

Determinanty		
Determinant 2×2	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$	$= ad - bc$
Determinant 3×3	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$	$= aei - afh + bfg - bdi + cdh - ceg$

Vektory, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$,

Skalární součin vektorů $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Vektorový součin vektorů

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Délka vektoru $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Vzorce pro derivování	
(1) $(c)' = 0$	(10) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$	(11) $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$
(3) $(e^x)' = e^x$	
(4) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	
(5) $(\sin x)' = \cos x$	1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
(6) $(\cos x)' = -\sin x$	2. $(cu)' = cu'$
(7) $(\tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	3. $(uv)' = u'v + uv'$
(8) $(\cotg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
(9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	5. $\left(u(v(x))\right)' = u'(v(x))v'(x)$

Vzorce pro integrování	
(1) $\int dx = x + c$	(7) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tg x + c$
(2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	(8) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cotg x + c$
(3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	(9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
(4) $\int e^x dx = e^x + c$	(10) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c$
(5) $\int \sin x dx = -\cos x + c$	(11) $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + c$
(6) $\int \cos x dx = \sin x + c$	

Parciální derivace

Gradient $\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$

Laplaceův operátor $\nabla^2 f = \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} f + \frac{\partial^2}{(\partial y)^2} f + \frac{\partial^2}{(\partial z)^2} f$

Lineární aproximace

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0)$$
$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$$

Tečna k vrstevnici $f(x, y) = C$ v bodě (x_0, y_0)

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

Zákon šíření chyb

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^2}$$

Schwarzova věta $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$

Vektorová analýza $\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

Divergence $\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

Rotace $\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Slovní vyjádření

Parciální derivace vyjadřuje rychlost s jakou se mení funkční hodnoty při změně jedné její proměnné. Též citlivost na změny ve vstupních datech.
Gradient vyjadřuje směr a rychlost maximálního růstu skalární veličiny.
Divergence vektorového toku vyjadřuje intenzitu zesílení tohoto toku.
Rotace vektorového toku vyjadřuje, zda tělesa unášena tokem mají tendenci rotovat okolo vlastní osy. Souvisí zejména s možností zavést pro dané pole skalární potenciál.
Všechny uvedené veličiny jsou lokální a vztahují se k danému bodu v daném čase. Pokles je záporný růst, zeslabení toku je záporné zesílení.

Rovnice matematické fyziky

Rovnice kontinuity $\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma - \nabla \cdot \vec{j}$

Konstituční vztah $\vec{j} = D \nabla u$

Difuzní rovnice $\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \nabla (D \nabla u)$

Rovnice vedení tepla $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla (\lambda \nabla T)$

Difuzní rovnice v kartézských souřadnicích

Budeme uvažovat diagonální difuzní koeficient. Například homogenní materiál, nebo ototropní materiál ve kterém volíme osy v souladu s materiálovými vlastnostmi.

Obecný tvar difuzní rovnice v kartézských souřadnicích je

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Ve *Stacionárním případě* (sledujeme stav po dosažení rovnováhy) položíme navíc $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

Pro *bezzdrojový případ* (stavová veličina nemůže vznikat ani zanikat) položíme navíc $\sigma = 0$.

Studujeme-li materiál současně *homogenní* a s *lineárními materiálovými vlastnostmi* (v všech místech má materiál stejné vlastnosti a ty se nemění při změně stavové veličiny), potom kvaziderivace

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

upravíme a použijeme druhé derivace

$$D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(a pro ostatní proměnné analogicky).

U *izotropního materiálu* (má ve všech směrech stejné vlastnosti) nerozlišujeme materiálové charakteristiky v jednotlivých směrech, klademe $D_x = D_y = D_z = D$.

Pro méně dimenzí použijeme pouze odpovídající počet difuzních členů. Jednotlivé předpoklady je možno libovolně kombinovat.

Křivkový integrál

Vektorový zápis křivky a její derivace

$$\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b], \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \varphi'(t)\vec{i} + \psi'(t)\vec{j},$$

Křivkový integrál prvního druhu

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2} dt$$
$$\int_C f ds = \int_a^b f \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2} dt$$

V integrálu napravo jsou do funkce f za x a y dosazeny funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$. Analogicky pro prostorové křivky.

