Aula 9 e Aula 10

3 Novembro e
5 Novembro

Exemplo. Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \operatorname{sen} x$

A função f é derivável em 0 e $f'(0) = 1$

Com efeito

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Logo, f é derivável em 0 e $f'(0) = 1$

Exemplo. A função $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, não é derivável na origem

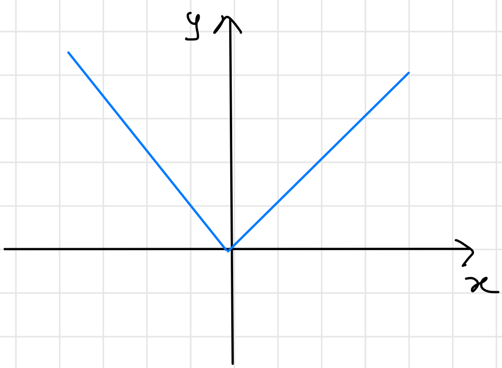
- $$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} = -1$$

  Logo $f'_-(0) = -1$

- $$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = 1$$

  Logo $f'_+(0) = 1$

Como $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, f não é derivável em 0



Teorema (Continuidade de funções deriváveis)

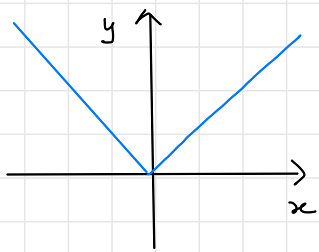
Sejam $f: X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X \cap X'$.
Se f é derivável em a, então f é contínua em a.

Observações.

① O recíproco do teorema é falso, isto é,

f é contínua em a $\not\Rightarrow$ f derivável em a

Basta pensar em $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, e no ponto $a = 0$



② Do teorema sai equivalentemente, que

f é descontínua em a $\Rightarrow$ f não é derivável em a.

Derivada da função composta / regra da cadeia

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$a \longmapsto f(a) \longmapsto g(f(a))$$

$$(g \circ f)(a)$$

Teorema: Sejam X, Y subconjuntos de $\mathbb{R}$, $f: X \to Y$, $g: Y \to \mathbb{R}$ funções, $a \in X \cap X'$, $f(a) \in Y'$. Suponhamos que f é derivável em a e que g é derivável em $f(a)$. Então $g \circ f$ é derivável em a e

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a)}$$

A fórmula anterior significa que a derivada da composta é o produto das derivadas, com cada uma delas calculada num ponto adequado

$$x \xmapsto{f} x^3 \xmapsto{g} \operatorname{sen}(x^3)$$

Exemplo: $h(x) = \operatorname{sen}(x^3)$

$$h'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2$$

Derivada da função inversa

$f: X \longrightarrow Y$ $\qquad\qquad$ $f^{-1}: Y \longrightarrow X$

$a \longmapsto f(a) = b$ $\qquad\qquad$ $b \longmapsto f^{-1}(b) = a$

Teorema. Sejam X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}$, $f: X \to Y$ uma função bijetiva e suponhamos que:

1. f é derivável em $a \in X \cap X'$
2. $f'(a) \neq 0$
3. f^{-1} é contínua em $b = f(a)$

Então, f^{-1} é derivável em b. Além disso,

$$\boxed{\underset{\uparrow}{(f^{-1})'(b)} = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}}$$

A fórmula anterior estabelece que a derivada da função inversa é o inverso da derivada da função direta, com cada uma delas calculada num ponto adequado

7. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5 + 3x + x^5$. Calcule $(f^{-1})'(5)$.

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(\underset{\substack{\| \\ a}}{?})}$$

$a = f^{-1}(5)$

$\Leftrightarrow \quad f(a) = 5$

Logo $a = 0$ porque $f(0) = 5$

$$= \frac{1}{f'(0)}$$

Como $f'(x) = 3 + 5x^4$ em particular, $f'(0) = 3$

Então, $(f^{-1})'(5) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{3}$

Pontos extremos e derivadas

Teorema: Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$

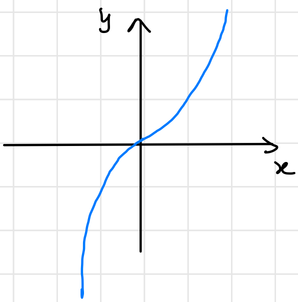
Se a é um ponto extremo de f então $f'(a) = 0$

Observação.

O recíproco do teorema é falso, isto é,

$$f'(c) = 0 \not\Rightarrow f(c) \text{ extremo local de } f$$

Basta pensar na função $f(x) = x^3$ e no ponto 0.

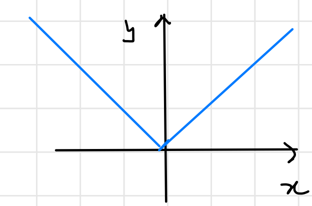


$f(x) = x^3$; $f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 0$ e $f(0)$ não é máximo local nem mínimo local de f

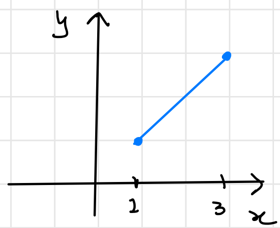
Observação.

$a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$
f derivável em a



$f(0)$ extremo

não existe $f'(0)$

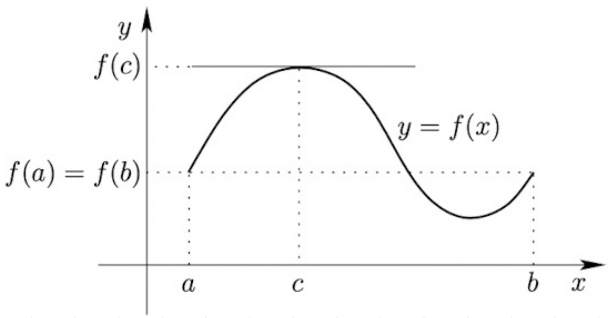


$g(1)$ extremo
$g(3)$ extremo

$g'(1) \neq 0$,
$g'(3) \neq 0$

Teorema [**de Rolle**]:

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a,b[$ e tal que $f(a) = f(b)$. Então existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.

