Análise

folha de exercícios 3 — 2017/2018

Soluções

- **Derivadas direcionais e vetor gradiente**

1. (a) $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = (2x+y, x)$;
(b) $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = (e^x \tan y + 4xy, \frac{e^x}{\cos^2 y} + 2x^2)$;
(c) $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = (3x^2y^2, 2x^3y)$;
(d) $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = (2x-5y, -5x+6y)$;
(e) $\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = (9x^2y, 2x^3+2z, 2y)$;
(f) $\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = (2xz + yze^{xz}, e^{xz}, x^2 + xye^{xz})$.

2. (a) $D_{\vec{v}} f(P) = \overrightarrow{\nabla} f(0,1) \cdot (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = \frac{3}{5}$;
(b) $D_{\vec{v}} f(P) = \overrightarrow{\nabla} f(0, \frac{\pi}{4}) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
(c) $D_{\vec{v}} f(P) = \overrightarrow{\nabla} f(2,-1) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{8}{5}\sqrt{5}$;
(d) $D_{\vec{v}} f(P) = \overrightarrow{\nabla} f(3,-1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -5\sqrt{2}$;
(e) $D_{\vec{v}} f(P) = \overrightarrow{\nabla} f(-1,0,4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$;
(f)
$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(P) &= \overrightarrow{\nabla} f(1,-2,3) \cdot \left(\tfrac{1}{\sqrt{14}}, -\tfrac{2}{\sqrt{14}}, \tfrac{3}{\sqrt{14}}\right) \\ &= \tfrac{\sqrt{14}}{14}\left(9 - 14e^3\right). \end{aligned}$$

3. $\overrightarrow{\nabla} V(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$; $\quad \vec{u} = (\cos\frac{\pi}{4}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
taxa de variação de V em P: $D_{\vec{u}} V(P) = \overrightarrow{\nabla} V(P) \cdot \vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. (a) $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = (2x-y, -x-4y)$; $\quad \vec{u} = (\cos\frac{\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\quad D_{\vec{u}} f(1,2) = \overrightarrow{\nabla} f(1,2) \cdot \vec{u} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$;
(b) $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \left(6x(x^2-y)^2, -3(x^2-y)^2\right)$; $\quad \vec{u} = (\cos\frac{3\pi}{4}, \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
$D_{\vec{u}} f(3,1) = \overrightarrow{\nabla} f(3,1) \cdot \vec{u} = -672\sqrt{2}$;
(c) $\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = (y+z^3, x+z^2, 2xy+3xz^2)$; $\quad D_{\vec{v}} f(2,0,3) = \overrightarrow{\nabla} f(2,0,3) \cdot \vec{v} = \frac{43}{3}$;
(d) $\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = (y^3z^2, 3xy^2z^2, 2xy^3z)$; $\quad \vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
$D_{\vec{u}} f(2,-1,4) = \overrightarrow{\nabla} f(2,-1,4) \cdot \vec{u} = 32\sqrt{3}$;
(e) $\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = (yz^2e^{xy}, xz^2e^{xy}, 2ze^{xy})$; $\quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{Q-P}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
$D_{\vec{u}} f(-1,2,3) = \overrightarrow{\nabla} f(-1,2,3) \cdot \vec{u} = 7\sqrt{3}e^{-2}$;
(f) $\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = (y+z, x+z, y+x)$; $\quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{Q-P}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\right)$;
$D_{\vec{u}} f(2,1,3) = \overrightarrow{\nabla} f(2,1,3) \cdot \vec{u} = \frac{22}{21}\sqrt{21}$.

5. $\overrightarrow{\nabla} f(0, \frac{\pi}{4}) = (1,2)$ e $\overrightarrow{\nabla} f(1,-2,3) = (6-6e^3, e^3, 1-2e^3)$, respetivamente.

6. $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = (e^y, xe^y)$; $\quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{Q-P}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$;
taxa de variação de f em P: $D_{\vec{u}} f(2,0) = \overrightarrow{\nabla} f(2,0) \cdot \vec{u} = \frac{11}{5}$;
taxa de variação máxima ocorre na direção de $\overrightarrow{\nabla} f(2,0) = (1,2)$ e tem valor $\|\overrightarrow{\nabla} f(2,0)\| = \|(1,2)\| = \sqrt{5}$.

