunferência terá equação

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Podemos também descrever uma circunferência através de equações paramétricas. Por exemplo (com a origem do referencial no centro da circunferência),

$$x = r\cos t; \qquad y = r \operatorname{sen} t \qquad (t \in [0, 2\pi[).$$

Se considerarmos a equação

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

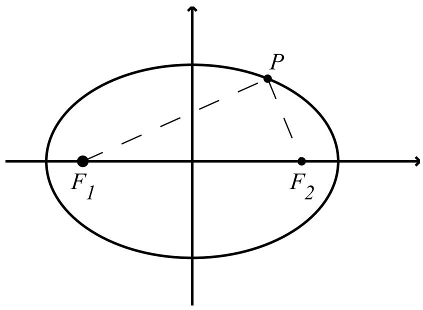
vemos facilmente (*completando os quadrados*) que é equivalente a

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\,a^2 + \frac{1}{4}\,b^2 - c$$

e, portanto, que é a equação da circunferência de centro $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ e raio $\sqrt{\frac{1}{4}\,a^2 + \frac{1}{4}\,b^2 - c}$ (desde que $\frac{1}{4}\,a^2 + \frac{1}{4}\,b^2 - c > 0$).

1.3 Elipses

Dados dois pontos F_1 e F_2, que inicialmente vamos supor distintos, e um número a, maior do que metade da distância entre F_1 e F_2, a *elipse* de *focos* F_1, F_2 e *raio médio* a é o conjunto dos pontos P tais que a soma das distâncias de P a F_1 e F_2 é igual a $2a$.[2]



Consideremos um referencial ortonormado tal que F_1 tenha coordenadas $(-f, 0)$ e F_2 tenha coordenadas $(f, 0)$, com $f > 0$ (colocamos o eixo das abcissas na recta F_1F_2 e a origem no ponto médio do segmento $[F_1F_2]$, orientando os eixos de forma que F_2 tenha abcissa positiva). Repare que $f < a$ ($2f$ é a distância entre os focos). Ora, um ponto (x, y) pertencerá à elipse se e só se cumprir a condição

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2a$$

que é equivalente a

$$(a^2 - f^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - f^2),$$

ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} = 1.$$

Chamando b a $\sqrt{a^2 - f^2}$, ficamos com

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

[2]Repare que, se permitíssemos que a fosse menor do que a metade da distância entre F_1 e F_2, a elipse seria vazia (devido à desigualdade triangular); e se permitíssemos que a fosse igual a metade dessa distância, a elipse se reduziria ao segmento $[F_1F_2]$.

que é a equação da elipse na *forma canónica.*

A elipse na forma canónica intersecta o eixo dos x em $(-a, 0)$ e $(a, 0)$; e o eixo dos y em $(0, -b)$ e $(0, b)$; ao segmento que une os pontos $(\pm a, 0)$ chamamos *eixo maior* da elipse; e ao que une os pontos $(0, \pm b)$ chamamos *eixo menor.* A origem é o *centro* da elipse — qualquer recta que passe pelo centro intersecta a elipse em dois pontos, equidistantes do centro. Para além disto, é fácil ver que a elipse é simétrica relativamente a qualquer dos dois eixos: se (x_0, y_0) pertencer à elipse, $(-x_0, y_0)$ e $(x_0, -y_0)$ também pertencerão.

Se os dois focos da elipse coincidirem, teremos uma circunferência de raio a. Note que se colocarmos a origem das coordenadas no centro desta circunferência, esta terá equação $x^2 + y^2 = a^2$, ou seja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Podemos parametrizar uma elipse na forma canónica, por exemplo através de

$$x = a\cos t; \qquad y = b \operatorname{sen} t \qquad (t \in [0, 2\pi[),$$

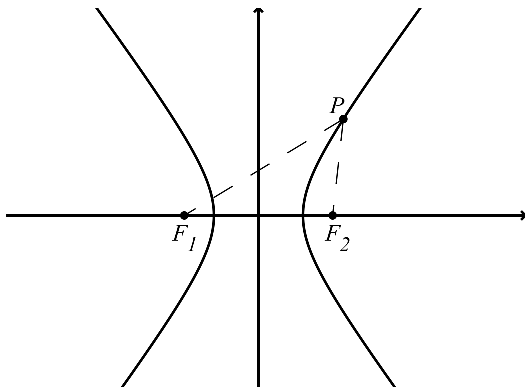
ou

$$x = a\cos t; \qquad y = b \operatorname{sen} t \qquad (t \in]-\pi, \pi]).$$

1.4 Hipérboles

Dados dois pontos F_1 e F_2, distintos, e um número a, menor do que metade da distância entre F_1 e F_2, a *hipérbole* de *focos* F_1, F_2 e *raio médio* a é o conjunto dos pontos P tais que o módulo da diferença das distâncias de P a F_1 e F_2 é igual a $2a$.[3]

[3] Repare que, se permitíssemos que a fosse maior do que a metade da distância entre F_1 e F_2, a hipérbole seria vazia (porquê?); e se permitíssemos que a fosse igual a metade dessa distância, a hipérbole seria constituída pela recta F_1F_2 menos o segmento $]F_1F_2[$.



