Álgebra Universal e Categorias

Exercícios - Folha 6

36. Sejam $\mathcal{A} = (\{1,2,3,4,5\}; *^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ e $\mathcal{B} = (\{1,2\}; *^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$ as álgebras de tipo $(2,0)$ cujas operações nulárias são dadas por $c^{\mathcal{A}} = 2$, $c^{\mathcal{B}} = 1$ e cujas operações binárias são definidas por

$*^{\mathcal{A}}$	1	2	3	4	5
1	2	2	2	5	2
2	2	3	3	2	2
3	2	3	2	2	2
4	5	2	2	4	2
5	2	2	2	2	2

$*^{\mathcal{B}}$	1	2
1	2	2
2	2	1

Seja $\alpha : \{1,2\} \to \{1,2,3,4,5\}$ a aplicação definida por $\alpha(1) = 2$ e $\alpha(2) = 3$. Mostre que a aplicação α é um monomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$. Justifique que $\mathcal{B}$ é isomorfa a uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

A aplicação α é um monomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$ se α é um homomorfismo e se é injetiva.

Tem-se:

- $\alpha(c^{\mathcal{B}}) = \alpha(1) = 2 = c^{\mathcal{A}}$;
- $\alpha(1 *^{\mathcal{B}} 1) = \alpha(2) = 3 = 2 *^{\mathcal{A}} 2 = \alpha(1) *^{\mathcal{A}} \alpha(1)$;
- $\alpha(1 *^{\mathcal{B}} 2) = \alpha(2) = 3 = 2 *^{\mathcal{A}} 3 = \alpha(1) *^{\mathcal{A}} \alpha(2)$;
- $\alpha(2 *^{\mathcal{B}} 2) = \alpha(1) = 2 = 3 *^{\mathcal{A}} 3 = \alpha(2) *^{\mathcal{A}} \alpha(2)$;
- $\alpha(2 *^{\mathcal{B}} 1) = \alpha(2) = 3 = 3 *^{\mathcal{A}} 2 = \alpha(2) *^{\mathcal{A}} \alpha(1)$;

Logo α é compatível com as operações e, portanto, é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$.

A aplicação é claramente injetiva, pois, para quaisquer $x, y \in B$, sempre que $x \neq y$ também se tem $\alpha(x) \neq \alpha(y)$ ($1 \neq 2$ e $\alpha(1) \neq \alpha(2)$).

Uma vez que α é um monomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$, tem-se $\mathcal{B} \cong \alpha(\mathcal{B})$ (a aplicação $\beta : B \to \alpha(B)$ definida por $\beta(x) = \alpha(x)$, para todo $x \in B$, é um isomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\alpha(\mathcal{B})$). A álgebra $\mathcal{B}$ é subálgebra de si mesma, logo, como α é um homomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$, $\alpha(\mathcal{B})$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

37. Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ álgebras do mesmo tipo. Mostre que se $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\beta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, então $\beta \circ \alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$.

Sejam $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\beta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. Pretende-se provar que $\beta \circ \alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$.

Atendendo a que α é uma aplicação de A em B e β é uma aplicação de B em C, então, por definição de composicção de funções, $\beta \circ \alpha$ é uma aplicação de A em C.

A aplicação $\beta \circ \alpha$ é compatível com as operações, pois, para qualquer símbolo de operação de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, e para quaisquer $a_1 \ldots, a_n \in A$,

$$\begin{array}{rcl}
(\beta \circ \alpha)(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) & \Rightarrow & \beta(\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n))) \\
& \Rightarrow & \beta(f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n))) \ \ (\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \\
& \Rightarrow & f^{\mathcal{C}}(\beta(\alpha(a_1)), \ldots, \beta(\alpha(a_n))) \ \ (\beta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C})) \\
& \Rightarrow & f^{\mathcal{C}}((\beta \circ \alpha)(a_1), \ldots, (\beta \circ \alpha)(a_n))
\end{array}$$

Do que foi provado anteriormente conclui-se que $\beta \circ \alpha$ é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}$.

38. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras do mesmo tipo. Mostre que se $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um isomorfismo, então α^{-1} é um isomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$.

39. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$, $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Mostre que:

(a) Se A_1 é um subuniverso de $\mathcal{A}$, então $\alpha(A_1)$ é um subuniverso de $\mathcal{B}$.

Seja A_1 um subuniverso de $\mathcal{A}$. Então
(i) $A_1 \subseteq A$;
(ii) para qualquer símbolo de operação f de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, e para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A_1$,

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in A_1.$$

Pretende-se provar que $\alpha(A_1)$ é um subuniverso de $\mathcal{B}$, ou seja, pretende-se mostrar que as seguintes condições são satisfeitas:
(i) $\alpha(A_1) \subseteq B$;
(ii) para qualquer símbolo de operação f de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, e para quaisquer $b_1, \ldots, b_n \in \alpha(A_1)$,

$$f^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n) \in \alpha(A_1).$$

Prova de (i): uma vez que $A_1 \subseteq A$ e α é uma função de A em B, é imediato que $\alpha(A_1) \subseteq B$.

