Universidade do Minho — 2020/2021

Probabilidades e Aplicações – CC e MAT (3º ano) — 1º semestre

Trabalho nº1

Resolução

1. Num passeio aleatório simétrico (em cada passo o jogador lança uma moeda equilibrada e ganha ou perde 1€ conforme sai cara ou coroa), representando a fortuna do jogador ao longo dos passos por $S_1, S_2, S_3, \ldots$, partindo de uma fortuna inicial $S_0 = 0$, estime, para $n = 10$, 20, 50, por meio de simulação (com 10^5 réplicas) a probabilidade de

   (i) retorno à origem (i.e., empate) no instante $2n$

   A probabilidade exacta de retorno à origem é fácil de obter, pois é a probabilidade de em $2n$ lançamentos de uma moeda equilibrada saírem n caras. Logo, é dada por $u_{2n} = P(X = n) = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$, sendo $X \frown bi(2n, 0.5)$. Note-se que $u_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$, quando $n \to +\infty$. Para $n = 10, 20, 50$, temos $u_{2n} = 0.1762,\ 0.1254,\ 0.07959$:

```
dbinom(c(10,20,50), c(20,40,100), p = 0.5)
 [1] 0.17619705 0.12537069 0.07958924
```

   Portanto, as estimativas das probabilidades de retorno à origem no instante $2n$, a obter por simulação, serão valores próximos das verdadeiras probabilidades acima calculadas. Ver a simulação na alínea seguinte.

   (ii) não haver retorno à origem durante os primeiros $2n$ passos[1]

   As simulações deverão dar resultados semelhantes nas alíneas (i) e (ii)[2], e podem obter-se conforme segue, usando a sugestão dada:

```
n <- 20 ; r <- 100000 ; fim <- 0 ; produto <- 0
for (i in 1:r)  { x <- sample(c(-1,1), 2*n, replace=T);
    s <- cumsum(x); fim[i] <- s[2*n]; produto[i] <- prod(s) }
sum(fim==0)/r
# (i)  resultado:  0.17604 (n=10), 0.12538 (n=20) e 0.07903 (n=50)
sum(produto!=0)/r
# (ii) resultado:  0.17732 (n=10), 0.12546 (n=20) e 0.08018 (n=50)
```

   Constata-se que os valores obtidos para (i) e (ii) são de facto muito semelhantes.

[1] Note que "não haver retornos nos primeiros n passos" equivale a ter $S_1 S_2 \ldots S_n \neq 0$.

[2] A probabilidade exacta é a mesma da alínea anterior, u_{2n} (mas não é tão fácil de provar).

(iii) o último empate ocorrer na primeira [segunda] metade do jogo, ou seja, estritamente antes do instante n [estritamente depois do instante n], num passeio com $2n$ passos.

As estimativas devem ser próximas uma da outra[3], levando a conjectuar que os dois acontecimentos são equprováveis. A resolução segue adiante em conjunto com o gráfico pedido, pois a partir das estimativas das probabilidades de "o último empate ocorrer no instante $2k$", basta somar os valores para $k < n$ e para $k > n$, para obter as que se pedem aqui. Os resultados obtidos para as estimativas da probabilidade de o último empate ocorrer na 1ª metade [2ª metade] do jogo e no meio (no instante n), num passeio com $2n$ passos, foram os seguintes:

n	1ª metade	2ª metade	meio
10	0.47056	0.46901	0.06043
20	0.48616	0.48313	0.03071
50	0.49291	0.49513	0.01196

Elabore um gráfico com a probabilidade (estimada) de o último empate ocorrer na jogada $2k$, no caso $n = 20$ (i.e, em 40 jogos), em função de k ($k = 0, 1, 2, \dots, 20$).

