Universidade do Minho — 2016/2017
Departamento de Matemática e Aplicações — LCC

Análise
Teste 2 - modelo — Duração: 1h30m

1. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = kx^2 + y^2 - 4xy\,, \quad \text{com } k \text{ um parâmetro real}.$$
   (a) Verifique que $(0,0)$ é um ponto crítico de f, para todo o valor do parâmetro k.
   (b) Determine, se existirem, os valores de k para os quais o ponto $(0,0)$ é um
      i. ponto de sela; ii. maximizante; iii. minimizante.

2. Considere o integral
$$I = \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \left(1+y^3\right)^{1/2} dy\, dx\,.$$
Esboce o domínio de integração e calcule o valor de I invertendo a ordem de integração.

3. Seja D a região do plano definida por
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \geq 1, \quad x^2+y^2 \leq 2, \quad y \leq -x\right\}.$$
   (a) Esboce a região D e descreva-a usando coordenadas polares.
   (b) Calcule a área de D.

4. Considere o integral
$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz\, dx\, dy.$$
   (a) Esboce a região de integração, começando por observar que a projeção no plano xOy é um quarto de um círculo.
   (b) Calcule o valor do integral apresentado mudando para coordenadas esféricas.

5. Uma partícula em movimento começa na posição inicial $\mathbf{r}(0) = (0,1,1)$ com velocidade inicial $\mathbf{v}(0) = (1,0,2)$. A sua aceleração é dada por $\mathbf{a}(t) = (-\operatorname{sen} t, -\cos t, 0)$, em cada instante $t \geq 0$.
   (a) Determine a velocidade $\mathbf{v}$ e a posição $\mathbf{r}$ em cada instante t.
   (b) Verifique que a curvatura de $\mathbf{r}$ é constante.
   (c) Determine a equação do plano normal a $\mathbf{r}$ em $t = \pi$.

   Caso não tenha respondido à alínea (a), resolva as alíneas (b) e (c) para $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 3t)$.

6. Seja $\mathbf{r}\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $\mathbf{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, uma função vetorial de classe $\mathcal{C}^3$.
   (a) Mostre que
$$\big[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)\big]' = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t).$$
   (b) Sendo $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)]$, mostre também que
$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{r}(t) \cdot \big[\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)\big]\,.$$