Álgebra Universal e Categorias

Exercícios - Folha 5

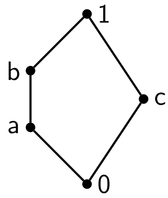
28. Seja $\mathcal{A} = (\{a,b,c,d\}, f)$ a álgebra de tipo (1) onde f é a operação definida por

x	a	b	c	d
$f(x)$	c	b	a	d

Determine todas as relações de congruência em $\mathcal{A}$.

Resolvido na aula do dia 6 de março.

29. Considere o reticulado N_5 representado pelo diagrama de Hasse



Determine

(a) $\Theta(a,0)$; (b) $\Theta(a,1)$; (c) $\Theta(a,b)$.

Apresenta-se a resolução da alínea (a). A resolução das restantes alíneas é análoga.

(a) Pretende-se determinar $\theta(a,0)$, ou seja, pretende-se determinar a menor relação $\theta \in \operatorname{Con} N_5$ que contém $\{(a,0)\}$.

Se θ é uma congruência em N_5 que contém $\{(a,0)\}$, então são satisfeitas as seguintes condições:

(i) $(a,0) \in \theta$;
(ii) θ é reflexiva;
(iii) θ é simétrica;
(iv) θ é transitiva;
(v) θ satisfaz a propriedade de substituição, ou seja, para quaisquer $a_1, b_1, a_2, b_2 \in N_5$,

$$((a_1,b_1) \in \theta \text{ e } (a_2,b_2) \in \theta) \Rightarrow (a_1 \wedge a_2, b_1 \wedge b_2) \in \theta,$$

$$((a_1,b_1) \in \theta \text{ e } (a_2,b_2) \in \theta) \Rightarrow (a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2) \in \theta.$$

Admitamos que θ é uma congruência em N_5 que contém $\{(a,0)\}$, então:

(1) Considerando a condição (i), tem-se $(a,0) \in \theta$.
(2) Atendendo a (ii), vem que $\triangle_{N_5} \subseteq \theta$.
(3) Por (i) e (3), $(0,a) \in \theta$.
(4) Atendendo a que $(a,0) \in \theta$, $(c,c) \in \theta$ e considerando a condição (v), $(a \wedge c, 0 \wedge c) = (0,0) \in \theta$ e $(a \vee c, 0 \vee c) = (1,c) \in \theta$.
(5) Como $(1,c) \in \theta$, então, por (iii), $(c,1) \in \theta$.
(6) Dado que $(c,1), (b,b) \in \theta$, tem-se $(c \wedge b, 1 \wedge b) = (0,b) \in \theta$ e $(c \vee b, 1 \vee b) = (1,1) \in \theta$ (por (v)).
(7) Por (6) e (iii) também se tem $(b,0) \in \theta$.
(8) De (1), (6) e (iv), vem que $(a,b) \in \theta$.
(9) De (8) e (iii), $(b,a) \in \theta$.

A relação $\theta = \triangle_{N_5} \cup \{(a,0),(0,a),(c,1),(1,c),(0,b),(b,0),(a,b),(b,a)\}$ satisfaz as condições (i) a (v) (verificar), logo é uma congruência em N_5 que contém $\{(a,0)\}$; além disso θ é a menor congruência em N_5 que contém $\{(a,0)\}$. Logo $\Theta(a,b) = \theta$.

Alternativamente, a questão pode ser resolvida recorrendo à caraterização de congruências de reticulados referida no exemplo 2.3.2. Se $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ é um reticulado, então $\theta \in \mathrm{Eq}(R)$ é uma congruência em $\mathcal{R}$ se e só se:

(1) cada classe de θ é um subrreticulado de $\mathcal{R}$;

(2) cada classe de θ é um subconjunto convexo de R;

(3) as classes de equivalência de θ são fechadas para quadriláteros
(i.e. sempre que a, b, c, d são elementos de R distintos tais que $a < b$, $c < d$ e

$$(a \vee d = b \text{ e } a \wedge d = c) \text{ ou } (b \vee c = d \text{ e } b \wedge c = a),$$

então $a\,\theta\,b$ sse $c\,\theta\,d$).

