Distribuições contínuas

Variáveis aleatórias e leis de probabilidade.
Medidas de localização, dispersão e forma.
Distribuições univariadas mais comuns.
Pares aleatórios e vectores aleatórios.
Distribuição normal multivariada.

Variável aleatória e função de distribuição (revisão)

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidades.

Variável aleatória é uma função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

tal que $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, $\forall\, B \in \mathcal{B}$; então $P(X \in B) = P(\, X^{-1}(B)\,)$

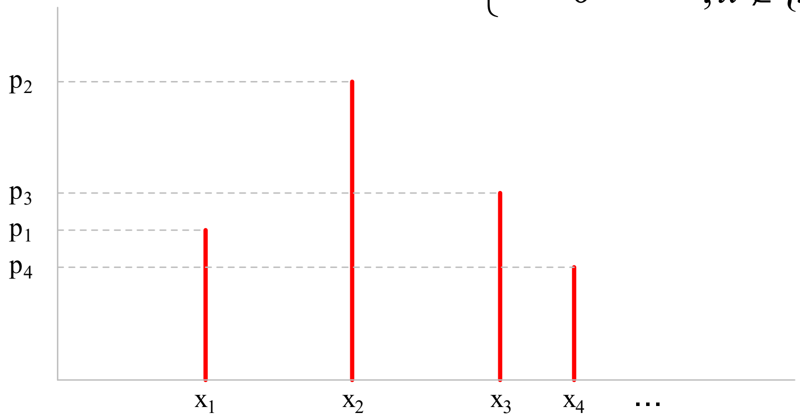
A função de distribuição (fd) de uma v.a. X é definida por

$$F(x) = P(X \leq x), \; x \in \mathbb{R}$$

Se o contradomínio de X for um conjunto infinito não numerável (e.g., um intervalo, $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}$), a v.a. X é não discreta. Neste caso, se existir uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que desempenhe um papel análogo ao da fmp (chamada função densidade de probabilidade), a v.a. diz-se absolutamente contínua.

caso discreto

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x) & , x \in \{x_1, x_2, \ldots\} \\ 0 & , x \notin \{x_1, x_2, \ldots\} \end{cases}$$



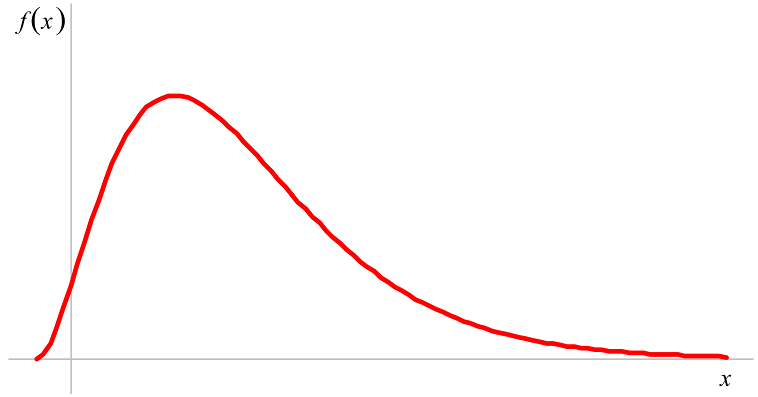
$$(i) \quad p_i \geq 0$$

$$(ii) \quad \sum_i p_i = 1$$ soma unitária

$$(iii) \quad P(X \in B) = \sum_{i: x_i \in B} P(X = x_i)$$

caso absol. contínuo

$f(x) = 0$, se $x \notin \text{supp}(X)$



$$(i) \quad f(x) \geq 0$$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$ área unitária

$$(iii) \quad P(X \in B) = \int_B f(x)\, dx$$

probabilidades são integrais (áreas)

fmp / fdp (massa de probabilidade / densidade de probabilidade)

As v.a.'s discretas são as que têm suporte contável, $\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\}$. Ficam identificadas pela fmp (função massa de probabilidade).

As v.a.'s absolutamente contínuas têm suporte infinito não numerável. Ficam identificadas por uma fdp (função densidade de probabilidade).

fmp

$$p_i = f(x_i) = P(X = x_i)$$

tal que

$$p_i \geq 0\,;\ \sum_i p_i = 1$$

fdp

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

tal que

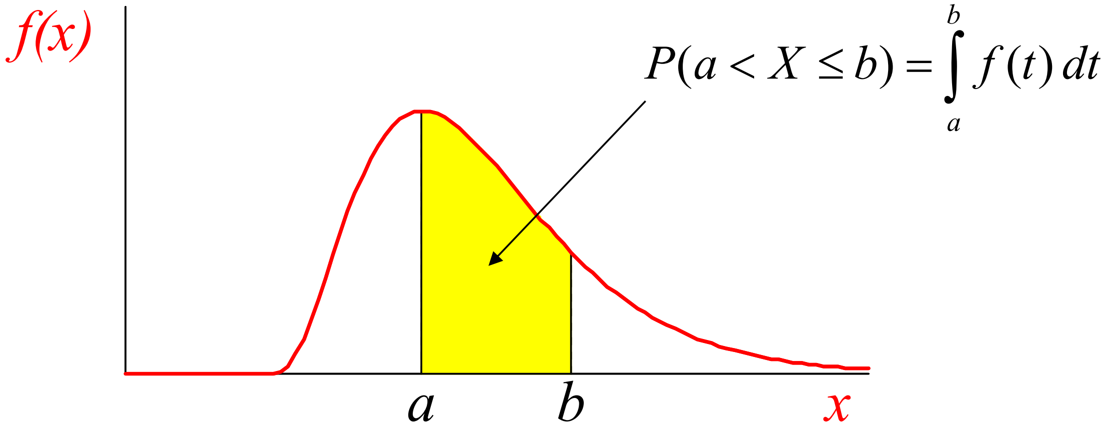
$$f(x) \geq 0\,;\ \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$$

Distribuições (absolutamente) contínuas

Uma v.a. X diz-se absolutamente contínua se existir uma fdp $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Então $\boxed{F'(x) = f(x)}$ e $\boxed{P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$



Recorde-se que uma v.a. X (discreta, contínua, ou outra) fica identificada pela função de distribuição (fd), $F(x) = P(X \leq x), \ x \in \mathbb{R}$

As fd têm as seguintes propriedades, que as caracterizam:

são não decrescentes, contínuas à direita e $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

- No caso discreto,

$$F(x) = \sum_{i:\, x_i \leq x} p_i$$

$\downarrow$

função em escada (saltos p_i nos pontos x_i)

- No caso contínuo,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$$

$\downarrow$

função contínua, $F'(x) = f(x)$

Em qualquer caso
(discreto, contínuo, ou outro)

$$\boxed{P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)}$$

Variáveis aleatórias (absol.) contínuas

- Têm suporte infinito não numerável
- Ficam identificadas pela fdp $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz a

$$\boxed{\begin{array}{l} (i) \quad f(x) \geq 0 \\[1em] (ii) \quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1 \\[1em] (iii) \quad P(X \in B) = \displaystyle\int_B f(x)\, dx \end{array}}$$

O conhecimento da fdp equivale ao da fd pois

dada uma fdp f temos $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$

e dada uma fd F temos $f(x) = F'(x)$

Notas:

1. O valor $f(x)$ da fdp não representa uma probabilidade (as probabilidades são integrais = áreas). De facto, $P(X = x) = \int_{\{x\}} f(t)\,dt = 0$

2. As fdp podem ter valores superiores a 1, e.g., fdp $f(x) = 2\ \mathrm{I}_{[0,\,0.5]}(x)$ * e não têm que ser contínuas para todo o x (podem até não estar definidas em alguns pontos)

3. No caso contínuo (contrariamente ao caso discreto), tem-se
$$P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

---

* A função indicatriz do conjunto A é dada por $I_A(x) = \begin{cases} 1 & , se\ \ x \in A \\ 0 & , se\ \ x \notin A \end{cases}$

Distribuições (absolutamente) contínuas

- distribuição uniforme num intervalo

- distribuição exponencial de parâmetro λ

  durações de vida, intervalos de tempo entre ocorrências de fenómenos consecutivos (está relacionada com a Poisson)

- distribuição gama de parâmetros n e λ (generalização da exponencial)

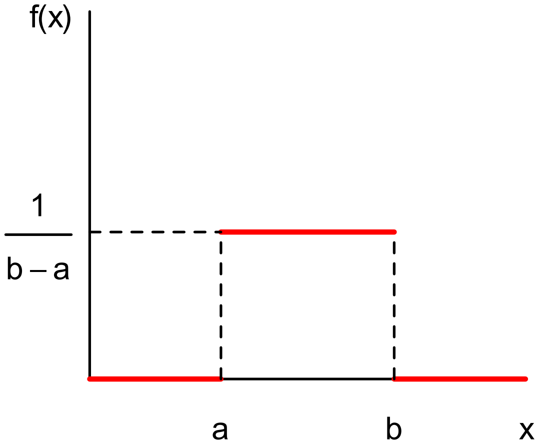
  intervalos de tempo entre a k-ésima e $k+n$-ésima ocorrências