Křivkový integrál druhého druhu

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}, \quad \vec{F} \cdot d\vec{r} = P\varphi' dt + Q\psi' dt$$
$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy = \int_a^b (P\varphi' + Q\psi') dt$$

V integrálu napravo jsou do složek P a Q funkce \vec{F} za x a y dosazeny funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$. Analogicky pro prostorové křivky.

Greenova věta

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{F} d\vec{r} = \oint_{\partial\Omega} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \overbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)}^{[\text{rot}(P\vec{i} + Q\vec{j})]_z} dx dy$$

Cirkulace \vec{F} po hranici $\partial\Omega$

$$\oint_{\partial\Omega} \underbrace{-Q dx + P dy}_{\text{Tok } \vec{F} \text{ přes hranici } \partial\Omega} = \iint_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right)}_{\text{div}(P\vec{i} + Q\vec{j})} dx dy$$

Nezávislost integrálu na integrační cestě

$$C\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b]$$

Následující výroky jsou ekvivalentní.

(i) Integrál $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ nezávisí v Ω na integrační cestě.

(ii) $\oint_C \vec{F} d\vec{r} = 0$ po libovolné uzavřené křivce C v Ω .

(iii) $\text{rot } \vec{F} = 0$

(iv) Existuje funkce φ s vlastností $\nabla\varphi = \vec{F}$.

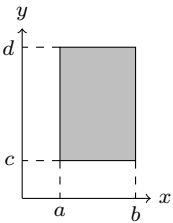
Jsou-li tyto podmínky splněny, platí $\int_C \vec{F} d\vec{r} = \varphi(\vec{r}(b)) - \varphi(\vec{r}(a))$.

Dvojný integrál

$$\iint_M f(x, y) dx dy \quad \text{resp.} \quad \iint_M f(x, y) dA$$

(1) Integrál přes obdélník $R = [a, b] \times [c, d]$

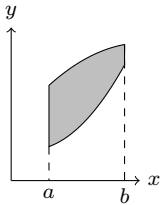
$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$
$$= \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$
$$\iint_R f(x)g(y) dx dy = \int_a^b f(x) dx \int_c^d g(y) dy$$



(2) Oblast mezi funkcemi proměnné x

$$M_1 \quad a \leq x \leq b, \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$$

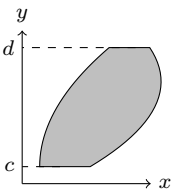
$$\iint_{M_1} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy dx$$



(3) Oblast mezi funkcemi proměnné y

$$M_2 \quad a \leq y \leq b, \quad \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)$$

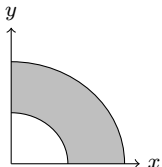
$$\iint_{M_2} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx dy$$



(4) Oblast mezi kruhy nebo kruhovými výseky

$$M_3 \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$$

$$\iint_{M_3} f(x, y) dx dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r, \varphi) r d\varphi dr$$



Separovatelné ODR

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \implies \begin{cases} y(x) = y_i, \text{ kde } g(y_i) = 0 \\ \int \frac{1}{g(y)} dy = C + \int f(x) dx \end{cases}$$

Lineární operátory

$$(1) \quad L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] \quad \text{a} \quad L[Cy] = CL[y]$$

$$(2) \quad L[C_1 y_1 + C_2 y_2] = C_1 L[y_1] + C_2 L[y_2]$$

Lineární DR 1. řádu

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Integrační faktor

$$e^{\int a(x) dx}$$

Rovnice vynásobená integračním faktorem

$$(y e^{\int a(x) dx})' = e^{\int a(x) dx} b(x)$$

Obecné řešení

$$y = C e^{-\int a(x) dx} + e^{-\int a(x) dx} \int e^{\int a(x) dx} b(x) dx$$

Lineární autonomní systémy

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

Má-li matice A vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ , má soustava řešení

$$X(t) = v e^{\lambda t},$$

kde v je příslušný vlastní vektor. Toto řešení konverguje k počátku pro $\lambda < 0$ a roste neohraničeně pro $\lambda > 0$.

Má-li A celkem n různých vlastních hodnot, dostaneme takto n nezávislých řešení, ze kterých díky linearitě složíme řešení obecné.

