Universidade do Minho | 2016/2017
Departamento de Matemática e Aplicações | LCC

Análise
Teste 1 - modelo B | Duração: 1h30m Tolerância: 15 minutos

1. Considere a função real definida por

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{z+2}} \ln(x^2+y^2-z).$$

   (a) Calcule o valor de f nos pontos (x,y,z) tais que $x^2+y^2=4$ e $z=3$.
   (b) Descreva e esboce graficamente o domínio de f.

2. Justifique que cada uma das afirmações seguintes é *verdadeira*.

   (a) A função f definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{2x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ não é contínua em $(0,0)$.
   (b) Considere a curva de interseção do parabolóide $z=(x-1)^2+y^2$ com o plano $y=1$. O declive da reta tangente a esta curva no ponto $(0,1,2)$ é igual a -2.
   (c) A taxa de variação de $z = x^2y^3 + x^2y + y$ na direcção do eixo dos yy é sempre positiva.
   (d) O vetor unitário $\vec{i} = (1,0)$ é ortogonal à curva de nível 2 da função $f(x,y) = x^2 + \operatorname{sen}(xy)$ no ponto $P = (1, \frac{\pi}{2})$.
   (e) Sabendo que a equação $\mathrm{e}^{xy} + y = x$ define implicitamente y como função de x no ponto $(0,-1)$, temos $\dfrac{dy}{dx}(0) = 2$.

3. Mostre que a função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x\,\mathrm{e}^y + y\,\mathrm{e}^x$$

é uma solução da equação

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = x\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + y\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}.$$

4. Se f é uma função diferenciável e $z = f(u)$ com $u = x+y$, use a regra de derivação da cadeia para mostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

5. Use diferenciais para obter uma aproximação do valor da função

$$f(x,y,z) = \ln(x-3y+2z)$$

no ponto $(6.9, 2.06, 0.01)$. Observe que $f(7,2,0)=0$.

(Continua)

6. Suponha que o potencial elétrico V no ponto (x, y, z) de uma certa região do espaço é dado por

$$V(x, y, z) = 2y^2 - 4zy + xyz^3.$$

(a) Determine a taxa de variação de V no ponto $P = (1, 1, 0)$ na direção de P para $Q = (2, 2, -1)$.

(b) Qual a direção segundo a qual a taxa de variação de V em P é máxima? Qual o valor dessa taxa?

(c) Determine uma direção segundo a qual a taxa de variação de V em P seja nula.

7. Considere a superfície cónica S de equação

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

(a) Determine uma equação do plano tangente a S no ponto $P = (1, 1, \sqrt{2})$.

(b) Duas superfícies dizem-se *ortogonais* num ponto de interseção Q se as retas normais às superfícies no ponto Q são ortogonais. Mostre que a superfície S e a superfície esférica de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (r > 0)$$

são ortogonais em todos os pontos da sua intersecção.