7. $\overrightarrow{\nabla} V(x,y,z) = (2x, 8y, 18z)$; $\quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{PO}}{\|\overrightarrow{PO}\|} = \frac{O-P}{\|\overrightarrow{PO}\|} = (-\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}})$;
taxa de variação de V em P: $D_{\vec{u}} V(2,-1,3) = \overrightarrow{\nabla} V(2,-1,3) \cdot \vec{u} = -\frac{89}{7}\sqrt{14}$;
direção que produz a taxa máxima de variação: $\overrightarrow{\nabla} V(2,-1,3) = (4,-8,54)$;
taxa máxima de variação: $\|\overrightarrow{\nabla} V(2,-1,3)\| = \|(4,-8,54)\| = \sqrt{2996}$.

8. $\nabla f(a,b) = (7,-1)$. Taxa máxima de variação em (a,b): $\|\nabla f(a,b)\| = 5\sqrt{2}$.

9. Na direção de qualquer vetor unitário da forma $\left(a, -\frac{1}{2}\right)$, $a \in \mathbb{R}$.

Existem apenas duas soluções: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

10. direção de crescimento mais rápido: $\overrightarrow{\nabla} f(2,1) = (4e^{-1}, -4e^{-1})$;

taxa máxima de crescimento: $\|\overrightarrow{\nabla} f(2,1)\| = \|(4e^{-1}, -4e^{-1})\| = 4e^{-1}\sqrt{2}$.

11. $\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = \left(\dfrac{z(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, -\dfrac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right) \cos\left(\dfrac{xz}{x^2+y^2}\right)$; $\quad \overrightarrow{\nabla} f(2,1,0) = \left(0, 0, \dfrac{2}{5}\right)$;

$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$;

taxa de variação de f em $(2,1,0)$: $D_{\vec{v}} f(2,1,0) = \overrightarrow{\nabla} f(2,1,0) \cdot \vec{v} = \frac{2}{5\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{15}$;

taxa máxima de variação: $\|\overrightarrow{\nabla} f(2,1,0)\| = \frac{2}{5}$.

12. Sendo $P = (x,y)$, devemo-nos afastar na direção do vetor $\overrightarrow{\nabla} f(P) = (-2x, -2y)$, ou seja, na direção contrária a $\overrightarrow{OP}$.

• Plano tangente e reta normal a uma superfície. Reta tangente a uma curva de nível

13. Resolvido nos apontamentos das aulas teóricas.

14. (a) Seja $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + z^2$.

Plano tangente em P :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla} g(-1,1,2) \cdot (x+1, y-1, z-2) = 0 &\iff (-2,-4,4) \cdot (x+1, y-1, z-2) = 0 \\ &\iff -2x - 4y + 4z = 6. \end{aligned}$$

(b) Seja $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x,y,z) = z - 4x^2 - y^2$.

Plano tangente em P :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla} g(1,1,5) \cdot (x-1, y-1, z-5) = 0 &\iff (-8,-2,1) \cdot (x-1, y-1, z-5) = 0 \\ &\iff 8x + 2y - z = 5. \end{aligned}$$

15. (a) Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x,y,z) = x^2 - y^2 - 2z^2 - 2$.

Equação vetorial da reta normal em P:

$$(x,y,z) = (\sqrt{10}, 0, -2) + \lambda \overrightarrow{\nabla} F(\sqrt{10}, 0, -2) = (\sqrt{10}, 0, -2) + \lambda(2\sqrt{10}, 0, 8), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Equações paramétricas da reta normal:

$$\begin{cases} x = \sqrt{10} + 2\sqrt{10}\lambda \\ y = 0, \\ z = -2 + 8\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x,y,z) = 4x^2 + 9y^2 + z^2 - 49$.

Equações paramétricas da reta normal em P:

$$\begin{cases} x = 1 + 8\lambda \\ y = -2 - 36\lambda, \\ z = 3 + 6\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(c) Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x,y,z) = z - 3x^2 - 2y^2$.

