UNIVERSIDADE DO MINHO

Exame **Álgebra Linear** **LCC** **Data- 03/02/2017**

Nome ....

N^o. ....

I. *Nas perguntas seguintes, de escolha múltipla, cada resposta certa vale* 0.5 *valor e cada resposta errada vale* −0.1.

1. Qual das seguintes aplicações é aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$?

(a)(✓) $f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$; (b) $f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$;

(c) $f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 \\ y+1 \end{bmatrix}$; (d) $f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+y^2 \\ 2xy \end{bmatrix}$.

2. Sejam A e B matrizes simétricas de ordem n. Qual das seguintes não é necessariamente simétrica?

(a) $-2B^T$ (b) $A+B$ (c)(✓) AB (d) A^TA.

3. Apenas um dos seguites vetores pertence ao espaço nulo da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -8 \end{bmatrix}$:

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (c)(✓) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Qual é?

4. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ as aplicações lineares definidas por

$$T : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2x+z \\ x+2z \end{bmatrix} \text{ e } S : \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2a \\ a-b \\ a+b \end{bmatrix}.$$

Qual das seguintes matrizes representa a aplicação composta $S \circ T$ nas bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$?

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (b)(✓) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

5. Os valores próprios de matriz $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ são

(a)(✓) $-1,-1,1$ $(b)1,1,-1$ $(c)-1,-1,-1$ $(d)1,1,1$.

6. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c & x \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ d & e & f & y \\ g & h & i & z \end{vmatrix} = 6$. O determinante da matriz $\begin{bmatrix} 6b & 2c & 2a \\ 3e & f & d \\ 3h & i & g \end{bmatrix}$ é

(a) -18 (b)(✓) 18 (c) 9 (d) 24.

II. *No seguinte grupo de questões, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F). Cada resposta certa vale* 0.5 *valor e cada resposta errada vale* -0.1.

1. Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}), \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \quad \text{e } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

(a) $(-1, 1, 1, 2)$ é solução do sistema $Ax = b$;	V(✓)	F
(b) O sistema $Ax = 0$ é possível e determinado;	V	F(✓)
(c) O sistema $Ax = b$ é possível e indeterminado;	V(✓)	F
(d) O solução geral do $Ax = b$ é $(\alpha - \beta, 2 - \alpha, \alpha, \beta)$.	V(✓)	F

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Então

(a) As linhas de A formam um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^3$;	V(✓)	F
(b) As colunas de A formam um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^3$;	V(✓)	F
(c) A característica de A é igual a 3;	V(✓)	F
(d) O sistema $Ax = b$ tem uma única solução, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}^3$.	V(✓)	F

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2y + z, x + 3y + 2z), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Então

(a) T é injectiva;	V	F(✓)
(b) T não é sobrejectiva;	V	F(✓)
(c) T não é injectiva e $(1, -1, 1) \in nuc(T)$;	V(✓)	F
(d) T é sobrejectiva e $(1, -1, 1) \in nuc(T)$.	V(✓)	F

4. Em $\mathbb{R}^3$, considere o seguinte conjunto:

$$S = \{(0, 1, 4), (3, 5, 1), (1, 2, 1)\}.$$

(a) S gera $\mathbb{R}^3$.	V(✓)	F
(b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4y - 7x\}$.	V	F(✓)
(c) O terceiro vector de S é combinação linear dos restantes.	V	F(✓)
(d) $(2, 4, 3) \in < S >$	V(✓)	F

5. Considere os seguintes subespaços vectoriais do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$:

$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0, y - z = 0\}$,

$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0, z = 0\}$.

Então

(a) $(7, 1, -2) \in V_1 + V_2$;	V	F(✓)
(b) $V_2 = \{(2a, a, 0) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$;	V(✓)	F
(c) $V_1 \subseteq V_2$;	V	F(✓)
(d) $\mathbb{R}^3$ é soma directa de V_1 e V_2;	V	F(✓)

A questão que se segue deverá ser resolvida integralmente e devidamente justificada.

III. (*4 valores*) Sejam U o subespaço do espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores

$$u_1 = (0,0,1,1),\ u_2 = (0,1,1,1),\ u_3 = (1,1,1,2) \text{ e } u_4 = (-1,0,1,0)$$

e V o subconjunto

$$V = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a-b = b-c = 2a-d = 0\} \text{ de } \mathbb{R}^4.$$

(a) Determine uma base e a dimensão de U.

(b) Verifique que $V =< (1,1,1,2) >$.

(c) Justifique se $U+V$ é soma direta.

(d) Determine o valor de α de modo que o vector $(1,-1,0,\alpha)$ pertença a U.

(*3 valores*) Para cada $x \in \mathbb{R}$, seja

$$A_x = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}.$$

1. Determine os valores de x para os quais A_x é invertível.

2. Seja $x = 2$, utilizando regra de Cramer, encontre as soluções de sistema $Ax = b$, onde $b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.