Lógica CC
Licenciatura em Ciências da Computação
2014-2015

Notas de apoio à UC

Luís Pinto
Departamento de Matemática e Aplicações
Universidade do Minho

Dezembro de 2014

Capítulo 1

Preliminares: definições indutivas e linguagens

Exemplo 1: Seja C o menor[1] subconjunto de $\mathbb{N}_0$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $0 \in C$;

2. para todo $n \in \mathbb{N}_0$, se $n \in C$, então $n + 2 \in C$.

Exemplos de elementos de C são: 0, 2, 4. De facto:

- 0 é um elemento de C, por C satisfazer 1.;
- sabendo que $0 \in C$, por C satisfazer 2., segue $0 + 2 = 2 \in C$;
- sabendo que $2 \in C$, por C satisfazer 2., segue $2 + 2 = 4 \in C$.

Adiante (e como é fácil de intuir), mostraremos que C é o conjunto dos números pares.

Esta forma de definir o conjunto C é um caso particular das chamadas *definições indutivas de conjuntos*, um mecanismo muito útil para definir conjuntos (e de uso frequente em Ciências de Computação), que apresentaremos de seguida.

Definição 2: Sejam X um conjunto e B um subconjunto não vazio de X. Seja O um conjunto de *operações em* X (*i.e.*, funções do tipo $X^n \longrightarrow X$, com $n \in \mathbb{N}$). Um subconjunto I de X tal que

i) $B \subseteq I$ e

ii) I é *fechado* para as operações de O (*i.e.*, as operações de O quando aplicadas a elementos de I produzem elementos de I ou, por outras palavras, para cada operação $f : X^n \longrightarrow X$ de O e para cada $(x_1, ..., x_n) \in I^n$, $f(x_1, ..., x_n) \in I$)

[1] Dizemos que um conjunto A é mais pequeno que um conjunto B quando $A \subseteq B$

é chamado um *conjunto indutivo, sobre* X, *de base* B e *conjunto de operações* O.

Observação 3: Admitamos as suposições da definição anterior. Então:

i) X é um conjunto indutivo para qualquer O;

ii) B é um conjunto indutivo quando $O = \emptyset$.

Donde podemos concluir que, em geral, os subconjuntos indutivos de um conjunto, para uma dada base e um dado conjunto de operações, não são únicos, pois X e B são ambos conjuntos indutivos, sobre X, de base B e conjunto de operações $\emptyset$.

Definição 4: Sejam X um conjunto, B um subconjunto não vazio de X e O um conjunto de *operações* em X. O mais pequeno conjunto indutivo, sobre X, de base B e conjunto de operações O é chamado o *conjunto definido indutivamente* (ou *conjunto gerado*) por O em B. Chamaremos ao par (B, O) uma *definição indutiva sobre* o conjunto suporte X.

Exercício 5: Explicite X, B e O no caso do conjunto definido indutivamente no exemplo inicial.

Observação 6: Nas condições da definição anterior, demonstra-se que o conjunto G gerado por O em B é a interseção de todos os conjuntos indutivos, sobre X, de base B e conjunto de operações O. Alternativamente, demonstra-se que os elementos de G são exatamente os objetos que podem ser obtidos a partir de B, aplicando um número finito de operações de O.

Definição 7:

1. Chamaremos *alfabeto* a um conjunto de símbolos e chamaremos *letras* aos elementos de um alfabeto.

2. Dado um alfabeto A, chamaremos *palavra* (ou *string*) *sobre* o alfabeto A a uma sequência finita de letras de A. A notação A^* representará o conjunto de todas as palvras sobre A.

3. À sequência vazia de letras de A chamaremos *palavra vazia*, notando-a por ϵ.

4. Dado $n \in \mathbb{N}$ e dadas n letras a_1, a_2, ..., a_n de um alfabeto A (possivelmente com repetições), utilizamos a notação $a_1a_2...a_n$ para representar a palavra sobre A cuja i-ésima letra (para $1 \leq i \leq n$) é a_i.

5. O *comprimento* de uma palavra é o comprimento da respetiva sequência de letras. Em particular, a única palavra de comprimento 0 é ϵ. Dada uma palavra u, denotamos por $|u|$ o comprimento de u.

6. Duas palavras sobre um alfabeto dizem-se *iguais* quando têm o mesmo comprimento e coincidem letra a letra.

7. Dadas duas palavras u, v sobre um alfabeto, utilizamos a notação uv para representar a *concatenação* de u com v (*i.e.*, a concatenação das respetivas sequências de letras, colocando primeiro a sequência de letras relativa a u).

8. Uma *linguagem* sobre um alfabeto A é um conjunto de palavras sobre A (i.e. um subconjunto de A^*).

Exemplo 8: Seja A o alfabeto $\{0, s, +, \times, (,)\}$. Consideremos a linguagem E em A (E para *expressões*), definida indutivamente pelas seguintes *regras*:

1. $0 \in E$;
2. $e \in E \Rightarrow s(e) \in E$, para todo $e \in A^*$;
3. $e_1, e_2 \in E \Rightarrow (e_1 + e_2) \in E$, para todo $e_1, e_2 \in A^*$;
4. $e_1, e_2 \in E \Rightarrow (e_1 \times e_2) \in E$, para todo $e_1, e_2 \in A^*$.

Por exemplo, as palavras 0, $s(0)$, (0×0), $(s(0) + (0 \times 0))$ pertencem a E. De facto:

- $0 \in E$, pela regra 1.;
- de $0 \in E$, pela regra 2., segue $s(0)$;
- de $0 \in E$, pela regra 4., segue (0×0);
- de $s(0) \in E$ e (0×0), pela regra 3., segue $(s(0) + (0 \times 0))$.

Já as palavras sobre A $+(00)$ e $s0$ não pertencem a E. Note-se que nenhuma palavra de E tem a letra $+$ como primeira letra e nenhuma palavra de E, com exceção da palavra 0, tem 0 como última letra.

Definição 9: Seja (B, O) uma definição indutiva sobre um conjunto suporte X de um conjunto I e seja $e \in X$. Uma *sequência de formação* de e é uma sequência finita de elementos de X na qual:

1. o último elemento é e;
2. cada elemento pertence a B ou é imagem de elementos anteriores na sequência por uma operação de O.

Na representação de uma sequência de formação, habitualmente, usaremos vírgulas a separar os elementos da sequência.

Exemplo 10: Retomemos o exemplo anterior. A sequência de palavras

$$0, s(0), (0 \times 0), (s(0) + (0 \times 0))$$

é uma sequência de formação de $(s(0) + (0 \times 0))$. Porquê? Esta sequência de formação representa o essencial da justificação que apresentámos no Exemplo 8 para provar que $(s(0) + (0 \times 0))$ é uma palavra da linguagem E.

Proposição 11: Seja I um conjunto definido indutivamente, sobre um conjunto X, e seja $e \in X$. Então, e é um dos elementos de I se e somente se e admite uma sequência de formação.

Observação 12: Retomemos o Exemplo 10. A sequência de formação de $(s(0)+(0\times 0))$ que aí apresentamos não é única. Por exemplo,

$$0, (0 \times 0), s(0), (s(0) + (0 \times 0))$$

é também uma sequência de formação de $(s(0) + (0 \times 0))$. Porquê?

Na verdade, quando um objeto tem uma sequência de formação, esse objeto admite uma infinidade de sequências de formação. Por exemplo, no caso anterior, podemos aumentar o comprimento da sequência acima, tanto quanto queiramos, adicionando 0's no início da sequência.

Observação 13: A demonstração da Proposição 11, em particular, requer a ferramenta de *indução estrutural*, que estudaremos de seguida.

Teorema 14 (Princípio de indução estrutural associado a uma definição indutiva): Considere-se uma definição indutiva (B, O) de um conjunto I sobre X e seja $P(e)$ uma propriedade sobre $e \in I$. Se:

1. para todo $b \in B$, $P(b)$ é verdadeira;
2. para cada operação $f : X^n \to X$ de O, para todo $e_1, ..., e_n \in I$, se $P(e_1), \ldots P(e_n)$ são verdadeiras, então $P(f(e_1, \ldots, e_n))$ é verdadeira;

então para todo $e \in I$, $P(e)$ é verdadeira.

Dem.: Seja $Y = \{e \in I : P(e) \text{ é verdadeira}\}$. Então Y é um conjunto indutivo pois contém B e é fechado para as operações de O. Logo, como I é o mais pequeno dos conjuntos indutivos, $I \subseteq Y$. Como da definição de Y se tem também $Y \subseteq I$, segue que $Y = I$ e, portanto, para todo $e \in I$, $P(e)$ é verdadeira. □

Observação 15:

1. A cada definição indutiva de um conjunto I está associado um princípio de indução estrutural.

2. O usual Princípio de indução sobre os naturais é o princípio de indução estrutural associado à seguinte caracterização indutiva de $\mathbb{N}$: $\mathbb{N}$ é o menor subconjunto de $\mathbb{N}$ que satisfaz as seguintes condições:

   (a) $1 \in \mathbb{N}$;

   (b) para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \in \mathbb{N}$, então $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Exemplo 16: O Princípio de indução estrutural associado à definição indutiva do conjunto C do Exemplo 1 é o seguinte:

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa a $n \in C$. Se:

1. $P(0)$;

2. se $P(k)$, então $P(k + 2)$, para todo o $k \in C$;

então $P(n)$ é verdadeira, para todo o $n \in C$.

Consideremos a propriedade $P(n)$, relativa a $n \in C$, dada por "n é par". Provemos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in C$. Pelo Princípio de indução estrutural para C, basta mostrarmos as duas condições acima descritas.

1. 0 é par. Logo, $P(0)$ é verdadeira.

2. Seja $k \in C$. Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira. Então, k é par. Logo, $k + 2$ é também par e, portanto, $P(k + 2)$ é verdadeira. Provámos, assim, a condição 2 do Princípio de indução estrutural para C.

Para mostar que C é efetivamente o conjunto dos números pares, falta ainda demonstrar que C contém o conjunto dos números pares. Para tal, pode provar-se, por indução em $\mathbb{N}_0$, que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $2n \in C$. (Exercício.)

Exemplo 17: O Princípio de indução estrutural associado à linguagem de expressões E do Exemplo 8 é o seguinte:

Seja $P(e)$ uma propriedade sobre $e \in E$. Se:

1. $P(0)$;

2. se $P(e)$, então $P(s(e))$, para todo $e \in E$;

3. se $P(e_1)$ e $P(e_2)$, então $P((e_1 + e_2))$, para todo $e_1, e_2 \in E$;

4. se $P(e_1)$ e $P(e_2)$, então $P((e_1 \times e_2))$, para todo $e_1, e_2 \in E$;

então $P(e)$, para todo $e \in E$.

Exemplo 18: Consideremos de novo a linguagem de expressões E do Exemplo 8 e consideremos a função $np : E \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada expressão de E faz corresponder o número de ocorrências de parênteses nessa expressão. Esta função pode ser definida por *recursão estrutural em* E do seguinte modo:

1. $np(0) = 0$;

2. para todo $e \in E$, $np(s(e)) = 2 + np(e)$;

3. para todo $e_1, e_2 \in E$, $np((e_1 + e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$;

4. para todo $e_1, e_2 \in E$, $np((e_1 \times e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$.

Notemos que, nos casos relativos às regras indutivas de E (os casos 2, 3 e 4), a caracterização da imagem é feita em termos da imagem da *subexpressão direta* (caso 2) ou das imagens das *subexpressões diretas* (casos 3 e 4).

Mostremos, agora, uma das propriedades das expressões de E relativa à função np. Designadamente, mostremos que, para todo $e \in E$, $np(e)$ é par. A prova será feita com recurso ao Princípio de indução estrutural para E, descrito no exemplo anterior.

Para cada $e \in E$, seja $P(e)$ a afirmação "$np(e)$ é par".

1. $P(0)$ é a afirmação "$np(0)$ é par". Ora, $np(0) = 0$, que, evidentemente, é par. Logo, $P(0)$ é verdadeira.

2. Seja $e \in E$ e suponhamos que $P(e)$ é válida (a hipótese de indução (H.I.)). Ou seja, suponhamos que $np(e)$ é par. Queremos provar que $P(s(e))$ é válida, i.e., que $np(s(e))$ é par. Ora, $np(s(e)) = 2 + np(e)$. Sendo $np(e)$ par, por H.I., e sendo a soma de dois pares um par, é óbvio que também $np(s(e))$ é par. Logo, podemos deduzir que $P(s(e))$ é válida.

3. Sejam $e_1, e_2 \in E$ e suponhamos que $P(e_1)$ e $P(e_2)$ são válidas (as hipóteses de indução (H.I.)). Ou seja, suponhamos que $np(e_1)$ é par, assim como $np(e_2)$. Queremos provar que $P((e_1 + e_2))$ é válida, i.e., que $np(e_1 + e_2)$ é par. Note-se que $np((e_1 + e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$. Por H.I., sabemos que $np(e_1)$ e $np(e_2)$ são pares. Como a soma de pares é também par, é claro que $np((e_1 + e_2))$ é par. Assim, pode-se concluir que $P((e_1 + e_2))$ é válida.

4. Sejam $e_1, e_2 \in E$ e suponhamos que $P(e_1)$ e $P(e_2)$ são válidas (H.I.). Logo, $np(e_1)$ e $np(e_2)$ são pares. Queremos mostrar que $P((e_1 \times e_2))$ é válida, ou seja, que $np(e_1 \times e_2)$ é par. Temos que $np((e_1 \times e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$. Ora, sabemos, por H.I., que $np(e_1)$ e $np(e_2)$ são pares. Consequentemente, $np((e_1 \times e_2))$ é par. Assim, podemos afirmar que $P((e_1 \times e_2))$ é válida.

Mostramos assim que as condições 1, 2, 3 e 4 do Princípio de indução estrutural para E são válidas. Logo, por esse Princípio, conclui-se que $P(e)$ é verdadeira para todo o $e \in E$, ou seja, que $np(e)$ é par para todo o $e \in E$.

Exemplo 19: A definição indutiva do conjunto C do Exemplo 1 também permite a definição de funções por recursão estrutural. Por exemplo, existe uma e uma só função $f : C \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $f(0) = 0$;
2. para todo $n \in C$, $f(n + 2) = 1 + f(n)$.

Acerca desta função, pode provar-se, com recurso ao Princípio de indução para C (ver Exemplo 1), que, para todo $n \in C$, $f(n) = \frac{n}{2}$. (Exercício.)

Observação 20: Ao contrário do que sucede em relação ao *Princípio de indução estrutural*, nem todas as definições indutivas têm um *Princípio de recursão estrutural* associado. Este princípio é válido apenas para as chamadas *definições indutivas deterministas*, classe na qual se inserem as definições indutivas de C e E, que vimos nos Exemplos 1 e 8, e que se caracterizam por permitirem *decomposições únicas* dos seus elementos.

Vejamos um exemplo de uma definição indutiva não-determinista e de problemas que surgiriam com um hipotético Princípio de recursão estrutural associado.

Tomemos a definição indutiva de C do Exemplo 1 e acrescentemos-lhe, agora, a regra:

3. para todo $n \in \mathbb{N}_0$, se $n \in C$, então $2 \times n \in C$.

Simultaneamente, às condições que definem a função f, no exemplo anterior, acrescentemos, agora, a seguinte condição associada à regra que acabámos de introduzir:

3. para todo $n \in C$, $f(2n) = 2 + f(n)$.

O Princípio de recursão estrutural associado asseguraria que esta condição, juntamente com as condições 1 e 2 do exemplo anterior, definiriam uma função.

Mas, por exemplo, qual seria a imagem de 4 por f?

Por um lado, $f(4) = f(2 \times 2) = 2 + f(2) = 2 + f(2 + 0) = 2 + 1 + f(0) = 3 + 0 = 3$ (fazendo na primeira igualdade a *decomposição de* 4 *pela regra* 3 e usando a condição 3 na segunda igualdade).

Por outro lado, $f(4) = f(2{+}2) = 1{+}f(2) = 1{+}1 = 2$ (fazendo na primeira igualdade a *decomposição de* 4 *pela regra* 2 e usando a condição 2 na segunda igualdade).

Teríamos, portanto, duas imagens distintas para 4, o que é impossível. Consequentemente, o Princípio de recursão estrutural não pode ser válido para esta definição indutiva.

Capítulo 2

Cálculo Proposicional da Lógica Clássica

Notação 21: Normalmente, usaremos CP para abreviar Cálculo Proposicional da Lógica Clássica.

2.1 Sintaxe

Definição 22: O *alfabeto do CP* é notado por $\mathcal{A}^{CP}$ e é constituído pelos seguintes símbolos (letras):

a) $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ (com $n \in \mathbb{N}_0$), chamados *variáveis proposicionais*, formando um conjunto numerável, denotado por $\mathcal{V}^{CP}$;

b) $\perp$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, chamados *conetivos proposicionais* (respetivamente, *absurdo*, *negação*, *conjunção*, *disjunção*, *implicação* e *equivalência*);

c) (,) (abrir e fechar parênteses), chamados *símbolos auxiliares.*

Exemplo 23: As sequências de símbolos $\perp p_{20}$) e (p_1) (ambas de comprimento 3) são palavras sobre $\mathcal{A}^{CP}$. A sequência de símbolos p_1 (de comprimento 1) é também uma palavra sobre $\mathcal{A}^{CP}$, sendo diferente da palavra (p_1).

Definição 24: O conjunto das *fórmulas do CP* é notado por $\mathcal{F}^{CP}$ e é a linguagem em $\mathcal{A}^{CP}$ definida indutivamente pelas seguintes regras:

a) $\perp \in \mathcal{F}^{CP}$;

b) $p \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \implies (\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $\varphi \in \left(\mathcal{A}^{CP}\right)^*$;

d) $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP} \implies (\varphi \square \psi) \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \left(\mathcal{A}^{CP}\right)^*$.

Exemplo 25: A palavra $((\neg \perp) \wedge (p_6 \rightarrow p_0))$ é uma fórmula do CP. Por exemplo,

$$\perp, (\neg \perp), p_6, p_0, (p_6 \rightarrow p_0), ((\neg \perp) \wedge (p_6 \rightarrow p_0))$$

é uma sua sequência de formação.

As palavras $\perp p_{20})$ e (p_1) não são fórmulas do CP. De facto, nenhuma palavra sobre $\mathcal{A}^{CP}$ de comprimento 3 é uma fórmula do CP.

Exercício 26: Particularize o conceito de sequência de formação, apresentado na Definição 9 , ao caso da definição indutiva do conjunto $\mathcal{F}^{CP}$.

Notação 27: Os parênteses extremos e os parênteses à volta de negações são muitas vezes omitidos. Por exemplo, a palavra $(p_5 \wedge \neg p_0) \vee \perp$ será utilizada como uma representação da fórmula $((p_5 \wedge (\neg p_0)) \vee \perp)$. Por abuso de linguagem, chamaremos fórmulas a tais representações de fórmulas.

Teorema 28 (Princípio de indução estrutural para fórmulas do CP): Seja $P(\varphi)$ uma propriedade sobre fórmulas $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. Se:

a) $P(\perp)$;

b) $P(p)$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $P(\psi) \implies P(\neg\psi)$, para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \square \psi_2)$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$;

então $P(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Dem.: Basta particularizar o Princípio de indução estrutural associado a uma definição indutiva ao caso da definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$. $\square$

Observação 29: Uma aplicação do resultado anterior para demonstrar uma proposição é chamada uma *demonstração por indução estrutural em fórmulas do CP*.

Exemplo 30: Podemos recorrer a uma demonstração por indução estrutural em fórmulas do CP para provar que, para toda a fórmula, o número de ocorrências de "(" é igual ao número de ocorrências de ")".

Consideremos a propriedade sobre fórmulas $P(\varphi)$, dada por "$\mathit{npe}(\varphi) = \mathit{npd}(\varphi)$", onde $\mathit{npe}(\varphi)$ e $\mathit{npd}(\varphi)$ denotam o número de ocorrências em φ de "(" e de ")", respetivamente.

a) $\mathit{npe}(\perp) = 0 = \mathit{npd}(\perp)$, pelo que $P(\perp)$.

b) Para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$, $\mathit{npe}(p) = 0 = \mathit{npd}(p)$ e, portanto, $P(p)$.

c) Seja $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e (como hipótese de indução) suponhamos $P(\psi)$. Então,

$$\mathit{npe}((\neg\psi)) = 1 + \mathit{npe}(\psi) = 1 + \mathit{npd}(\psi) = \mathit{npd}((\neg\psi)),$$

onde a segunda igualdade segue da hipótese de indução. Assim, provámos $P(\neg\psi)$.

d) Para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \square \psi_2)$. (Exercício.)

De **a)** a **d)**, pelo Princípio de indução estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$, segue que, para toda a fórmula φ, $P(\varphi)$ é verdadeira, ou seja, o número de ocorrências de "(" em φ é igual ao número de ocorrências de ")" em φ.

Observação 31: A definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$ é determinista e, por esta razão, admite um princípio de recursão estrutural. Uma aplicação deste princípio para definir uma função é chamada uma *definição por recursão estrutural em fórmulas do CP*.

Definição 32: A função $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$, que a cada fórmula faz corresponder o conjunto das variáveis proposicionais que nela ocorrem, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, do seguinte modo:

a) $var(\perp) = \emptyset$;

b) $var(p) = \{p\}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $var(\varphi \square \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Exemplo 33:
$$\begin{array}{rl} & var(p_1 \to (\neg p_2 \vee \perp)) \\ = & var(p_1) \cup var(\neg p_2 \vee \perp) \\ = & \{p_1\} \cup var(\neg p_2) \cup var(\perp) \\ = & \{p_1\} \cup var(p_2) \cup \emptyset \\ = & \{p_1\} \cup \{p_2\} \\ = & \{p_1, p_2\}. \end{array}$$

Definição 34: Sejam ψ uma fórmula e p uma variável proposicional. A função $[\psi/p] : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$, que a cada fórmula φ faz corresponder a fórmula notada por $\varphi[\psi/p]$, que resulta de φ por *substituição* das ocorrências de p por ψ, é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, como a única função t.q.:

a) $\perp [\psi/p] = \perp$;

b) $p_i[\psi/p] = \begin{cases} \psi & \text{se } p_i = p \\ p_i & \text{se } p_i \neq p \end{cases}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;

c) $(\neg\varphi_1)[\psi/p] = \neg\varphi_1[\psi/p]$, para todo $\varphi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $(\varphi_1 \Box \varphi_2)[\psi/p] = \varphi_1[\psi/p] \Box \varphi_2[\psi/p]$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$.