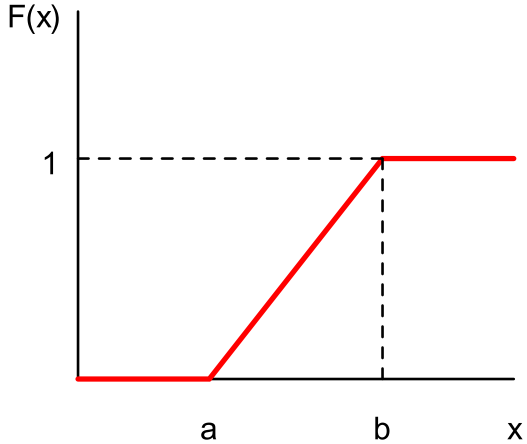
- distribuição normal (ou gaussiana)

  fenómenos que resultam de causas aditivas

Distribuição uniforme (contínua) – $U[a,b]$

`dunif, punif, …`





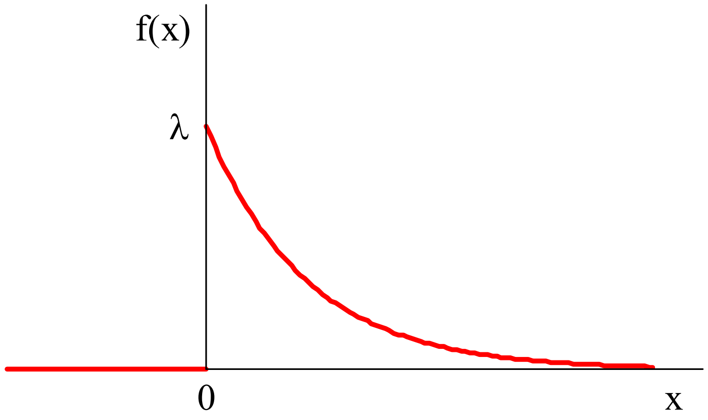
$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$$

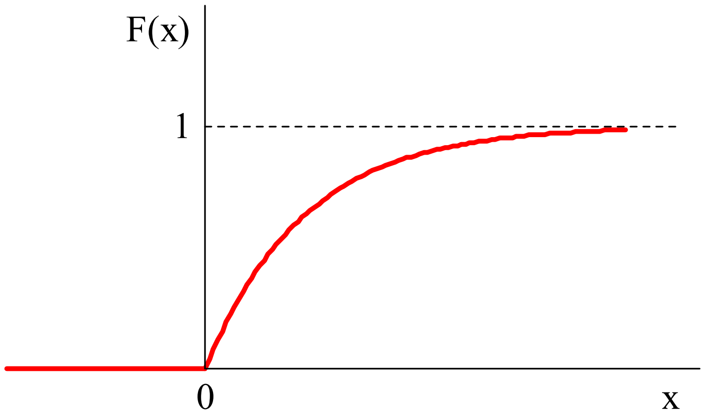
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , \quad a \le x < b \\ 1 & , \quad x \ge b \end{cases}$$

$$\boxed{\mu = \frac{a+b}{2}, \ \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

Distribuição exponencial – $Exp(\lambda)$

`dexp, pexp, …`





$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

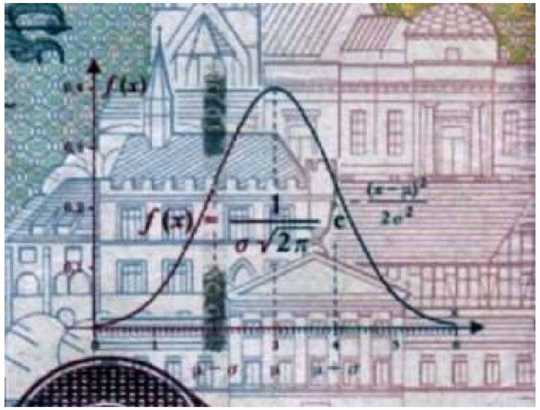
$$\boxed{\mu = \tfrac{1}{\lambda},\ \sigma^2 = \tfrac{1}{\lambda^2}}$$

Nota: Esta distribuição "não tem memória", i.e.,

$$P(X > t + y \mid X > t) = P(X > y), \text{ para } t > 0,\ y > 0$$

Distribuição normal (ou gaussiana)

`dnorm, pnorm, …`



Carl Friedrich Gauss
1777-1855

valor médio

desvio padrão

$$X \frown N(\mu\,,\,\sigma)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\boxed{X = \sigma Z + \mu}$$

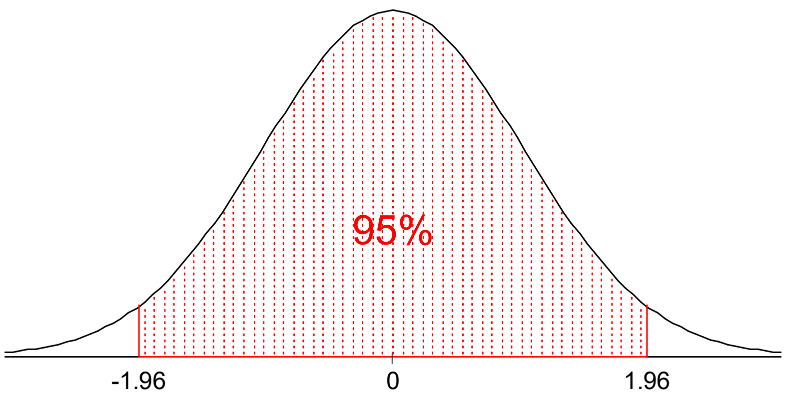
$$Z \frown N(0,1)$$

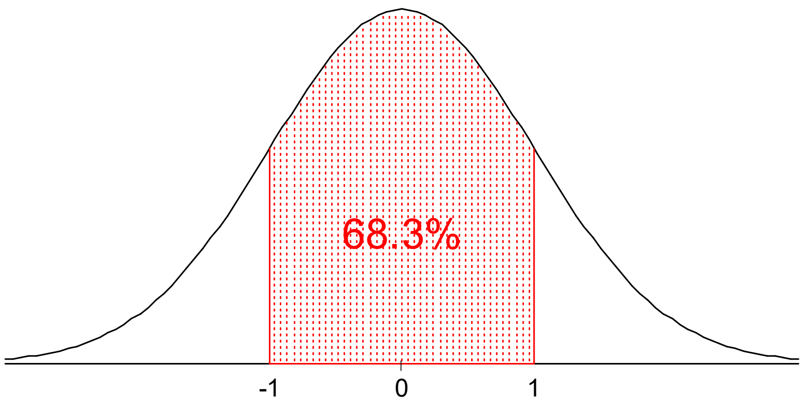
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\boxed{Z = (X-\mu)\,/\,\sigma}$$

$$P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.9500042$$
$$\cong 0.95$$

$$P(-1 < Z < 1) = 0.6826895$$
$$\cong 0.683$$





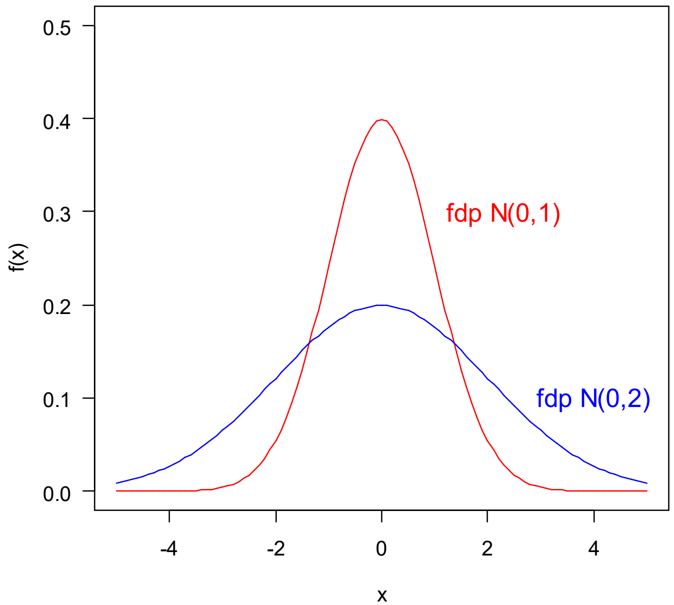
Exercício:

(a) Calcule $P(-2 < Z < 2)$, sendo $Z \frown N(0,1)$.

```
pnorm(2)-pnorm(-2)
[1] 0.9544997
```

(b) Calcule $P(\mu - 2\,\sigma < X < \mu + 2\,\sigma)$, sendo $X \frown N(\mu\,,\,\sigma)$.