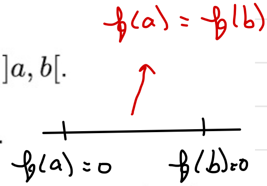


Geometricamente, o teorema de Rolle estabelece que, estando f nas condições indicadas, existe algum ponto $c \in]a,b[$ tal que a tangente à curva de equação $y = f(x)$, no ponto de abcissa c é horizontal.

Corolários [**do teorema de Rolle**]:

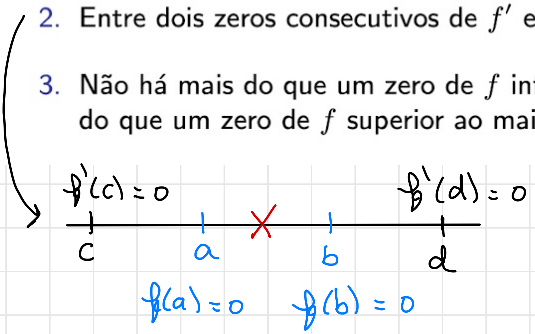
Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em $]a,b[$.

1. Entre dois zeros de f existe, pelo menos, um zero de f'.



2. Entre dois zeros consecutivos de f' existe, quando muito, um zero de f.

3. Não há mais do que um zero de f inferior ao menor zero de f', nem mais do que um zero de f superior ao maior zero de f'.



Exemplo de aplicação do Teorema de Rolle.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrário, mostre que a equação $x^3 + x + \alpha = 0$ não pode ter mais do que uma raiz real

Seja $f(x) = x^3 + x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, que é derivável em $\mathbb{R}$

Temos que $f'(x) = 3x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$

Em particular, $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Se a equação dada tivesse duas raízes reais então a função f possuiria dois zeros reais, pelo que f' possuiria, pelo menos, um zero real

Mas f' nunca se anula em $\mathbb{R}$

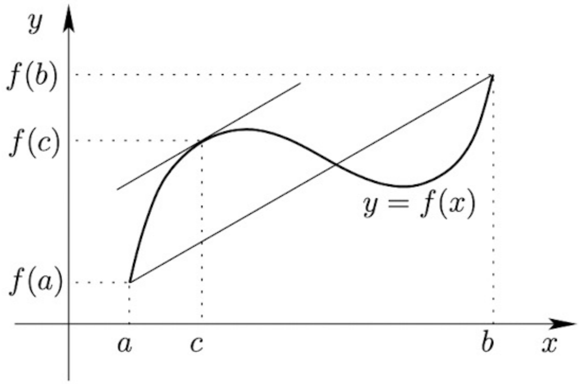
Exercício. Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa:

se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que $f'(x) = (\cos^2 x + 2)(x+5)(x-4)$, $x \in \mathbb{R}$, então f tem no máximo três zeros.

Teorema [de Lagrange]:

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a,b[$. Então

$$\exists\, c \in\,]a,b[\qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$



Geometricamente, o teorema de Lagrange estabelece que, estando f nas condições indicadas, existe $c \in]a,b[$ tal que a tangente à curva de equação $y = f(x)$, no ponto de abcissa c é paralela à secante que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

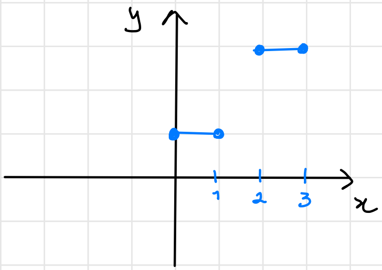
Corolário [do teorema de Lagrange]:

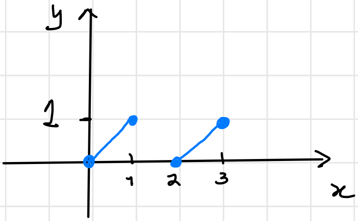
Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a,b[$. Se $f'(x) = 0$ para todo o $x \in]a,b[$ então f é constante.

Corolário [do teorema de Lagrange]:

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a,b[$.

1. Se $f'(x) > 0$ para todo o $x \in]a,b[$ então f é estritamente crescente.
2. Se $f'(x) < 0$ para todo o $x \in]a,b[$ então f é estritamente decrescente.





$f'(x) = 0$, $\forall x \in [0,1] \cup [2,3]$

f não é constante

$f'(x) > 0$, $\forall x \in [0,1] \cup [2,3]$

f não é estritamente crescente

o domínio $[0,1] \cup [2,3]$ não é um intervalo!

Teorema do Valor Intermédio para a derivada

Teorema [de Darboux]:

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável e tal que $f'(a) \neq f'(b)$. Então, dado $k \in \mathbb{R}$ estritamente compreendido entre $f'(a)$ e $f'(b)$, existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = k$.

Exemplo. Considere-se a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Esta função não possui a propriedade do valor intermédio e, portanto, não pode ser a derivada de função alguma no intervalo $[-1,1]$.

Exemplos.

① $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

Calculemos o seguinte limite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 0$$

Pela regra de l'Hôpital, concluímos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

② $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x}$

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Calculemos o seguinte limite.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(e^x)'}{x'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

Pela regra de l'Hôpital concluímos que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$