Aula 8

29 Outubro

Teorema de Weierstrass

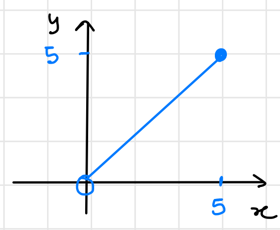
Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua

Então

$$\exists\, c, d \in [a,b] \quad \forall x \in [a,b] \qquad f(c) \le f(x) \le f(d)$$

Significa que uma função contínua definida num intervalo fechado e limitado tem máximo e mínimo

1) É fundamental que o conjunto seja fechado!
Se não pode acontecer que f seja contínua num conjunto limitado sem atingir aí os seus extremos
É o caso, por exemplo, da função $f(x) = x$, $x \in \,]0, 5]$, que não atinge mínimo. Isto acontece porque $]0, 5]$ não é fechado



2- É fundamental que o conjunto seja limitado!

Se não pode acontecer que f seja contínua num conjunto fechado sem atingir aí o máximo ou o mínimo.

Consideremos a função $g(x) = x$, $x \in [0, +\infty[$, que não atinge máximo. Isto acontece porque $[0, +\infty[$ não é limitado

Teorema de Bolzano - Cauchy ou Teorema do valor intermédio

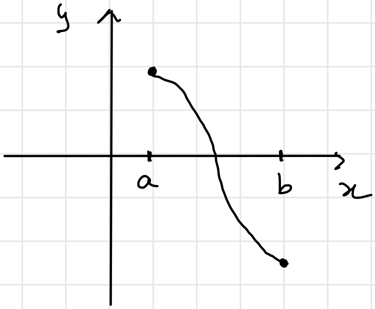
Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a) \neq f(b)$. Se K é um número real estritamente compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = K$

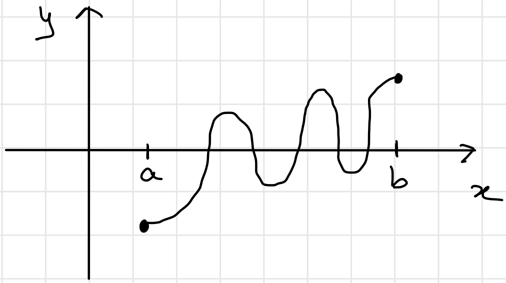
O Teorema estabelece que uma função contínua num intervalo (é fundamental que f esteja definida num intervalo) não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios

Corolário. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua e tal que $f(a) f(b) < 0$ então existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$.

Observações:

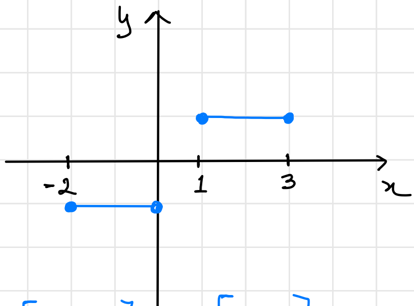
1 - O Corolário estabelece que uma função contínua num intervalo não muda de sinal sem se anular





2 - É fundamental que o domínio de f seja um intervalo. Caso contrário, a função pode mudar de sinal sem se anular

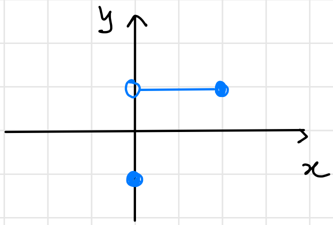
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [1,3] \\ -1 & \text{se } x \in [-2,0] \end{cases}$$



f é contínua

$D = [-2,0] \cup [1,3]$

3 - É fundamental que a função seja contínua



$D = [0,1]$

Exemplo de uma função bijetiva contínua com inversa descontínua

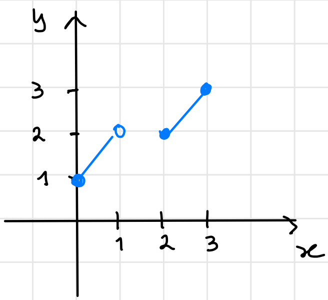
$$f: [0,1[\cup [2,3] \longrightarrow [1,3]$$

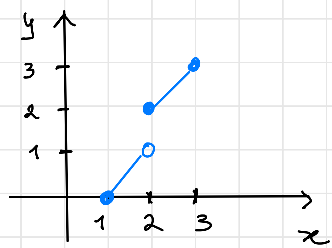
$$x \longmapsto \begin{cases} x+1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

O domínio de f não é um intervalo

$$f^{-1}: [1,3] \longrightarrow [0,1[\cup [2,3]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x-1 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ x & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$





A função f é contínua, mas a sua inversa não é contínua. Isto acontece porque o domínio de f não é um intervalo

Exercício 21 da Folha 4:

Mostre que a equação $x = \cos x$, $x \in [0, \pi/2]$, tem solução no intervalo indicado

Consideremos a função $f(x) = x - \cos x$, $x \in [0, \pi/2]$

Temos que.

