Universidade do Minho | 2017/2018
Departamento de Matemática e Aplicações | LCC
Análise

Teste 1 - modelo C Duração: 1h30m Tolerância: 15 minutos

1. [2 valores] Considere a função real definida por $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y + 1}}{x - 1}$.
   (a) Determine e esboce graficamente o domínio de f.
   (b) Calcule o valor de f nos pontos do domínio pertencentes à reta $y = -2x$.

2. [3 valores] Considere a função g definida por $g(x, y) = \dfrac{(x - y)x^2}{2x^2 + y^4}$.
   (a) Calcule o limite de g quando (x, y) tende para $(0, 0)$ segundo a reta $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$, e segundo a parábola $x = y^2$.
   (b) Diga se existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y)$.

3. [3.5 valores] Justifique que cada uma das afirmações seguintes é *verdadeira*.
   (a) O declive da reta tangente à curva de interseção da superfície $z = x^3 + 2xy$ com o plano $y = 2$ no ponto $(-1, 2, -5)$ é positivo.
   (b) O vetor $\vec{v} = (-2, 1)$ é tangente à curva de nível da função $f(x, y) = x + yx^2 + \operatorname{sen} y$ no ponto $P = (1, 0)$.
   (c) A função $u(x, y) = \mathrm{e}^{-x} \cos y - \mathrm{e}^{-y} \cos x$ é solução da equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

4. [2 valores] Seja $z = f(x, y)$, com f diferenciável, $x = r\,\mathrm{e}^{-t}$ e $y = r\,\mathrm{e}^{t}$. Use a regra de derivação da cadeia para mostrar que
$$\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial t} = 2\,\mathrm{e}^{t}\,\frac{\partial z}{\partial y}.$$

5. [2 valores] Use diferenciais para obter uma aproximação do valor de $f(x, y) = \ln(y - 2x)$ no ponto $(3.06, 6.8)$. Observe que $f(3, 7) = 0$.

6. [3 valores] Suponha que a temperatura T no ponto (x, y, z) de uma certa região do espaço é dada por $T(x, y, z) = 10\,z\,x^2\,\mathrm{e}^{-y}$.
   (a) Determine a taxa de variação de T no ponto $P = (1, 0, 1)$ na direcção de P para $Q = (2, 1, 1)$.
   (b) Qual a direção segundo a qual a temperatura aumenta mais rapidamente em P? Qual o valor da taxa de crescimento nessa direção?

7. [3 valores] Considere a curva de equação $2x^3 + x^2y - y^3 = 2$.
   (a) Determine uma equação da reta tangente à curva no ponto $(1, 1)$.
   (b) Sabendo que a equação define implicitamente y como função de x numa vizinhança do ponto $(1, 1)$, calcule $\dfrac{dy}{dx}(1)$.

8. [1.5 valores] Se $u = f(x, y)$ e $v = g(x, y)$, com f e g diferenciáveis, mostre que
$$\vec{\nabla}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\vec{\nabla}u - u\vec{\nabla}v}{v^2}, \quad v \neq 0.$$