Probabilidades e Aplicações
LCC + LMAT
4.5 Transformadas

Emilia Athayde
DMAT, Universidade do Minho

2020/21

Resumo

Definição

Dada uma *v.a.* X, consideremos o valor médio $E(e^{-tX})$, para valores de t reais. Se este valor médio existir numa vizinhança do ponto $t = 0$, a função L_X definida nessa vizinhança por

$$L_X(t) = E(e^{-tX})$$

chama-se *transformada de Laplace* de X (ou da sua distribuição).

PROPRIEDADES ELEMENTARES:

1. $L_X(0) = 1$
2. a transformada de Laplace de $Y = a + bX$ $(a, b \in \mathbb{R})$ é dada por
$$L_Y(t) = e^{-at} L_X(bt).$$

Sobre transformadas de Laplace

São válidos os seguintes resultados:

A transformada de Laplace identifica a distribuição da *v.a.*, i.e., a cada *f.d.* (com transformada de Laplace) corresponde uma única transformada de Laplace, e reciprocamente, a cada transformada de Laplace corresponde uma única *f.d.*.

A convergência em distribuição[a] é equivalente à convergência das transformadas de Laplace para uma função contínua na origem.

[a] i.e., a convergência das *f.d.* nos pontos de continuidade da função limite, também chamada *convergência fraca* ou *convergência em lei*.

Fórmula para cálculo dos momentos

A transformada de Laplace L_X está ainda relacionada com os momentos de X. De facto, se tal transformada existir, esta terá derivadas (de qualquer ordem) na origem, existirão todos os momentos de X (de qualquer ordem), e é válida a seguinte relação (que em muitos casos simplifica o cálculo dos momentos):

$$E(X^n) = (-1)^n L_X^{(n)}(0).$$

No entanto, note-se que podem existir os momentos de todas as ordens de uma *v.a.* X e não existir transformada de Laplace, tal como acontece no caso da distribuição lognormal[a] ou no caso da *f.d.p.* dada por $f(x) = ce^{-|x|^\alpha}$, para $0 < \alpha < 1$.

[a] Diz-se que Y tem distribuição lognormal se $Y = e^X$, sendo $X \frown N(\mu, \sigma)$.

Exemplo

TRANSFORMADA DE LAPLACE DA $Exp(\lambda)$ E MOMENTOS:

No caso $X \frown Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, a t. de Laplace existe e é dada por

$$\begin{aligned} L(t) &= E(e^{-tX}) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-tx} e^{-\lambda x} dx = \\ &= -\frac{\lambda}{\lambda + t} \, e^{-(\lambda+t)x} \Big|_0^{+\infty} \underset{t+\lambda>0}{=} \frac{\lambda}{\lambda + t}, \text{ se } \; t > -\lambda \end{aligned}$$

(note-se que para $t \leq -\lambda$ o integral não converge). Logo

$$L^{(n)}(t) = (-1)^n n! \frac{\lambda}{(\lambda + t)^{n+1}}$$

donde

$$E(X^n) = (-1)^n L^{(n)}(0) = \frac{n!}{\lambda^n}$$

Mais exemplos

Transformada de Laplace da $Poisson(\lambda)$:

$$L(t) = E(e^{-tX}) = \sum_{j\geq 0} e^{-tj} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda} \sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!}(\lambda e^{-t})^j$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{-t}} = e^{-\lambda(1-e^{-t})}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Transformada de Laplace da $bi(1,p)$:

$$L(t) = E(e^{-tX}) = e^{-t\times 0}(1-p) + e^{-t\times 1}p = 1 - p + pe^{-t}, t \in \mathbb{R}$$

T. Laplace da $geom(p)$: $L(t) = \dfrac{pe^{-t}}{1-(1-p)e^{-t}}, \; t > \log(1-p)$

Transformada de Laplace da normal

Transformada de Laplace da $N(0,1)$:

$$\begin{aligned} L_Z(t) &= E(e^{-tZ}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx}\,\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(x+t)^2+\frac{1}{2}t^2} dx \\ &= e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(x+t)^2} dx = e^{\frac{1}{2}t^2}, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Transformada de Laplace da $N(\mu,\sigma)$:

$$L_X(t) = E(e^{-t(\mu+\sigma Z)}) = e^{-t\mu} L_Z(\sigma t) = e^{-t\mu+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Somas de v.a. independentes

Dadas X e Y, com *f.d.* F e G, respetivamente, chama-se *convolução* destas duas distribuições à *f.d.* (ou à correspondente *f.d.p./f.m.p.* no caso contínuo/discreto) de $X+Y$, com notação $F*G$. No caso de X e Y serem independentes e absolutamente contínuas, com *f.d.p.* f e g, respectivamente, reduz-se à fórmula (correspondente a uma versão generalizada do TPT)

$$\begin{aligned} F*G\ (s) &= P(X+Y \leq s) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq s-y \mid Y=y)\ g(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(s-y)\ g(y)dy \end{aligned}$$

ou seja, a $\int_{-\infty}^{+\infty} F(s-y)\ g(y)dy$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} G(s-x)\ f(x)dx$

Estes integrais podem ser trabalhosos (as fórmulas para o caso discreto são semelhantes, com somatórios em vez de integrais).

