Universidade do Minho — 2017/2018
Departamento de Matemática e Aplicações — LCC
Análise

Teste 1 - modelo C — Duração: 1h30m — Tolerância: 15 minutos

Proposta de resolução

1. [2 valores] Considere a função real definida por $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y+1}}{x-1}$.

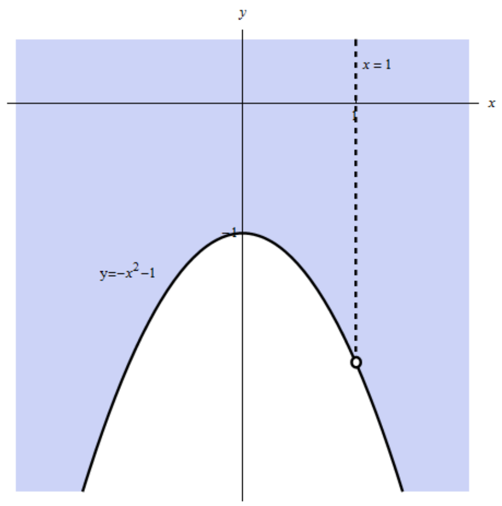
   (a) Determine e esboce graficamente o domínio de f.

   (b) Calcule o valor de f nos pontos do domínio pertencentes à reta $y = -2x$.

   Resolução.

   (a) Domínio de f :

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y+1\geq 0 \quad \text{e} \quad x\neq 1\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ y\geq -x^2-1 \quad \text{e} \quad x\neq 1\right\} \end{aligned}$$



   (b) Para $y=-2x$ temos

$$f(x,y) = f(x,-2x) = \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} = \frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 1, & \text{se } x>1 \\ -1, & \text{se } x<1 \end{cases}.$$

2. [3 valores] Considere a função g definida por $g(x,y) = \dfrac{(x-y)x^2}{2x^2+y^4}$.

   (a) Calcule o limite de g quando (x,y) tende para $(0,0)$ segundo a reta $y=mx$, $m\in\mathbb{R}$, e segundo a parábola $x=y^2$.

   (b) Diga se existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$.

Resolução.

(a) Segundo a reta $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$, temos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} g(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{(x-y)x^2}{2x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-mx)x^2}{2x^2+(mx)^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x-mx)x^2}{x^2(2+m^4x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x-mx}{2+m^4x^2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Segundo a parábola $x = y^2$, vem

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} g(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} \frac{(x-y)x^2}{2x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{(y^2-y)y^4}{2y^4+y^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{y^2-y}{3} = \frac{0}{3} = 0.$$

(b) Observe-se que $g(x,y) = (x-y)\cdot \dfrac{x^2}{2x^2+y^4}$. Uma vez que

$$\lim_{x\to 0}(x-y) = 0 \qquad \text{e} \qquad \left|\frac{x^2}{2x^2+y^4}\right| \le \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

temos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$ (produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo).

3. [3.5 valores] Justifique que cada uma das afirmações seguintes é *verdadeira*.

(a) O declive da reta tangente à curva de interseção da superfície $z = x^3 + 2xy$ com o plano $y = 2$ no ponto $(-1, 2, -5)$ é positivo.

(b) O vetor $\vec{v} = (-2, 1)$ é tangente à curva de nível da função $f(x, y) = x + yx^2 + \operatorname{sen} y$ no ponto $P = (1, 0)$.

(c) A função $u(x, y) = \mathrm{e}^{-x}\cos y - \mathrm{e}^{-y}\cos x$ é solução da equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Resolução.

(a) O declive da reta tangente àquela curva no ponto $(-1, 2, -5)$ é dado por

$$\frac{\partial z}{\partial x}(-1,2) = (3x^2+2y)\big|_{(-1,2)} = 7 > 0.$$

(b) Considere-se o vetor gradiente de f: $\vec{\nabla} f(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \big(1+2xy, x^2+\cos y\big)$. Temos

$$\vec{\nabla} f\,(P) = \vec{\nabla} f\,(1,0) = (1,2) \qquad \text{e} \qquad \vec{\nabla} f\,(P)\cdot\vec{v} = (1,2)\cdot(-2,1) = 0.$$

Logo, o vetor $\vec{v} = (-2, 1)$ é perpendidular ao vetor gradiente de f no ponto P e, portanto, tangente à curva de nível em P.

(c) Temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^{-x}\cos y - \mathrm{e}^{-y}\cos x) = -\,\mathrm{e}^{-x}\cos y + \mathrm{e}^{-y}\operatorname{sen} x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-\,\mathrm{e}^{-x}\cos y + \mathrm{e}^{-y}\operatorname{sen} x) = \mathrm{e}^{-x}\cos y + \mathrm{e}^{-y}\cos x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^{-x}\cos y - \mathrm{e}^{-y}\cos x) = -\,\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen} y + \mathrm{e}^{-y}\operatorname{sen} x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-\,\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen} y + \mathrm{e}^{-y}\operatorname{sen} x) = -\,\mathrm{e}^{-x}\cos y - \mathrm{e}^{-y}\operatorname{sen} x.$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\mathrm{e}^{-x}\cos y + \mathrm{e}^{-y}\operatorname{sen} x) + (-\,\mathrm{e}^{-x}\cos y - \mathrm{e}^{-y}\operatorname{sen} x) = 0.$$

4. [2 valores] Seja $z = f(x, y)$, com f diferenciável, $x = r\,\mathrm{e}^{-t}$ e $y = r\,\mathrm{e}^{t}$. Use a regra de derivação da cadeia para mostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial t} = 2\,\mathrm{e}^{t}\,\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Resolução.

