Análise

folha de exercícios 5 — 2017/2018

• Funções vetoriais

1. Descreva a curva definida por cada uma das seguintes funções vetoriais:

(a) $\mathbf{r}(t) = (t-2, 2t+3)$, $t \in \mathbb{R}$;

(b) $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 5\,\text{sen}\, t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

(c) $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 5\,\text{sen}\, t)$, $t \in [0, \pi]$;

(d) $\mathbf{r}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}$, $t \in \mathbb{R}$;

(e) $\mathbf{r}(t) = (t, |t|)$, $t \in \mathbb{R}$;

(f) $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\, t)$, $t \in \mathbb{R}$;

(g) $\mathbf{r}(t) = (3\cos t, 3\,\text{sen}\, t, 2)$, $t \in [0, 2\pi]$;

(h) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \text{sen}\, t, t)$, $t \in [0, 5\pi]$.

2. Determine parametrizações para as trajetórias:

(a) $y = 2x + 1$, em $\mathbb{R}^2$;

(b) $y = x^3 + 1$, em $\mathbb{R}^2$;

(c) $y^2 = x$, em $\mathbb{R}^2$;

(d) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, em $\mathbb{R}^2$;

(e) $\{(x, y) : y = e^x\}$;

(f) $x^2 + y^2 = 25,\ z = 2$ descrita no sentido direto.

3. Determine uma parametrização para a elipse que resulta da interseção da superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $y + z = 2$.

4. Para as funções apresentadas no exercício 1 determine $\lim\limits_{t\to 0} \mathbf{r}(t)$.

5. Determine o vetor velocidade e o versor tangente de cada um dos seguintes caminhos num ponto à sua escolha

(a) $\mathbf{v} : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $\mathbf{v}(t) = (t, t^2)$;

(b) $\mathbf{v} : [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $\mathbf{v}(t) = e^t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$;

(c) $\mathbf{v} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dado por $\mathbf{v}(t) = \text{sen}\, 3t\,\vec{i} + \cos 3t\,\vec{j} + t^{3/2}\,\vec{k}$.

6. Considere o caminho $\boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\boldsymbol{\gamma}(t) = (a\cos t, a\,\text{sen}\, t)$, onde $a > 0$ é uma constante.

(a) Verifique que $\|\boldsymbol{\gamma}(t)\| = a$ e que $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ é ortogonal a $\boldsymbol{\gamma}(t)$.

(b) Mostre que, em geral, se um caminho $\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(f(t), g(t)\big)$ é diferenciável e $\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|$ é constante, então $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ e $\boldsymbol{\gamma}(t)$ são ortogonais.

7. Determine a equação da reta tangente à curva descrita pelo caminho $\boldsymbol{\gamma}(t) = \text{sen}(3t)\,\vec{i} + \cos(3t)\,\vec{j} + t^{3/2}\,\vec{k}$ em $t = 0$.

8. Determine as equações paramétricas da reta tangente à hélice com equação paramétridas $x = 2\cos t$, $y = \text{sen}\, t$ e $z = t$, no ponto $(0, 1, \frac{\pi}{2})$.

9. Determine um caminho diferenciável $\boldsymbol{\gamma}$ tal que $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0, -5, 1)$ e $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (t, e^t, t^2)$.

10. Um partícula em movimento começa na posição inicial $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 0)$ com velocidade inicial $\mathbf{v}(0) = (1, -1, 1)$. A sua aceleração é $\mathbf{a}(t) = (4t, 6t, 1)$, $t \geq 0$. Determine a sua posição e velocidade em cada instante t.

11. Sabendo que a posição de uma partícula no espaço é dada, no instante $t \in \mathbb{R}$, por

$$\mathbf{s}(t) = \cos t\, \vec{i} - \mathrm{e}^{2t}\, \vec{j} + \left(\frac{t}{5} - 1\right)^5 \vec{k}$$

determine os vetores posição, velocidade e aceleração da partícula no instante $t = 0$.

12. O vetor posição de um objecto em movimento no plano é dado por

$$\mathbf{r}(t) = t^3\vec{i} + t^2\vec{j}, \quad t \geq 0.$$

Determine o vetor velocidade, a velocidade escalar e o vetor aceleração quando $t = 1$.

