1. Preliminares: definições indutivas e linguagens

1.1 Seja S o subconjunto de $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ definido indutivamente pelas 3 regras apresentadas de seguida: (1) $1 \in S$; (2) $2 \in S$; (3) $q \in S \;\Rightarrow\; \frac{1}{q} \in S$.

a) Dê exemplos de elementos de S.

b) Mostre que o conjunto $\{\frac{1}{2}, 2\}$ é fechado para a operação $f : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ tal que $f(q) = \frac{1}{q}$, para qualquer $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

c) Determine o conjunto S.

1.2 Sejam $A = \{a, b, c, d\}$ e $f : A \times A \to A$ a operação em A definida pela tabela que se segue.

f	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	c	b	c
c	a	c	b	b
d	a	c	b	a

a) Calcule os conjuntos indutivos, sobre A, de base $\{b\}$ e conjunto de operações $\{f\}$.

b) Prove que c é um dos elementos do conjunto gerado pela definição indutiva $(\{b\}, \{f\})$.

c) Indique qual é o conjunto gerado pela definição indutiva $(\{b\}, \{f\})$.

1.3 Apresente definições indutivas de cada um dos conjuntos que se seguem, explicitando a respetiva base e respetivo conjunto de operações.

a) Conjunto dos naturais múltiplos de 5.

b) Conjunto dos números inteiros.

c) Conjunto das palavras sobre o alfabeto $A = \{0, 1\}$ cujo comprimento é par.

1.4 Considere o alfabeto $A = \{0, 1\}$ e a linguagem L sobre A definida indutivamente por:

1. $1 \in L$;
2. se $x \in L$, então $x0 \in L$ e $x1 \in L$, para todo $x \in A^*$;

Considere ainda a função $i : L \longrightarrow \mathbb{N}$ definida, por recursão estrutural, do seguinte modo:

- $i(1) = 1$;
- para todo $x \in L$, $i(x0) = 2i(x)$;
- para todo $x \in L$, $i(x1) = 2i(x) + 1$.

a) Indique as palavras de L que admitem sequências de formação de comprimento inferior a 3.

b) Defina por recursão estrutural a função $h : L \longrightarrow L$ tal que, para todo $x \in L$, $h(x) = 1x$.

c) Determine $i(11)$ e $i(101)$.

d) Enuncie o teorema de indução estrutural para L.

e) Mostre que, para todo $x \in L$, $i\big(h(x)\big) = 2^{|x|} + i(x)$ (recorde que $|x|$ denota o comprimento da palavra x).

2. Sintaxe do Cálculo Proposicional

2.1 De entre as seguintes palavras sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, indique, justificando, aquelas que pertencem ao conjunto $\mathcal{F}^{CP}$.

a) $(\neg (p_1 \vee p_2))$

b) $((\neg p_5) \rightarrow (\neg p_{100}))$

c) $((p_3 \wedge p_1) \vee ($

d) $((p_0 \wedge (\neg p_0)) \rightarrow \perp)$

e) $(\perp)$

f) $(((p_9 \rightarrow ((p_3 \vee (\neg p_8)) \wedge p_{12})) \leftrightarrow (\neg p_4)) \rightarrow (p_7 \vee \perp)))$

2.2 Represente as seguintes frases através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar *frases atómicas*:

a) Se o Sr. João é feliz, a sua mulher é infeliz e se o Sr. João é infeliz, a sua mulher também o é.

b) Vou de comboio e perco o avião ou vou de camioneta e não perco o avião.

c) Se o Pedro não jogar, então o Miguel joga, mas a equipa perde o jogo.

d) Não é verdade que neve sempre que está frio.

e) Uma condição necessária para que uma sucessão seja convergente é que seja limitada.

f) Uma condição suficiente para um número ser ímpar é que seja primo e não seja 2.

2.3 Encontre exemplos de frases que possam ser representadas através das fórmulas seguintes.

a) $(p_1 \rightarrow ((\neg p_2) \vee p_3))$

b) $((\neg (p_1 \wedge p_2)) \vee p_3)$

c) $(p_1 \leftrightarrow (\neg p_2))$

d) $(((p_1 \rightarrow p_2) \wedge p_1) \rightarrow p_2)$

2.4 Para cada uma das seguintes fórmulas do Cálculo Proposicional

i) $p_0 \wedge p_1$
ii) p_1
iii) $\neg \perp \vee \perp$
iv) $p_0 \rightarrow (\neg p_0 \rightarrow \neg p_1)$

a) construa sequências de formação;

b) indique o número mínimo de elementos numa sequência de formação;

c) indique quantas sequências de formação de comprimento mínimo existem.

2.5 Para cada fórmula φ do exercício anterior, calcule:

a) $\varphi[p_2/p_0]$;

b) $\varphi[p_0 \wedge p_1/p_1]$;

c) $\varphi[\neg p_1/p_1]$.

