# Análise

folha de exercícios 4 — 2017/2018

## • Extremos de funções

**1.** Para cada uma das funções $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ seguintes, calcule os pontos críticos e determine se esses pontos são minimizantes ou maximizantes da função. Em caso afirmativo, indique o máximo ou mínimo local da função.

(a) $f(x, y) = 3x^2 + y^2$

(b) $f(x, y) = x^2 - 4y^2 + 3$

(c) $f(x, y) = xy$

(d) $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$

(e) $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$

(f) $f(x, y) = x^3 - y^3 + 6xy$

**2.** Encontre os pontos críticos das funções $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ seguintes e classifique-os como pontos de máximo local, mínimo local ou pontos de sela.

(a) $f(x, y) = (x - 4) \ln y$

(b) $f(x, y) = xy\, e^x + x$

(c) $f(x, y) = 2x^3 - y^3 - 24x + 75y + 7$

(d) $f(x, y) = 2x^3 - 4y^2 - 216x + 24y + 7$

(e) $f(x, y) = 4x^3 + 6y^2 - 48xy + 9$

(f) $f(x, y) = 2x^3 - 6x^2 + y^3 + 3y^2 - 48x - 45y$

**3.** O lucro na produção de $x$ unidades de um produto $A$ e $y$ unidades de um produto $B$ é aproximado pelo modelo

$$P(x, y) = 8x + 10y - 0.001(x^2 + xy + y^2) - 10\,000.$$

Encontre as quantidades de produção dos produtos $A$ e $B$ que conduzem a um lucro máximo.

**4.** Pretende-se delimitar um terreno retangular ao longo da margem de um rio. A área do terreno deverá ser de $1250m^2$ e não será necessária vedação no lado da margem do rio. Encontre as dimensões do terreno que requerem a menor vedação possível.

**5.** Suponha que se pretende construir uma caixa rectangular com um volume igual a $32\,m^3$. Três materiais diferentes serão usados na construção da caixa. O material para os lados custa 1€ por $m^2$, o material para o fundo custa 3€ por $m^2$ e o material para o topo custa 5€ por $m^2$. Quais são as dimensões da caixa menos dispendiosa?

**6.** Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para calcular os extremos de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = xy$$

sujeita à condição $x^2 + y^2 = 8$.

**7.** Use o método dos multiplicadores de Lagrange para resolver os problemas de optimização condicionada seguintes:

(a) Maximizar $f(x, y) = xy$ sujeita a $x + y = 1$

(b) Minimizar $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeita a $xy = 1$

(c) Minimizar $f(x, y) = x^2 - y^2$ sujeita a $x^2 + y^2 = 4$

**8.** Encontre o máximo e o mínimo valores da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 4$ para

(a) $f(x, y) = xy$;

(b) $f(x, y) = e^{xy}$.

**9.** Determine o ponto do plano de equação $x + y + 2z = 1$ que está mais perto do ponto $M = (1, 2, 3)$.

**10.** Pretende-se vedar um espaço retangular de $800m^2$. Três dos lados deverão ter uma vedação de arame e o outro lado um muro de pedra. A vedação de arame custa 8€ por $m$ e a de pedra 24€. Quais as dimensões desse retângulo que minimizarão o custo da vedação? Resolva este problema de duas formas diferentes.