Universidade do Minho 2020/2021

Probabilidades e Aplicações – CC e MAT (3º ano) 1º semestre

Trabalho nº1

Nome: Ricardo Nuno de Castro Cruz Número: A86789

---

1. Num passeio aleatório simétrico(em cada passo o jogador lança uma moeda equilibrada e ganha ou perde 1€ conforme sai cara ou coroa), representando a fortuna do jogador ao longo dos passos por $S_1, S_2, S_3, \ldots$, partindo de uma fortuna inicial $S_0 = 0$, estime, para $n = 10, 20, 50$, por meio de simulação (com 10^5 réplicas) a probabilidade de:

   (i) retorno à origem (i.e, empate) no instante $2n$

   Resposta: Para calcular a probabilidade de haver retorno à origem no instante $2n$ utilizei a fórmula

$$S_{2n} = \binom{2n}{n} \cdot 2^{-2m}$$

de modo a obter a probabilidade no instante $2n$. Como auxílio, utilizei a ferramenta R para calcular esta probabilidade.

```
> n <- c(10,20,50);
> prob <- function(n){
+     result <- choose(2*n, n)*2^(-2*n)
+     return (result)
+ }
> prob(n[1:3])
[1] 0.17619705 0.12537069 0.07958924
```

Figura 1: Probabilidade no instante $2n$, em que o $n = 10, 20, 50$

Na primeira linha o n toma valores $(10, 20, 50)$. Na linha seguinte, fiz uma função em que utiliza a fórmula acima indicada. E, posteriormente, chamei a função para os valores indicados no array n. Sendo que o resultado final:

- $S_{20} = 0.17619705$
- $S_{40} = 0.12537069$
- $S_{100} = 0.07958924$

(ii) não haver retorno à origem nos primeiros $2n$ passos.

Resposta: Comecei por declarar a variável $soma = 0$, $n = 10^5$ (número de réplicas) e, ainda a variável $m = [20, 40, 100]$ (variável com os passos S_{2n}). Depois disso, utilizei a função $2 * rbinom(n, x, p) - 1$, que gera n réplicas em x lançamentos de moeda com probabilidade p em que o resultado é "1" se sair *cara* e -1" se sair coroa e, finalmente utilizei a função *cumsum* para calcular as somas acumuladas do resultado do *rbinom*, como se pode ver na figura abaixo:

```
> soma <- 0; n <- 10^5; m <- c(20,40,100);
> moeda <- 2*rbinom(n,1,0.5)-1
> soma <- cumsum(c(0,moeda))
```

Figura 2: Cálculo das somas acumuladas

Por conseguinte, criei uma função que calcula quantas vezes não ouve retorno à origem e, posteriormente, calcula a probabilidade do não retorno à origem no instante $2n$ passos.

```
> nRetornoOrigem <- function(n, soma, m){
      counter <- 0;
      for (i in 1:m){
          if (soma[i] < 0) {
              counter = counter + 1;
          }
      }
      return(counter/m)
  }
```

Figura 3: Função que calcula a probabilidade < 0 no instante $2n$

Posto isto, chamei a função para calcular a probabilidade nos primeiros:

- **20** ($m[1]$) passos.

```
> soma[1:m[1]]
 [1]  0  1  0  1  0 -1  0  1  2  1  2  1  2  1  2  3  4  5  4  5
> nRetornoOrigem(n, soma, m[1])
[1] 0.05
```

Figura 4: Probabilidade nos primeiros 20 passos

- **40** ($m[2]$) passos.

```
> soma[1:m[2]]
 [1]  0  1  0  1  0 -1  0  1  2  1  2  1  2  1  2  3  4  5  4  5  6  7  8  7  6
[26]  7  8  7  6  5  6  5  4  5  6  7  8  9  8  7
> nRetornoOrigem(n, soma, m[2])
[1] 0.025
```

Figura 5: Probabilidade nos primeiros 40 passos

- **100** ($m[3]$) passos.

```
> soma[1:m[3]]
  [1]  0  1  0  1  0 -1  0  1  2  1  2  1  2  1  2  3  4  5  4  5  6  7  8  7  6
 [26]  7  8  7  6  5  6  5  4  5  6  7  8  9  8  7  8  9  8  7  6  7  8  9 10  9
 [51] 10 11 10  9 10  9  8  9  8  7  6  5  4  3  2  1  2  1  2  1  0 -1  0 -1  0
 [76]  1  0 -1  0  1  0  1  0  1  0 -1 -2 -1  0 -1  0  1  2  1  2  1  0  1  0 -1
> nRetornoOrigem(n, soma, m[3])
[1] 0.09
```

Figura 6: Probabilidade nos primeiros 100 passos

(iii) o último empate ocorrer na primeira [segunda] metade do jogo, ou seja, estritamente antes do instante n [estritamente depois do instante n], num passeio com $2n$ passos.

