

<div>Cheat sheet Aplikovaná matematika</div> <div>(Robert Mařík, 3. března 2022)</div>	
<div>Determinanty</div> <div>Determinant 2×2</div> <div>Determinant 3×3</div>	
<div>Vektory, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$,</div> <div>Skalární součin vektorů $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$</div> <div>Vektorový součin vektorů</div> <div>Délka vektoru $\vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$</div>	
<div>Vzorce pro derivování</div> <div>(1) $(c)' = 0$</div> <div>(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$</div> <div>(3) $(e^x)' = e^x$</div> <div>(4) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$</div> <div>(5) $(\sin x)' = \cos x$</div> <div>(6) $(\cos x)' = -\sin x$</div> <div>(7) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$</div> <div>(8) $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$</div> <div>(9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</div>	<div>(10) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</div> <div>(11) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$</div> <div>1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$</div> <div>2. $(cu)' = cu'$</div> <div>3. $(uv)' = u'v + uv'$</div> <div>4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$</div> <div>5. $\left(u(v(x))\right)' = u'(v(x))v'(x)$</div>
<div>Vzorce pro integrování</div> <div>(1) $\int dx = x + c$</div> <div>(2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$</div> <div>(3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$</div> <div>(4) $\int e^x dx = e^x + c$</div> <div>(5) $\int \sin x dx = -\cos x + c$</div> <div>(6) $\int \cos x dx = \sin x + c$</div>	<div>(7) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$</div> <div>(8) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c$</div> <div>(9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$</div> <div>(10) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$</div> <div>(11) $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + c$</div>

<div>Parciální derivace</div> <div>Gradient</div> <div>Laplaceův operátor</div> <div>Lineární aproximace</div> <div>Schwarzova věta</div>	
<div>Tečna k vrstevnici $f(x, y) = C$ v bodě (x_0, y_0)</div> <div>Zákon šíření chyb</div>	
<div>Schwarzova věta</div>	
<div>Vektorová analýza</div> <div>Divergence</div> <div>Rotace</div>	
<div>Slovní vyjádření</div> <div>Parciální derivace vyjadřuje rychlost s jakou se mení funkční hodnoty při změně jedné její proměnné. Též citlivost na změny ve vstupních datech.</div> <div>Gradient vyjadřuje směr a rychlost maximálního růstu skalární veličiny.</div> <div>Divergence vektorového toku vyjadřuje intenzitu zesílení tohoto toku.</div> <div>Rotace vektorového toku vyjadřuje, zda tělesa unášená tokem mají tendenci rotovat okolo vlastní osy. Souvisí zejména s možností zavést pro dané pole skalární potenciál.</div> <div>Všechny uvedené veličiny jsou lokální a vztahují se k danému bodu v daném čase. Pokles je záporný růst, zeslabení toku je záporné zesílení.</div>	

<div>Rovnice matematické fyziky</div> <div>Rovnice kontinuity</div> <div>Konstituční vztah</div> <div>Difuzní rovnice</div> <div>Rovnice vedení tepla</div>	
<div>Difuzní rovnice v kartézských souřadnicích</div> <div>Budeme uvažovat diagonální difuzní koeficient. Například homogenní materiál, nebo ototropní materiál ve kterém volíme osy v souladu s materiálovými vlastnostmi.</div> <div>Obecný tvar difuzní rovnice v kartézských souřadnicích je</div> <div>Ve <i>stacionárním případě</i> (sledujeme stav po dosažení rovnováhy) položíme navíc $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.</div> <div>Pro <i>bezzdrojový případ</i> (stavová veličina nemůže vznikat ani zanikat) položíme navíc $\sigma = 0$.</div> <div>Studujeme-li materiál současně <i>homogenní</i> a s <i>lineárními materiálovými vlastnostmi</i> (v všech místech má materiál stejné vlastnosti a ty se nemění při změně stavové veličiny), potom kvaziderivace</div> <div>upravíme a použijeme druhé derivace</div> <div>(a pro ostatní proměnné analogicky).</div> <div>U <i>izotropního materiálu</i> (má ve všech směrech stejné vlastnosti) nerozlišujeme materiálové charakteristiky v jednotlivých směrech, klademe $D_x = D_y = D_z = D$.</div> <div>Pro méně dimenzí použijeme pouze odpovídající počet difuzních členů. Jednotlivé předpoklady je možno libovolně kombinovat.</div>	

Křivkový integrál

Vektorový zápis křivky a její derivace

$$\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b], \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \varphi'\vec{i} + \psi'\vec{j},$$

Křivkový integrál prvního druhu

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2} dt$$
$$\int_C f ds = \int_a^b f \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2} dt$$

V integrálu napravo jsou do funkce f za x a y dosazeny funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$. Analogicky pro prostorové křivky.

