Obsah

BI-MLO Quick Reference

Tyto materiály slouží studentům předmětu BI-MLO na FITu a podávají velmi stručný přehled vzorců, postupů a terminologie.

Renderovaná podoba je hostovaná na GitBook, zdrojáky jsou na GitHub.

V případě, že naleznete chybu nebo budete chtít něco přidat, vytvořte issue nebo rovnou pošlete pull request.

Výroková logika

Název	Symbol	Definice
NOT	$\neg$	$\neg A$ je **true**, pokud A je ***false***.
AND	$\wedge$	$A \wedge B$ je **true** pouze pokud jsou oba výroky **true**.
OR	$\vee$	$A \vee B$ je **true** pokud je alespoň jeden z výroků **true**
NAND	$\uparrow$[1]	$A \uparrow B$ je **true**, pokud je alespoň jeden z výroků ***false***.
NOR	$\downarrow$[2]	$A \downarrow B$ je **true**, pokud jsou oba výroky ***false***
implikace	$\Rightarrow$	$A \Rightarrow B$ je ***false*** pouze tehdy, pokud A je **true** a B je ***false***.
ekvivalence	$\Leftrightarrow$	$A \Leftrightarrow B$ je **true**, pokud jsou oba výroky ***false***, nebo jsou oba výroky **true**.
tautologie	$\top$	Formule, která je vždy **true**
kontradikce	$\bot$	Formule, která je vždy ***false***
logický důsledek	$\models$	Formule B je logickým důsledkem formule A, právě když pro každé ohodnocení v, pro které $v(A) = 1$, je i $v(B) = 1$. Píšeme $A \models B$. Říkáme též B vyplývá z A.; Nebo jinak: $A \models B$, právě když uKNT/uDNT A a B obsahují stejné klausule/mintermy
logická ekvivalence	$\equiv, \mid = \mid$	Formule A a B jsou logicky ekvivalentní právě tehdy, když pro každé ohodnocení v je $v(A) = v(B)$. Píšeme $A \equiv B$.; Nebo jinak: $A \equiv B$, právě když všechny klausule/mintermy v uKNT/uDNT A jsou obsaženy i v uKNT/uDNT B

1. Shefferův symbol ↩

2. Piercova šipka ↩

Pravdivostní tabulka

NOT

A	B		$\neg A$	$\neg B$
1	1		0	0
1	0		0	1
0	1		1	0
0	0		1	1

AND, NAND, OR, NOR

A	B		$A \wedge B$	$A \uparrow B$	$A \vee B$	$A \downarrow B$
1	1		1	0	1	0
1	0		0	1	1	0
0	1		0	1	1	0
0	0		0	1	0	1

Implikace, ekvivalence

A	B		$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1		1	1
1	0		0	0
0	1		1	0
0	0		1	1

Slovník

Výraz	Význam	Příklad
Výrok	Výrokem je každá oznamovací věta, u které se lze ptát, zda je či není pravdivá.	"Číslo 2 je sudé a zároveň je liché."
Prvotní výrok (atomický)	Dále nedělitelný výrok. Jedná se v jistém smyslu o to nejjednodušší konstatování.	"Je rok 2014.", "2 + 2 = 5"
Prvotní formule	Prvotní výroky označené velkými tiskacími písmeny.	A, B, C
Formule	Prvotní formule a formule poskládáné pomocí logických spojek a závorek.	A, B, $A \wedge B$, $\neg A \Rightarrow B$, $(A \Rightarrow B) \vee \neg((A \wedge B) \vee B)$
Podformule	Každá část formule, která je sama formulí.	Formule: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (C \Rightarrow A)$, podformule: A, B, C, $A \wedge B$, $\neg(A \wedge B)$, $C \Rightarrow A$
Splnitelná formule	Formule, která je pravda alespoň pro jedno ohodnocení, tedy všechny formule kromě kontradikcí.	A, $A \wedge B$ a nesplnitelné $A \wedge \neg A$
Instance formule	Formule, která vznikne nahrazením **prvotních formulí** jinými formulemi a to tak, že všechny výskyty jedné prvotní formule jsou nahrazeny jinou, jednou a tou samou formulí.	Instance $\neg A \vee (B \Rightarrow A)$: $\neg C \vee (D \Rightarrow C)$ nebo $\neg(A \wedge B) \vee (C \Rightarrow (A \wedge B))$
Pravdivostní ohodnocení	Funkce v z množiny prvotních formulí do množiny $\{0, 1\}$.	Pokud pro formuli A platí $v(A) = 1$, řekneme, že A je **pravdivá** při ohodnocení v. Pokud platí $v(A) = 0$, řekneme, že A je ***nepravdivá*** při ohodnocení v.
Teorie	Množina formulí	$T = \{A, B, \neg A \vee \neg B\}$
Axiom	Formule obsažená v teorii	
Splnitelná teorie	Teorie T je splnitelná, právě když existuje ohodnocení v prvotních formulí, pro které jsou **všechny** formule teorie **pravdivé.** Řekneme, že v splňuje T.	$T = \{A, B, A \wedge B, C \vee B\}$ splnitelná pro $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$

