Probabilités et statistiques

INTRODUCTION

Au 17ème siècle PASCAL et DE FERMAT ont basé leur travaux sur la Théorie des jeux. => À donné naissance à toutes la théorie combinatoire.

Au 20ème siècle, KOLMOGOROV à formalisé les statistiques pour arriver au formalisme moderne. Ses travaux sont basés sur la théorie de la mesure).

Notion intuitive de probabilité

- Sur 1D6, la probabilité d'obtinir un 5 est de $\frac{1}{6}$ uniquement si le dé est équilibré.
- Soit N lancés de 1D6 équilibré. La probabilités d'obtenir un 5 n'est valable que pour N grand.

MESURE ET PROBABILITÉS

Vocabulaire

Une Épreuve aléatoire $\Omega = \{\text{résultats possibles}\}$
ω_p = résultats élémentaires

exemple du dé

$\omega_1 = 1, \omega_2 = 2$
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A \subset \Omega$ évènements = résultats possibles

A = famille de A_i vérifiant 3 règles :

- $\Omega \in A$
- $\forall A_i \in A, C_\Omega^{A_i} \in A$
- $\forall A_i \in A, i \in A_i \in A$

L'ensemble forme une tribut A

Définition

On associe à chaque $A_i \in A$ un nombre $\equiv$ probabilité

$$\begin{aligned} p: \quad & A \rightarrow [O,1] \\ & A_i \rightarrow p(Ax) = \text{probabilité de réaliser} A_i \text{sur une épreuve.} \end{aligned}$$

P vérifie 3 règles:

$$A_i \exists A, p(\emptyset) = 0 \leq p(A_i) \leq 1 = p(\Omega)$$
$$A_i \exists A, p(C_\Omega A_i) = 1 - p(A_i)$$
$$A_i \exists A, i \in I p(U(i \in I) A_i) = \sum_{i \in I} p(A_i)$$

ssi les A_i sont 2 à 2 disjoints.

exemple

dé à 6 faces

$$\begin{aligned} \Omega & = \{1,2,3,4,5,6\} \\ A_1 & = \{\Omega, \emptyset\} \\ A_2 & = \{\Omega, \emptyset, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}\} \\ A_3 & = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2,3,4,5,6\}, \{1,3,4,5,6\}, \{1,2\}, \{1,4,5,6\}\} \\ (\Omega, A, p) & \equiv \text{espace probabilisé} \end{aligned}$$

A_i et A_j incompatible	$p(A_i \cap A_j) = 0$
A_i et A_j indépendants	$p(A_i \cap A_j) = p(A_i) \times p(A_j)$
Probabilité inconditionnelle	$p(A_i \mid A_j) = \frac{p(A_i \cap A_j)}{p(A_j)}$

proba $\quad A_i$ conditionnelement à A_j
$\quad\quad\quad A_i$ sachant A_j

Loi des probabilités totales

partition (A_i) de $\omega \in A \rightarrow \cup_i A_i = \Omega, \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$

$\forall B \in A, p(B) = \sum_{i \in I} p(B \mid A_i) p(A_i)$

Formules de Bayes

Partition (A_i) de Ω : $\forall B \in A$

$$\begin{aligned} p(A_k \mid B) &= \frac{p(B|A_k)p(A_k)}{\sum_i p(B|A_i)p(A_i)} \\ &= \frac{p(A_k \cap B)}{p(B)} \end{aligned}$$

$B = \cup_i (B \cap A_i) \equiv$ partition de B.
$\rightarrow p(B) = \sum_i p(B \cap A_i) = \sum_i p(A \mid A_i) p(A_i)$

Propriété de la mesure de proba

$\forall A_i$ et A_j disjoints $p(A_i \cap A_j) = p(A_i) + p(A_j)$
Dans le cas général :
$p(A_i \cap A_j) = p(A_i) + p(A_j) - p(A_i \cap A_j)$

Voir schéma 1

Exercice

Je cherche mon cours, que j'ai rangé dans mon bureau avec une probabilité p. Le bureau possède 3 tiroirs semblables.

