Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

2016/2017
LCC
Análise

Teste 1 - modelo B    Duração: 1h30m    Tolerância: 15 minutos

# Proposta de resolução

1. Considere a função real definida por

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{z+2}} \ln(x^2+y^2-z).$$

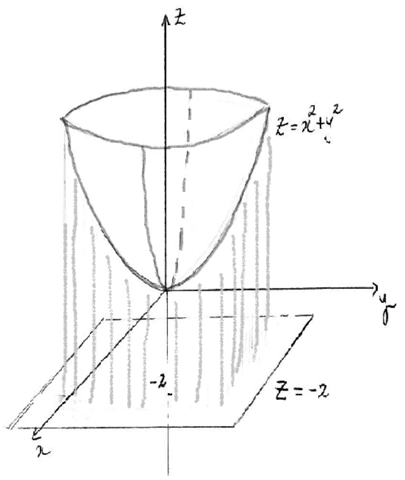
   (a) Calcule o valor de $f$ nos pontos $(x,y,z)$ tais que $x^2+y^2=4$ e $z=3$.
   (b) Descreva e esboce graficamente o domínio de $f$.

Resolução.

   (a) Quando $x^2+y^2=4$ e $z=3$, $f(x,y,x) = \frac{1}{\sqrt{3+2}} \ln(4-3) = 0$
   (b) Domínio de $f$ :

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z+2>0 \quad \text{e} \quad x^2+y^2-z>0\right\}$$

O domínio de $f$ são todos os pontos que estão acima do plano de equação $z=-2$ e abaixo do parabolóide de equação $x^2+y^2=z$ (representados na figura abaixo).




2. Justifique que cada uma das afirmações seguintes é *verdadeira*.

   (a) A função $f$ definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{2x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ não é contínua em $(0,0)$.
   (b) Considere a curva de interseção do parabolóide $z=(x-1)^2+y^2$ com o plano $y=1$. O declive da reta tangente a esta curva no ponto $(0,1,2)$ é igual a $-2$.

(c) A taxa de variação de $z = x^2y^3 + x^2y + y$ na direcção do eixo dos $yy$ é sempre positiva.

(d) O vetor unitário $\vec{i} = (1, 0)$ é ortogonal à curva de nível 2 da função $f(x, y) = x^2 + \operatorname{sen}(xy)$ no ponto $P = (1, \frac{\pi}{2})$.

(e) Sabendo que a equação $\mathrm{e}^{xy} + y = x$ define implicitamente $y$ como função de $x$ no ponto $(0, -1)$, temos $\dfrac{dy}{dx}(0) = 2$.

Resolução.

(a) Para que $f$ seja contínua em $(0, 0)$ deve ter-se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0).$$

No entanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ não existe, já que os limites trajetorias segundo as retas $x = 0$ e $y = 0$ são distintos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2 - y^2}{2x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2 - y^2}{2x^2 + y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0}(-1) = -1.$$

Logo, $f$ não é contínua em $(0, 0)$.

(b) O declive da reta tangente àquela curva no ponto $(0, 1, 2)$ é dado por

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) = 2(x - 1)\big|_{(0,1)} = -2.$$

(c) A taxa de variação de $z$ na direção do eixo dos $yy$ é dada por

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y^2 + x^2 + 1 = x^2(2y^2 + 1) + 1 \geq 1, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(d) O vetor gradiente $\vec{\nabla} f(x, y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \big(2x + y\cos(xy), x\cos(xy)\big)$ no ponto $P = (1, \frac{\pi}{2})$ é ortogonal à curva de nível $f(x, y) = 2$. Temos

$$\vec{\nabla} f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \left(2 + \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (2, 0).$$

O vetor $\vec{i}$ é colinear com o vetor $\vec{\nabla} f\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ e, portanto, é também perpendicular à curva de nível $f(x, y) = 2$.