Exemplo 35:

a)
$$\begin{array}{rl} & (\neg p_1 \to (p_2 \wedge \perp))[p_0 \vee p_1/p_2] \\ = & (\neg p_1)[p_0 \vee p_1/p_2] \to (p_2 \wedge \perp)[p_0 \vee p_1/p_2] \\ = & \neg p_1[p_0 \vee p_1/p_2] \to (p_2[p_0 \vee p_1/p_2] \wedge \perp [p_0 \vee p_1/p_2]) \\ = & \neg p_1 \to ((p_0 \vee p_1) \wedge \perp) \end{array}$$

b) Verifique que $(\neg p_1 \to (p_2 \wedge \perp))[p_0 \vee p_1/p_0] = (\neg p_1 \to (p_2 \wedge \perp))$. Esta igualdade corresponde a um caso particular da proposição que se segue (observe que $p_0 \notin var(\neg p_1 \to (p_2 \wedge \perp))$).

Proposição 36: Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $p \in \mathcal{V}^{CP}$, se $p \notin var(\varphi)$, então $\varphi[\psi/p] = \varphi$.

Dem.: Por indução estrutural em φ. (Exercício.) $\Box$

Definição 37: A função $subf : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}^{CP})$ é definida, por recursão estrutural em fórmulas do CP, do seguinte modo:

a) $subf(\varphi) = \{\varphi\}$, para todo $\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}$;

b) $subf(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup subf(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

c) $subf(\varphi \Box \psi) = \{\varphi \Box \psi\} \cup subf(\varphi) \cup subf(\psi)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Dadas fórmulas φ e ψ, diremos que φ é uma *subfórmula* de ψ quando $\varphi \in subf(\psi)$.

Exemplo 38:

$$\begin{array}{rl} & subf(\neg p_1 \rightarrow p_2) \\ = & \{\neg p_1 \rightarrow p_2\} \cup subf(\neg p_1) \cup subf(p_2) \\ = & \{\neg p_1 \rightarrow p_2\} \cup \{\neg p_1\} \cup subf(p_1) \cup \{p_2\} \\ = & \{\neg p_1 \rightarrow p_2\} \cup \{\neg p_1\} \cup \{p_1\} \cup \{p_2\} \\ = & \{\neg p_1 \rightarrow p_2, \neg p_1, p_1, p_2\}. \end{array}$$

Proposição 39: Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, φ é uma subfórmula de ψ se e só se uma das seguintes condições é satisfeita:

a) $\psi = \varphi$;

b) existe $\psi_1 \in \mathcal{F}^{CP}$ t.q. $\psi = \neg\psi_1$ e φ é uma subfórmula de ψ_1;

c) existe um conetivo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e existem fórmulas $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ t.q. $\psi = \psi_1 \Box \psi_2$ e φ é uma subfórmula de ψ_1 ou de ψ_2.

Dem.: Por análise de casos em ψ.

Caso $\psi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}$. Então,

$$\begin{array}{rl} & \varphi \text{ subfórmula de } \psi \\ \text{sse} & \varphi \in subf(\psi) \\ \text{sse} & \varphi \in \{\psi\} \\ \text{sse} & \varphi = \psi. \end{array}$$

Assim, supondo que φ é uma subfórmula de ψ, teremos que a condição **a)** é satisfeita. Reciprocamente, uma vez que $\psi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\perp\}$, as condições **b)** e **c)** não são satisfeitas, pelo que teremos que ter $\varphi = \psi$, donde, pela sequência de equivalências anterior, segue que φ é uma subfórmula de ψ.

Restantes casos (caso $\psi = \neg\psi_1$, para algum $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, e caso $\psi = \psi_1 \Box \psi_2$, para algum $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para alguns $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$): exercício. $\Box$

2.2 Semântica

Definição 40: Os *valores lógicos* do CP são o *verdadeiro* e o *falso*. Estes valores serão denotados por 1 e 0, respetivamente.

Definição 41: Uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \{0, 1\}$ é uma *valoração* quando satisfaz as seguintes condições:

a) $v(\perp) = 0$,

b) $v(\neg\varphi) = f_\neg(v(\varphi))$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

c) $v(\varphi\Box\psi) = f_\Box(v(\varphi), v(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$,

onde $f_\neg, f_\wedge, f_\vee, f_\to, f_\leftrightarrow$ são as *funções booleanas* determinadas pelas *tabelas de verdade* dos respetivos conetivos; concretamente:

$$\begin{array}{cccc} f_\neg : & \{0,1\} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & 0 & \mapsto & 1 \\ & 1 & \mapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} f_\wedge : & \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & (1,1) & \mapsto & 1 \\ & (1,0) & \mapsto & 0 \\ & (0,1) & \mapsto & 0 \\ & (0,0) & \mapsto & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} f_\vee : & \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & (1,1) & \mapsto & 1 \\ & (1,0) & \mapsto & 1 \\ & (0,1) & \mapsto & 1 \\ & (0,0) & \mapsto & 0 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} f_\to : & \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & (1,1) & \mapsto & 1 \\ & (1,0) & \mapsto & 0 \\ & (0,1) & \mapsto & 1 \\ & (0,0) & \mapsto & 1 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} f_\leftrightarrow : & \{0,1\}^2 & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & (1,1) & \mapsto & 1 \\ & (1,0) & \mapsto & 0 \\ & (0,1) & \mapsto & 0 \\ & (0,0) & \mapsto & 1 \end{array}$$

Proposição 42: Seja v uma valoração e sejam φ, ψ fórmulas do CP. Então,

a) $v(\neg\varphi) = 1$ sse $v(\varphi) = 0$; $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$;

b) $v(\varphi \wedge \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$; $v(\varphi \wedge \psi) = \textit{mínimo}(v(\varphi), v(\psi))$;

c) $v(\varphi \vee \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 1$ ou $v(\psi) = 1$; $v(\varphi \vee \psi) = \textit{máximo}(v(\varphi), v(\psi))$;

d) $v(\varphi \to \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 0$ ou $v(\psi) = 1$;

e) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = v(\psi)$.

Dem.: Exercício. $\Box$

Proposição 43: Seja $f : \mathcal{V}^{CP} \longrightarrow \{0,1\}$ uma função. Então, existe uma e uma só valoração v t.q. $v(p) = f(p)$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$.

Dem.: Consequência imediata do Princípio de recursão estrutural para fórmulas do CP. $\Box$

Definição 44: O *valor lógico de uma fórmula* φ *para uma valoração* v *é* $v(\varphi)$.

Exemplo 45: Sejam v_1 a única valoração t.q. $v_1(p) = 0$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$, e v_2 a única valoração t.q.

$$v_2(p) = \begin{cases} 1 \text{ se } p \in \{p_0, p_2\} \\ 0 \text{ se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_0, p_2\} \end{cases} .$$

Sejam ainda $\varphi = (p_1 \vee p_2) \to (p_1 \wedge p_2)$ e $\psi = \neg p_1 \leftrightarrow (p_1 \to \perp)$. Então:

a) Como $v_1(p_1) = v_1(p_2) = 0$, $v_1(p_1 \vee p_2) = 0$, donde, de imediato, segue $v_1(\varphi) = 1$.

(Exercício: verifique que $v_2(\varphi) = 0$.)

b) Como $v_1(p_1) = 0$, por um lado, temos $v_1(\neg p_1) = 1$ e, por outro, temos $v_1(p_1 \to \perp) = 1$. Assim, $v_1(\psi) = 1$.

(Exercício: verifique que $v_2(\psi) = 1$; em particular, observe que v_2 e v_1 atribuem o mesmo valor lógico à única variável proposicional que ocorre em ψ.)

Proposição 46: Sejam v_1 e v_2 valorações e seja φ uma fórmula do CP. Se, para todo $p \in var(\varphi)$, $v_1(p) = v_2(p)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.
Dem.: Por indução estrutural em fórmulas do CP.

Seja $P(\varphi)$ a propriedade: para todo $p \in var(\varphi), v_1(p) = v_2(p) \Rightarrow v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

a) $P(\perp)$ é verdadeira, pois $v_1(\perp) = 0 = v_2(\perp)$, por definição de valoração.

b) Suponhamos que p' é uma variável proposicional e que, para todo $p \in var(p')$, $v_1(p) = v_2(p)$. Assim, como $p' \in var(p')(= \{p'\})$, temos $v_1(p') = v_2(p')$. Deste modo, para qualquer $p' \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p')$ é verdadeira.

c) Mostremos que $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ implicam $P(\varphi_1 \Box \varphi_2)$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$.

Suponhamos que, para todo $p \in var(\varphi_1 \Box \varphi_2)$, $v_1(p) = v_2(p)$. Então, como $var(\varphi_1 \Box \varphi_2) = var(\varphi_1) \cup var(\varphi_2)$, para $i \in \{1, 2\}$, tem-se $v_1(p) = v_2(p)$, para todo $p \in var(\varphi_i)$. Daqui, aplicando as hipóteses de indução $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$, segue que $v_1(\varphi_1) = v_2(\varphi_1)$ e $v_1(\varphi_2) = v_2(\varphi_2)$.

Assim, $v_1(\varphi_1 \Box \varphi_2) = f_\Box(v_1(\varphi_1), v_1(\varphi_2)) = f_\Box(v_2(\varphi_1), v_2(\varphi_2)) = v_2(\varphi_1 \Box \varphi_2)$, e, portanto, $P(\varphi_1 \Box \varphi_2)$ é verdadeira. $\Box$

Definição 47:

1. Uma fórmula φ é uma *tautologia* quando, para qualquer valoração v, $v(\varphi) = 1$.

2. Uma fórmula φ é uma *contradição* quando, para qualquer valoração v, $v(\varphi) = 0$.

Notação 48: A notação $\models \varphi$ significará que φ é uma tautologia e a notação $\not\models \varphi$ significará que φ não é uma tautologia.

Exemplo 49:

1. A fórmula $\psi = \neg p_1 \leftrightarrow (p_1 \rightarrow \perp)$ do exemplo anterior é uma tautologia. De facto, dada uma valoração arbitrária v, sabemos que $v(p_1) = 0$ ou $v(p_1) = 1$, e:
   (a) caso $v(p_1) = 0$, então $v(\neg p_1) = 1$ e $v(p_1 \rightarrow \perp) = 1$, donde $v(\psi) = 1$.
   (b) caso $v(p_1) = 1$, então $v(\neg p_1) = 0$ e $v(p_1 \rightarrow \perp) = 0$, donde $v(\psi) = 1$.
2. Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \wedge \neg\varphi$ é uma contradição. De facto, dada uma valoração arbitrária v, sabemos que $v(\varphi) = 0$ ou $v(\varphi) = 1$, e:
   (a) caso $v(\varphi) = 0$, então, de imediato, sabemos $v(\varphi \wedge \neg\varphi) = 0$.
   (b) caso $v(\varphi) = 1$, então $v(\neg\varphi) = 0$, donde $v(\varphi \wedge \neg\varphi) = 0$.
3. As fórmulas $p_0, \neg p_0, p_0 \vee p_1, p_0 \wedge p_1, p_0 \rightarrow p_1, p_0 \leftrightarrow p_1$ não são tautologias nem são contradições. (Porquê?)

Proposição 50: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

1. φ é tautologia se e só se $\neg\varphi$ é contradição;
2. φ é contradição se e só se $\neg\varphi$ é tautologia.

Dem.: Exercício. □

Observação 51: Sabendo que φ não é uma tautologia, não podemos concluir que φ é uma contradição e, analogamente, sabendo que φ não é uma contradição, não podemos concluir que φ é uma tautologia. Tenha-se em atenção que existem fórmulas que não são tautologias, nem são contradições (como vimos no exemplo anterior).

Observação 52: Pela Proposição 46, para decidir se uma fórmula φ é uma tautologia, basta calcular o valor lógico de φ para $2^{\#var(\varphi)}$ valorações (o número de atribuições, possíveis, às variáveis proposicionais de φ), o que pode ser descrito através de uma *tabela de verdade*, como se segue. Introduzimos: uma coluna para cada variável proposicional de φ; uma coluna para φ; e colunas (auxiliares) para cada uma das restantes subfórmulas de φ. Introduzimos linhas para cada uma das atribuições, possíveis, de valores de verdade às variáveis proposicionais de φ (*i.e.*, sequências de 0's e 1's de comprimento igual ao número de variáveis proposicionais em φ). Preenchemos as colunas respeitantes às variáveis proposicionais com essas atribuições. Nas restantes posições pos_{ij} da tabela, escrevemos o valor lógico da fórmula respeitante à coluna j, para uma valoração que satisfaz as atribuições às variáveis proposicionais na linha i.

Exemplo 53: Seja φ a fórmula $(\neg p_1 \to \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \to p_1)$. Da tabela de verdade para φ, apresentada de seguida, podemos concluir que φ é uma tautologia, uma vez que φ assume o valor lógico 1, para todas as possíveis atribuições de valores de verdade às variáveis proposicionais de φ.

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$\neg p_1 \to \neg p_2$	$p_2 \to p_1$	$(\neg p_1 \to \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \to p_1)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Tabela de verdade de $(\neg p_1 \to \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \to p_1)$.

Teorema 54 (Generalização): Sejam p uma variável proposicional e sejam φ e ψ fórmulas do CP. Se φ é uma tautologia, então $\varphi[\psi/p]$ é também uma tautologia.

Dem.: Qualquer que seja a valoração v, demonstra-se, por indução estrutural na fórmula φ, que a valoração v' definida, a partir de v e de ψ, do seguinte modo

$$v'(p') = \begin{cases} v(\psi) & \text{se } \; p' = p \\ \\ v(p') & \text{se } \; p' \in \mathcal{V}^{CP} - \{p\} \end{cases}$$

é tal que $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p])$. Portanto, se φ é uma tautologia, $v'(\varphi) = 1$ e, pela igualdade anterior, $v(\varphi[\psi/p]) = 1$. Assim, qualquer que seja a valoração v, $v(\varphi[\psi/p]) = 1$, *i.e.*, $\varphi[\psi/p]$ é uma tautologia. $\square$

Exemplo 55: A fórmula $p_0 \vee \neg p_0$ é uma tautologia. Logo, para qualquer fórmula ψ, a fórmula $(p_0 \vee \neg p_0)[\psi/p_0] = \psi \vee \neg\psi$ é ainda uma tautologia.

Definição 56: Uma fórmula φ diz-se *logicamente equivalente* a uma fórmula ψ (notação: $\varphi \Leftrightarrow \psi$) quando a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia, ou seja, quando para qualquer valoração v, $v(\varphi) = v(\psi)$.

Exemplo 57: Para toda a fórmula φ,$\neg\varphi \Leftrightarrow (\varphi \to\perp)$. A demonstração deste resultado pode ser sintetizada numa *tabela de verdade*, como se segue:

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \to\perp$	$\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to\perp)$
1	0	0	1
0	1	1	1

Tabela de verdade de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to\perp)$.

Na primeira linha da tabela, é demonstrado que o valor lógico de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to\perp)$ é 1 para qualquer valoração para a qual φ assuma o valor lógico 1. Na segunda linha da tabela, é demonstrado que o valor lógico de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to\perp)$ é 1 para qualquer valoração para a qual φ assuma o valor lógico 0.

Proposição 58: A relação de equivalência lógica satisfaz as seguintes propriedades:

1. para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \Leftrightarrow \varphi$ (*reflexividade*);

2. para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, então $\psi \Leftrightarrow \varphi$ (*simetria*);

3. para todo $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e $\psi \Leftrightarrow \sigma$, então $\varphi \Leftrightarrow \sigma$ (*transitividade*).

Dem.: Para mostrar 1, temos que mostar que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, a fórmula $\varphi \leftrightarrow \varphi$ é uma tautologia. De facto, dado $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, para qualquer valoração v, $v(\varphi) = v(\varphi)$, donde $v(\varphi \leftrightarrow \varphi) = 1$, e, consequentemente, $\varphi \leftrightarrow \varphi$ é uma tautologia. (Exercício: mostrar 2 e 3.) $\square$

Corolário 59: A relação de equivalência lógica é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}^{CP}$.
Dem.: Imediata, a partir da proposição anterior. $\square$

Proposição 60: As seguintes equivalências lógicas são válidas.

$$(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma) \qquad (\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$$
(*associatividade*)

$$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi \qquad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$$
(*comutatitvidade*)

$$\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi \qquad \varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$$
(*idempotência*)

$$\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi \qquad \varphi \wedge \neg \perp \Leftrightarrow \varphi$$
(*elemento neutro*)

$$\varphi \vee \neg \perp \Leftrightarrow \neg \perp \qquad \varphi \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$$
(*elemento absorvente*)

$$\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma) \qquad \varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$$
(*distributividade*)

$$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi \qquad \neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$$
(*leis de De Morgan*)

$$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \qquad \varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\psi \to \neg\varphi$$
(*lei da dupla negação*) (*contrarrecíproco*)

$$\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \qquad \varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$$

$$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \to \psi \qquad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \to \perp \qquad \perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$$
(*expressão de um conetivo em termos de outros conetivos*)

Dem.: Exercício. □

Notação 61: Uma vez que a conjunção é uma operação associativa, utilizaremos a notação $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$ (com $n \in \mathbb{N}$) para representar qualquer associação, através da conjunção, das fórmulas $\varphi_1, ..., \varphi_n$ duas a duas. Analogamente, e uma vez que a disjunção é tambem uma operação associativa, utilizaremos a notação $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n$ para representar qualquer associação, através da disjunção, das fórmulas $\varphi_1, ..., \varphi_n$ duas a duas. Em ambos os casos, quando $n = 1$, as notações anteriores representam simplesmente a fórmula φ_1.

Teorema 62 (Substituição): Sejam $p \in \mathcal{V}^{CP}$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$. Então, $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ se e só se para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

Dem.:

i) Suponhamos que para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$. Então, em particular, teremos que $p[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p[\varphi_2/p]$, *i.e.*, por definição de substituição, $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$.

ii) Suponhamos agora que $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$. Vamos demonstrar, por indução estrutural em fórmulas do CP, que para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\psi)$, onde $P(\psi)$ é a propriedade: $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

a) Por definição de substituição, $\perp [\varphi_1/p] = \perp = \perp [\varphi_2/p]$. Assim, como a relação $\Leftrightarrow$ é reflexiva, $\perp \Leftrightarrow \perp$, ou equivalentemente $\perp [\varphi_1/p] \Leftrightarrow \perp [\varphi_2/p]$, e, portanto, $P(\perp)$ é verdadeira.

b) Seja $p' \in \mathcal{V}^{CP}$. Consideremos dois casos.

b.1) Caso $p' = p$. Então, por definição de substituição, $p'[\varphi_1/p] = \varphi_1$ e $p'[\varphi_2/p] = \varphi_2$. Assim, como por hipótese $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$, segue que $p'[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p'[\varphi_2/p]$,

b.2) Caso $p' \neq p$. Então, por definição de substituição, $p'[\varphi_1/p] = p'$ e $p'[\varphi_2/p] = p'$. Assim, tal como em a), por $\Leftrightarrow$ ser reflexiva, $p'[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p'[\varphi_2/p]$.

Assim, para qualquer $p' \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p')$ é verdadeira.

c) Seja ψ_1 uma fórmula e suponhamos $P(\psi_1)$ (H.I.), tendo em vista mostrar que $P(\neg\psi_1)$ é verdadeira, ou, dito por outras palavras, pretende-se mostar que $(\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_1)[\varphi_2/p]$ é uma tautologia.

Seja v uma valoração. Então:

$$
\begin{array}{lll}
 & v((\neg\psi_1)[\varphi_1/p]) & \\
= & v(\neg\psi_1[\varphi_1/p]) & \text{(definição de substituição)} \\
= & f_\neg(v(\psi_1[\varphi_1/p])) & \text{(definição de valoração)} \\
= & f_\neg(v(\psi_1[\varphi_2/p])) & (*) \\
= & v(\neg\psi_1[\varphi_2/p]) & \text{(definição de valoração)} \\
= & v((\neg\psi_1)[\varphi_2/p]) & \text{(definição de substituição).}
\end{array}
$$

onde a igualdade assinalada com (*) é consequência da HI, pois da HI, por definição de $\Leftrightarrow$, segue que $\psi_1[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi_1[\varphi_2/p]$ é uma tautologia, donde, para toda a valoração v, $v(\psi_1[\varphi_1/p]) = v(\psi_1[\varphi_2/p])$.

Assim sendo, $v((\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_2)[\varphi_2/p]) = 1$ e, portanto, a fórmula $(\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_2)[\varphi_2/p]$ é uma tautologia.

d) Para completar a prova, falta mostar que, para $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$, se $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2)$, então $P(\psi_1 \Box \psi_2)$. (Exercício.) $\Box$

Exemplo 63: Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

$$\neg(\neg\varphi \wedge \psi) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \neg\neg\varphi \vee \neg\psi \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \varphi \vee \neg\psi.$$

Justificações

(1)	Lei de De Morgan.
(2)	Dada uma variável proposicional $p \notin var(\psi)$ (que existe sempre, pois o número de variáveis proposicionais que ocorrem em φ é finito), pelo Teorema da Substituição, como $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, $(p \vee \psi)[\neg\neg\varphi/p] \Leftrightarrow (p \vee \psi)[\varphi/p]$ e assim, uma vez que $(p\vee\psi)[\neg\neg\varphi/p] = \neg\neg\varphi\vee\psi$ e $(p\vee\psi)[\varphi/p] = \varphi \vee \psi$, segue-se que $\neg\neg\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \varphi \vee \psi$.