Como acima, consideremos um referencial ortonormado tal que F_1 tenha coordenadas $(-f, 0)$ e F_2 tenha coordenadas $(f, 0)$, com $f > 0$. Repare que $f > a$ ($2f$ é a distância entre os focos). Ora, um ponto (x, y) pertencerá à hipérbole se e só se cumprir uma das condições

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} - \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-f)^2 + y^2} - \sqrt{(x+f)^2 + y^2} = 2a,$$

isto é, se

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} - \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

o que é equivalente a

$$(f^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(f^2 - a^2),$$

ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{f^2 - a^2} = 1.$$

Chamando b a $\sqrt{f^2 - a^2}$, ficamos com

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que é a equação da hipérbole na *forma canónica.*

A hipérbole na forma canónica intersecta o eixo dos x em $(-a, 0)$ e $(a, 0)$; ao segmento que une os pontos $(\pm a, 0)$ chamamos *eixo maior* da hipérbole; a hipérbole não intersecta o eixo dos y mas, por analogia com a elipse, chamamos também *eixo menor* ao segmento que une os pontos $(0, \pm b)$. A origem é o *centro* da hipérbole — qualquer recta que passe pelo centro, se intersectar a hipérbole, intersecta-a em dois pontos, equidistantes do centro. Para além disto, é fácil ver que, tal como a elipse, a hipérbole é simétrica relativamente a qualquer dos dois eixos: se (x_0, y_0) pertencer à hipérbole, $(-x_0, y_0)$ e $(x_0, -y_0)$ também pertencerão.

Podemos parametrizar uma hipérbole na forma canónica, por exemplo através de

$$x = \pm a \cosh t; \qquad y = b \operatorname{senh} t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

ou

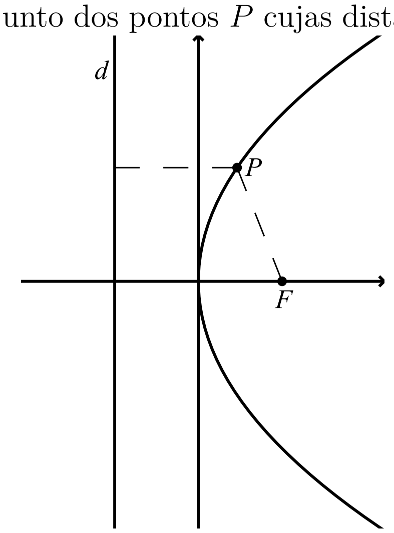
$$x = \frac{a}{\cos t}; \qquad y = b \operatorname{tg} t \qquad \left(t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\right).$$

O sinal $\pm$ no primeiro destes exemplos e o facto de o domínio do parâmetro no segundo exemplo ser a reunião de dois intervalos disjuntos ilustram o facto de que a hipérbole consiste de duas curvas, a que chamamos *ramos*.

Vê-se ainda facilmente que a hipérbole tem duas assíntotas, de equações $y = \frac{b}{a}\,x$ e $y = -\frac{b}{a}\,x$.

1.5 Parábolas

Dados um ponto F e uma recta d (não incidente em F), a *parábola* de *foco* F e *directriz* d é o conjunto dos pontos P cujas distâncias a F e a d são iguais.



Se considerarmos um referencial ortonormado tal que F fique com coordenadas $(a, 0)$ e a directriz com equação $x = -a$ (colocamos a origem no ponto médio entre F e d, e o eixo das ordenadas paralelo a d), um ponto (x, y) pertencerá à parábola se e só se cumprir a condição

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = |x + a|,$$

que é equivalente a

$$y^2 = 4ax.$$

Esta é a equação da parábola na *forma canónica.*

Ao ponto da parábola mais próximo da directriz chamamos *vértice* da parábola; na forma canónica, corresponde à origem das coordenadas. À semi-recta com origem no vértice e que passa no foco, chamamos *eixo* da parábola; na forma canónica, corresponde a um dos semi-eixos dos x (positivo se $a > 0$ e negativo se $a < 0$). A parábola é simétrica em relação ao seu eixo: se (x_0, y_0) pertencer à parábola, $(x_0, -y_0)$ também pertencerá.

Podemos também descrever a parábola (ainda na forma canónica) através de equações paramétricas; por exemplo,

$$x = \frac{1}{4a}t^2; \qquad y = t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

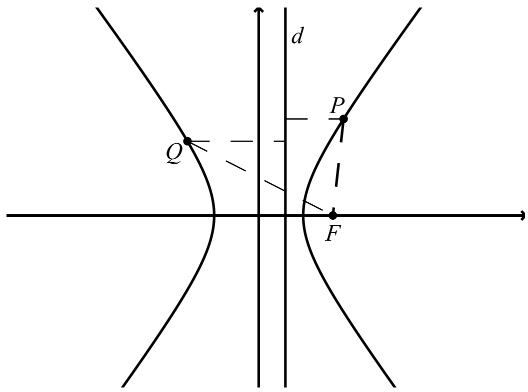
ou

$$x = at^2; \qquad y = 2at \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

1.6 Caracterização das cónicas pela excentricidade

As elipses e hipérboles podem ser caracterizadas de uma forma diferente do que vimos acima — uma forma que permite uniformizar a caracterização dos vários tipos de cónicas não-degeneradas.

Dados um ponto F, uma recta d (não incidente em F) e um número $e > 1$, a hipérbole de *foco* F, *directriz* d e *excentricidade* e é o conjunto dos pontos cuja distância a F é igual à distância a d multiplicada por e.



