



Universidade do Minho

Departamento de Matemática

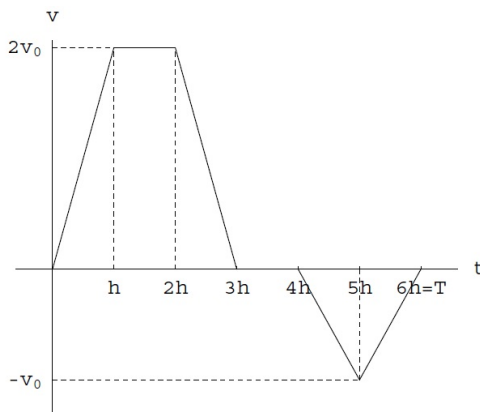
Licenciatura em Ciências da Computação

Cálculo

2020/21

Integrais

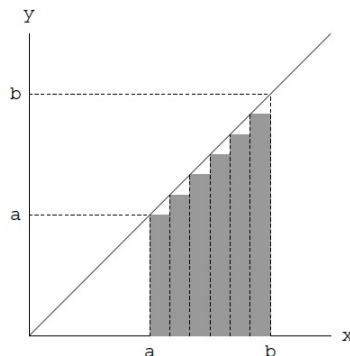
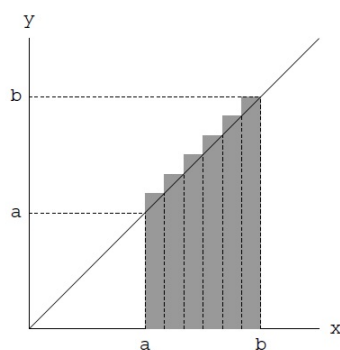
1. Um objeto move-se ao longo de um eixo de coordenadas x . O seu movimento é descrito por uma função $x = x(t)$ no intervalo de tempo $[0, T]$. Sabendo que a posição no instante inicial é $x(0) = 0$ e que a lei das velocidades deste movimento é descrita pelo seguinte gráfico:



determine:

- (a) os intervalos de tempo onde o objeto está respectivamente: parado, em movimento uniforme, em movimento acelerado e em movimento desacelerado;
 - (b) os deslocamentos efetuados nestes intervalos de tempo;
 - (c) as distâncias percorridas nos mesmos intervalos de tempo;
 - (d) a posição no instante $t = T$ e o deslocamento total;
 - (e) a lei do movimento $x(t)$. Esboce o seu gráfico.
2. Considere a sequência de pontos $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ no intervalo $[a, b]$, onde $x_i = a + i(b-a)/n$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$. As somas superior e inferior da função $f(x) = x$ neste intervalo são:

$$S_n = \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{b-a}{n} \right) \text{ e } s_n = \sum_{i=1}^n x_{i-1} \left(\frac{b-a}{n} \right).$$



Mostre que:

- (a) $S_n = (b-a) \left(a + (b-a) \frac{n+1}{2n} \right);$
- (b) $s_n = (b-a) \left(a + (b-a) \frac{n-1}{2n} \right);$
- (c) ambas estas sucessões convergem para $(b^2 - a^2)/2;$
- (d) conclua que $\int_a^b x \, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$

3. Calcule os seguintes integrais:

- (1) $\int_0^3 x^2 \, dx$
- (2) $\int_2^3 (3x^2 - 4x + 2) \, dx$
- (3) $\int_0^1 e^{\pi x} \, dx$
- (4) $\int_0^2 |(x-1)(3x-2)| \, dx$
- (5) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx$
- (6) $\int_{-3}^5 |x-1| \, dx$
- (7) $\int_{3/4}^{4/3} \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+1}} \, dx$
- (8) $\int_0^1 \log(x^2+1) \, dx$
- (9) $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} \, dx$
- (10) $\int_{-5}^0 2x\sqrt{4-x} \, dx$
- (11) $\int_0^2 x^3 e^{x^2} \, dx$
- (12) $\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x \cos x \, dx$
- (13) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen} x| \, dx$
- (14) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 u \operatorname{sen} u \, du$
- (15) $\int_{-4}^0 t \sqrt{1+t^2} \, dt$
- (16) $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx$
- (17) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \operatorname{arcsen} x \, dx$
- (18) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(2x) \cos x \, dx$
- (19) $\int_1^{e^3} \log t \, dt$
- (20) $\int_0^{\pi/4} e^x \left(e^x + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) \, dx$
- (21) $\int_0^{\pi/2} |\operatorname{sen} x - \cos x| \, dx$
- (22) $\int_{-3}^2 \sqrt{|x|} \, dx$

$$(23) \quad \int_0^2 f(x) dx \quad \text{com} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

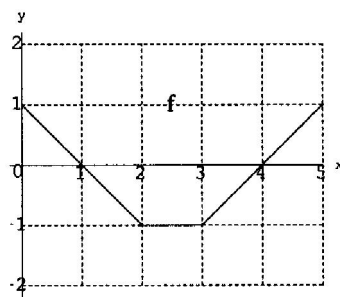
$$(24) \quad \int_0^1 g(x) dx \quad \text{com} \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x & \text{se } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\int_0^x f(t) dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x \sin(2x) + \frac{\cos(2x)}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Calcule $f(\frac{\pi}{4})$ e $f'(\frac{\pi}{4})$.

