Aula 12

12 Novembro

Problema Derivação

quero derivada $(f) \longmapsto f'$

Problema Primitivação

quero primitiva (f)

olho para f como a derivada de alguém

$f = (\,?\,)'$, isto é, $f = (F)'$

primitiva $(f) = F$

O problema deste capítulo é o de, dada uma função

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R},$$

determinar uma nova função

$$F : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I \qquad (*)$$

Existindo solução do problema, dizemos que f é primitivável em I e cada função F verificando a condição $(*)$ é chamada uma primitiva ou uma antiderivada de f em I

Da definição é imediato que

F é uma primitiva de f sse f é a derivada de F

Fica assim claro que a primitivação é o processo inverso da derivação.

Exemplos.

① $f(x) = \cos x, \; x \in \mathbb{R}$

A função $F(x) = \operatorname{sen} x, \; x \in \mathbb{R}$, é uma primitiva de $f(x) = \cos x, \; x \in \mathbb{R}$. De facto, como $(\operatorname{sen} x)' = \cos x, \; x \in \mathbb{R}$, resulta $F'(x) = f(x)$

② $f(x) = 1 + x^2$

A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + x^2$ é primitivável, visto que $F(x) = x + \frac{x^3}{3}, \; x \in \mathbb{R}$, é uma primitiva de f

Exemplos. Em qualquer intervalo contido no domínio das funções temos que.

① $\int e^x \, dx = e^x + C$, $C \in \mathbb{R}$, porque $(e^x)' = e^x$

② $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$, $C \in \mathbb{R}$ porque $(-\cos x)' = \operatorname{sen} x$

③ $\int 3x^2 \, dx = x^3 + C$, $C \in \mathbb{R}$, porque $(x^3)' = 3x^2$

④ $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$, $C \in \mathbb{R}$ porque $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

⑤ $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ porque $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$

$(\alpha \neq -1)$

⑥ $\int \sqrt[3]{x^4} \, dx = \int x^{4/3} \, dx = x^{7/3} \cdot \frac{3}{7} + C$, $C \in \mathbb{R}$

Primitivas Imediatas

Chamamos primitivas imediatas àquelas primitivas que se obtêm por simples reversão das regras de derivação recorrendo, eventualmente, a alguns artifícios de cálculo

Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em I. No que se segue C denota uma constante real arbitrária

1. $\int a \, dx = ax + C \quad (a \in \mathbb{R})$

2. $\int f'(x) \, f^{\alpha}(x) \, dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ Regra da potência

3. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C$

4. $\int a^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Em particular, se $a = e$ $\quad \int e^{f(x)} f'(x) \, dx = e^{f(x)} + C$

5 $$\int f'(x)\cos(f(x))\,dx = \operatorname{sen}(f(x)) + C$$

6 $$\int f'(x)\operatorname{sen}(f(x))\,dx = -\cos(f(x)) + C$$

(. . .)

15. $$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + C$$

Exemplo.

$$\int 2 \operatorname{sen} x \, (\cos x)^5 \, dx$$

$f(x) = \cos x$
$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$\alpha = 5$

$$= \int -2 \, (-\operatorname{sen} x) \, (\cos x)^5 \, dx$$

$$= -2 \int \underbrace{(-\operatorname{sen} x)}_{f'} \, \underbrace{(\cos x)^5}_{f^5} \, dx$$

$$\underset{R_2}{=} -2 \, \frac{(\cos x)^6}{6} + C$$

$$= -\frac{1}{3} (\cos x)^6 + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$