2.6 Defina por recursão estrutural as seguintes funções:

a) $v : \mathcal{F}^{CP} \to \mathbb{N}_0$ tal que $v(\varphi)$ é o número de ocorrências de variáveis proposicionais em φ;

b) $c : \mathcal{F}^{CP} \to \mathcal{P}(BIN)$ tal que $c(\varphi) = \{\Box \in BIN : \Box \text{ ocorre em } \varphi\}$, onde $BIN = \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$;

c) $\_[\bot\ /p_7] : \mathcal{F}^{CP} \to \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\varphi[\bot\ /p_7]$ é o resultado de substituir em φ todas as ocorrências de p_7 por $\bot$.

2.7 Considere de novo as funções definidas no exercício anterior. Prove, por indução estrutural, que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$:

a) para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $v(\varphi) \geq \#var(\varphi)$;

b) para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $c(\varphi) = c(\varphi[\bot\ /p_7])$;

c) para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $var(\varphi) = \{p_7\}$ então $v(\varphi[\bot\ /p_7]) = 0$.

2.8 Para cada fórmula φ do exercício 2.4, indique o conjunto das suas subfórmulas.

2.9 Mostre que:

a) se S é uma sequência de formação de ψ e φ é uma subfórmula de ψ, então φ é um dos elementos de S;

b) toda a fórmula ψ admite uma sequência de formação que contém apenas subfórmulas de ψ;

c) uma fórmula ψ tem n subfórmulas se e só se as sequências de formação de ψ mais curtas têm n elementos.

2.10 Seja $\mathcal{F}^{\vee,\wedge}$ o conjunto das fórmulas cujos conetivos estão no conjunto $\{\vee, \wedge\}$, ou seja, $\mathcal{F}^{\vee,\wedge}$ é o subconjunto de $\mathcal{F}^{CP}$ definido indutivamente pelas seguintes regras:

1. $p_i \in \mathcal{F}^{\vee,\wedge}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;
2. se $\varphi \in \mathcal{F}^{\vee,\wedge}$ e $\psi \in \mathcal{F}^{\vee,\wedge}$, então $(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{F}^{\vee,\wedge}$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;
3. se $\varphi \in \mathcal{F}^{\vee,\wedge}$ e $\psi \in \mathcal{F}^{\vee,\wedge}$, então $(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}^{\vee,\wedge}$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

a) Indique, justificando, fórmulas em $\mathcal{F}^{\vee,\wedge}$.

b) Defina por recursão as funções $v, c : \mathcal{F}^{\vee,\wedge} \to \mathbb{N}_0$ tais que $v(\varphi)$ é o número de ocorrências de variáveis proposicionais em φ e $c(\varphi)$ é o número de ocorrências de conetivos em φ.

c) Enuncie o teorema de indução estrutural para $\mathcal{F}^{\vee,\wedge}$.

d) Prove que: para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{\vee,\wedge}$, $v(\varphi) = c(\varphi) + 1$.

3. Semântica do Cálculo Proposicional

3.1 Sejam v_1 e v_2 as únicas valorações tais que

$$v_1(p) = \begin{cases} 0 \text{ se } p \in \{p_0, p_1\} \\ 1 \text{ se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_0, p_1\} \end{cases} \quad \text{e} \quad v_2(p) = \begin{cases} 1 \text{ se } p \in \{p_1, p_3\} \\ 0 \text{ se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_1, p_3\} \end{cases}.$$

Considere as fórmulas $\varphi_1 = (p_2 \vee p_0) \wedge \neg(p_2 \wedge p_0)$ e $\varphi_2 = p_1 \to ((p_5 \leftrightarrow p_3) \vee \bot)$. Calcule os valores lógicos das fórmulas φ_1 e φ_2 para as valorações v_1 e v_2.

3.2 Seja v uma valoração. Quais das seguintes proposições são verdadeiras?

a) $v((p_3 \to p_2) \to p_1) = 0$ e $v(p_2)$=0 é uma condição suficiente para $v(p_3) = 0$.

b) Uma condição necessária para $v(p_1 \to (p_2 \to p_3)) = 0$ é $v(p_1) = 1$ e $v(p_3) = 0$.

c) Uma condição necessária e suficiente para $v(p_1 \wedge \neg p_3) = 1$ é $v((p_3 \to (p_1 \to p_3)) = 1$.

3.3 De entre as seguintes fórmulas, indique as tautologias e as contradições.

a) $(p_1 \to \bot) \vee p_1$

b) $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1)$

c) $\neg(p_1 \wedge p_2) \to (p_1 \vee p_2)$

d) $(p_1 \vee \neg p_1) \to (p_1 \wedge \neg p_1)$

3.4 Considere, de novo, o conjunto $\mathcal{F}^{\vee,\wedge}$, definido no Exercício 2.10.

a) Seja v a valoração que a cada variável proposicional atribui o valor lógico 0. Mostre que $v(\varphi) = 0$, para qualquer $\mathcal{F}^{\vee,\wedge}$.

b) Existem tautologias no conjunto $\mathcal{F}^{\vee,\wedge}$? Justifique.

