Chapitre 3 : Propagation

des ondes électromagnétiques

1. Equations d'ondes

1.1. Préliminaires

On ne considérera que les signaux variant sinusoïdalement dans le temps (sinon, on les décompose sur une somme de sinus), ce qui permet de travailler avec la notation complexe, plus facile à manier.

On considérera des milieux homogènes, isotropes ε, μ (éventuellement complexes), σ.

Les équations de Maxwell en notation complexe s'écrivent :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathcal{E}} = -j\omega\mu_c\vec{\mathcal{H}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathcal{H}} = j\omega\varepsilon_{ca}\vec{\mathcal{E}}$$

$$\mathrm{div}\vec{\mathcal{D}} = 0$$

$$\mathrm{div}\vec{\mathcal{B}} = 0$$

avec

$$\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon_c\vec{\mathcal{E}}$$

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu_c\vec{\mathcal{H}}$$

$$\varepsilon_{ca} = \varepsilon' - j\left(\varepsilon'' + \frac{\sigma}{\omega}\right)$$

$$\tan\delta_{ea} = \frac{\varepsilon'' + \frac{\sigma}{\omega}}{\varepsilon'}$$

$$\mu_c = \mu' - j\mu''$$

1.2. Equations d'onde

On part de $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathcal{H}} = j\omega\varepsilon_{ca}\vec{\mathcal{E}}$

$\vec{\mathrm{rot}}\left(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathcal{H}}\right) = j\omega\varepsilon_{ca}\,\vec{\mathrm{rot}}\left(\vec{\mathcal{E}}\right)$

$\vec{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\vec{\mathcal{H}}\right) - \vec{\Delta\mathcal{H}} = j\omega\varepsilon_{ca}\left(-j\omega\mu_c\vec{\mathcal{H}}\right)$

or $\mathrm{div}\vec{\mathcal{B}} = 0$ d'où $\mathrm{div}\vec{\mathcal{H}} = 0$ car le milieu est homogène

d'où $-\vec{\Delta\mathcal{H}} = \varepsilon_{ca}\mu_c\omega^2\vec{\mathcal{H}}$

soit encore $\vec{\Delta\mathcal{H}} + \varepsilon_{ca}\mu_c\omega^2\vec{\mathcal{H}} = \vec{0}$

Un calcul semblable sur $\vec{\mathcal{E}}$ donne : $\vec{\Delta\mathcal{E}} + \varepsilon_{ca}\mu_c\omega^2\vec{\mathcal{E}} = 0$

Ces équations sont les équations d'ondes. Elles régissent la propagation des ondes électromagnétiques. On appelle encore ces équations les équations d'Helmholtz.

Suivant les symétries présentées par le problème physique à résoudre, on aura à considérer divers systèmes de coordonnées (cartésiennes, cylindriques, sphériques).

Dans le vide, on peut utiliser les relations en notation réelle :

$$\vec{\Delta E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\vec{\Delta H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

qui sont les équations d'ondes de d'Alembert.

D'un point de vue général, pour satisfaire les lois de l'électromagnétisme, $\vec{E}$ et $\vec{H}$ doivent obéir à :

- 4 équations fondamentales qui sont les équations de Maxwell, elles conduisent à l'établissement de l'équation d'ondes ;

- aux conditions aux limites, qui permettent de déterminer les constantes d'intégration lors de la résolution de l'équation d'ondes, et qui conduisent donc à la connaissance exacte du champ électromagnétique.

1.3. Solutions des équations d'ondes en régime harmonique dans un milieu infini

On travaillera sur le champ $\vec{\mathcal{E}}$ (raisonnement identique pour les autres champs). On appellera u_1, u_2, u_3 les trois coordonnées d'espace dans le cas général.

La solution la plus générale des équations d'ondes peut être écrite :

$$E(u_1,u_2,u_3)=\begin{pmatrix} A_1(u_1,u_2,u_3)\exp(j\Psi_1(u_1,u_2,u_3)) \\ A_2(u_1,u_2,u_3)\exp(j\Psi_2(u_1,u_2,u_3)) \\ A_3(u_1,u_2,u_3)\exp(j\Psi_3(u_1,u_2,u_3)) \end{pmatrix}$$

Le vecteur réel associé est : $\vec{E}(u_1,u_2,u_3,t)=\mathrm{Re}\left(\vec{\mathcal{E}}(u_1,u_2,u_3)\exp(j\omega t)\right)$

soit $E_i(u_1,u_2,u_3,t)=A_i(u_1,u_2,u_3)\cos(\omega t+\Psi_i(u_1,u_2,u_3))$

A partir de ces expressions très générales, on va donner les définitions importantes suivantes, qui permettent de qualifier l'onde étudiée.

