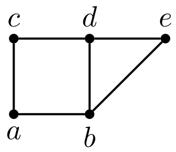
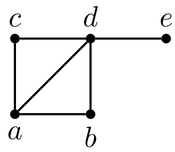
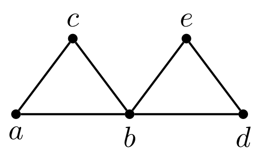
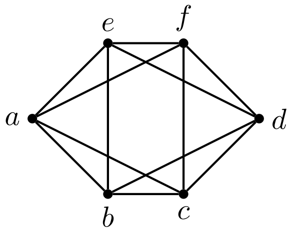
Matemática Discreta

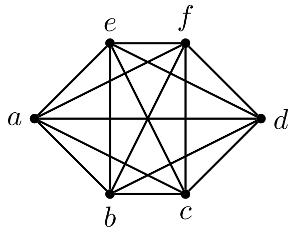
1. Escreva uma descrição formal de cada um dos seguinte grafos:

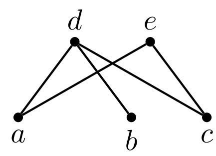
(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

(f) 

2. Determine as matrizes de incidência e de adjacência de cada um dos grafos apresentados no exercício anterior.

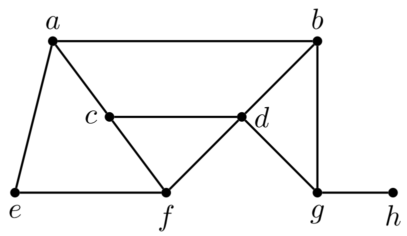
3. Desenhe um grafo que tenha como matriz de adjacência a matriz:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Desenhe um grafo que tenha como matriz de incidência a matriz:

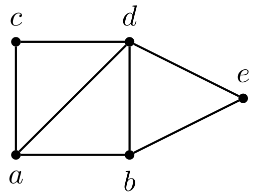
(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

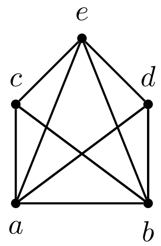
5. Considere o seguinte grafo



(a) Indique um caminho de a a h que não seja simples.
(b) Indique um caminho simples de a a h que não seja elementar.
(c) Indique um caminho elementar de a a h.
(d) Indique um circuito de G que não seja ciclo.
(e) Indique um ciclo de G de comprimento 7.
(f) Verifique se os seguintes grafos são subgrafos de G:
   i. $G_1 = (\{a, b, e, f\}, \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{a, f\}, \{e, f\}\})$;
   ii. $G_2 = (\{a, b, d, g, h\}, \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, g\}, \{d, g\}, \{g, h\}\})$;
   iii. $G_3 = (\{a, c, d, e, f\}, \{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{e, f\}\})$.
(g) Determine o subgrafo de G induzido por cada um dos subconjuntos de vértices seguintes:
   i. $\{a, b, c, d, e\}$; ii. $\{b, c, e, f, g\}$; iii. $\{b, c, e\}$.

6. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um *subgrafo de vértice eliminado* é um subgrafo $G' = (V', E')$ induzido de G onde $V' = V \setminus \{v\}$, para algum $v \in V$. Represente os subgrafos de vértice eliminado de:

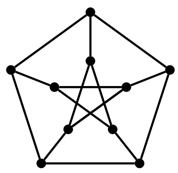
   (a) 

   (b) 

   (c) K_5;

   (d) $K_{2,3}$.

7. Considere o grafo de Petersen aqui apresentado



   Determine

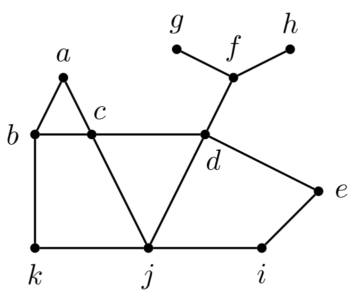
   (a) um caminho simples de comprimento 5;

   (b) um caminho elementar de comprimento 9;

   (c) ciclos de comprimento 5, 6, 8 e 9.

8. Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $a, b \in V$. Mostre que se existe um caminho entre a e b então existe um caminho elementar entre a e b.

9. (a) Considere o grafo



   i. Determine dois caminhos elementares distintos de f a k.