3.5 Das seguintes proposições, indique as verdadeiras. Justifique.

a) $\models \varphi \wedge \psi$ se e só se $\models \varphi$ e $\models \psi$.

b) Se $\models \varphi \vee \psi$, então $\models \varphi$ ou $\models \psi$.

c) Se $\models \varphi$ ou $\models \psi$, então $\models \varphi \vee \psi$.

d) Se $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ e $\not\models \psi$, então $\not\models \varphi$.

3.6 Para cada uma das seguintes fórmulas, encontre uma fórmula que lhe seja logicamente equivalente e que envolva apenas conetivos no conjunto $\{\neg, \vee\}$.

a) $(p_0 \wedge p_2) \to p_3$.

b) $p_1 \vee (p_2 \to \bot)$.

c) $\neg p_4 \leftrightarrow p_2$.

d) $(p_1 \vee p_2) \to \neg(p_1 \wedge \bot)$.

3.7 Investigue se os conjuntos de conetivos $\{\vee, \wedge\}$ e $\{\neg, \vee, \wedge\}$ são ou não completos.

3.8 Calcule formas normais conjuntivas e disjuntivas logicamente equivalentes a cada uma das seguintes fórmulas:

a) $\neg p_0$.

b) $p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)$.

c) $(p_1 \vee p_0) \vee \neg(p_2 \vee p_0)$.

d) $(p_1 \to \bot)$.

e) $(p_1 \vee p_0) \wedge (p_2 \vee (p_1 \wedge p_0))$.

f) $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1)$.

3.9 Considere que φ e ψ são fórmulas cujo conjunto de variáveis é $\{p_1, p_2\}$ e $\{p_1, p_2, p_3\}$, respetivamente, e que têm as seguintes tabelas de verdade:

p_1	p_2	φ
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

e

p_1	p_2	p_3	ψ
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Determine FND's e FNC's logicamente equivalentes a cada uma das fórmulas.

3.10 Será que existem outros conetivos binários para além de $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, e $\leftrightarrow$? Para responder a esta questão, adotemos esta definição: um conetivo binário é uma função de tipo $\{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$.

a) Quantos conetivos binários existem?

b) Para cada conetivo binário $f : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$, escreva f como uma tabela de verdade, e "traduza" essa tabela de verdade como uma FND.

c) Conclua que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ permaneceria um conjunto completo de conetivos, mesmo se tivéssemos adoptado no Cálculo Proposicional outros conetivos binários.

3.11 Nenhum dos conetivos $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ é completo (i.e. constitui, por si só, um conjunto completo de conetivos). No entanto, existem conetivos binários completos.

Considere-se a extensão do conjunto das fórmulas proposicionais $\mathcal{F}^{CP}$ com o conetivo binário $\uparrow$ (conhecido como *seta de Sheffer* ou *nand*), determinado pela função booleana $f_\uparrow$ t.q. $f_\uparrow(1,1) = 0$, $f_\uparrow(1,0) = 1$, $f_\uparrow(0,1) = 1$ e $f_\uparrow(0,0) = 1$. Mais precisamente:

i) acrescente-se ao alfabeto do Cálculo Proposicional a letra $\uparrow$;

ii) considere-se a definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$ (sobre este alfabeto estendido) com uma nova regra: se $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, então $(\varphi \uparrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}$;

iii) à definição de valoração v, acrescente-se a condição $v(\varphi \uparrow \psi) = f_\uparrow(v(\varphi), v(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

a) Encontre fórmulas φ, ψ logicamente equivalentes a $p_0 \uparrow p_1$ e tais que i) φ é FND; ii) ψ é FNC.

b) Mostre que, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$: i) $\varphi \uparrow \psi \Leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$; ii) $\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \uparrow \varphi$.

c) Dê exemplo de tautologias e de contradições onde o único conetivo usado seja $\uparrow$.

d) O conjunto $\{\uparrow\}$ é completo? Justifique.

3.12 De entre os seguintes conjuntos de fórmulas, indique os que são consistentes e os que são inconsistentes.

a) $\{p_0 \wedge p_2, p_1 \rightarrow \neg p_3, p_1 \vee p_2\}$.

b) $\{p_0 \vee \neg p_1, p_1, p_0 \leftrightarrow (p_2 \vee p_3)\}$.

c) $\mathcal{F}^{CP}$.

d) O conjunto $\mathcal{F}^{\vee,\wedge}$ do Exercício 2.10.

3.13 Sejam $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

a) Se $\Gamma \cup \Delta$ é consistente, então Γ e Δ são conjuntos consistentes.

b) Se Γ e Δ são conjuntos consistentes, então $\Gamma \cup \Delta$ é consistente.

c) Se Γ é consistente e $\varphi \in \Gamma$, então $\neg\varphi \notin \Gamma$.

d) Se Γ contém uma contradição, então Γ é inconsistente.