- f é contínua por ser a diferença de duas funções contínuas
- $f(0) = -1 < 0$
- $f(\pi/2) = \pi/2 > 0$.

Então, pelo Teorema de Bolzano - Cauchy,

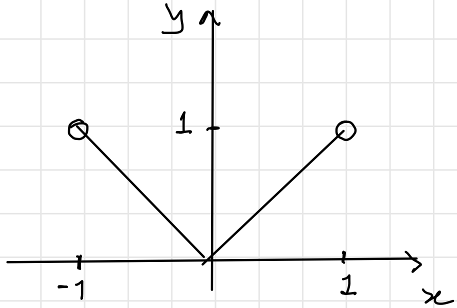
$\exists\, x \in \,]0, \pi/2[$ tal que $f(x) = 0$, isto é,

tal que $x = \cos x$

Observemos que: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - \cos x = 0$

$\Leftrightarrow x = \cos x$

24. Considere a função $g :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = |x|$. Verifique que g possui um mínimo mas não possui máximo. Confronte o resultado com o teorema de Weierstrass.



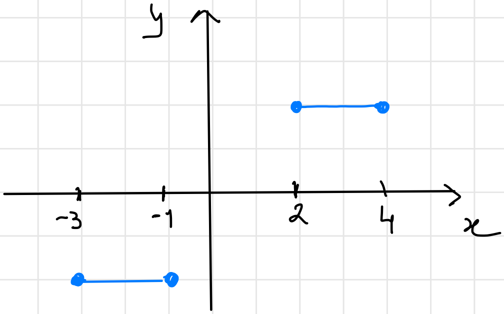
Temos que $Im(g) = [0,1[$

O contradomínio de g tem mínimo igual a zero mas não tem máximo.

Não há contradição com o Teorema de Weierstrass porque o conjunto $]-1,1[$ apesar de limitado, não é fechado

Exercício 23 a) (Folha 4). Dê exemplo, justificando, ou mostre porque não existe uma função:

a) $f: X \to \mathbb{R}$ contínua que nunca se anula e que toma valores negativos e positivos



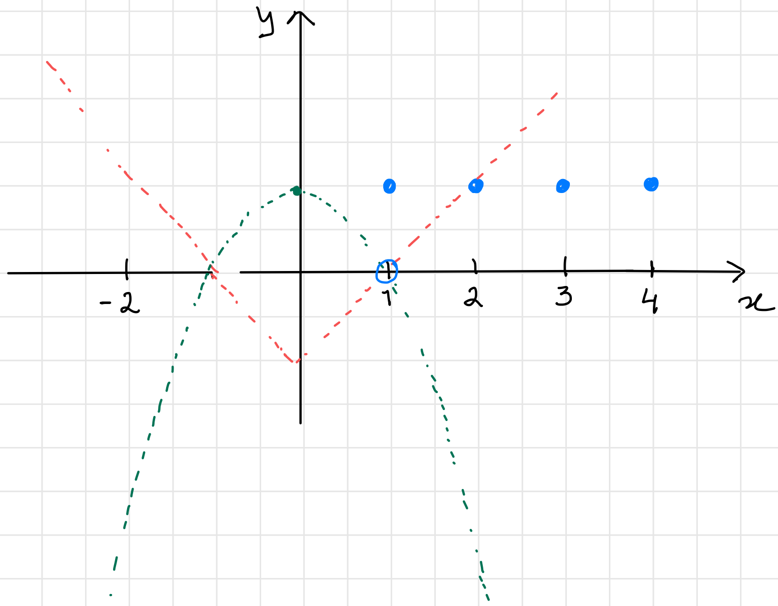
$D = [-3,-1] \cup [2,4]$

f é contínua

Exercício 5. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ -x^2+1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{N} \\ |x|-1 & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$

(a) Diga para que valores de $a \in \mathbb{R}$ existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e determine o seu valor.

(b) Indique, justificando, o conjunto dos pontos onde f é contínua.



a) Temos que:

- $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$

- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

- $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$

b) Temos que:

- f é contínua no ponto -1 porque

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 0 = f(-1)$$

- f não é contínua no ponto 1 porque

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0 \neq 1 = f(1)$$

- Nos pontos $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ f não é contínua em a porque $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$.