- J'ouvre le 1er tiroir … en vain
- j'ouvre le 2ème tiroir … en vain

Quelle est la probabilité de le trouver dans le 3 ème tiroir ?

Soit A le cour dans le 3ème tiroir.
Soit B le cour ni dans le 1er, ni dans le 2ème.

$$\begin{aligned} p(A \mid B) &= \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \\ &= \frac{p(A)}{p(B)} \text{ car A est compris dans B} \end{aligned}$$

Au départ : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_0\}$
avec $\omega_0 =$ pas dans le bureau.
$\omega_i =$ dans le tiroir $i (i = 1, 2, 3)$

La tribu utile sur cet exemple :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\Omega, \emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_0\}, \} \\ A_2 &= \{\Omega, \emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_0\}, \{\omega_0\}, \{\omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}\} \end{aligned}$$

Pour A_2, les probabilités sont respectivement de $\{1, 0, \frac{2\cdot}{3}, 1-p+\frac{p}{3}, 1-p, \frac{p}{3}, p, 1-p+\frac{2\cdot p}{3}\}$

$$A_2' = \{\{\omega_3, \omega_0\}, \emptyset, \{\omega_3\}, \{\omega_0\}\}$$

VARIABLE ALEATOIRE RÉELLE CONTINUE

Soit une variable aléatoir x à valeurs sur $\mathbb{R}$

$$\Omega = \mathbb{R}$$
$$A_i \subset \Omega$$
$$A = \{A_i\} = tribu$$

Les A_i de base sont $]-\infty; x] \hookrightarrow$ tribu Borclienne $\equiv \mathcal{B}_\mathbb{R}$

Fonction de répartition de la variable aléatoire x

$$F_x : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to [0,1] \\ x \in \mathbb{R} \to \text{proba}(x \in]-\infty, x]) \end{array}$$

Il existe 3 types de variables aleatoires.

- continue : F_x est continue. **cf fig 2**
- discrete : F_x est continue par morceaux. **cf fig 3**
- mixte : (ex: temps d'attente à un feu) **cf fig 3**

propritétés de F_x :

$$\forall x \in \mathbb{R}$$
$$F_x(-\infty) \leq F_x(x) \leq 1 = F_x(+\infty)$$
$$F_x \text{ est croissante}$$
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$$
$$F_x(b) - F_x()$$
$$]-\infty, b] \ ]-\infty, a]$$

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(u)\mathrm{d}$$

fct répartition

$$f_x(x) = \frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}x} \text{ (au sens des distributions)}$$

Densité de probabilité $f_x = \frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}x} \leq 0$i.
f_x est sommable : $\int_{\mathbb{R}} f_x(x)$x $= 1 \rightarrow \hat{f_x}$ existe (le chapeau correspond à la transformée de Fourier).

$$\begin{aligned} \text{La probabilité de } (x \in]a, b) &= F_x(b) - F_x(a) \\ &= \int\limits_a^b F_x(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

exemple

Loi uniforme sur [a,b], avec b > a.

f_x est constante sur [a,b], et nulle ailleurs

cf ex 5

Loi de Gauss

C'est la même chose que la loi normale $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$.$F_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{x-m)^2}{2\sigma^2}$\$

cf fig 6

NB : $F_x(x) \rightarrow$ table de loi

Loi de Cauchy (a>0)

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$$
$$F_x(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{a}$$

Espérance mathématique d'une variable aléatoire x de densité de probabilité f_x

$$\boxed{E\{x\} = \int\limits_{\mathbb{R}} x f_x(x)\mathrm{d}}$$

NB : peut ne pas exister.

exemple : Cauchy $E(x) = +\infty$

$$E\{g(x)\} = \int\limits_{\mathbb{R} g(x) f_x(x) \mathrm{d}}$$

La fonction g doit être mesurable $\sim$ continue par morceaux, en particulier : $g(x) = x^n$

$$E(x^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n f_x(x)\mathrm{d}x$$

On appelle cette fonction un moments d'ordre n.