Equações paramétricas da reta normal em P:

$$\begin{cases} x = 1 - 6\lambda \\ y = 1 - 4\lambda, \\ z = 5 + \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

16. Equações paramétricas da reta normal à superfície esférica em $P = (x_0, y_0, z_0)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + 2(x_0 - a)\lambda \\ y = y_0 + 2(y_0 - b)\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + 2(z_0 - c)\lambda \end{cases}$$

Se considerarmos $\lambda = -\frac{1}{2}$, vem $(x, y, z) = (a, b, c)$, ou seja, a reta passa pelo centro de S.

17. (a) $\vec{\nabla} f(-1, 2) = (-16, 12)$;

(b) $-\vec{\nabla} f(-1, 2) = (16, -12)$;

(c) Qualquer vetor $\vec{v} = (a, b)$ tal que $\vec{\nabla} f(-1, 2) \cdot (a, b) = 0$. Por exemplo, $\vec{v} = (3, 4)$.

18. É maior $||\nabla f||$ em P uma vez que as curvas de nível estão mais próximas entre si em P do que em Q.

19. (a) Seja $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y, z) = z - x^2 - y^2$.
Plano tangente em P :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} g(1, -2, 5) \cdot (x - 1, y + 2, z - 5) = 0 &\iff (-2, 4, 1) \cdot (x - 1, y + 2, z - 5) = 0 \\ &\iff -2x + 4y + z = -5. \end{aligned}$$

Equações paramétricas da reta normal em P:

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -2 + 4\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$$

(b) Seja $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2$.
Plano tangente em P :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} g(0, 1, -1) \cdot (x - 0, y - 1, z + 1) = 0 &\iff (-2, -2, -2) \cdot (x, y - 1, z + 1) = 0 \\ &\iff -2x - 2y - 2z = 0. \end{aligned}$$

Equações paramétricas da reta normal em P:

$$\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}$$

(c) Seja $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y, z) = xyz$.
Plano tangente em P :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} g(1, 1, 1) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0 &\iff (1, 1, 1) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0 \\ &\iff x + y + z = 3. \end{aligned}$$

Equações paramétricas da reta normal em P:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

(d) Seja $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y, z) = z - e^{x+y}$.
Plano tangente em P :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} g(1, 2, e^3) \cdot (x - 1, y - 2, z - e^3) = 0 &\iff (-e^3, -e^3, 1) \cdot (x - 1, y - 2, z - e^3) = 0 \\ &\iff -e^3 x - e^3 y + z = -2e^3. \end{aligned}$$

Equações paramétricas da reta normal em P:

$$\begin{cases} x = 1 - e^3\lambda \\ y = 2 - e^3\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = e^3 + \lambda \end{cases}$$

20. $-\overrightarrow{\nabla} f(2,-3) = (-12, 92)$

21. (a) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2$.
Vetor normal: $\overrightarrow{\nabla} f(2,3) = (4,6)$
Reta tangente à curva (de nível $k = 3$ de f) em $(2,3)$:
$\overrightarrow{\nabla} f(2,3) \cdot (x-2, y-3) = 0 \iff (4,6) \cdot (x-2, y-3) = 0 \iff 4x + 6y = 26$.

(b) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = y - x^2$.
Vetor normal: $\overrightarrow{\nabla} f(2,3) = (-4,1)$
Reta tangente à curva (de nível $k = -1$ de f) em $(2,3)$:
$\overrightarrow{\nabla} f(2,3) \cdot (x-2, y-3) = 0 \iff (-4,1) \cdot (x-2, y-3) = 0 \iff -4x + y = -5$.

(c) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (y-x)^2 - xy$.
Vetor normal: $\overrightarrow{\nabla} f(2,3) = (-5,0)$
Reta tangente à curva (de nível $k = -5$ de f) em $(2,3)$:
$\overrightarrow{\nabla} f(2,3) \cdot (x-2, y-3) = 0 \iff (-5,0) \cdot (x-2, y-3) = 0 \iff x = 2$.

22. $\overrightarrow{\nabla} f(2,1) = (4,8)$

Reta tangente à curva de nível $k = 8$ de f em $(2,1)$:
$\overrightarrow{\nabla} f(2,1) \cdot (x-2, y-1) = 0 \iff (4,8) \cdot (x-2, y-1) = 0 \iff 4x + 8y = 16$.