Aula 19

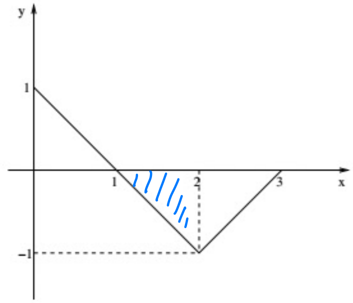
15 Dezembro

Exercício 1

Considere a função $F : [-4,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_1^{\frac{4+x}{3}} f(t)\,dt$,

onde a função $f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada pelo seguinte gráfico:

Determine, justificando, $F(2)$ e $F'(2)$.



Temos que

$$F(2) = \int_1^2 f(t)\,dt = -\frac{1}{2}$$

Vamos agora calcular $F'(2)$

Como f é contínua, aplicando o Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo temos que

$$F'(x) = f\left(\frac{4+x}{3}\right)\left(\frac{4+x}{3}\right)' = f\left(\frac{4+x}{3}\right)\frac{1}{3}$$

Então,

$$F'(2) = f(2)\,\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Exercício 2.

Diga, justificando, se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa.

1. Existe uma função contínua $f: [-2,1] \to \mathbb{R}$ tal que

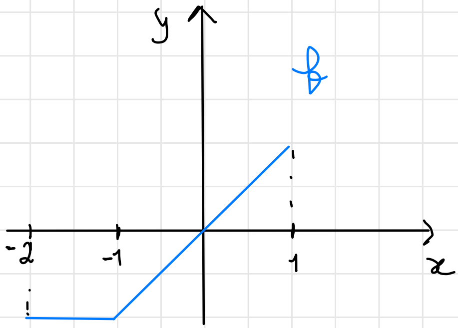
$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = -1 \quad e \quad \int_{-2}^{1} |f(x)| \neq 1$$

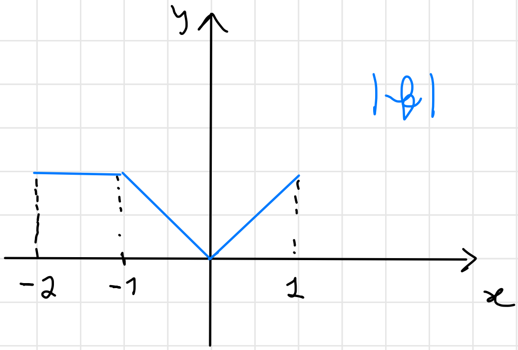
2 Existem duas funções $f, g: [0,2] \to \mathbb{R}$ integráveis tais que $f(x) \neq g(x)$, para todo o $x \in [0,2]$ e

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} g(x)\,dx$$

Resolução.

1 Afirmação verdadeira. Consideremos, por exemplo as funções

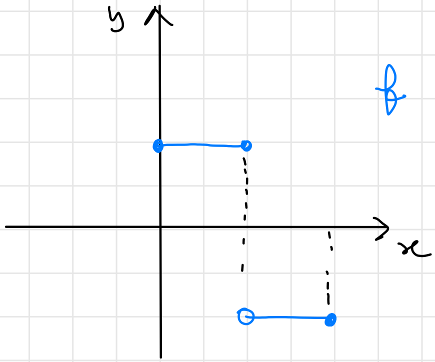


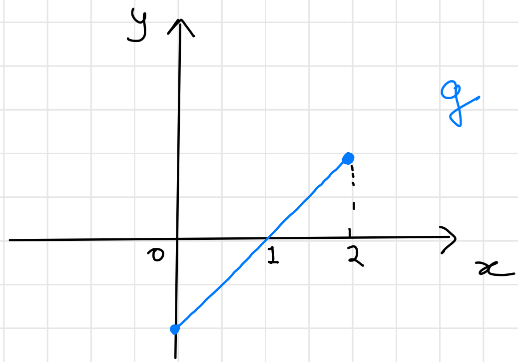


$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = -1 \quad e \quad \int_{-2}^{1} |f(x)|\,dx = 2 \neq 1$$

