

Análise

folha de exercícios 4

2017/2018

Soluções

• Extremos de funções

1. (a) $f(x, y) = 3x^2 + y^2$

- Pontos críticos

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

- Discriminante

Temos $f_{xx}(x, y) = 6$, $f_{yy}(x, y) = 2$ e $f_{xy}(x, y) = 0$. Assim,

$$\Delta_f(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 = 12$$

- Classificação dos pontos críticos

Como $\Delta_f(0, 0) = 12 > 0$ e $f_{xx}(0, 0) = 6 > 0$, o ponto $(0, 0)$ é um minimizante e o mínimo local é $f(0, 0) = 0$.

(b) $f(x, y) = x^2 - 4y^2 + 3$

- Pontos críticos

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ -8y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

- Discriminante

Temos $f_{xx}(x, y) = 2$, $f_{yy}(x, y) = -8$ e $f_{xy}(x, y) = 0$. Assim,

$$\Delta_f(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 = -16$$

- Classificação dos pontos críticos

Como $\Delta_f(0, 0) = -16 < 0$, o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela.

(c) Para $f(x, y) = xy$, o ponto $(0, 0)$ é o único ponto crítico e é um ponto de sela.

(d) $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$

- Pontos críticos

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

- Discriminante

Temos $f_{xx}(x, y) = -2$, $f_{yy}(x, y) = -2$ e $f_{xy}(x, y) = 0$. Assim,

$$\Delta_f(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 = 4$$

- Classificação dos pontos críticos

Como $\Delta_f(0, 0) = 4 > 0$ e $f_{xx}(0, 0) = -2 < 0$, o ponto $(0, 0)$ é um maximizante e o máximo local é $f(0, 0) = 5$.

(e) $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$

- Pontos críticos

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -4x + 3y^2 + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4/3 \\ y = 2/3 \end{cases}$$

- Discriminante

Temos $f_{xx}(x, y) = 2$, $f_{yy}(x, y) = 6y$ e $f_{xy}(x, y) = -4$. Assim,

$$\Delta_f(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 = 12y - 16$$

- Classificação dos pontos críticos

Como $\Delta_f(4, 2) = 8 > 0$ e $f_{xx}(4, 2) = 2 > 0$, o ponto $(4, 2)$ é um minimizante e o mínimo local é $f(4, 2) = 0$.

Como $\Delta_f(4/3, 2/3) = -8 < 0$, $(4/3, 2/3)$ é um ponto de sela.

(f) $f(x, y) = x^3 - y^3 + 6xy$

- Pontos críticos

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + 6y = 0 \\ -3y^2 + 6x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

- Discriminante

Temos $f_{xx}(x, y) = 6x$, $f_{yy}(x, y) = -6y$ e $f_{xy}(x, y) = 6$. Assim,

$$\Delta_f(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 = -36xy - 36$$

- Classificação dos pontos críticos

Como $\Delta_f(0, 0) = -36 < 0$, $(0, 0)$ é um ponto de sela.

Como $\Delta_f(2, -2) = 108 > 0$ e $f_{xx}(2, -2) = 12 > 0$, o ponto $(2, -2)$ é um minimizante e o mínimo local é $f(2, -2) = -8$.

2. (a) $f(x, y) = (x - 4) \ln y$

- Pontos críticos

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln y = 0 \\ \frac{x-4}{y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

- Discriminante

Temos $f_{xx}(x, y) = 0$, $f_{yy}(x, y) = -\frac{x-4}{y^2}$ e $f_{xy}(x, y) = \frac{1}{y}$. Assim,

$$\Delta_f(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 = -\frac{1}{y^2}$$

- Classificação dos pontos críticos

Como $\Delta_f(4, 1) = -1 < 0$, o ponto $(4, 1)$ é um ponto de sela.

(b) Ponto $(0, -1)$ é um ponto de sela.

(c) $f(x, y) = 2x^3 - y^3 - 24x + 75y + 7$

- Pontos críticos

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x^2 - 24 = 0 \\ -3y^2 + 75 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}$$

- Discriminante

Temos $f_{xx}(x, y) = 12x$, $f_{yy}(x, y) = -6y$ e $f_{xy}(x, y) = 0$. Assim,

$$\Delta_f(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 = -72xy$$

- Classificação dos pontos críticos

Como $\Delta_f(2, 5) = 0$ e $\Delta_f(-2, -5) = 0$, os pontos $(2, 5)$ e $(-2, -5)$ são pontos de sela.

Temos $\Delta_f(-2, 5) > 0$ e $f_{xx}(-2, 5) < 0$. Logo, $(-2, 5)$ é maximizante e $f(-2, 5)$ é máximo local.

Como $\Delta_f(2, -5) > 0$ e $f_{xx}(2, -5) > 0$, $(2, -5)$ é minimizante e $f(2, -5)$ é mínimo local.

(d) Em $(-6, 3)$ existe um máximo local.