1.4. Surfaces équiphases SEP

On désigne par surface équiphase de la composante $E_i(u_1,u_2,u_3,t)$ la surface SEP telle que, sur tous les points de SEP, la phase absolue de E_i mesurée en un temps t_0 fixé, soit constante :

$\omega t_0+\Psi_i(u_1,u_2,u_3)=\text{cte}$ à t_0 constant.

Ce qui conduit à $\Psi_i(u_1,u_2,u_3)=\text{cte}$

Sur ces surfaces, la phase absolue est constante mais on remarque que ces surfaces se déplacent avec le temps d'observation t_0 : c'est la propagation des surfaces équiphases.

1.5. Surfaces équiamplitudes SEA

On désigne par surface équiamplitude de la composante $E_i(u_1,u_2,u_3,t)$, la surface SEA telle que, sur tous les points de SEA, l'amplitude de la composante E_i soit constante.

<u>Attention</u> : Il n'y a aucune raison pour que les 6 SEA et les 6 SEP du champ électromagnétique soient confondues.

De même, pour une composante du champ, SEA et SEP ne sont pas forcément confondues, sauf pour des types d'ondes particuliers.

1.6. Quelques types d'ondes particuliers

- Onde homogène : SEA et SEP confondues
- Onde inhomogène : SEA et SEP différentes, ce qui veut dire que, pour une composante, l'amplitude est variable sur une surface équiphase.

- Onde plane : les champs ne dépendent que d'une coordonnée et du temps. Les SEA et les SEP sont des plans.

- Onde plane homogène si SEA = SEP : ondes planes dans un diélectrique homogène et infini (par exemple).

- Onde plane inhomogène : par exemple, onde guidée.

- Onde cylindrique : SEP cylindriques ayant l'axe de révolution commun (rayonnement d'un fil)

- Onde sphérique : les champs ne dépendent que de $\vec{r}$ et du temps. SEP sphériques en général égales aux SEA (rayonnement d'une source idéale isotrope).

1.7. Classification des modes de propagation

Ce sont les conditions aux limites qui donnent la forme exacte des champs. En général, l'onde se propage dans une direction privilégiée (z) au moins localement (guides d'ondes). Cette direction est la direction longitudinale. On définit aussi le plan transverse à cette direction.

Selon qu'il possède ou non des composantes de champs dans la direction de propagation, un mode a des caractéristiques différentes, on définit ainsi quatre types de modes :

E_z	H_z	
=0	=0	TEM (ex : ondes planes)
=0	$\neq 0$	TE ou H
$\neq 0$	=0	TM ou E
$\neq 0$	$\neq 0$	hybride ou HE

2. Caractéristiques de la propagation

On va étudier, sur une composante quelconque d'un champ que l'on ne précisera pas, les propriétés des surfaces équiphases et équiamplitudes.

Dans un premier temps, on s'intéresse aux SEP pour définir les notions de vecteur d'onde et de vitesse de phase.

Dans un second temps, on s'intéressera aux SEA pour définir le vecteur d'affaiblissement et le coefficient d'affaiblissement.

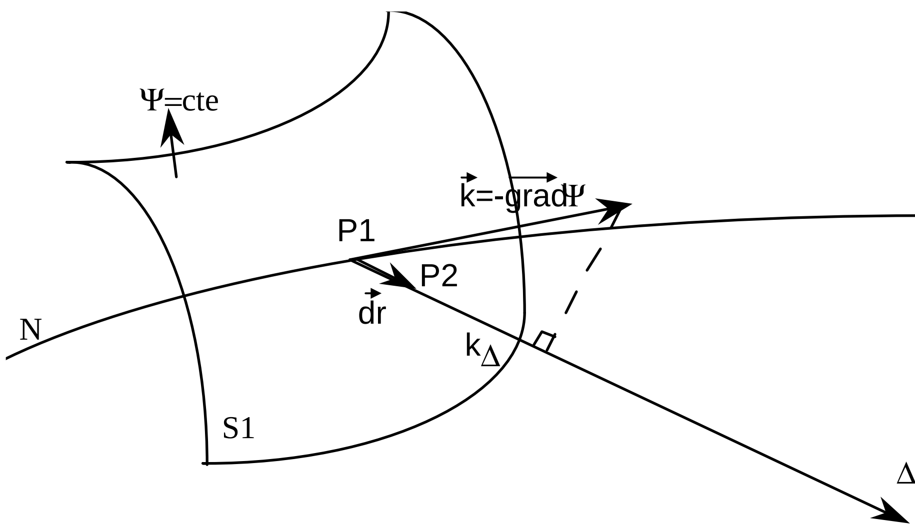
2.1. Surfaces équiphases - Vecteur d'onde

$A = a(x, y, z)\cos(\omega t + \Psi(x, y, z))$ composante quelconque du champ électromagnétique, en notation réelle.