Se considerarmos um referencial ortonormado tal que F fique com coordenadas $(ae, 0)$ e a directriz com equação $x = \frac{a}{e}$,[4] um ponto (x, y) pertencerá à hipérbole se e só se cumprir a condição

$$\sqrt{(x-ae)^2+y^2} = e \cdot \left| x - \frac{a}{e} \right|,$$

que é equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1;$$

ora, se chamarmos f a ae, para que F tenha coordenadas $(f, 0)$ como F_2 na secção 1.4, vem $a^2(e^2-1) = f^2 - a^2$ e portanto, chamando b a $\sqrt{f^2-a^2}$ como aí, ficamos com

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

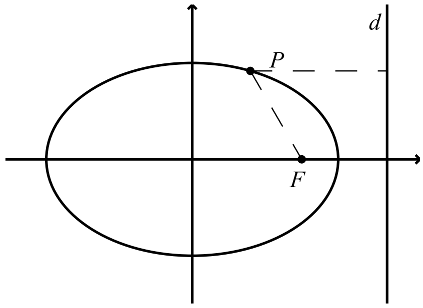
que é a equação já conhecida da hipérbole na forma canónica.

É imediato que esta é também uma equação da hipérbole de foco $F' \equiv (-ae, 0) = (-f, 0)$, directriz d' de equação $x = -\frac{a}{e}$ e excentricidade e; o que significa que uma hipérbole tem dois focos (neste novo sentido, mas correspondentes aos antigos) e para cada foco uma directriz. É também imediato que, se tivermos uma hipérbole dada por dois focos $F_1 \equiv (-f, 0), F_2 \equiv (f, 0)$ e raio médio a, a directriz correspondente a F_1 terá equação $x = -\frac{a^2}{f}$ e a correspondente a F_2 terá equação $x = \frac{a^2}{f}$.

Quanto às elipses, dados um ponto F, uma recta d (não incidente em F)

[4] Colocamos o eixo das abcissas na recta perpendicular a d incidente em F, e a origem O de modo que d fique entre O e F e que a distância de O a d seja igual à distância de F a d multiplicada por $\frac{1}{e^2-1}$.

e um número $e \in]0,1[$, a elipse de *foco* F, *directriz* d e excentricidade e é o conjunto dos pontos cuja distância a F é igual à distância a d multiplicada por e.



De facto, se considerarmos um referencial ortonormado tal que F fique com coordenadas $(ae, 0)$ e a directriz com equação $x = \frac{a}{e}$,[5] um ponto (x, y) pertencerá à elipse se e só se cumprir a condição

$$\sqrt{(x-ae)^2+y^2} = e \cdot \left|x - \frac{a}{e}\right|,$$

que é equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1;$$

ora, se chamarmos f a ae, para que F tenha coordenadas $(f, 0)$ como F_2 na secção 1.3, vem $a^2(1-e^2) = a^2 - f^2$ e portanto, chamando b a $\sqrt{a^2-f^2}$ como aí, ficamos com

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que é a equação já conhecida da elipse na forma canónica.

É imediato que esta é também uma equação da elipse de foco $F' \equiv (-ae, 0) = (-f, 0)$, directriz d' de equação $x = -\frac{a}{e}$ e excentricidade e; o que significa que uma elipse tem dois focos (neste novo sentido, mas correspondentes aos antigos) e para cada foco uma directriz. É também imediato que, se tivermos uma hipérbole dada por dois focos $F_1 \equiv (-f, 0), F_2 \equiv (f, 0)$ e raio médio a, a directriz correspondente a F_1 terá equação $x = -\frac{a^2}{f}$ e a correspondente a F_2 terá equação $x = \frac{a^2}{f}$.

[5] Colocamos o eixo das abcissas na recta perpendicular a d incidente em F, e a origem O de modo que F fique entre O e d e que a distância de O a d seja igual à distância de F a d multiplicada por $\frac{1}{1-e^2}$.

É claro que as parábolas têm excentricidade 1.

O único inconveniente da caracterização das cónicas por foco, directriz e excentricidade é o caso da circunferência — que deixa de ser um caso particular das elipses. No entanto, convenciona-se que a circunferência tem excentricidade 0; quanto à directriz, não existe (embora se diga, por vezes, que está "no infinito").

1.7 Reconhecimento de cónicas

Já foi visto que qualquer cónica não-degenerada pode ser representada por uma equação do segundo grau.

Também as cónicas degeneradas podem ser representadas por equações do segundo grau. De facto, se o plano da cónica passa pelo vértice do cone, pode intersectá-lo

1. apenas no vértice, caso em que podemos colocar a origem das coordenadas no vértice e tomar a equação $x^2 + y^2 = 0$;

2. ao longo de uma das rectas que formam o cone (o plano é tangente ao cone), que podemos representar (em coordenadas adequadas) pela equação $y^2 - 2axy + a^2x^2 = 0$ (equivalente a $y = ax$); ou

3. ao longo de duas das rectas que formam o cone (e que se intersectam no vértice), que podemos representar (em coordenadas adequadas) por uma equação da forma $y^2 - a^2x^2 = 0$ (que é equivalente a $y = \pm ax$).

Reciprocamente, veremos que *quase* todas as equações do segundo grau representam cónicas. Consideremos uma equação qualquer do segundo grau em x e y, ou seja, uma equação da forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + fx + gy + h = 0, \tag{1}$$

onde a, b, c, f, g, h são números reais e pelo menos um dos a, b, c é diferente de 0. Esta equação pode representar o conjunto vazio (por exemplo, $x^2+y^2+1 = 0$) ou duas rectas paralelas (por exemplo, $x^2 - 1 = 0$); se não representar o conjunto vazio nem duas rectas paralelas, representa necessariamente uma secção cónica.

