Ondes planes homogènes dans un milieu illimité

1. Ondes planes homogènes en régime non harmonique

La propagation des ondes électromagnétiques était prévue dès l'établissement des équations de Maxwell en 1876, mais elle n'a été étudiée expérimentalement qu'en 1888 par Hertz. Des expériences décisives, telles que celle de Michelson, avaient mis en évidence l'aspect essentiel des ondes lumineuses, qui ne sont qu'un cas particulier d'ondes électromagnétiques.

Nous nous proposons d'étudier ce phénomène de propagation dans le cas d'un milieu illimité en l'absence de charges, sans nous préoccuper de l'émission ou de la réception.

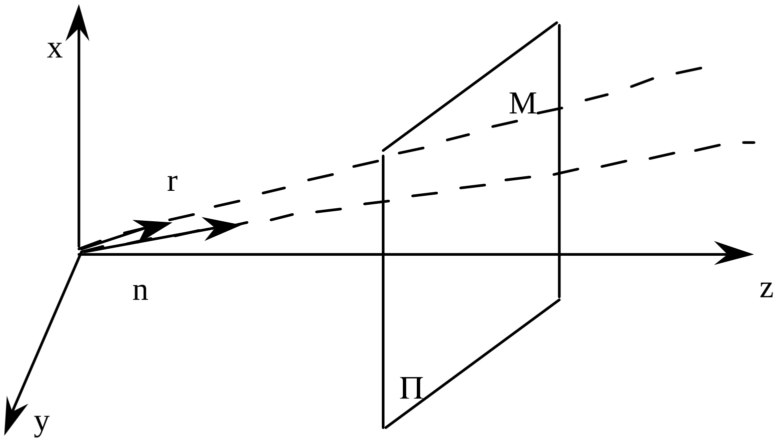
Le domaine d'application est très vaste : il s'étend dans l'échelle des longueurs d'ondes de 10^{-15} m à plusieurs kilomètres, ou dans l'échelle des fréquences de 10^5 Hz à 10^{23} Hz.

1.1. Définition de l'onde plane homogène

Définition : On appelle onde plane homogène une onde pour laquelle, à un instant t donné, les surfaces équiphases et équiamplitudes sont des plans confondus. Ces plans sont appelés plans d'onde.

Soit $\vec{n}$ la normale au plan d'onde. Le point M est dans le plan d'onde Π si $\vec{r}.\vec{n} = \text{cte}$.

Soit A une des 6 composantes du champ électromagnétique, Π est le plan d'onde si A a même valeur en tous points M de Π (en amplitude et en phase). A est donc de la forme $f\left(t, \vec{r}.\vec{n}\right)$.



<u>Remarques</u> : - Il est impossible de concevoir une source générant un champ électromagnétique constant sur le plan Π infini, car alors la puissance active serait infinie, comme on le verra plus tard. Malgré cette objection, l'onde plane est un modèle fondamental pour l'étude des ondes réelles sur les structures réelles.

1.2. Ondes planes dans un milieu ε, μ, σ - Propriétés

On considère un milieu ε, μ, σ (réels positifs) homogène et illimité. Le milieu ne présente pas de pertes diélectriques et magnétiques mais seulement des pertes par conductivité.

Pour simplifier les calculs, on suppose que les plans d'ondes sont tous parallèles au plan xOy du trièdre. Les plans d'onde sont les plans z=cte.

En notation réelle, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{H} = \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0$$

D'après la définition du plan d'onde, les champs sont indépendants de x et de y et on a $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$.

Il vient alors: $\begin{cases} -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\frac{\partial H_x}{\partial t}\ (1) \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu\frac{\partial H_y}{\partial t}\ (2) \\ 0 = -\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}\ (3) \end{cases}$ et $\begin{cases} -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \sigma E_x + \varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t}\ (4) \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} = \sigma E_y + \varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t}\ (5) \\ 0 = \sigma E_z + \varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t}\ (6) \end{cases}$, ainsi que $\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial z} = \rho\ (7)$ et $\mu\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0\ (8)$.