Se θ é uma congruência em N_5 que contém $\{(a,0)\}$, então $\triangle_{N_5} \subseteq \theta$ e $[a]_\theta = [0]_\theta$. Atendendo a que $(a,0) \in \theta$ e os pares $(a,0)$ e $(1,c)$ formam um quadrilátero, então $(1,c) \in \theta$; logo $[c]_\theta = [1]_\theta$. Uma vez que $(1,c) \in \theta$ e os pares $(1,c)$ e $(b,0)$ formam um quadrilátero, tem-se $(b,0) \in \theta$; assim $[b]_\theta = [0]_\theta = [a]_\theta$. A relação de equivalência associada à partição $\{\{a,b,0\},\{c,1\}\}$ de N_5 é a relação $\theta = \triangle_{N_5} \cup \{(a,0),(0,a),(c,1),(1,c),(0,b),(b,0),(a,b),(b,a)\}$. Esta relação é uma congruência em N_5, pois satisfaz as condições (1), (2) e (3), e é a menor relação de congruência em N_5 que contém $\{(a,0)\}$; portanto, $\theta(a,0) = \theta$.

30. Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado e $\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{R}$. Mostre que, para quaisquer $a, b, c \in R$, se $a \leq c \leq b$ e $(a,b) \in \theta$, então $(a,c) \in \theta$ e $(b,c) \in \theta$.

Admitamos que $a \leq c \leq b$ e $(a,b) \in \theta$. Uma vez que $\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{R}$, então θ é reflexiva e, portanto, $(c,c) \in \theta$. Considerando que $(a,b) \in \theta$, $(c,c) \in \theta$ e θ satisfaz a propriedade de substituição, tem-se $(a \wedge c, b \wedge c) = (a,c) \in \theta$ e $(a \vee c, b \vee c) = (c,b) \in \theta$. Uma vez que $(c,b) \in \theta$, por simetria vem que $(b,c) \in \theta$.

31. Sejam $\mathcal{S} = (S, \cdot)$ um semirreticulado e $\leq$ a relação de ordem parcial em S definida por $x \leq y$ se $x \cdot y = x$. Dado $a \in S$, define-se

$$\theta_a = \{(b,c) \in S^2 \,|\, (a \leq b \text{ e } a \leq c) \text{ ou } (a \not\leq b \text{ e } a \not\leq c)\}.$$

Mostre que, para qualquer $a \in S$, θ_a é uma congruência em $\mathcal{S}$.

32. Seja $\mathcal{S} = (S; \cdot)$ um semigrupo. Um subconjunto não vazio I de S diz-se um *ideal* de $\mathcal{S}$ se, para quaisquer $s \in S$ e $i \in I$, tem-se $is \in I$ e $si \in I$. Mostre que, para qualquer ideal I, $I^2 \cup \triangle_S$ é uma congruência em $\mathcal{S}$, designada a *congruência de Rees induzida por* I.

Representemos $I^2 \cup \triangle_S$ por θ. Pretende-se provar que θ é uma congruência em $\mathcal{S}$, ou seja, que θ é uma relação de equivalência em S que satisfaz a propriedade de substituição.

(i) θ é reflexiva

Uma vez que $\triangle_S \subseteq \theta$, é imediato que θ é reflexiva.

(ii) θ é simétrica

Para quaisquer $x, y \in S$,

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \theta \quad &\Rightarrow \quad (x,y) \in I^2 \vee (x,y) \in \triangle_S \\
&\Rightarrow \quad (x \in I \wedge y \in I) \vee (x = y) \\
&\Rightarrow \quad (y \in I \wedge x \in I) \vee (y,x) \in \triangle_S \\
&\Rightarrow \quad (y,x) \in I^2 \vee (y,x) \in \triangle_S \\
&\Rightarrow \quad (y,x) \in \theta
\end{aligned}$$