Prova de (ii): Sejam f um símbolo de operação de aridade n e $b_1, \ldots, b_n \in \alpha(A_1)$.

Como $b_1, \ldots, b_n \in \alpha(A_1)$, tem-se

$$b_1 = \alpha(a_1), \ldots, b_n = \alpha(a_n), \text{ para alguns } a_1, \ldots, a_n \in A_1.$$

Então

$$\begin{array}{rcl} f^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n) & = & f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)) \\ & = & \alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)).\ (\alpha \in Hom(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \end{array}$$

Atendendo a que $a_1, \ldots, a_n \in A_1$, $f^{\mathcal{A}}$ é uma operação n-ária em A e A_1 é um subuniverso de $\mathcal{A}$, tem-se $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in A_1$; logo $\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \in \alpha(A_1)$; portanto, $f^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n) \in \alpha(A_1)$.

Da prova de (i) e de (ii), conclui-se que $\alpha(A_1)$ é um subuniverso de $\mathcal{B}$.

(b) Se B_1 é um subuniverso de $\mathcal{B}$, então $\alpha^{\leftarrow}(B_1)$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$.

40. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Mostre que

$$\mathrm{Eq}(\alpha, \beta) = \{a \in A \mid \alpha(a) = \beta(a)\}$$

é um subuniverso de $\mathcal{A}$. A este subuniverso chama-se *equalizador de α e β*.

O conjunto $\mathrm{Eq}(\alpha, \beta) = \{a \in A \mid \alpha(a) = \beta(a)\}$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$ se:

(i) $\mathrm{Eq}(\alpha, \beta) \subseteq A$;
(ii) para qualquer símbolo de operação de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, e para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{Eq}(\alpha, \beta)$, $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Eq}(\alpha, \beta)$.

Prova de (i): Imediato, pela definição de $\mathrm{Eq}(\alpha, \beta)$.

Prova de (ii): para qualquer símbolo de operação f de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, e para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$, tem-se $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in A$. Além disso,

$$\begin{array}{rcl} \alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) & = & f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n))\ (\alpha \in Hom(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \\ & = & f^{\mathcal{B}}(\beta(a_1), \ldots, \beta(a_n))\ (a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{Eq}(\alpha, \beta)) \\ & = & \beta(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n))\ (\beta \in Hom(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \end{array}$$

Logo, $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Eq}(\alpha, \beta)$.

41. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e θ, ψ relações binárias em A.

(a) Mostre que θ satisfaz a propriedade de substituição em $\mathcal{A}$ se e só se θ é um subuniverso de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

(b) Mostre que se θ e ψ são subuniversos de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, então $\theta \circ \psi$ é um subuniverso de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

42. Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Mostre que α é injetiva se e só se $\ker \alpha = \triangle_A$.

$\Rightarrow$) Admitamos que α é injetiva.

A relação $\ker \alpha$ é uma relação de equivalência em A, logo $\triangle_A \subseteq \ker \alpha$. Por outro lado, para quaisquer $x, y \in A$,

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \in \ker \alpha & \Rightarrow & \alpha(x) = \alpha(y) \\ & \Rightarrow & x = y \ (\alpha \text{ é injetiva}) \\ & \Rightarrow & (x,y) \in \triangle_A. \end{array}$$

Assim, $\ker \alpha \subseteq \triangle_A$. Logo, $\ker \alpha = \triangle_A$.

$\Leftarrow$) Consideremos, por hipótese, que $\ker \alpha = \triangle_A$. Então, para quaisquer $x, y \in A$,

$$\alpha(x) = \alpha(y) \Rightarrow (x,y) \in \ker \alpha \Rightarrow (x,y) \in \triangle_A \Rightarrow x = y.$$

Logo, α é injetiva.

43. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\theta, \rho \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$.

(a) Mostre que a aplicação $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\rho$ definida por $\alpha(a) = ([a]_\theta, [a]_\rho)$ é um homomorfismo.

Para qualquer símbolo de operação f de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, e para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$\begin{array}{rcl} \alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) & = & ([f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)]_\theta, [f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)]_\rho) \\ & = & (f^{\mathcal{A}/\theta}([a_1]_\theta, \ldots, [a_n]_\theta), f^{\mathcal{A}/\rho}([a_1]_\rho, \ldots, [a_n]_\rho)) \\ & = & f^{\mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\rho}(([a_1]_\theta, [a_1]_\rho), \ldots, ([a_n]_\theta, [a_n]_\rho)) \\ & = & f^{\mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\rho}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)). \end{array}$$

Logo α é compatível com qualquer operação e, portanto, α é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\rho$.