Ces équations montrent que H_z est indépendant de z et de t. Comme il est de plus indépendant de x et de y, on a H_z=cte. Il s'agit d'un champ statique non variable. Nous n'étudions pas ici les champs statiques. Le principe de superposition permet de traiter ce cas à part. Nous considèrerons donc $H_z = 0$.

Deux cas sont à considérer :

- Milieu isolant $\sigma=0$, $\rho=0$.

Alors $\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$; $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$. E_z est un champ électrostatique. On choisira de travailler avec $E_z=0$.

-Milieu conducteur $\sigma\neq 0$

Si $\sigma\neq 0$, alors $\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sigma\rho = 0$, d'où $\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma t}{\varepsilon}}$, qui montre que si le temps de relaxation des charges $\tau = \varepsilon / \sigma$ est très inférieur à la période du phénomène alternatif, alors ρ=0, d'où (équation 7) $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$.

De plus on a $\sigma E_z + \varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$ qui montre que le temps de relaxation de E_z est le même que celui des charges $\tau = \varepsilon / \sigma$. Si $\tau << T$, on aura alors aussi E_z =0. Dans ce cas donc, on pourra encore considérer que le champ variable est nul. E_z =0.

<u>Conclusion : Propriétés des champs.</u>

On note que E_z=0 et H_z=0 : donc, le champ électromagnétique a toutes ses composantes dans les plans d'ondes. Il est donc transversal par rapport à la normale $\vec{n}$ aux plans d'ondes dont on verra par la suite que cette normale est aussi la direction de propagation. L'onde plane est TEM.

1.3. Ondes planes homogènes dans un milieu isolant, σ=0

On suppose maintenant le milieu sans pertes ε et μ réels, σ=0. On va étudier les propriétés générales de l'onde plane homogène TEM qui peut se propager dans un tel milieu.

1.3.1. Intégration de l'équation d'onde

Reprenant les équations de Maxwell développées, il vient :

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu\frac{\partial H_x}{\partial t} \text{ d'où } \frac{\partial\ E_y}{\partial z^2} = \mu\frac{\partial^2 H_x}{\partial t\partial z} = \mu\varepsilon\frac{\partial^{2E_y}}{\partial t^2}$$

soit $\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$

De même pour E_x, H_x et H_y.

Soit A une composante quelconque de l'onde plane TEM, A vérifie :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

Cette équation d'onde scalaire a comme solution :

$$A = F^+\left(t - \frac{z}{v}\right) + F^-\left(t + \frac{z}{v}\right) \text{ avec } v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Les fonctions F^+ et F^- peuvent être déterminées si on connait la forme du signal délivré par la source.

1.3.2. Direction et vitesse de propagation

On considère la solution $A^+ = F^+\left(t - \frac{z}{v}\right)$

On a $A^+(t_1, z_1) = F^+\left(t_1 - \frac{z_1}{v}\right)$

$A^+(t_2, z_2) = F^+\left(t_2 - \frac{z_2}{v}\right)$ avec $t_2 > t_1$.

On aura $A^+(t_1, z_1) = A^+(t_2, z_2)$ si $t_2 - \frac{z_2}{v} = t_1 - \frac{z_1}{v}$

soit $v = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}$, il s'agit de la vitesse de propagation de l'onde.

v étant positive, alors $z_2 > z_1$.

Un observateur se déplaçant dans le sens des z croissants à la vitesse $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ voit les composantes du champ invariables.

On appelle cette onde l'onde progressive directe.

On considère maintenant la solution $A^- = F^-\left(t + \frac{z}{v}\right)$.

$v = \frac{z_1 - z_2}{t_2 - t_1}$ avec $t_2 > t_1$ mais $z_2 < z_1$.

Il s'agit d'une onde qui se déplace dans le sens des z décroissants à la vitesse $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

C'est l'onde progressive indirecte.