Vamos escrever (1) em forma matricial: sejam

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathrm{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

então (1) é equivalente a

$$\mathrm{x}^T A \mathrm{x} + F^T \mathrm{x} + h = 0.$$

Como A é uma matriz real simétrica, existe uma matriz P ortogonal tal que $P^T AP$ é diagonal. Vamos determinar P: sejam λ e μ os valores próprios de A e (u_1, v_1) e (u_2, v_2) vectores próprios unitários associados a λ e μ; então

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P^T AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

de maneira que, fazendo $\mathrm{x} = P\mathrm{x}'$ (isto é, $\mathrm{x}' = P^T \mathrm{x}$), temos

$$(P\mathrm{x}')^T A(P\mathrm{x}') + F^T (P\mathrm{x}') + h = 0,$$

ou seja,

$$(\mathrm{x}')^T (P^T AP)\mathrm{x}' + (F^T P)\mathrm{x}' + h = 0;$$

agora, escrevendo

$$\mathrm{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F^T P = \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix},$$

ficamos com

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + f'x' + g'y' + h = 0. \tag{2}$$

Se $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$,[6] (2) é a equação de uma parábola, de uma recta ou de duas rectas paralelas: suponhamos que $\mu = 0$ (a outra hipótese é análoga);

[6] Por a matriz A ser não nula, não é possível $\lambda = \mu = 0$.

então, completando o quadrado, vemos que (2) é equivalente a

$$\lambda\left(x'+\frac{f'}{2\lambda}\right)^2=\frac{f'^2}{4\lambda}-h-g'y';$$

se $g'=0$, ficamos com

$$x'=-\frac{f'}{2\lambda}\pm\sqrt{\frac{f'^2}{4\lambda^2}-\frac{h}{\lambda}},$$

que representa o conjunto vazio, uma recta ou duas rectas paralelas, consoante, respectivamente,

$$\frac{f'^2}{4\lambda^2}-\frac{h}{\lambda}<0,\qquad \frac{f'^2}{4\lambda^2}-\frac{h}{\lambda}=0\quad\text{ou}\quad \frac{f'^2}{4\lambda^2}-\frac{h}{\lambda}>0;$$

se $g'\neq 0$, ficamos com

$$\left(x'+\frac{f'}{2\lambda}\right)^2=-\frac{g'}{\lambda}\left(y'+\frac{h}{g'}-\frac{f'^2}{4\lambda g'}\right);$$

se agora escrevermos $x''=x'+\frac{f'}{2\lambda}$ e $y''=y'+\frac{h}{g'}-\frac{f'^2}{4\lambda g'}$, esta equação transforma-se em

$$x''^2=-\frac{g'}{\lambda}y''$$

que é a equação de uma parábola na forma canónica: o vértice é em $x''=0$, $y''=0$, ou seja

$$x'=-\frac{f'}{2\lambda},\qquad y'=-\frac{h}{g'}+\frac{f'^2}{4\lambda g'},$$

e o foco em $x''=0$, $y''=-\frac{g'}{4\lambda}$, ou seja, em

$$x'=-\frac{f'}{2\lambda},\qquad y'=-\frac{g'}{4\lambda}-\frac{h}{g'}+\frac{f'^2}{4\lambda g'}.$$

Usando agora a fórmula $\mathrm{x}=P\mathrm{x}'$, podemos chegar às coordenadas do vértice e do foco no referencial original.

Se $\lambda\neq 0$ e $\mu\neq 0$, completamos ambos os quadrados em (2), e ficamos

com
$$\lambda\left(x'+\frac{f'}{2\lambda}\right)^2+\mu\left(y'+\frac{g'}{2\mu}\right)^2=\frac{f'^2}{4\lambda}+\frac{g'^2}{4\mu}-h.$$
Vamos agora considerar separadamente os casos em que λ e μ têm o mesmo sinal ou sinais diferentes.

Se λ e μ tiverem sinais diferentes, ficaremos com uma hipérbole ou com um par de rectas concorrentes: se $\frac{f'^2}{4\lambda}+\frac{g'^2}{4\mu}-h=0$, teremos

$$x'+\frac{f'}{2\lambda}=\pm\sqrt{-\frac{\mu}{\lambda}}\left(y'+\frac{g'}{2\mu}\right),$$

ou seja, duas rectas concorrentes em $x'=-\frac{f'}{2\lambda}$, $y'=-\frac{g'}{2\mu}$; se $\frac{f'^2}{4\lambda}+\frac{g'^2}{4\mu}-h\neq 0$, escrevendo $x''=x'+\frac{f'}{2\lambda}$, $y''=y'+\frac{g'}{2\mu}$ e $k=\frac{f'^2}{4\lambda}+\frac{g'^2}{4\mu}-h$, a equação transforma-se em
$$\frac{\lambda}{k}x''^2+\frac{\mu}{k}y''^2=1;$$
agora, um dos números $\frac{\lambda}{k}$ e $\frac{\mu}{k}$ será positivo e o outro negativo; fazendo então $\alpha=\sqrt{\frac{k}{\lambda}}$ e $\beta=\sqrt{-\frac{k}{\mu}}$, ou $\alpha=\sqrt{-\frac{k}{\lambda}}$ e $\beta=\sqrt{\frac{k}{\mu}}$, ficamos com

$$\frac{x''^2}{\alpha^2}-\frac{y''^2}{\beta^2}=1 \quad \text{ou} \quad \frac{y''^2}{\beta^2}-\frac{x''^2}{\alpha^2}=1$$

(respectivamente); em qualquer dos casos, teremos a equação de uma hipérbole na forma canónica.