Donde, como $\Leftrightarrow$ é transitiva, podemos concluir a equivalência lógica entre a primeira fórmula e a última fórmula.

Definição 64: Seja $X \subseteq \{\bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ um conjunto de conetivos. X diz-se *completo* quando, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e todos os conetivos de ψ estão em X.

Proposição 65: Os conjuntos de conetivos $\{\rightarrow, \neg\}$, $\{\rightarrow, \bot\}$, $\{\wedge, \neg\}$ e $\{\vee, \neg\}$ são completos.

Dem.: Vamos demonstrar que $\{\rightarrow, \neg\}$ é um conjunto completo de conetivos. (A demonstração de que os outros conjuntos de conetivos mencionados são completos é deixada como exercício.) Para tal, comecemos por definir, por recursão estrutural em fórmulas, a função $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ como a única função t.q.:

a) $f(\bot) = \neg(p_0 \rightarrow p_0)$;

b) $f(p) = p$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $f(\varphi \rightarrow \psi) = f(\varphi) \rightarrow f(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

e) $f(\varphi \vee \psi) = \neg f(\varphi) \rightarrow f(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

f) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(f(\varphi) \rightarrow \neg f(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

g) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg((f(\varphi) \rightarrow f(\psi)) \rightarrow \neg(f(\psi) \rightarrow f(\varphi)))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Lema: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e os conetivos de $f(\varphi)$ estão no conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$.
Dem.: Por indução estrutural em φ. Exercício.

Do lema anterior concluimos de imediato que $\{\to, \neg\}$ é um conjunto completo de conetivos, pois, para toda a fórmula φ, existe uma fórmula ψ —a fórmula $f(\varphi)$— tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e os conetivos de ψ estão no conjunto $\{\to, \neg\}$. □

Exemplo 66: Da demonstração da proposição anterior, podemos concluir que a fórmula $f((\neg p_1 \wedge p_2) \to\perp) = \neg(\neg p_1 \to \neg p_2) \to \neg(p_0 \to p_0)$ é logicamente equivalente a $(\neg p_1 \wedge p_2) \to\perp$ e os seus conetivos estão no conjunto $\{\to, \neg\}$.

Definição 67: As variáveis proposicionais e as negações de variáveis proposicionais são chamadas *literais*.

Definição 68: Fórmulas do CP das formas

i) $(l_{11} \vee ... \vee l_{1m_1}) \wedge ... \wedge (l_{n1} \vee ... \vee l_{nm_n})$

ii) $(l_{11} \wedge ... \wedge l_{1m_1}) \vee ... \vee (l_{n1} \wedge ... \wedge l_{nm_n})$

em que os l_{ij} são literais e n, bem como os m_i, pertencem a $\mathbb{N}$, serão designadas por *formas normais conjuntivas* (FNC) e *formas normais disjuntivas* (FND), respetivamente.

Exemplo 69:

a) Todo o literal l é simultaneamente uma forma normal conjuntiva e disjuntiva (na definição de formas normais, basta tomar $n = 1$, $m_1 = 1$ e $l_{11} = l$).

b) A fórmula $p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_0$ é uma FNC (faça-se $n = 3$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$, $l_{11} = p_1$, $l_{21} = \neg p_2$ e $l_{31} = \neg p_0$) e é também uma FND (faça-se $n = 1$, $m_1 = 3$, $l_{11} = p_1$, $l_{12} = \neg p_2$ e $l_{13} = \neg p_0$). Também a fórmula $p_1 \vee p_2$ é, em simultâneo, uma FND e uma FNC. Mais geralmente, conjunções de literais e disjunções de literais são, em simultâneo, formas normais conjuntivas e disjuntivas.

c) A fórmula $(p_1 \vee p_0) \wedge (p_0 \vee \neg p_1)$ é uma FNC, mas não é uma FND.

d) A fórmula $\neg(p_1 \vee p_0)$ não é nem uma FNC nem uma FND.

Proposição 70: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe uma forma normal conjuntiva φ^c tal que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^c$ e existe uma formal normal disjuntiva φ^d tal que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^d$.

Dem.: Dada uma fórmula φ, uma forma normal conjuntiva e uma formal normal disjuntiva logicamente equivalentes a φ podem ser obtidas através das seguintes transformações:

1. Eliminar equivalências, implicações e ocorrências do absurdo, utilizando as equivalências lógicas $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow (\varphi_1 \to \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \to \varphi_1)$, $\varphi_1 \to \varphi_2 \Leftrightarrow \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$ e $\perp \Leftrightarrow \varphi_1 \wedge \neg\varphi_1$.

2. Mover negações que se encontrem fora de conjunções ou disjunções para dentro delas, utilizando as leis de De Morgan.

3. Eliminar duplas negações.

4. Aplicar a distributividade entre a conjunção e a disjunção. □

Exemplo 71: Seja $\varphi = ((\neg p_1 \vee p_2) \to p_3) \wedge p_0$. Então:

i)
$$
\begin{array}{ll}
 & \varphi \\
\Leftrightarrow & ((\neg p_1 \vee p_2) \to p_3) \wedge p_0 \\
\Leftrightarrow & (\neg(\neg p_1 \vee p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\
\Leftrightarrow & ((\neg\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\
\Leftrightarrow & ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\
\Leftrightarrow & (p_1 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee p_3) \wedge p_0
\end{array}
$$

e a última fórmula é uma FNC;

ii)
$$
\begin{array}{lll}
 & \varphi & \\
\Leftrightarrow & ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 & (\text{por } \mathbf{i)}) \\
\Leftrightarrow & (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_0) \vee (p_3 \wedge p_0), &
\end{array}
$$

sendo a última fórmula uma FND.

Observação 72: Consideremos de novo a Proposição 70 e a sua demonstração. Uma demonstração alternativa, que permite obter uma FND e uma FNC logicamente equivalentes a uma dada fórmula φ, pode ser feita com recurso à tabela de verdade de φ. Em particular, vejamos como obter uma FND φ^d, logicamente equivalente a φ, a partir da tabela de verdade de φ.

- Se φ é uma contradição ou uma tautologia, basta tomar, respetivamente, uma FND que seja uma contradição e uma FND que seja uma taotologia; por exemplo, tome-se, respetivamente, $\varphi^d = p_0 \wedge \neg p_0$ e $\varphi^d = p_0 \vee \neg p_0$.

- Doutro modo, sem perda de generalidade, suponhamos, que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são as variáveis proposicionais que ocorrem em φ[1]. A tabela de verdade de φ terá 2^n linhas e pode ser representada da seguinte forma:

[1]Note-se que uma fórmula que não é tautologia nem é contradição terá que ter pelo menos uma variável proposicional. (Exercício)

	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n	φ
	1	1	$\cdots$	1	1	b_1
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
linha $i \rightarrow$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$\cdots$	$a_{i,n-1}$	$a_{i,n}$	b_i
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	0	0	$\cdots$	0	0	b_{2^n}

onde, para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$, $b_i = v_i(\varphi)$ para toda a valoração v_i tal que $v_i(p_j) = a_{i,j}$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $b_i = 1$ seja

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} p_j & \text{se } a_{i,j} = 1 \\ \neg p_j & \text{se } a_{i,j} = 0 \end{cases} \qquad \text{(para todo } j \in \{1, \ldots, n\})$$

e seja

$$\beta_i = \alpha_{i,1} \wedge \alpha_{i,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,n}.^{2}$$

Finalmente, suponhamos que $i_1, i_2, \ldots, i_k$ são as linhas para as quais $b_{i_r} = 1$, e tome-se

$$\varphi^d = \beta_{i_1} \vee \beta_{i_2} \vee \cdots \vee \beta_{i_k}.$$

Prova-se que φ^d assim definida, de facto, é uma FND e é logicamente equivalente a φ. (Exercício.)

Exemplo 73: Consideremos a fórmula $\varphi = ((p_3 \rightarrow p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \perp)) \wedge p_2$. Denotemos por ψ a subfórmula $(p_3 \rightarrow p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \perp)$ de φ. A tabela de verdade de φ é:

	p_1	p_2	p_3	$\perp$	$\neg p_1$	$p_3 \rightarrow p_1$	$\neg p_1 \leftrightarrow \perp$	ψ	φ
linha 1 $\rightarrow$	1	1	1	0	0	1	1	1	1
linha 2 $\rightarrow$	1	1	0	0	0	1	1	1	1
	1	0	1	0	0	1	1	1	0
	1	0	0	0	0	1	1	1	0
	0	1	1	0	1	0	0	0	0
linha 6 $\rightarrow$	0	1	0	0	1	1	0	1	1
	0	0	1	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	1	0

[2] Note-se que o valor lógico na linha i da tabela de verdade de β_i é 1 enquanto que em todas as outras linhas é 0.

As linhas para as quais φ tem valor lógico 1 são a 1, a 2 e a 6. Portanto, uma FND logicamente equivalente a φ é: $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)$.

Definição 74: Seja v uma valoração.

1. Dada uma fórmula do CP φ, dizemos que v *satisfaz* φ (ou que v *é modelo de* φ), e escrevemos $v \models \varphi$, quando $v(\varphi) = 1$. Quando v *não satisfaz* φ (*i.e.*, quando $v(\varphi) = 0$, escrevemos $v \not\models \varphi$).
2. Dado um conjunto de fórmulas do CP Γ, dizemos que v *satisfaz* Γ (ou que v *é modelo de* Γ), e escrevemos $v \models \Gamma$, quando v satisfaz todas as fórmulas de Γ. Quando v *não satisfaz* Γ (*i.e.*, quando existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v \not\models \varphi$ ou, equivalentemente, quando existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v(\varphi) = 0$) escrevemos $v \not\models \Gamma$.

Exemplo 75: Seja v_0 a valoração que atribui o valor lógico 0 a todas as variáveis proposicionais.

1. $v_0 \models p_1 \leftrightarrow p_2$ e $v_0 \models \neg p_1 \wedge \neg p_2$;
2. $v_0 \not\models p_1 \vee p_2$ e $v_0 \not\models p_1 \leftrightarrow \neg p_2$;
3. $v_0 \models \{p_1 \leftrightarrow p_2, \neg p_1 \wedge \neg p_2\}$ (por 1);
4. $v_0 \not\models \{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1 \vee p_2\}$ (v_0 não satisfaz a 2ª fórmula);
5. $v_0 \not\models \{\neg p_1 \wedge \neg p_2, p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$ (v_0 não satisfaz a 2ª fórmula).

Observação 76: Dado que no conjunto vazio não há qualquer fórmula, tem-se, trivialmente, que, para toda a valoração v, $v \models \emptyset$.

Definição 77: Seja Γ um conjunto de fórmulas do CP.

1. Γ diz-se um conjunto (*semanticamente*) *consistente* ou *satisfazível* quando existe alguma valoração que satisfaz Γ.
2. Γ diz-se um conjunto (*semanticamente*) *inconsistente* ou *insatisfazível* quando não há valorações que satisfaçam Γ.

Exemplo 78:

a) Como vimos no exemplo anterior, o conjunto de fórmulas $\Delta_1 = \{p_1 \leftrightarrow p_2, \neg p_1 \wedge \neg p_2\}$ é satisfeito pela valoração v_0 desse exemplo e, portanto, Δ_1 é consistente.

b) O conjunto $\Delta_2 = \{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1 \vee p_2\}$, considerado no exemplo anterior, não é satisfeito pela valoração v_0, mas é satisfeito, por exemplo, pela valoração que atribui valor lógico 1 a qualquer variável proposicional. Logo, Δ_2 é também consistente.

c) O conjunto $\Delta_3 = \{\neg p_1 \wedge \neg p_2, p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$, considerado no exemplo anterior, é inconsistente.

Dem.: Suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz Δ_3. Então, $v(\neg p_1 \wedge \neg p_2) = 1$, e portanto $v(p_1) = 0$ e $v(p_2) = 0$, e $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$. Ora, de $v(p_2) = 0$, segue $v(\neg p_2) = 1$ e daqui e de $v(p_1) = 0$, segue $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 0$, o que contradiz $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$. Logo, não podem existir valorações que satisfaçam Δ_3 e, assim, Δ_3 é inconsistente.

Proposição 79: Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas do CP tais que $\Gamma \subseteq \Delta$. Então:

i) se Δ é consistente, então Γ é consistente;

ii) se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Dem.: Exercício. □

Definição 80: Seja φ uma fórmula do CP e seja Γ um conjnunto de fórmulas do CP.

1. Dizemos que φ é uma *consequência semântica* de Γ, e escrevemos $\Gamma \models \varphi$, quando, para toda a valoração v, se $v \models \Gamma$, então $v \models \varphi$.

2. Escrevemos $\Gamma \not\models \varphi$ quando φ *não é consequência semântica* de Γ, *i.e.*, quando existe alguma valoração v t.q. $v \models \Gamma$ e $v \not\models \varphi$.

Observação 81: Da definição anterior, aplicando as definições de satisfação de uma fórmula e satisfação de um conjunto de fórmulas, segue de imediato que:

1. $\Gamma \models \varphi$ se e só se para toda a valoração v, se para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$.

2. $\Gamma \not\models \varphi$ se e só se existe alguma valoração v tal que, para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$ e $v(\varphi) = 0$.

Exemplo 82:

1. Seja $\Gamma = \{p_1, \neg p_1 \vee p_2\}$. Então:

(a) $\Gamma \models p_1$. (Se tomarmos uma valoração v tal que $v \models \Gamma$, *i.e.*, uma valoração tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, em particular, temos $v(p_1) = 1$.)

(b) $\Gamma \models p_2$. (Tomando uma valoração v tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, temos $v(\neg p_1) = 0$ e daqui e de $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, segue $v(p_2) = 1$.)

(c) $\Gamma \models p_1 \wedge p_2$. (Tomando uma valoração v tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, temos necessariamente $v(p_1) = 1$ e $v(p_2) = 1$ (tal como vimos nos exemplos anteriores) e, por isso, temos $v(p_1 \wedge p_2) = 1$.)

(d) $\Gamma \not\models p_3$. (Existem valorações v tais que $v \models \Gamma$ e $v(p_3) = 0$. Por exemplo, a valoração que atribui valor lógico 1 a p_1 e p_2 e valor lógico 0 às restantes variáveis proposicionais é uma tal valoração.)

(e) $\Gamma \not\models \neg p_1 \vee \neg\, p_2$. (Por exemplo, para a valoração v_1 tal que $v_1(p_i) = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, temos $v_1 \models \Gamma$ e, no entanto, $v_1(\neg p_1 \vee \neg p_2) = 0$.)

(f) $\Gamma \models p_3 \vee \neg p_3$. (Se tomarmos uma valoração v tal que $v \models \Gamma$, temos $v(p_3 \vee \neg p_3)$. De facto, $p_3 \vee \neg p_3$ é uma tautologia e, como tal, o seu valor lógico é 1 para qualquer valoração (em particular, para aquelas valorações que satisfazem Γ).)

2. Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models \psi$. De facto, para qualquer valoração v, se $v(\varphi) = 1$ e $v(\varphi \to \psi) = 1$, então $v(\psi) = 1$.

3. Já a afirmação "para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}, \{\varphi \to \psi\} \models \psi$" é falsa. Por exemplo, $\{p_1 \to p_2\} \not\models p_2$ (uma valoração v tal que $v(p_1) = v(p_2) = 0$ satisfaz $\{p_1 \to p_2\}$ e não satisfaz p_2.

Proposição 83: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\models \varphi$ se e só se $\emptyset \models \varphi$.

Dem.: Suponhamos que φ é uma tautologia. Então, para toda a valoração v, $v \models \varphi$ e, assim, de imediato, a implicação "$v \models \emptyset \Rightarrow v \models \varphi$" é verdadeira, pelo que, $\emptyset \models \varphi$.

Reciprocamente, suponhamos agora que $\emptyset \models \varphi$, *i.e.*, suponhamos que para toda a valoração v,

$$v \models \emptyset \Rightarrow v \models \varphi.$$

Seja v uma valoração arbitrária. Pretendemos mostrar que $v(\varphi) = 1$. Ora, trivialmente, $v \models \emptyset$ (Observação 76). Assim, da suposição, segue $v \models \varphi$, ou seja, $v(\varphi) = 1$. □

Observação 84: Se Γ é um conjunto de fórmulas inconsistente, então $\Gamma \models \varphi$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. (Porquê?) Como tal, é possível ter-se $\Gamma \models \varphi$ sem que existam valorações que satisfaçam Γ.

Notação 85: Muitas vezes, no contexto da relação de consequência semântica, usaremos a vírgula para denotar a união de conjuntos e escrevemos uma fórmula para denotar o conjunto singular composto por essa fórmula. Assim, por exemplo, dadas fórmulas $\varphi, \psi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ e conjuntos de fórmulas Γ, Δ, escrevemos:

a) $\Gamma, \Delta \models \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$;

b) $\Gamma, \varphi \models \psi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$;

c) $\varphi_1, ..., \varphi_n \models \varphi$ como abreviatura para $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \models \varphi$.

Proposição 86: Sejam φ e ψ fórmulas e sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

a) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

c) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Delta, \Gamma \models \psi$.

d) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$.

e) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Dem.:

a) Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que v satisfaz Γ. (Queremos mostrar que v satisfaz φ, *i.e.*, $v(\varphi) = 1$.) Então, da definição de satisfação de conjuntos, sabemos que v atribui valor lógico 1 a todas as fórmulas de Γ. Assim, dado que por hipótese $\varphi \in \Gamma$, temos $v(\varphi) = 1$.

b) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz Δ. Assim, em particular, v satisfaz Γ, pois (por hipótese) $\Gamma \subseteq \Delta$. Donde, pela hipótese de que φ é uma consequência semântica de Γ, segue que $v(\varphi) = 1$.

c) Exercício.

d) $\Rightarrow$) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Então, por definição de satisfação de conjuntos, v satisfaz Γ e $v(\varphi) = 1$ (∗) . Assim, como v satisfaz Γ, da hipótese $\Gamma \models \varphi \to \psi$ segue que $v(\varphi \to \psi) = 1$. Daqui e de (∗) segue $v(\psi) = 1$.

$\Leftarrow$) Exercício.

e) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz Γ. Então, da hipótese $\Gamma \models \varphi \to \psi$, podemos concluir que $v(\varphi \to \psi) = 1$ e, da hipótese $\Gamma \models \varphi$, podemos concluir que $v(\varphi) = 1$. De $v(\varphi \to \psi) = 1$ e de $v(\varphi) = 1$ segue $v(\psi) = 1$. □

Proposição 87: Sejam $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ fórmulas, onde $n \in \mathbb{N}$. As seguintes proposições são equivalentes:

i) $\varphi_1, ..., \varphi_n \models \varphi$;

ii) $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \models \varphi$;

iii) $\models (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi$.

Dem.: A equivalência entre ii) e iii) é um caso particular de d) da proposição anterior. A equivalência entre i) e ii) pode ser demonstrada a partir da equivalência mais geral: para todo o conjunto Γ de fórmulas,

$$\Gamma, \varphi_1, ..., \varphi_n \models \varphi \text{ se e só se } \Gamma, \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \models \varphi,$$

a qual pode ser demonstrada por indução em n (exercício). A equivalência entre i) e iii) segue, então, por transitividade. $\square$

Proposição 88 (Redução ao absurdo): Seja φ uma fórmula do CP e seja Γ um conjunto de fórmulas do CP. Então: $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Dem.:

$\Rightarrow$) Tendo em vista uma contradição, suponhamos que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente, *i.e.*, suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Então, v satisfaz Γ e $v(\neg\varphi) = 1$, *i.e.*, $v(\varphi) = 0$ (*) . Contudo, da hipótese, uma vez que v satisfaz Γ, podemos concluir que $v(\varphi) = 1$, o que é contraditório com (*). Logo, por redução ao absurdo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

$\Leftarrow$) Suponhamos que v satisfaz Γ. Então, $v(\neg\varphi) = 0$, de outra forma teríamos $v(\neg\varphi) = 1$, donde, como v satisfaz Γ, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria semanticamente consistente, contrariando a hipótese. Logo, $v(\varphi) = 1$. Mostrámos, assim, que toda a valoração que satisfaz Γ também satisfaz φ e, portanto, $\Gamma \models \varphi$. $\square$

2.3 Sistema Formal de Dedução Natural

Observação 89: O sistema formal de demonstrações que estudaremos nesta secção será notado por DNP e designado por *Dedução Natural Proposicional*.

Observação 90: O sistema DNP constitui uma certa formalização da noção de *demonstração* para as fórmulas do Cálculo Proposicional, num estilo conhecido como *dedução natural*. As demonstrações permitirão uma abordagem alternativa à relação de consequência semântica (definida à custa do conceito de valoração) e, em particular, permitirão identificar as tautologias com as fórmulas para as quais podem ser construídas demonstrações.

Exemplo 91: Demonstrações em DNP serão construídas usando um certo conjunto de regras (chamadas *regras de inferência*), que codificam raciocínios elementares utilizados habitualmente na elaboração de demonstrações matemáticas.

Um raciocínio elementar que usamos frequentemente na construção de demonstrações é o seguinte: de φ e $\varphi \to \psi$ podemos concluir ψ. Representaremos este raciocínio do seguinte modo:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$$

Esta regra é habitualmente conhecida por *modus ponens*, embora no formalismo DNP adotemos um nome diferente para esta regra, como veremos adiante.

Um outro raciocínio elementar é o seguinte: se assumindo φ por hipótese podemos concluir ψ, então podemos concluir $\varphi \to \psi$. Este raciocínio será representado do seguinte modo:

$$\frac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}$$

Neste raciocínio, φ é uma *hipótese temporária* usada para concluir ψ. A notação $\cancel{\varphi}$ reflete o facto de que a conclusão $\varphi \to \psi$ *não depende* da hipótese temporária φ. Nesta representação, a notação $\vdots$ simboliza a possibilidade de podermos concluir ψ a partir de φ.

