Resoluções

2. (Teste 1) Em cada dia, uma acção da empresa E pode descer 1 €, manter-se, ou subir 1 €, com probabilidades 0.39, 0.2 e 0.41, respectivamente. Admita que as alterações diárias são mutuamente independentes.

   (a) Recorrendo ao TPT, calcule a probabilidade de ao fim de dois dias a cotação ser igual à inicial (*explique*).

   (b) Indique o código `R` para simular a variação da cotação ao fim de 20 dias.

   (c) Por meio de simulação, com $r = 10^5$ réplicas, estime (*inclua sempre o código que usou na resolução*)

      i. a probabilidade de que ao fim de 20 dias a acção tenha subido mais do que 5 €

      ii. graficamente a f.m.p. da v.a. que representa a "alteração da cotação ao fim de 20 dias". Comente.

Resolução:

Seja X_i a v.a. que representa a alteração na cotação no dia i. Estas v.a. são mutuamente independentes (pois as alterações diárias são mutuamente independentes) com f.m.p. dada por

$$X : \begin{cases} -1 & 0 & +1 \\ 0.39 & 0.2 & 0.41 \end{cases}$$

(a) Aplica-se o Teorema da Probabilidade Total (TPT) para o cálculo da probabilidade do acontecimento A – "a cotação é a mesma ao fim de dois dias", condicionando no valor de X_1 (alteração da cotação no 1^o dia), i.e., usando uma partição com três acontecimentos (referentes ao resultado da alteração no 1º dia), $\{X_1 = -1\}$, $\{X_1 = 1\}$, $\{X_1 = 0\}$. Temos então

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \mid X_1 = -1)P(X_1 = -1) + P(A \mid X_1 = 1)P(X_1 = 1) + P(A \mid X_1 = 0)P(X_1 = 0) \\ &= P(X_2 = 1)P(X_1 = -1) + P(X_2 = -1)P(X_1 = 1) + P(X_2 = 0)P(X_1 = 0) \\ &= 0.41 \times 0.39 + 0.39 \times 0.41 + 0.2 \times 0.2 = 0.3598 \end{aligned}$$

Note-se que se utilizou a independência entre X_1 e X_2: por exemplo

$$P(A \mid X_1 = 1) = P(X_2 = -1 \mid X_1 = 1) = P(X_2 = -1),$$

(b) Simula-se um valor da variação da cotação ao fim de 20 dias somando as variações obtidas nesses 20 dias, dado por $S_{20} = X_1 + ... + X_{20}$, i.e., executando o código

```
sum(sample( -1:1, 20, rep=T, prob=c(0.39,0.2,0.41)) )
```

(c) Simulam-se 10^5 valores como em (b). De seguida,

i. estima-se a probabilidade pedida calculando a frequência relativa de vezes que ocorre o acontecimento $\{S_{20} > 5\}$ nas simulações, com resultado 0.1012, tal como segue:

```
s20 <- 0 ; p <- c(0.39,0.2,0.41) ; r <- 10^5
for (i in 1:r) s20[i] <- sum(sample(-1:1, 20, rep=T, prob=p))
sum(s20>5)/r
[1] 0.10122
```

ii. estima-se a f.m.p. de S_{20} através das frequências relativas dos valores simulados obtidos (estas estimam as respectivas probabilidades), como segue (*vd.* Figura2):

```
plot(table(s20))
```

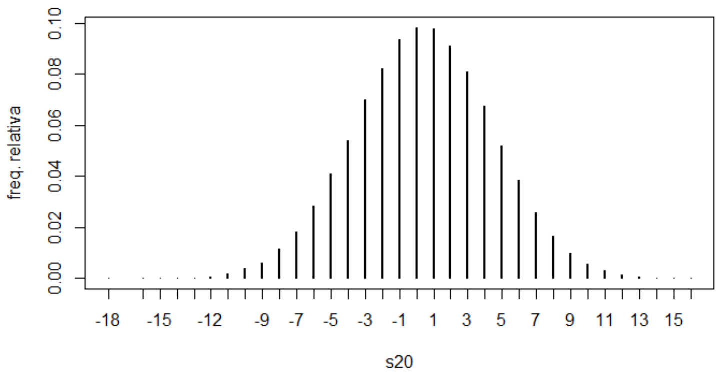

Figura 1: Estimativa da f.m.p. de S_{20}

A média obtida para os valores simulados foi 0.39422, que é consistente com o valor médio teórico, $E(S_{20}) = 20 \times E(X) = 20 \times 0.02 = 0.4$ (a variância foi 15.99063, também compatível com o valor teórico $\text{Var}(S_{20}) = 20 \times \text{Var}(X) = 20 \times 0.7996 = 15.992$). O suporte de S_{20} é $\mathbb{Z} \cap [-20, 20]$. O gráfico da f.m.p. estimada aparenta boa simetria, é unimodal (com moda 0), sendo razoável conjecturar que se aproxima a uma curva normal.