Phase de l'onde : $\omega t + \Psi(x, y, z) = \phi(x, y, z, t)$

A t_0 fixé, les SEP sont définies par $\Psi(x, y, z) = \text{cte}$.

On considère une SEP particulière S_1 telle que $\phi_1 = \text{cte} = \omega t_0 + \Psi_1$



On prend un point particulier P_1 de S_1 et on se déplace de la quantité $\vec{dr}$ sur une surface équiphase S_2 en un point P_2. La phase en P_2 s'écrit :

$\phi_2 = \phi_1 + d\Psi$ à t_0 fixé

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Psi}{\partial z}dz = \vec{grad}\,\psi.\vec{dr}$$

$\phi_2 = \phi_1 + \overrightarrow{\text{grad}}\,\psi.\overrightarrow{dr}$

Le vecteur d'onde est défini par : $\vec{k} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\psi$

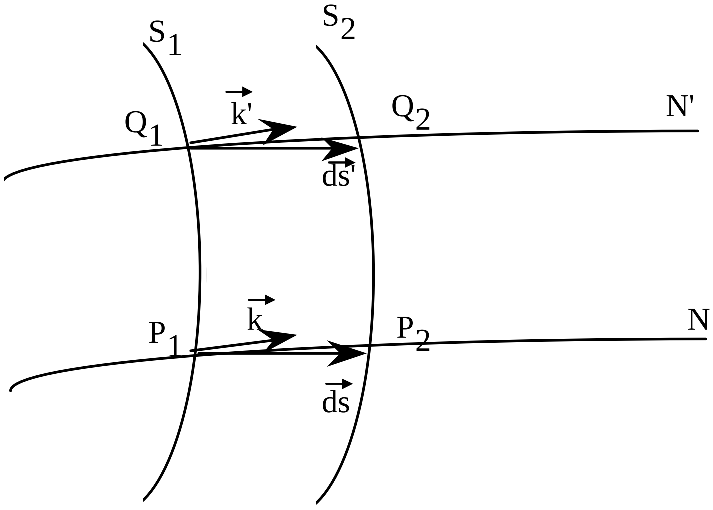
La différence de phase entre ϕ_2 et ϕ_1 est : $\phi_2 - \phi_1 = -\vec{k}.\overrightarrow{dr} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Psi.\overrightarrow{dr}$

En chaque point, le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,\psi$ est tangent à la trajectoire orthogonale passant par ce point, et donc le vecteur $\vec{k}$ aussi. On en tire une conclusion :

- La différence de phase $\phi_2 - \phi_1$ est maximale si on se déplace le long de la normale à la SEP ;
- Elle est nulle si on se déplace sur P_1. C'est normal puisque c'est la définition de la SEP.

2.2. Propagation des surfaces équiphases - Vitesse de phase

On considère 2 SEP S_1 et S_2 infiniment voisines, ainsi que les points P_1 sur S_1 et P_2 sur S_2. P_1 et P_2 sont sur la trajectoire N orthogonale à S_1 et S_2.



On a :

$\phi[S_1] = \omega t_0 + \Psi_1 = cte$

$\phi[S_2] = \omega t_0 + \Psi_1 + d\Psi = \omega t_0 + \Psi_1 - \vec{k}.\overrightarrow{dr} = cte$

On considère alors le point P_1 sur S_1 et N

phase en P_1 au temps t_0 : $\phi_1 = \omega t_0 + \Psi_1$

phase en P_1 au temps t_0 +dt : $\phi'_1 = \omega t_0 + \Psi_1 + \omega dt$ (dt>0)

De même, et P_2 sur S_2 et N

phase en P_2 au temps t_0 : $\phi_2 = \omega t_0 + \Psi_1 - \vec{k}.\vec{dr}$

phase en P_2 au temps t_0 +dt : $\phi'_2 = \omega t_0 + \Psi_1 - \vec{k}.\vec{dr} + \omega dt$ (dt>0)

Dans le cas de figure considéré : $\vec{k}.\vec{dr} > 0$, la phase en P_2 au temps t_0 retarde sur la phase en P_1 au temps t_0 : il s'agit d'une onde 0^+ (onde directe), sinon il s'agit d'une onde O^- (onde inverse).

