Cheat sheet Aplikovaná matematika
(Robert Mařík, 21. září 2022)

Determinanty

Determinant 2×2 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Determinant 3×3
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - afh + bfg - bdi + cdh - ceg$$

Vektory, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$,

Skalární součin vektorů $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Vektorový součin vektorů
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Délka vektoru $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Vzorce pro derivování

(1) $(c)' = 0$
(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$
(3) $(e^x)' = e^x$
(4) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
(5) $(\sin x)' = \cos x$
(6) $(\cos x)' = -\sin x$
(7) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
(8) $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
(9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(11) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(cu)' = cu'$
3. $(uv)' = u'v + uv'$
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
5. $\Big(u(v(x))\Big)' = u'(v(x))v'(x)$

Vzorce pro integrování

(1) $\int dx = x + c$
(2) $\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
(3) $\int \dfrac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$
(4) $\int e^x \, dx = e^x + c$
(5) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
(6) $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
(7) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c$
(8) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c$
(9) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c$
(10) $\int \dfrac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + c$
(11) $\int \dfrac{1}{1-x^2} \, dx = \dfrac{1}{2} \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + c$

Parciální derivace

Gradient $\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$

Laplaceův operátor $\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2}{(\partial x)^2} f + \dfrac{\partial^2}{(\partial y)^2} f + \dfrac{\partial^2}{(\partial z)^2} f$

Lineární aproximace
$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$
$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$$

Tečna k vrstevnici $f(x,y) = C$ v bodě (x_0, y_0)
$$\nabla f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

Zákon šíření chyb
$$\Delta f(x_1, x_2, \dots x_n) \approx \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2}$$

Schwarzova věta $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}$

Vektorová analýza $\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

Divergence $\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$

Rotace
$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$
$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Slovní vyjádření

Parciální derivace vyjadřuje rychlost s jakou se mení funkční hodnoty funkce při změně jedné její proměnné. Též citlivost na změny ve vstupních datech.
Gradient vyjadřuje směr a rychlost maximálního růstu sklalární veličiny.
Divergence vektorového toku vyjadřuje intenzitu zesílení tohoto toku.
Rotace vektorového toku vyjadřuje, zda tělesa unášená tokem mají tendenci rotovat okolo vlastní osy. Souvisí zejména s možností zavést pro dané pole sklalární potenciál.
Všechny uvedené veličiny jsou lokální a vztahují se k danému bodu v daném čase. Pokles je záporný růst, zeslabení toku je záporné zesílení.

Rovnice matematické fyziky

Rovnice kontinuity $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \sigma - \nabla \cdot \vec{j}$

Konstituční vztah $\vec{j} = -D\nabla u$

Difuzní rovnice $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \nabla(D\nabla u)$

Rovnice vedení tepla $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T)$

Difuzní rovnice v kartézských souřadnicích

Budeme uvažovat diagonální difuzní koeficient. Například homogenní materiál, nebo otrotropní materiál ve kterém volíme osy v souladu s materiálovými vlastnostmi.

Obecný tvar difuzní rovnice v kartézských souřadnicích je
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Ve *stacionárním případě* (sledujeme stav po dosažení rovnováhy) položíme navíc $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$.

Pro *bezzdrojový případ* (stavová veličina nemůže vznikat ani zanikat) položíme navíc $\sigma = 0$.

Studujeme-li materiál současně *homogenní* a s *lineárními materiálovými vlastnostmi* (v všech místech má materiál stejné vlastnosti a ty se nemění při změně stavové veličiny), potom kvaziderivace
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$
upravíme a použijeme druhé derivace
$$D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
(a pro ostatní proměnné analogicky).

U *izotropního materiálu* (má ve všech směrech stejné vlastnosti) nerozlišujeme materiálové charakteristiky v jednolivých směrech, klademe $D_x = D_y = D_z = D$.

Pro méně dimenzí použijeme pouze odpovídající počet difuzních členů. Jednotlivé předpoklady je možno libovolně kombinovat.

Křivkový integrál

Vektorový zápis křivky a její derivace

$$\vec{r}(t)=\varphi(t)\vec{i}+\psi(t)\vec{j},\ t\in[a,b], \qquad \frac{d\vec{r}}{dt}=\varphi'\vec{i}+\psi'\vec{j},$$

Křivkový integrál prvního druhu

$$ds=|d\vec{r}|=\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}dt$$

$$\int_C f ds=\int_a^b f\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}dt$$

V integrálu napravo jsou do funkce f za x a y dosazeny funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$. Analogicky pro prostorové křivky.