71. Em cada dia (útil), uma acção da empresa E pode descer 1€, manter-se, ou subir 1€, com probabilidades 0.39, 0.2 e 0.41, respectivamente. Admita que as alterações diárias são mutuamente independentes. Calcule a probabilidade (aproximada) de ao fim de 700 dias a acção ter subido mais do que 10€ acima do seu valor inicial. Identifique a distribuição (aproximada) da alteração ao fim de 700 dias. Resolva também por meio de simulação e compare resultados.

Resolução:

Pretende-se $P(S > 10)$, em que $S_{700} = X_1 + ... + X_{700}$. Ora

$$\begin{aligned} \mu &= E(X) = -0.39 + 0.41 = 0.02 \\ \sigma^2 &= var(X) = E(X^2) - \mu^2 = 0.39 + 0.41 - 0.02^2 = 0.7996 \end{aligned}$$

Como as v.a. $X_1, ..., X_{700}$ são mutuamente independentes (e pouco assimétricas) e $n = 700$ é grande, aplica-se o Teorema Limite Central (TLC), que estabelece que a f.d. de S_{700} é bem aproximada pela f.d. de $Y \frown N(700\mu, \sigma\sqrt{700})$. Como S_{700} é discreta com suporte $\mathbb{Z} \cap [-700, 700]$, aplica-se uma correcção de continuidade conforme segue, sendo 0.5588 o resultado da aproximação para a probabilidade pedida.

$$P(S > 10) \simeq P(Y \geq 10.5) = 0.5588$$

```
pnorm(10.5,700*0.02,sqrt(700*0.7996),lower=F)
[1] 0.5588045
```

Por meio de simulação, resolve-se tal como no problema 2 anterior, adaptando para 700 dias, como segue

```
s700 <- 0 ; p <- c(0.39,0.2,0.41) ; r <- 10^6
for (i in 1:r) s700[i] <- sum(sample(-1:1, 700, rep=T, prob=p))
sum(s700>5)/r
[1] 0.55848
```

Observa-se que os valores dados pelo TLC e pela simulação são muito semelhantes, como era de esperar.

Como a v.a. S_{700}, embora discreta, toma um grande número de valores distintos (note que o seu suporte tem 1401 elementos e que a amostra simulada, com 10^6 réplicas, apresenta valores inteiros de -103 a 126), opta-se por um histograma no lugar da f.m.p. estimada.

Confirma-se graficamente a aproximação do histograma dos dados simulados à f.d.p. normal fornecida pelo TLC.

```
range(s700)
[1] -103 126
hist(s700,100,freq=F,main=)
curve(dnorm(x,14,sqrt(700*0.7996)),add=T,col=2)
```

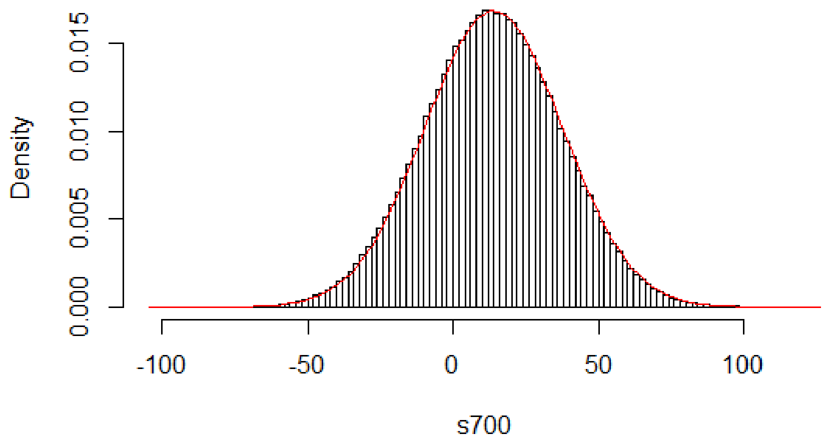

Figura 2: Histograma dos dados de S_{700} simulados e f.d.p. normal sobreposta