La phase ϕ_1 en P_1 au temps t_0 peut être égale à la phase ϕ'_2 en P_2 au temps t_0+dt si $\omega dt = \vec{k}.\vec{dr}$

On constate alors : un observateur O se trouvant en P_1 au temps t_0 et se déplaçant sur la normale N dans le sens de $\vec{k}$ arrive en P_2 au temps t_0+dt s'il se déplace avec la vitesse $\frac{\omega}{|\vec{k}|}$ et il n'observe pas de changement de phase.

Cette vitesse est la vitesse de phase. Dans le cas général, le vecteur $\vec{k}$ peut être fonction des coordonnées d'espace : $\vec{k} = \vec{k}$ (x,y,z) et donc la vitesse de phase $v_{\varphi N}$ est, elle aussi, fonction des coordonnées.

On désigne par $v_{\varphi N}$(x,y,z) la vitesse de phase mesurée localement sur la trajectoire orthogonale N aux surfaces équiphases S_1 et S_2 :

$$v_{\varphi N}(x, y, z) = \frac{\omega}{|\vec{k}(x, y, z)|}$$

Le calcul serait identique pour les points Q_1 et Q_2 de la trajectoire N'. D'où :

Au temps t_0, la SEP S_1 passe par P_1Q_1.

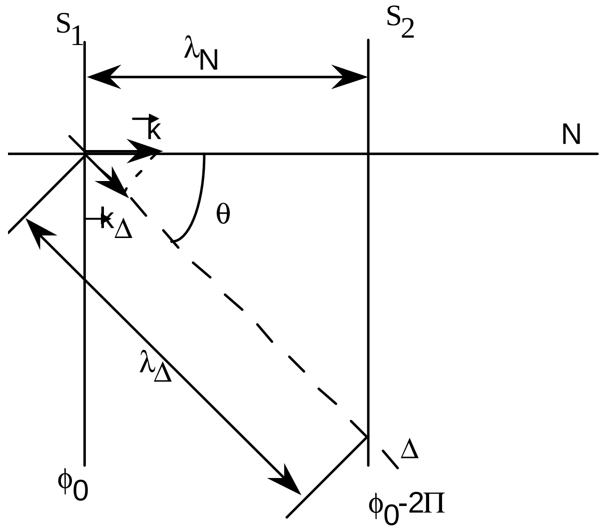
Au temps t_0+dt, cette SEP s'est propagée (en se déformant dans le cas général) et occupe la position de S_2.

Remarque : le sens de déplacement des SEP est donné en chaque point par le sens du vecteur d'onde $\vec{k}(x, y, z)$.

2.3. Longueur d'onde - constante de phase

On se restreint aux cas où $\vec{k}$ est indépendant des coordonnées (ondes planes, ondes guidées sur des structures rectilignes et uniformes).

On considère 2 SEP et leur trajectoire orthogonale N. On calcule les phases en P et P_0



$\phi(P_0) = \phi_0 = \omega t_0 + \Psi_0$

$\phi(P) = \phi = \omega t_0 + \Psi_0 - \int_{P_0}^{P} \vec{k}.\vec{n}ds$ (s : coordonnée curviligne)

Comme par hypothèse $|\vec{k}| = \text{cte}$ sur N :

$\phi(P) = \phi = \omega t_0 + \Psi_0 - \vec{k}.\vec{n}s = \omega t_0 + \Psi_0 - ks$

Or $v_{\varphi N} = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$ d'où $\phi(P) = \omega t_0 + \Psi_0 - \frac{\omega s}{v_{\varphi N}}$

On pose $\beta_N = \frac{\omega}{v_{\varphi N}} = |\vec{k}|$ constante de phase

et $\phi(P) = \phi_0 - \beta_{Ns}$

La longueur d'onde λ_N est par définition la distance mesurée sur N entre deux SEP sur lesquelles les phases diffèrent de 2Π.