Notação 92: O conceito de demonstração em DNP será formalizado adiante, através de uma definição indutiva. As demonstrações corresponderão a certas *árvores finitas de fórmulas*, onde uma fórmula φ que ocorra como *folha* poderá estar *cancelada*, o que será notado por $\cancel{\varphi}$ ou por $[\varphi]$. Na apresentação das regras de inferência de DNP, usaremos a notação

$$\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array}$$

para representar uma árvore de fórmulas cuja *raiz* é ψ e cujas eventuais ocorrrências da fórmula φ como folha estão necessariamente canceladas.

Definição 93: As *regras de inferência* do sistema formal DNP são apresentadas de seguida. Cada regra origina uma regra na definição indutiva do *conjunto das derivações* (Definição 95). As regras de inferência recebem derivações (uma ou mais) e produzem uma nova derivação.

Regras de **I***ntrodução* | *Regras de* **E***liminação*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi} \to E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \wedge \psi} \wedge I \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\varphi} \wedge_1 E \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\psi} \wedge_2 E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi} \neg I \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \neg\varphi\end{array}}{\bot} \neg E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}}{\varphi \vee \psi} \vee_1 I \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \vee \psi} \vee_2 I \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \vee \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \sigma\end{array} \quad \begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ \vdots\\ \sigma\end{array}}{\sigma} \vee E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow I \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \leftrightarrow \psi\end{array}}{\psi} \leftrightarrow_1 E \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \leftrightarrow \psi\end{array}}{\varphi} \leftrightarrow_2 E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\neg\varphi}\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi} (RAA) \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi} (\bot)$$

Numa regra de inferência, as fórmulas imediatamente acima do *traço de inferência* serão chamadas as *premissas* da regra e a fórmula abaixo do traço de inferência é chamada a *conclusão* da regra de inferência.

Uma *aplicação* ou *instância* de uma regra de inferência é uma *substituição das fórmulas da regra (meta-variáveis) por fórmulas do CP*. Chamaremos *inferência* a uma aplicação de uma regra de inferência.

Exemplo 94: Vejamos dois exemplos de inferências $\wedge_1 E$:

$$\frac{p_1 \wedge p_2}{p_1}\wedge_1 E \qquad \frac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2}\wedge_1 E \tag{2.1}$$

Estas duas inferências podem ser *combinadas* do seguinte modo:

$$\cfrac{\cfrac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2}\wedge_1 E}{p_1}\wedge_1 E \tag{2.2}$$

Combinando esta construção com uma inferênica $\to I$ podemos obter:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\,(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)\,]}{p_1 \wedge p_2}\wedge_1 E}{p_1}\wedge_1 E}{((p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)) \to p_1}\to I \tag{2.3}$$

As duas inferências em (2.1), assim como as combinações de inferências em (2.2) e (2.3), são exemplos de *derivações* no sistema formal DNP.

Definição 95: O *conjunto* $\mathcal{D}^{DNP}$ *das derivações de* DNP é o menor conjunto X, de árvores finitas de fórmulas, com folhas possivelmente canceladas, tal que:

a) para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, a árvore cujo único nodo é φ pertence a X;

b) X é *fechado* para cada uma das regras de inferência de DNP; por exemplo, X é fechado para as regras $\to E$ e $\to I$ quando as seguintes condições são satisfeitas (respetivamente):

i) $\begin{matrix} D \\ \psi \end{matrix} \in X \implies \cfrac{\begin{matrix} \cancel{\varphi} \\ D \\ \psi \end{matrix}}{\varphi \to \psi}\to I \in X$

(onde: $\begin{matrix} D \\ \psi \end{matrix}$ denota uma árvore de fórmulas cuja raiz é ψ; e $\cfrac{\begin{matrix} \cancel{\varphi} \\ D \\ \psi \end{matrix}}{\varphi \to \psi}\to I$ denota a árvore de fórmulas obtida de D adicionando um novo nodo $\varphi \to \psi$, que passa a ser a nova raiz e tem por único *descendente* a raiz de D, e cancelando todas as eventuais ocorrências de φ como folha);

ii) $\begin{matrix} D_1 \\ \varphi \end{matrix} \in X$ e $\begin{matrix} D_2 \\ \varphi \to \psi \end{matrix} \in X \implies \cfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \varphi \end{matrix} \quad \begin{matrix} D_2 \\ \varphi \to \psi \end{matrix}}{\psi}\to E \in X.$

As derivações de DNP são também chamadas *deduções.* No nosso estudo, privilegiaremos a terminologia derivação. A terminologia *demonstração* será reservada para uma classe especial de derivações (ver Definição 99).

Observação 96: O conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$ das derivações de DNP admite princípios de indução estrutural e de recursão estrutural. Existe também um conceito natural de *subderivação.* Por exemplo, a derivação (2.3) tem as seguintes quatro subderivações:

$$(p_1 \land p_2) \land (p_1 \to \neg p_3)\,, \qquad \dfrac{(p_1 \land p_2) \land (p_1 \to \neg p_3)}{p_1 \land p_2}\land_1 E\,,$$

$$\dfrac{\dfrac{(p_1 \land p_2) \land (p_1 \to \neg p_3)}{p_1 \land p_2}\land_1 E}{p_1}\land_1 E\,, \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\,(p_1 \land p_2) \land (p_1 \to \neg p_3)\,]}{p_1 \land p_2}\land_1 E}{p_1}\land_1 E}{((p_1 \land p_2) \land (p_1 \to \neg p_3)) \to p_1}\to I\,.$$

De facto, estas quatro derivações, lidas como uma sequência, constituem uma sequência de formação da derivação (2.3).

Exemplo 97: Para quaisquer fórmulas do CP φ, ψ e σ, as construções abaixo são exemplos de derivações de DNP.

1)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \land \psi}^{(1)}}{\varphi}\land_1 E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \land \psi}^{(1)}}{\psi}\land_2 E \qquad \psi \to (\varphi \to \sigma)}{\varphi \to \sigma}\to E}{\sigma}\to E}{(\varphi \land \psi) \to \sigma}\to I^{(1)}$$

2)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\varphi}^{(2)} \quad \neg\cancel{\neg\varphi}^{(1)}}{\bot}\neg E}{\varphi}RAA^{(2)}}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\to I^{(1)}$$

3)
$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(1)}}{\psi \to \varphi}\to I^{(2)}}{\varphi \to (\psi \to \varphi)}\to I^{(1)}$$

Os números naturais que aparecem a anotar inferências e fórmulas canceladas estabelecem uma correspondência, unívoca, entre as fórmulas canceladas e as regras que permitem efetuar esses cancelamentos. Por exemplo, em **3)**, a inferência $\to I$ anotada com (1) é utilizada para cancelar a única ocorrência como folha de φ, enquanto que a inferência $\to I$ anotada com (2) não é utilizada para efetuar qualquer cancelamento.

Definição 98: Numa derivação D: a raiz é chamada a *conclusão* de D; as folhas são chamadas as *hipóteses* de D; as folhas canceladas são chamadas as *hipóteses canceladas* de D; as folhas não canceladas são chamadas as *hipóteses não canceladas* de D.

Definição 99: Seja D uma derivação de DNP e φ uma fórmula do Cálculo Proposcional.

Diremos que D é uma *derivação* de φ *a partir de* um conjunto de fórmulas Γ quando φ é a conclusão de D e o conjunto das hipóteses não canceladas de D é um subconjunto de Γ.

Diremos que D é uma *demonstração* de φ quando D é uma derivação de φ a partir do conjunto vazio.

Exemplo 100: Sejam φ, ψ e σ fórmulas.

1. Seja D_1 a seguinte derivação de DNP.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cancel{\varphi}^{(2)} \qquad \varphi \to \psi}{\psi}\to E \qquad \cancel{\psi \to \sigma}^{(1)}}{\sigma}\to E}{\varphi \to \sigma}\to I^{(2)}}{(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)}\to I^{(1)}$$

Então:

(a) o conjunto de hipóteses de D_1 é $\{\varphi, \varphi \to \psi, \psi \to \sigma\}$;

(b) o conjunto de hipóteses não canceladas de D_1 é $\{\varphi \to \psi\}$;

(c) a conclusão de D_1 é $(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$;

(d) D_1 é uma derivação de $(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$ a partir de $\{\varphi \to \psi\}$.

2. Seja D_2 a seguinte derivação de DNP.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cancel{\varphi \wedge \neg\varphi}^{(1)}}{\varphi}\wedge_1 E \qquad \cfrac{\cancel{\varphi \wedge \neg\varphi}^{(1)}}{\neg\varphi}\wedge_2 E}{\bot}\neg E}{\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)}\neg I^{(1)}$$

Então:

(a) o conjunto de hipóteses de D_2 é $\{\varphi \wedge \neg\varphi\}$;

(b) o conjunto de hipóteses não canceladas de D_2 é vazio;

(c) a conclusão de D_2 é $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$;

(d) D_2 é uma demonstração de $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.

Definição 101: Diremos que uma fórmula φ é uma *consequência sintática* de um conjunto de fórmulas Γ ou que φ é *derivável a partir de* Γ (notação: $\Gamma \vdash \varphi$) quando existem derivações em DNP de φ a partir de Γ. Escreveremos $\Gamma \nvdash \varphi$ para denotar que φ não é consequência sintática de Γ.

Definição 102: Uma fórmula φ diz-se um *teorema* de DNP (notação: $\vdash \varphi$) quando existe uma demonstração de φ. Escreveremos $\nvdash \varphi$ para denotar que φ não é teorema de DNP.

Proposição 103: Para toda a fórmula φ, φ é teorema de DNP se e só se $\emptyset \vdash \varphi$.

Dem.: Imediata a partir das definições. □

Exemplo 104: Atendendo ao exemplo anterior:

1. $\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$ (*i.e.*, $(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$ é consequência sintática de $\{\varphi \to \psi\}$).
2. $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ (*i.e.*, $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ é um teorema de DNP).

Definição 105: Um conjunto de fórmulas Γ diz-se *sintaticamente inconsistente* quando $\Gamma \vdash \perp$ e diz-se *sintaticamente consistente* no caso contrário (i.e. quando $\Gamma \nvdash \perp$, ou seja, quando não existem derivações de $\perp$ a partir de Γ).

Exemplo 106: O conjunto $\Gamma = \{p_0, p_0 \to \neg p_0\}$ é sintaticamente inconsistente. Uma derivação de $\perp$ a partir de Γ é:

$$\dfrac{p_0 \qquad \dfrac{p_0 \quad p_0 \to \neg p_0}{\neg p_0} \to E}{\perp} \neg E$$

Proposição 107: Seja Γ um conjunto de fórmulas. As seguintes afirmações são equivalentes:

a) Γ é sintaticamente inconsistente;

b) para alguma fórmula φ, $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$;

c) para toda a fórmula φ, $\Gamma \vdash \varphi$.

Dem.: Por exemplo, é suficiente provar as implicações **a)⇒b)**, **b)⇒c)** e **c)⇒a)**.

a)⇒b): admitindo que Γ é sintaticamente inconsistente, existe uma derivação D de $\perp$ a partir de Γ. Assim, fixando uma (qualquer) fórmula φ, tem-se que

$$D_1 = \dfrac{\begin{matrix} D \\ \perp \end{matrix}}{\varphi} (\perp) \qquad\qquad D_2 = \dfrac{\begin{matrix} D \\ \perp \end{matrix}}{\neg\varphi} (\perp)$$

(as derivações obtidas de D acrescentando, em ambos os casos, uma inferência final ($\perp$), com conclusão φ e $\neg\varphi$, respetivamente) são, respetivamente, derivações de φ a partir de Γ (a conclusão de D_1 é φ e as hipóteses não canceladas de D_1 são as mesmas que em D) e de $\neg\varphi$ a partir de Γ (a conclusão de D_2 é $\neg\varphi$ e as hipóteses não canceladas de D_2 são as mesmas que em D). Por conseguinte, $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Exercício: prove as outras duas implicações. $\square$

Notação 108: Na representação de consequências sintáticas utilizaremos abreviaturas análogas às utilizadas para representação de consequências semânticas. Por exemplo, dadas fórmulas $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ e dados conjuntos de fórmulas Γ e Δ, a notação $\Gamma, \Delta, \varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$ abrevia $\Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$.

Proposição 109: Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas. Então:

a) se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$;

b) se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$;

c) se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Delta, \Gamma \vdash \psi$;

d) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$;

e) se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Delta \vdash \varphi$, então $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

Dem.:

a) Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$. Então, a árvore cuja única fórmula é φ é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$, que é um subconjunto de Γ, pois $\varphi \in \Gamma$. Assim, encontramos uma derivação de φ a partir de Γ, pelo que $\Gamma \vdash \varphi$.

b), **c)** e **e)**: Exercício.

d) Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, *i.e.*, suponhamos que existe uma derivação D de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ. Então,

$$\dfrac{\varphi \quad \begin{array}{c} D \\ \varphi \to \psi \end{array}}{\psi} \to E$$

(a derivação cuja última inferência é $\to E$ e as derivações das premissas são φ e D, respetivamente) é uma derivação de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, pois: i) ψ é a conclusão desta derivação; e ii) o conjunto Δ de hipóteses não canceladas desta derivação é constituído por φ e pelas hipóteses não canceladas de D, que formam um subconjunto de Γ, sendo portanto Δ um subconjunto de $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Suponhamos agora que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, *i.e.*, suponhamos que existe uma derivação D de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Então, a derivação

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}^{(1)}\\ D\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I^{(1)},$$

(a derivação obtida de D acrescentando uma inferência final $\to I$, que cancela todas as ocorrências de φ como hipótese) é uma derivação de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ, pois: i) $\varphi \to \psi$ é a conclusão desta derivação; e ii) o conjunto Δ de hipóteses não canceladas desta derivação é constituído por todas as hipóteses não canceladas de D (um subconjunto de $\Gamma \cup \{\varphi\}$), exceto φ e, portanto, Δ é um subconjunto de Γ.

□

Teorema (*Correção*): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,

$$\text{se } \Gamma \vdash \varphi, \text{ então } \Gamma \models \varphi.$$

Dem.: Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi$, *i.e.*, suponhamos que existe uma derivação D de φ a partir de Γ. Aplicando o lema que se segue, conclui-se de imediato o resultado pretendido.

Lema: Para todo $D \in \mathcal{D}^{DNP}$, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$.

Dem. do Lema: Por indução estrutural em derivações.

a) Suponhamos que D é uma derivação, de φ a partir de Γ, com um único nodo. Então, o conjunto de hipóteses não canceladas de D é $\{\varphi\}$ e, assim, $\varphi \in \Gamma$. Donde, pela Proposição 86(a), $\Gamma \models \varphi$.

b) Caso D seja uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ D_1\\ \sigma\end{array}}{\psi \to \sigma} \to I,$$

então: $\varphi = \psi \to \sigma$ e D_1 é uma derivação de σ a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$. Assim, aplicando a hipótese de indução relativa à subderivação D_1, $\Gamma, \psi \models \sigma$. Donde, pela Proposição 86(d), $\Gamma \models \psi \to \sigma$.

c) Caso D seja uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 & D_2 \\ \sigma & \sigma \to \psi \end{matrix}}{\psi} \to E,$$

então: $\varphi = \psi$; D_1 é uma derivação de σ a partir de Γ; e D_2 é uma derivação de $\sigma \to \psi$ a partir de Γ. Assim, aplicando as hipóteses de indução relativas às subderivações D_1 e D_2, segue $\Gamma \models \sigma$ e $\Gamma \models \sigma \to \psi$, respetivamente. Daqui, pela Proposição 86(e), conclui-se $\Gamma \models \psi$.

d) Os restantes casos, correspondentes às outras formas possíveis de D, são deixados como exercício.

□

Observação 110: O Teorema da Correção constitui uma ferramenta para provar a não derivabilidade de fórmulas a partir de conjuntos de fórmulas. De facto, do Teorema da Correção segue que

$$\Gamma \not\models \varphi \Longrightarrow \Gamma \nvdash \varphi,$$

o que significa que, para mostrar que não existem derivações em DNP de uma fórmula φ a partir de um conjunto de fórmulas Γ, basta mostar que φ não é consequência semântica de Γ.

Exemplo 111: Seja $\Gamma = \{p_1 \vee p_2, p_1 \to p_0\}$.

1. Em DNP não existem derivações de $p_0 \vee p_1$ a partir de Γ. Se existisse uma tal derivação, pelo Teorema da Correção, teríamos $\Gamma \models p_0 \vee p_1$, mas esta consequência semântica não é válida (tome-se, por exemplo, a valoração que atribui 1 a p_2 e 0 às restantes variáveis proposicionais).

2. De forma análoga, pode mostrar-se que não existem derivações de $\perp$ a partir de Γ (exercício) e, então, concluir que Γ é sintaticamente consistente.

Definição 112: Um conjunto de fórmulas Γ diz-se *maximalmente consistente* quando:

i) Γ é sintaticamente consistente; e

ii) para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \in \Gamma$ ou $\neg\varphi \in \Gamma$.

Proposição 113: Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Se Γ é maximalmente consistente e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\varphi \in \Gamma$.

Dem.: Tendo em vista uma contradição, suponhamos que $\varphi \notin \Gamma$. Logo, por Γ ser maximalmente consistente, $\neg\varphi \in \Gamma$. Por hipótese, existe uma derivação D de φ a partir de Γ. Assim, podemos construir a seguinte derivação de $\perp$ a partir de Γ

$$\dfrac{\begin{matrix} D \\ \varphi \end{matrix} \quad \neg\varphi}{\perp} \neg E.$$

e concluir que Γ é sintaticamente inconsistente, uma contradição com a hipótese de Γ ser maximalmente consistente. Logo, por redução ao absurdo, $\varphi \in \Gamma$. □

Proposição 114: Se Γ é um conjunto de fórmulas sintaticamente consistente, então existe um conjunto de fórmulas Γ^* tal que: **i)** $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ e **ii)** Γ^* é maximalmente consistente.

Dem.: Prova-se que $\mathcal{F}^{CP}$ é um conjunto numerável. Seja $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n, ...$ uma enumeração de $\mathcal{F}^{CP}$. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, Γ_n como:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \Gamma; \\ \Gamma_{n+1} &= \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{se } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ é sintaticamente consistente} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{se } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ é sintaticamente inconsistente} \end{cases}. \end{aligned}$$

Demonstra-se que $\Gamma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Gamma_n$ satisfaz **i)** e **ii)**, com o auxílio do seguinte lema:

Lema: Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, Γ_n é sintaticamente consistente.

Este lema demonstra-se por indução em $\mathbb{N}_0$. □

Proposição 115: Se Γ é um conjunto de fórmulas sintaticamente consistente, então Γ é semanticamente consistente.

Dem.: Suponhamos que Γ é um conjunto sintaticamente consistente. Então, pela proposição anterior existe um conjunto Γ^*, maximalmente consistente, que contém Γ. Seja v a única valoração tal que,

$$\text{para todo } p \in \mathcal{V}^{CP},\ v(p) = \begin{cases} 1 & se\ p \in \Gamma^* \\ 0 & se\ p \notin \Gamma^* \end{cases}.$$

Demonstra-se que:

Lema: $v(\varphi) = 1$ sse $\varphi \in \Gamma^*$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Este lema é demonstrado por indução estrutural em fórmulas do Cálculo Proposicional e evidencia a necessidade das várias regras de inferência do sistema DNP. Deste lema, uma vez que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ e que $v(\varphi) = 1$, para todo $\varphi \in \Gamma^*$, concluimos que v satisfaz Γ e, assim, Γ é semanticamente consistente.

$\square$

Teorema 116 (Equivalência entre consistência sintática e semântica): Seja $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Então, Γ é sintaticamente consistente sse Γ é semanticamente consistente.

Dem.:

$\Rightarrow$) Proposição 115.

$\Leftarrow$) Tendo em vista um absurdo, suponhamos que Γ é sintaticamente inconsistente, *i.e.*, $\Gamma \vdash \perp$. Então, pelo Teorema da Correção,

$$\Gamma \models \perp . \quad (*)$$

Como (por hipótese) Γ é semanticamente consistente, existe uma valoração v que satisfaz Γ. Daqui, por $(*)$, segue $v(\perp) = 1$, o que contradiz a definição de valoração. Logo, por redução ao absurdo, Γ é sintaticamente consistente.

$\square$

Observação 117: No resto desta secção, uma vez que consistência semântica de um conjunto de fórmulas é equivalente à sua consistência sintática, simplificaremos a terminologia e referir-nos-emos apenas a *consistência de conjuntos de fórmulas.*

Teorema 118 (Completude): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,

$$\text{se } \Gamma \models \varphi, \text{ então } \Gamma \vdash \varphi.$$

Dem.: Provaremos o contrarrecíproco. Suponhamos $\Gamma \nvdash \varphi$. Então, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é sintaticamente consistente, de outra forma, existiria uma derivação D de $\perp$ a partir de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ e, assim,

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\neg\varphi}^{(1)} \\ D \\ \perp\end{array}}{\varphi}\, RAA^{(1)}$$

(onde todas as ocorrências de $\neg\varphi$ como hipótese de D ficam canceladas com a aplicação de RAA) seria uma derivação de φ a partir de Γ, contrariando a suposição $\Gamma \nvdash \varphi$. Sendo $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ sintaticamente consistente, segue da Proposição 115 que existe uma valoração v tal que $v \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Assim, $v \models \Gamma$ e $v(\varphi) = 0$, donde $\Gamma \not\models \varphi$. $\square$

Teorema 119 (Adequação): Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Então, $\Gamma \vdash \varphi$ sse $\Gamma \models \varphi$.

Dem.: Consequência imediata dos Teoremas da Correção e da Completude. □

Corolário 120: Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. Então, φ é um teorema de DNP sse φ é uma tautologia.
Dem.: Exercício. □

Teorema 121 (Compacidade): Seja $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Então, Γ é consistente sse todo o subconjunto finito de Γ é consistente.

Dem.:

$\Rightarrow$) Imediata (recorde a Proposição 79).