Křivkový integrál druhého druhu

$$\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}\ , \qquad \vec{F}\cdot d\vec{r}=P\varphi' dt+Q\psi' dt$$

$$\int_C \vec{F}d\vec{r}=\int_C Pdx+Qdy=\int_a^b(P\varphi'+Q\psi')dt$$

V integrálu napravo jsou do složek P a Q funkce $\vec{F}$ za x a y dosazeny funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$. Analogicky pro prostorové křivky.

Greenova věta

$$\oint_{\partial\Omega}\vec{F}d\vec{r}=\underbrace{\oint_{\partial\Omega}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y}_{\text{Cirkulace } \vec{F} \text{ po hranici } \partial\Omega}=\iint_\Omega \overbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)}^{[\mathrm{rot}(P\vec{i}+Q\vec{j})]_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underbrace{\oint_{\partial\Omega}-Q\mathrm{d}x+P\mathrm{d}y}_{\text{Tok } \vec{F} \text{ přes hranici } \partial\Omega}=\iint_\Omega \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)}_{\mathrm{div}(P\vec{i}+Q\vec{j})}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Nezávislost integrálu na integrační cestě

$C\vec{r}(t)=\varphi(t)\vec{i}+\psi(t)\vec{j},\ t\in[a,b]$

Následující výroky jsou ekvivalentní.

(i) Integrál $\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$ nezávisí v Ω na integrační cestě.

(ii) $\oint_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}=0$ po libovolné uzavřené křivce C v Ω.

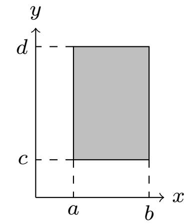
(iii) $\mathrm{rot}\,\vec{F}=0$

(iv) Existuje funkce φ s vlastností $\nabla\varphi=\vec{F}$.

Jsou-li tyto podmínky splněny, platí $\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}=\varphi(\vec{r}(b))-\varphi(\vec{r}(a))$.

Dvojný integrál $\quad \iint_M f(x,y)\,dx\,dy$ resp. $\iint_M f(x,y)\,dA$

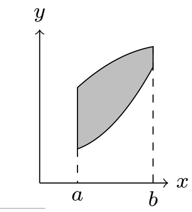
(1) Integrál přes obdélník $R=[a,b]\times[c,d]$



$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$
$$=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\iint_R f(x)g(y)\,dx\,dy=\int_a^b f(x)\,dx\int_c^d g(y)\,dy$$

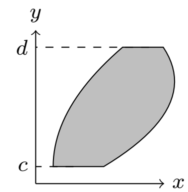
(2) Oblast mezi funkcemi proměnné x



M_1 $a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)$

$$\iint_{M_1} f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

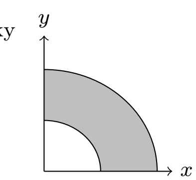
(3) Oblast mezi funkcemi proměnné y



M_2 $a\le y\le b,\ \varphi(y)\le x\le\psi(y)$

$$\iint_{M_2} f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

(4) Oblast mezi kruhy nebo kruhovými výseky



M_3 $r_1\le r\le r_2,\ \varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$

$$\iint_{M_3} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2} f(r,\varphi)r\,d\varphi\,dr$$

Separovatelné ODR

$$y'=\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} y(x)=y_i, \text{ kde } g(y_i)=0\\ \int\frac{1}{g(y)}dy=C+\int f(x)dx\end{cases}$$

Lineární operátory

(1) $L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]$ a $L[Cy]=CL[y]$

(2) $L[C_1y_1+C_2y_2]=C_1L[y_1]+C_2L[y_2]$

Lineární DR 1. řádu s konstantními koeficienty

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ay=b,\quad a,b\in\mathbb{R}$$

Konstantní (stacionární) řešení: $y(t)=\dfrac{b}{a}$

Obecné řešení:

$$y=Ce^{-at}+\frac{b}{a}$$

Obecné řešení konverguje ke stacionárnímu pokud $a>0$.

Autonomní DR 1. řádu

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(y)$$

Konstantních řešení je tolik, kolik je nulových bodů funkce $f(y)$.

Stabilní konstantní řešení jsou v bodech, kde je funkce f klesající.

Netabilní konstantní řešení jsou v bodech, kde je funkce f rostoucí.

Lineární autonomní systémy $\quad \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=AX$

Má-li matice A vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ, má soustava řešení

$$X(t)=ve^{\lambda t},$$

kde v je příslušný vlastní vektor. Toto řešení konverguje k počátku pro $\lambda<0$ a roste neohraničeně pro $\lambda>0$.