3.14 Este exercício ilustra um método para decidir se uma fórmula do Cálculo Proposicional é uma tautologia (que está na base do chamado método da *resolução*), assente em formas normais conjuntivas e na análise da consistência de conjuntos de fórmulas.

Considere as fórmulas

$$\varphi = (p_3 \to (p_1 \vee p_2)) \vee \neg(\neg p_1 \to p_2),$$

$$\psi = \neg p_2 \wedge p_3 \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_2 \vee p_1).$$

a) Observe que ψ é uma FNC e mostre que ψ é logicamente equivalente a $\neg\varphi$.

b) Observe que para toda a valoração v, $v(\psi) = 1$ sse v satisfaz $\{\neg p_2, p_3, \neg p_3 \vee \neg p_1 \vee p_2, p_2 \vee p_1\}$.

c) Mostre que $\{\neg p_2, p_3, \neg p_3 \vee \neg p_1 \vee p_2, p_2 \vee p_1\}$ é inconsistente e diga se ψ é uma contradição.

d) Diga se φ é uma tautologia.

e) Aplique a sequência de passos anterior, considerando

$$\varphi = (p_2 \to p_1) \to (\neg p_2 \wedge p_3), \qquad \psi = (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3).$$

3.15 Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) $p_3 \vee p_0, \neg p_0 \models p_3$.

b) $p_0 \vee p_1, \neg p_1 \vee p_2 \models p_0 \vee p_2$.

c) $\neg p_2 \to (p_1 \vee p_3), \neg p_2 \models p_1$.

d) para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi \to \varphi \models \psi \vee \varphi$.

3.16 Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e Γ um conjunto de fórmulas. Demonstre que:

a) $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$ se e só se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \models \psi$.

b) $\models \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.

c) $\Gamma \models \varphi \vee \psi$ se e só se $\Gamma, \neg\varphi \models \psi$.

d) Γ é inconsistente se e só se $\Gamma \models \perp$.

3.17 O Carlos, o João e o Manuel, suspeitos de um crime, fizeram os seguintes depoimentos, respetivamente:

- O João é culpado, mas o Manuel é inocente.
- Se o Carlos é culpado, o Manuel também o é.
- Eu estou inocente, mas um dos outros dois é culpado.

a) Os três depoimentos são consistentes?

b) Algum dos depoimentos é consequência dos outros dois?

c) Supondo os três réus inocentes, quem mentiu?

d) Supondo que todos disseram a verdade, quem é culpado?

e) Supondo que os inocentes disseram a verdade e que os culpados mentiram, quem é culpado?

4. Dedução Natural para o Cálculo Proposicional

4.1 **a)** Indique uma derivação em DNP cuja conclusão seja $p_0 \wedge p_1$ e cuja única hipótese não cancelada seja $p_1 \wedge p_0$.

b) Indique duas derivações distintas em DNP de conclusão $p_0 \to (p_1 \to (p_0 \vee p_1))$ e sem hipóteses por cancelar.

c) Indique as subderivações de cada uma das derivações que apresentou em **a)** e em **b)**.

4.2 Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$. Encontre demonstrações em DNP das fórmulas abaixo indicadas.

a) $(\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \vee \psi)$.

b) $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$.

c) $\varphi \to \varphi$.

d) $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$.

e) $\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$.

f) $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

g) $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$.

h) $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

4.3 Mostre que:

a) $p_0 \to p_1, \neg p_1 \vdash \neg p_0$.

b) $p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_0 \vdash ((p_0 \leftrightarrow p_1) \wedge (p_1 \leftrightarrow p_2)) \wedge (p_0 \leftrightarrow p_2)$.

4.4 Represente o raciocínio que se segue através de uma consequência sintática e prove que essa consequência sintática é válida: O Tiago disse: "Vou almoçar ao McDonald's ou à Pizza Hut". E, acrescentou: "Se comer no McDonald's, fico mal disposto e não vou ao cinema". Nesse dia, a Joana encontrou o Tiago no cinema e conclui: "O Tiago foi almoçar à Pizza Hut".

4.5 Demonstre as seguintes proposições, para todo $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$.

a) $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ sse $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \psi$.

b) $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \sigma$ sse $\Gamma, \varphi \vdash \sigma$ e $\Gamma, \psi \vdash \sigma$.

c) $\Gamma \vdash \varphi$ sse $\Gamma, \neg\varphi \vdash \perp$.

d) Se $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

4.6 Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ fórmulas. A fórmula $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$ é chamada a *Lei de Peirce*. Mostre que a Lei de Peirce é um teorema de DNP. (Sugestão: tenha em atenção a resolução da alínea **d)** do exercício anterior.)

4.7 Mostre que os conjuntos $\{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1, \neg p_2\}$ e $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge \neg p_1\}$ são sintaticamente inconsistentes.

