Aula 7

27 Outubro

Exemplo. $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

Uma vez que:

- $\lim_{x \to 0} x = 0$

e

- $-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

concluímos que $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$

Observemos que não existe $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

Exemplo. $\lim_{x\to 0} x^4 \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$

Temos que:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Multiplicando por x^4 (observe que $x^4 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$) obtemos

$$-x^4 \leq x^4 \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \leq x^4, \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

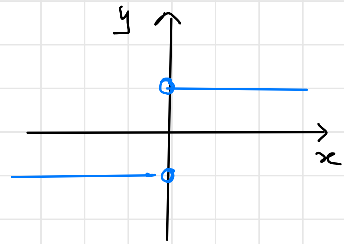
Como $\lim_{x\to 0} (-x^4) = \lim_{x\to 0} x^4 = 0$, pelo Teorema do enquadramento concluímos que

$$\lim_{x\to 0} x^4 \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = 0.$$

Exemplo: Não existe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$

Comecemos por recordar que $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Então, $\dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.



$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

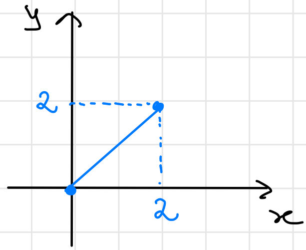
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} = -1$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} \neq \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$, concluímos que

não existe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

Exemplo:



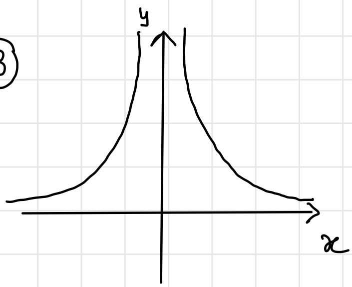
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to 2} f(x) = 2$$

Exemplos:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+e^{1/x}} = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{1+e^{1/x}} = \dfrac{1}{2}$

2) $\nexists \lim\limits_{x \to +\infty} \cos x$; $\nexists \lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$

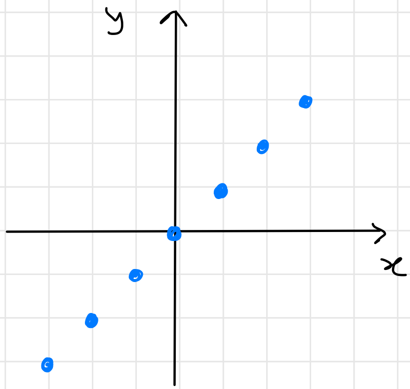
3)

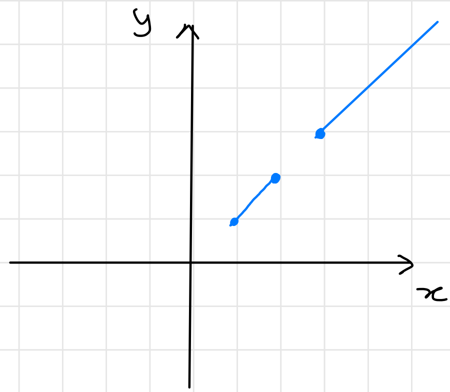


$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

Questão: Serão contínuas?





$D = \mathbb{Z}$

$D = [1,2] \cup [3, +\infty[$

SIM!

Exemplos:

1) Uma função polinomial é contínua. Em particular, uma função constante é contínua.

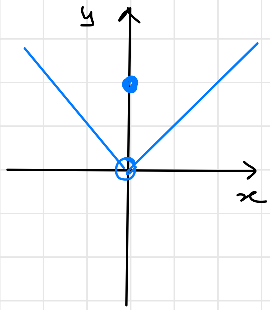
2) As funções seno, coseno, tangente e cotangente são contínuas.

3) As funções e^x, $x \in \mathbb{R}$ e $\ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$ são contínuas.

Exemplo.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} |x| & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



Temos que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0).$$

Então f é descontínua em $x = 0$, ou seja, f é uma função descontínua

Observação: Da definição de função contínua, sai que uma função $f: X \to \mathbb{R}$ possui uma descontinuidade no ponto $a \in X$ quando se verificar uma das duas condições seguintes.

- $a \in X'$ e não existe $\lim_{x \to a} f(x)$
- $a \in X'$, existe $l = \lim_{x \to a} f(x)$ mas $l \neq f(a)$