O gráfico e as estimativas das probabilidades para (iii) podem obter-se como segue:

```
n <- 20 ; r <- 100000 ; ult <- 0
for (i in 1:r)
     { x <- sample(c(-1,1),2*n,replace=T);
       s <- c(0,cumsum(x)); ult[i] <- max(which(s==0))-1 }
u <- table(ult) ; names(u) <- 0:20
## gráfico pedido:
plot(u/r, ylim = c(0,127), xlab = "k", ylab = ..., ...)
## (iii) probabilidade de último empate na 1ª metade (antes de n):
sum(ult<n)/r
 [1] 0.48616
## (iii) probabilidade de último empate na 2ª metade (depois de n):
sum(ult>n)/r
 [1] 0.48313
## e a probabilidade de último empate ocorrer no passo n:
sum(ult==n)/r
 [1] 0.03071
```

[3]Estes dois acontecimentos são de facto equiprováveis

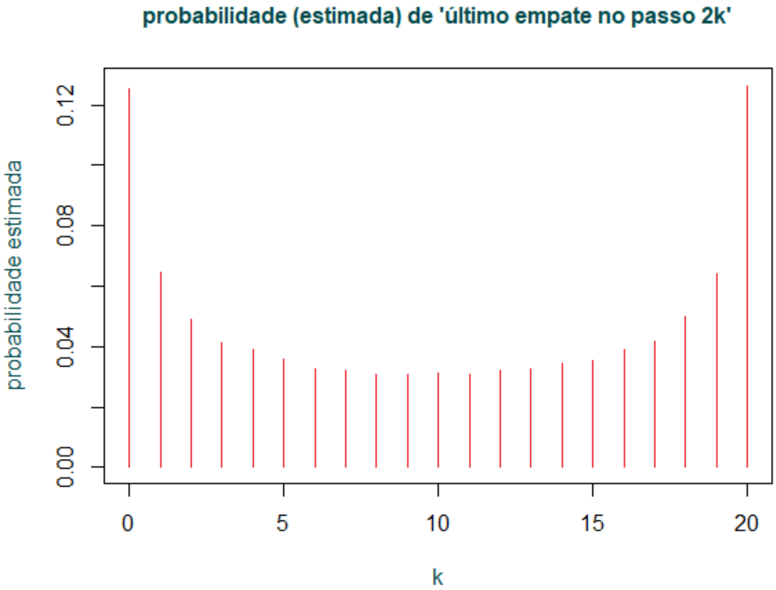

Figura 1: Probabilidade (estimada) de o último empate ocorrer no passo $2k$, $k = 0, 1, \ldots, 20$, em 40 passos

Finalmente, comente os resultados obtidos.

Os resultados em (i) e (ii) levam a crer que as probabilidades pedidas são iguais, para n fixo (logo, iguais a u_{2n}) e tem-se $u_{2n} \to 0$ quando $n \to +\infty$. As duas probabilidades em (iii) também parecem ser iguais, e aproximam-se de 0.5 quando n aumenta (em 50% dos casos, a fortuna do jogador não se anula nem muda de sinal durante a 2ª metade do jogo!). O gráfico sugere probabilidade simétrica em torno de $k = 10$, sendo decrescente à esquerda deste valor e crescente à direita. Os valores mais prováveis são os dos extremos, i.e., de o último empate ocorrer na jogada 0 [na 40], dados por $u_{40} = 0.1254$; o valor menos provável será para a jogada 20, dado por $(u_{20})^2 = 0.03105$ (pois é a probablidade de haver retorno no instante 20 e de nos seguintes 20 passos não haver retornos).

2. Dada uma v.a. X com distribuição $Poisson(\lambda)$, calcule o valor médio da v.a. $\frac{1}{1+X}$. Particularize para $\lambda = 1$. Comente os resultados obtidos.

   Para uma v.a. X, discreta, com fmp $p_i = P(X = x_i)$, o valor médio de $h(X)$ é dado por $E(h(X)) = \sum_i h(x_i)p_i$, desde que esta série convirja absolutamente. No caso presente, $h(X) = \frac{1}{1+X}$ com $X \frown Poisson(\lambda)$, a série é de termos positivos e é convergente:

$$E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \sum_{i\geq 0} \frac{1}{1+i} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{i\geq 0} \frac{\lambda^{i+1}}{(i+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{j\geq 1} \frac{\lambda^j}{j!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda}-1) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

   No caso $\lambda = 1$ temos $E\left(\frac{1}{1+X}\right) = 1 - e^{-1} \approx 0.6321$.[4] E como $\frac{1}{1+E(X)} = \frac{1}{2}$, conclui-se que em geral não é válida a fórmula $E(h(X)) = h(E(X))$. Recorde-se no entanto que no caso particular $h(X) = a + bX$, a fórmula é válida.

[4]Este valor podia ter sido estimado por simulação, executando `mean(1/(1+rpois(10^7,1)))`