Resposta: Determinar a probabilidade de o último empate ocorrer na primeira metade do jogo, ou seja, estritamente antes do instante n, corresponde a um menos a probabilidade deste mesmo empate acontecer na segunda metade do jogo, posteriormente ao instante n. Por outro lado, a probabilidade de o último empate ocorrer na segunda metade do jogo, ou seja, estritamente depois do instante n, corresponde a um menos a probabilidade deste mesmo empate acontecer na primeira metade do jogo, anteriormente ao instante n.

(iv) Elabore um gráfico com a probabilidade (estimada) de o último empate ocorrer no instante $2k$, no caso $n = 20$ (i.e, em 40 jogos), em função do k ($k = 0, 1, 2, ..., 20$).

Finalmente comente os resultados obtidos.

Resposta: Com base na função que se utilizou na primeira alínea:

$$S_{2n} = \binom{2n}{n} \cdot 2^{-2m}$$

que determina a probabilidade de retorno à origem no instante $2n$ e com o auxílio da função *plot*, calculo a probabilidade estimada de o último empate ocorrer no instante $2k$, no caso de n=40 jogos, em função do $k = 0, 1, 2, ..20$.

```
>
> plot(1:40, choose(2*20,20)*2^(-2*20)/(1:40), xlab = "Número de jogos", ylab="Prob. ú
ltimo empate ocorrer no instante 2k")
```

Figura 7: Código Utilizado para criar o gráfico

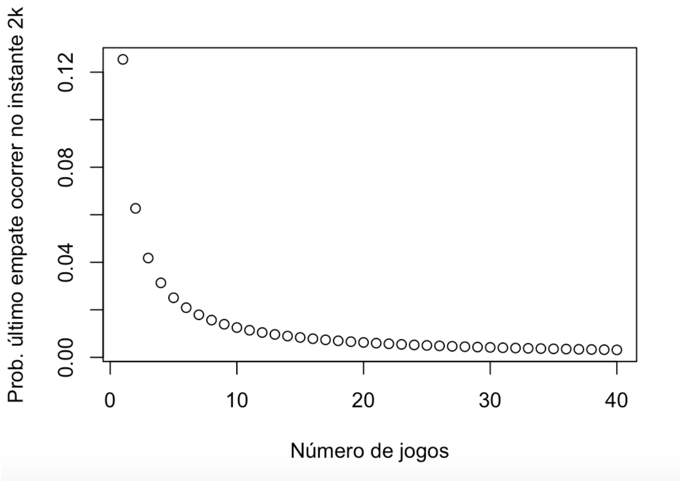

Figura 8: Gráfico com probabilidade (estimada) de último empate $S_{40} = 0$

Com base neste gráfico, é possível comprovar que à medida que o número de jogos vai aumentando, a probabilidade do último empate ser no instante $2k$ vai diminuindo, pelo que quanto maior o k menor será a probabilidade de o último empate ser no instante $2k$.

2. Dada uma v.a X com distribuição $Poisson(\lambda)$ calcule o valor médio da v.a. $\frac{1}{1+x}$. Particularize para $\lambda = 1$. Comente os resultados obtidos.

   O cálculo do valor médio, segundo os Momentos de $Poisson$, é dado por:

$$E(X) = \lambda$$

   Como queremos calcular o valor médio da variável aleatória $\frac{1}{1+X}$, então fica:

$$E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \lambda$$

   Começo por desenvolver a primeira parte do cálculo de valor médio:

$$E\left(\frac{1}{1+x}\right) = \sum_i \frac{1}{1+x_i} \cdot p_i = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{1+n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$$

   .

   Agora, igualando $E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \lambda$, fica:

$$\frac{1}{n(n+1)} = 1 \Leftrightarrow 1 = n(n+1) \Leftrightarrow 1 = n^2 + n \Leftrightarrow 0 = n^2 + n - 1 \Leftrightarrow$$

$$E\left(\frac{1}{1+X}\right) = 0.618034$$