Alguns exercícios de Álgebra

1. Considere os grupos $(\mathbb{Z}_5^*, \times)$ e $(\mathbb{Z}_7^*, \times)$, onde $\mathbb{Z}_5^* = \mathbb{Z}_5 \backslash \{[0]_5\}$ e $\mathbb{Z}_7^* = \mathbb{Z}_7 \backslash \{[0]_7\}$, o produto direto $\mathbb{Z}_7^* \otimes \mathbb{Z}_5^*$ e o morfismo de grupos $\theta : \mathbb{Z}_7^* \otimes \mathbb{Z}_5^* \to \mathbb{Z}_7^*$ definido por $\theta([n]_7, [p]_5) = [n]_7$, para quaisquer $n, p \in \mathbb{Z}$.

   (a) Indique, **sem justificar**:
   (i) a identidade de $\mathbb{Z}_7^* \otimes \mathbb{Z}_5^*$;
   (ii) o inverso do elemento $([3]_7, [5]_5)$;
   (iii) o elemento $([4]_7, [3]_5)\,([2]_7, [4]_5)^{-1}$;
   (iv) a ordem dos elementos $([2]_7, [4]_5)$ e $([6]_7, [1]_5)$.

   (b) Determine $\theta([5]_7, [3]_5)$, $\theta^{\leftarrow}([1]_7)$ e $\theta^{\leftarrow}[([2]_7)^{-1}]$.

2. Seja $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$. Considere em G a operação binária $*$ definida por $(x, y) * (z, w) = (xz, w + zy)$, para quaisquer $(x, y), (z, w) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$.

   (a) Sabendo que a operação $*$ é associativa, mostre que $(G, *)$ é um grupo não abeliano.

   (b) Sendo $H = \{(a, b) \in G : a > 0\}$, mostre que $(H, *)$ é um subgrupo de $(G, *)$.

3. Dado um grupo G, mostre que o subgrupo $H = \{(g, g) : \ g \in G\}$ de $G \times G$ é invariante em $G \times G$ se e só se G é abeliano.

4. Seja G um grupo abeliano. Considere o grupo produto direto $G \times G$ e o subgrupo H de $G \times G$ tal que $H = \{(x, x^{-1}) : x \in G\}$. Mostre que H é um subgrupo de $G \times G$.

5. Seja $G = \langle\, b\, \rangle$ um grupo cíclico de ordem 45.

   (a) Determine a ordem dos elementos b^9 e b^{41} de G.

   (b) Dê exemplo, caso existam, de quatro elementos $a, x, c, d \in G$ com ordem 9, 6, 45 e 50 respectivamente. Justifique.

6. Sejam G e H grupos. Considere o produto direto $G \otimes H$. Mostre que o subgrupo

$$\mathcal{L} = \{(a, 1_H) \in G \times H : a \in G\}$$

   de $G \otimes H$ é invariante.

7. Considere o grupo $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \times)$ e a aplicação $f : (\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \times) \longrightarrow (\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \times)$ definida por $f([a]_5) = ([a]_5^{-1})^6$, para qualquer $[a]_5 \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$.

   (a) Mostre que f é um morfismo de grupos.

   (b) Determine os elementos que constituem o núcleo de f.

   (c) Diga, justificando, se f é um epimorfismo.

8. Sejam G um grupo, H um grupo abeliano e $f, g : G \to H$ dois morfismos. Seja

$$S = \{x \in G : f(x) = g(x)\}.$$

   Considere o morfismo $\theta : G \to H$ definida por $\theta(x) = f(x^{-1})\, g(x)$, para qualquer $x \in G$. Prove que:

   (a) S é um subgrupo invariante de G;

   (b) $\operatorname{Nuc} \theta = S$.

9. Sejam G um grupo, $(\mathbb{Z},+)$ o grupo aditivo dos inteiros e $\theta : G \to \mathbb{Z}$ um monomorfismo. Considere o produto direto $G \otimes G$ e a aplicação $\varphi : G \otimes G \to \mathbb{Z}$ definida por $\varphi[(x,y)] = \theta(x) - \theta(y)$.

   (a) Mostre que φ é um morfismo.

   (b) Determine $\operatorname{Nuc}\varphi$.

   (c) Indique, justificando, uma condição necessária e suficiente para que o morfismo φ seja injetivo.

10. Sejam G um grupo, $S < G$ e a um elemento arbitrariamente fixo em G. Considere o subconjunto S_a de G definido por $S_a = \{asa^{-1} : s \in S\}$.

    (a) Mostre que S_a é um subgrupo de G.

    (b) Mostre que a aplicação $f : S \to S_a$, definida por $f(x) = axa{-}1$, para todo $x \in S$, é um morfismo de grupos.

    (c) Determine $\operatorname{Nuc} f$.

    (d) Os grupos S e S_a são isomorfos? Porquê?

11. Justifique se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes proposições:

    (a) $\mathbb{Z}_4 \subseteq \mathbb{Z}_8$;

    (b) $4\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$;

    (c) $9\mathbb{Z} \cap 10\mathbb{Z} = \emptyset$;

    (d) O semigrupo $(\mathbb{Z}_8 \setminus \{\overline{0}\}, \times)$ é um grupo;

    (e) Em $(\mathbb{Z}_9, \times)$, o elemento $[8]_9$ é invertível.

    (f) Num grupo G de ordem 34, se $b \in G$ é tal que $b^{50} = b^{101}$, então o subgrupo $< b >$ de G tem ordem 17;

    (g) Se H é um grupo e $H \subseteq K$ então H é um subgrupo de K.

    (h) Um subconjunto singular de um grupo G é subgrupo de G.

    (i) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, todos os elementos do grupo $(\mathbb{Z}_n,+)$ diferentes da identidade têm ordem n.

    (j) Um grupo G, que contenha um elemento de oredm 8, contém um elemento de ordem 2.

    (k) Todo o grupo admite, pelo menos, dois subgrupos distintos.

    (l) Existem grupos que admitem um só subgrupo normal.

    (m) Um semigrupo no qual é válida a lei do corte é um grupo.

    (n) Se H e G são grupos e $f : H \longrightarrow G$ é um monomorfismo, então os grupos $f(H)$ e H são isomorfos.