Transf. Laplace da soma de v.a. independentes

No entanto, a transformada de Laplace de $X+Y$ vai ser o produto das transformadas de Laplace de X e de Y. De facto (recorde-se que o valor médio do produto de *v.a.* independentes é igual ao produto dos valores médios, e que funções de *v.a.* independentes são ainda *v.a.* independentes), temos

$$L_{X+Y}(t) = E\left(e^{-t(X+Y)}\right) = E\left(e^{-tX}e^{-tY}\right) = E\left(e^{-tX}\right)E\left(e^{-tY}\right) =$$

$$= L_X(t)L_Y(t).$$

Generalização à soma de n *v.a.* independentes

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$, independentes, com respectivas transf. de Laplace $L_1(t), L_2(t), \ldots, L_n(t)$, e seja $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
Então $\quad L_{S_n}(t) = L_1(t)L_2(t)\ldots L_n(t)$.
Em particular, se X_i forem *i.i.d.*, então $L_{S_n}(t) = (L(t))^n$

Aplicação a algumas distribuições

Recorrendo a transformadas de Laplace conclui-se imediatamente que a soma de n *v.a.* independentes X_i com distribuição $Poisson(\lambda_i)$, $bi(n_i, p)$, $N(\mu_i, \sigma_i)$, tem distribuição resp. $Poisson(\sum \lambda_i)$, $bi(\sum n_i, p)$, $N(\sum \mu_i, \sqrt{\sum \sigma_i^2})$.

Soma de v.a. normais independentes

Dadas n *v.a.* $X_i \frown N(\mu_i, \sigma_i)$ e $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, temos

$$L_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n e^{-t\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2 t^2} = e^{-t\sum \mu_i + \frac{1}{2}t^2 \sum \sigma_i^2}$$

donde $S_n \frown N\left(\sum \mu_i, \sqrt{\sum \sigma_i^2}\right)$. No caso particular de *v.a. i.i.d.*, i.e., $X_i \frown N(\mu, \sigma)$ independentes, temos $S_n \frown N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$

Transformada de Laplace de um par aleatório

Define-se a transformada de Laplace de um par aleatório (X, Y) por

$$L(t,u) = E(e^{-tX-uY})$$

desde que este valor médio exista numa vizinhança de $(t,u) = (0,0)$.

Esta transformada de Laplace identifica a lei conjunta do par.

Se existir a transformada de Laplace do par (X, Y), existem os momentos conjuntos de qualquer ordem, que são dados por

$$E(X^m Y^n) = (-1)^{m+n} \left. \frac{\partial^{m+n} L(t,u)}{\partial t^m \partial u^n} \right|_{(t,u)=(0,0)}$$

X e Y independentes $\iff L(t,u) = L(t,0)L(0,u)$

Outras transformadas: f.g.m. e f.g.p.

função geradora de momentos

A *função geradora de momentos* (*f.g.m.*) de X é definida por $M(t) = E(e^{tX})$, caso este valor médio exista numa vizinhança da origem ($|t| < a$). Temos assim $M(t) = L(-t)$, para $|t| < a$.
O nome desta transformada deriva do facto de o momento de ordem n ser obtido à sua custa pela fórmula $E(X^n) = M^{(n)}(0)$.

função geradora de probabilidades

A *função geradora de probabilidades* (*f.g.p.*), utilizada sobretudo para *v.a.'s* discretas com suporte $\{0, 1, 2, \ldots\}$, é definida por $G(z) = E(z^X)$, convergindo pelo menos para $|z| \leq 1$. Então, as probabilidades $p_n = P(X = n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, satisfazem à relação $p_n = \frac{1}{n!}G^{(n)}(0)$, justificando o seu nome. Gera também os *momentos factoriais* de ordem r, $E(X(X-1)\ldots(X-r+1)) = G^{(r)}(1)$.