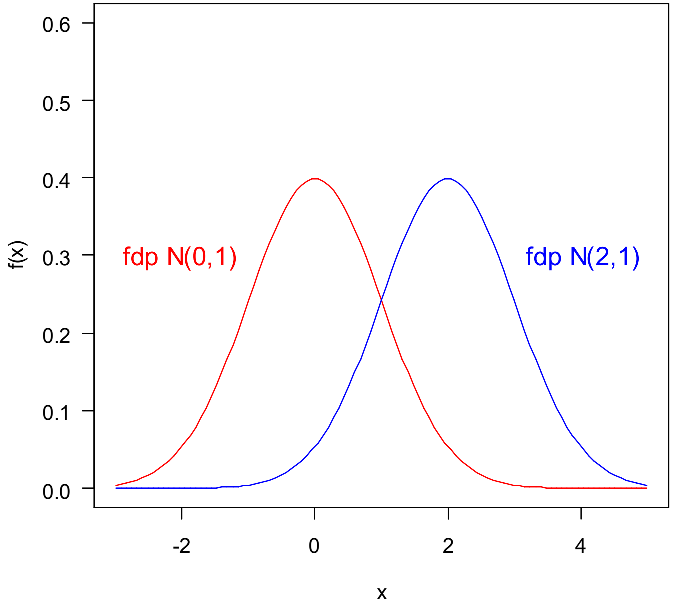
Densidades normais com o mesmo valor médio e diferentes variâncias:



$\sigma = 0$ $\quad$ $\sigma = 2$

σ é um parâmetro de dispersão

Densidades normais com diferentes valores médios e mesma variância:



$\mu = 0$ $\quad$ $\mu = 2$

μ é um parâmetro de localização

Valor médio de uma v.a. X (contínua)

Valor médio (ou valor esperado) de uma v.a. X, contínua, é uma "média pesada" dos valores x que a v.a. pode assumir (os pesos são os valores $f(x)$) e representa-se por $E(X)$, μ ou μ_X . É dado por

$$\boxed{\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx}$$

desde que este integral convirja absolutamente, i.e., desde que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\, x\,|\, f(x)\, dx < +\infty$

Nota: Há v.a.'s que não têm valor médio. Por exemplo, a v.a. $X \frown Cauchy(0,1)$, com fdp

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < +\infty$$

pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{1+x^2}\, dx = +\infty$$

Exemplo 18: Cálculo do valor médio de uma v.a. $X \frown U[a,b]$

$$\mu = E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b+a}{2}$$

(μ é o ponto médio do intervalo [*a*,*b*] e o ponto de simetria da fdp)

Valor médio de $h(X)$, sendo X contínua

Dada uma função h, definimos analogamente o valor médio da v.a. $Y = h(X)$ por

$$\boxed{E(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, f(x)\, dx}$$

desde que este integral convirja absolutamente

Variância e desvio padrão de X

variância

$$\boxed{\sigma^2 = \operatorname{var}(X) = E\left((X-\mu)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx}$$

desvio padrão

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\operatorname{var}(X)}}$$

A moda, no caso contínuo, é o valor x tal que $f(x)$ é máximo; há distribuições unimodais, bimodais, plurimodais e amodais.

O coeficiente de assimetria é definido do mesmo modo que no caso discreto, i.e.,

$$\beta_1 = E((X-\mu)^3/\sigma^3) = \frac{1}{\sigma^3}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^3 f(x)\,dx$$

As fórmulas e propriedades dadas sobre valores médios, variâncias, etc. para o caso discreto mantêm-se válidas para o caso contínuo. As demonstrações são análogas, substituindo os somatórios por integrais. Assim, temos por exemplo

$$\operatorname{var}(X) \geq 0 \qquad E(a+bX) = a + bE(X)$$

$$\operatorname{var}(X) = E(X^2) - \mu^2 \qquad \operatorname{var}(a+bX) = b^2 \operatorname{var}(X) \qquad \sigma_{a+bX} = |b|\,\sigma_X$$

Exemplo 18 (cont.): Cálculo de $E(X^2)$ e da variância de $X \frown U$[a,b]

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{1}{b-a}\,\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$\operatorname{var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} =$$

$$= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{b^2+2ab+a^2}{4} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exemplo 19: Cálculo do valor médio e variância de $X \frown Exp(\lambda)$

Integração por partes:

$$\int h'g = h\,g - \int h\,g'$$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\,dx = -x\,e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x}\,dx = 0 - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} \lambda\, x^2\, e^{-\lambda x}\,dx = -x^2\, e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -2x\,e^{-\lambda x}\,dx == 0 + \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda}E(X) = \frac{2}{\lambda^2};$$

$$\operatorname{var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Características teóricas (medidas de localização, dispersão e forma)

nome	símbolo	caso discreto	caso contínuo
valor médio* $E(X)$	μ	$\sum_i x_i p_i$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) dx$
variância* $\mathrm{var}(X)=E((X-\mu)^2)$	σ^2	$\sum_i (x_i-\mu)^2 p_i$	$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, f(x)\, dx$
coef. assim.* $E((X-\mu)^3/\sigma^3)$	β_1	$\frac{1}{\sigma^3}\sum_i (x_i-\mu)^3 p_i$	$\frac{1}{\sigma^3}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^3\, f(x)\, dx$
mediana	$\chi_{½}$	$\inf\{x : F(x) \geq 1/2\}$	
⋮			

*existem somente se as séries/integrais convergirem absolutamente

Exemplo 20: Cálculo do valor médio e variância de $Z \frown N(0,1)$

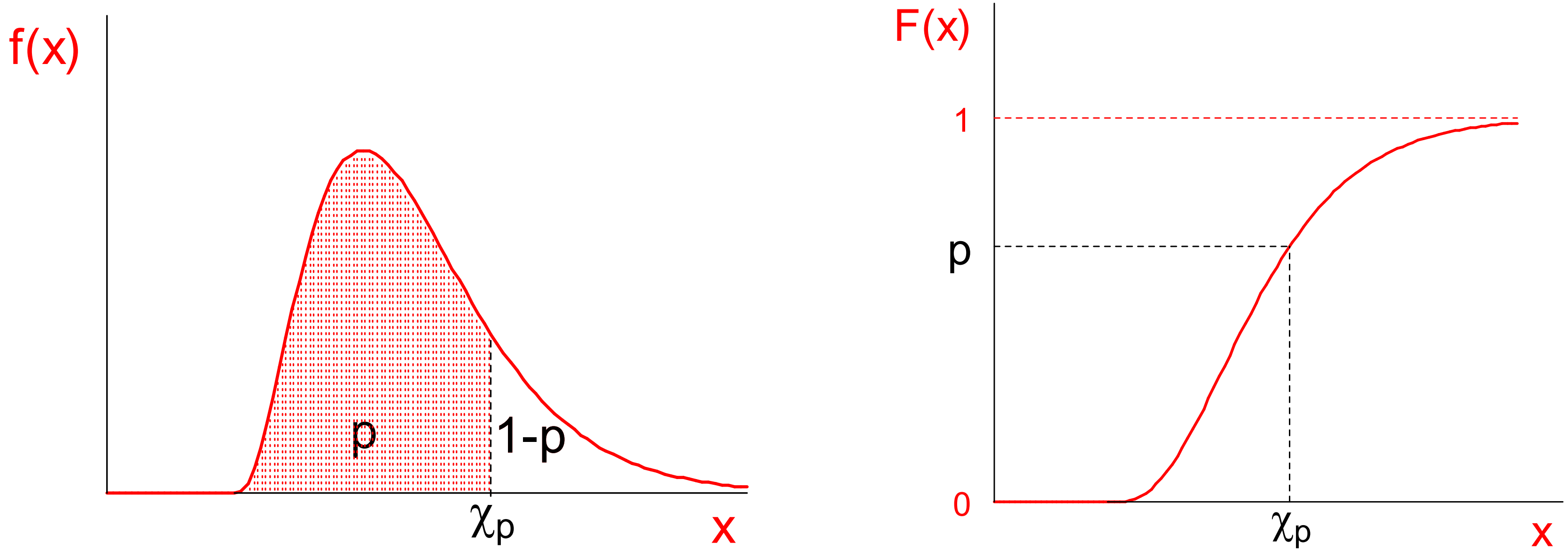
$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x\, e^{-x^2/2}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$\mathrm{var}(Z) = E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2\, e^{-x^2/2}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x\, e^{-x^2/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = 0 + 1 = 1$$

Quantil–p (caso contínuo)

É o valor de x que corresponde à área acumulada p (à esquerda de x no gráfico da fdp) e representa-se por χ_p. No caso $p = 0.5$ temos a mediana



Exercício: Calcule a mediana da distribuição $Exp(1)$

$$\chi_{0.5} = F^{-1}(0.5)$$

```
qexp(1/2,1)
[1] 0.6931472
log(2)
[1] 0.6931472
```

Exemplo 19 (cont.): Cálculo da mediana de $X \frown Exp(\lambda)$, que é a solução da equação $F(x)=1/2$, sendo $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0$.

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda x = -\log(2) \Leftrightarrow x = \frac{\log(2)}{\lambda}$$

Note-se que nesta distribuição temos $\boxed{\chi_{0.5} = \frac{\log(2)}{\lambda} < \frac{1}{\lambda}}$

quantil-p de uma v.a. X

Mais geralmente, o quantil-p de uma v.a. X contínua (ou da sua distribuição) é o valor x que corresponde a uma probabilidade p acumulada à sua esquerda. Se a fd F for estritamente crescente, coincide com a inversa da fd no ponto p, i.e., com $F^{-1}(p)$.