2 Afirmação verdadeira

Consideremos, por exemplo as funções





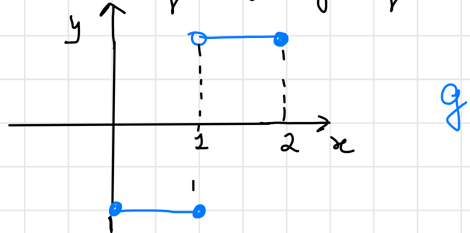
A função f é integrável porque tem um número finito de pontos de descontinuidade

A função g é integrável porque é contínua.

Além disso,

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 g(x)\,dx = 0$$

Um outro exemplo poderia ser dado com a mesma função f e a função g definida como



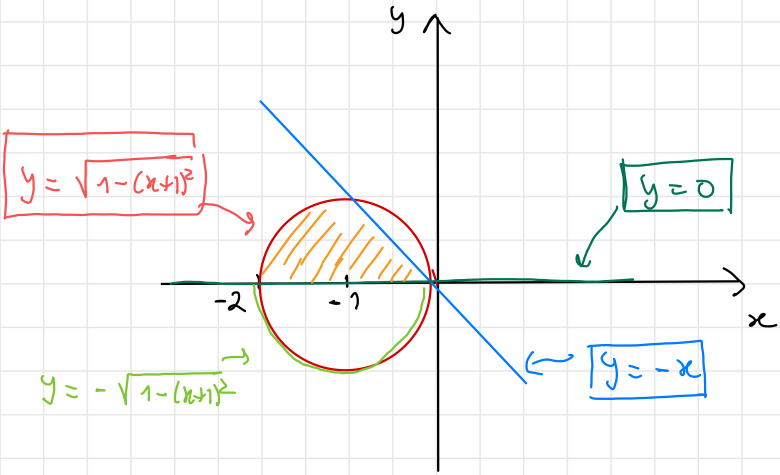
<u>Exercício 3</u> Considere a região do plano definida por

$$\mathcal{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq y \leq x\}$$

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ $\quad$ $y = 0$ $\quad$ $y = -x$

a) Represente graficamente a região $\mathcal{R}$

b) Estabeleça um integral (ou soma de integrais) a partir do qual poderia obter a área da região $\mathcal{R}$



$$(x+1)^2 + y^2 = 1 \iff y^2 = 1 - (x+1)^2 \iff y = \pm\sqrt{1-(x+1)^2}$$

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_{-2}^{-1} \left(\sqrt{1-(x+1)^2} - 0\right) dx + \int_{-1}^{0} (-x - 0)\, dx$$

Exercício 4. Calcule $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \operatorname{arcsen} x \, dx$

Sejam

$f'(x) = 1 \qquad f(x) = x$

$g(x) = \operatorname{arcsen} x \qquad g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Aplicando o método de integração por partes, temos que

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \operatorname{arcsen} x \, dx = \Big[x \operatorname{arcsen} x \Big]_0^{\sqrt{2}/2} - \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= \Big[x \operatorname{arcsen} x \Big]_0^{\sqrt{2}/2} + \int_0^{\sqrt{2}/2} -x \, (1-x^2)^{-1/2} \, dx$$

$$= \Big[x \operatorname{arcsen} x \Big]_0^{\sqrt{2}/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -2x \, (1-x^2)^{-1/2} \, dx$$

$$= \Big[x \operatorname{arcsen} x \Big]_0^{\sqrt{2}/2} + \frac{1}{2} \left[\frac{(1-x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} \right]_0^{\sqrt{2}/2}$$

$$= \Big[x \operatorname{arcsen} x \Big]_0^{\sqrt{2}/2} + \Big[\sqrt{1-x^2} \Big]_0^{\sqrt{2}/2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 + \sqrt{1 - 1/2} - \sqrt{1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$