5. Considere $F : [0, \sqrt{5}] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$, onde a função $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada pelo seguinte gráfico



Determine $F(\sqrt{3})$ e $F'(\sqrt{3})$.

6. Em cada uma das alíneas, calcule a função derivada de F , sendo F definida por:

$$(a) \quad F(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-3} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(b) \quad F(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(c) \quad F(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(0) = 2$ e $f'(x) > 4$, para todo $x \neq 0$, e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt - (2x + 2x^2).$$

- (a) Calcule $g'(x)$ e $g''(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Mostre que $g(0) = g'(0) = 0$ e que $g''(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.
- (c) Estude a monotonia de g e conclua que $\int_0^x f(t) dt > 2x + 2x^2$, $\forall x \neq 0$.

8. Considere a função real de variável real definida por $F(x) = \int_1^{x^2} e^{t^2} dt$, $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Calcule os zeros de F .
- (b) Estude a paridade da função F .
- (c) Determine os intervalos de monotonia da função.

9. Dê exemplo de, ou mostre porque não existe:

- (a) uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ não integrável;
- (b) uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável mas não integrável;
- (c) uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável mas não primitivável;
- (d) uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ primitivável mas não derivável;
- (e) uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável mas não primitivável;
- (f) uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ não integrável tal que $|f|$ seja integrável.

10. Em cada alínea calcule a área da região limitada pelas curvas de equações:

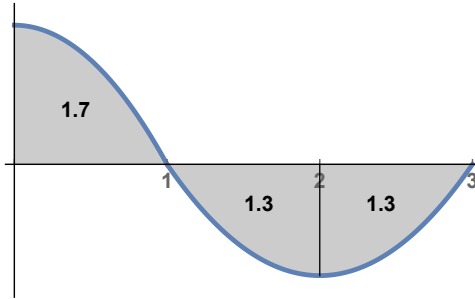
- (a) $x = 1$, $x = 4$, $y = \sqrt{x}$, $y = 0$
- (b) $x = 0$, $x = 2$, $y = x$, $y = x^2$
- (c) $x = 0$, $x = 1$, $y = 3x$, $y = -x^2 + 4$
- (d) $x = 0$, $x = 2$, $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, $x^2 + (y + 2)^2 = 4$
- (e) $x = 0$, $x = \pi/2$, $y = \sin x$, $y = \cos x$
- (f) $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$
- (g) $x = 0$, $x = 1$, $y = \sqrt{x}$, $y = -x + 2$
- (h) $x = -1$, $y = |x|$, $y = 2x$, $x = 1$
- (i) $y = \log x$, $y = 0$, $x = e^2$
- (j) $x = 0$, $x = \pi$, $y = 2 \sin x$, $y = -\sin x$
- (k) $y^2 = 2x - 2$, $y - x + 5 = 0$

- (l) $y = -x^3, \quad y = -(4x^2 - 4x)$
- (m) $y = -x^2 + \frac{7}{2}, \quad y = x^2 - 1$
- (n) $y = 0, \quad x = -\log 2, \quad x = \log 2, \quad y = \operatorname{sh} x$

11. Estabeleça um integral (ou soma de integrais) que dê a área da região

- (a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge -x \leq y \leq x^2\}$
- (b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq x\}$
- (c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$
- (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\}$
- (e) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq e^x \wedge 0 \leq y \leq e^{-x}\}$
- (f) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq x^2 \wedge 0 \leq y \leq 2 - x\}$
- (g) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \wedge y \geq x^2 - 2x \wedge y \leq 4\}$
- (h) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 3 \wedge x^2 - 4x + 3 \leq y \leq -x^2 + 5x - 4\}$

12. Na figura estão assinaladas três regiões limitadas entre o gráfico de uma função $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, derivável, e o eixo das abscissas, que correspondem às abscissas dos intervalos $[0, 1]$, $[1, 2]$ e $[2, 3]$, respectivamente. A área de cada uma destas regiões vem inscrita no seu interior.



Nestas condições, considere a função $F : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_1^{\frac{3+x}{2}} f(t) dt$.

- (a) Preencha a tabela, determinando os correspondentes valores de $F(x)$:

x	-3	-1	1	3
$F(x)$				

- (b) Determine expressões para $F'(x)$ e $F''(x)$.
- (c) Represente F graficamente.