Literál	Prvotní formule nebo její negace.	A, B, $\neg C$
Minterm	Literál nebo **konjunkce** několika literálů	$A \wedge B$, $B \wedge \neg C$
Klausule	Literál nebo **disjunkce** několika literálů	$A \vee B$, $B \vee \neg C$
KNT (Konjunktivní normální tvar)	Formule je v *KNT*, jestliže je klausulí nebo konjunkcí několika klausulí.	$(A \vee \neg B) \wedge C$, $A \wedge \neg B$, $A \vee B$
uKNT (Úplný konjunktivní normální tvar)	Formule je v *uKNT*, jestliže je v *KNT* a ve všech klausulích se vyskytují stejné prvotní formule.	$(A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$
DNT (Disjunktivní normální tvar)	Formule je v *DNT*, jestliže je mintermem nebo disjunkcí několika mintermů.	$(A \wedge \neg B) \vee C$, $A \wedge \neg B$, $A \vee B$
uDNT (Úplný disjunktivní normální tvar)	Formule je v *uDNT*, jestliže je v *DNT* a ve všech mintermech se vyskytují stejné prvotní formule.	$(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$

Pravidla a zákony

Identita (eliminace)

- $A \wedge \top \equiv A$
- $A \wedge \bot \equiv \bot$
- $A \vee \top \equiv \top$
- $A \vee \bot \equiv A$

Zákon vyloučeného třetího (vyloučení sporu)

- $A \vee \neg A \equiv \top$ - vždy je něco z leva nebo z prava **true**

Zákon dvojí negace

- $A \equiv \neg(\neg A)$

Asociativní zákony (závorky)

- $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
- $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
- $A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C) \equiv (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$

Komutativní zákony (změna stran)

- $A \wedge B \equiv B \wedge A$
- $A \vee B \equiv B \vee A$
- $A \Leftrightarrow B \equiv B \Leftrightarrow A$

Distributivní zákony

- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- používají se hlavně při hledání DNT/KNT, pokud formule není celá znegovaná

Zákony absorpce

- $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
- $A \vee (A \wedge B) \equiv A$

De Morganovy zákony

- $\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$
- $\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$
- používají se hlavně při hledání DNT/KNT, pokud je celá formule znegovaná

Modus ponens

- $(A \Rightarrow B) \land A \models B$
- $((A \Rightarrow B) \land A) \Rightarrow B$
- opakem je Modus tollens

Kontrapozice

- invert and flip
- $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

Věty

- Ke každé formuli existuje logicky ekvivalentní formule, která je v *DNT*/*KNT*/*uDNT*/*uKNT*.
- Otázka splnitelnosti teorie $T = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ je ekvivalentní s otázkou splnitelnosti formule $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n$
- Negace klausulí **uKNT** nám ukazuje řádky pravdivostní tabulky, ve kterých má celá formule hodnotu ***false***, tzn. vyjde-li nám uKNT $A \wedge \neg B \wedge C$, pak původní formule má hodnotu ***false***, pouze při $\neg A \vee B \vee \neg C$, tedy při ohodnocení $v = \{0, 1, 0\}$
- **uDNT** nám ukazuje řádky pravdivostní tabulky, ve kterých má celá formule hodnotu **true**

Konverze

Do universálního systému spojek $\{\neg, \wedge, \vee\}$

Původní výraz	Jak?	Výsledek
$A \wedge B$; $A \vee B$	Přidáním double negatives a aplikací prvního z nich na závorku	$\neg(\neg A \vee \neg B)$; $\neg(\neg A \wedge \neg B)$
$A \Rightarrow B$		$\neg A \vee B$
$A \Leftrightarrow B$		$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$; $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
$\neg(A \Leftrightarrow B)$	Aplikací negativu na závorku a eliminací	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Do universálního systému spojek $\{\neg, \Rightarrow\}$

Původní výraz	Výsledek
$A \wedge B$	$\neg(A \Rightarrow \neg B)$
$A \vee B$	$\neg A \Rightarrow B$
$A \Leftrightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Predikátová logika

Hilbertův axiomatický systém

(CA1) $\vdash A \to (B \to A)$ (CA2) $\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (CA3) $\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ (MP) $A, A \to B \vdash B$