Křivkový integrál druhého druhu

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}, \quad \vec{F} \cdot d\vec{r} = P\varphi' dt + Q\psi' dt$$
$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy = \int_a^b (P\varphi' + Q\psi') dt$$

V integrálu napravo jsou do složek P a Q funkce \vec{F} za x a y dosazeny funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$. Analogicky pro prostorové křivky.

Greenova věta

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{F} d\vec{r} = \oint_{\partial\Omega} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \overbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)}^{[\text{rot}(P\vec{i} + Q\vec{j})]_z} dx dy$$

Cirkulace \vec{F} po hranici $\partial\Omega$

$$\oint_{\partial\Omega} \underbrace{-Q dx + P dy}_{\text{Tok } \vec{F} \text{ přes hranici } \partial\Omega} = \iint_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right)}_{\text{div}(P\vec{i} + Q\vec{j})} dx dy$$

Nezávislost integrálu na integrační cestě

$$C\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b]$$

Následující výroky jsou ekvivalentní.

(i) Integrál $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ nezávisí v Ω na integrační cestě.

(ii) $\oint_C \vec{F} d\vec{r} = 0$ po libovolné uzavřené křivce C v Ω .

(iii) $\text{rot } \vec{F} = 0$

(iv) Existuje funkce φ s vlastností $\nabla\varphi = \vec{F}$.

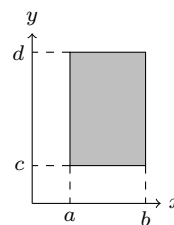
Jsou-li tyto podmínky splněny, platí $\int_C \vec{F} d\vec{r} = \varphi(\vec{r}(b)) - \varphi(\vec{r}(a))$.

Dvojný integrál

$$\iint_M f(x, y) dx dy \quad \text{resp.} \quad \iint_M f(x, y) dA$$

(1) Integrál přes obdélník $R = [a, b] \times [c, d]$

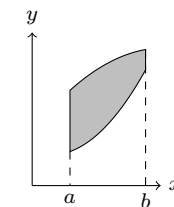
$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$
$$= \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$
$$\iint_R f(x)g(y) dx dy = \int_a^b f(x) dx \int_c^d g(y) dy$$



(2) Oblast mezi funkcemi proměnné x

$$M_1 \quad a \leq x \leq b, \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$$

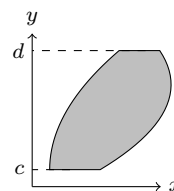
$$\iint_{M_1} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy dx$$



(3) Oblast mezi funkcemi proměnné y

$$M_2 \quad a \leq y \leq b, \quad \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)$$

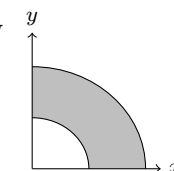
$$\iint_{M_2} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx dy$$



(4) Oblast mezi kruhy nebo kruhovými výseky

$$M_3 \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$$

$$\iint_{M_3} f(x, y) dx dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r, \varphi) r d\varphi dr$$



Separovatelné ODR

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \implies \begin{cases} y(x) = y_i, \text{ kde } g(y_i) = 0 \\ \int \frac{1}{g(y)} dy = C + \int f(x) dx \end{cases}$$

Lineární operátory

(1) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$ a $L[Cy] = CL[y]$

(2) $L[C_1 y_1 + C_2 y_2] = C_1 L[y_1] + C_2 L[y_2]$

Lineární DR 1. řádu s konstantními koeficienty

$$\frac{dy}{dt} + ay = b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Konstantní (stacionární) řešení: $y(t) = \frac{b}{a}$

Obecné řešení:

$$y = Ce^{-at} + \frac{b}{a}$$

Obecné řešení konverguje ke stacionárnímu pokud $a > 0$.

Autonomní DR 1. řádu

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

Konstantních řešení je tolik, kolik je nulových bodů funkce $f(y)$.

Stabilní konstantní řešení jsou v bodech, kde je funkce f klesající.

Netabilní konstantní řešení jsou v bodech, kde je funkce f rostoucí.

Lineární autonomní systémy

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

Má-li matice A vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ , má soustava řešení

$$X(t) = ve^{\lambda t},$$

kde v je příslušný vlastní vektor. Toto řešení konverguje k počátku pro $\lambda < 0$ a roste neohraničeně pro $\lambda > 0$.