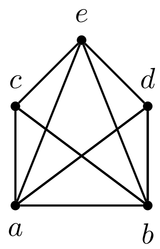
   ii. Determine um ciclo com vértices usados na alínea anterior.

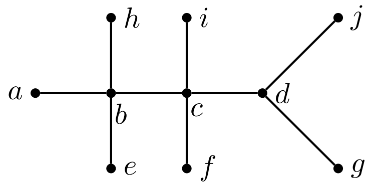
   (b) Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $x, y \in V$. Mostre que se existem dois caminhos elementares distintos entre x, y, então G admite um ciclo.

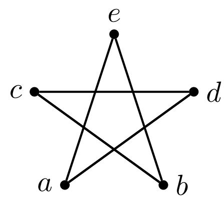
10. Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $u, v \in V$. Seja $d(u, v)$ definido por: se $u = v$, então $d(u, v) = 0$; se $u \neq v$ e existe um caminho entre u e v, então $d(u, v)$ é o menor dos comprimentos dos caminhos elementares de u a v; caso contrário $d(u, v) = \infty$. A $d(u, v)$ chama-se *distância* entre u e v. Determine a distância entre dois quaisquer vértices do grafo

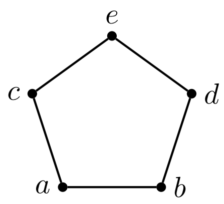
    (a) K_5; (b) $K_{2,3}$ (c) de Petersen.

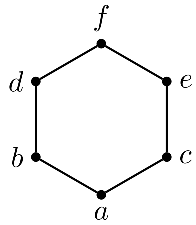
11. Dos seguintes grafos, diga quais são bipartidos, indicando uma partição do conjunto dos seus vértices

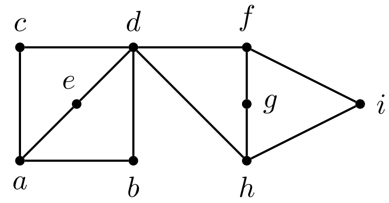
(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

(f) 

12. Seja $G = (V, E)$ o grafo onde $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ e

$$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, j\}, \{c, g\}, \{d, g\}, \{f, d\}, \{f, e\}, \{h, b\}, \{h, f\}, \{i, a\}, \{i, h\}\}.$$

   (a) Represente o grafo G.
   (b) Mostre que G é bipartido, indicando uma partição dos seus vértices.

13. Dê exemplo, caso exista, de:

   (a) um grafo sem vértices de grau ímpar;
   (b) um grafo sem vértices de grau par;
   (c) um grafo com exatamente um vértice de grau ímpar;
   (d) um grafo com exatamente um vértice de grau par;
   (e) um grafo com exatamente dois vértices de grau ímpar;
   (f) um grafo com exatamente dois vértices de grau par.

14. Prove o Teorema da Amizade: "Em toda a cidade com pelo menos 2 habitantes, residem 2 pessoas com o mesmo número de amigos que habitam nessa mesma cidade."

15. Qual o número mínimo de vértices de um grafo simples com 200 arestas? Porquê?

16. A *sequência gradual* de um grafo é a sequência dos graus dos seus vértices ordenados do maior ao menor. Por exemplo, a sequência gradual do grafo completo K_4 é $3, 3, 3, 3$ e a sequência gradual do grafo $K_{2,3}$ é $3, 3, 2, 2, 2$. Para cada uma das sequências de números, indique as que são sequência gradual de algum grafo. Neste caso, represente o grafo em questão.

   (a) $4, 4, 4, 4$; (b) $3, 3, 3, 2, 1$;
   (c) 1,1,1,1,1,1; (d) 5,4,4,3,2,2;
   (e) 4,3,3,2,2,1; (f) 4,4,3,3,3,3,3,3,2,2.

17. Liste todas as sequências graduais de um grafo com 4 vértices.

18. Sejam $G = (V, E)$ um grafo e R a relação definida por

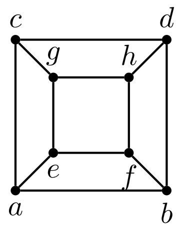
$$\forall x, y \in V, \quad x\, R\, y \Leftrightarrow x = y \text{ ou existe um caminho de } x \text{ para } y.$$

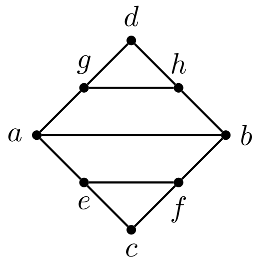
Mostre que R é uma relação de equivalência.