$\Leftarrow$) Tendo em vista um absurdo, suponhamos que Γ é sintaticamente inconsistente. Então, existe uma derivação D de $\perp$ a partir de Γ. Seja Γ' o conjunto das hipóteses não canceladas de D, que, por definição de derivação, é finito. Assim, D é também uma derivação de $\perp$ a partir de Γ', ou seja, Γ' é sintaticamente inconsistente, uma contradição com a hipótese, uma vez que Γ' seria um subconjunto de Γ finito e inconsistente. Logo, por redução ao absurdo, Γ é sintaticamente consistente.

□

Capítulo 3

Cálculo de Predicados de Primeira Ordem da Lógica Clássica

Observação 122: O *Cálculo de Predicados de Primeira Ordem da Lógica Clássica* (adiante abreviado por *Cálculo de Predicados*) é também conhecido na literatura por *Lógica de Primeira Ordem Clássica* ou, simplesmente, por *Lógica de Primeira Ordem*.

3.1 Sintaxe

Observação 123: Ao contrário do Cálculo Proposicional, no Cálculo de Predicados existem duas classes sintáticas: a classe dos *termos* e a classe das *fórmulas*. Os termos serão usados para denotar *objetos* do domínio de discurso em questão (por exemplo, *números naturais*, *conjuntos*, etc.) e as fórmulas corresponderão a *afirmações* relativas aos objetos (por exemplo, "dois é um número par" ou "o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto").

O Cálculo de Predicados será *parametrizado* por um *tipo de linguagem*, que fixará quais os símbolos que poderão ser usados para construir termos (que designaremos por *símbolos de função*) ou para denotar *relações elementares* entre os objetos (que designaremos por *símbolos de relação*). Este conjunto de símbolos dependerá, naturalmente, do problema em estudo.

Por exemplo, se estivermos a considerar a *Aritmética* (a teoria dos números naturais), entre outros, será útil ter símbolos que denotem o número 0, a operação de adição e a relação de igualdade. Já no caso de estarmos a considerar teoria de conjuntos, será útil, por exemplo, ter símbolos para denotar o conjunto vazio, as operações de reunião de conjuntos e de conjunto potência, e as relações de pertença, inclusão e igualdade de conjuntos.

Definição 124: Um *tipo de linguagem* é um terno $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$ tal que:

a) $\mathcal{F}$ e $\mathcal{R}$ são conjuntos disjuntos;

b) $\mathcal{N}$ é uma função de $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ em $\mathbb{N}_0$.

Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados *símbolos de função* e os elementos de $\mathcal{R}$ são chamados *símbolos de relação* ou *símbolos de predicado.*

A função $\mathcal{N}$ é chamada *função aridade*, chamando-se ao número natural $n = \mathcal{N}(s)$ (para cada $s \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$) a *aridade* de s e dizendo-se que s é um símbolo *n-ário.* Intuitivamente, a aridade de um símbolo corresponde ao seu *número de argumentos.*

Os símbolos de função de aridade 0 são chamados *constantes.* Neste estudo, assumiremos que os símbolos de relação nunca têm aridade 0.

Os símbolos de aridade 1 dir-se-ão também símbolos *unários*, os de aridade 2 *binários*, etc.

Exemplo 125: O terno $L_{Arit} = (\{0, s, +, \times\}, \{=, <\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(s) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$, $\mathcal{N}(\times) = 2$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(<) = 2$, é um tipo de linguagem. Chamaremos a L_{Arit} o *tipo de linguagem para a Aritmética.*

Exemplo 126: O terno $L_{grupo} = (\{\cdot, 1, ^{-1}\}, \{=\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(\cdot) = 2$, $\mathcal{N}(1) = 0$, $\mathcal{N}(^{-1}) = 1$ e $\mathcal{N}(=) = 2$, é uma linguagem. Chamaremos a L_{grupo} o *tipo de linguagem para grupos.*

Exemplo 127: O terno $L_{cpo} = (\{\}, \{=, \leq\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(\leq) = 2$, é uma linguagem. Chamaremos a L_{cpo} o *tipo linguagem para conjuntos parcialmente ordenados.*

Notação 128: Habitualmente, usaremos a letra L (possivelmente indexada) para denotar tipos de linguagens.

Caso nada seja dito em contrário, durante este capítulo L denotará um tipo de linguagem $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$, sendo o respetivo conjunto de constantes denotado por $\mathcal{C}$.

Definição 129: O *alfabeto $\mathcal{A}_L$ induzido pelo tipo de linguagem L* é o conjunto formado pelos seguintes símbolos:

a) $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ (os *conetivos proposicionais*);

b) $\exists$ e $\forall$, chamados *quantificador existencial* e *quantificador universal*, respetivamente;

c) $x_0, x_1, ..., x_n, ...$, chamados *variáveis (de primeira ordem)*, formando um conjunto numerável, denotado por $\mathcal{V}$;

d) "(", ")" e ",", chamados *símbolos auxiliares*;

e) os símbolos de função e os símbolos de relação de L (que se assume serem distintos de todos os símbolos anteriores).

Exemplo 130: A sequência de 8 símbolos $\exists x_0 \neg(x_0 = 0)$ é uma palavra sobre o alfabeto $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$, mas a sequência de 8 símbolos $\exists x_0 \neg(x_0 = 1)$ não é uma palavra sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ (1 não é uma das letras do alfabeto $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$).

Definição 131: O conjunto $\mathcal{T}_L$ é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ que satisfaz as seguintes condições:

a) para todo $x \in \mathcal{V}$, $x \in \mathcal{T}_L$;

b) para toda a constante c de L, $c \in \mathcal{T}_L$;

c) para todo o símbolo de função f de L, de aridade $n \geq 1$,

$$t_1 \in \mathcal{T}_L \text{ e ... e } t_n \in \mathcal{T}_L \implies f(t_1, ..., t_n) \in \mathcal{T}_L, \text{ para todo } t_1, ..., t_n \in (\mathcal{A}_L)^*.$$

Aos elementos de $\mathcal{T}_L$ chamaremos *termos de tipo* L ou, abreviadamente, L-*termos*.

Exemplo 132:

1. As seguintes seis palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ são termos de tipo L_{Arit}:

   $$x_1,\ x_2,\ 0,\ s(0),\ \times(x_1, x_2),\ +(\times(x_1, x_2), s(0)).$$

   Lida como uma sequência de palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$, esta sequência constitui uma sequência de formação de $+(\times(x_1, x_2), s(0))$.

2. As palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ $= (0, x_1)$ e $< (0, x_1)$ (ambas de comprimento 6) não são L_{Arit}-termos. Apesar de $=$ e $<$ serem símbolos de aridade 2 e de 0 e x_1 serem dois L_{Arit}-termos, $=$ e $<$ são símbolos de relação e não símbolos de função, como exigido na condição **c)** da definição anterior. Estas duas palavras são exemplos do que adiante designaremos por *fórmulas atómicas*.

3. As seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{grupo}}$ são termos de tipo L_{grupo} (e lidas em sequência constituem uma sequência de formação da última palavra):

   $$x_1,\ x_2,\ 1,\ ^{-1}(x_1),\ \cdot(x_2, 1),\ \cdot(\cdot(x_2, 1),^{-1}(x_1)).$$

4. O conjunto dos termos de tipo L_{cpo} é o conjunto das variáveis $\mathcal{V}$.

Exemplo 133: Seja L_0 o tipo de linguagem $(\{c, f_1, f_2\}, \{R_1, R_2\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f_1) = 1$, $\mathcal{N}(f_2) = 2$, $\mathcal{N}(R_1) = 1$ e $\mathcal{N}(R_2) = 2$. As seguintes quatro palavras sobre $\mathcal{A}_{L_0}$ são L_0-termos (e constituem uma sequência de formação do último termo):

$$c\,,\ x_1\,,\ f_2(c, x_1)\,,\ f_1(f_2(c, x_1))\,.$$

Notação 134: Quando f é um símbolo de função binário e $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$, utilizamos a notação $t_1 f t_2$, possivelmente entre parênteses, para representar o L-termo $f(t_1, t_2)$. Por exemplo, a notação $(x_1 \times x_2) + s(0)$ representará o L_{Arit}-termo $+(\times(x_1, x_2), s(0))$.

No contexto do tipo de linguagem L_{grupo}, termos da forma $^{-1}(t)$ serão, normalmente, denotados por t^{-1} ou $(t)^{-1}$. Por exemplo, $x_1 \cdot x_1^{-1}$ denotará o L_{grupo}-termo $\cdot(x_1,^{-1}(x_1))$.

Teorema 135 (Indução Estrutural em L-Termos): Seja $P(t)$ uma propriedade que depende de um L-termo t. Se:

a) para todo $x \in \mathcal{V}$, $P(x)$;

b) para todo $c \in \mathcal{C}$, $P(c)$;

c) para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,

$$P(t_1) \text{ e ... e } P(t_n) \implies P(f(t_1, ..., t_n));$$

então para todo $t \in \mathcal{T}_L$, $P(t)$.

Dem.: Exercício. □

Observação 136: A definição indutiva do conjunto dos L-termos é determinista e tem associado um *princípio de recursão estrutural*, para definir funções cujo domínio é o conjunto dos L-termos. Este princípio é usado nas três definições que se seguem.

Definição 137: O *conjunto das variáveis* que ocorrem num L-termo t é notado por $VAR(t)$ e é definido, por recursão estrutural em L-termos, do seguinte modo:

a) $VAR(x) = \{x\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$;

b) $VAR(c) = \emptyset$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $VAR(f(t_1, ..., t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} VAR(t_i)$, para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 138: O conjunto das variáveis que ocorrem no L_{Arit}-termo $x_2 + s(x_1)$ é:

$$VAR(x_2 + s(x_1)) = VAR(x_2) \cup VAR(s(x_1)) = \{x_2\} \cup VAR(x_1) = \{x_2, x_1\}.$$

Definição 139: O *conjunto dos subtermos* de um L-termo t é notado por $subt(t)$ e é definido, por recursão estrutural em L-termos, do seguinte modo:

a) $subt(x) = \{x\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$;

b) $subt(c) = \{c\}$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $subt(f(t_1, ..., t_n)) = \{f(t_1, ..., t_n)\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} subt(t_i)$, para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 140: O conjunto dos subtermos do L_{Arit}-termo $(x_2 + s(x_1)) \times 0$ é:

$$\{x_2, x_1, s(x_1), x_2 + s(x_1), 0, (x_2 + s(x_1)) \times 0\}$$

Definição 141: A operação de *substituição* de uma variável x por um L-termo t num L-termo t' é notada por $t'[t/x]$ e é definida por recursão estrutural (em t') do seguinte modo:

a) $y[t/x] = \begin{cases} t, & se \;\; y = x \\ \\ y, & se \;\; y \neq x \end{cases}$, para todo $y \in \mathcal{V}$;

b) $c[t/x] = c$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $f(t_1, ..., t_n)[t/x] = f(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$, para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 142:

1. O L_{Arit}-termo que resulta da substituição da variável x_1 pelo L_{Arit}-termo $s(0)$ no L_{Arit}-termo $x_2 + s(x_1)$ é:
$$\begin{aligned} & (x_2 + s(x_1))[s(0)/x_1] \\ = \; & x_2[s(0)/x_1] + s(x_1)[s(0)/x_1] \\ = \; & x_2 + s(x_1[s(0)/x_1]) \\ = \; & x_2 + s(s(0)) \end{aligned}$$

2. $(x_2 + s(x_1))[s(0)/x_0] = x_2 + s(x_1)$ (observe que $x_0 \notin VAR(x_2 + s(x_1))$).

Proposição 143: Sejam x uma variável e t_1 e t_2 L-termos. Se $x \notin VAR(t_1)$, então $t_1[t_2/x] = t_1$.

Dem.: Por indução estrutural em t_1. (Exercício.) □

Definição 144: Uma palavra sobre o alfabeto induzido por L da forma $R(t_1, ..., t_n)$, onde R é um símbolo de relação n-ário e $t_1, ..., t_n$ são L-termos, é chamada uma *fórmula atómica de tipo* L ou, abreviadamente, uma L-*fórmula atómica*. O conjunto das L-fórmulas atómicas é notado por At_L.

Exemplo 145:

1. As três palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ que se seguem são fórmulas atómicas de tipo L_{Arit}:

$$= (0, x_1), < (0, x_1), = (+(0, x_1), \times(s(0), x_1)).$$

2. Já a palavra sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ $\times(0, x_1)$ não é uma L_{Arit}-fórmula atómica (note-se que $\times$ é um símbolo de função e não um símbolo de relação; de facto, esta palavra é um L_{Arit}-termo).

3. As seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{grupo}}$ são fórmulas atómicas de tipo L_{grupo}:

$$= (x_0, x_1) \text{ e } = (x_0 \cdot x_0^{-1}, 1).$$

4. As seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{cpo}}$ são fórmulas atómicas de tipo L_{cpo}:

$$= (x_0, x_1) \text{ e } \leq (x_0, x_0).$$

Notação 146: Quando R é um símbolo de relação binário e $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$, utilizamos a notação t_1Rt_2, possivelmente entre parênteses, para representar o L-fórmula atómica $R(t_1, t_2)$. Por exemplo, a notação $x_0 < s(0)$ representará a L-fórmula atómica $< (x_0, s(0))$.

Definição 147: O conjunto $\mathcal{F}_L$ é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ que satisfaz as seguintes condições:

a) $\varphi \in \mathcal{F}_L$, para toda a L-fórmula atómica φ;

b) $\perp \in \mathcal{F}_L$;

c) $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (\neg\varphi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $\varphi \in (\mathcal{A}_L)^*$;

d) $\varphi \in \mathcal{F}_L$ e $\psi \in \mathcal{F}_L \implies (\varphi\Box\psi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in (\mathcal{A}_L)^*$;

e) $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (Qx\,\varphi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$ e para todo $\varphi \in (\mathcal{A}_L)^*$.

Aos elementos de $\mathcal{F}_L$ chamaremos *fórmulas de tipo* L ou, abreviadamente, L-*fórmulas*.

Exemplo 148:

1. As seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ são fórmulas de tipo L_{Arit} (fazendo uso das simplificações anteriormente mencionadas na representação de fórmulas atómicas):

$$\begin{array}{l}(x_0 < s(0)),\\ (\neg(x_0 < s(0))),\\ x_0 = x_1,\\ ((\neg(x_0 < s(0))) \rightarrow x_0 = x_1),\\ (\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \rightarrow x_0 = x_1)),\\ (\forall x_0(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \rightarrow x_0 = x_1))).\end{array}$$

   Lida como uma sequência de palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$, esta sequência constitui uma sequência de formação de $(\forall x_0(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \rightarrow x_0 = x_1)))$.

2. $(\forall x_0(x_0 \leq x_0))$ é uma fórmula de tipo L_{cpo}.

3. $(\exists x_0(\forall x_1(x_0 \cdot x_1 = 1)))$ é uma fórmula de tipo L_{grupo}.

Exemplo 149: Recordemos o tipo de linguagem L_0 do Exemplo 133: $L_0 = (\{c, f_1, f_2\}, \{R_1, R_2\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f_1) = 1$, $\mathcal{N}(f_2) = 2$, $\mathcal{N}(R_1) = 1$ e $\mathcal{N}(R_2) = 2$.

As seguintes quatro palavras sobre $\mathcal{A}_{L_0}$ são L_0-fórmulas (e constituem uma sequência de formação da última fórmula):

$$\begin{array}{l}R_1(x_1),\\ R_2(x_1, f_2(c, x_1)),\\ (R_1(x_1) \rightarrow R_2(x_1, f_2(c, x_1))),\\ (\forall x_1(R_1(x_1) \rightarrow R_2(x_1, f_2(c, x_1)))).\end{array}$$

Notação 150: Os parênteses extremos e os parênteses à volta de negações ou de quantificadores são geralmente omitidos. Por exemplo, a L_{Arit}-fórmula

$$(\forall x_0(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \rightarrow x_0 = x_1)))$$

pode ser abreviada por

$$\forall x_0 \exists x_1(\neg(x_0 < s(0)) \rightarrow x_0 = x_1).$$

Teorema 151 (Indução Estrutural em L-Fórmulas): Seja $P(\varphi)$ uma propriedade que depende de uma L-fórmula φ. Se:

a) $P(\psi)$, para toda a L-fórmula atómica ψ;

b) $P(\perp)$;

c) $P(\psi) \implies P(\neg\psi)$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

d) $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \Box \psi_2)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) $P(\psi) \implies P(Qx\,\psi)$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}, x \in \mathcal{V}, \psi \in \mathcal{F}_L$;

então $P(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}_L$.

Dem.: Exercício $\square$

Observação 152: A definição indutiva do conjunto das L-fórmulas é determinista e tem associado um *princípio de recursão estrutural*, para definir funções cujo domínio é o conjunto das L-fórmulas. Este princípio é usado na definição seguinte.

Definição 153: O conjunto das *subfórmulas* de uma L-fórmula φ é notado por $subf(\varphi)$ e é definido, por recursão estrutural, do seguinte modo:

a) $subf(\psi) = \{\psi\}$, para todo $\psi \in At_L$;

b) $subf(\perp) = \{\perp\}$;

c) $subf(\neg\psi) = subf(\psi) \cup \{\neg\psi\}$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

d) $subf(\psi_1 \Box \psi_2) = subf(\psi_1) \cup subf(\psi_2) \cup \{\psi_1 \Box \psi_2\}$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) $subf(Qx\,\psi) = subf(\psi) \cup \{Qx\,\psi\}$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$, $\psi \in \mathcal{F}_L$.

Definição 154: Seja φ uma L-fórmula e seja $Qx\,\psi$ uma subfórmula de φ, onde $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$ e $\psi \in \mathcal{F}_L$. O *alcance* desta ocorrência do quantificador Qx em φ é a L-fórmula ψ.

Exemplo 155: Na L_{Arit}-fórmula

$$\forall x_0(\exists x_1(x_0 = s(x_1)) \rightarrow (\neg(x_0 = 0) \wedge \exists x_1(x_1 < x_0))) :$$

1. o alcance da única ocorrência de $\forall x_0$ é

$$\exists x_1(x_0 = s(x_1)) \rightarrow (\neg(x_0 = 0) \wedge \exists x_1(x_1 < x_0));$$

2. o alcance da primeira ocorrência do quantificador $\exists x_1$ é $x_0 = s(x_1)$;

3. o alcance da segunda ocorrência do quantificador $\exists x_1$ é $x_1 < x_0$.

Definição 156: Numa L-fórmula φ, uma ocorrência (em subfórmulas atómicas de φ) de uma variável x diz-se *livre* quando x não está no alcance de nenhuma ocorrência de um quantificador Qx (com $Q \in \{\exists, \forall\}$); caso contrário, essa ocorrência de x diz-se *ligada.*

Escrevemos $LIV(\varphi)$ para denotar o conjunto das variáveis que têm ocorrências livres em φ e $LIG(\varphi)$ para denotar o conjunto das variáveis que têm ocorrências ligadas em φ.

Exemplo 157: Seja φ a L_{Arit}-fórmula

$$\exists x_1(\neg(\underbrace{x_0}_{(a)} < s(0)) \to \forall x_0(\underbrace{x_0}_{(b)} = \underbrace{x_1}_{(a)})).$$

A ocorrência (a) de x_0 é livre, enquanto que a ocorrência (b) de x_0 é ligada. A ocorrência (a) de x_1 é ligada. Assim, $LIV(\varphi) = \{x_0\}$ e $LIG(\varphi) = \{x_0, x_1\}$.

Observação 158: Note-se que $LIV(\varphi) \cap LIG(\varphi)$ não é necessariamente o conjunto vazio (veja-se o exemplo anterior).

Definição 159: A operação de *substituição das ocorrências livres* de uma variável x por um L-termo t numa L-fórmula φ é notada por $\varphi[t/x]$ e é definida, por recursão estrutural em L-fórmulas, do seguinte modo:

a) $R(t_1, ..., t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$ para todo $R \in \mathcal{R}$, de aridade n, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$;

b) $\perp [t/x] = \perp$;

c) $(\neg\psi)[t/x] = \neg\psi[t/x]$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

d) $(\psi_1 \Box \psi_2)[t/x] = \psi_1[t/x] \Box \psi_2[t/x]$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) $(Qy\,\psi)[t/x] = \begin{cases} Qy\,\psi & \text{se } y = x \\ Qy\,\psi[t/x] & \text{se } y \neq x \end{cases}$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$, $\psi \in \mathcal{F}_L$.

Exemplo 160:

1. $(x_0 < s(x_1))[0/x_0]$
$= x_0[0/x_0] < s(x_1)[0/x_0]$ (def. anterior **a)**)
$= 0 < s(x_1)$ (substituição em L-termos)

2. $(\exists x_0(x_0 < s(x_1)))[0/x_0]$
$= \exists x_0(x_0 < s(x_1))$ (def. anterior **e)**, 1º caso)

3. $(\exists x_0(x_0 < s(x_1)))[0/x_1]$
$= \exists x_0(x_0 < s(x_1))[0/x_1]$ (def. anterior **e)**, 2º caso)
$= \exists x_0(x_0 < s(0))$ (def. anterior **a)** e substituição em L-termos)

4. $(\exists x_0(x_0 < s(x_1)) \wedge (0 < x_0))[0/x_0]$
$= \exists x_0(x_0 < s(x_1)) \wedge 0 < 0$ (porquê?)

Exemplo 161: Seja φ a L_{Arit}-fórmula $\exists x_1(x_0 < x_1)$. Então,

$$\varphi[s(x_1)/x_0] = \exists x_1(s(x_1) < x_1).$$

Observe que em φ a ocorrência livre de x_0 "não depende" da quantificação $\exists x_1$, mas, após a substituição, o termo $s(x_1)$, que substituiu x_0, "depende" da quantificação $\exists x_1$.[1] Na definição seguinte, identificaremos as condições que evitam este fenómeno indesejado de *captura de variáveis* em substituições.