Soit $\beta_N \lambda_N = 2\Pi$ d'où $\lambda_N = \frac{2\Pi}{\beta_N}$

$\lambda_N = \frac{v_{\varphi N}}{f} = v_{\varphi N} T$

2.4. Vecteurs d'affaiblissement

On considère une composante quelconque d'un vecteur du champ écrite en notation complexe : $\mathcal{E}_i(x,y,z) = a(x,y,z)\exp(j\Psi(x,y,z))$ (a≥0)

On pose : $a = \exp(a')$ d'où $\mathcal{E}_i(x,y,z) = \exp(a')\exp(j\Psi)$

surface SEA : a' = cte (ou a = cte)

On note que ces surfaces ne se propagent pas dans le temps

Par définition, on pose : $\vec{k}' = -\overrightarrow{\text{grad}}(a')$

$$= -\overrightarrow{\text{grad}}(\text{Log}a)$$

$$= -\frac{1}{a}\overrightarrow{\text{grad}}(a)$$

Le vecteur $\vec{k}'$ est en tous points perpendiculaires aux SEA définies par a' = cte

La variation da' de a' est donnée par :

$$da' = \frac{\partial a'}{\partial x}dx + \frac{\partial a'}{\partial y}dy + \frac{\partial a'}{\partial z}dz$$

$$= \overrightarrow{\text{grad}}(a').\overrightarrow{dr} = -\vec{k}'.\overrightarrow{dr}$$

Amplitude en P_1 : $a'_1 = \text{Log}(a_1)$

Amplitude en P_2 : $a'_2 = \text{Log}(a_2)$

Affaiblissement : $a'_1 - a'_2 = \text{Log}(a_1) - \text{Log}(a_2) = \text{Log}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$

$$= \int_{P_1}^{P_2} \vec{k}'.\overrightarrow{dr}$$

Si $\vec{k}$ et $\overrightarrow{ds}$ ont même sens $a'_1 > a'_2$: l'onde s'affaiblit dans la direction de $\vec{k}'$.

2.5. Coefficient d'affaiblissement

Dans le cas général, $\vec{k}'$ dépend des coordonnées d'espace. On restreindra l'étude au cas où $\vec{k}'$ est indépendant de ces coordonnées (cas particulier des ondes planes se propageant dans un milieu à pertes).

$$a'_1 - a'_2 = \left|\vec{k}'\right| s$$

On désigne alors l'affaiblissement : $\alpha'_N = \left|\vec{k}'\right|$ (Np/m)

$$\mathrm{Log}\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \alpha'_N\, s$$

D'où $\dfrac{a_1}{a_2} = \exp(\alpha'_N s)$

soit : $a_2 = a_1 \exp(-\alpha'_N s)$

Causes d'affaiblissement :

- pertes dans les milieux (ε", μ", σ) ;
- cas des ondes rayonnées sphériques ou cylindriques : les champs décroissent en 1/r.

2.6. Récapitulatif - vecteur d'onde complexe

Soit $\mathcal{V}$ une composante quelconque du champ électromagnétique :

$$\mathcal{V}(Q) = \exp(A'(P))\exp\left(-\vec{k}'.\vec{dr}\right)\exp\left(j\left(\Psi(P) - \vec{k}.\vec{dr}\right)\right)$$

$$V(Q,t) = A(P)\exp\left(-\vec{k}'.\vec{dr}\right)\cos\left(\omega t + \Psi(P) - \vec{k}.\vec{dr}\right)$$

Affaiblissement de la composante : $\exp\left(-\vec{k}'.\vec{dr}\right)$

Retard de phase de la composante : $-\vec{k}.\vec{dr}$

On peut définir un vecteur d'onde complexe tel que $\mathcal{V}(Q) = \mathcal{V}(P)\exp\left(-j\vec{k}_c.\vec{dr}\right)$

$$j\vec{k}_c = \vec{k}' + j\vec{k}$$

$j\vec{k}_c$ est appelée constante de propagation.

<u>Remarques</u> : - Dans le cas d'une propagation sans affaiblissement : $\vec{k}' = \vec{0}$ et $\vec{k}_c = \vec{k}$

- Pour les systèmes de transmission rectilignes et uniformes, propagation le long de l'axe Oz : $j\vec{k}_{cz} = \vec{k}'_z + j\vec{k}_z$ avec $\left|\vec{k}'_z\right| = \text{cte}$ et $\left|\vec{k}_z\right| = \text{cte}$

$\mathcal{V}(z) = \mathcal{V}(0)\exp\left(-j\vec{k}_{cz}.\vec{n}z\right)$ avec $\vec{n}$ normale unitaire de l'axe des z.