Outras transformadas: função característica

função característica

A *função característica* (*f.c.*), $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é definida para $t \in \mathbb{R}$ por $\phi(t) = E(e^{itX})$, ou seja, é a transformada de Fourier de f (*f.m.p.* / *f.d.p.* de X).

Note-se que a *f.c.* tem a vantagem (em relação à transformada de Laplace e à *f.g.m.*) de existir sempre (para qualquer t real e para qualquer *v.a.* X). De facto, como $|e^{itx}| \leq 1, \forall x, t \in \mathbb{R}$, então

$$\left|E(e^{itX})\right| = \left|\int e^{itx} dF(x)\right| \leq \int |\, e^{itx} \,| \, dF(x) \leq \int dF(x) = 1$$

Nota: A notação genérica $\int \ldots \; dF(x)$ engloba a versão $\int \ldots \; f(x)dx$ para v.a. contínuas com *f.d.p.* f, e a versão $\sum_i \ldots \; f(x_i)$ para v.a. discretas com *f.m.p.* f (o integral relativo a uma medida discreta reduz-se a uma soma).

A função gama de Euler

A função *gama* de Euler (também devida a D. Bernoulli) é definida por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

para $\alpha > 0$ (mais geralmente, está definida para $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$).
Tem-se (integrando por partes) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$ e como $\Gamma(1) = 1$, conclui-se que $\Gamma(n+1) = n!$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Portanto, a função *gama* estende a noção de "factorial" de um inteiro positivo a qualquer número real positivo. Tem-se ainda $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. No MATLAB e no R obtém-se o valor de $\Gamma(x)$ com o comando `gamma(x)`.
Fazendo uma mudança de variável, $t = \lambda x$ (com $\lambda > 0$), obtém-se

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

A distribuição $Gama(\alpha, \lambda)$

Da fórmula anterior resulta que $1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$, donde se conclui que

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \; I_{]0,+\infty[}(x)$$

é uma família de *f.d.p.*, para $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$ (α é um parâmetro de forma). Esta distribuição é conhecida por $Gama(\alpha, \lambda)$.
Em particular, a lei $Gama(1, \lambda)$ coincide com a $Exp(\lambda)$.

A transformada de Laplace é $L(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+t}\right)^\alpha$, $t > -\lambda$.

Logo a soma de *v.a.* independentes $Gama(\alpha_i, \lambda)$ é $Gama(\sum \alpha_i, \lambda)$.

Em particular, a soma de n *v.a.* $Exp(\lambda)$ independentes é $Gama(n, \lambda)$.

Gráficos de f.d.p. de leis $Gama(\alpha, 1)$

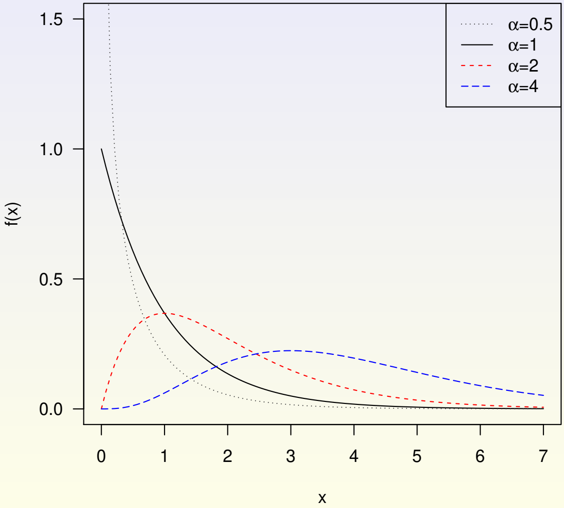
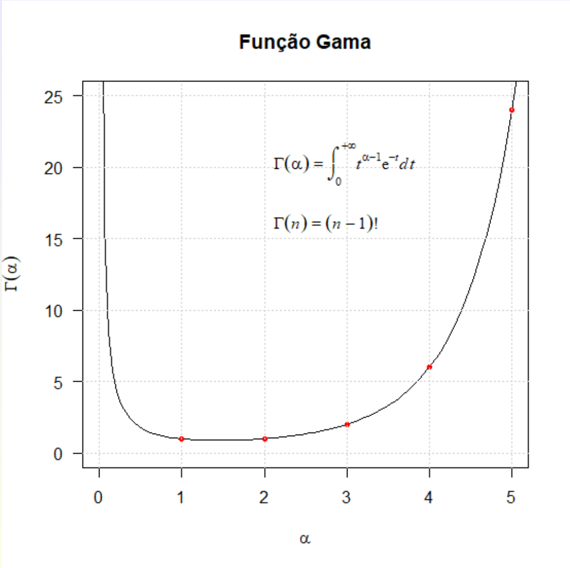