19. Um *conjunto de desconexão* de um grafo conexo G é um conjunto de arestas cuja remoção dá origem a um grafo desconexo.

(a) Encontre conjuntos de desconexão para o grafo de Petersen com $3, 4$ e 5 arestas.

(b) Encontre conjuntos de desconexão com o menor número possível de arestas para os grafos seguintes:

(i) 

(ii) 

20. Construa todas as árvores possíveis com 6 vértices.

21. (a) Mostre que em qualquer árvore, a diferença entre o número de vértices e o número de arestas é 1. [Sugestão: Use o princípio de indução forte sobre o número de arestas.]

(b) Uma *floresta* é um conjunto de árvores. Mostre que se G é uma floresta com c árvores, v vértices e a arestas, então $a = v - c$.

22. (a) Mostre que um grafo conexo com v vértices tem pelo menos $v - 1$ arestas.

(b) Mostre que um grafo conexo com v vértices e exatamente $v - 1$ arestas é uma árvore.

23. Mostre que qualquer árvore com pelo menos dois vértices é um grafo bipartido. Quais as árvores que são grafos bipartidos completos?

24. O *complemento* de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$, onde

$$\overline{V} = V \text{ e } \overline{E} = \{\{x, y\} \subseteq V : x \neq y, \{x, y\} \notin E\}.$$

(a) Determine o complemento de $K_{3,5}$.

(b) Determine $\overline{G}$, onde G é um grafo desconexo com duas componentes conexas que são os grafos K_3 e K_5.

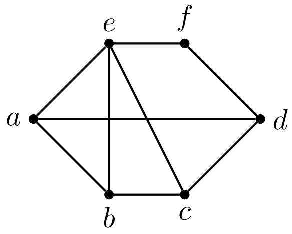
(c) Dado o grafo ciclo C_5, mostre que $\overline{C_5}$ e C_5 são o mesmo grafo.

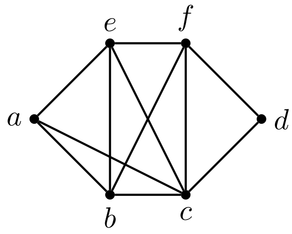
(d) Considere o grafo linha P_3. Mostre que $\overline{P_3}$ e P_3 são o mesmo grafo.

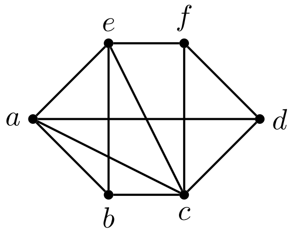
(e) Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "O complemento de um grafo conexo é um grafo conexo.".

25. Prove que qualquer árvore satisfaz a fórmula de Euler.

26. Para cada um dos seguintes grafos planares encontre uma representação planar e indique o número de faces:

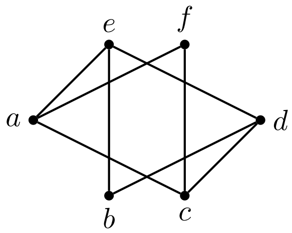
(a) 

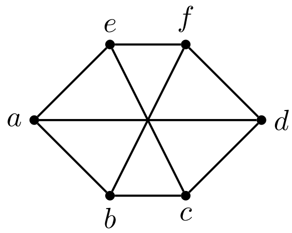
(b) 

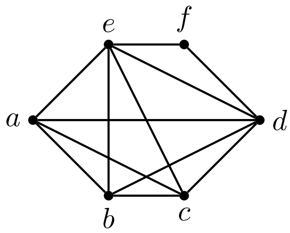
(c) 

27. Encontre uma representação planar de $K_{2,6}$.

28. Para cada um dos grafos seguintes, encontre uma representação planar ou justifique porque é que não é possivel ter tal representação.