3. Groupe d'ondes - vitesse de groupe

En physique, toute onde est nécessairement limitée à la fois dans le temps et dans l'espace, ce qui fait apparaître l'onde monochromatique plane comme un modèle mathématiquement simple mais trop éloigné de la réalité. Le concept de paquet d'ondes est capital car il permet de représenter toute onde réelle sous la forme d'une superposition d'un paquet d'ondes monochromatiques planes. Ce résultat est à la base de toute l'analyse de Fourier des signaux.

3.1. Distorsions introduites par la propagation

3.1.1. Milieu sans affaiblissement - Vitesse de phase constante

Si on considère une onde se propageant dans le milieu, les amplitudes vont être constantes et, comme la vitesse de phase est constante, chaque composante du champ va subir un déphasage identique.

Après propagation de P en Q, le signal en Q sera identique au signal en P après un temps de propagation $\Delta t = \overline{PQ} / v_{\varphi}$. Le milieu est dit non dispersif. C'est le cas d'une onde plane dans un milieu sans pertes où la vitesse de phase est constante.

3.1.2. Milieu sans affaiblissement - Vitesse de phase variable

L'onde émise en P se propage en Q sans affaiblissement mais chaque composante de son spectre va subir un déphasage de propagation distinct : $\Delta\phi(\omega) = \beta(\omega)t$. En conséquence, le signal en Q ne sera jamais identique au signal en P : le milieu est dit dispersif (variation de v_{φ} avec ω) et va entraîner des distorsions de phase (ex : guides d'ondes sans pertes).

3.1.3. Milieu avec affaiblissement variable - Vitesse de phase variable

Le milieu est dispersif. On constate des distorsions de phase. Si de plus, l'affaiblissement est fonction de la fréquence, chaque composante du spectre du signal émis en P va être plus ou moins atténuée lors de la propagation de P en Q. Le signal présentera à la fois des distorsions d'amplitude et de phase. (ex : guide d'ondes dont les pertes varient avec la fréquence).

3.2. Battement de deux ondes de pulsations voisines

Considérons la superposition de deux ondes planes monochromatiques, se propageant dans le même sens (Oz), polarisée rectilignement suivant Ox, d'amplitudes égales et de pulsations voisines ($\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega << \omega_0$ avec $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$).

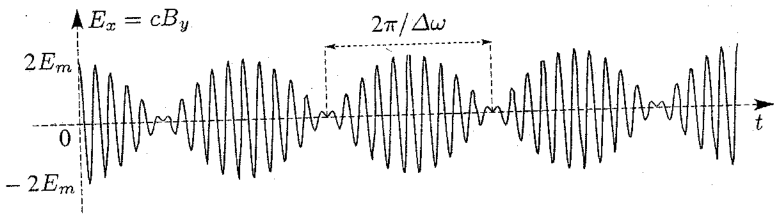
En outre, supposons pour simplifier techniquement l'analyse qu'à l'instant pris comme origine, les deux ondes soient en phase en z=0 : $\phi_1 = \phi_2 = 0$. En posant $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2 = \Delta\omega / v_\varphi$ et en remarquant que $\beta_1 + \beta_2 = 2\omega_0 v_\varphi = 2\beta_0$, il vient, puisque : $E_x=E_1+E_2$:

$$E_x = E_m\left[\cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(\beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}\right)z\right] + \cos\left[\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(\beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}\right)z\right]\right]$$

d'où $E_x = 2E_m \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}z\right)\cos(\omega_0 t - \beta_0 z)$.

L'onde résultante est donc plane, polarisée rectilignement mais n'est pas monochromatique ; c'est un battement entre les deux ondes monochromatiques. On peut la considérer comme une onde progressive, de constante de phase β_0 et de pulsation ω_0, dont l'amplitude varie lentement dans l'espace et dans le temps car $\Delta\beta \ll \beta_0$ et $\Delta\omega \ll \omega_0$.

Si ce signal se propage dans le vide, alors il se propage sans se déformer.



Notons que la modulation de l'amplitude de l'onde résultante se propage avec une certaine vitesse v_g appelée vitesse de groupe :

Le fait que le terme de phase $\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}z = \text{cte}$ donne en dérivant :

$\frac{\Delta\omega}{2} - \frac{\Delta\beta}{2}\frac{dz}{dt} = 0$ d'où $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}$.

Dans le cas général où l'on superpose un grand nombre d'ondes groupées autour d'une pulsation moyenne et d'un vecteur d'onde moyen, on définit la vitesse de groupe par l'expression : $v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$.