Inclui os casos particulares da

mediana, se $p = ½$

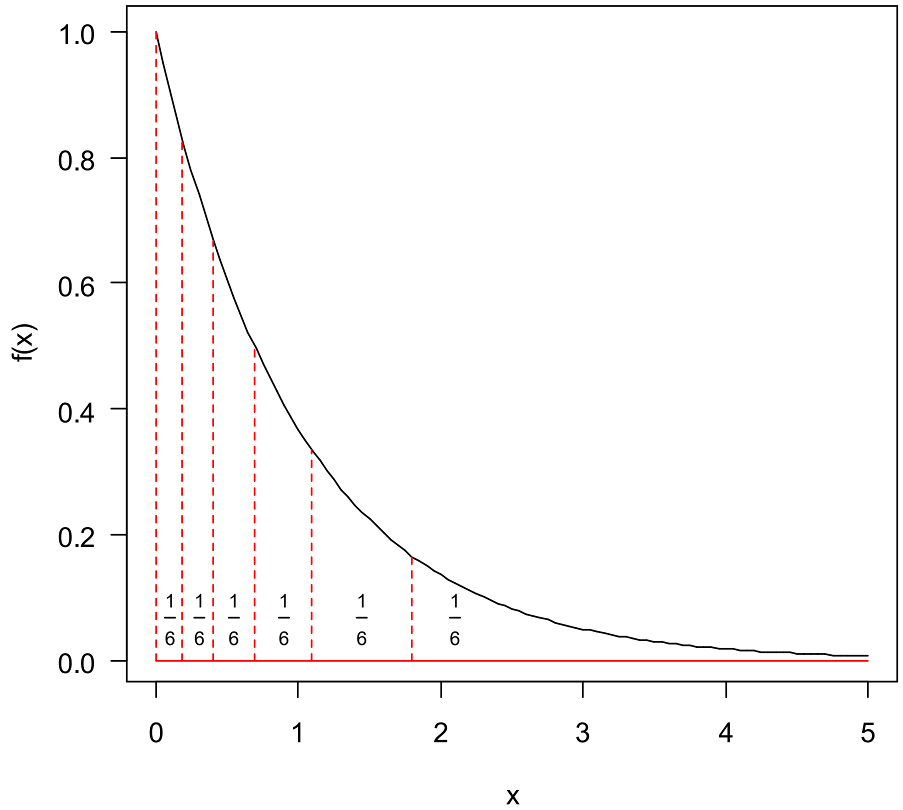
quartis, se $p = ¼ , ½ , ¾$ (1º, 2º e 3º quartil)

decis, se $p = i/10$, com $i = 1, 2, \ldots, 9$ (1º, 2º, ..., 9º decil)

percentis, se $p = i/100$, com $i = 1, 2, \ldots, 99$ (1º, 2º, …, 99º percentil)

Exercício: Calcule os quartis, o 3º decil e os quantis de probabilidade $i/6$, da distribuição $Exp(1)$

```
qexp(1:3/4,1)
[1] 0.2876821 0.6931472 1.3862944
qexp(3/10,1)
[1] 0.3566749
qexp(1:5/6,1)
[1] 0.1823216 0.4054651 0.6931472
[4] 1.0986123 1.7917595
```



Exemplo 19 (cont.): Cálculo do quantil-p de $X \frown Exp(\lambda)$, que é a solução da equação $F(x) = p$, com $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$.

$$p = F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - p \Leftrightarrow -\lambda x = \log(1-p) \Leftrightarrow x = -\frac{\log(1-p)}{\lambda}$$

Logo $\boxed{\chi_p = -\frac{\log(1-p)}{\lambda}}$

Exercício: Calcule os decis da distribuição $N(0,1)$

```
qnorm(1:9/10)
[1] -1.2815516 -0.8416212 -0.5244005 -0.2533471  0.0000000  0.2533471
[7] 0.5244005 0.8416212  1.2815516
```

São simétricos porque a distribuição é simétrica

se	$p = 1/2$	o quantil chama-se	mediana
	$p = 1/4, 2/4, 3/4$		quartil
	$p = 1/10, \ldots, 9/10$		decil
	$p = 1/100, \ldots, 99/100$		percentil

Quantil de probabilidade p

No caso geral, dada uma fd $F(.)$ qualquer (discreta, contínua ou outra), o quantil de probabilidade p, representado por χ_p , é definido por

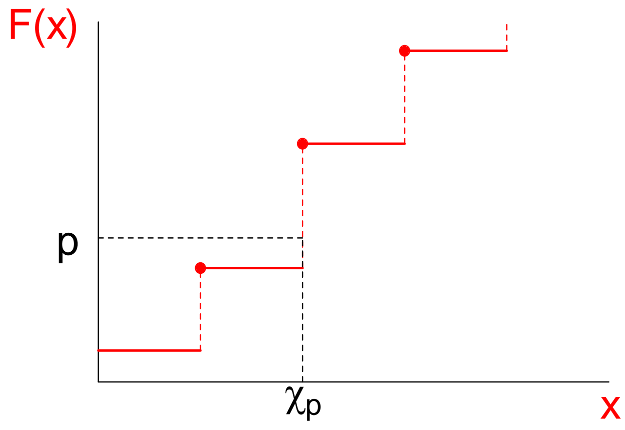
$$\boxed{\chi_p = \inf\{x : F(x) \geq p\}}$$

Esta "função quantil" definida para uma fd qualquer F é também conhecida por "inversa generalizada" de F (e denotada por $F^{\leftarrow}$)

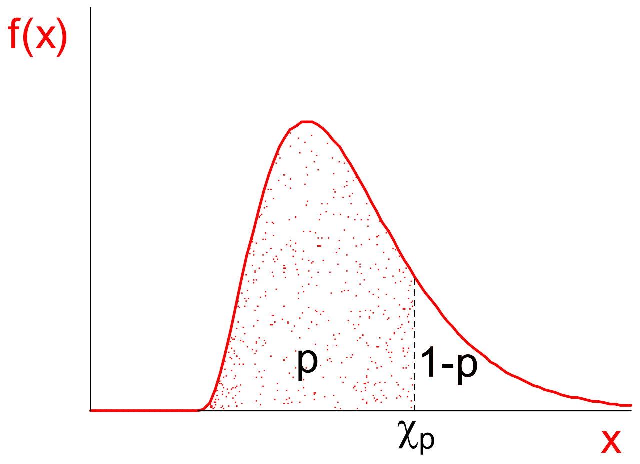
Quantil de probabilidade p (notação: χ_p)

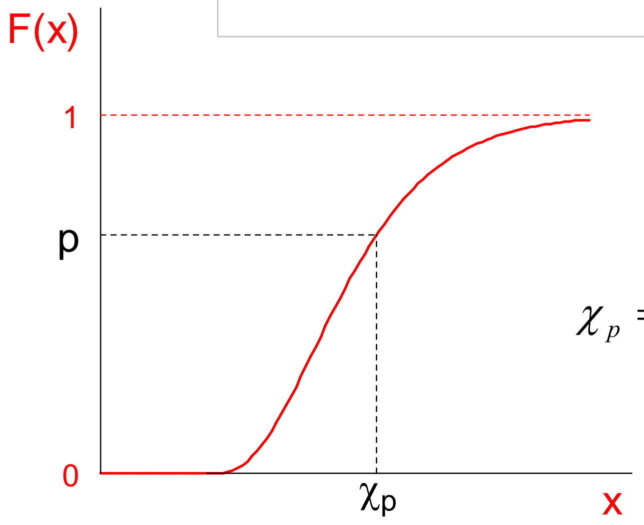
$$\boxed{\chi_p = \inf\{x : F(x) \geq p\}}$$

Caso discreto (fd F):



Caso contínuo (f.d. F e fdp f):



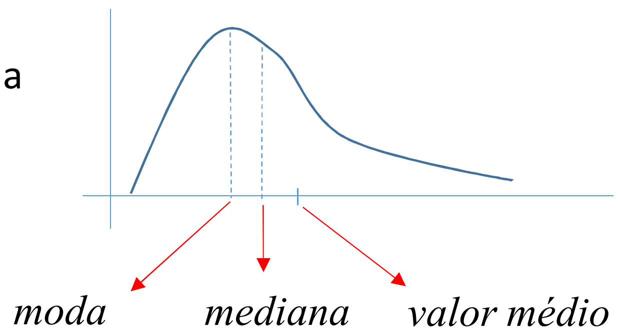


$$\chi_p = F^{-1}(p)$$

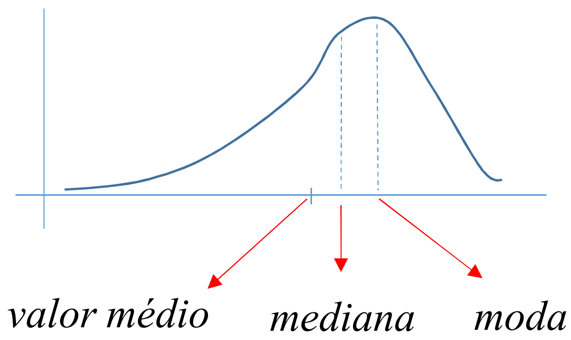
Notas:

1. Se X (com valor médio μ) for simétrica* em torno do ponto a, e unimodal, então $\mu = \chi_{0.5} = moda = a$
2. A assimetria de uma distribuição unimodal está relacionada com a posição relativa das seguintes 3 medidas de localização: valor médio (μ), mediana ($\chi_{0.5}$) e moda. Em geral uma assimetria positiva ($\beta_1 > 0$) corresponde à relação $moda < \chi_{0.5} < \mu$; e assimetria negativa, a $\mu < \chi_{0.5} < moda$