(iii) θ é transitiva

Para quaisquer $x, y, z \in S$

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \theta \wedge (y,z) \in \theta \quad &\Rightarrow \quad ((x,y) \in I^2 \vee (x,y) \in \triangle_S) \wedge ((y,z) \in I^2 \vee (y,z) \in \triangle_S) \\
&\Rightarrow \quad ((x,y) \in I^2 \wedge (y,z) \in I^2) \vee ((x,y) \in I^2 \wedge (y,z) \in \triangle_S) \\
&\qquad \vee ((x,y) \in \triangle_S \wedge (y,z) \in I^2) \vee ((x,y) \in \triangle_S \wedge (y,z) \in \triangle_S) \\
&\Rightarrow \quad (x,y,z \in I) \vee (x,y \in I \wedge y = z) \vee (x = y \wedge y,z \in I) \\
&\qquad \vee (x = y \wedge y = z) \\
&\Rightarrow \quad (x,z \in I) \vee (x,z \in I) \vee (x,z \in I) \vee (x = z) \\
&\Rightarrow \quad (x,z) \in I^2 \vee (x,z) \in \triangle_S \\
&\Rightarrow \quad (x,z) \in \theta.
\end{aligned}$$

(iv) θ satisfaz a propriedade de substituição

Para quaisquer $x, y, z, w \in S$,

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \theta \wedge (z,w) \in \theta \quad &\Rightarrow \quad ((x,y) \in I^2 \vee (x,y) \in \triangle_S) \wedge ((z,w) \in I^2 \vee (z,w) \in \triangle_S) \\
&\Rightarrow \quad ((x,y) \in I^2 \wedge (z,w) \in I^2) \vee ((x,y) \in I^2 \wedge (z,w) \in \triangle_S) \\
&\qquad \vee ((x,y) \in \triangle_S \wedge (z,w) \in I^2) \vee ((x,y) \in \triangle_S \wedge (z,w) \in \triangle_S) \\
&\Rightarrow \quad (x,y,z,w \in I) \vee (x,y \in I \wedge z = w) \vee (x = y \wedge z,w \in I) \\
&\qquad \vee (x = y \wedge z = w) \\
&\Rightarrow \quad (x \cdot z \in I, y \cdot w \in I) \vee (x \cdot z \in I, y \cdot w \in I) \vee (x \cdot z \in I, y \cdot w \in I) \\
&\qquad \vee (x \cdot z = y \cdot w) \\
&\Rightarrow \quad (x \cdot z, y \cdot w) \in I^2 \vee (x \cdot z, y \cdot w) \in \triangle_S \\
&\Rightarrow \quad (x \cdot z, y \cdot w) \in \theta.
\end{aligned}$$

De (i), (ii), (iii), (iv) conclui-se que θ é uma congruência em S.

33. Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra de tipo $(O; \tau)$. Mostre que $\triangle_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$ e $\nabla_A = \{(a,b) \mid a, b \in A\}$ são congruências em $\mathcal{A}$.

A relação $\triangle_A$ é uma relação de equivalência. Sendo assim, resta provar que $\triangle_A$ satisfaz a propriedade de substituição.

Seja $f \in O_n$. Para quaisquer $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$,

$$\begin{aligned}
(a_1,b_1) \in \triangle_A \wedge \ldots \wedge (a_n,b_n) \in \triangle_A \quad &\Rightarrow \quad a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A \wedge a_1 = b_1 \wedge \ldots \wedge a_n = b_n \\
&\Rightarrow \quad f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n),\ f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n) \in A \\
&\qquad \wedge f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n) \ (f^{\mathcal{A}} \text{ é uma operação em } A) \\
&\Rightarrow \quad (f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n)) \in \triangle_A.
\end{aligned}$$

Logo $\triangle_A$ satisfaz a propriedade de substituição e, portanto, $\triangle_A$ é uma congruência em $\mathcal{A}$.

A relação ∇_A é uma relação de equivalência. Resta provar que ∇_A satisfaz a propriedade de substituição.

Seja $f \in O_n$. Para quaisquer $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$,

$$\begin{aligned}
(a_1,b_1) \in \nabla_A \wedge \ldots \wedge (a_n,b_n) \in \nabla_A \quad &\Rightarrow \quad f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n) \in A \ (f^{\mathcal{A}} \text{ é uma operação em } A) \\
&\Rightarrow \quad (f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n)) \in \nabla_A \ (\text{ definição de } \nabla_A).
\end{aligned}$$

Logo ∇_A satisfaz a propriedade de substituição e, portanto, ∇_A é uma congruência em $\mathcal{A}$.