Má-li A celkem n různých vlastních hodnot, dostaneme takto n nezávislých řešení, ze kterých díky linearitě složíme řešení obecné.

Je-li vlastní hodnota λ komplexní, je i příslušný vlastní vektor v komplexní a řešeními jsou reálná a imaginární část $X(t)=ve^{\lambda t}$, přičemž

$$\Re(e^{(\alpha+i\beta)t})=e^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad \text{a} \quad \Im(e^{(\alpha+i\beta)t})=e^{\alpha t}\sin(\beta t).$$

Řešení v tomto případě oscilují a mezi konvergencí a divergencí rozhoduje znaménko $\Re(\lambda)=\alpha$.

Pro $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ je λ řešením rovnice
$\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$.

Linearizace nelineárního autonomního systému

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(X)$$

$X = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $F(X) = (F_1(X), \ldots, F_n(X))^T$

Nechť X_0 je bod takový, že $F(X_0) = 0$. Buď $J(X_0) = \left(\frac{\partial F_i(X_0)}{\partial x_j}\right)$ Jacobiho matice funkce F v bodě X_0. Je-li $|J(X_0)| \neq 0$, mají autonomní systémy

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(X) \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = J(X_0)X$$

v bodě X_0 stejný typ stacionárního bodu, pokud jsou vlastní hodnoty mimo hraniční a patologické případy (vlastní hodnoty nejsou násobné, nejsou nulové a komplexní vlastní hodnoty nemají nulové reálné části).

Lineární DR 2. řádu s konstantními koeficienty

(a) homogenní rovnice $y'' + py' + qy = 0$

Obecné řešení je

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

kde y_i jsou libovolná lineárně nezávislá řešení.

Charakteristická rovnice $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

(1) Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ dva různé reálné kořeny charakteristické rovnice, lze položit

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

(2) Je-li $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice, lze položit

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \qquad y_2 = xe^{\lambda_1 x}.$$

(3) Jsou-li $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R}$ dva komplexně sdružené kořeny charakteristické rovnice, lze položit

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x), \qquad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

(b) nehomogenní rovnice $y'' + py' + qy = f(x)$

Obecné řešení je

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p,$$

kde y_1 a y_2 jsou nezávislá řešení asociované homogenní rovnice a y_p jedno řešení nehomogenní rovnice. Je-li f polynom a $q \neq 0$, je jedno z partikulárních řešení polynom stejného stupně.

Parametrizace běžných křivek

(1) Úsečka z $[a_1, a_2]$ do $[b_1, b_2]$

$$x = a_1 + t(b_1 - a_1)$$
$$y = a_2 + t(b_2 - a_2), \ t \in [0,1]$$

(2) Kružnice se středem v počátku a poloměrem r

$$x = r\cos(t)$$
$$y = r\sin(t), \ t \in [0, 2\pi]$$

(3) Část grafu funkce $y = f(x)$ nad intervalem $[a,b]$

$$x = t$$
$$y = f(t), \ t \in [a,b]$$

Separace proměnných v PDR (Pro jednoduchost uvažujme rovnici v 1D s Dirichletovou úlohou a homogenními okrajovými podmínkami.)

A) Rovnice vedení tepla, bez zdrojů.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} u(x,t) = F(x)G(t) \\ F'' + \lambda^2 F = 0 \\ F(0) = F(1) = 0 \\ G' + \lambda^2 G = 0 \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{bmatrix}$$

Okrajová úloha pro funkci F má nekonečně mnoho netriviálních řešení $F_n = \sin(\lambda_n x)$ pro vlastní čísla $\lambda_n = n\pi$. Pro každé takové λ_n určíme $G_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t}$. Jedno řešení zadané PDR je

$$u_n(x,t) = \sin(n\pi x)e^{-n^2\pi^2 t},$$

ale také libovolná lineární kombinace těchto funkcí. Koeficienty c_n lineární kombinace určíme tak, aby platilo $u(x,0) = \varphi(x)$.

B) Vlnová rovnice.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi_1(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_2(x) \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} u(x,t) = F(x)G(t) \\ F'' + \lambda^2 F = 0 \\ F(0) = F(1) = 0 \\ G'' + \lambda^2 G = 0 \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{bmatrix}$$

Podobně jako u rovnice vedení tepla, ale máme dvě počáteční podmínky a diferenciální rovnici druhého řádu pro časovou složku.