$$\begin{array}{ll} \text{n} = 1 & \rightarrow \text{moyenne de } x \\ \text{n} = 2 & \rightarrow \text{dispertion de } x \end{array}$$

Variance de x : $E\{[x - E(x)]^2\} = \text{var(x)}$ (NB: la partie entre crochet est une variable aléatoire x contrée).

$$\begin{aligned} \text{var}(x) &= E(x^2) - E^2(x) \\ &= E\{x^2 - 2xE(x) + E^2(x)\} \\ &= E(x^2) - 2E(x)E(x) + E^2(x) \\ &= E(x^2) - E^2(x) \end{aligned}$$

NB : E est un opérateur binaire.

$$\begin{aligned} \text{E(x)} &= \int_{\mathbb{R}} xF_x(x)\mathrm{d}x \\ \text{E(ax + b)} &= \int_{\mathbb{R}} (ax+b)f_x(x)\mathrm{d}x \\ &= a\int_{\mathbb{R}} xf_x(x)\mathrm{d}x + b\int_{\mathbb{R}} xf_x(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Inégalité de Bienaginé - Chebychev

Variable aléatoire x de densité de probabilité f_x. La probabilité $(|x - E(x)| > a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$

$$\begin{array}{ll} \sigma^2 & \equiv \text{var}(x) \\ \sigma & \equiv \sqrt{\text{var}(x)} \end{array}$$

σ est l'écart type.

Cf démo dans le poly

Changement de variable

v.a.x de la loi connue f_x.

- Loi bijection croissante :

$$y = h(x)$$

$$h \equiv \text{continue par morceaux}$$

cf fig 7

$$\begin{aligned}
F_y(y) &= p(y \leq y) \\
&= p(x \leq h^{-1}(y)) \\
&= F_x(h^{-1}(y)) \\
F_y(y) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_y(y) \\
&= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_x(h^{-1}(y)) \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} h^{-1}(y) \\
&= f_x(h^{-1}(y)) \tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}
\end{aligned}$$

- Loi bijection décroissante :

cf fig 8

$$\begin{aligned}
F_y(y) &= p(x \in [h^{-1}(y), +\infty[) \\
&= 1 - F_x(h^{-1}(y)) \\
f_y(y) &= -f_x(h^{-1}(y)) \tfrac{\mathrm{d}h^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}
\end{aligned}$$

- Loi bijective :

$$f_y(y) = f_x(h^{-1}(y))|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}|$$

- Cas général :

soient $\{x_i\}, i \in I$ les antécédants de y.

$$h(x_i) = y \forall i \in I$$

$$f_y(y) = \sum_{i \in I} f_x(h^{-1}(y))|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}|$$

exercice : x uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

$y = a \sin x, a > 0$

cf ex 9

$$\forall y \text{ tel que } |y| > a, f_y(y) = 0$$

$$f_y(y) = f_x(x_i)|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}|_{x=x_i} + f_x(x_i)|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}|_{x=x_2} = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}}$$

$$x_1 = \arcsin(\frac{y}{a})$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-(\frac{y}{a})^2}}$$

$$x_2 = \pi - x_1$$

$$x_2 = \pi - \arcsin(\frac{y}{a})$$

$$\Rightarrow |\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}|_{x=x_2} = |\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}|_{x=x_2} = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}}$$

DISCRETE

VECTORIELLE

REGRESSION

THEOREMES AUX LIMITES

ESTIMATION PARAMÈTREQUE

TESTS D'HYPETHÉSES

Références

BASS : Éléments de calcul des probabilités MASSON VENTETSEL : Théorie des probabilités MIR RÉNYI : Calcul des probabilités MASSON (I.GABAY) JAFFARD : Méthodes de la statistique MASSON Série SCHAUM chamilo