Gráfico da função Gama



Ainda a distribuição *Gama*

TRANSFORMADA DE LAPLACE DA $Gama(\alpha, \lambda)$:

$$\begin{aligned} L(t) &= E(e^{-tX}) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \tfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+t)^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda+t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} e^{-(\lambda+t)x} dx = \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda+t}\right)^\alpha, \quad t > -\lambda \end{aligned}$$

uma vez que a função integranda acima é uma *f.d.p.* se $\lambda + t > 0$

Então $L^{(r)}(t) = (-1)^r \lambda^{-r} \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+r-1)\left(\frac{\lambda}{\lambda+t}\right)^{\alpha+r}$, $t > -\lambda$, donde $E(X^r) = (-1)^r L^{(r)}(0) = \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{-r}$.

Distribuição da diferença de duas *v.a. i.i.d.* $Exp(\lambda)$

Dadas X e Y *i.i.d.* com distribuição $Exp(\lambda)$ temos, para $|t| < \lambda$, $L_{X-Y}(t) = L_X(t)L_{-Y}(t) = L_X(t)L_Y(-t) = \frac{\lambda}{\lambda+t}\frac{\lambda}{\lambda-t} = \frac{1}{1-(\frac{t}{\lambda})^2}$.

A distribuição de $Laplace(\mu, \delta)$, também chamada *exponencial bilateral*, é uma família de localização-escala, definida pela *f.d.p.* $f(x) = \frac{1}{2\delta}e^{-|\frac{x-\mu}{\delta}|}$, $x \in \mathbb{R}$. Para $\mu = 0$ a transformada de Laplace é

$$L(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{-tx}\frac{1}{2\delta}\ e^{\frac{x}{\delta}}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-tx}\frac{1}{2\delta}\ e^{-\frac{x}{\delta}}dx$$

donde, pela fórmula da t. Laplace da $Exp(1/\delta)$, temos

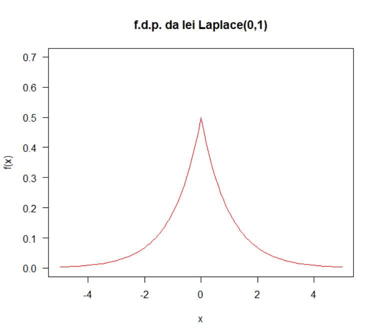
$$L(t) = \frac{1}{2}\ \frac{\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\delta}-t} + \frac{1}{2}\ \frac{\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\delta}+t} = \frac{1}{2}\ \frac{2}{1-\delta^2t^2} = \frac{1}{1-\delta^2t^2},\ |t| < \frac{1}{\delta},$$

que é a t. Laplace de $X - Y$ obtida acima, com $\delta = \frac{1}{\lambda}$. Logo, $X - Y \frown Laplace(0, \frac{1}{\lambda})$.

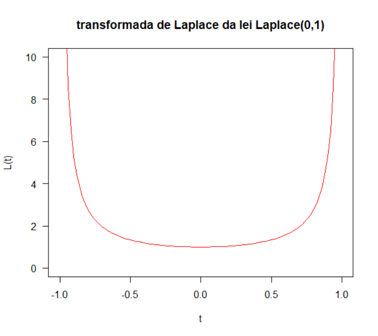
A distribuição $Laplace(0,1)$

Sejam X e Y *v.a. i.i.d.* $Exp(1)$.

$$T \frown Laplace(0,1) \iff T \stackrel{d}{=} X - Y$$



(a) *f.d.p.* de T



(b) transf. Laplace de T

Simulação da distribuição de $Laplace$

Considere a distribuição $Laplace(\mu, \delta)$, com *f.d.p.*

$$f(x) = \frac{1}{2\delta}\, e^{-\left|\frac{x-\mu}{\delta}\right|},\ x \in \mathbb{R}.$$

Para o caso particular $T \frown Laplace(0, \delta)$,

a. determine a correspondente *f.d.*
b. determine a *f.d.* inversa (i.e., a função quantil)
c. prove que $|T| \frown Exp(\frac{1}{\delta})$
d. simule NPAs da *v.a.* T usando
   1. o método de inversão da *f.d.*
   2. o facto $T = X - Y$ com X, Y *i.i.d.* $Exp(\frac{1}{\delta})$
   3. o facto $|T| \frown Exp(\frac{1}{\delta})$.
   4. o *package* `extraDistr`

Generalize para a simulação de uma $Laplace(\mu, \delta)$