Assimetria positiva



Assimetria negativa



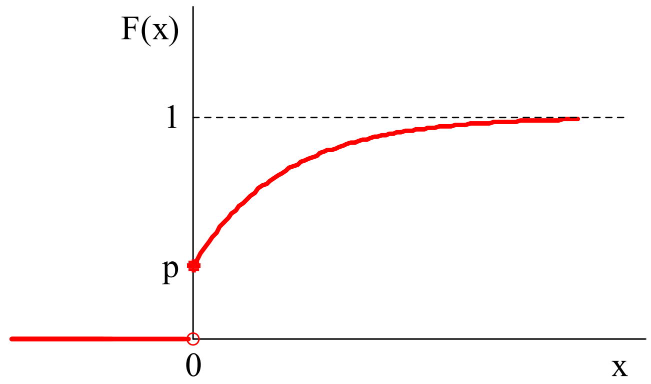
---

* uma v.a. com fd F diz-se simétrica em torno do ponto *a* se $F(a-x) = 1 - F(a+x)$

- no caso contínuo, equivale a ter simetria da fdp em torno de a, i.e., $f(a\text{-}x) = f(a+x)$

Nota: Há v.a.'s X que não são discretas nem contínuas, e que têm interesse. Por exemplo, para modelar o tempo de espera num semáforo, a duração de uma anestesia, a quantidade de precipitação em dado local em certo mês do ano, etc.. A f.d. de X nestes 3 exemplos é uma mistura de uma v.a. discreta com suporte {0} (pois o "tempo de espera no semáforo", a "duração da anestesia" ou a "precipitação" pode ser 0, com certa probabilidade p) com uma v.a. contínua positiva (pois com probabilidade $1 - p$ esse "tempo de espera no semáforo", etc., será positivo). Assim, a f.d. de X tem um salto de amplitude p no ponto 0 e é contínua em $\mathbb{R}-\{0\}$. Um exemplo concreto é a seguinte f.d.:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1-(1-p)e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases}$$



Uma mistura de uma v.a. discreta com uma v.a. contínua (com fd's F_d e F_c, respetivamente) tem fd da forma $F(x) = p\,F_d(x) + (1-p)\,F_c(x)$

Distribuições contínuas – formulário

modelo	parâmetros	v. médio μ	variância σ^2	mediana $\chi_{1/2}$	assimetria β_1
$U[a\,,\,b]$	$a < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{a+b}{2}$	0
$Exp(\lambda)$	$\lambda > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\frac{\log 2}{\lambda}$	2
$N(\mu, \sigma)$	$\mu \in \mathbb{R}$ $\sigma > 0$	μ	σ^2	μ	0

Mantêm-se, para v.a.'s contínuas, as mesmas propriedades que eram válidas no caso discreto (vd. slide 136):

$$\mathrm{var}(X) \geq 0 \qquad E(a+bX) = a + bE(X)$$

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - \mu^2 \qquad \mathrm{var}(a+bX) = b^2\ \mathrm{var}(X)$$

Exercício:

a) Deduza a fórmula da fdp de $Y = a + b\,X$, à custa da fdp de X

b) Recorde que o valor médio e o desvio padrão de $Z \frown N(0,1)$ são 0 e 1 (vd. exemplo 20, slide 139). Prove que $E(X) = \mu$ e $\mathrm{var}(X) = \sigma^2$, no caso $X \frown N(\mu,\sigma)$.

c) Dada uma v.a. X com valor médio μ e desvio padrão σ, calcule o valor médio e o desvio padrão da v.a. padrão (ou standard), $Y = (X - \mu) / \sigma$

Resolução:

a) Dedução da fórmula da fdp de $Y = a + b\,X$, à custa da fdp de X:

$$F_Y(y) = P(a+bX \le y) = P(bX \le y-a) = \begin{cases} P(X \le \frac{y-a}{b}) = F_X(\frac{y-a}{b}) & ,b>0 \\ P(X \ge \frac{y-a}{b}) = 1 - F_X(\frac{y-a}{b}) & ,b<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{d}{dy} F_X(\frac{y-a}{b}) = f_X(\frac{y-a}{b})\frac{1}{b} & ,b>0 \\ -\frac{d}{dy} F_X(\frac{y-a}{b}) = f_X(\frac{y-a}{b})\frac{1}{-b} & ,b<0 \end{cases}$$

Logo $\quad f_Y(y) = \frac{1}{|b|} f_X(\frac{y-a}{b})$

b) $E(Z) = 0$ e $\mathrm{var}(Z) = 1$. Prova-se que $E(X) = \mu$ e $\mathrm{var}(X) = \sigma^2$, no caso $X \frown N(\mu,\sigma)$.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sigma} f_Z(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

portanto $X = \mu + \sigma Z$

Logo $\quad E(X) = E(\mu + \sigma Z) = \mu + \sigma E(Z) = \mu \quad$ e

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}\,(\mu + \sigma Z) = \sigma^2\,\mathrm{var}(Z) = \sigma^2$$

Vector aleatório

É uma função $(X_1, \ldots, X_k) : \Omega \to \mathbb{R}^k$, que a cada $\omega \in \Omega$ faz corresponder $(X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega))$ tal que ...

- fmp conjunta (c. discreto) / fdp conjunta (c. contínuo);
- fd conjunta: $F(x_1, \ldots, x_k) = P(X_1 \le x_1, \ldots, X_k \le x_k)$

$X_1, \ldots, X_k$ dizem-se mutuamente independentes se

$\forall B_1 \subset \mathbb{R}, \ldots, B_k \subset \mathbb{R}$ borelianos de $\mathbb{R}$

$$P(X_1 \in B_1, \ldots, X_k \in B_k) = P(X_1 \in B_1) \ldots P(X_k \in B_k)$$

$$\Updownarrow$$

as fmp/fdp conjuntas fatorizam-se no produto das fmp/fdp marginais

Par aleatório

É uma função $(X,Y):\Omega \to \mathbb{R}^2$, que a cada $\omega \in \Omega$ faz corresponder um par $(X(\omega),\ Y(\omega))$ tal que …

O par diz-se absolutamente contínuo se existir uma função não negativa $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (chamada fdp conjunta) e com integral unitário, tal que

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x} \Big(\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, dv \Big)\, du$$

Recorde-se que as v.a.'s X e Y se dizem independentes se para quaisquer borelianos A e B de $\mathbb{R}$, $\boxed{P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\ P(Y \in B)}$

No caso contínuo, equivale a ter $\boxed{f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)}$

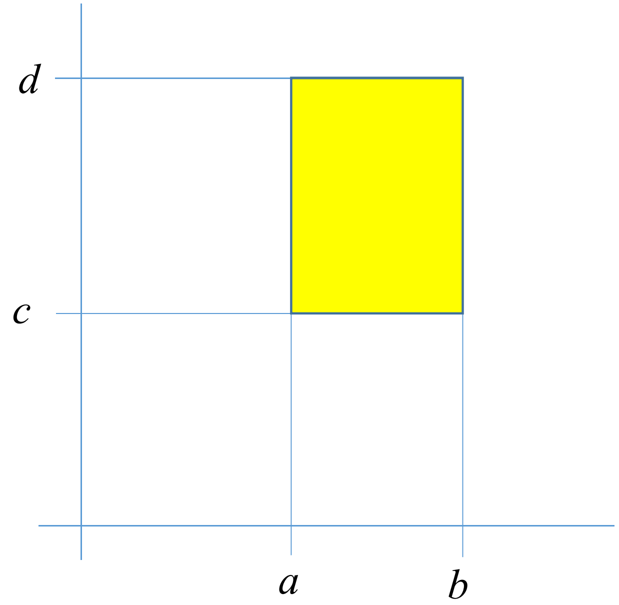
Pares aleatórios contínuos

fdp conjunta: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

fd conjunta: $F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\right)du$

Então $\boxed{\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} = f(x,y)}$

$$\boxed{\begin{aligned} P(a < X \leq b, c < Y \leq d) &= \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \\ &= F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c) \end{aligned}}$$



Distribuições marginais e condicionais

Analogamente ao caso discreto, as fdp marginais de X e de Y e as fdp condicionais de X e de Y são as seguintes

fdp marginais: (i) de X :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

(ii) de Y :

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

fdp condicionais: (i) de X, dado $\{Y=y\}$:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

(ii) de Y, dado $\{X=x\}$:

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

A independência entre X e Y equivale a ter $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

Nota:

