Aula 15

24 Novembro

Primitivação por substituição

Teorema:

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que admite primitiva F. Sejam J um intervalo de $\mathbb{R}$ e $\varphi : J \longrightarrow I$ uma função bijetiva, derivável, cuja derivada não se anula. Então $\Phi = F \circ \varphi$, é uma primitiva de $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ e é válida a seguinte

fórmula de primitivação por substituição ou mudança de variável

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Dem. A verificação de que Φ é uma primitiva de $(f\circ\varphi)\varphi'$ decorre imediatamente da regra da derivação da função composta

$$\left[\ (F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\ \right]$$

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} = \Phi(t) + C\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

$$= (\Phi\circ\varphi^{-1}(x)) + C$$

$$= F(x) + C \quad , \quad C\in\mathbb{R}$$

$$= \int f(x)\,dx$$

Teorema:

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que admite primitiva F. Sejam J um intervalo de $\mathbb{R}$ e $\varphi : J \longrightarrow I$ uma função bijetiva, derivável, cuja derivada não se anula. Então $\Phi = F \circ \varphi$, é uma primitiva de $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ e é válida a seguinte

fórmula de primitivação por substituição ou mudança de variável

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

O Teorema estabelece que, nas condições indicadas, $\int f(x)\,dx$ pode ser calculado da seguinte forma:

- faz-se a substituição $x = \varphi(t)$
- calcula-se depois a nova primitiva $\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$
- desfaz-se a substituição, regressando à variável inicial x, através de $t = \varphi^{-1}(x)$.

Exemplo 1: Calcule $\int x\sqrt{x-1}\,dx$ efetuando a substituição definida por $x-1=t^2$, $t\geq 0$

(i) Substituição.

Fazendo $x = t^2+1$, $t \geq 0$ tem-se

$$\varphi(t) = t^2+1 \quad , \quad \varphi'(t) = 2t$$

(ii) Cálculo da nova primitiva

$$\int (t^2+1)\sqrt{t^2}\cdot \underbrace{2t}_{\varphi'(t)}\,dt = \int (t^2+1)\,|t|\,2t\,dt$$

$|t| = t$ porque $t \geq 0$

$$= \int (t^2+1)\,t\;2t\,dt = 2\int (t^4+t^2)\,dt$$

$$= 2\frac{t^5}{5} + 2\frac{t^3}{3} + C, \quad C\in\mathbb{R}$$

3 - Regresso à variável inicial x

Para regressar à variável x, desfaz-se a substituição notando que

$$t = \sqrt{x-1} \quad \text{com } x \geq 1, \text{ uma vez que } t \geq 0$$

Resulta finalmente que

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C, \quad C\in\mathbb{R}$$

Exemplo 2. Calcule $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ fazendo a substituição $x = \cos t$, $t \in [0, \pi]$

(i) Substituição.

Fazendo a substituição $x = \cos t$, tem-se

$\varphi(t) = \cos t$, $\varphi'(t) = -\operatorname{sen} t$, $t \in [0,\pi]$

(ii) Cálculo da nova primitiva

$$\int \sqrt{1-\cos^2 t}\,.\,\underbrace{(-\operatorname{sen} t)}_{\varphi'(t)}\,dt = \int \sqrt{\operatorname{sen}^2 t}\,.\,(-\operatorname{sen} t)\,dt$$

$\sqrt{\operatorname{sen}^2 t} = |\operatorname{sen} t| = \operatorname{sen} t$

$t \in [0,\pi]$

$$= -\int \operatorname{sen}^2 t\,dt = -\int \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt =$$

$$= -\int \frac{1}{2}\,dt + \frac{1}{2}\int \cos(2t)\,dt =$$

$$= -\int \frac{1}{2}\,dt + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\int \underbrace{2}_{f'}\,\underbrace{\cos(2t)}_{\cos(f)}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\,t + \frac{1}{4}\,\underbrace{\operatorname{sen}(2t)}_{2\operatorname{sen} t\,.\,\cos t}\,dt + C$$

$$= -\frac{1}{2}\,\underbrace{t}_{\downarrow\ \arccos x} + \frac{1}{2}\,\underbrace{\operatorname{sen} t}_{?}\,\underbrace{\cos t}_{\downarrow\ x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(iii) <u>Regresso à variável inicial x</u>

Para regressar à variável x, notemos que

$\boxed{x = \cos t}$, $t \in [0, \pi]$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{t = \arccos x}$, $x \in [-1, 1]$

Além disso,

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} t = \pm \sqrt{1 - \cos^2 t}$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$$

porque $t \in [0, \pi]$

Consequentemente, $\boxed{\operatorname{sen} t = \sqrt{1 - x^2}}$

Então,

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = -\frac{\arccos x}{2} + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + C,$$

$C \in \mathbb{R}$

Exemplo 3: $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{3+e^{x}}\,dx$ fazendo a substituição $e^{x}=t,\quad t>0$

(i) Substituição:

Fazendo $e^{x}=t$, tem-se $x=\ln t \quad (t>0)$

$$\varphi(t)=\ln t\,,\qquad \varphi'(t)=\frac{1}{t}$$

(ii) Cálculo da nova primitiva

$$\int \frac{t^2}{3+t}\underbrace{\frac{1}{t}}_{\varphi'(t)}\,dt=\int\frac{t}{3+t}\,dt=\int\frac{3+t-3}{3+t}\,dt$$

$$=\int\left(1-\frac{3}{3+t}\right)dt=\int 1\,dt-3\int\frac{1}{3+t}\,dt$$

$$=t-3\ln(3+t)+C,\qquad C\in\mathbb{R}$$

(iii) Regresso à variável inicial x

$$\int\frac{e^{2x}}{3+e^{x}}\,dx=e^{x}-3\ln(3+e^{x})+C,\qquad C\in\mathbb{R}$$

Exemplo 4. $\int x(x+3)^{1/3}\,dx$, efetuando a substituição $t = x+3$

(i) Substituição:

Fazendo $t = x+3$, tem-se $x = t-3$

$\varphi(t) = t-3$, $\varphi'(t) = 1$

(ii) Cálculo da nova primitiva

$$\int (t-3) \cdot t^{1/3}\, 1\, dt = \int \left(t^{4/3} - 3t^{1/3}\right) dt =$$

$$= \frac{3}{7} t^{7/3} - \frac{9}{4} t^{4/3} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(iii) Regresso à variável inicial x

$$\int x(x+3)^{1/3}\,dx = \frac{3}{7}(x+3)^{7/3} - \frac{9}{4}(x+3)^{4/3} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$