3.3. Diagramme de dispersion

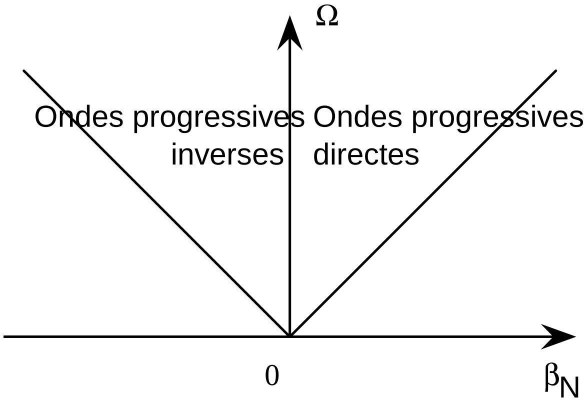
On appelle relation de dispersion la relation entre Ω et β_N. On appelle diagramme de dispersion la courbe qui représente la variation de β_N en fonction de Ω.

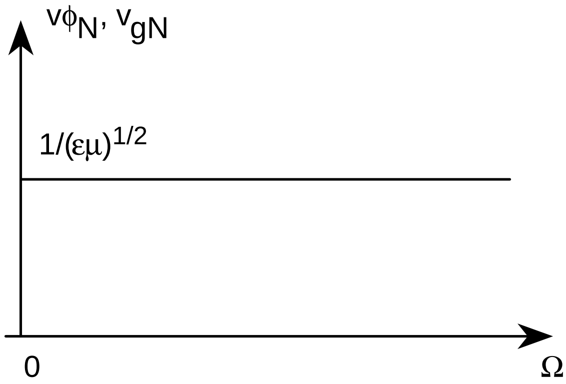
3.3.1. Milieu non dispersif

$$\beta_N = \pm\Omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,,\ v_{\varphi N} = v_{gN} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$\beta_N > 0$ onde O^+

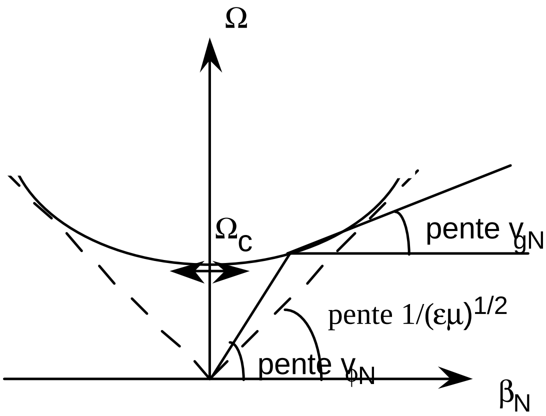
$\beta_N < 0$ onde O^-

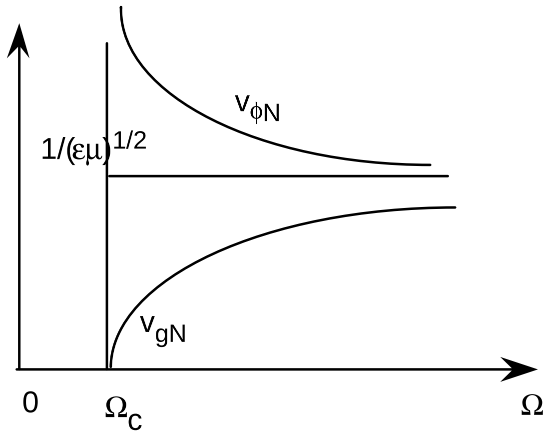




3.3.2. Milieu dispersif à dispersion normale

$$v_{\varphi N} \neq cte \quad v_{\varphi N}.v_{gN} = cte = \frac{1}{\varepsilon\mu}$$



