Universidade do Minho
Dep. Matemática

Geometria

Licenciatura em Ciências da Computação
11/03/2020
Primeiro Teste

Todas as respostas devem ser justificadas e os cálculos devem ser apresentados.

---

1. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de dois referenciais

$$\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\} \quad e \quad \mathcal{R}' = \{O', \mathcal{B}' = (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2)\}$$

verificando:

- $O = (1, 0)_{\mathcal{R}'}$
- $\begin{cases} \overrightarrow{v}'_1 = 2\overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2 \\ \overrightarrow{v}'_2 = -\overrightarrow{v}_1 \end{cases}$

Apresente a matriz de mudança de referencial entre os dois referenciais apresentados. Quais são as coordenadas de O' no referencial $\mathcal{R}$?

Método I

Sabemos que, se $M \equiv (x_1, x_2)_{\mathcal{R}}$ e $M \equiv (x_1, x_2)_{\mathcal{R}'}$, então
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ onde (w_1, w_2) é tal que $O' \equiv (w_1, w_2)_{\mathcal{R}'}$.

Como $O \equiv (0,0)_{\mathcal{R}}$ e $O \equiv (1,0)_{\mathcal{R}'}$ temos
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Portanto $O' = (-2, 1)_{\mathcal{R}}$.

A matriz de mudança de referencial de $\mathcal{R}'$ para $\mathcal{R}$ é:
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$

Método II

$\begin{cases} \overrightarrow{v_1}' = 2\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{v_2}' = -\overrightarrow{v_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_1}' = -2\overrightarrow{v_2}' - \overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{v_1} = -\overrightarrow{v_2}' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_1} = -\overrightarrow{v_2}' \\ \overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{v_1}' - 2\overrightarrow{v_2}' \end{cases}$

Logo a matriz de mudança de referencial de $\mathcal{R}$ para $\mathcal{R}'$ é:
$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Sejam (w_1, w_2) as coordenadas de O' em $\mathcal{R}$. Como $O' \equiv (0,0)_{\mathcal{R}'}$ temos
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -w_2 + 1 = 0 \\ -w_1 - 2w_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_2 = 1 \\ -w_1 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_2 = 1 \\ w_1 = -2 \end{cases}$

Portanto $O' = (-2, 1)_{\mathcal{R}}$.

2. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de referencial $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$, verificando

$$\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{v}_1 = 2, \quad \overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{v}_2 = -1, \quad \overrightarrow{v}_2.\overrightarrow{v}_2 = 2.$$

Determine o cosseno e o seno do ângulo orientado $\angle(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ formado pelos vetores

$$\overrightarrow{u}_1 = (1, -1)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{u}_2 = (0, -1)_{\mathcal{B}}.$$

Sabemos que $\cos \measuredangle(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = \dfrac{\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}}{\|\overrightarrow{u_1}\| \|\overrightarrow{u_2}\|}$.

$\overrightarrow{u_1} = (1, -1)_{\mathcal{B}} = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$
$\overrightarrow{u_2} = (0, -1)_{\mathcal{B}} = -\overrightarrow{v_2}$

Logo: $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = (\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}).(-\overrightarrow{v_2}) = -\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_2}.\overrightarrow{v_2} = 1 + 2 = 3$
$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_1} = (\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}).(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_2}.\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}.\overrightarrow{v_2} = 2 + 1 + 1 + 2 = 6 \Rightarrow \|\overrightarrow{u_1}\| = \sqrt{6}$
$\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_2} = (-\overrightarrow{v_2}).(-\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{v_2}.\overrightarrow{v_2} = 2 \Rightarrow \|\overrightarrow{u_2}\| = \sqrt{2}$

Portanto $\cos \measuredangle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \dfrac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{12}}{12} = \dfrac{6\sqrt{3}}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen} \measuredangle(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = \varepsilon\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \varepsilon \frac{1}{2}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0$ então $\varepsilon = -1$. Logo $\text{sen} \measuredangle(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = -\frac{1}{2}$. Note que $\measuredangle(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ tem amplitude $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.