(b) Mostre que $\ker \alpha = \theta \cap \rho$. Conclua que α é injetiva se e só se $\theta \cap \rho = \triangle_A$.

Para quaisquer $a, b \in A$,

$$\begin{array}{rcl} (a,b) \in \ker \alpha & \Leftrightarrow & \alpha(a) = \alpha(b) \\ & \Leftrightarrow & ([a]_\theta, [a]_\rho) = ([b]_\theta, [b]_\rho) \\ & \Leftrightarrow & [a]_\theta = [b]_\rho \text{ e } [a]_\theta = [b]_\rho \\ & \Leftrightarrow & (a,b) \in \theta \text{ e } (a,b) \in \rho \\ & \Leftrightarrow & (a,b) \in \theta \cap \rho. \end{array}$$

Logo $\ker \alpha = \theta \cap \rho$.

A função α é injetiva se e só se $\ker \alpha = \triangle_A$. Considerando o provado anteriormente segue que α é injetiva se e só se $\theta \cap \rho = \triangle_A$.

(c) Mostre que α é sobrejetiva se e só se $\theta \circ \rho = \nabla_A$.

$\Rightarrow$) Admitamos que α é sobrejetiva. Pretendemos provar que $\theta \circ \rho = \nabla_A$.

Uma vez que que θ e ρ são relações binárias em A, $\theta \circ \rho$ é uma relação binária em A e, portanto, $\theta \circ \rho \subseteq \nabla_A$.

Sejam $a, b \in A$. Então $([a]_\theta, [b]_\rho) \in A/\theta \times A/\rho$. Considerando que α é sobrejetiva, existe $c \in A$ tal que $\alpha(c) = ([a]_\theta, [b]_\rho)$, donde segue que $([c]_\theta, [c]_\rho) = ([a]_\theta, [b]_\rho)$ e, por conseguinte, $[c]_\theta = [a]_\theta$ e $[c]_\rho = [b]_\rho$. Assim, $(c, a) \in \theta$ e $(b, c) \in \rho$, pelo que $(b, a) \in \theta \circ \rho$. Assim, para quaisquer $a, b \in A$, $(b, a) \in \theta \circ \rho$, ou seja, $\nabla_A \subseteq \theta \circ \rho$.

Considerando que $\theta \circ \rho \subseteq \nabla_A$ e $\nabla_A \subseteq \theta \circ \rho$, tem-se $\nabla_A = \theta \circ \rho$.

$\Leftarrow$) Admitamos que $\nabla_A = \theta \circ \rho$.

Pretende-se provar que α é sobrejetiva.

Seja $([a]_\theta, [b]_\rho) \in A/\theta \times A/\rho$. Para quaisquer $a, b \in A$, tem-se $(b, a) \in \nabla_A$ e, uma vez que $\nabla_A = \theta \circ \rho$, $(b, a) \in \theta \circ \rho$. Então existe $c \in A$ tal que $(b, c) \in \rho$ e $(c, a) \in \theta$. Assim, $[a]_\theta = [c]_\theta$ e $[b]_\rho = [c]_\rho$. Logo, $([a]_\theta, [b]_\rho) = ([c]_\theta, [c]_\rho)$. Portanto, para qualquer $([a]_\theta, [b]_\rho) \in A/\theta \times A/\rho$, existe $c \in A$ tal que $([a]_\theta, [b]_\rho) = \alpha(c)$, i.e., α é sobrejetiva.

44. Sejam $\mathcal{A} = (A; (f^{\mathcal{A}})_{f\in O})$, $\mathcal{B} = (B; (f^{\mathcal{B}})_{f\in O})$ e $\mathcal{C} = (C; (f^{\mathcal{C}})_{f\in O})$ álgebras de tipo (O,τ), $\alpha_1 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ e $\alpha_2 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{C})$. Seja $\alpha : A \to B \times C$ a aplicação definida por $\alpha(a) = (\alpha_1(a), \alpha_2(a))$, para todo $a \in A$.

(a) Mostre que α é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}\times\mathcal{C}$.

Para qualquer símbolo de operação f de aridade n e para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$,

$$\begin{array}{rcl} \alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1,\dots,a_n)) & = & (\alpha_1(f^{\mathcal{A}}(a_1,\dots,a_n)), \alpha_2(f^{\mathcal{A}}(a_1,\dots,a_n))) \\ & \stackrel{*}{=} & (f^{\mathcal{B}}(\alpha_1(a_1),\dots,\alpha_1(a_n)), f^{\mathcal{C}}(\alpha_2(a_1),\dots,\alpha_2(a_n))) \\ & = & f^{\mathcal{B}\times\mathcal{C}}((\alpha_1(a_1),\alpha_2(a_1)),\dots,(\alpha_1(a_n),\alpha_2(a_n))) \\ & = & f^{\mathcal{B}\times\mathcal{C}}(\alpha(a_1),\dots,\alpha(a_n)). \end{array}$$

A aplicação α é compatível com todas as operações, logo α é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}\times\mathcal{C}$.