34. Sejam θ, ψ relações binárias num conjunto A. Mostre que:

(a) Se θ e ψ são relações de equivalência em A, não é necessariamente verdade que $\theta \cup \psi$ e $\theta \circ \psi$ sejam relações de equivalência em A.

Sejam A={1,2,3} e $\theta = \triangle_A \cup \{(1,2),(2,1)\}, \psi = \triangle_A \cup \{(2,3),(3,2)\} \in A^2$. As relações θ e ψ são relações de equivalência em A. A relação $\theta \cup \psi = \triangle_A \cup \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$ não é uma relação de equivalência, pois não é transitiva. A relação $\theta \circ \psi = \triangle_A \cup \{(2,3),(3,2),(3,1)\}$ também não é uma relação de equivalência, uma vez que não é simétrica

(b) Se θ e ψ satisfazem a propriedade de substituição numa álgebra $\mathcal{A} = (A;F)$, então $\theta \circ \psi$ satisfaz a propriedade de substituição em $\mathcal{A}$.

Sejam θ e ψ relações binárias em A que satisfazem a propriedade de substituição em $\mathcal{A} = (A;F)$.

Seja f um símbolo de operação de aridade n. Para quaisquer $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n \in A$,

$$\begin{aligned}
(a_1,b_1) \in \theta\circ\psi,\ldots,(a_n,b_n)\in\theta\circ\psi \quad &\Rightarrow \quad \exists_{c_1\in A}\,((a_1,c_1)\in\psi \wedge (c_1,b_1)\in\theta),\\
&\qquad \vdots\\
&\qquad \exists_{c_n\in A}\,((a_n,c_n)\in\psi \wedge (c_n,b_n)\in\theta)\\
&\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad \exists_{f^{\mathcal{A}}(c_1,\ldots,c_n)\in A}\ (f^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n), f^{\mathcal{A}}(c_1,\ldots,c_n))\in\psi,\\
&\qquad\qquad (f^{\mathcal{A}}(c_1,\ldots,c_n), f^{\mathcal{A}}(b_1,\ldots,b_n))\in\theta\\
&\Rightarrow \quad (f^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n), f^{\mathcal{A}}(b_1,\ldots,b_n))\in\theta\circ\psi
\end{aligned}$$

Logo $\theta \circ \psi$ satisfaz a propriedade de substituição.

(*) $f^{\mathcal{A}}$ é uma operação em A e θ e ψ satisfazem a propriedade de subsituição em $\mathcal{A}$.

(c) Se θ e ψ são congruências numa álgebra $\mathcal{A} = (A;F)$, então $\theta \cap \psi$ e a relação $\theta * \psi$ definida por

$$\begin{aligned}
\theta * \psi = \{(x,y)\in A^2 \mid \exists\, n\in\mathbb{N}, \exists\, z_0,z_1,\ldots,z_n\in A, x=z_0, y=z_n\\
\text{e } \forall 1\le k\le n, z_{k-1}\,\theta\, z_k \text{ ou } z_{k-1}\,\psi\, z_k\},
\end{aligned}$$

são conguências em $\mathcal{A}$.

Sejam θ e ψ são congruências numa álgebra $\mathcal{A} = (A;F)$.

[$\theta * \psi \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$]

Para quaisquer $\theta,\psi\in\mathrm{Con}\mathcal{A}$, $\theta*\psi\in\mathrm{Eq}(A)$. As relações θ e ψ são relações de equivalências, então:

- para qualquer $a\in A$, $(a,a)\in\theta$ (e $(a,a)\in\psi$), logo existem $z_0=a\in A$ e $z_1=a\in A$ tais que $(z_0,z_1)\in\theta$. Logo $(a,a)\in\theta*\psi$. Assim, $\theta*\psi$ é reflexiva.