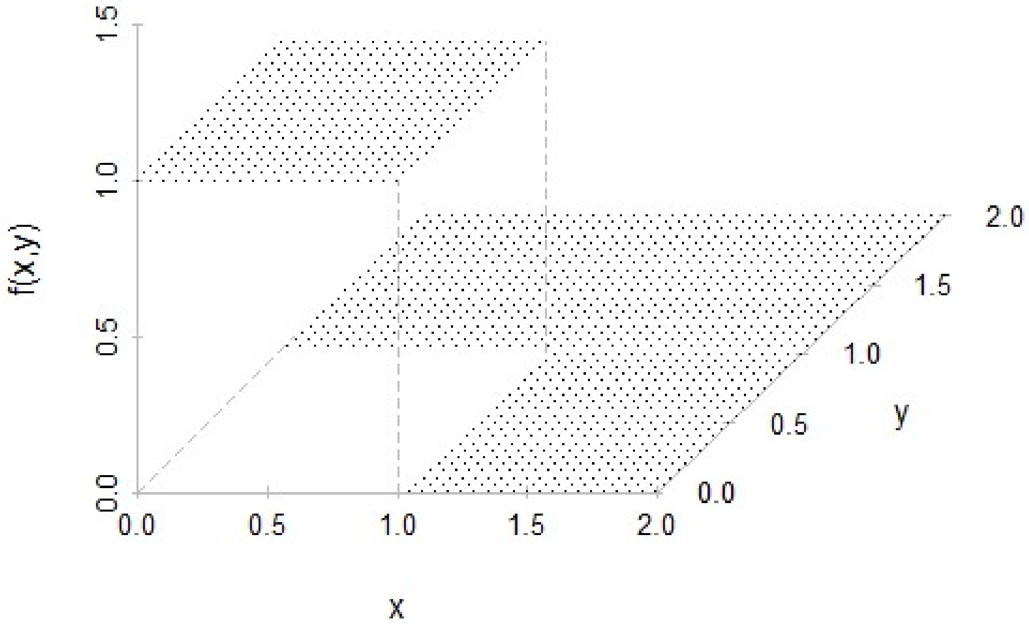
Se for possível factorizar a fdp conjunta $f(x,y)$ na forma $f(x,y) = g(x)\, h(y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ então temos que g e h, a menos de constantes multiplicativas, são as fdp's marginais de X e Y. De facto,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(y)dy = g(x)\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)dy = c_1\, g(x)$$

e analogamente

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(y)dx = h(y)\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = c_2\, h(y)$$

Exemplo 21: fdp conjunta de um par aleatório (X,Y) com distribuição uniforme no quadrado $[0,1] \times [0,1]$, i.e., com fdp conjunta



$$f(x,y) = I_{[0,1]\times[0,1]}(x,y)$$

ou

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & , \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \ c.c. \end{cases}$$

X e Y são independentes pois a fdp conjunta é o produto de duas fdp U[0,1], dadas por $g(x) = I_{[0,1]}(x)$. De facto, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos $f(x,y) = g(x)g(y)$

Valores médios* (caso contínuo)

v.a. X:

$$\boxed{E(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, f(x)\, dx}$$

par (X,Y):

$$\boxed{E(h(X,Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)\, f(x,y)\, dx\, dy}$$

Tal como no caso discreto, a covariância entre X e Y é definida por

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y) = E\big((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y)\, f(x,y)\, dx\, dy}$$

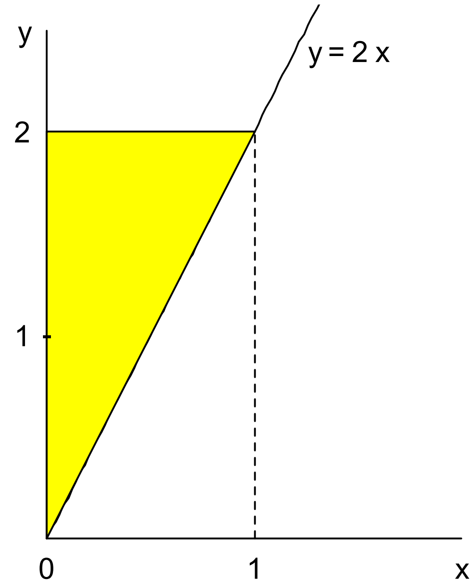
e prova-se que $\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

---

* existem somente se os integrais convergirem absolutamente

Exemplo 22: (X,Y) com fdp conjunta

$$f(x,y)=\begin{cases}3x & , \ 0\le 2x\le y\le 2\\ 0 & , \ c.c.\end{cases}$$



X e Y não são independentes pois $P(X>0.5,\ Y<1)=0$ mas $P(X>0.5)$ e $P(Y<1)$ são positivas.

Cálculo das fdp's marginais:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{2x}^{2} 3x dy = 3xy \Big|_{2x}^{2} = 3x(2-2x)=6x(1-x),\ 0<x<1$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_{0}^{y/2} 3x dx = \tfrac{3}{2}x^2 \Big|_{0}^{y/2} = \tfrac{3}{2}\tfrac{1}{4}y^2 = \tfrac{3}{8}y^2,\ 0<y<2$$

Exemplo 22 (cont.): Cálculo de valores médios e covariância:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx = \int_0^1 6x^2(1-x)dx = \int_0^1 6x^2 - 6x^3 dx = (2x^3 - \tfrac{6}{4}x^4)\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)dy = \int_0^2 \tfrac{3}{8} y^3 dy = \frac{3}{8}\frac{1}{4} y^4 \Big|_0^2 = \frac{3}{8}\frac{16}{4} = \frac{3}{2}$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x,y)\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_{2x}^2 3x^2 y\, dy\right) dx = 3\int_0^1 \tfrac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{2x}^2 dx =$$

$$= 3\int_0^1 \tfrac{1}{2} x^2(4-4x^2)\, dx = 3\int_0^1 2x^2 - 2x^4 dx = \tfrac{6}{3}x^3 - \tfrac{6}{5}x^5 \Big|_0^1 = 2 - \tfrac{6}{5} = \tfrac{4}{5}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{4}{5} - \frac{1}{2}\frac{3}{2} = \frac{1}{20}$$

Valores médios, variâncias, etc. (resumo) *

v.a. X

$$E(h(X)) = \begin{cases} \sum_i h(x_i)\,p_i & \text{no c. discreto} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f(x)\,dx & \text{no c. contínuo} \end{cases}$$

par (X,Y)

$$E(h(X,Y)) = \begin{cases} \sum_i \sum_j h(x_i, y_j)\,p_{ij} & \text{no c. discreto} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y) f(x,y)\,dxdy & \text{no c. contínuo} \end{cases}$$

Em particular – valores médios, variâncias, covariância e correlação:

$$\mu_X = E(X), \quad \mu_Y = E(Y), \quad \sigma_X^2 = \mathrm{var}(X), \quad \sigma_Y^2 = \mathrm{var}(Y)$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E\big((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big)\ ; \ \rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X\ \sigma_Y}$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

---

* existem somente se as séries/integrais convergirem absolutamente

Propriedades (v.a.'s quaisquer)

São válidas as propriedades 1.1 a 4.6 (slides 92 a 98). Em particular,

- $E(a+bX) = a + bE(X)$
- $\mathrm{var}(a+bX) = b^2\,\mathrm{var}(X)$
- $E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n)$
- $\mathrm{var}(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_i \mathrm{var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$

  Se $X_1,\ldots,X_n$ independentes, então $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0$ e
  - $\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{var}(X_i)$
  - $E(X_1 \ldots X_n) = E(X_1) \ldots E(X_n)$

- $\mathrm{cov}(aX+bY\,,\,cU+dV) = ac\,\mathrm{cov}(X,U) + ad\,\mathrm{cov}(X,V) + bc\,\mathrm{cov}(Y,U) + bd\,\mathrm{cov}(Y,V)$

  (bilinearidade)

Coeficiente de correlação entre duas v.a.'s (revisão)

Recorde-se que a correlação entre X e Y se define por

$$\boxed{\rho = \rho(X,Y) = E\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\,\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)} \quad \text{ou seja} \quad \boxed{\rho = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}}$$

(caso exista este valor médio) e satisfaz a

- $-1 \leq \rho \leq 1$
- X e Y independentes $\Rightarrow \rho = 0$ (a recíproca não é verdadeira)
- $\rho = \pm 1 \Leftrightarrow P(Y = a + bX) = 1$ para algum $a \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$
- é invariante para transformações lineares de X e de Y

  (a menos do sinal)

ρ mede a relação de linearidade entre X e Y

Propriedades (v.a.'s normais)

Propriedades a demonstrar adiante usando transformadas de Laplace

Se $X_i \frown N(\mu_i, \sigma_i)$ independentes, $i = 1, 2, \ldots, n$, então

$$S_n \frown N\left(\sum \mu_i, \sqrt{\sum \sigma_i^{\,2}}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \frown N\left(\sum a_i \mu_i, \sqrt{\sum a_i^2 \sigma_i^{\,2}}\right)$$

Soma de v.a.'s

$$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

Média de v.a.'s

$$\boxed{\overline{X} = \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

Em particular, se $X_i \frown N(\mu, \sigma)$ independentes, então

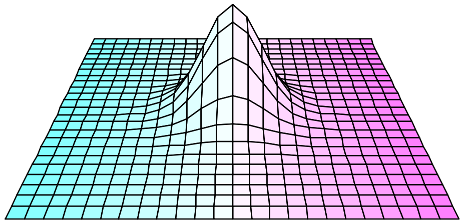
$$S_n \frown N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

$$\overline{X} \frown N\left(\mu, \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