Em $(6, 3)$ temos um ponto de sela.

(e) Em $(0, 0)$ temos um ponto de sela.

Em $(16, 64)$ existe um mínimo relativo.

(f) $(-2, 3)$ e em $(4, -5)$ são pontos de sela. Máximo local em $(-2, -5)$ e mínimo local em $(4, 3)$.

3. $f(x, y) = 8x + 10y - 0.001(x^2 + xy + y^2) - 10000$

- Pontos críticos

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8 - 0.001(2x + y) = 0 \\ 10 - 0.001(x + 2y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2000 \\ y = 4000 \end{cases}$$

- Discriminante

Temos $f_{xx}(x, y) = -0.002$, $f_{yy}(x, y) = -0.002$ e $f_{xy}(x, y) = -0.001$. Assim,

$$\Delta_f(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 = 0.000003$$

- Classificação dos pontos críticos

Como $\Delta_f(2000, 4000) > 0$ e $f_{xx}(2000, 4000) = -0.002 < 0$, as quantidades $x = 2000$ e $y = 4000$ conduzem a um lucro máximo.

4. Se x e y representarem as dimensões do terreno retangular (largura e comprimento) pretende-se resolver o problema

$$\text{Minimizar } f(x, y) = 2x + y \text{ sujeita a } xy = 1250$$

Podemos transformar este problema num problema de otimização de uma função de uma única variável. Basta fazer, por exemplo,

$$y = \frac{1250}{x}$$

e substituir em $f(x, y)$. Obtemos

$$f(x, y) = 2x + y = 2x + \frac{1250}{x}.$$

Definindo $g(x) = 2x + \frac{1250}{x}$, calculemos os zeros de g' .

$$g'(x) = 0 \iff 2 - \frac{1250}{x^2} = 0 \iff x = 25 \vee x = -25.$$

Apenas interessa $x = 25$. Como $g''(25) = \frac{2500}{x^3} \Big|_{x=25} > 0$, a função g atinge um mínimo em $x = 25$. Logo, as dimensões do terreno com área $1250m^2$ que minimizam a vedação como indicado são

$$x = 25m \text{ e } y = 50m.$$

5. Sejam x, y e z as dimensões da caixa (comprimento, largura e altura). Pretende-se resolver o problema

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } f(x, y, z) &= 1 \cdot (2xz + 2yz) + 3 \cdot xy + 5 \cdot xy = 2xz + 2yz + 8xy \\ \text{sujeita a } xyz &= 32 \end{aligned}$$

Este problema pode ser transformado num problema sem restrições com duas variáveis. Fazendo, por exemplo,

$$z = \frac{32}{xy},$$

vem

$$f(x, y, z) = 2x \frac{32}{xy} + 2y \frac{32}{xy} + 8xy = \frac{64}{y} + \frac{64}{x} + 8xy.$$

Definindo $g(x, y) = \frac{64}{y} + \frac{64}{x} + 8xy$, verifica-se que $(2, 2)$ é o único ponto crítico (Note que se deve ter $x \neq 0$ e $y \neq 0$) onde g atinge um mínimo local. Assim, as dimensões da caixa devem ser $x = 2$, $y = 2$ e $z = 32/4 = 8$.

6. Função objectivo: $f(x, y) = xy$

Restrição: $g(x, y) = 8$ em que $g(x, y) = x^2 + y^2$.

- Pontos críticos

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \lambda 2x \\ x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

Como nem x nem y podem ser zero (verificar), da primeira e segunda equações podemos tirar

$$2\lambda = \frac{y}{x} \quad \text{e} \quad 2\lambda = \frac{x}{y}$$

o que implica que

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y} \quad \text{ou} \quad x^2 = y^2.$$

Agora, substituindo $x^2 = y^2$ na terceira equação obtemos

$$2x^2 = 8 \iff x = \pm 2.$$

De $x^2 = y^2$, para $x = 2$ vem $y = \pm 2$ e para $x = -2$ vem também $y = \pm 2$. Temos então os pontos

$$(2, 2), (2, -2), (-2, 2) \text{ e } (-2, -2).$$

- Valor de f nos pontos críticos

Como

$$f(2, 2) = f(-2, -2) = 4 \quad \text{e} \quad f(-2, 2) = f(2, -2) = -4$$

temos que quando $x^2 + y^2 = 8$ o máximo valor de f é 4, em $(2, 2)$ e $(-2, -2)$, e o mínimo é -4 , em $(2, -2)$ e $(-2, 2)$.

7. (a) Função objectivo: $f(x, y) = xy$

Restrição: $g(x, y) = 1$ em que $g(x, y) = x + y$.