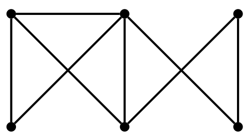
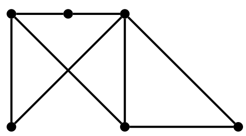
(a) 

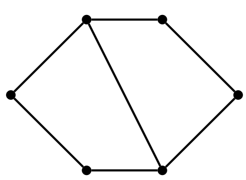
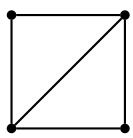
(b) 

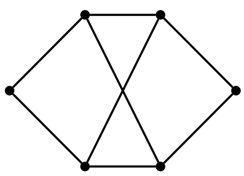
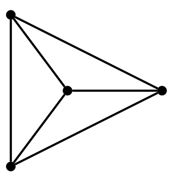
(c) 

29. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $G_n = (V, E)$ o grafo tal que $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $E = \{\{v_i, v_j\} \subseteq V : i \neq j \text{ e } \text{m.d.c.}(i, j) = 1\}$. Para que valores de n é G_n planar?

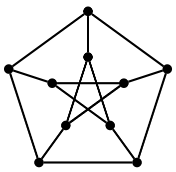
30. Mostre que os seguintes pares de grafos são homeomorfos, fazendo a correta modificação de vértices de grau 2:

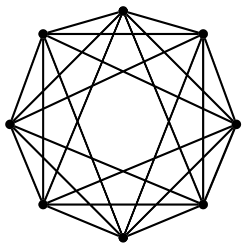
(a)  

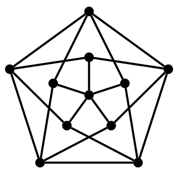
(b)  

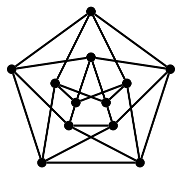
(c)  

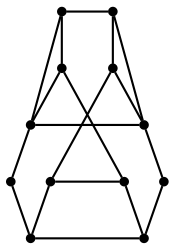
31. Use o Teorema de Kuratowski para provar que os seguintes grafos não são planares:

(a) 

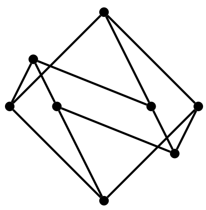
(b) 

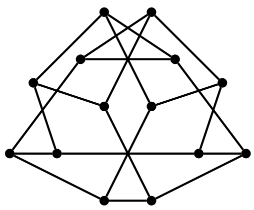
(c) 

(d) 

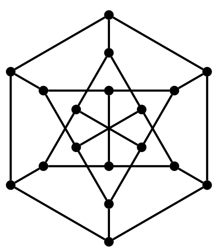
(e) 

32. Considere os dois seguintes grafos. Prove que o primeiro é planar e o segundo não é planar.

(a) 

(b) 

33. Justifique que o grafo de Pappus, a seguir apresentado, não é planar.



34. Construa um grafo com 6 vértices, sendo dois deles de grau 4 e quatro de grau 3, tal que

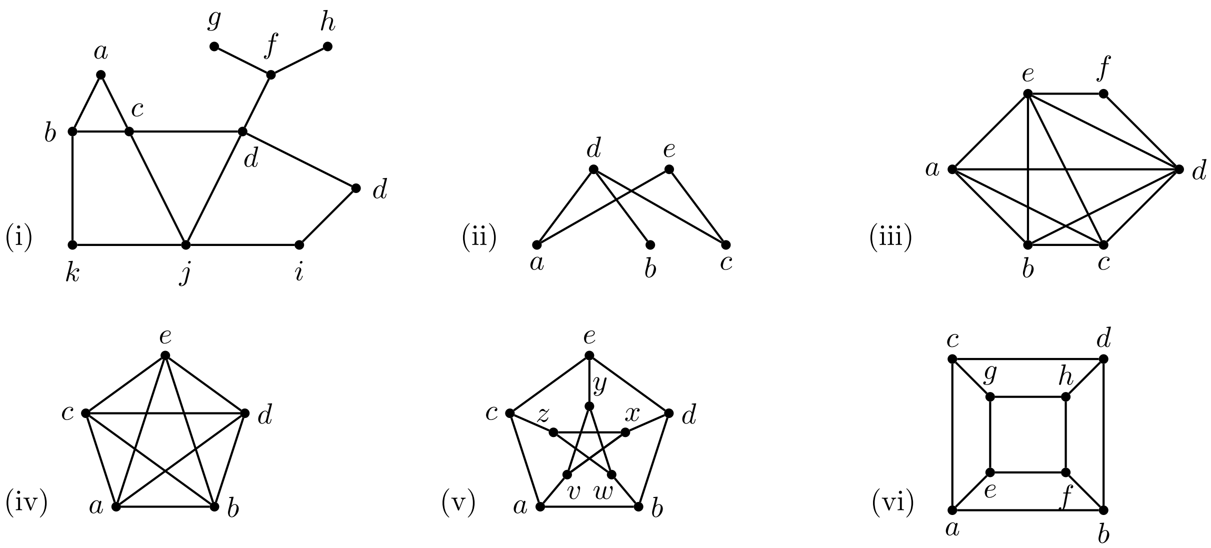
   (a) G seja planar;