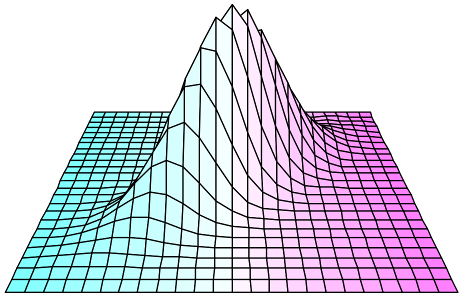
Distribuição normal bivariada (ou gaussiana bivariada ou binormal)

com parâmetros $\mu, \mu', \sigma, \sigma', \rho$

gráficos das fdp's conjuntas
$(\mu = \mu' = 0,\ \sigma = \sigma' = 1)$

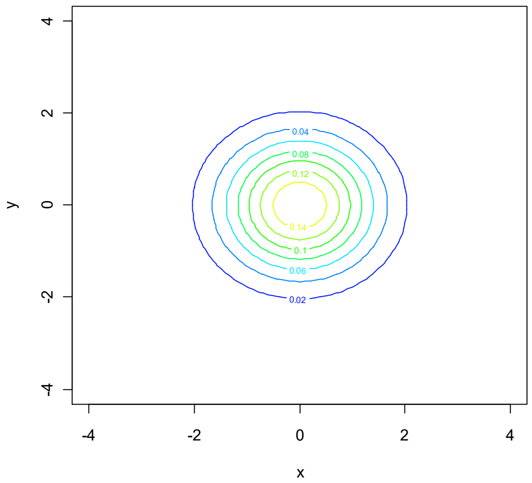


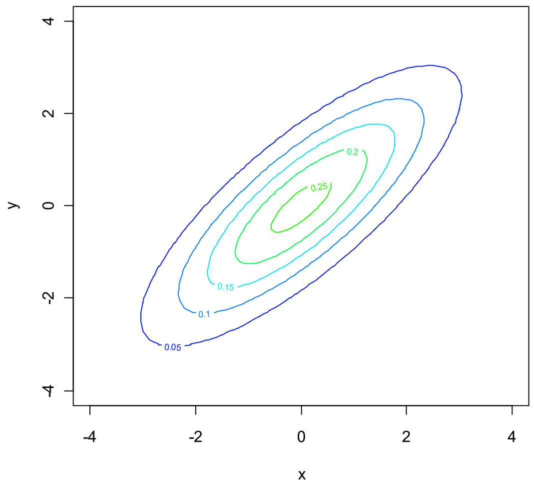
$\rho = 0$



$\rho = 0.8$

e curvas de nível
$(\mu = \mu' = 0,\ \sigma = \sigma' = 1)$





A fdp conjunta de um par (X,Y) binormal com parâmetros μ, μ', σ, σ', ρ (que representam os valores médios e desvios padrões de X e Y e a correlação entre X e Y) é dada por

$$\boxed{f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma\sigma'\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x'^2-2\rho\, x'\, y'+y'^2\right)\right\},\ \text{com}\ \begin{cases} x'=\frac{x-\mu}{\sigma} \\ y'=\frac{y-\mu'}{\sigma'} \end{cases}}$$

Neste modelo temos:

(i) $X \frown N(\mu,\sigma)$ e $Y \frown N(\mu',\sigma')$

(ii) $\rho=0 \Leftrightarrow$ X e Y independentes

(iii) Qualquer transformação linear do par é também binormal

Nota: o caso $\rho^2=1$ corresponde a uma distribuição concentrada numa recta, $y=a+b\,\mathrm{x}$ (com $b\neq 0$), pelo que o suporte do par é uma recta (subconjunto unidimensional de $\mathbb{R}^2$, dito degenerado a duas dimensões). A distribuição diz-se bivariada singular ou degenerada a duas dimensões

(i) Cálculo da fdp marginal de X, no caso (X,Y) binormal com parâmetros $\mu, \mu', \sigma, \sigma', \rho$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma\sigma'\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\underbrace{\left(x'^2-2\rho x'y'+y'^2\right)}\right\}$$

$$(1-\rho^2+\rho^2)x'^2-2\rho x'y'+y'^2$$

$$(1-\rho^2)x'^2+\rho^2x'^2-2\rho x'y'+y'^2$$

$$(1-\rho^2)x'^2+\left(y'-\rho x'\right)^2$$

$$(1-\rho^2)x'^2+\left(y-[\mu'+\rho\tfrac{\sigma'}{\sigma}(x-\mu)]\right)^2/\sigma'^2$$

$$\begin{cases} x'=\frac{x-\mu}{\sigma} \\ y'=\frac{y-\mu'}{\sigma'} \end{cases}$$

$$f(x,y)=\underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-x'^2/2}}_{\text{fdp } N(\mu,\sigma)}\;\underbrace{\frac{1}{\sigma'\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\,e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma'^2}\left(y-[\mu'+\rho\frac{\sigma'}{\sigma}(x-\mu)]\right)^2}}_{\text{fdp } N\left(\mu'+\rho\frac{\sigma'}{\sigma}(x-\mu),\ \sigma'\sqrt{1-\rho^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-x'^2/2}}$$

$$\therefore X \frown N(\mu,\sigma)$$

Simulação de par aleatório binormal ($\mu = 1$, $\mu' = 2$, $\sigma = 2$, $\sigma' = 3$, $\rho = 0.8$)

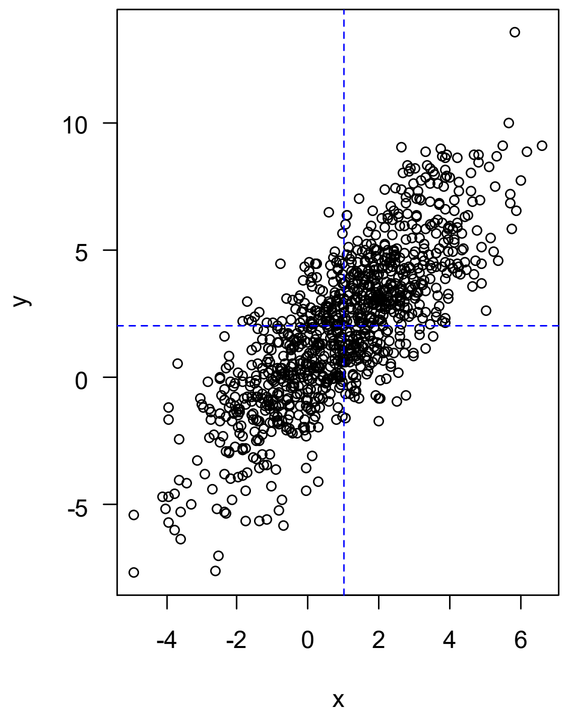
package mvtnorm

função rmvnorm(n=..., mean=c(...,...), sigma=...)

nº simulações μ μ' matriz de covariâncias

$$\begin{pmatrix} \sigma^2 & \mathrm{cov} \\ \mathrm{cov} & \sigma'^2 \end{pmatrix}$$

```
library(dmvnorm)
sig <- matrix(c(4,4.8,4.8,9), ncol=2)
x <- rmvnorm(1000, c(1,2), sig)
colMeans(x)
[1] 0.9991239 1.9673403
var(x)
 3.797903 4.600176
 4.600176 8.823428
cor(x)
 1.0000000 0.7946646
 0.7946646 1.0000000
plot(x, xlab="x",ylab="y",las=1)
abline(h=2,col=4,lty=2)
abline(v=1,col=4,lty=2)
```



$$\begin{pmatrix} 4 & 4.8 \\ 4.8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\rho = \frac{4.8}{2 \times 3} = 0.8$$

Exercício: Qual a distribuição de $X - Y$ no caso (X,Y) binormal?

Resolução: Como qualquer transformação linear de um par binormal é também binormal, temos (atendendo a que as marginais de um par binormal são normais) que $X - Y$ é normal.

Falta apenas identificar os parâmetros, ou seja, calcular o valor médio e a variância de $X - Y$.

$$E(X-Y) = E(X) - E(Y) = \mu - \mu'$$

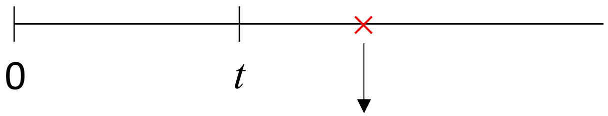
$$\operatorname{var}(X-Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y) - 2\operatorname{cov}(X,Y) = \sigma^2 + \sigma'^2 - 2\rho\sigma\sigma'$$

Conclui-se que $X - Y$ tem distribuição $N(\mu - \mu', \tau)$, $\tau^2 = \sigma^2 + \sigma'^2 - 2\rho\sigma\sigma'$

Processo de Poisson

É um processo de chegadas ao longo do tempo ($t \geq 0$).
$N_t =$ "nº de chegadas no intervalo $]\,0,\, t\,]$", tal que $N_0 = 0$ e $N_t \frown Poisson(\lambda t)$, sendo λ a taxa ou intensidade do processo (é o nº médio de chegadas numa unidade de tempo). Este processo, representado por $\{\, N_t \,\}_{t \geq 0}$ tem

- incrementos independentes, i.e., os números de chegadas em intervalos de tempo disjuntos são mutuamente independentes
- incrementos estacionários, i.e., em intervalos de tempo de igual amplitude, a distribuição dos números de chegadas é a mesma



instante da
1ª chegada

(ocorre depois de t sse no intervalo [0,t] não houve chegadas)

