Aula 3

13 Outubro

Exemplo: $u_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$

$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

Temos que

$$u_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 1 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Como

$$u_{2n-1} \xrightarrow[n]{} -1 \quad \text{e} \quad u_{2n} \xrightarrow[n]{} 1$$

concluímos que a sucessão $(u_n)_n$ é divergente

Exemplo.

$$u_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n < 10^{17} \\ 3 & \text{se } n \geq 10^{17} \end{cases}$$

Temos que $\lim_n u_n = 3$.

Nesta secção vamos lidar com expressões do tipo

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

no sentido de atribuir um significado matemático rigoroso à operação de adição com um número infinito de parcelas.

Comecemos por observar que não podemos estender trivialmente as propriedades da adição de números reais com um número finito de parcelas.

De facto, suponhamos que pretendemos calcular o valor da soma

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Associando as parcelas duas a duas, escreveríamos

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots$$

e seríamos levados a concluir que $S = 0$.

Se agora destacarmos a primeira parcela e associarmos as restantes duas a duas, escrevemos

$S = 1 + (-1+1) + (-1+1) +$

e já somos levados a pensar que será $S = 1$

E poderíamos ainda destacar simplesmente a primeira parcela, resultando

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \quad) = 1 - S$$

donde $S = 1/2$!

Vamos lidar com expressões

$$\boxed{u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n}$$

atribuindo um significado

operação adição $(+)$ / n^o infinito de parcelas

Matematicamente

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

vai significar

$$\lim_{n} (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$

e quando este limite existir e for finito, diremos que aquela soma está bem definida.

Objetivo deste capítulo.

definir condições que garantam a existência de

$$\lim_n (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$

em $\mathbb{R}$

Consideremos a série geométrica de razão r

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}$$

- sucessão geradora:

$$u_n = r^{n-1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

- sucessão das somas parciais

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Tem-se que:

$$S_n = \begin{cases} n & \text{se } r = 1 \\ \dfrac{1-r^n}{1-r} & \text{se } r \neq 1 \end{cases}$$

Com efeito, observemos que

$$\begin{aligned}(1-r)S_n &= S_n - rS_n \\ &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} \\ &\quad - (r + r^2 + \cdots + r^n) \\ &= 1 - r^n\end{aligned}$$

Então, se $r \neq 1$,

$$S_n = \frac{1-r^n}{1-r}.$$

Recordemos agora que:

Seja $r \in \mathbb{R}$

1 Se $|r| > 1$ então $\lim_n r^n = +\infty$

2 Se $r = 1$ então $\lim_n r^n = 1$

3 Se $|r| < 1$ então $\lim_n r^n = 0$

4 Se $r \leq -1$ então

$\lim_n r^n$ não existe

Então

$r = 1 \Rightarrow$ série divergente

porque $\lim_n S_n = \lim_n n = +\infty$

$r > 1 \Rightarrow$ série divergente

porque $\lim_n r^n = +\infty$ e

$$\lim_n S_n = \lim_n \frac{1-r^n}{1-r} = +\infty$$

$r \leq -1 \Rightarrow$ série divergente

porque $\nexists \lim_n r^n$

e $\nexists \lim_n S_n$

$-1 < r < 1 \Rightarrow$ série convergente

com soma $S = \frac{1}{1-r}$

porque

$$\lim_n r^n = 0 \quad \text{e}$$

$$\lim_n s_n = \frac{1}{1-r}$$

Exemplos:

① A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

é convergente porque é uma série geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$

A sua soma é

$$S = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

② A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$.

é divergente porque é uma série geométrica de razão $\frac{5}{4}$ e $\left|\frac{5}{4}\right| = \frac{5}{4} > 1$