1.3.3. Impédance d'onde - Propriétés géométriques des champs

On considère l'onde TEM ($E_x^+, E_y^+, H_x^+, H_y^+$)

$$E_x = E_x^+\left(t-\frac{z}{v}\right) \qquad H_x = H_x^+\left(t-\frac{z}{v}\right)$$
$$E_y = E_y^+\left(t-\frac{z}{v}\right) \qquad H_y = H_y^+\left(t-\frac{z}{v}\right)$$

On doit avoir $\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu\frac{\partial H_x}{\partial t}$ et on pose $u = t-\frac{z}{v}$

$$\frac{\partial E_y^+}{\partial z} = \frac{\partial E_y^+}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial z} = -\sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\partial E_y^+}{\partial u}$$
$$\frac{\partial H_x^+}{\partial t} = \frac{\partial H_x^+}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial H_x^+}{\partial u}$$

d'où $\frac{\partial E_y^+}{\partial u} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\partial H_x^+}{\partial u}$

De même $\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\mu\frac{\partial H_y}{\partial t}$ donne $\frac{\partial E_x^+}{\partial u} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\partial H_y^+}{\partial u}$

Intégrant par rapport à u, il vient

$$E_y^+ = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H_x^+ + cte$$
$$E_x^+ = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H_y^+ + cte$$

Les constantes d'intégration correspondent à un champ statique : elles seront supposées nulles.

Soit $-\frac{E_y^+}{H_x^+} = \frac{E_x^+}{H_y^+} = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

Z_0 est appelée impédance d'onde.

Si on pose $\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$ et $\mu=\mu_r\mu_0$

avec $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}$ et $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$

alors $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}120\pi$

$-\frac{E_y^+}{H_x^+} = \frac{E_x^+}{H_y^+}$ d'où $E_x^+H_x^+ + E_y^+H_y^+ = 0$

Comme en plus H_z^+ et E_z^+ sont nuls alors $\vec{E}^+.\vec{H}^+ = 0$

Dans le plan d'ondes, les champs électrique et magnétique sont perpendiculaires, et ce quelle que soit la polarisation des champs. Ceci est vrai dans un milieu sans pertes.

On peut vérifier que : $\vec{E}^+ = Z_0\left[\vec{H}^+ \wedge \vec{n}\right]$

$$\vec{H}^+ = \frac{1}{Z_0}\left[\vec{n} \wedge \vec{E}^+\right]$$

Pour l'onde O⁻, on a : $-\frac{E_y^-}{H_x^-} = \frac{E_x^-}{H_y^-} = -Z_0 = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

$$\vec{E}^-.\vec{H}^- = 0$$
$$\vec{E}^- = -Z_0\left[\vec{H}^- \wedge \vec{n}\right]$$
$$\vec{H}^- = -\frac{1}{Z_0}\left[\vec{n} \wedge \vec{E}^-\right]$$

$\vec{n}$ est toujours pris dans le sens des z croissants.

2. Ondes planes homogènes en régime harmonique établi

2.1. Préliminaires - Hypothèses de calcul

On considère un milieu homogène, illimité, ε', ε'', μ', μ'', σ. On cherche si, dans ce milieu, on peut propager une onde plane homogène monochromatique telle que les plans d'onde soient définis par $\vec{n}.\vec{r} = \text{cte}$, où $\vec{n}$ est la normale au plan d'onde.

La solution générale doit être alors de la forme $f\left(t,(\vec{n}.\vec{r})\right)$ pour toutes les composantes du champ.

On définit $\varepsilon_c=\varepsilon'-j\varepsilon''$

$\mu_c=\mu'-j\mu''$

$\varepsilon_{ca}=\varepsilon_c-j\sigma/\omega$ permittivité complexe apparente

On peut travailler avec les champs complexes $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{H}}$ puisqu'on est en régime harmonique monochromatique, ce qui permet aussi de travailler avec ε_{ca} et μ_c.