Seja T o instante (aleatório) da primeira chegada. Então temos $T > t$ sse não houver chegadas no intervalo $]\,0\,,\, t\,]$, donde

$$\boxed{P(T > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}, \text{para } t > 0} \Rightarrow T \frown \mathrm{Exp}(\lambda)$$

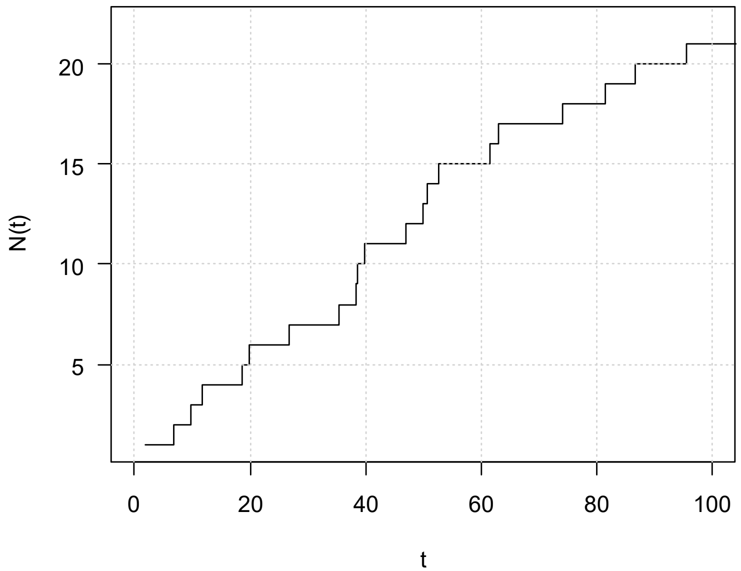
(fórmula também válida para os intervalos de tempo entre chegadas consecutivas)

Exercício: (i) Simule um processo de chegadas com intervalos de tempo (entre chegadas consecutivas) $Exp(\lambda)$, independentes, $\lambda=1/5$, no intervalo $[0,100]$. Represente graficamente a trajectória do processo.

(ii) Para $t = 25$, estime a distribuição de $N(t)$ = "nº de chegadas até ao instante t", por meio de simulação (com 100 mil réplicas).

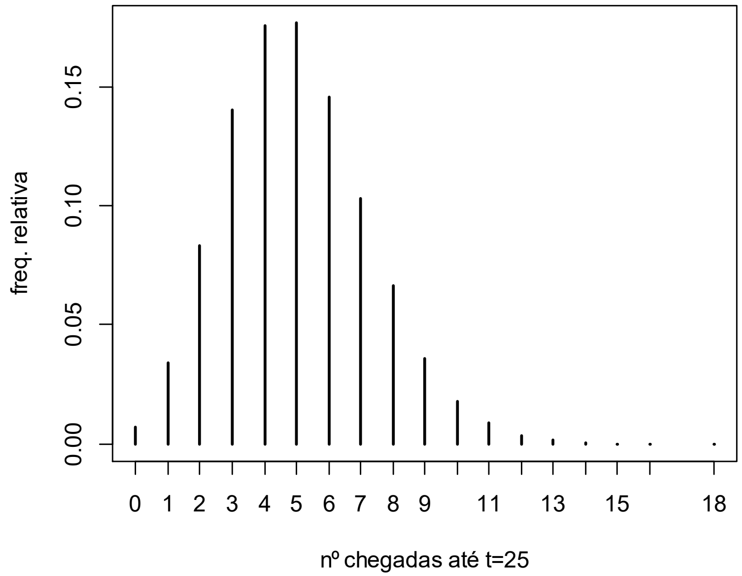
Resolução: (i) Temos $E(X) = 1/\lambda$, se $X \frown Exp(\lambda)$

```
# em média há 100/5=20 chegadas em [0,100];
# simulam-se 40 intervalos de tempo Exp(1/5):
tps <- rexp(40,1/5)
# nº de chegadas até t=100:
fim <- min(which(cumsum(tps)>100))-1
# gráfico da trajectória do processo:
plot(cumsum(tps[1:fim]),1:fim,type="s",
 xlim=c(0,100),xlab="t",ylab="N(t)",las=1)
# acrescentando uma grelha:
grid()
```



Resolução: (ii)

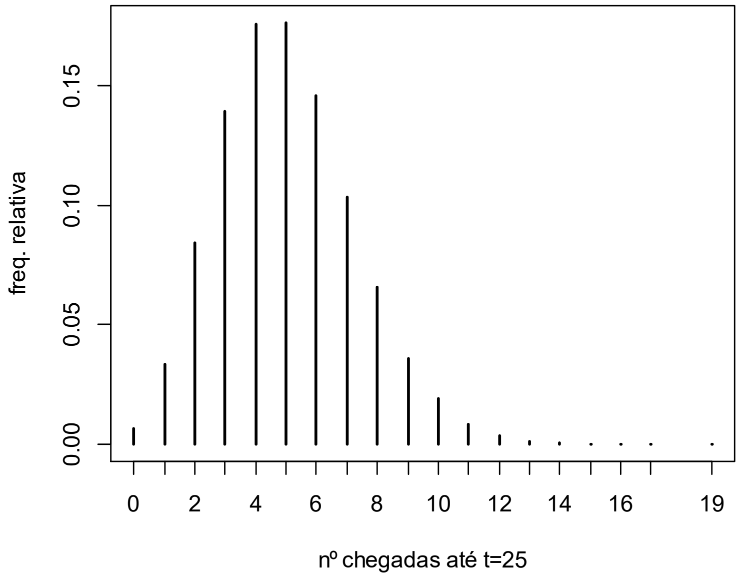
Para $t = 25$, simulam-se 10^5 valores de $N(t)$ = "nº de chegadas até ao instante t" e elabora-se a correspondente tabela de frequências relativas dos valores obtidos.




```
# 1) recorrendo a matriz 50×10^5 de interv.tp
simul <- matrix(rexp(50*10^5,1/5),nr=50)
n.25 <- apply(simul,2,function(x) min(which(cumsum(x)>25))-1 )
plot(table(n.25)/100000,xlab="nº chegadas até t=25",ylab="freq. relativa")
table(n.25)/100000
      0       1       2       3       4       5       6       7       8       9      10 ...
0.00701 0.03388 0.08331 0.14005 0.17556 0.17673 0.14573 0.10299 0.06648 0.03573 0.01801 ...
round(dpois(0:20,1/5*25),5)
[1] 0.00674 0.03369 0.08422 0.14037 0.17547 0.17547 0.14622 0.10444 0.06528 0.03627 0.01813 ...

# 2) recorrendo a um ciclo for ...
```

Resolução: (ii)




```
# 2) recorrendo a um ciclo for
n.25 <- 0
for (i in 1:100000)
       { t <- 0; n <- 0;
         while(t<25)
            {t <- t+rexp(1,1/5); n <- n+1} ;
         n.25[i] <- n-1 }
table(n.25)/100000
      0       1       2       3       4       5       6       7       8       9
0.00660 0.03345 0.08455 0.13954 0.17601 0.17642 0.14590 0.10344 0.06600 0.03584
     10      11      12      13      14      15      16      17      19
0.01895 0.00819 0.00331 0.00117 0.00041 0.00013 0.00006 0.00002 0.00001
round(dpois(0:19,1/5*25),5)
0.00674 0.03369 0.08422 0.14037 0.17547 0.17547 0.14622 0.10444 0.06528 0.03627
0.01813 0.00824 0.00343 0.00132 0.00047 0.00016 0.00005 0.00001 0.00000 0.00000
```

Exercício: (i) Calcule a distribuição de $Y = Z^2$ no caso $Z \frown N(0,1)$.
(ii) Por meio de simulação, tente descobrir qual a distribuição da soma de duas v.a.'s independentes Y_1 e Y_2 (sendo $Y_i = Z_i^{\,2}$).

Resolução: (i) Representa-se usualmente a fd [fdp] de Z pela letra Φ [ϕ].
Para $y > 0$ temos

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = (Z^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le Z \le \sqrt{y}) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y})$$

donde

$$f_Y(y) = \tfrac{d}{dy} F_Y(y) = \tfrac{d}{dy}\Phi(\sqrt{y}) - \tfrac{d}{dy}\Phi(-\sqrt{y}) = \phi(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + \phi(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} =$$

$$= \phi(\sqrt{y})\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-y/2}, \quad y > 0$$

Exercício: (ii) Por meio de simulação, tente descobrir qual a distribuição da soma de duas v.a.'s independentes Y_1 e Y_2 , com a mesma distribuição de $Y = Z^2$ (diz-se que Y_1 e Y_2 são independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com Y).

Resolução: (ii)

```
# simular 2 amostras de 10^6 valores N(0,1)
x <- rnorm(10^6)
y <- rnorm(10^6)
# amostra da soma dos seus quadrados
t <- x^2 + y^2
# histograma de área unitária:
hist(t,50,freq=F, main="")
# parece uma fdp exponencial com f(0)≈0.5
# sobrepor gráfico da fdp Exp(1/2)
curve(dexp(x,1/2),0,30,add=T,col=2)
# ou o histograma num único comando:
hist(rnorm(10^6)^2+rnorm(10^6)^2,50,freq=F,main="",xlab="t",ylab="freq / fdp")
```