Aula 4

15 Outubro

$$\sum_{n\geq 1} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

A soma está bem definida?

A série converge?

$(u_n)_n \rightarrow$ sucessão geradora

$(S_n)_n \rightarrow$ sucessão das somas parciais

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

$$\vdots$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

$$\vdots$$

Dizemos que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge quando

$$\exists\, s \in \mathbb{R} \,.\quad s = \lim_n s_n$$

Escrevemos

$$s = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

e dizemos s é a soma da série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$

Série <u>geométrica</u> de razão r

$$\sum_{n\geq 1} r^{n-1}$$

A série geométrica de razão r, $\sum_{n\geq 1} r^{n-1}$, converge se e só se $|r|<1$

Quando convergente a sua soma é

$$S=\frac{1}{1-r}$$

Exemplo. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Temos que:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

A série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ é convergente porque é uma série geométrica de razão $r = \frac{2}{3}$ e $|r| = \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$

Então a série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ é também convergente

A sua soma é

$$S = \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 2$$

Exemplo: $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{5}{4}\right)^n$

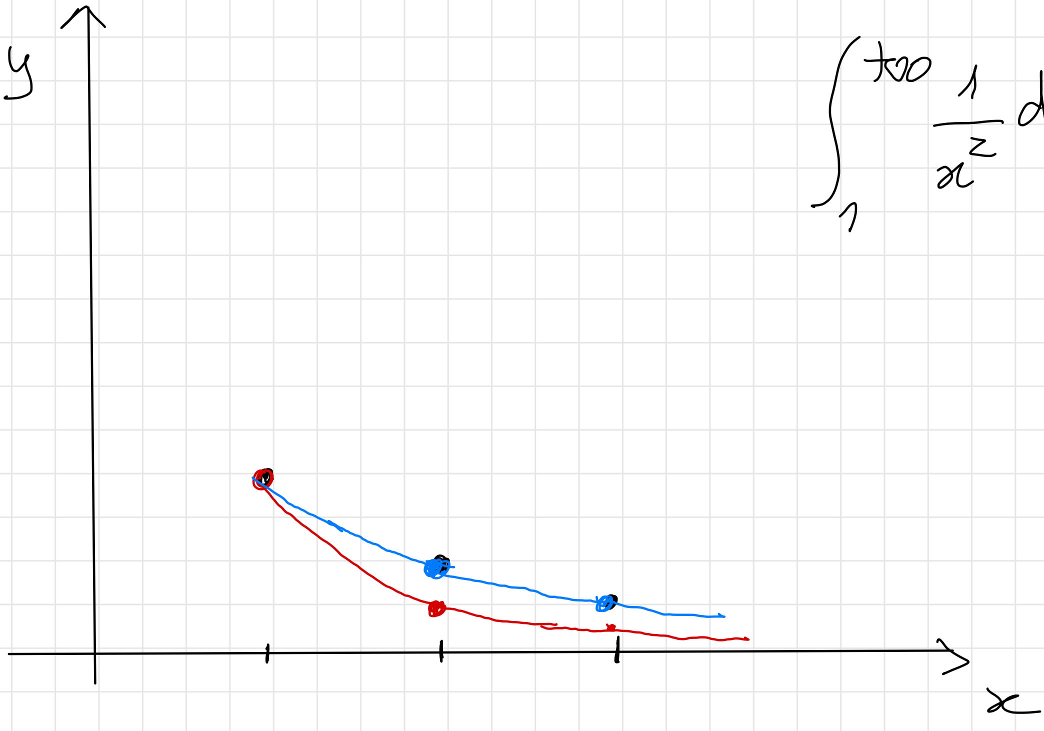
A série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{5}{4}\right)^n$ é divergente porque é uma série geométrica de razão $-\frac{5}{4}$ e $|r| = \left|-\frac{5}{4}\right| = \frac{5}{4} > 1$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \quad \text{divergente}$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \quad \text{convergente}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$



Exemplo. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2}{n^5}$

A série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^5}$ é uma série convergente porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 5 > 1$.

Então a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2}{n^5}$ é também convergente

Exemplo. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n}}$

A série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^{1/2}}$ é divergente porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 1/2 \leq 1$.

Exemplo. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{8}{3n^5} + \frac{1}{4^n} \right)$

A série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^5}$ é convergente porque é uma série de Riemann de expoente $\alpha = 5 > 1$. Então a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{8}{3} \frac{1}{n^5}$ é também convergente

A série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{4^n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{4} \right)^n$ é convergente porque é uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{4}$ e $|r| = \frac{1}{4} < 1$

Então a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{8}{3n^5} + \frac{1}{4^n} \right)$ é convergente

Teorema: [Condição necessária de convergência]

Se a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ é convergente então $\lim_n u_n = 0$.

O Teorema é útil quando o passamos à forma equivalente:

Teorema [Condição suficiente de divergência]

Se a sucessão $(u_n)_n$ não tem limite ou se $\lim_n u_n = l$, com $l \neq 0$, então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ é divergente

$\lim_n u_n \neq 0 \longrightarrow$ série $\sum_n u_n$ divergente

$\lim_n u_n = 0 \longrightarrow$ pode ser $\begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ convergente} \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ divergente} \end{cases}$

Com efeito,

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ é divergente

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ é convergente

Exemplo ① : $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{3}{2}\right)^n$

Esta série é divergente porque

$$\lim_n u_n = \lim_n \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty \neq 0$$

Exemplo ② . $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{2n+5}$

Temos que $\lim_n \frac{n}{2n+5} = \lim_n \frac{\frac{n}{n}}{\frac{2n+5}{n}}$

$$= \lim_n \frac{1}{2+\frac{5}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Como $\lim_n u_n = \frac{1}{2} \neq 0$, concluímos que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{2n+5}$ é divergente

Exemplo ③ . $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \operatorname{sen} n$

Temos que

$$u_n = \begin{cases} -\operatorname{sen} n & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \operatorname{sen} n & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$\nexists \lim_n u_n$

Como $\nexists \lim_n u_n$, temos que a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \operatorname{sen} n$ é divergente

Exemplo 4 :

Como $\lim_n \frac{1}{n+1} = 0$, usando o Teorema nada podemos concluir!

Exemplo: $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n}$

Seja $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Temos que:

- $(a_n)_n$ é uma sucessão decrescente
- $\lim_n a_n = \lim_n \frac{1}{n} = 0$

Então, pelo Critério de Leibniz concluímos que a série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{n} (-1)^n \frac{1}{n} \text{ é convergente}$$