Definição 162: Sejam x uma variável, t um L-termo e φ uma L-fórmula. Diz-se que *x é substituível (sem captura de variáveis) por t em φ* ou que *t é livre para x em φ* quando para todas as ocorrências livres de x em φ no alcance de algum quantificador Qy, $y \notin VAR(t)$.

Observação 163: Se x é uma variável que não tem ocorrências livres numa L-formula φ ou t é um L-termo onde não ocorrem variáveis, x é substituível por t em φ.

Exemplo 164: Seja $\varphi = \forall x_1(x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2)$. Então:

a) x_0 é substituível por $x_1+s(x_2)$ em φ, pois x_0 não tem ocorrências livres na fórmula;

[1]Note que tomando $\mathbb{N}_0$ como domínio de interpretação das variáveis e interpretando s como a função *sucessor* em $\mathbb{N}_0$ e $<$ como a relação de igualdade em $\mathbb{N}_0$, φ é verdadeira, enquanto $\varphi[s(x_1)/x_0]$ é falsa. Esta noção de interpretação de fórmulas será tornada precisa na secção seguinte.

b) x_1 é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em φ, pois a única ocorrência livre de x_1 não está no alcance de qualquer quantificador;

c) x_2 não é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em φ, pois x_2 tem uma ocorrência livre no alcance do quantificador $\forall x_1$ e $x_1 \in VAR(x_1 + s(x_2))$;

d) x_2 é substituível por $x_0 + s(x_2)$ em φ, pois, embora exista uma ocorrência livre de x_2 no alcance do quantificador $\forall x_1$, $x_1 \notin VAR(x_0 + s(x_2))$.

Observação 165: Note-se que, mesmo quando uma variável x não é substituível por um L-termo t numa L-fórmula φ, a operação de substituição de x por t em φ encontra-se definida.

Por exemplo, x_2 não é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em

$$\varphi = \forall x_1(x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2));$$

a L_{Arit}-fórmula resultante da substituição de x_2 por $x_1+s(x_2)$ em φ encontra-se definida e é igual a

$$\forall x_1(x_1 < x_1 + s(x_2)) \vee \neg(x_1 < x_1 + s(x_2))),$$

no entanto, ao efetuar a substituição, acontece o fenómeno da captura de variáveis.

Proposição 166: Sejam φ uma L-fórmula, x uma variável e t um L-termo. Se $x \notin LIV(\varphi)$, então $\varphi[t/x] = \varphi$.

Dem.: Por indução estrutural em L-fórmulas. A prova está organizada por casos, consoante a *forma* de φ.

a) Caso $\varphi =\perp$. Então, $\varphi[t/x] =\perp [t/x] \overset{\textbf{(1)}}{=} \perp= \varphi$.

Justificações	
(1)	Definição de substituição.

b) Caso $\varphi = R(t_1, ..., t_n)$, com $R \in \mathcal{R}$, n-ário, e $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$. Então, $x \notin VAR(t_i)$, para todo $1 \leq i \leq n$, de outra forma teríamos $x \in LIV(\varphi)$, e contrariaríamos a hipótese. Assim, aplicando a Proposição 143, $t_i[t/x] = t_i$, para todo $1 \leq i \leq n$. Logo:

$$\varphi[t/x] = R(t_1, ..., t_n)[t/x] \overset{\textbf{(1)}}{=} R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x]) \overset{\textbf{(2)}}{=} R(t_1, ..., t_n) = \varphi.$$

Justificações	
(1)	Definição de substituição.
(2)	$t_i[t/x] = t_i$, para todo $1 \leq i \leq n$.

c) Caso $\varphi = Qy\,\varphi_1$, com $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$ e $\varphi_1 \in \mathcal{F}_L$.

c.1) Caso $x = y$. Então:

$$\varphi[t/x] = (Qy\,\varphi_1)[t/x] \overset{(1)}{=} Qy\,\varphi_1 = \varphi.$$

Justificações	
(1)	Definição de substituição.

c.2) Caso $x \neq y$. Então:

$$\varphi[t/x] = (Qy\,\varphi_1)[t/x] \overset{\textbf{(1)}}{=} Qy\,\varphi_1[t/x] \overset{\textbf{(2)}}{=} Qy\,\varphi_1 = \varphi.$$

Justificações	
(1)	Definição de substituição.
(2)	Por hipótese, $x \notin LIV(\varphi)$. Como $LIV(\varphi_1) \subseteq LIV(\varphi) \cup \{y\}$ e $x \neq y$, segue que $x \notin LIV(\varphi_1)$. Logo, por H.I., $\varphi_1[t/x] = \varphi_1$.

d) Os restantes casos são deixados como exercício.

$\square$

Definição 167: Uma L-fórmula φ diz-se uma *sentença de tipo* L ou uma *fórmula fechada de tipo L* (abreviadamente, uma L-*sentença* ou uma L-*fórmula fechada*), quando $LIV(\varphi) = \emptyset$.

Proposição 168: Seja φ uma L-sentença. Então, para toda a variável x e para todo o L-termo t,

1. x é substituível por t em φ;
2. $\varphi[t/x] = \varphi$.

Dem.: Exercício. $\square$

3.2 Semântica

Observação 169: As fórmulas do Cálculo de Predicados são construídas a partir das fórmulas atómicas (símbolos de relação "aplicados" a termos) e, por esta razão, as fórmulas atómicas desempenham papel semelhante ao das variáveis proposicionais no Cálculo Proposicional. Contudo, ao passo que no Cálculo Proposicional podemos atribuir "diretamente" um valor lógico a uma variável proposicional, a atribuição de valores lógicos às fórmulas atómicas é mais complexa.

Para atribuirmos valores lógicos a fórmulas atómicas, em particular, será necessário fixar previamente a *interpretação dos termos.* Tal requer que indiquemos qual o *universo de objetos* (*domínio de discurso*) pretendido para a denotação dos termos (por exemplo, números naturais, conjuntos, etc.), bem como a interpretação pretendida quer para os símbolos de função do tipo de linguagem em questão (por exemplo, para indicar que tomando $\mathbb{N}_0$ por universo, o símbolo de função binário $+$ denotará a *operação* de adição) quer para as variáveis de primeira ordem. Para a interpretação das fórmulas atómicas, será ainda necessário fixar a interpretação dos símbolos de relação como *relações* entre objetos do domínio de discurso.

A indicação de qual o domínio de discurso pretendido e de quais as interpretações que deverão ser dadas aos diversos símbolos será efetuada através daquilo que designaremos por *estrutura para um tipo de linguagem.* A interpretação de variáveis de primeira ordem será feita no contexto de um domínio de discurso, através daquilo a que chamaremos *atribuições numa estrutura.* Um par (*estrutura, atribuição*) permitirá fixar o valor lógico de qualquer fórmula e, portanto, pode ser pensado como uma *valoração*, uma vez que estes pares desempenharão papel idêntico ao das valorações do Cálculo Proposicional.

Definição 170: Seja L um tipo de linguagem. Uma *estrutura de tipo* L, que abreviadamente designaremos por L-*estrutura*, é um par $(D, \overline{})$ tal que:

a) D é um conjunto não vazio, chamado o *domínio da estrutura*;

b) $\overline{}$ é uma função, chamada a *função interpretação da estrutura*, e é tal que:

- a cada constante c de L faz corresponder um elemento de D, que será notado por $\overline{c}$;
- a cada símbolo de função f de L, de aridade $n \geq 1$, faz corresponder uma função de tipo $D^n \longrightarrow D$, que será notada por $\overline{f}$;
- a cada símbolo de relação R de L, de aridade n, faz corresponder uma relação n-ária em D (i.e. um subconjunto de D^n), que será notada por $\overline{R}$.

Para cada símbolo de função ou relação s de L, $\overline{s}$ é chamada a *interpretação* de s na estrutura.

Se L incluir o símbolo $=$ como símbolo de relação binário, $E = (D, \overline{})$ diz-se uma *estrutura normal de tipo* L quando a interpretação de $=$ é a relação de igualdade em D (i.e., $\overline{=} = \{(x, y) \in D \times D : x = y\}$).

Notação 171: Habitualmente, usaremos a letra E (possivelmente indexada) para denotar estruturas. Dada uma estrutura E, a notação $dom(E)$ denotará o domínio de E.

Exemplo 172:

a) Seja $E_{Arit} = (\mathbb{N}_0, \overline{})$, onde:

- $\overline{0}$ é o número *zero*;
- $\overline{s}$ é a função *sucessor* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\begin{array}{rcl} \overline{s} : \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$;
- $\overline{+}$ é a função *adição* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\begin{array}{rcl} \overline{+} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ (m,n) & \mapsto & m+n \end{array}$;
- $\overline{\times}$ é a função *multiplicação* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\begin{array}{rcl} \overline{\times} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ (m,n) & \mapsto & m \times n \end{array}$;
- $\overline{=}$ é a relação de *igualdade* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\overline{=} = \{(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : m = n\}$;
- $\overline{<}$ é a relação *menor do que* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\overline{<} = \{(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : m < n\}$.

Então, E_{Arit} é uma estrutura normal de tipo L_{Arit}. Habitualmente, designaremos esta estrutura por *estrutura standard* para o tipo de linguagem L_{Arit}.

b) O par $E_0 = (\{a,b\}, \overline{})$, onde:

- $\overline{0} = a$;
- $\overline{s}$ é a função $\begin{array}{ccc} \{a,b\} & \longrightarrow & \{a,b\} \\ x & \mapsto & x \end{array}$;
- $\overline{+}$ é a função $\begin{array}{ccc} \{a,b\} \times \{a,b\} & \longrightarrow & \{a,b\} \\ (x,y) & \mapsto & b \end{array}$;
- $\overline{\times}$ é a função $\begin{array}{ccc} \{a,b\} \times \{a,b\} & \longrightarrow & \{a,b\} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} a & \text{se } x = y \\ b & \text{se } x \neq y \end{cases} \end{array}$;
- $\overline{=} = \{(a,a), (b,b)\}$;
- $\overline{<} = \{(a,b)\}$,

é também uma L_{Arit}-estrutura normal.

Existem $2 \times 4 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16$ L_{Arit}-estruturas cujo domínio é $\{a,b\}$, das quais $2 \times 4 \times 16 \times 16 \times 16$ são normais. (Porquê?)

Exemplo 173:

a) Seja $E_1 = (\mathbb{R}, \overline{})$, onde:

- $\bar{\cdot}$ é operação de adição em $\mathbb{R}$;
- $\overline{1}$ é o número real 0;

- $\overline{^{-1}}$ é a operação que a cada real faz corresponder o seu simétrico;
- $\overline{\equiv}$ é a relação de *igualdade* em $\mathbb{R}$.

Então, E_1 é uma estrutura normal de tipo L_{grupo}.

b) Seja E_2 definida tal como E_1, com exceção da interpretação do símbolo $^{-1}$ que em E_2 é interpretado como a operação que a cada real x faz corresponder $x - 1$. Então, E_2 é também uma estrutura normal de tipo L_{grupo}.

Exemplo 174:

a) Seja $E_3 = (\mathcal{P}(\{a, b\}), \overline{})$, onde:

- $\overline{\equiv}$ é a relação de *igualdade* em subconjuntos de $\{a, b\}$;
- $\overline{\leq}$ é a relação de *contido ou igual* em subconjuntos de $\{a, b\}$.

Então, E_3 é uma estrutura normal de tipo L_{cpo}.

b) Seja $A = (X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Então, $E_A = (X, \overline{})$, onde $\overline{\equiv}$ é a relação de *igualdade* em X e $\overline{\leq}$ é a relação $\leq$ em X, é uma estrutura normal de tipo L_{cpo}.

.

Definição 175: Seja E uma L-estrutura. Uma função $a : \mathcal{V} \longrightarrow dom(E)$ (do conjunto $\mathcal{V}$ das variáveis de primeira ordem para o domínio de E) diz-se uma *atribuição* em E.

Exemplo 176: As funções $\begin{array}{rcl} a_0 : \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$ e $\begin{array}{rcl} a^{ind} : \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ x_i & \mapsto & i \end{array}$ são atribuições em E_{Arit}.

Definição 177: O *valor de um L-termo t numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$ para uma atribuição a* em E é notado por $t[a]_E$ ou, simplesmente, por $t[a]$ (quando é claro qual a estrutura que deve ser considerada), e é o elemento de D definido, por recursão estrutural em L-termos, do seguinte modo:

a) $x[a] = a(x)$, para todo $x \in \mathcal{V}$;

b) $c[a] = \overline{c}$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $f(t_1, ..., t_n)[a] = \overline{f}(t_1[a], ..., t_n[a])$ para todo $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 178: Seja t o L_{Arit}-termo $s(0) \times (x_0 + x_2)$.

1. O valor de t para a atribuição a^{ind}, na L_{Arit}-estrutura E_{Arit}, é

$$\begin{array}{rl} & (s(0) \times (x_0 + x_2))[a^{ind}] \\ = & s(0)[a^{ind}] \times (x_0 + x_2)[a^{ind}] \\ = & (0[a^{ind}] + 1) \times (x_0[a^{ind}] + x_2[a^{ind}]) \\ = & (0 + 1) \times (0 + 2) \\ = & 2 \end{array}$$

2. Já para a atribuição a_0 (do exemplo anterior), o valor de t é 0 (porquê?).

3. Consideremos agora a L_{Arit}-estrutura E_0 do Exemplo 172 e a seguinte atribuição nesta estrutura:

$$\begin{array}{rcl} a' : \mathcal{V} & \longrightarrow & \{a, b\} \\ x & \mapsto & b \end{array}$$

O valor de t em E_0 para a' é:

$$\begin{array}{rl} & (s(0) \times (x_0 + x_2))[a'] \\ = & \overline{\times}(s(0)[a'], (x_0 + x_2)[a']) \\ = & \overline{\times}(\overline{s}(0[a']), \overline{+}(x_0[a'], x_2[a'])) \\ = & \overline{\times}(\overline{s}(a), \overline{+}(b, b)) \\ = & \overline{\times}(a, b) \\ = & b \end{array}$$

Exemplo 179: Consideremos a estrutura de tipo L_{grupo} E_1 do Exemplo 173 e consideremos a atribuição a em E_1 tal que $a(x_i) = i$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

1. $({x_1}^{-1}.1)[a]_{E_1} = -1$ e $({x_1}^{-1}.x_2)[a]_{E_1} = 1$. Porquê?

2. $(1.1)^{-1}[a]_{E_1} = 0$ e, de facto, para toda a atribuição a' em E_1, tem-se $(1.1)^{-1}[a']_{E_1} = 0$, pois:

$$(1.1)^{-1}[a']_{E_1} = -((1.1)[a']_{E_1}) = -(1[a']_{E_1} + 1[a']_{E_1}) = -(0 + 0) = 0.$$

Proposição 180: Seja t um L-termo e sejam a_1 e a_2 duas atribuições numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$. Se $a_1(x) = a_2(x)$, para todo $x \in VAR(t)$, então $t[a_1] = t[a_2]$.

Dem.: Por indução estrutural em t. A prova está organizada por casos, consoante *a forma* de t.

a) Caso t seja uma variável. Então, $t \in VAR(t)$. Logo, por hipótese, $a_1(t) = a_2(t)$ **(*)**. Assim,

$$t[a_1] \overset{(1)}{=} a_1(t) \overset{(*)}{=} a_2(t) \overset{(1)}{=} t[a_2].$$

Justificações	
(1)	Definição de valor de um termo para uma atribuição.

b) Caso t seja uma constante. Então,

$$t[a_1] \overset{(1)}{=} \overline{t} \overset{(1)}{=} t[a_2].$$

Justificações	
(1)	Definição de valor de um termo para uma atribuição.

c) Caso $t = f(t_1, ..., t_n)$, com $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$. Então,

$$\begin{array}{cl} & t[a_1] \\ = & f(t_1, ..., t_n)[a_1] \\ \overset{(1)}{=} & \overline{f}(t_1[a_1], ..., t_n[a_1]) \\ \overset{(2)}{=} & \overline{f}(t_1[a_2], ..., t_n[a_2]) \\ \overset{(1)}{=} & f(t_1, ..., t_n)[a_2] \\ = & t[a_2]. \end{array}$$

Justificações	
(1)	Definição de valor de um termo para uma atribuição.
(2)	Para $1 \leq i \leq n$, como $VAR(t_i) \subseteq VAR(t)$, da hipótese segue-se que: $a_1(x) = a_2(x)$, para todo $x \in VAR(t_i)$. Logo, por H.I., para todo $1 \leq i \leq n$, $t_i[a_1] = t_i[a_2]$.

$\square$

Notação 181: Sejam a uma atribuição numa L-estrutura E, $d \in dom(E)$ e x uma variável. Escrevemos $a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}$ para a atribuição $a' : \mathcal{V} \longrightarrow dom(E)$ em E definida por:

$$\text{para todo } y \in \mathcal{V}, \quad a'(y) = \begin{cases} d & \text{se } y = x \\ & \\ a(y) & \text{se } y \neq x \end{cases}.$$

Exemplo 182: $a^{ind}\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ denota a atribuição em L_{Arit} definida por

$$\text{para todo } \ i \in \mathbb{N}_0, \quad a^{ind}\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)(x_i) = \begin{cases} 1 \ \text{ se } \ i = 0 \\ \\ i \ \text{ se } \ i \neq 0 \end{cases}.$$

Exemplo 183: Verifique que $(x_0 + 0)[a^{ind}\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)] = 1 = (x_0 + 0)[s(0)/x_0][a^{ind}]$. De facto, esta igualdade é um caso particular da proposição seguinte, que fornece uma alternativa para o cálculo do valor de um termo que resulta de uma substituição.

Proposição 184: Sejam t_0 e t_1 L-termos e seja a uma atribuição numa L-estrutura. Então, $t_0[t_1/x][a] = t_0[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ t_1[a] \end{smallmatrix}\right)]$.

Dem.: Por indução estrutural em t_0. (Exercício.) $\square$

Definição 185: O *valor lógico de uma L-fórmula* φ *numa L-estrutura* $E = (D, \overline{})$ *para uma atribuição* a em E, é notado por $\varphi[a]_E$ ou, simplesmente, por $\varphi[a]$ (quando é claro qual a estrutura que deve ser considerada) e é o elemento do conjunto dos valores lógicos $\{0, 1\}$ definido, por recursão em L-fórmulas, do seguinte modo:

- **a)** $\perp [a] = 0$;
- **b)** $R(t_1, ..., t_n)[a] = 1$ sse $(t_1[a], ..., t_n[a]) \in \overline{R}$, para todo o símbolo de relação R de aridade n e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$;
- **c)** $(\neg\varphi_1)[a] = f_\neg(\varphi_1[a])$, para todo $\varphi_1 \in \mathcal{F}_L$;
- **d)** $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)[a] = f_\wedge(\varphi_1[a], \varphi_2[a])$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$;
- **e)** $(\varphi_1 \vee \varphi_2)[a] = f_\vee(\varphi_1[a], \varphi_2[a])$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$;
- **f)** $(\varphi_1 \to \varphi_2)[a] = f_\to(\varphi_1[a], \varphi_2[a])$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$;
- **g)** $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)[a] = f_\leftrightarrow(\varphi_1[a], \varphi_2[a])$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$;
- **h)** $(\exists x\varphi_1)[a] = 1$ sse para algum $d \in D$, $\varphi_1[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)] = 1$, para todo $x \in \mathcal{V}, \varphi_1 \in \mathcal{F}_L$;
- **i)** $(\forall x\varphi_1)[a] = 1$ sse para todo $d \in D$, $\varphi_1[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)] = 1$, para todo $x \in \mathcal{V}, \varphi_1 \in \mathcal{F}_L$.

Proposição 186: Para quaisquer L-estrutura E, atribuição a em E, L-fórmula φ e variável x,

a) $(\exists x\varphi)[a] = 0$ sse para todo $d \in dom(E)$, $\varphi[a\binom{x}{d}] = 0$;

b) $(\forall x\varphi)[a] = 0$ sse para algum $d \in dom(E)$, $\varphi[a\binom{x}{d}] = 0$;

c) $(\exists x\varphi)[a] = \textit{máximo}\{\varphi[a\binom{x}{d}] : d \in D\}$;

d) $(\forall x\varphi)[a] = \textit{mínimo}\{\varphi[a\binom{x}{d}] : d \in D\}$.

Dem.: Imediata, tendo em atenção a definição de valor lógico e as propriedades de *máximo* e de *mínimo*. □

Exemplo 187: Consideremos a estrutura L_{Arit} e as atribuições em E_{Arit} a^{ind} e a_0 definidas no Exemplo 176.

1. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_0 = s(0) < x_2$, tem-se:

   i) $\varphi_0[a^{ind}] = 1$, dado que $s(0)[a^{ind}] = 1, x_2[a^{ind}] = 2$ e $(1,2) \in \overline{<}$ (pois 1 é menor que 2);

   ii) $\varphi_0[a_0] = 0$, dado que $s(0)[a_0] = 1, x_2[a_0] = 0$ e $(1,0) \notin \overline{<}$ (pois 1 não é menor que 0);

2. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_1 = \exists x_2(s(0) < x_2)$ tem-se:

   i) $\varphi_1[a^{ind}] = 1$, pois existe $n \in \mathbb{N}_0$ t.q. $s(0) < x_2[a^{ind}\binom{x_2}{n}] = 1$ (como $s(0)[a^{ind}\binom{x_2}{n}] = 1$, basta tomar $n > 1$);

   ii) $\varphi_1[a_0] = 1$, pois existe $n \in \mathbb{N}_0$ t.q. $s(0) < x_2[a_0\binom{x_2}{n}] = 1$ (também neste caso se tem $s(0)[a_0\binom{x_2}{n}] = 1$, pelo que, basta tomar $n > 1$);

3. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_2 = \exists x_2\neg(s(0) < x_2)$ tem-se também o valor lógico 1, quer para a^{ind} quer para a_0 (porquê?);

4. Já para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_3 = \forall x_2(s(0) < x_2)$ tem-se valor lógico 0 para ambas as atribuições (de facto, a afirmação "para todo $n \in \mathbb{N}_0, 1 < n$" é falsa).