Se λ e μ tiverem o mesmo sinal, ficaremos com uma elipse ou com um ponto (ou com o conjunto vazio): se $\frac{f'^2}{4\lambda}+\frac{g'^2}{4\mu}-h=0$, a equação representa apenas um ponto ($x'=-\frac{f'}{2\lambda}$, $y'=-\frac{g'}{2\mu}$); se $\frac{f'^2}{4\lambda}+\frac{g'^2}{4\mu}-h\neq 0$ e escrevendo como há pouco $x''=x'+\frac{f'}{2\lambda}$, $y''=y'+\frac{g'}{2\mu}$ e $k=\frac{f'^2}{4\lambda}+\frac{g'^2}{4\mu}-h$, a equação transforma-se (como há pouco) em

$$\frac{\lambda}{k}x''^2+\frac{\mu}{k}y''^2=1;$$

agora, se k tiver sinal oposto a λ e μ (ou seja, se $\frac{\lambda}{k}$ e $\frac{\mu}{k}$ forem números negativos), esta equação representa o conjunto vazio; se k tiver o mesmo sinal que λ e μ, podemos fazer $\alpha = \sqrt{\frac{k}{\lambda}}$ e $\beta = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ e ficamos com

$$\frac{x''^2}{\alpha^2} + \frac{y''^2}{\beta^2} = 1,$$

ou seja, a equação de uma elipse na forma canónica.

Fica ao cuidado do leitor determinar os centros e eixos destas elipses e hipérboles.

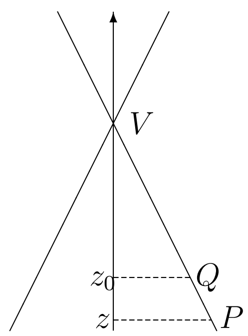
Resta apenas realçar que, como $det(A) = det(P^T AP) = \lambda\mu$ a equação (1) representa

1. uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio se $det(A) > 0$;
2. uma parábola, uma recta ou duas rectas paralelas se $det(A) = 0$; e
3. uma hipérbole ou duas rectas concorrentes se $det(A) < 0$.

1.8 As secções planas do cone

Consideremos um cone circular recto com vértice V e tomemos um referencial tal que a origem das coordenadas fique em V e o eixo dos z seja o eixo do cone. A base do cone, sendo uma circunferência num plano perpendicular ao eixo, e portanto de equação $z = z_0$ ($z_0 \neq 0$) e estando o seu centro no eixo, terá equação $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) nesse plano.

Para obter uma equação do cone, consideremos um seu ponto $P \equiv (x, y, z)$ qualquer. Esse ponto pertencerá a uma recta que passa no vértice V e em algum ponto Q da base. Ora, Q estará evidentemente à distância r do eixo



e, portanto, a distância entre P e o eixo será $\frac{r}{|z_0|} \cdot |z|$ — o que significa que P satisfará a equação

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{r}{z_0}\right)^2 z^2,$$

que é assim a equação do cone ($\frac{r}{|z_0|}$ é a tangente do ângulo entre uma recta qualquer do cone e o eixo deste, mas o que nos interessa aqui é que é uma constante).

Consideremos agora um plano π para intersectar o cone. Tendo o cone uma equação do segundo grau no referencial escolhido acima, também terá equações do segundo grau em qualquer outro referencial (uma mudança de referencial é uma transformação afim). Tomemos um referencial em que o plano π tenha equação $z' = 0$. Sendo a equação do cone

$$ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + fx'y' + gy'z' + hx'z' + jx' + ky' + lz' + m = 0,$$

a equação da intersecção do cone com π, considerada como figura plana, será

$$ax'^2 + by'^2 + fx'y' + jx' + ky' + m = 0,$$

ou seja, uma equação do segundo grau em duas variáveis. Como não é possível que a intersecção seja vazia nem que consista em duas rectas paralelas (não há duas rectas paralelas num cone), tem necessariamente de ser um ponto, uma recta, duas rectas concorrentes, uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole.[7]

[7]É possível ir um pouco mais longe ainda com poucos cálculos. Se escolhermos o referencial original de forma que o eixo dos y seja paralelo à intersecção de π com o plano definido pelos eixos dos x e y e que o ângulo $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ entre esse plano e o plano π seja o ângulo entre o semi-eixo positivo dos x e o plano π, a mudança de referencial consiste simplesmente numa rotação em torno do eixo dos y, seguida de uma translação: essa rotação é tal que $(x, y, z) = (x' \cos\alpha - z' \operatorname{sen}\alpha, y', x' \operatorname{sen}\alpha - z' \cos\alpha)$; substituindo na equação $x^2 + y^2 = \left(\frac{r}{z_0}\right)^2 z^2$, o coeficiente de x'^2 será $\cos^2\alpha - \left(\frac{r}{z_0}\right)^2 \operatorname{sen}^2\alpha$, o de y'^2 será 1 e o de $x'y'$ será 0; pelo que vimos na secção 1.7, a equação resultante representará uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio (mas esta terceira possibilidade não se coloca) se $\cos^2\alpha - \left(\frac{r}{z_0}\right)^2 \operatorname{sen}^2\alpha > 0$, uma parábola, uma recta ou duas rectas paralelas (mas esta terceira possibilidade não se coloca) se $\cos^2\alpha - \left(\frac{r}{z_0}\right)^2 \operatorname{sen}^2\alpha = 0$ e uma hipérbole ou duas rectas concorrentes se $\cos^2\alpha - \left(\frac{r}{z_0}\right)^2 \operatorname{sen}^2\alpha < 0$; chamando β ao ângulo que cada recta do cone faz com o plano xy (complementar do ângulo que faz com o eixo do

Para terminarmos o capítulo sobre as cónicas, vejamos resumidamente um outro processo, mais geométrico, de identificar a intersecção de um cone com um plano π (que não passe pelo vértice do cone) — um processo devido ao matemático belga Germinal Pierre Dandelin (1794–1847).

Se π for perpendicular ao eixo do cone (e portanto paralelo à base), a secção cónica será uma circunferência.