Má-li A celkem n různých vlastních hodnot, dostaneme takto n nezávislých řešení, ze kterých díky linearitě složíme řešení obecné.

Je-li vlastní hodnota λ komplexní, je i příslušný vlastní vektor v komplexní a řešeními jsou reálná a imaginární část $X(t) = ve^{\lambda t}$, přičemž

$$\Re(e^{(\alpha+i\beta)t}) = e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad \text{a} \quad \Im(e^{(\alpha+i\beta)t}) = e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

Řešení v tomto případě oscilují a mezi konvergencí a divergencí rozhoduje znaménko $\Re(\lambda) = \alpha$.

Pro $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je λ řešením rovnice

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0.$$

Linearizace nelineárního autonomního systému

$$\frac{dX}{dt} = F(X)$$
$$X = (x_1, \dots, x_n)^T, F(X) = (F_1(X), \dots, F_n(X))^T$$

Nechť X_0 je bod takový, že $F(X_0) = 0$. Bud'

$$J(X_0) = \left(\frac{\partial F_i(X_0)}{\partial x_j} \right)$$

Jacobiho matice funkce F v bodě X_0 . Je-li $|J(X_0)| \neq 0$, mají autonomní systémy

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad \text{a} \quad \frac{dX}{dt} = J(X_0)X$$

v bodě X_0 stejný typ stacionárního bodu, pokud jsou vlastní hodnoty mimo hraniční a patologické případy (vlastní hodnoty nejsou násobné, nejsou nulové a komplexní vlastní hodnoty nemají nulové reálné části).

Lineární DR 2. řádu s konstantními koeficienty

(a) *homogenní rovnice* $y'' + py' + qy = 0$

Obecné řešení je

$$y = C_1y_1 + C_2y_2,$$

kde y_i jsou libovolná lineární nezávislá řešení.

Charakteristická rovnice $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

(1) Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ dva různé reálné kořeny charakteristické rovnice, lze položit

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

(2) Je-li $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice, lze položit

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = xe^{\lambda_1 x}.$$

(3) Jsou-li $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R}$ dva komplexně sdružené kořeny charakteristické rovnice, lze položit

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

(b) *nehomogenní rovnice* $y'' + py' + qy = f(x)$

Obecné řešení je

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_p,$$

kde y_1 a y_2 jsou nezávislá řešení asociované homogenní rovnice a y_p jedno řešení nehomogenní rovnice. Je-li f polynom a $q \neq 0$, je jedno z partikulárních řešení polynom stejného stupně.

Parametrizace běžných křivek

- (1) Úsečka z $[a_1, a_2]$ do $[b_1, b_2]$
- $$x = a_1 + t(b_1 - a_1)$$
- $$y = a_2 + t(b_2 - a_2), \quad t \in [0, 1]$$
- (2) Kružnice se středem v počátku a poloměrem r
- $$x = r \cos(t)$$
- $$y = r \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$
- (3) Část grafu funkce $y = f(x)$ nad intervalem $[a, b]$
- $$x = t$$
- $$y = f(t), \quad t \in [a, b]$$

Separace proměnných v PDR (Pro jednoduchost uvažujme rovnici v 1D s Dirichletovou úlohou a homogenními okrajovými podmínkami.)

A) *Rovnice vedení tepla, bez zdrojů.*

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{array} \right] \implies \left[\begin{array}{l} u(x, t) = F(x)G(t) \\ F'' + \lambda^2 F = 0 \\ F(0) = F(1) = 0 \\ G' + \lambda^2 G = 0 \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right]$$

Okrajová úloha pro funkci F má nekonečně mnoho netriviálních řešení $F_n = \sin(\lambda_n x)$ pro vlastní čísla $\lambda_n = n\pi$. Pro každé takové λ_n určíme $G_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t}$. Jedno řešení zadané PDR je

$$u_n(x, t) = \sin(n\pi x)e^{-n^2 \pi^2 t},$$

ale také libovolná lineární kombinace těchto funkcí. Koeficienty c_n lineární kombinace určíme tak, aby platilo $u(x, 0) = \varphi(x)$.

B) *Vlnová rovnice.*

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi_1(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_2(x) \end{array} \right] \implies \left[\begin{array}{l} u(x, t) = F(x)G(t) \\ F'' + \lambda^2 F = 0 \\ F(0) = F(1) = 0 \\ G'' + \lambda^2 G = 0 \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right]$$

Podobně jako u rovnice vedení tepla, ale máme dvě počáteční podmínky a diferenciální rovnici druhého řádu pro časovou složku.