(e) Seja $F(x,y) = \mathrm{e}^{xy} + y - x$. Então,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{y\,\mathrm{e}^{xy} - 1}{x\,\mathrm{e}^{xy} + 1}.$$

Assim, no ponto $x = 0$, a que corresponde $y = -1$ de forma a que $\mathrm{e}^{xy} + y - x = 0$, vem

$$\frac{dy}{dx}(0) = -\left.\frac{y\,\mathrm{e}^{xy} - 1}{x\,\mathrm{e}^{xy} + 1}\right|_{(0,-1)} = -\frac{-1-1}{0+1} = 2.$$

3. Mostre que a função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x\,\mathrm{e}^{y} + y\,\mathrm{e}^{x}$$

é uma solução da equação

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = x\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + y\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}.$$

<u>Resolução</u>.

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{y} + y\,\mathrm{e}^{x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^{y} + y\,\mathrm{e}^{x}) = y\,\mathrm{e}^{x}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}(y\,\mathrm{e}^{x}) = y\,\mathrm{e}^{x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\,\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x\,\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{x}) = x\,\mathrm{e}^{y}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial x}(x\,\mathrm{e}^{y}) = x\,\mathrm{e}^{y},$$

e ainda

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x\,\mathrm{e}^{y}) = \mathrm{e}^{y},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{x}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{x}\right) = \mathrm{e}^{x}.$$

Assim,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = y\,\mathrm{e}^{x} + x\,\mathrm{e}^{y} = y\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + x\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}.$$

4. Se $f$ é uma função diferenciável e $z = f(u)$ com $u = x + y$, use a regra de derivação da cadeia para mostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

<u>Resolução</u>.

Fazendo $u = x + y$ e usando a regra de derivação da cadeia temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dz}{du}\cdot 1 = \frac{dz}{du} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dz}{du}\cdot 1 = \frac{dz}{du}.$$

Ou seja, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5. Use diferenciais para obter uma aproximação do valor da função

$$f(x, y, z) = \ln(x - 3y + 2z)$$

no ponto $(6.9, 2.06, 0.01)$. Observe que $f(7, 2, 0) = 0$.

Resolução.

Consideremos o ponto $(x, y, z) = (7, 2, 0)$ e os acréscimos

$$\Delta x = 6.9 - 7 = -0.1, \qquad \Delta y = 2.06 - 2 = 0.06 \qquad \text{e} \qquad \Delta z = 0.01 - 0 = 0.01.$$

O diferencial total $dz$ é dado por

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz \\ &= \frac{1}{x - 3y + 2z} \cdot dx + \frac{-3}{x - 3y + 2z} \cdot dy + \frac{2}{x - 3y + 2z} \cdot dz \\ &= \frac{1}{x - 3y + 2z} \cdot \Delta x + \frac{-3}{x - 3y + 2z} \cdot \Delta y + \frac{2}{x - 3y + 2z} \cdot \Delta z \end{aligned}$$

e temos a aproximação

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \simeq df + f(x, y, z).$$

Para $(x, y, z) = (7, 2, 0)$ e $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (-0.1, 0.06, 0.01)$ vem

$$\begin{aligned} df &= \frac{1}{7 - 6 + 0} \cdot (-0.1) + \frac{-3}{7 - 6 + 0} \cdot 0.06 + \frac{2}{7 - 6 + 0} \cdot 0.01 \\ &= -0.1 - 0.18 + 0.02 = -0.26 \end{aligned}$$

e

$$f(6.9, 2.06, 0.01) \simeq -0.26 + f(7, 2, 0) = -0.26 + 0 = -0.26.$$

6. Suponha que o potencial elétrico $V$ no ponto $(x, y, z)$ de uma certa região do espaço é dado por

$$V(x, y, z) = 2y^2 - 4zy + xyz^3.$$

   (a) Determine a taxa de variação de $V$ no ponto $P = (1, 1, 0)$ na direção de $P$ para $Q = (2, 2, -1)$.
   (b) Qual a direção segundo a qual a taxa de variação de $V$ em $P$ é máxima? Qual o valor dessa taxa?
   (c) Determine uma direção segundo a qual a taxa de variação de $V$ em $P$ seja nula.