Senão, tomemos uma esfera interior ao cone, tangente a este e ao plano π; chamemos F ao ponto em que a esfera é tangente a π; e C à circunferência em que a esfera é tangente ao cone. C estará num plano perpendicular ao eixo do cone — este plano intersectará π, numa recta a que chamaremos d.

Chamemos ainda α ao ângulo entre o plano π e o plano da circunferência onde a esfera é tangente ao cone; e β ao ângulo que as rectas que formam o cone fazem com o plano da base (ou com o plano da circunferência onde a esfera é tangente ao cone).

A secção cónica formada por π é a parábola, elipse ou hipérbole de foco F, directriz d e excentricidade $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}$ — ver a demonstração, para o caso da elipse, em [Brannan, Esplen, Gray, págs. 19–20].

2 Quádricas

Chama-se habitualmente *quádrica* ou, mais correctamente, *quádrica no espaço*,[8] a um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ representado por uma equação de segundo grau, isto é, a um conjunto da forma

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax^2 + by^2 + cz^2 + fxy + gyz + hxz + jx + ky + lz + m = 0\},$$

onde $a, b, c, f, g, h, j, k, l, m$ são números reais e pelo menos um dos coeficientes a, b, c, f, g, h é diferente de 0.

Também se fala frequentemente em *superfícies quádricas* mas, tal como há

cone; $\beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$), de forma que $\operatorname{tg}\beta = \frac{|z_0|}{r}$, estas condições escrevem-se, respectivamente, $\operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$ e $\operatorname{tg}\beta < \operatorname{tg}\alpha$, ou seja, $\beta > \alpha$, $\beta = \alpha$ e $\beta < \alpha$.

[8]As cónicas, o conjunto vazio e a reunião de duas rectas paralelas são quádricas no plano. Em geral, as quádricas em $\mathbb{R}^n$ são os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ solução de equações do segundo grau a n variáveis.

cónicas que não são curvas (pelo menos num sentido habitual), há quádricas que não são propriamente superfícies (por exemplo, a equação $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ representa o conjunto vazio, e a equação $x^2 + y^2 = 0$ representa uma linha recta).

Para identificar uma quádrica a partir da sua equação

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + fxy + gyz + hxz + jx + ky + lz + m = 0, \tag{3}$$

seguimos um processo análogo ao das cónicas. Antes de mais, se definirmos

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}f & \frac{1}{2}h \\ \frac{1}{2}f & b & \frac{1}{2}g \\ \frac{1}{2}h & \frac{1}{2}g & c \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} j \\ k \\ l \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathrm{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

podemos escrever (3) como

$$\mathrm{x}^T A \mathrm{x} + J^T \mathrm{x} + m = 0;$$

como A é uma matriz real simétrica, existe uma matriz P ortogonal tal que $P^T AP$ é diagonal — mais precisamente,

$$P^T AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix},$$

onde λ, μ, ν são os valores próprios de A; fazendo $\mathrm{x} = P\mathrm{x}'$, ficaremos com (3) na forma

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + \nu z'^2 + j'x' + k'y' + l'z' + m = 0.$$

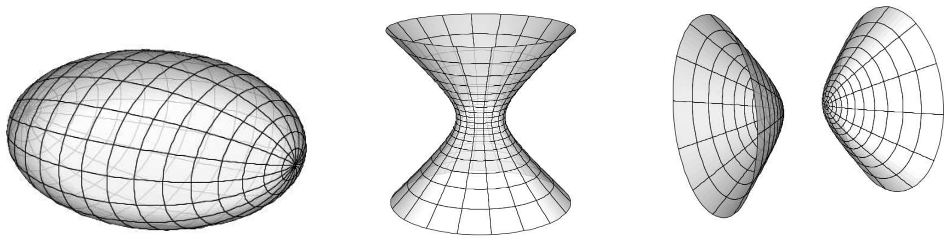
Restará apenas completar os quadrados, fazer uma translação da forma $x'' = x' + x'_0$, $y'' = y' + y'_0$, $z'' = z' + z'_0$, e as divisões necessárias[9] e teremos uma

[9] Nalguns casos poderá ainda ser necessário trocar os nomes de algumas variáveis — por exemplo trocar x'' com y'' em $\frac{y''^2}{4} = x''$ para a reconhecer como do tipo 9 (cilindro parabólico).

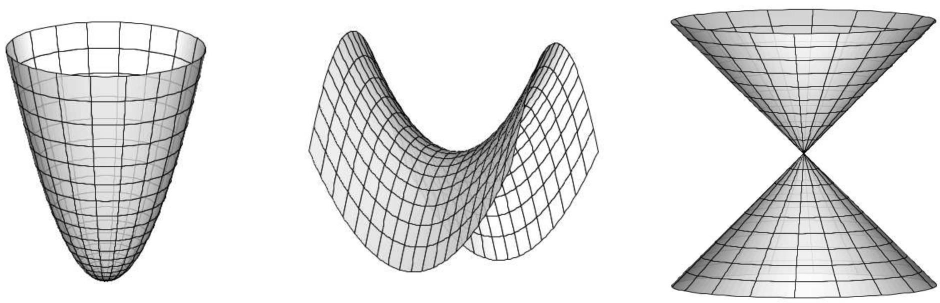
equação de um dos seguintes tipos de figura:

1. elipsóide: $\dfrac{x''^2}{\alpha^2} + \dfrac{y''^2}{\beta^2} + \dfrac{z''^2}{\gamma^2} = 1;$
2. hiperbolóide de uma folha: $\dfrac{x''^2}{\alpha^2} + \dfrac{y''^2}{\beta^2} - \dfrac{z''^2}{\gamma^2} = 1;$
3. hiperbolóide de duas folhas: $\dfrac{x''^2}{\alpha^2} - \dfrac{y''^2}{\beta^2} - \dfrac{z''^2}{\gamma^2} = 1;$
4. parabolóide elíptico: $\dfrac{x''^2}{\alpha^2} + \dfrac{y''^2}{\beta^2} = z'';$
5. parabolóide hiperbólico: $\dfrac{x''^2}{\alpha^2} - \dfrac{y''^2}{\beta^2} = z'';$
6. cone elíptico: $\dfrac{x''^2}{\alpha^2} + \dfrac{y''^2}{\beta^2} - \dfrac{z''^2}{\gamma^2} = 0;$
7. cilindro elíptico: $\dfrac{x''^2}{\alpha^2} + \dfrac{y''^2}{\beta^2} = 1;$
8. cilindro hiperbólico: $\dfrac{x''^2}{\alpha^2} - \dfrac{y''^2}{\beta^2} = 1;$
9. cilindro parabólico: $\dfrac{x''^2}{\alpha^2} = y'';$
10. um plano: $x''^2 = 0;$
11. dois planos paralelos: $x''^2 = \alpha^2;$
12. dois planos concorrentes: $\dfrac{x''^2}{\alpha^2} - \dfrac{y''^2}{\beta^2} = 0;$
13. uma linha recta: $\dfrac{x''^2}{\alpha^2} + \dfrac{y''^2}{\beta^2} = 0;$
14. um ponto: $\dfrac{x''^2}{\alpha^2} + \dfrac{y''^2}{\beta^2} + \dfrac{z''^2}{\gamma^2} = 0;$
15. conjunto vazio: $\dfrac{x''^2}{\alpha^2} + \dfrac{y''^2}{\beta^2} + \dfrac{z''^2}{\gamma^2} + 1 = 0.$

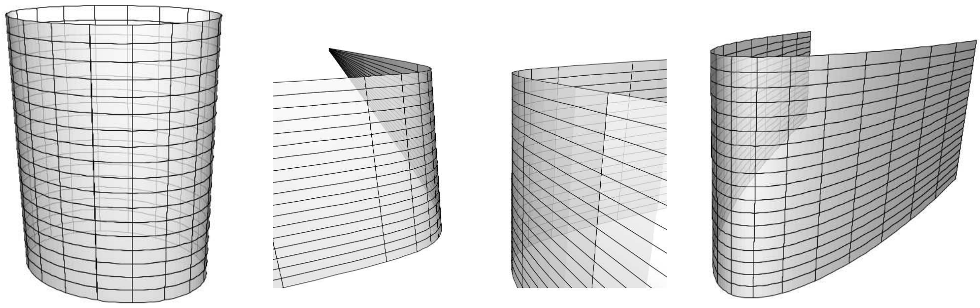
A figura seguinte mostra um elipsóide, (parte de) um hiperbolóide de uma folha e (parte de) um hiperbolóide de duas folhas.



A figura seguinte mostra (parte de) um parabolóide elíptico, (parte de) um parabolóide hiperbólico e (parte de) um cone elíptico.



Finalmente, a figura seguinte mostra (parte de) um cilindro elíptico, (parte de) um cilindro hiperbólico e (parte de) um cilindro parabólico.



Referências

[Brannan, Esplen, Gray] David A. Brannan, Matthew F. Esplen, Jeremy J. Gray, *Geometry*, Cambridge University Press, 1999.

Conteúdo

Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Licenciatura em Ciências da Computação

Geometria

Cónicas e Quádricas

1. Determine a condição a impor a f, g e h na equação

$$x^2 + y^2 + fx + gy + h = 0$$

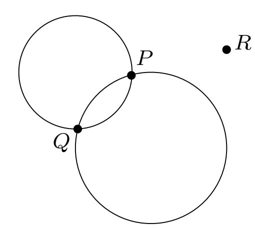
para que esta represente uma circunferência que passe na origem.

2. Determine o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfaz cada uma das seguintes equações:

(a) $3x^2 + 3y^2 - 12x - 48y = 0$;
(b) $x^2 + y^2 + x + y + 1 = 0$;
(c) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$;
(d) $2x^2 + 2y^2 + x - 3y - 5 = 0$.

3. Considere as circunferências

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0.$$

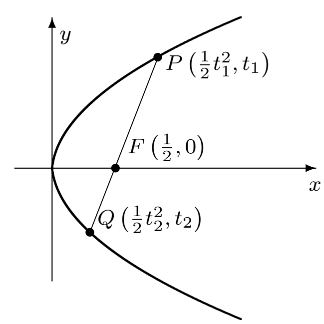


(a) Determine o centro e o raio das circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$. Faça um esboço das mesmas.

(b) Encontre a equação da reta que passa nos pontos de intersecção de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

(c) Encontre a equação da circunferência que passa no ponto $(1, 2)$ e nos pontos de intersecção de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

4. Considere a parábola $\mathcal{C}$ de equação $y^2 = 2x$ e equações paramétricas $x = \dfrac{1}{2}t^2$, $y = t$ $(t \in \mathbb{R})$.



(a) Indique o foco, o vértice, o eixo e a directriz da parábola $\mathcal{C}$.

(b) Determine a equação da corda que une pontos distintos P e Q da parábola $\mathcal{C}$ correspondentes aos valores t_1 e t_2 do parâmetro, respectivamente.