Je-li vlastní hodnota λ komplexní, je i příslušný vlastní vektor v komplexní a řešeními jsou reálná a imaginární část $X(t) = v e^{\lambda t}$, přičemž

$$\Re(e^{(\alpha + i\beta)t}) = e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad \text{a} \quad \Im(e^{(\alpha + i\beta)t}) = e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

Řešení v tomto případě oscilují a mezi konvergencí a divergencí rozhoduje znaménko $\Re(\lambda) = \alpha$.

Pro $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je λ řešením rovnice

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Linearizace nelineárního autonomního systému

$$\frac{dX}{dt} = F(X)$$

$$X = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad F(X) = (F_1(X), \dots, F_n(X))^T$$

Nechť X_0 je bod takový, že $F(X_0) = 0$. Bud'

$J(X_0) = \left(\frac{\partial F_i(X_0)}{\partial x_j} \right)$ Jacobiho matice funkce F v bodě X_0 . Je-li $|J(X_0)| \neq 0$, mají autonomní systémy

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad \text{a} \quad \frac{dX}{dt} = J(X_0)X$$

v stejný typ stacionárního bodu X_0 , pokud jsou vlastní hodnoty mimo hraniční a patologické případy (vlastní hodnoty nejsou násobné, nejsou nulové a komplexní vlastní hodnoty nemají nulové reálné části).

Lineární DR 2. řádu s konstantními koeficienty

(a) *homogenní rovnice* $y'' + py' + qy = 0$

Obecné řešení je

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

kde y_i jsou libovolná lineární nezávislá řešení.

Charakteristická rovnice $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

(1) Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ dva různé reálné kořeny charakteristické rovnice, lze položit

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

(2) Je-li $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice, lze položit

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = x e^{\lambda_1 x}.$$

(3) Jsou-li $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R}$ dva komplexně sdružené kořeny charakteristické rovnice, lze položit

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

(b) *nehomogenní rovnice* $y'' + py' + qy = f(x)$

Obecné řešení je

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p,$$

kde y_1 a y_2 jsou nezávislá řešení asociované homogenní rovnice a y_p jedno řešení nehomogenní rovnice. Je-li f polynom a $q \neq 0$, je jedno z partikulárních řešení polynom stejného stupně.

Parametrizace běžných křivek

(1) Úsečka z $[a_1, a_2]$ do $[b_1, b_2]$

$$x = a_1 + t(b_1 - a_1)$$

$$y = a_2 + t(b_2 - a_2), \quad t \in [0, 1]$$

(2) Kružnice se středem v počátku a poloměrem r

$$x = r \cos(t)$$

$$y = r \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

(3) Část grafu funkce $y = f(x)$ nad intervalem $[a, b]$

$$x = t$$

$$y = f(t), \quad t \in [a, b]$$

Separace proměnných v PDR (Pro jednoduchost uvažujme rovnici v 1D s Dirichletovou úlohou a homogenními okrajovými podmínkami.)

A) *Rovnice vedení tepla, bez zdrojů.*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} u(x, t) = F(x)G(t) \\ F'' + \lambda^2 F = 0 \\ F(0) = F(1) = 0 \\ G' + \lambda^2 G = 0 \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{bmatrix}$$

Okrajová úloha pro funkci F má nekonečně mnoho netriviálních řešení $F_n = \sin(\lambda_n x)$ pro vlastní čísla

$\lambda_n = n\pi$. Pro každé takové λ_n určíme $G_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t}$.

Jedno řešení zadané PDR je

$$u_n(x, t) = \sin(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t},$$

ale také libovolná lineární kombinace těchto funkcí.

Koeficienty c_n lineární kombinace určíme tak, aby platilo

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

B) *Vlnová rovnice.*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi_1(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_2(x) \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} u(x, t) = F(x)G(t) \\ F'' + \lambda^2 F = 0 \\ F(0) = F(1) = 0 \\ G'' + \lambda^2 G = 0 \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{bmatrix}$$

Podobně jako u rovnice vedení tepla, ale máme dvě

počáteční podmínky a diferenciální rovnici druhého řádu pro časovou složku.