Equations de Maxwell en complexe :

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{\mathcal{E}} = -j\omega\mu_c\vec{\mathcal{H}}$$

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{\mathcal{H}} = \sigma\vec{\mathcal{E}} + j\omega\varepsilon_c\vec{\mathcal{E}} = j\omega\left(\varepsilon_c + \frac{\sigma}{j\omega}\right)\vec{\mathcal{E}} = j\omega\varepsilon_{ca}\vec{\mathcal{E}}$$

avec $\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon_c\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{B}} = \mu_c\vec{\mathcal{H}}$

$\text{div}\vec{\mathcal{D}} = 0$ d'où $\text{div}\vec{\mathcal{E}} = 0$

$\text{div}\vec{\mathcal{B}} = 0$ d'où $\text{div}\vec{\mathcal{H}} = 0$

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{\text{rot}}\,\vec{\mathcal{E}} = -j\omega\mu_c\vec{\text{rot}}\,\vec{\mathcal{H}} = \omega^2\mu_c\varepsilon_{ca}\vec{\mathcal{E}}$$

or $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{div}\vec{\mathcal{E}} - \overrightarrow{\Delta}\vec{\mathcal{E}}$

soit $\Delta\vec{\mathcal{E}} + \omega^2\mu_c\varepsilon_{ca}\vec{\mathcal{E}} = \vec{0}$

De la même façon, on démontre : $\Delta\vec{\mathcal{H}} + \omega^2\mu_c\varepsilon_{ca}\vec{\mathcal{H}} = \vec{0}$. Cette équation est l'équation d'onde vectorielle.

2.2. Intégration de l'équation d'onde.

Soit $\mathcal{V}$ une composante quelconque de l'un des vecteurs complexes $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{H}}$, elle doit satisfaire l'équation d'onde scalaire : $\Delta\mathcal{V} + \omega^2\mu_c\varepsilon_{ca}\mathcal{V} = 0$

On travaillera en coordonnées cartésiennes : $\mathcal{V}(x,y,z)$. On cherche une solution sous la forme $\mathcal{V}=f(x).g(y).h(z)$.

$\Delta\mathcal{V} + \omega^2\mu_c\varepsilon_{ca}\mathcal{V} = 0$ devient $\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} + \frac{h''}{h} = -\varepsilon_{ca}\mu_c\omega^2$

Comme chacun des termes n'est fonction que d'une variable indépendante, il faut que les trois rapports du premier membre soient des constantes :

On pose $\frac{f''}{f} = (jk_{c1})^2$, $\frac{g''}{g} = (jk_{c2})^2$, $\frac{h''}{h} = (jk_{c3})^2$

$(jk_{c1})^2 + (jk_{c2})^2 + (jk_{c3})^2 = -\varepsilon_{ca}\mu_c\omega^2$

Le second membre est un nombre complexe, il en est de même pour les jk_{ci} et on doit avoir : $jk_{ci} = k_i' + jk_i$, k'_i et k_i réels

On a : $f'' - (jk_{ci})^2 f = 0$

soit $f = f_0 e^{-k_i' x} e^{-jk_i x}$

d'où $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \exp\left[-\left(k_1' x + k_2' y + k_3' z\right)\right]\exp\left[-j\left(k_1 x + k_2 y + k_3 z\right)\right]$

$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \exp\left[-\vec{k}'.\vec{r}\right]\exp\left[-j\vec{k}.\vec{r}\right]$

$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \exp\left[-j\vec{k}_c.\vec{r}\right]$

$\vec{k}'$: vecteur d'affaiblissement

$\vec{k}$: vecteur d'onde

SEA : $\vec{k}'.\vec{r} = \mathrm{cte}$

SEP : $\vec{k}.\vec{r} = \mathrm{cte}$

2.3. Calculs de α et β

Ici on cherche une onde plane homogène. Les plans d'onde sont SEA et SEP et ils sont définis par $\vec{r}.\vec{n} = \mathrm{cte}$, donc $\vec{k}' = \pm\alpha\vec{n}$ et $\vec{k} = \pm\beta\vec{n}$.