4.8 Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que:

a) $(p_0 \vee p_1) \to (p_0 \wedge p_1)$ não é um teorema de DNP.

b) $p_0 \vee p_1 \nvdash p_0 \wedge p_1$.

c) $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge p_1\}$ é sintaticamente consistente.

d) $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$ se e só se Γ é semanticamente inconsistente.

e) Se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ e φ é uma tautologia, então $\Gamma \vdash \psi$.

(Sugestão: aplique o Teorema da Correção e/ou o Teorema da Completude.)

4.9 Seja v uma valoração. Mostre que $\Gamma = \{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} : v(\varphi) = 1\}$ é maximalmente consistente.

4.10 Dê exemplo de dois conjuntos de fórmulas distintos que contenham $\{p_1 \vee p_2, p_1 \leftrightarrow p_2\}$ e que sejam maximalmente consistentes.

4.11 Seja Γ um conjunto maximalmente consistente e sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que: se $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ e $\varphi \notin \Gamma$, então $\psi \in \Gamma$.

4.12 Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que: $\Gamma \models \varphi$ sse existe um subconjunto Γ_0 de Γ, finito, tal que $\Gamma_0 \models \varphi$.

5. Sintaxe do Cálculo de Predicados

5.1 Seja $L = (\{0, f, g\}, \{R\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem tal que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(g) = 2$, $\mathcal{N}(R) = 2$.

a) Explicite a definição indutiva do conjunto dos L-termos.

b) Indique quais das seguintes sequências de símbolos constituem L-termos:

i)	0.	**ii)**	$f(0)$.	**iii)**	$f(1)$.
iv)	$g(f(x_1, x_0), x_0)$.	**v)**	$g(x_0, f(x_1))$.	**vi)**	$R(x_0, x_1)$.

c) Para cada um dos L-termos t que se segue, calcule $\mathrm{VAR}(t)$ e $subt(t)$.

i)	0.	**ii)**	$g(x_1, f(x_1))$.
iii)	$g(x_1, x_2)$.	**iv)**	$g(x_1, g(x_2, x_3))$.

d) Para cada um dos L-termos t da alínea **c)**, calcule $t[g(x_0, 0)/x_1]$.

5.2 Seja L o tipo de linguagem definido no exercício 5.1.

a) Enuncie o teorema de indução estrutural para o conjunto dos L-termos.

b) Defina, por recursão estrutural em L-termos, funções $r, h : \mathcal{T}_L \to \mathbb{N}_0$ que a cada L-termo t fazem corresponder o número de ocorrências de variáveis em t e o número de ocorrências de símbolos de função em t, respetivamente.

c) Dê exemplos de L-termos t_1 e t_2 tais que $\#\mathrm{VAR}(t_1) = r(t_1)$ e $\#\mathrm{VAR}(t_2) < r(t_2)$.

d) Demonstre que, para todo o L-termo t, $\#\mathrm{VAR}(t) \leq r(t)$.

5.3 Sejam L um tipo de linguagem, t_0, t_1 e t_2 L-termos e x e y variáveis distintas.

a) Diga se a seguinte igualdade é necessariamente verdadeira:

$$(t_0[t_1/x])[t_2/y] = (t_0[t_2/y])[t_1/x].$$

b) Mostre que a igualdade na alínea anterior é necessariamente verdadeira se $x \notin VAR(t_2)$ e $y \notin VAR(t_1)$.

5.4 Escreva as seguintes afirmações como fórmulas para um tipo de linguagem apropriado.

a) Todo aquele que é persistente aprende Lógica.

b) Quem quer vai, quem não quer manda.

c) Nem todos os pássaros voam.

d) Se toda a gente consegue, também o João consegue.

e) Para todo o número natural que é maior do que 6, o seu dobro é maior do que 12.

f) Quaisquer dois conjuntos que têm os mesmos elementos são iguais.

g) Existe um inteiro positivo menor do que qualquer inteiro positivo.

h) Todo o inteiro positivo é menor do que algum inteiro positivo.

i) Não há barbeiro que barbeie precisamente aqueles homens que não se barbeiam a si próprios.

5.5 Seja $L = (\{0, -\}, \{\mathsf{P}, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(-) = \mathcal{N}(<) = 2$.

a) Dê exemplos de L-termos e indique sequências de formação desses termos.

b) Dê exemplos de L-fórmulas atómicas.

c) Indique sequências de formação de cada uma das seguintes L-fórmulas.

i) $x_2 - 0 < x_1$.

ii) $\exists x_0 \forall x_1 (x_1 - x_0 < 0)$.

iii) $\forall x_2 (\exists x_0 (x_0 < x_1) \to \exists x_1 (x_2 < x_1 - x_0)) \wedge \mathsf{P}(x_2)$.

iv) $\forall x_0 (x_0 < x_1) \vee \exists x_1 (x_1 < x_0)$.

d) Para cada L-fórmula da alínea anterior, calcule o conjunto das suas subfórmulas.

e) Calcule os conjuntos de variáveis livres e de variáveis ligadas de cada uma das fórmulas da alínea c).