(*) $\alpha_1 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ e $\alpha_2 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{C})$.

(b) Mostre que $\ker\alpha = \ker\alpha_1 \cap \ker\alpha_2$.

Para quaisquer x, y,

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \in \ker\alpha & \Leftrightarrow & x,y \in A \text{ e } \alpha(x) = \alpha(y) \\ & \Leftrightarrow & x,y \in A \text{ e } (\alpha_1(x),\alpha_2(x)) = (\alpha_1(y),\alpha_2(y)) \\ & \Leftrightarrow & x,y \in A \text{ e } \alpha_1(x) = \alpha_1(y) \text{ e } \alpha_2(x) = \alpha_2(y) \\ & \Leftrightarrow & (x,y) \in \ker\alpha_1 \text{ e } (x,y) \in \ker\alpha_2 \\ & \Leftrightarrow & (x,y) \in \ker\alpha_1 \cap \ker\alpha_2. \end{array}$$

Logo $\ker\alpha = \ker\alpha_1 \cap \ker\alpha_2$.

(c) Mostre que se α é um epimorfismo, então α_1 e α_2 são epimorfismos e

$$\mathcal{A}/(\ker\alpha_1 \cap \ker\alpha_2) \cong \mathcal{A}/\ker\alpha_1 \times \mathcal{A}/\ker\alpha_2.$$

Comecemos por mostrar que se α é um epimorfismo, então α_1 e α_2 são epimorfismos. Uma vez que α_1 e α_2 são homomorfismos, resta provar que α_1 e α_2 são funções sobrejetivas.
Seja $b \in B$. Como $C \neq \emptyset$, existe $c \in C$. Logo $(b,c) \in B \times C$. Considerando que α é um epimorfismo, existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) = (b,c)$, i.e., existe $a \in A$ tal que $(\alpha_1(a),\alpha_2(a)) = (b,c)$. Logo, para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $\alpha_1(a) = b$. Assim α_1 é sobrejetiva.
De modo análogo, prova-se que α_2 é sobrejetiva.

Pelo Teorema do Homomorfismo, tem-se

$$\mathcal{A}/\ker\alpha \cong \alpha(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}/\ker\alpha_1 \cong \alpha_1(\mathcal{A}) \text{ e } \mathcal{A}/\ker\alpha_2 \cong \alpha_2(\mathcal{A}).$$

Uma vez que α, α_1 e α_2 são sobrejetivas, vem que

$$\mathcal{A}/(\ker\alpha) \cong \mathcal{B}\times\mathcal{C},\ \mathcal{A}/(\ker\alpha_1) \cong \mathcal{B} \text{ e } \mathcal{A}/(\ker\alpha_2) \cong \mathcal{C}.$$

Assim,

$$\mathcal{A}/(\ker\alpha) \cong \mathcal{A}/(\ker\alpha_1) \times \mathcal{A}/(\ker\alpha_2),$$

pelo que, considerando a alínea anterior, tem-se

$$\mathcal{A}/(\ker\alpha_1 \cap \ker\alpha_2) \cong \mathcal{A}/(\ker\alpha_1) \times \mathcal{A}/(\ker\alpha_2).$$

45. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra, $\theta \in \mathrm{Con}(\mathcal{A})$ e $[\theta, \nabla_A] = \{\rho \in \mathrm{Con}(\mathcal{A}) \mid \theta \subseteq \rho\}$. Para $\phi \in \mathrm{Con}(\mathcal{A})$ tal que $\theta \subseteq \phi$, define-se a congruência ϕ/θ em $\mathcal{A}/\theta$ por

$$\phi/\theta = \{([a]_\theta, [b]_\theta) \in (A/\theta)^2 \mid (a,b) \in \phi\}.$$

(a) Determine a congruência ϕ/θ quando:
i. $\phi = \nabla_A$;   ii. $\phi = \theta$.

(b) Mostre que os reticulados $([\theta,\nabla_A], \subseteq)$ e $(\mathrm{Con}(\mathcal{A}/\theta), \subseteq)$ são isomorfos.
(Sugestão: prove que a aplicação $\alpha : [\theta,\nabla_A] \to \mathrm{Con}(\mathcal{A}/\theta)$ definida por $\alpha(\phi) = \phi/\theta$ é um isomorfismo de reticulados.)