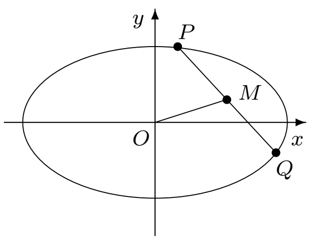
(c) Determine a condição a impor a t_1 e t_2 tal que a corda PQ passe no foco de $\mathcal{C}$. (A uma tal corda chamamos *corda focal*.)

5. Considere a parábola $\mathcal{C}$ de equação $y^2 = x$ e equações paramétricas $x = t^2$, $y = t$ $(t \in \mathbb{R})$.

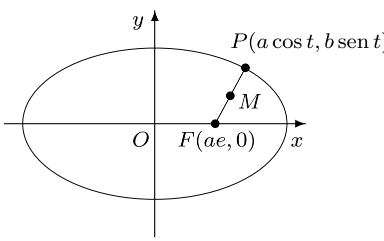
(a) Indique o foco, o vértice, o eixo e a directriz de $\mathcal{C}$.

(b) Determine a equação da corda que une pontos distintos P e Q de $\mathcal{C}$ correspondentes aos valores t_1 e t_2 do parâmetro, respectivamente.

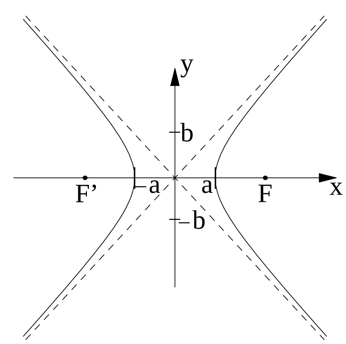
(c) Determine a condição a impor a t_1 e t_2 de forma que o foco de $\mathcal{C}$ seja o ponto médio da corda PQ.



6. Seja PQ uma corda arbitrária da elipse com equação $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ e seja M o ponto médio de PQ. Supondo que $M \neq O$, prove que o produto dos declives de OM e PQ é independente da escolha dos pontos P e Q.



7. Considere uma elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ e o seu foco F de coordenadas $(ae,0)$. Para cada ponto P da elipse, considere ainda o ponto médio M entre P e F. Prove que estes pontos médios formam uma segunda elipse cujo centro é o ponto médio entre F e o centro da elipse original.



8. Seja P um ponto de coordenadas $\left(\cosh t, \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{senh}\, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, pertencente à hipérbole de equação $x^2 - 2y^2 = 1$.

   (a) Determine os focos F e F' da hipérbole.

   (b) Determine os declives de FP e $F'P$, quando estes segmentos não são paralelos ao eixo dos yy.

   (c) Determine o ponto P no primeiro quadrante para o qual FP é perpendicular a $F'P$.

9. Considere a hipérbole rectangular de equação $xy = c^2$ $(c>0)$ com equações paramétricas $x = ct$, $y = \dfrac{c}{t}$ $(t \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$. Sejam P e Q os pontos da hipérbole correspondentes aos valores t_1 e t_2 do parâmetro, respectivamente.

   (a) Determine a equação da recta PQ.

   (b) Determine as coordenadas do ponto N onde a recta PQ intersecta o eixo dos xx.

   (c) Determine o ponto médio M da corda PQ.

   (d) Prove que o comprimento do segmento OM é igual ao do segmento MN.

10. Considere a parábola de $y^2 = 4ax$ $(a>0)$ com equações paramétricas $x = at^2$, $y = 2at$ $(t \in \mathbb{R})$ e foco F. Sejam P e Q pontos da parábola correspondentes aos valores t_1 e t_2 do parâmetro, respectivamente.

    (a) Se os segmentos OP e OQ formarem um ângulo recto no vértice O da parábola, prove que $t_1 t_2 = -4$.

    (b) Se $t_1 = 2$ e PQ é perpendicular a OP, prove que $t_2 = -4$.

11. Escreva as equações de cada uma das seguintes cónicas na forma matricial.

    (a) $11x^2 + 4xy + 14y^2 - 4x - 28y - 16 = 0$
    (b) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x - 8y + 5 = 0$

12. Classifique as cónicas não-degeneradas em $\mathbb{R}^2$ com as equações seguintes.

    (a) $x^2 + 8xy + 16y^2 - x + 8y - 12 = 0$
    (b) $52x^2 - 72xy + 73y^2 - 32x - 74y + 28 = 0$

13. Prove que a cónica com equação

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 + 14x - 2y + 3 = 0$$

    é uma hipérbole. Indique o seu centro e os eixos maior e menor.

14. Classifique as cónicas em $\mathbb{R}^2$ cujas equações são as que se seguem e determine o seu centro (se existir centro).

    (a) $11x^2 + 4xy + 14y^2 - 4x - 28y - 16 = 0$
    (b) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x - 8y + 5 = 0$

15. Classifique as cónicas em $\mathbb{R}^2$ com as equações apresentadas a seguir. Determine o centro, ou o vértice, e o(s) eixo(s) de cada uma das cónicas.

    (a) $x^2 - 3xy + y^2 + 4x - 5y + 2 = 0$
    (b) $x^2 + 2xy + y^2 - 7x + 3 = 0$

16. Prove que a quádrica com equação

$$5x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy + 2yz - 2xz - 10x + 6y - 2z - 10 = 0$$

    é um elipsóide. Determine o seu centro.

17. Prove que a quádrica com equação

$$y - yz = xz$$

    é um parabolóide hiperbólico. Determine o seu centro.

18. Classifique as quádricas em $\mathbb{R}^3$ com as equações seguintes e determine o centro ou vértice (se existir) de cada uma.

    (a) $xy - y + yz = xz$
    (b) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz - 12x - 12y + 6z = 0$
    (c) $-3x^2 + 7y^2 + 72x + 126y + z + 95 = 0$