Exemplo 188: Consideremos agora a L_{Arit}-estrutura E_0 do Exemplo 172 e as atribuições a' e a'' em E_0 t.q., para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a'(x_i) = b$ e $a''(x_i) = a$ sse i é par.

1. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_0 = s(0) < x_2$ (considerada no exemplo anterior), tem-se:
   i) $\varphi_0[a'] = 1$, dado que $s(0)[a'] = a, x_2[a'] = b$ e $(a,b) \in \overline{<}$;
   ii) $\varphi_0[a''] = 0$, dado que $s(0)[a''] = a, x_2[a'] = a$ e $(a,a) \notin \overline{<}$;
2. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_1 = \exists x_2(s(0) < x_2)$ o valor lógico é 1 para ambas as atribuições (porquê?).
3. Verifique que as fórmulas φ_2 e φ_3 do exemplo anterior recebem valores lógicos 1 e 0, respetivamente, para ambas as atribuições.

Exemplo 189: Consideremos a L_{grupo}-fórmula $\varphi_0 = \forall x_0(x_0 \cdot x_0^{-1} = 1)$ e as L_{grupo}-estruturas E_1 e E_2 do Exemplo 173.

1. Para qualquer atribuição em E_1, o valor lógico de φ_0 em E_1 é 1, uma vez que a afirmação "para todo $x \in \mathbb{R}$, $x + (-x) = 0$" é verdadeira.
2. Já em E_2, o valor lógico de φ_0 é 0, independentemente da atribuição, uma vez que a afirmação "para todo $x \in \mathbb{R}$, $x + (x - 1) = 0$" é falsa.

Exemplo 190: Em relação à L_{cpo}-estrutura E_3 (considerada no Exemplo 174) e a uma atribuição qualquer em E_3 que atribua o conjunto vazio à variável x_1:

1. a L_{cpo}-fórmula $\exists x_0(x_0 \leq x_1)$ tem valor lógico 1 (a afirmação "existe $X \in \mathcal{P}(\{a,b\})$ tal que $X \subseteq \emptyset$" é verdadeira);
2. a L_{cpo}-fórmula $\exists x_0(x_0 \leq x_1 \wedge \neg(x_0 = x_1))$ tem valor lógico 0 (a afirmação "existe $X \in \mathcal{P}(\{a,b\})$ tal que $X \subseteq \emptyset$ e $X \neq \emptyset$" é falsa")

Definição 191: Sejam E uma L-estrutura e a uma atribuição em a. *Em* E, dizemos que *a satisfaz uma L-fórmula* φ, escrevendo $E \models \varphi[a]$, quando $\varphi[a]_E = 1$. Escrevemos $E \not\models \varphi[a]$ quando a não satisfaz φ.

Proposição 192: Sejam E uma L-estrutura e a uma atribuição em E. Então:

a) $E \models \exists x\varphi[a]$ sse existe $d \in dom(E)$ t.q. $E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]$;

b) $E \models \forall x\varphi[a]$ sse $E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]$, para todo $d \in dom(E)$;

c) $E \not\models \exists x\varphi[a]$ sse $E \not\models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]$, para todo $d \in dom(E)$;

d) $E \not\models \forall x\varphi[a]$ sse existe $d \in dom(E)$ t.q. $E \not\models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]$.

Dem.: Consequência imediata da definição de satisfação e da Proposição 186. Por exemplo:

$$\begin{array}{lll} & E \not\models \exists x\varphi[a] & \\ \text{sse} & \exists x\varphi[a]_E = 0 & \text{(por definição de } \not\models) \\ \text{sse} & \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]_E = 0, \text{ para todo } d \in dom(E) & \text{(Proposição 186 b))} \\ \text{sse} & E \not\models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in dom(E) & \text{(por definição de } \not\models). \end{array}$$

□

Proposição 193: Seja φ uma L-fórmula e sejam a_1 e a_2 atribuições numa L-estrutura E. Se $a_1(x) = a_2(x)$, para todo $x \in LIV(\varphi)$, então $E \models \varphi[a_1]$ sse $E \models \varphi[a_2]$.

Dem.: Por indução estrutural em φ. (Exercício.) □

Corolário 194: Sejam φ uma L-sentença e E uma L-estrutura. Se para alguma atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$, então para toda a atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$.
Dem.: Exercício. □

Proposição 195: Sejam φ uma L-fórmula, $E = (D, \overline{})$ uma L-estrutura, a uma atribuição em E e x uma variável substituível sem captura de variáveis por um L-termo t em φ. Então,

$$E \models \varphi[t/x][a] \text{ sse } E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}].$$

Dem.: A demonstração segue por indução estrutural em φ. Vejamos alguns casos.

1) Caso $\varphi \neq \perp$. Então, $\varphi[t/x] = \perp$ e ambos os lados da equivalência são falsos.

2) Caso $\varphi = R(t_1, ..., t_n)$, com $R \in \mathcal{R}$, de aridade $n \geq 1$, e $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$. Então:

$$\begin{array}{ll} & E \models R(t_1, ..., t_n)[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}] \\ \overset{(1)}{\text{sse}} & (t_1[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}], ..., t_n[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}]) \in \overline{R} \\ \overset{(2)}{\text{sse}} & (t_1[t/x][a], ..., t_n[t/x][a]) \in \overline{R} \\ \overset{(1)}{\text{sse}} & E \models R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])[a] \\ \overset{(3)}{\text{sse}} & E \models R(t_1, ..., t_n)[t/x][a]. \end{array}$$

Justificações

(1) Definição de satisfação.

(2) Pela Proposição 184, $t_i[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}] = [t/x]t_i[a]$., para todo $1 \leq i \leq n$

(3) Definição de substituição.

3) Caso $\varphi = \forall y \varphi_1$.

3.a) Subcaso $y = x$. Entao,

$$\begin{array}{rl} & E \models \varphi[t/x][a] \\ \overset{\textbf{(1)}}{\text{sse}} & E \models \varphi[a] \\ \overset{\textbf{(2)}}{\text{sse}} & E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}]. \end{array}$$

Justificações	
(1)	Definição de substituição.
(2)	Pela proposição anterior, uma vez que, como $x \notin LIV(\varphi)$, as duas atribuições coincidem no valor das variáveis com ocorrências livres em φ.

3.b) Subcaso $y \neq x$. Então, $y \notin VAR(t)$ (de outra forma x não seria substituível sem captura de variáveis por t em φ). Assim,

$$\begin{array}{rl} & E \models (\forall y \varphi_1)[t/x][a] \\ \overset{\textbf{(1)}}{\text{sse}} & E \models \forall y(\varphi_1[t/x])[a] \\ \overset{\textbf{(2)}}{\text{sse}} & E \models \varphi_1[t/x][a\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in dom(E) \\ \overset{\textbf{(3)}}{\text{sse}} & E \models \varphi_1[a\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t[a\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}] \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in dom(E) \\ \overset{\textbf{(4)}}{\text{sse}} & E \models \varphi_1[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in dom(E) \\ \overset{\textbf{(2)}}{\text{sse}} & E \models \forall y \varphi_1[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}] \end{array}$$

Justificações	
(1)	Definição de substituição.
(2)	Proposição 192.
(3)	Hipótese de indução.
(4)	Como $y \neq x$, $a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}$ e, da Proposição 180, por $y \notin VAR(t)$, $t[a] = t[a\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}]$.

4) Restantes casos: exercício.

□

Definição 196: Uma L-fórmula φ é *válida* numa L-estrutura E (notação: $E \models \varphi$) quando, para toda a atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$. Utilizamos a notação $E \not\models \varphi$ quando φ não é válida em E, *i.e.*, quando existe uma atribuição a em E tal que $E \not\models \varphi[a]$.

Exemplo 197: Consideremos a estrutura E_{Arit}.

1. A fórmula $x_0 = x_0$ é válida em E_{Arit}; de facto, para qualquer atribuição a em E_{Arit}, tem-se $E_{Arit} \models x_0 = x_0[a]$, uma vez que $x_0[a] = a(x_0)$ e $(a(x_0), a(x_0)) \in \equiv$ ($a(x_0)$ e $a(x_0)$ são naturais iguais).

2. A fórmula $x_0 = x_1$ não é válida em E_{Arit}; por exemplo, para a atribuição a^{ind} tem-se $x_0[a^{ind}] = 0$, $x_1[a^{ind}] = 1$ e $(0,1) \notin \equiv$, pelo que $E_{Arit} \not\models x_0 = x_1[a^{ind}]$.

3. A fórmula $\neg(x_0 = x_1)$ não é válida em E_{Arit}; por exemplo, para a atribuição a_0 que atribui 0 a todas as variáveis tem-se $x_0[a_0] = 0$, $x_1[a_0] = 0$ e $(0,0) \in \equiv$, pelo que $E_{Arit} \models x_0 = x_1[a_0]$ e, consequentemente, $E_{Arit} \not\models \neg(x_0 = x_1)[a_0]$.

4. A fórmula $x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1)$ é válida em E_{Arit} (para qualquer atribuição a em E_{Arit}, a afirmação "$(a(x_0), a(x_1)) \in \equiv$ ou $(a(x_0), a(x_1)) \notin \equiv$" é verdadeira).

5. A fórmula $\exists x_0 \neg(x_0 = x_1)$ é válida em E_{Arit} (para toda a atribuição a em E_{Arit} a afirmação "existe $n \in \mathbb{N}_0$, $n \neq a(x_1)$" é verdadeira (tome-se, por exemplo, $n = a(x_1)+1$)) e a fórmula $\forall x_1 \exists x_0 \neg(x_0 = x_1)$ é também válida em E_{Arit} (porquê?).

Exemplo 198:

1. A L_{grupo}-fórmula $\forall x_0(x_0 \cdot x_0^{-1} = 1)$ é válida na estrutura E_1 do Exemplo 173 (a afirmação "para todo $x \in \mathbb{R}$, $x + (-x) = 0$" é verdadeira).

2. A L_{cpo}-fórmula $\forall x_0 \forall x_1((x_0 \leq x_1 \wedge x_1 \leq x_0) \rightarrow x_0 = x_1)$ é válida na estrutura E_3 do Exemplo 174 (a afirmação "para todo $X_0, X_1 \in \mathcal{P}(\{a,b\})$, se $X_0 \subseteq X_1$ e $X_1 \subseteq X_0$, então $X_0 = X_1$" é verdadeira).

Proposição 199: Seja E uma L-estrutura. Se φ é uma L-sentença, então $E \models \varphi$ sse para alguma atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$.

Dem.: Se $E \models \varphi$, é imediato que $E \models \varphi[a]$ para alguma atribuição a, pois $E \models \varphi$ significa que $E \models \varphi[a]$ para toda a atribuição a.

Admitamos agora que $E \models \varphi[a]$ para alguma atribuição a. Tomemos uma atribuição a' arbitrária em E. (Queremos provar que $E \models \varphi[a']$.) Como φ é uma L-sentença e portanto $LIV(\varphi) = \emptyset$, tem-se trivialmente que $a(x) = a'(x)$ para todo $x \in LIV(\varphi)$. Assim, atendendo à Proposição 193 e a que $E \models \varphi[a]$, conclui-se $E \models \varphi[a']$. $\square$

Definição 200: Uma L-fórmula φ é *(universalmente) válida* (notação: $\models \varphi$) quando é válida em toda a L-estrutura. Utilizamos a notação $\not\models \varphi$ quando φ *não é (universalmente) válida*, *i.e.*, quando existe uma L-estrutura E tal que $E \not\models \varphi$.

Observação 201: Uma L-fórmula φ não é universalmente válida quando existe alguma L-estrutura que não valida φ, ou seja, quando existe alguma L-estrutra E e alguma atribuição a em E t.q. $E \not\models \varphi[a]$.

Exemplo 202:

1. A L_{Arit}-fórmula $x_0 = x_1$ não é universalmente válida. Como vimos no exemplo anterior, esta fórmula não é válida na estrutura E_{Arit}.

2. No exemplo anterior, vimos que a fórmula $x_0 = x_0$ é válida na estrutura E_{Arit}. No entanto, esta fórmula não é válida em todas as L_{Arit}-estruturas. Por exemplo, se considerarmos uma L_{Arit}-estrutura $E_1 = (\{a, b\}, \overline{\ })$ em que $\equiv$ seja a relação $\{(a, a)\}$, E_1 não valida $x_0 = x_0$, pois considerando uma atribuição a' em E_1 t.q. $a'(x_0) = b$ teremos $E_1 \not\models x_0 = x_0[a']$, uma vez que o par $(x_0[a'], x_0[a'])$, que é igual ao par (b, b), não pertence à relação $\equiv$.

3. A L_{Arit}-fórmula $\forall x_0(x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))$ é universalmente válida. De facto, dadas uma qualquer L_{Arit}-estrutura $E = (D, \overline{\ })$ e uma qualquer atribuição a em E, tem-se:

$$
\begin{array}{ll}
 & E \models \forall x_0(x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))[a] \\
\text{sse} & E \models (x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))[a\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in D \\
\text{sse} & E \models x_0 = x_1[a\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix}] \text{ ou } E \models \neg(x_0 = x_1)[a\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in D \\
\text{sse} & (d, a(x_1)) \in \equiv \text{ ou } E \not\models x_0 = x_1[a\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in D \\
\text{sse} & (d, a(x_1)) \in \equiv \text{ ou } (d, a(x_1)) \notin \equiv, \text{ para todo } d \in D
\end{array}
$$

e a última afirmação é verdadeira.

Definição 203: Uma L-fórmula φ é *logicamente equivalente* a uma L-fórmula ψ (notação: $\varphi \Leftrightarrow \psi$) quando $\models \varphi \leftrightarrow \psi$, *i.e.*, quando para para toda a L-estrutura E e para toda a atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$ sse $E \models \psi[a]$.

Observação 204: As propriedades enunciadas para e equivalência lógica no capítulo anterior, mantêm-se válidas no contexto do Cálculo de Predicados. Por exemplo, $\Leftrightarrow$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}_L$.

Proposição 205: Sejam $x, y \in \mathcal{V}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$.

a) $\neg\forall x\varphi \Leftrightarrow \exists x\neg\varphi$ **b)** $\neg\exists x\varphi \Leftrightarrow \forall x\neg\varphi$

c) $\forall x\varphi \Leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$ **d)** $\exists x\varphi \Leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi$

e) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$ **f)** $\exists x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$

g) $\models (\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)$, mas não necessariamente $\models \forall x(\varphi \vee \psi) \to (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)$

h) $\models \exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$, mas não necessariamente $\models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \wedge \psi)$

i) $\forall x\forall y\varphi \Leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$ **j)** $\exists x\exists y\varphi \Leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$

k) $\models \exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi$, mas não necessariamente $\models \forall x\exists y\varphi \to \exists y\forall x\varphi$

l) $Qx\varphi \Leftrightarrow \varphi$ se $x \notin LIV(\varphi)$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$

m) $Qx\varphi \Leftrightarrow Qy\varphi[y/x]$ se $y \notin LIV(\varphi)$ e x é substituível por y em φ, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$

n) $Qx(\varphi\Box\psi) \Leftrightarrow (Qx\varphi)\Box\psi$ e $Qx(\psi\Box\varphi) \Leftrightarrow \psi\Box(Qx\varphi)$, se $x \notin LIV(\psi)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee\}$ e para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$

Dem.:

c) Sejam L uma linguagem, E uma L-estrutura e a uma atribuição em E. (Queremos demonstrar que: $E \models \forall x\varphi[a]$ sse $E \models \neg\exists x\neg\varphi[a]$.)

$$\begin{array}{rl} & E \models \forall x\varphi[a] \\ \overset{(1)}{\text{sse}} & E \models \varphi[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)], \text{ para todo } d \in dom(E) \\ \overset{(2)}{\text{sse}} & E \not\models \neg\varphi[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)], \text{ para todo } d \in dom(E) \\ \overset{(3)}{\text{sse}} & E \not\models \exists x\neg\varphi[a] \\ \overset{(2)}{\text{sse}} & E \models \neg\exists x\neg\varphi[a] \end{array}$$

Justificações

(1) Por (b) da Proposição 192.
(2) Para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$, $E \models \psi[a]$ sse $E \not\models \neg\psi[a]$ (Exercício).
(3) Por (c) da Proposição 192.
(4) Para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$, $E \not\models \psi[a]$ sse $E \models \neg\psi[a]$ (Exercício).

k) Mostremos que $\models \forall x\exists y\varphi \to \exists y\forall x\varphi$ não é necessariamente válida.

Seja L uma linguagem contendo um símbolo R de relação, binário. Seja E uma L-estrutura de domínio $\{a, b\}$, onde a interpretação de R é o conjunto $\{(a, b), (b, a)\}$. Então, $E \models \forall x_0\exists x_1 R(x_0, x_1)$, mas $E \not\models \exists x_1\forall x_0 R(x_0, x_1)$ (Porquê?). Logo, $E \not\models \forall x_0\exists x_1 R(x_0, x_1) \to \exists x_1\forall x_0 R(x_0, x_1)$.

Demonstração das restantes afirmações: exercício. □

Definição 206: Chamaremos *instanciação (de variáveis proposicionais com L-fórmulas)* a uma função do tipo $\mathcal{V}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}_L$. Cada instanciação i determina uma função do tipo $\mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}_L$ que satisfaz as seguintes condições[2]:

a) $i(\bot) = \bot$;

b) $i(\neg\varphi) = \neg i(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

c) $i(\varphi \Box \psi) = i(\varphi) \Box i(\psi)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Definição 207: Uma L-fórmula ψ é uma *instância* de uma fórmula φ do Cálculo Proposicional quando existe alguma instanciação i tal que $i(\varphi) = \psi$.

Exemplo 208: A L_{Arit}-fórmula $(x_0 = x_1) \rightarrow (\exists x_0(x_0 = 0) \rightarrow (x_0 = x_1))$ é uma instância da fórmula $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)$ do Cálculo Proposicional. De facto, considerando-se uma instanciação i tal que $i(p_0)$ é a fórmula $(x_0 = x_1)$ e $i(p_1)$ é a fórmula $\exists x_0(x_0 = 0)$, tem-se:

$$\begin{array}{rl} & i(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)) \\ = & i(p_0) \rightarrow i(p_1 \rightarrow p_0) \\ = & (x_0 = x_1) \rightarrow (i(p_1) \rightarrow i(p_0)) \\ = & (x_0 = x_1) \rightarrow (\exists x_0(x_0 = 0) \rightarrow (x_0 = x_1)). \end{array}$$

Mas, esta fórmula L_{Arit}-fórmula é também instância, por exemplo, de $p_0 \rightarrow p_1$ e de p_0. Porquê?

Teorema 209 (Teorema da Instanciação): Se φ é uma tautologia do Cálculo Proposicional, então toda a instância de φ é universalmente válida.

Dem.: Suponhamos que φ uma tautologia do Cálculo Proposicional e que ψ é uma L-fórmula que é instância de φ. Seja E uma L-estrutura e a uma atribuição em E. (Queremos demonstrar que $E \models \psi[a]$.) Uma vez que ψ é instância de φ, existe uma instanciação i tal que $i(\varphi) = \psi$. Seja v a valoração do Cálculo Proposicional que satisfaz as seguintes condições:

$$\text{para todo } p \in \mathcal{V}^{CP}, \;\; v(p) = \begin{cases} 1 \;\text{ se }\; E \models i(p)[a] \\ \\ 0 \;\text{ se }\; E \not\models i(p)[a] \end{cases}.$$

Demonstra-se (por indução estrutural em φ) que: $v(\varphi) = 1$ sse $E \models \psi[a]$. Donde, como $v(\varphi) = 1$ (pois φ é uma tautologia), se segue que $E \models \psi[a]$. □

[2] A função determinada por uma instanciação i pode ser vista como uma operação de *substituição simultânea*, onde cada variável proposicional p é substituída por $i(p)$.

Exemplo 210: Como vimos no exemplo anterior, a L_{Arit}-fórmula $(x_0 = x_1) \to (\exists x_0(x_0 = 0) \to (x_0 = x_1))$ é instância da tautologia $p_0 \to (p_1 \to p_0)$. Logo, pelo Teorema da Instanciação, podemos concluir que esta L_{Arit}-fórmula é universalmente válida.

Observação 211: Como seria de esperar, nem todas as fórmulas universalmente válidas são instâncias de tautologias. Por exemplo, vimos no Exemplo 202 que a fórmula $\forall x_0(x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))$ é universalmente válida e esta fórmula não é instância de qualquer tautologia (esta fórmula é apenas instância de variáveis proposicionais, que não são tautologias).

Definição 212: Uma L-fórmula diz-se uma *forma normal prenexa* quando é constituída por um prefixo de quantificações (eventualmente vazio), seguido de uma fórmula sem quantificações, ou seja, quando é uma fórmula da forma $Q_1y_1...Q_ny_n\varphi$, onde $n \in \mathbb{N}_0$, para cada i, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ e $y_i \in \mathcal{V}$ e φ é uma L-fórmula sem quantificações.

Exemplo 213:

1. As L_{Arit}-fórmulas $x_0 < x_1$, $\exists x_1(x_0 < x_1 \wedge \neg(x_1 = 0))$, $\forall x_0 \exists x_1(x_0 < x_1 \wedge \neg(x_1 = 0))$ são formas normais prenexas.

2. A L_{Arit}-fórmula $\forall x_0(\exists x_1(x_1 < x_0) \to \exists x_2(x_0 = s(x_2)))$ não é uma forma normal prenexa (por causa das quantificações existenciais dentro da implicação), mas
$$\begin{array}{rl} & \forall x_0(\exists x_1(x_1 < x_0) \to \exists x_1(x_0 = s(x_1))) \\ \Leftrightarrow & \forall x_0(\neg\exists x_1(x_1 < x_0) \vee \exists x_1(x_0 = s(x_1))) \\ \Leftrightarrow & \forall x_0(\forall x_1 \neg(x_1 < x_0) \vee \exists x_1(x_0 = s(x_1))) \\ \Leftrightarrow & \forall x_0 \forall x_1(\neg(x_1 < x_0) \vee \exists x_1(x_0 = s(x_1))) \\ \Leftrightarrow & \forall x_0 \forall x_1(\neg(x_1 < x_0) \vee \exists x_2(x_0 = s(x_2))) \\ \Leftrightarrow & \forall x_0 \forall x_1 \exists x_2(\neg(x_1 < x_0) \vee (x_0 = s(x_2))) \end{array}$$
e a última fórmula é uma forma normal prenexa.