α : coefficient d'affaiblissement appelé constante de pertes
β : constante de phase

On peut montrer que $\alpha = \omega\sqrt{|\varepsilon_{ca}||\mu_c|}\sin\left(\frac{\delta_{ea}+\delta_m}{2}\right)$ et $\beta = \omega\sqrt{|\varepsilon_{ca}||\mu_c|}\cos\left(\frac{\delta_{ea}+\delta_m}{2}\right)$.

<u>Démo</u> :
On avait : $(jk_{c1})^2 + (jk_{c2})^2 + (jk_{c3})^2 = -\varepsilon_{ca}\mu_c\omega^2$
soit $\left|\vec{k}'\right|^2 - \left|\vec{k}\right|^2 + 2j\vec{k}.\vec{k}' = -\varepsilon_{ca}\mu_c\omega^2$
or $\varepsilon_{ca}\mu_c\omega^2 = |\varepsilon_{ca}||\mu_c|\omega^2 e^{-j(\delta_{ea}+\delta_m)}$
alors $\alpha^2 - \beta^2 + 2j\vec{k}.\vec{k}' = -|\varepsilon_{ca}||\mu_c|\omega^2(\cos\delta - j\sin\delta)$
or $0 \le \delta_{ea} \le \Pi/2$ et $0 \le \delta_m \le \Pi/2$, donc $0 \le \delta \le \Pi$ d'où $\sin\delta \ge 0$
alors $\vec{k}.\vec{k}' \ge 0$ donc $\vec{k}$ et $\vec{k}'$ sont de même sens d'où
pour l'onde 0^+ $\vec{k}' = \alpha\vec{n}$ et $\vec{k} = \beta\vec{n}$.
et pour l'onde O^- $\vec{k}' = -\alpha\vec{n}$ et $\vec{k} = -\beta\vec{n}$.
Soit $\alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta = -|\varepsilon_{ca}||\mu_c|\omega^2 e^{-j\delta}$
d'où $(\alpha + j\beta)^2 = \left[|\varepsilon_{ca}||\mu_c|\omega\right]^2 e^{-j(\delta+\pi)}$

$\alpha + j\beta = \pm\omega|\varepsilon_{ca}||\mu_c|e^{-j\left(\frac{\delta+\pi}{2}\right)}$

Comme α et β sont positifs alors $\alpha = \omega\sqrt{|\varepsilon_{ca}||\mu_c|}\sin\left(\frac{\delta_{ea}+\delta_m}{2}\right)$ et $\beta = \omega\sqrt{|\varepsilon_{ca}||\mu_c|}\cos\left(\frac{\delta_{ea}+\delta_m}{2}\right)$.

CQFD.

2.4. Solutions générales

On a donc $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-j\vec{k}_c.\vec{r}}$ et $\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}}_0 e^{-j\vec{k}_c.\vec{r}}$
avec $j\vec{k}_c = \vec{k}' + j\vec{k} = \pm(\alpha + j\beta)\vec{n}$
$\Gamma = \alpha + j\beta$ est la constante de propagation

soit $\begin{cases} \vec{\mathcal{E}}^+ = \vec{\mathcal{E}}_0^+ e^{-\Gamma\vec{n}.\vec{r}} \\ \vec{\mathcal{H}}^+ = \vec{\mathcal{H}}_0^+ e^{-\Gamma\vec{n}.\vec{r}} \end{cases}$ l'onde progressive directe O^+.

et $\begin{cases} \vec{\mathcal{E}}^- = \vec{\mathcal{E}}_0^- e^{+\Gamma\vec{n}.\vec{r}} \\ \vec{\mathcal{H}}^- = \vec{\mathcal{H}}_0^- e^{+\Gamma\vec{n}.\vec{r}} \end{cases}$ l'onde progressive indirecte O^-.

En général, on choisit $\vec{n}$ suivant la direction Oz.