   (b) G não seja planar.

35. Seja G um grafo conexo planar com pelo menos 3 vértices. Mostre que G tem pelo menos um vértice de grau não superior a 5.

Matemática Discreta

36. Considere os seguintes grafos:



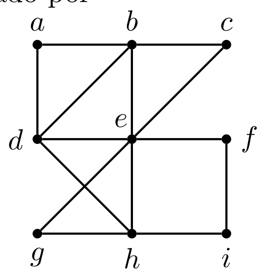
(a) Indique os que são eulerianos.
(b) Indique os que são semieulerianos.
(c) Indique os que são hamiltonianos.

37. Quais dos grafos platónicos são eulerianos? E hamiltonianos?

38. Para que valores de $m, n \in \mathbb{N}$ o grafo $K_{m,n}$ é euleriano?

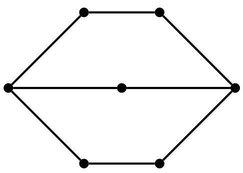
39. Para que valores de $m, n \in \mathbb{N}$ o grafo $K_{m,n}$ é hamiltoniano?

40. Considere o grafo G representado por



Mostre que o grafo é euleriano mas não é hamiltonaino.

41. Mostre que o seguinte grafo não é euleriano nem hamiltoniano:



42. Determine o número cromático dos grafos platónicos.

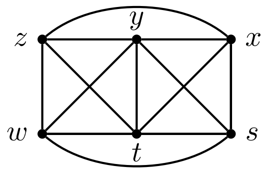
43. Construa um grafo planar conexo cujo número cromático seja 4.

44. Construa um grafo cujo número cromático seja 6.

45. Seja $n \geq 3$. Prove que o número cromático de um grafo ciclo de comprimento n é 2 se n é par e é 3 se n é ímpar.

46. Mostre que um grafo G é bipartido se e só se tem número cromático 2.

47. Considere o grafo G representado por



(a) Mostre que G não é planar.

(b) Mostre que $\chi(G) = 4$.

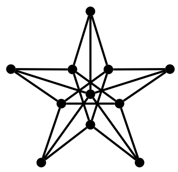
(c) Verifique se G é bipartido.

(d) O *complemento* de um grafo $H = (V, E)$ é um grafo $\overline{H} = (\overline{V}, \overline{E})$, onde

$$\overline{V} = V, \text{ e } \overline{E} = \{\{a, b\} : a \neq b, \{a, b\} \notin E\}.$$

Determine o complemento de G.

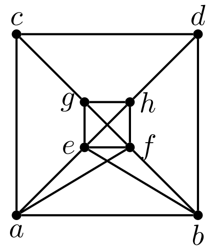
48. Considere o seguinte grafo (conhecido por grafo de Grötzsche):



Mostre que o grafo

(a) não é planar; (b) tem número cromático 4;
(c) não é bipartido; (d) é hamiltoniano;
(e) não é euleriano.

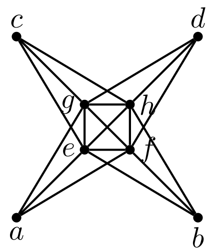
49. Considere o grafo



Mostre que o grafo

(a) tem número cromático 4; (b) não é bipartido;
(c) é hamiltoniano; (d) não é euleriano.

50. Considere o grafo G representado por



(a) Mostre que G não é bipartido.

(b) Sabendo que G é planar, determine o número de faces que terá representação planar de G.

(c) Determine o número cromático de G.