Proposição 214: Para toda a L-fórmula φ, existe uma forma normal prenexa ψ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$.
Dem.: Dada uma L-fórmula φ, uma forma normal prenexa ψ que lhe seja logicamente equivalente pode ser obtida com recurso às seguintes transformações:

1. escrever implicações e equivalências em termos de negações, conjunções e disjunções;

2. mover quantificações para fora de negações, conjuções e disjunções (renomeando, se necessário, o nome de variáveis ligadas), com recurso às equivalências lógicas **a)**, **b)**, **m)** e **n)** da Proposição 205. $\square$

Definição 215: Sejam E uma L-estrutura, a uma atribuição em E e Γ um conjunto de L-fórmulas. Dizemos que, em E, a *satisfaz* Γ ou que o par (E, a) *satisfaz* Γ, escrevendo $E \models \Gamma[a]$, quando para todo $\varphi \in \Gamma$, $E \models \varphi[a]$. Caso contrário diremos que, em E, a *não satisfaz* Γ ou que o par (E, a) *não satisfaz* Γ, escrevendo $E \not\models \Gamma[a]$.

Exemplo 216: O par (E_{Arit}, a^{ind}) satisfaz o conjunto de L_{Arit}-fórmulas

$$\{\forall x_0(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1(x_1 \times s(x_0) = x_1)\},$$

mas não satisfaz o conjunto de L_{Arit}-fórmulas

$$\{\forall x_0(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1(x_1 \times s(x_2) = x_1)\}.$$

Definição 217: Um conjunto de L-fórmulas Γ diz-se *satisfazível* ou *(semanticamente) consistente* quando para alguma L-estrutura E e para alguma atribuição a em E, $E \models \Gamma[a]$. Caso contrário, Γ diz-se *insatisfazível* ou *(semanticamente) inconsistente*.

Exemplo 218:

a) O conjunto de L_{Arit}-fórmulas $\{\forall x_0(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1(x_1 \times s(x_0) = x_1)\}$ é semanticamente consistente (por exemplo, (E_{Arit}, a^{ind}) satisfá-lo) e o conjunto de L_{Arit}-fórmulas $\{\forall x_0(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1(x_1 \times s(x_2) = x_1)\}$ também é semanticamente consistente (exercício).

b) O conjunto de L_{Arit}-fórmulas $\{\forall x_0(x_0 = x_0), \neg(0 = 0)\}$ é semanticamente inconsistente (exercício).

Definição 219: Sejam E uma L-estrutura e Γ um conjunto de L-fórmulas. Dizemos que E *valida* Γ ou que E é um *modelo* de Γ, escrevendo $E \models \Gamma$, quando para toda a atribuição a em E, $E \models \Gamma[a]$. Caso contrário, diremos que E *não valida* Γ ou que E *não é modelo* de Γ, escrevendo $E \not\models \Gamma$. Diremos que E é um *modelo normal* de Γ quando E é um modelo de Γ e E é uma L-estrutura normal.

Exemplo 220: E_{Arit} é um modelo normal do conjunto formado pelas seguintes

L_{Arit}-sentenças:

$$\begin{array}{l}
\forall x_0 \neg(0 = s(x_0));\\
\forall x_0 \forall x_1((s(x_0) = s(x_1)) \to (x_0 = x_1));\\
\forall x_0 \neg(s(x_0) < 0);\\
\forall x_0 \forall x_1((x_0 = s(x_1)) \to ((x_0 < x_1) \vee (x_0 = x_1))));\\
\forall x_0(x_0 + 0 = x_0);\\
\forall x_0 \forall x_1(s(x_0) + x_1 = s(x_0 + x_1));\\
\forall x_0(x_0 * 0 = 0);\\
\forall x_0 \forall x_1(s(x_0) * x_1 = (x_0 * x_1) + x_1).
\end{array}$$

A *axiomática de Peano* para a Aritmética é constituída por estas fórmulas, juntamente com um princípio de indução para $\mathbb{N}_0$.

Exemplo 221: Os grupos são os modelos normais do conjunto formado pelas seguintes L_{grupo}-sentenças:

$$\begin{array}{l}
\forall x_0 \forall x_1 \forall x_2((x_0 \cdot x_1) \cdot x_2 = x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2));\\
\forall x_0((x_0 \cdot 1 = x_0) \wedge (1 \cdot x_0 = x_0));\\
\forall x_0((x_0 \cdot x_0{}^{-1} = 1) \wedge (x_0^{-1} \cdot x_0 = 1)).
\end{array}$$

De facto, uma L_{grupo}-estrutura normal $E = (D, \overline{})$ é um modelo deste conjunto de fórmulas se e só se $(D, \bar{\cdot}, \overline{1}, \overline{^{-1}})$ é um grupo.

Exemplo 222: Os conjuntos parcialmente ordenados são os modelos normais do conjunto formado pelas seguintes L_{cpo}-sentenças:

$$\begin{array}{l}
\forall x_0(x_0 \leq x_0);\\
\forall x_0 \forall x_1(((x_0 \leq x_1) \wedge (x_1 \leq x_0)) \to (x_0 = x_1));\\
\forall x_0 \forall x_1 \forall x_2(((x_0 \leq x_1) \wedge (x_1 \leq x_2)) \to (x_0 \leq x_2)).
\end{array}$$

Uma L_{cpo}-estrutura normal $E = (D, \overline{})$ é um modelo deste conjunto de fórmulas se e só se $(D, \overline{\leq})$ é um conjunto parcialmente ordenado.

Proposição 223: Seja Γ um conjunto de L-sentenças.

1. Uma L-estrutura E é um modelo de Γ sse para alguma atribuição a em E, (E, a) satisfaz Γ.

2. Γ é satisfazível sse existem modelos de Γ.

Dem.: Exercício. □

Definição 224: Uma L-fórmula φ diz-se uma *consequência (semântica)* de um conjunto de L-fórmulas Γ (notação: $\Gamma \models \varphi$) quando para toda a L-estrutura E e para toda a atribuição a em E, se $E \models \Gamma[a]$, então $E \models \varphi[a]$.

Observação 225: Na denotação de relações de consequência semântica, usaremos simplificações semalhantes às utilizadas no contexto do Cálculo Proposicional. Por exemplo, dadas L-fórmulas φ e ψ e dado um conjunto de L-fórmulas Γ, a notação $\Gamma, \varphi \models \psi$ abrevia $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$.

Exemplo 226: No contexto do tipo de linguagem L_{Arit},

$$\forall x_0 \neg(x_0 = s(x_0)) \models \neg(0 = s(0)).$$

De facto, dada uma L_{Arit}-estrutura $E = (D, \overline{})$ e dada uma atribuição a em E tais que $E \models \{\forall x_0 \neg(x_0 = s(x_0))\}[a]$, temos que, para todo o $d \in D$, $(d, \overline{s}(d)) \notin \overline{=}$. Assim, como $\overline{0} \in D$, em particular, temos que $(\overline{0}, \overline{s}(\overline{0})) \notin \overline{=}$ e, consequentemente, $E \models \neg(0 = s(0))[a]$.

Proposição 227: Sejam Γ um conjunto de L-sentenças e φ uma L-sentença. Então, $\Gamma \models \varphi$ se e só se todos os modelos de Γ validam φ.

Dem.: Exercício. □

Notação 228: Adiante, usaremos a notação $LIV(\Gamma)$, com Γ um conjunto de L-fórmulas, para representar o conjunto $\bigcup_{\varphi \in \Gamma} LIV(\varphi)$.

Proposição 229: Sejam φ e ψ L-fórmulas, seja Γ um conjunto de L-fórmulas, seja x uma variável e seja t um L-termo.

a) Se $\Gamma \models \forall x \varphi$ e x é substituível sem captura de variáveis por t em φ, então $\Gamma \models \varphi[t/x]$.

b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $x \notin LIV(\Gamma)$, então $\Gamma \models \forall x \varphi$.

c) Se $\Gamma \models \varphi[t/x]$ e x é substituível sem captura de variáveis por t em φ, então $\Gamma \models \exists x \varphi$.

d) Se $\Gamma \models \exists x \varphi$ e $\Gamma, \varphi \models \psi$, e $x \notin LIV(\Gamma \cup \{\psi\})$, então $\Gamma \models \psi$.

Dem.:

a) Suponhamos que (E, a) satisfaz Γ. (Queremos demonstrar que: $E \models \varphi[t/x][a]$.) Então, pela hipótese, $E \models \forall x \varphi[a]$. Assim, por definição de satisfação,

$$E \models \varphi[a\binom{x}{d}], \text{ para todo } d \in dom(E),$$

e daqui, em particular, $E \models \varphi[a\binom{x}{t[a]}]$, pois $t[a] \in dom(E)$. Logo, como por hipótese x é substituível sem captura de variáveis por t em φ, aplicando a Proposição 195, $E \models \varphi[t/x][a]$.

b) Suponhamos que (E, a) satisfaz Γ. (Queremos demonstrar que: $E \models \forall x\varphi[a]$.) Por hipótese, $x \notin LIV(\Gamma)$. Logo, para todo $\psi \in \Gamma$, $x \notin LIV(\psi)$ e, para todo $d \in dom(E)$, as atribuições a e $a\binom{x}{d}$ atribuem os mesmos valores a todas as variáveis livres de ψ. Assim, para todo $\psi \in \Gamma$, segue da Proposição 193 que

$$E \models \psi[a] \text{ sse } E \models \psi[a\binom{x}{d}], \text{ para todo } d \in dom(E).$$

Consequentemente, uma vez que (E, a) satisfaz Γ, para todo $d \in dom(E)$, $(E, a\binom{x}{d})$ também satisfaz Γ. Como por hipótese $\Gamma \models \varphi$, segue que

$$E \models \varphi[a\binom{x}{d}], \text{ para todo } d \in dom(E),$$

o que permite concluir $E \models \forall x\varphi[a]$.

c) e **d)**: exercício.

$\square$

3.3 Sistema Formal de Dedução Natural

Notação 230: O sistema formal de Dedução Natural para o Cálculo de Predicados de Primeira Ordem da Lógica Clássica será usualmente denotado por DN_L ou, simplesmente, por DN, se for claro qual o tipo de linguagem que deve ser considerado.

Definição 231: As regras de inferência de DN_L são as regras de DNP (que, agora, em vez de se aplicarem a fórmulas do Cálculo Proposicional se aplicam a L-fórmulas), juntamente com as seguintes regras para quantificadores:

Regras de **I***ntrodução* *Regras de* **E***liminação*

$$\frac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\end{matrix}}{\forall x\varphi}\ \forall I\ \ (a) \qquad\qquad \frac{\begin{matrix}\vdots\\ \forall x\varphi\end{matrix}}{\varphi[t/x]}\ \forall E\ \ (b)$$

$$\frac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi[t/x]\end{matrix}}{\exists x\varphi}\ \exists I\ \ (b) \qquad\qquad \frac{\begin{matrix}\vdots\\ \exists x\varphi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\psi}\ \exists E\ \ (c)$$

(a)	Na derivação da premissa, x não tem ocorrências livres nas hipóteses não canceladas.
(b)	x é substituível sem captura de variáveis por t em φ.
(c)	x não tem ocorrências livres em ψ e, na derivação da segunda premissa, x não tem ocorrências livres nas hipóteses não canceladas distintas de φ.

Definição 232: O conjunto $\mathcal{D}^{DN_L}$ das *derivações* de DN_L é definido de modo análogo a $\mathcal{D}^{DNP}$, ou seja, $\mathcal{D}^{DN_L}$ é o menor conjunto X de árvores finitas de L-fórmulas (com folhas possivelmente canceladas) que contém as árvores com uma única L-fórmula e é *fechado* para cada uma das regras de inferência de DN_L. Por exemplo, X é fechado para a regra $\forall I$ quando satisfaz a condição:

> se $\begin{matrix}D\\ \varphi\end{matrix}$ $\in X$ e x é uma variável que não ocorre livre nas hipóteses não canceladas de D, então
>
> $$\frac{\begin{matrix}D\\ \varphi\end{matrix}}{\forall x\varphi}\ \forall I\ \in X.$$

Observação 233: O conjunto $\mathcal{D}^{DN_L}$ das derivações de DN_L admite princípios de indução estrutural e de recursão estrutural.

Definições 234: Em DN_L, as definições e as notações de *hipótese* de uma derivação, de *hipótese cancelada* de uma derivação, de *conclusão* de uma derivação, de *derivação de uma fórmula a partir de um conjunto de fórmulas*, de *demonstração de uma fórmula*, de *consequência sintáctica* e de *teorema* são obtidas das correspondentes definições e notações de DNP, substituindo fórmulas do Cálculo Proposicional por L-fórmulas.

Exemplo 235:

a) A seguinte árvore (com duas L_{Arit}-fórmulas)

$$\dfrac{\forall x_0(x_0 < s(x_0))}{0 < s(0)}\ \forall E$$

é uma derivação em DN de $0 < s(0)$ a partir de $\{\forall x_0(x_0 < s(x_0))\}$ (note-se que $(x_0 < s(x_0))[0/x_0] = 0 < s(0)$ e x_0 é substituível sem captura de variáveis por 0 em $x_0 < s(x_0)$) e, portanto, tem-se: $\forall x_0(x_0 < s(x_0)) \vdash 0 < s(0)$.

b) A seguinte árvore (com três L_{Arit}-fórmulas)

$$\dfrac{\dfrac{\forall x_0(x_0 < s(x_0))}{x_0 < s(x_0)}\ \forall E}{\exists x_0(x_0 < s(x_0))}\ \exists I$$

é uma derivação em DN, também a partir de $\{\forall x_0(x_0 < s(x_0))\}$, mas agora com conclusão $\exists x_0(x_0 < s(x_0))$. Note-se que $(x_0 < s(x_0))[x_0/x_0] = x_0 < s(x_0)$ e x_0 é substituível sem captura de variáveis por x_0 em $x_0 < s(x_0)$, pelo que nas inferências $\forall E$ e $\exists I$ as respetivas *condições laterais* são satisfeitas. Desta derivação pode concluir-se: $\forall x_0(x_0 < s(x_0)) \vdash \exists x_0(x_0 < s(x_0))$.

c) Sejam φ uma L-fórmula e x uma variável. Seja D a seguinte árvore de L-fórmulas:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\forall x\varphi}^{(1)}}{\varphi}\ \forall E}{\exists x\varphi}\ \exists I}{\forall x\varphi \to \exists x\varphi}\ \to I^{(1)}$$

D é uma demonstração de $\forall x\varphi \to \exists x\varphi$ (note-se que $\varphi[x/x] = \varphi$ e que x é substituível sem captura de variáveis por x em φ; por isto, as inferências $\forall E$ e $\exists I$ satisfazem as respetivas *condições laterais*), pelo que a L-fórmula $\forall_x\varphi \to \exists_x\varphi$ é um teorema.

d) Sejam φ uma L-fórmula e x uma variável. Se $x \in LIV(\varphi)$, a seguinte árvore de L-fórmulas não é uma derivação em DN, uma vez que a inferência $\exists E^{(2)}$ *não é correta*, pois a condição de x não ter ocorrências livres na premissa direita não é satisfeita.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\exists x\varphi}^{(1)} \qquad \cancel{\varphi}^{(2)}}{\varphi}\ \exists E^{(2)}}{\forall x\varphi}\ \forall I}{\exists x\varphi \to \forall x\varphi}\ \to I^{(1)}$$

e) Sejam φ uma L-fórmula e x e y variáveis. A árvore de L-fórmulas abaixo é uma demonstração em DN de $\exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi$, pelo que esta fórmula é um teorema.

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\exists x\forall y\varphi}^{(1)} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\forall y\varphi}^{(2)}}{\varphi}\,\forall E}{\exists x\varphi}\,\exists I}{\dfrac{\exists x\varphi}{\forall y\exists x\varphi}\,\forall I\ (b)}\,\exists E^{(2)}\ (a)}{\exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi}\to I^{(1)}$$

(a) x não ocorre livre na premissa direita (a fórmula $\exists x\varphi$) e x não ocorre livre em nenhuma hipótese não cancelada da derivação da premissa direita que seja distinta de $\forall y\varphi$ (na derivação da premissa direita, a única hipótese não cancelada é $\forall y\varphi$).

(b) y não ocorre livre em nenhuma hipótese não cancelada da derivação da premissa (a única hipótese não cancelada na derivação da premissa é $\exists x\forall y\varphi$, que não tem ocorrências livres de y).

f) A seguinte árvore de L_{Arit}-fórmulas não é uma derivação em DN. Note-se que x_0 não é substituível sem captura de variáveis por x_1 em $\exists x_1\neg(x_1 = x_0)$. Assim, a primeira inferência não é uma aplicação correta da regra $\forall E$.

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\forall x_0\exists x_1\neg(x_1 = x_0)}^{(1)}}{\exists x_1\neg(x_1 = x_1)}\,\forall E}{\forall x_0\exists x_1\neg(x_1 = x_0) \to \exists x_1\neg(x_1 = x_1)}\to I^{(1)}$$

Proposição 236: Sejam φ e ψ L-fórmulas, seja Γ um conjunto de L-fórmulas, seja x uma variável e seja t um L-termo.

a) Se $\Gamma \vdash \forall x\varphi$ e x é substituível sem captura de variáveis por t em φ, então $\Gamma \vdash \varphi[t/x]$.

b) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $x \notin LIV(\Gamma)$, então $\Gamma \vdash \forall x\varphi$.

c) Se $\Gamma \vdash \varphi[t/x]$ e x é substituível sem captura de variáveis por t em φ, então $\Gamma \vdash \exists x\varphi$.

d) Se $\Gamma \vdash \exists x\varphi$ e $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ e $x \notin LIV(\Gamma \cup \{\psi\})$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Dem.:

a), **b)** e **c)**: exercício.

d) Pela hipótese $\Gamma \vdash \exists x\varphi$, existe uma derivação D_1 de $\exists x\varphi$ a partir de Γ. Pela hipótese $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, existe uma derivação D_2 de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Ainda por hipótese, x não tem ocorrências livres nas fórmulas do conjunto $\Gamma \cup \{\psi\}$. Assim, x não tem ocorrências livres nem na conclusão de D_2, nem em nenhuma das hipóteses não canceladas de D_2 diferentes de φ. Logo,

$$\dfrac{\begin{matrix} \\ D_1 \\ \exists x\varphi \end{matrix} \quad \begin{matrix} \cancel{\varphi} \\ D_2 \\ \psi \end{matrix}}{\psi}\ \exists E,$$

é uma derivação de ψ a partir de Γ.

□

Teorema 237 (Correção): Sejam Γ um conjunto de L-fórmulas e φ uma L-fórmula. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \models \varphi$.

Dem.: O resultado é consequência imediata da seguinte propriedade: para toda a derivação D em DN, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$. Esta propriedade demonstra-se por indução nas derivações de DN.

Por exemplo, caso D seja uma derivação da forma:

$$\dfrac{\begin{matrix} \\ D_1 \\ \exists x\psi \end{matrix} \quad \begin{matrix} \cancel{\psi} \\ D_2 \\ \varphi \end{matrix}}{\varphi}\ \exists E.$$

Então: i) D_1 é uma derivação de $\exists x\psi$ a partir de Γ; ii) D_2 é uma derivação de φ a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$; iii) x não ocorre livre nem em φ nem nas hipóteses não canceladas de D_2 que são diferentes de ψ. Pela H.I. relativa à subderivação D_1, segue que $\Gamma \models \exists x\psi$ e, pela H.I. relativa à subderivação D_2, segue que $\Gamma, \psi \models \varphi$. Por fim, destas duas relações de consequência e de iii), aplicando **d)** da Proposição 229, segue $\Gamma \models \varphi$. □

Observação 238: O contrarrecíproco do Teorema da Correção establece que, para todo o conjunto de L-fórmulas Γ a para toda a L-fórmula φ,

$$\Gamma \not\models \varphi \Rightarrow \Gamma \nvdash \varphi$$

e permite mostrar resultados de "não-derivabilidade" no sistema DN.

Por exemplo, uma vez que E_{Arit} valida $\exists x_0(x_0 = 0)$ e valida $\exists x_0\neg(x_0 = 0)$, mas E_{Arit} não valida $\exists x_0((x_0 = 0) \wedge \neg(x_0 = 0))$, então

$$\exists x_0(x_0 = 0), \exists x_0\neg(x_0 = 0) \not\models \exists x_0((x_0 = 0) \wedge \neg(x_0 = 0)),$$

pelo que

$$\exists x_0(x_0 = 0), \exists x_0\neg(x_0 = 0) \nvdash \exists x_0((x_0 = 0) \wedge \neg(x_0 = 0)).$$

Teorema 239 (Completude): Sejam Γ um conjunto de L-fórmulas e φ uma L-fórmula. Se $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

Dem.: Ver bibliografia recomendada. □

Teorema 240 (Adequação): Sejam Γ um conjunto de L-fórmulas e φ uma L-fórmula. Então, $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \vdash \varphi$.

Dem.: Imediata, a partir dos teoremas da Correção e da Completude. □

Corolário 241: Uma L-fórmula é um teorema de DN se e só se é universalmente válida.
Dem.: Pelo Teorema da Adequação (particularizando Γ com o conjunto vazio), tem-se que uma L-fórmula φ é teorema de DN se e só se $\emptyset \models \varphi$ e prova-se, facilmente, que $\emptyset \models \varphi$ se e só se φ é universalmente válida. □