- Pontos críticos

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \lambda \cdot 1 \\ x = \lambda \cdot 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} - \\ x = y \\ x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} - \\ x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Valor de f nos pontos críticos

Admitindo que f tem um máximo quando $x + y = 1$, esse máximo ocorre em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e é igual a $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Este problema poderia ser resolvido sem recorrer ao método dos multiplicadores de Lagrange. Como de $x + y = 1$, podemos escrever $y = 1 - x$ e trata-se de determinar os extremos da função de uma variável

$$h(x) = f(x, 1 - x) = x(1 - x) = x - x^2.$$

A derivada $h'(x) = 1 - 2x$ tem um zero em $x = \frac{1}{2}$ e é positiva para $x \in]-\infty, \frac{1}{2}[$ e negativa para $x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$, o que significa que $x = \frac{1}{2}$ é um ponto onde ocorre um máximo: $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. Assim, para $x = \frac{1}{2}$ e $y = 1 - x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ a função f tem um máximo igual a $\frac{1}{4}$.

(b) Função objectivo: $f(x, y) = x^2 + y^2$

Restrição: $g(x, y) = 1$ em que $g(x, y) = xy$.

- Pontos críticos

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = \lambda y \\ 2y = \lambda x \\ xy = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} - \\ x^2 = y^2 \\ xy = 1 \end{cases}$$

Note que nem x nem y podem ser nulos. Da segunda equação vem $x = \pm\sqrt{y^2} = \pm|y|$. Se $y > 0$, temos $x = \pm y$ e se $y < 0$ temos $x = \mp y$. Em qualquer dos casos, vem

$$x = \pm y.$$

Se $x = y$, da última equação vem

$$x^2 = 1 \iff x = \pm 1$$

e obtemos os pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Se $x = -y$, a última equação fica $x^2 = -1$ que é impossível.

- Valor de f nos pontos críticos
Temos

$$f(1, 1) = 1 \quad \text{e} \quad f(-1, -1) = 1.$$

Nos pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ a função f assume um mínimo sujeita à restrição $xy = 1$.

(c) Função objectivo: $f(x, y) = x^2 - y^2$

Restrição: $g(x, y) = 4$ em que $g(x, y) = x^2 + y^2$.

- Pontos críticos

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ -2y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Se $x \neq 0$, da primeira equação podemos tirar que $\lambda = 1$ e segue-se, da segunda equação, que $y = 0$.
Da terceira equação tiramos os pontos $(2, 0)$ e $(-2, 0)$.

Se $x = 0$, obtemos os pontos $(0, 2)$ e $(0, -2)$.

- Valor de f nos pontos críticos
Temos

$$f(2, 0) = f(-2, 0) = 4 \quad \text{e} \quad f(0, 2) = f(0, -2) = -4.$$

Nos pontos $(0, 2)$ e $(0, -2)$ a função f assume um mínimo sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 4$.

8. (b) Função objectivo: $f(x, y) = e^{xy}$

Restrição: $g(x, y) = 4$ em que $g(x, y) = x^2 + y^2$.

- Pontos críticos

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} y e^{xy} = \lambda 2x \\ x e^{xy} = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} y/x = 2\lambda / e^{xy} \\ x/y = 2\lambda / e^{xy} \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Da duas primeiras equações obtemos que $x^2 = y^2$ e juntamente com a terceira equação chegamos aos pontos

$$(2, 2), (2, -2), (-2, 2) \text{ e } (-2, -2).$$

- Valor de f nos pontos críticos

Temos que

$$f(2, 2) = f(-2, -2) = e^4$$

é um máximo de f sujeita à condição $x^2 + y^2 = 4$ e

$$f(-2, 2) = f(2, -2) = e^{-4}$$

é um mínimo.

9. Trata-se de calcular o ponto onde a função que nos dá a distância de um ponto (x, y, z) ao ponto $(1, 2, 3)$,

$$d(x, y, z) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2},$$

atinge um mínimo quando sujeita à restrição $x + y + 2z = 1$. Equivalentemente, podemos antes minimizar o quadrado da distância, isto é, considerar o problema

$$\text{Minimizar } f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \text{ sujeita a } x + y + 2z = 1.$$

Função objectivo: $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$

Restrição: $g(x, y, z) = 1$ em que $g(x, y, z) = x + y + 2z$.

- Pontos críticos

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-1) = \lambda \\ 2(y-2) = \lambda \\ 2(z-3) = 2\lambda \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

Da duas primeiras equações obtemos

$$x - 1 = y - 2 \iff y = x + 1$$

e da primeira e últimas equações vem

$$z - 3 = 2(x - 1) \iff z = 2x + 1.$$

Substituindo na última equação temos

$$x + (x + 1) + 2(2x + 1) = 1,$$

donde se obtém $x = -\frac{1}{3}$. Finalmente, encontra-se o ponto

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

que é o ponto do plano $x + y + 2z = 1$ que se encontra à distância mínima de $M = (1, 2, 3)$.

- 10.** Trata-se de encontrar o mínimo de $f(x, y) = 8 \times 2x + 8 \times y + 24 \times y = 16x + 32y$ sujeita à restrição $xy = 800$, usando o método dos multiplicadores de Lagrange ou transformando o problema num problema de otimização de uma função de uma única variável.