Resolução.

(a) Consideremos o vetor unitário $\vec{u}$ com a mesma direção e sentido do vetor $\overrightarrow{PQ}$,

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{||\overrightarrow{PQ}||} = \frac{(1, 1, -1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

e o vetor gradiente de $V$,

$$\vec{\nabla} V(x, y, x) = (yz^3, 4y - 4z + xz^3, -4y + 3xyz^2).$$

No ponto $P = (1,1,0)$, a taxa de variação de $V$ na direção de $\overrightarrow{u}$ corresponde à derivada direcional

$$D_{\overrightarrow{u}}V(1,1,0) = \vec{\nabla}V(1,1,0) \cdot \overrightarrow{u} = (0,4,-4) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 8\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(b) A direção segundo a qual a taxa de variação de $V$ em $P$ é máxima é a direção do vetor gradiente,

$$\vec{\nabla}V(1,1,0) = (0,4,-4),$$

e o valor dessa taxa é igual à norma do vetor gradiente,

$$||\nabla V(1,1,0)|| = ||(0,4,-4)|| = 4\sqrt{2}.$$

(c) Pretende-se determinar um vetor com a mesma direção de um vetor unitário $\overrightarrow{v} = (a,b,c)$ tal que

$$D_{\overrightarrow{v}}V(1,1,0) = \nabla V(1,1,0) \cdot \overrightarrow{v} = (0,4,-4) \cdot (a,b,c) = 4b - 4c = 0,$$

ou seja, tal que $b = c$. Por exemplo, o vetor $\overrightarrow{w} = (1,1,1)$ satisfaz esta condição.

7. Considere a superfície cónica $S$ de equação

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

(a) Determine uma equação do plano tangente a $S$ no ponto $P = (1,1,\sqrt{2})$.

(b) Duas superfícies dizem-se *ortogonais* num ponto de interseção $Q$ se as retas normais às superfícies no ponto $Q$ são ortogonais. Mostre que a superfície $S$ e a superfície esférica de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (r > 0)$$

são ortogonais em todos os pontos da sua intersecção.

<u>Resolução</u>.

(a) Seja $G(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. A equação do plano tangente à superfície cónica no ponto $(1,1,\sqrt{2})$ é dada por

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{(1,1,\sqrt{2})} \cdot (x-1) + \left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{(1,1,\sqrt{2})} \cdot (y-1) + \left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{(1,1,\sqrt{2})} \cdot (z-\sqrt{2}) = 0 \\
\iff &(2x)|_{(1,1,\sqrt{2})} \cdot (x-1) + (2y)|_{(1,1,\sqrt{2})} \cdot (y-1) + (-2z)|_{(1,1,\sqrt{2})} \cdot (z-\sqrt{2}) = 0 \\
\iff &2(x-1) + 2(y-1) - 2\sqrt{2}(z-\sqrt{2}) = 0 \iff x + y - \sqrt{2}z = 0.
\end{aligned}$$

(b) Basta mostrar que os vetores gradientes nos pontos de interseção das duas superfícies são ortogonais, pois estes vetores definem as retas normais. De facto, sendo $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $(a,b,c)$ um ponto de interseção das duas superfícies, temos

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}G(a,b,c) \cdot \vec{\nabla}F(a,b,c) &= (2a,2b,-2c) \cdot \vec{\nabla}(2a,2b,2c) \\
&= 4a^2 + 4b^2 - 4c^2 \\
&= 4(a^2 + b^2 - c^2) = 0,
\end{aligned}$$

uma vez que $a^2 + b^2 - c^2 = 0$ (e também $a^2 + b^2 + c^2 = r^2$).