5.6 Para cada uma das fórmulas φ do exercício 5.5 c), calcule $\varphi[x_2 - x_0/x_1]$.

5.7 Para cada uma das fórmulas φ do exercício 5.5 c), indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras. Justifique.

a) A variável x_1 é substituível pelo L-termo 0 em φ.

b) A variável x_1 é substituível pelo L-termo x_2 em φ.

c) A variável x_2 é substituível por qualquer L-termo em φ.

d) Toda a variável é substituível pelo L-termo $x_1 - x_3$ em φ.

5.8 Sejam φ uma L-fórmula, t um L-termo e x uma variável. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira.

a) $\mathrm{LIV}(\varphi) \cap \mathrm{LIG}(\varphi) = \emptyset$.

b) Se $x \in \mathrm{LIV}(\varphi)$, então $\mathrm{VAR}(t) \subseteq \mathrm{LIV}(\varphi[t/x])$.

c) Se x é substituível por t em φ, então $x \in \mathrm{LIV}(\varphi)$.

d) Se x não é substituível por t em φ, então $x \in \mathrm{LIV}(\varphi)$.

5.9 Seja L um tipo de linguagem.

a) Defina, por recursão estrutural em L-fórmulas, a função $\mathrm{SUBFA} : \mathcal{F}_L \to \mathcal{P}(\mathcal{F}_L)$ que a cada L-fórmula φ faz corresponder o conjunto das subfórmulas atómicas de φ.

b) Sejam φ uma L-fórmula e x uma variável. Demonstre que: se $x \notin \mathrm{LIV}(\psi)$ para todo $\psi \in \mathrm{SUBFA}(\varphi)$, então $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$.

6. Semântica do Cálculo de Predicados

6.1 Considere o tipo de linguagem L_{Arit} e a estrutura *standard* para este tipo de linguagem E_{Arit}. Sejam a_1 e a_2 as atribuições em E_{Arit} tais que $a_1(x_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, e $a_2(x_i) = i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

Para cada um dos L_{Arit}-termos t que se seguem, calcule $t[a_1]_{E_{Arit}}$ e $t[a_2]_{E_{Arit}}$.

i) 0. ii) x_5. iii) $s(x_2)$.

iv) $+(s(0), x_3)$. v) $s(0 \times (x_2 \times x_3))$. vi) $(s(0) + x_7) \times s(x_1 + x_2)$.

6.2 Considere de novo o tipo de linguagem L_{Arit}.

a) Defina uma L_{Arit}-estrutura normal E_0 cujo domínio seja o conjunto $\{0, 1\}$ e, para essa estrutura, defina uma atribuição a_0.

b) Para a estrutura E_0 e atribuição a_0 definidas na alínea anterior, calcule $t[a_0]_{E_0}$ para cada um dos termos t do exercício anterior.

6.3 Seja $L = (\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \{R_1, R_2\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem em que $\mathcal{N}(f_1) = \mathcal{N}(f_2) = 0$, $\mathcal{N}(f_3) = 1$, $\mathcal{N}(f_4) = 2$, $\mathcal{N}(R_1) = 1$ e $\mathcal{N}(R_2) = 2$ e seja D o conjunto $\{d_1, d_2\}$.

a) Indique uma L-estrutura de domínio D.

b) Quantas L-estruturas de domínio D existem?

6.4 Seja $L = (\{0, -\}, \{<, \mathsf{P}\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(-) = 2$, $\mathcal{N}(<) = 2$ e $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$. Seja $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ a L-estrutura tal que:

- $\overline{0}$ é o número inteiro *zero*;
- $\overline{-}$ é a função *subtração* em inteiros;
- $\overline{<}$ de $<$ é a relação *menor do que* em inteiros;
- $\overline{\mathsf{P}} = \{z \in \mathbb{Z} : z = 2z' \text{ para algum } z' \in \mathbb{Z}\}$.

Seja $a : \mathcal{V} \to \mathbb{Z}$ a atribuição, em E, tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$:

$$a(x_i) = \begin{cases} i & \text{se } i \text{ par} \\ \\ -2i & \text{se } i \text{ é ímpar} \end{cases} .$$

a) Para cada um dos seguintes L-termos t, calcule $t[a]_E$.

i) 0. ii) x_2.

iii) $x_1 - x_2$. iv) $(0 - (x_2 - x_1))$.

b) Prove, por indução em L-termos, que, para todo o L-termo t, existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $t[a]_E = 2z$.

c) Para cada dos L-termos t em a), calcule os valores $t[0/x_1][a]_E$ e $t[a\begin{pmatrix} x_1 \\ 0[a]_E \end{pmatrix}]_E$. (Observe que, em todos os casos, os valores são iguais.)