- para quaisquer $a,b\in A$

$$\begin{aligned}
(a,b)\in\theta*\psi \quad &\Rightarrow \quad \exists_{z_0,\ldots,z_{n-1},z_n\in A}\ z_0=a,\ldots,z_n=b \text{ e}\\
&\qquad \forall 1\le k\le n, z_{k-1}\,\theta\, z_k \text{ ou } z_{k-1}\,\psi\, z_k\}\\
&\Rightarrow \quad \exists_{w_0=z_n=b,w_1=z_{n-1},\ldots,w_n=z_0=a\in A}\ w_0=b,\ldots,w_n=a \text{ e}\\
&\qquad \forall 1\le k\le n, w_{k-1}\,\theta\, w_k \text{ ou } w_{k-1}\,\psi\, w_k\}\ (\theta,\psi \text{ são simétricas })\\
&\Rightarrow \quad (b,a)\in\theta*\psi.
\end{aligned}$$

Logo $\theta*\psi$ é simétrica.

- para quaisquer $a,b,c\in A$,

$$\begin{aligned}
(a,b)\in\theta*\psi,(b,c)\in\theta*\psi \quad &\Rightarrow \quad (\exists_{z_0,\ldots,z_n\in A}\ z_0=a,\ldots,z_n=b \text{ e}\\
&\qquad \forall 1\le k\le n, z_{k-1}\,\theta\, z_k \text{ ou } z_{k-1}\,\psi\, z_k\})\\
&\qquad \wedge(\exists_{w_0,\ldots,w_m\in A}\ w_0=b,\ldots,w_m=c \text{ e}\\
&\qquad \forall 1\le k\le m, w_{k-1}\,\theta\, w_k \text{ ou } w_{k-1}\,\psi\, w_k\})\\
&\Rightarrow \quad (\exists_{s_0,\ldots,s_{n+m-1}\in A}\ s_0=a,\ldots,s_n=z_n=w_0=b,\ldots,s_{n+m-1}=c \text{ e}\\
&\qquad \forall 1\le k\le m, s_{k-1}\,\theta\, s_k \text{ ou } s_{k-1}\,\psi\, s_k\})
\end{aligned}$$

Logo $\theta * \psi$ é transitiva.

Uma vez que $\theta * \psi$ é reflexiva, simétrica e transitiva, então $\theta * \psi$ é uma relação de equivalência. Resta mostrar que $\theta * \psi$ satisfaz a propriedade de substituição.

Para tal, comecemos por observar que

(1) $\theta * \psi = \theta \cup \theta \circ \psi \cup \theta \circ \psi \circ \theta \cup \theta \circ \psi \circ \theta \circ \psi \cup \ldots$

(2) $\theta \subseteq \theta \circ \psi \subseteq \theta \circ \psi \circ \theta \subseteq \theta \circ \psi \circ \theta \circ \psi \subseteq \ldots$

(3) se θ_1, θ_2 são relações binárias em A que satisfazem a propriedade de substituição, então $\theta_1 \circ \theta_2$ também satisfaz a propriedade de substituição.

Representemos por C o conjunto $\{\theta, \theta \circ \psi, \theta \circ \psi \circ \theta, \theta \circ \psi \circ \theta \circ \psi, \ldots\}$.

Para qualquer símbolo de operação n-ário f e para quaisquer $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$,

$$\begin{array}{lll} & \forall i \in \{1, \ldots, n\}, (a_i, b_i) \in \theta * \psi & \\ \Rightarrow & \forall i \in \{1, \ldots, n\}\ \exists \gamma_i \in C, (a_i, b_i) \in \gamma_i & (\text{ por } (1)) \\ \Rightarrow & \exists \gamma \in C\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}, (a_i, b_i) \in \gamma & (\text{ por } (2)) \\ \Rightarrow & \exists \gamma \in C, (f(a_1, \ldots, a_n), f(b_1, \ldots, b_n)) \in \gamma & (\text{ por } (3)) \\ \Rightarrow & (f(a_1, \ldots, a_n), f(b_1, \ldots, b_n)) \in \theta * \psi & (\text{ por } (1)) \end{array}$$

logo $\theta * \psi$ satisfaz a propriedade de substituição.

Uma vez que $\theta * \psi$ é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição, $\theta * \psi \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$.

35. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $X, Y \subseteq A \times A$. Mostre que

(a) $X \subseteq \Theta(X)$.

(b) $X \subseteq Y \Rightarrow \Theta(X) \subseteq \Theta(Y)$.

(c) $\Theta(\Theta((X)) = \Theta(X)$.

(d) $\Theta(X) = \bigcup\{\Theta(Z) \mid Z \text{ é um subconjunto finito de } X\}$.