13. Determine, para cada instante t, o vetor velocidade, a velocidade escalar e o vetor aceleração de uma partícula cuja posição no espaço é dada por

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, \mathrm{e}^t, t\,\mathrm{e}^t), \quad t \geq 0.$$

- **Comprimento de arco e curvatura**

14. Calcule o comprimento de arco da curva parametrizada por

(a) $\mathbf{r}(t) = (3\cos 2t, 3\,\mathrm{sen}\, 2t), \quad 0 \leq t \leq \pi;$

(b) $\mathbf{r}(t) = (\mathrm{e}^t\,\mathrm{sen}\, t, \mathrm{e}^t \cos t), \quad 0 \leq t \leq 1;$

(c) $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t, t), \quad a \leq t \leq b;$

(d) $\mathbf{r}(t) = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^t\,\mathrm{sen}\, t, \mathrm{e}^t \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$

(e) $\mathbf{r}(t) = (6t, 3\sqrt{2}t^2, 2t^3), \quad 0 \leq t \leq 1;$

(f) $\mathbf{r}(t) = (t^2, 2t, \ln t), \quad 1 \leq t \leq e.$

15. Reparametrize com respeito ao comprimento de arco medido a partir do ponto onde $t = 0$ na direção de t crescente.

(a) $\mathbf{r}(t) = (\mathrm{e}^t\,\mathrm{sen}\, t, \mathrm{e}^t \cos t)$

(b) $\mathbf{r}(t) = (1 + 2t, 3 + t, -5t)$

(c) $\mathbf{r}(t) = (3\,\mathrm{sen}\, t, 4t, 3\cos t)$

16. Determine o vetor unitário $\mathbf{T}$ e use a fórmula $\kappa(t) = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$ para determinar a curvatura quando

(a) $\mathbf{r}(t) = (\mathrm{sen}\, 4t, 3t, \cos 4t);$

(b) $\mathbf{r}(t) = (6t, 3\sqrt{2}t^2, 2t^3);$

(c) $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \mathrm{sen}\, t, \mathrm{sen}\, t);$

(d) $\mathbf{r}(t) = (t^2, 2t, \ln t).$

17. Determine a curvatura das curvas parametrizadas por

(a) $\mathbf{r}(t) = (a\cos 2t, a\,\mathrm{sen}\, 2t, 3), \quad a > 0$ constante;

(b) $\mathbf{r}(t) = (1, t, t^2);$

(c) $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 2, t^2 - 4t, 2t);$

(d) $\mathbf{r}(t) = (1 + t, 1 - t, 3t^2);$

(e) $\mathbf{r}(t) = (\mathrm{sen}\, t, \cos t, \mathrm{sen}\, t);$

(f) $\mathbf{r}(t) = (1, t, t^3).$

18. Mostre que se $y = f(x)$ é a equação de uma curva em $\mathbb{R}^2$, então a curvatura κ satisfaz

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{\left[1 + \left(f'(x)\right)^2\right]^{3/2}}.$$

19. Encontre a curvatura da parábola $y = x^2$ nos pontos $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, 4)$. Em que ponto $\left(x, x^2\right)$ a curvatura é máxima?

20. Determine a equação de uma parábola que tenha curvatura 4 na origem.

21. Determine a curvatura das curvas em $\mathbb{R}^2$ de equações:

(a) $y = \operatorname{sen} x$; (b) $y = x^4$; (c) $y = \mathrm{e}^x$.

22. Mostre que a curvatura de uma curva plana de equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$ é dada por

$$\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{\left[(x')^2 + (y')^2\right]^{3/2}}.$$

23. Use a fórmula do exercício anterior para determinar a curvatura das curvas com equações paramétricas

(a) $x = t^3, \quad y = t^2$; (b) $x = t \operatorname{sen} t, \; y = t \cos t$.

• **Vetores tangente, normal e binormal**

24. Para as funções vetoriais seguintes determine os vetores unitários tangente, normal e binormal, $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$.

(a) $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen} 4t, 3t, \cos 4t)$
(b) $\mathbf{r}(t) = (6t, 3\sqrt{2}t^2, 2t^3)$
(c) $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t)$
(d) $\mathbf{r}(t) = (t^2, 2t, \ln t)$

25. Determine os vetores $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ no ponto indicado.

(a) $\mathbf{r}(t) = \left(t^2, \frac{2}{3}t^3, t\right), \quad \left(1, \frac{2}{3}, 1\right)$
(b) $\mathbf{r}(t) = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t, \mathrm{e}^t \cos t), \quad (1, 0, 1)$
(c) $\mathbf{r}(t) = (1, t, t^2), \quad (1, 0, 0)$

26. Determine as equações do plano normal e do plano osculador das curvas do exercício anterior, nos pontos indicados.

27. Em que ponto da curva parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (t^3, 3t, t^4)$ é o plano normal paralelo ao plano de equação $6x + 6y - 8z = 1$?

28. Determine as equações dos planos normal e osculador da curva no ponto indicado.

(a) $x = 2\operatorname{sen} 3t, \quad y = t, \quad z = 2\cos 3t; \quad (0, \pi, -2)$
(b) $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3; \quad (1, 1, 1)$

29. Mostre que a curvatura κ está relacionada com os vetores tangente $\mathbf{T}$ e normal $\mathbf{N}$ pela equação

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}.$$

30. A *torsão* de uma curva parametrizada por uma função $\mathbf{r}$ é definida por

$$\tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2}.$$

Calcule a torsão da curva $\mathbf{r}(t) = \left(t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}t^3\right)$.

31. Mostre que a hélice circular $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$, onde a e b são constantes positivas, tem curvatura e torsão constantes.