6.5 Seja L um tipo de linguagem e sejam E uma estrutura de tipo L e a_0 uma atribuição em E. Sejam ainda x uma variável e t e t_0 termos de tipo L. Prove, por indução em t_0, que $t_0[t/x][a] = t_0[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}]$.

6.6 Considere o tipo de linguagem L_{Arit} e a estrutura *standard* para este tipo de linguagem E_{Arit}. Sejam a_1 e a_2 as atribuições em E_{Arit} tais que $a_1(x_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, e $a_2(x_i) = i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

a) Para cada uma das L_{Arit}-fórmulas φ que se seguem, calcule $\varphi[a_1]_{E_{Arit}}$ e $\varphi[a_2]_{E_{Arit}}$.

i) $\neg\bot$. iii) $s(x_1) < (x_1 + 0)$. v) $(x_1 < x_2) \to (s(x_1) < s(x_2))$.

ii) $x_1 = x_2$. iv) $\neg(x_1 = x_1)$. vi) $(x_1 < x_2) \to ((x_1 + x_3) < (x_2 + x_3))$.

b) Para cada uma das fórmulas φ da alínea anterior, indique, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, o valor de $\varphi[a_1\binom{x_1}{n}]_{E_{Arit}}$ e $\varphi[a_2\binom{x_1}{n}]_{E_{Arit}}$.

c) Para cada uma das fórmulas φ da alínea a), indique $(\forall x_1\varphi)[a_1]_{E_{Arit}}$, $(\forall x_1\varphi)[a_2]_{E_{Arit}}$, $(\exists x_1\varphi)[a_1]_{E_{Arit}}$ e $(\exists x_1\varphi)[a_2]_{E_{Arit}}$.

d) Indique se alguma das fórmulas da alínea a) é válida na estrutura E_{Arit}.

e) Indique se alguma das fórmulas da alínea a) é universalmente válida.

6.7 Sejam L, E e a a linguagem, a estrutura e a atribuição, respetivamente, definidas no Exercício 6.4. Para cada uma das seguintes L-fórmulas

i) $x_1 - x_2 < 0$ iv) $x_0 < 0 \lor \neg(x_0 < 0)$

ii) $\mathsf{P}(x_2)$ v) $\exists x_0(\mathsf{P}(x_0) \land \neg\mathsf{P}(0 - x_0))$

iii) $\forall x_2\mathsf{P}(x_2)$ vi) $\forall x_1\forall x_2((x_1 < x_2) \to (0 < x_2 - x_1))$

diga se:

a) a fórmula é satisfeita na estrutura E para a atribuição a;

b) a fórmula é válida em E;

c) a fórmula é universalmente válida.

6.8 Seja φ a seguinte L_{Arit}-fórmula:

$$\neg(\exists x_1(x_1 = 0) \lor (x_2 = 0)) \to (\neg\exists x_1(x_1 = 0) \land \neg(x_2 = 0)).$$

a) φ é instância de alguma tautologia?

b) φ é válida em todas as L_{Arit}-estruturas?

6.9 Sejam L um tipo de linguagem, φ e ψ L-fórmulas e x uma variável. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira.

a) $\exists x\varphi \Leftrightarrow \forall x\varphi$. b) $\models \exists x(\varphi \land \psi) \to (\exists x\varphi \land \exists x\psi)$.

c) $\models (\exists x\varphi \land \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \land \psi)$. d) $\models (\forall x\varphi \lor \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \lor \psi)$.

e) $\models \forall x(\varphi \lor \psi) \to (\forall x\varphi \lor \forall x\psi)$. f) $\models \exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi$.

g) $\models \forall x\exists y\varphi \to \exists y\forall x\varphi$. h) $\exists x\varphi \to \psi \Leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi)$, se $x \notin \mathrm{LIV}(\psi)$.

6.10 Encontre formas normais prenexas logicamente equivalentes a cada uma das seguintes L_{Arit}-fórmulas.

i) $(x_0 = 0) \lor \bot$. iii) $\neg\exists x_0\forall x_1(x_0 = x_1)$. v) $\exists x_0(x_0 = x_0) \land \neg\exists x_0(x_0 = s(x_0))$.

ii) $\exists x_0(x_0 = x_0)$. iv) $(x_0 = 0) \land \exists x_0(0 < x_0)$. vi) $\forall x_0(\forall x_1\neg(s(x_1) = x_0) \to x_0 = 0)$.