Usando a regra de derivação da cadeia temos

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot e^{-t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot e^{t}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial z}{\partial x}\cdot re^{-t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot re^{t}.$$

Assim,

$$\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot e^{-t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot e^{t}\right) + \frac{1}{r}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot re^{-t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot re^{t}\right) = 2e^{t}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

5. [2 valores] Use diferenciais para obter uma aproximação do valor de $f(x, y) = \ln(y - 2x)$ no ponto $(3.06, 6.8)$. Observe que $f(3, 7) = 0$.

Resolução.

Consideremos o ponto $(x, y) = (3, 7)$ e os acréscimos

$$\Delta x = 3.06 - 3 = 0.06 \qquad \text{e} \qquad \Delta y = 6.8 - 7 = -0.2.$$

O diferencial total df é dado por

$$\begin{aligned} df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy &= \frac{-2}{y - 2x}dx + \frac{1}{y - 2x}dy \\ &= -\frac{2}{y - 2x}\Delta x + \frac{1}{y - 2x}\Delta y. \end{aligned}$$

Para $(x, y) = (3, 7)$ e $(\Delta x, \Delta y) = (0.06, -0.2)$ vem

$$df = -2 \times 0.06 + 1 \times (-0.2) = -0.32$$

e

$$df \simeq \Delta_f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = f(3.06, 6.8) - f(3, 7).$$

Ou seja, $f(3.06, 6.8) \simeq -0.32$.

6. [3 valores] Suponha que a temperatura T no ponto (x, y, z) de uma certa região do espaço é dada por $T(x, y, z) = 10\, z\, x^2\, \mathrm{e}^{-y}$.

   (a) Determine a taxa de variação de T no ponto $P = (1, 0, 1)$ na direcção de P para $Q = (2, 1, 1)$.

   (b) Qual a direção segundo a qual a temperatura aumenta mais rapidamente em P? Qual o valor da taxa de crescimento nessa direção?

Resolução.

(a) Consideremos o vetor unitário $\overrightarrow{u}$ com a mesma direção e sentido do vetor $\overrightarrow{PQ}$,

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{||\overrightarrow{PQ}||} = \frac{Q - P}{||\overrightarrow{PQ}||} = \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right),$$

e o vetor gradiente de f,

$$\vec{\nabla} f(x, y, x) = (20\, z\, x\, \mathrm{e}^{-y}, -10\, z\, x^2\, \mathrm{e}^{-y}, 10\, x^2\, \mathrm{e}^{-y}).$$

A derivada direcional de f em P na direção de $\overrightarrow{u}$ é dada por

$$D_{\overrightarrow{u}} f(1, 0, 1) = \vec{\nabla} f(1, 0, 1) \cdot \overrightarrow{u} = (20, -10, 10) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) = 5\sqrt{2}.$$

(b) A direção segundo a qual a taxa de variação de f em P é máxima é a direção

$$\vec{\nabla} f(1, 0, 1) = (20, -10, 10),$$

e o valor dessa taxa é

$$||\vec{\nabla} f(1, 0, 1)|| = ||(20, -10, 10)|| = \sqrt{20^2 + 2 \times 10^2} = \sqrt{6 \times 10^2} = 10\sqrt{6}.$$

7. [3 valores] Considere a curva de equação $2x^3 + x^2 y - y^3 = 2$.

   (a) Determine uma equação da reta tangente à curva no ponto $(1, 1)$.

   (b) Sabendo que a equação define implicitamente y como função de x numa vizinhança do ponto $(1, 1)$, calcule $\dfrac{dy}{dx}(1)$.

Resolução.

(a) Seja $G(x,y) = 2x^3 + x^2y - y^3$. Temos

$$\vec{\nabla} G(x,y) = \left(6x^2 + 2xy, x^2 - 3y^2\right).$$

No ponto $(1,1)$ a equação da reta tangente à curva $G(x,y) = 2$ é dada por

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} G(1,1) \cdot (x-1, y-1) = 0 &\iff (8,-2) \cdot (x-1, y-1) = 0 \\
&\iff 8(x-1) - 2(y-1) = 0 \\
&\iff 8x - 2y - 6 = 0 \\
&\iff y = 4x - 3.
\end{aligned}$$

(b) $\dfrac{\partial y}{\partial x}(1) = -\left.\dfrac{G_x}{G_y}\right|_{(1,1)} = -\dfrac{8}{-2} = 4.$

8. [1.5 valores] Se $u = f(x,y)$ e $v = g(x,y)$, com f e g diferenciáveis, mostre que

$$\vec{\nabla}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\vec{\nabla}u - u\vec{\nabla}v}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

Resolução.

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\left(\frac{u}{v}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{u}{v}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{v}\right) \\
&= \left(\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}v - u\dfrac{\partial v}{\partial x}}{v^2}, \frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}v - u\dfrac{\partial v}{\partial y}}{v^2}\right) \\
&= \frac{1}{v^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}v, \frac{\partial u}{\partial y}v\right) - \left(u\frac{\partial v}{\partial x}, u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \\
&= \frac{1}{v^2}\left[v\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) - u\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \\
&= \frac{1}{v^2}\left(v\vec{\nabla}u - u\vec{\nabla}v\right).
\end{aligned}$$