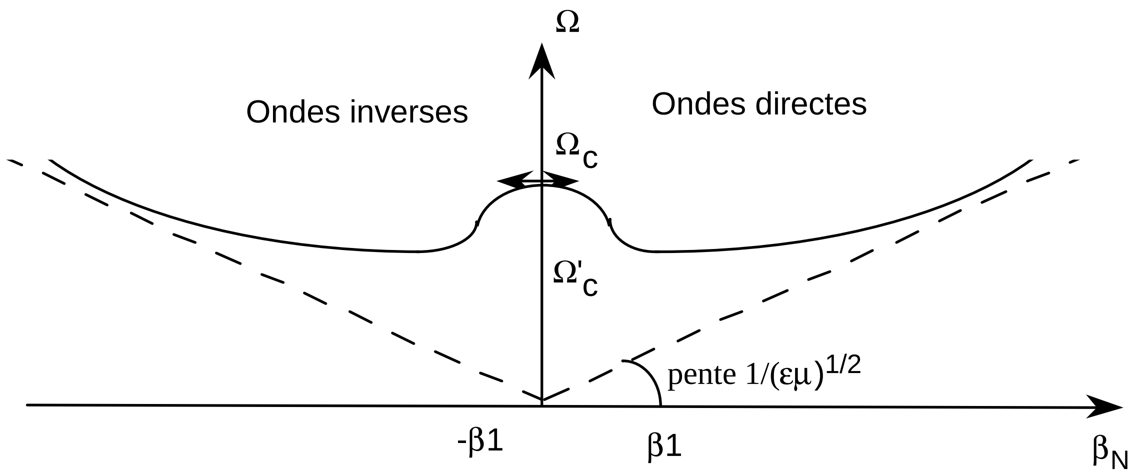


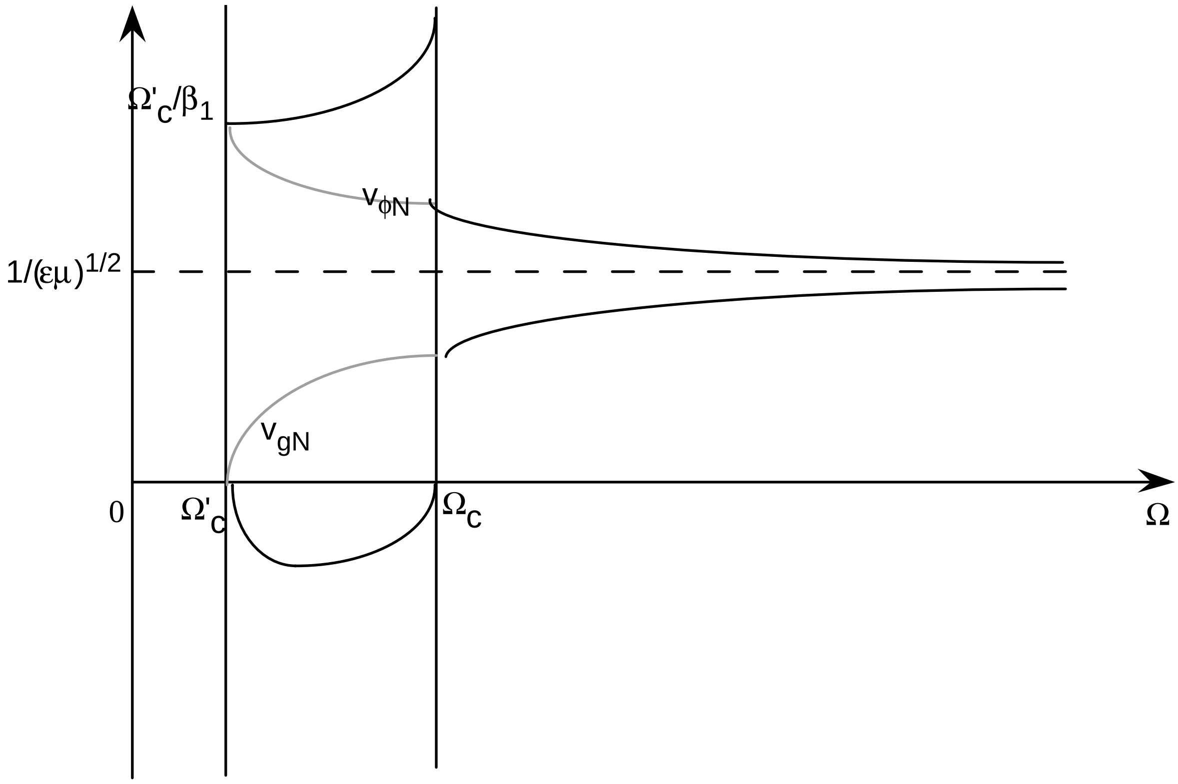
Pour $\Omega < \Omega_c$ pas de propagation, coupure du mode

Pour $\Omega > \Omega_c$ propagation

3.3.3. Milieu dispersif à dispersion anormale

Dans la zone $0 < \beta < \beta_1$, la pente de la courbe $\Omega(\beta)$ est négative. Le milieu est à dispersion anormale.





Pour $\beta > \beta_1$, le milieu est à dispersion normale.
Ce genre de comportement est assez exceptionnel.