6.11 Considere o tipo de linguagem $L = (\{0, \mathsf{f}\}, \{\mathsf{P}, =\}, \mathcal{N})$, em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 1$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(=) = 2$, e considere a L-estrutura normal $E = (\mathbb{N}_0, \overline{\ })$, onde $\overline{0} = 0$, $\overline{\mathsf{f}} : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ é a função dada por $\overline{\mathsf{f}}(n) = n + 3$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e $\overline{\mathsf{P}} = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \text{ é múltiplo de } 3\}$.

a) Seja a a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = i$. Calcule: (i) $\mathsf{f}(\mathsf{f}(x_4))[a]$; (ii) $(\exists x_1 \mathsf{f}(x_1) = 0) \vee \neg \mathsf{P}(\mathsf{f}(x_2))[a]$.

b) Seja φ a $L-$fórmula $(\mathsf{f}(x_1) = x_2 \wedge \mathsf{P}(x_1)) \to \mathsf{P}(x_2)$. Prove que: (i) φ é válida em E; (ii) φ não é universalmente válida.

c) Represente as afirmações seguintes através de L-fórmulas válidas em E.

(i) Existe um número que é múltiplo de 3 mas não é zero.

(ii) Para todo o número que seja múltiplo de 3, esse número mais 3 é múltiplo de 3.

6.12 Seja $L = (\{\mathsf{f}\}, \{=\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem, em que $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 1$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e seja $E = (D, \overline{\ })$ uma L-estrutura normal.

a) Indique uma L-fórmula que seja válida em E sse $\overline{\mathsf{f}}$ é injetiva.

b) Indique uma L-fórmula que seja válida em E sse D tem dois elementos.

6.13 Seja $L = (\{c_1, c_2\}, \{R\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(c_1) = \mathcal{N}(c_2) = 0$ e $\mathcal{N}(R) = 2$, um tipo de linguagem. Seja $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, onde: $\varphi_1 = \forall x_0 R(x_0, x_0)$; $\varphi_2 = \forall x_0 \forall x_1 (R(x_0, x_1) \to R(x_1, x_0))$; $\varphi_3 = \forall x_0 \forall x_1 \forall x_2 ((R(x_0, x_1) \wedge R(x_1, x_2)) \to R(x_0, x_2))$.

a) Indique modelos de Γ, $\Gamma \cup \{R(c_1, c_2)\}$ e $\Gamma \cup \{\neg R(c_1, c_2)\}$.

b) Mostre que $\Gamma \models R(c_1, c_1)$ e que $\Gamma, R(c_1, c_2) \models R(c_2, c_1)$.

6.14 Sejam L um tipo de linguagem, φ uma L-fórmula e x uma variável. Mostre que:

a) $\{\exists x \neg\varphi, \forall x \varphi\}$ é semanticamente inconsistente. **b)** $\neg \exists x \varphi, \varphi \models \perp$.

c) $\forall x \varphi, \forall x \psi \models \forall x (\varphi \wedge \psi)$. **d)** $\exists x \varphi, \forall x (\varphi \to \psi) \models \exists x \psi$.

6.15 Considere as três afirmações: (i) "Todos os homens são mortais"; (ii) "Camões é um homem"; (iii) "Camões é mortal".

a) Represente (i), (ii) e (iii) por L-fórmulas φ_1, φ_2 e φ_3 respetivamente. Explicite L.

b) Mostre que $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_3$.

7. Dedução Natural para o Cálculo de Predicados

7.1 Seja $L = (\{c\}, \{R\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem onde $\mathcal{N}(c) = 0$ e $\mathcal{N}(R) = 1$. Encontre demonstrações em DN das seguintes fórmulas.

a) $R(c) \to \exists x_0 R(x_0)$ **b)** $\forall x_0 R(x_0) \to R(c)$

7.2 Prove que as seguintes L-fórmulas são teoremas de DN.

a) $\forall x (\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \forall x \psi)$ **b)** $\exists x (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x \varphi \vee \exists x \psi)$

c) $(\forall x \varphi \vee \forall x \psi) \to \forall x (\varphi \vee \psi)$ **d)** $\forall x (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \vee \forall x \psi)$ se $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$

7.3 Seja L um tipo de linguagem que inclua R como símbolo de relação unário. Diga se:

a) $R(x_0) \vdash \exists_{x_0} R(x_0)$. **b)** $R(x_0) \vdash \forall_{x_0} R(x_0)$.

c) $\exists x_0 R(x_0) \vdash R(x_0)$. **d)** $\forall x_0 R(x_0) \vdash R(x_0)$.

7.4 Considere o conjunto $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ onde φ_1 e φ_2 são as L_{Arit}-fórmulas $\forall x_0 (0 + x_0 = x_0)$ e $\forall x_0 \forall x_1 \forall x_2 (x_0 + x_1 = x_2 \to s(x_0) + x_1 = s(x_2))$, respetivamente. Mostre que:

a) $\Gamma \vdash 0 + s(0) = s(0)$. **b)** $\Gamma \vdash \exists x_3 \exists x_4 (x_3 + x_4 = s(0))$.

c) $\Gamma \vdash \exists x_3 (s(0) + 0 = x_3)$. **d)** $\Gamma \nvdash \exists x_3 (s(0) + x_3 = 0)$.

7.5 Apresente provas alternativas para os exercícios 6.13 **b)**, 6.14 **b)**, **c)** e **d)**, 6.15 **b)**, recorrendo a derivações em DN.