Alors : $0^+ \begin{cases} \vec{\mathcal{E}}^+ = \vec{\mathcal{E}}_0^+ e^{-\Gamma z} \\ \vec{\mathcal{H}}^+ = \vec{\mathcal{H}}_0^+ e^{-\Gamma z} \end{cases}$ et $O^- \begin{cases} \vec{\mathcal{E}}^- = \vec{\mathcal{E}}_0^- e^{\Gamma z} \\ \vec{\mathcal{H}}^- = \vec{\mathcal{H}}_0^- e^{\Gamma z} \end{cases}$

2.5. Géométrie des champs - Impédances d'ondes

2.5.1. Transversalité des champs

Supposant que le temps de relaxation des charges est très inférieur à la période de l'onde, on a : $\mathrm{div}\vec{\mathcal{D}} = 0$ et $\mathrm{div}\vec{\mathcal{B}} = 0$

Ce qui entraîne : $\mathrm{div}\vec{\mathcal{E}} = 0$ et $\mathrm{div}\vec{\mathcal{H}} = 0$ car le milieu est supposé homogène.

La solution générale peut s'écrire : $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-j\vec{k}_c.\vec{r}}$ avec $j\vec{k}_c = \vec{k}' + j\vec{k}$

On a alors : $\mathrm{div}\vec{\mathcal{E}} = e^{-j\vec{k}_c.\vec{r}}\mathrm{div}\vec{\mathcal{E}}_0 + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(e^{-j\vec{k}_c.\vec{r}}\right).\vec{\mathcal{E}}_0$

Or, $\vec{\mathcal{E}}_0$ est une constante du champ complexe en r=0, donc $\mathrm{div}\vec{\mathcal{E}}_0 = 0$

De plus : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(e^{-j\vec{k}_c.\vec{r}}\right) = -j\vec{k}_c.\left(e^{-j\vec{k}_c.\vec{r}}\right)$

Il vient donc : $\mathrm{div}\vec{\mathcal{E}} = 0 = -j\vec{k}_c.e^{-j\vec{k}_c.\vec{r}}.\vec{\mathcal{E}}_0 = -j\vec{k}_c.\vec{\mathcal{E}} = 0$

ce qui s'écrit $-\left(\vec{k}'+j\vec{k}\right).\vec{\mathcal{E}} = 0$

Or, pour les deux types d'ondes directe et indirecte, on a : $\vec{k}' = \pm\alpha\vec{n}$ et $\vec{k} = \pm\beta\vec{n}$.

$j\vec{k}_c = \pm(\alpha + j\beta)\vec{n} = \pm\Gamma\vec{n}$. signe + pour l'onde O^+, signe - pour l'onde O^-.

Il vient alors $\pm\Gamma\vec{n}.\vec{\mathcal{E}} = 0$. D'où le résultat $\vec{n}.\vec{\mathcal{E}} = 0$

et on aurait $\vec{n}.\vec{\mathcal{H}} = 0$

<u>Conséquence :</u>

$\vec{n}$ étant le vecteur fixe unitaire perpendiculaire aux plans d'ondes, les deux produits scalaires nuls indiquent : $\vec{n}\perp\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{n}\perp\vec{\mathcal{H}}$.

Les champs sont contenus dans les plans d'onde. L'onde est une onde TEM.

Ce résultat est valable quel que soit le type de pertes à considérer dans le milieu et quelle que soit la polarisation.

2.5.2. Relations entre les champs

On va établir les relations entre $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{H}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{\mathcal{E}} = -j\omega\mu_c\vec{\mathcal{H}}$ donne $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathcal{E}} = e^{-j\vec{k}_c.\vec{r}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathcal{E}}_0 + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(e^{-j\vec{k}_c.\vec{r}}\right)\wedge\vec{\mathcal{E}}$

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathcal{E}} = -j\vec{k}_c \wedge \vec{\mathcal{E}} = -j\omega\mu_c\vec{\mathcal{H}}$

Or, $j\vec{k}_c = \pm\Gamma\vec{n}$ et $\vec{k} = \pm\vec{n}\beta$ d'où $j\vec{k}_c = \Gamma\frac{\vec{k}}{\beta}$

d'où $\vec{\mathcal{E}} \wedge \frac{\vec{k}}{\beta} = -\frac{j\omega\mu_c}{\Gamma}\vec{\mathcal{H}}$

De même, on peut montrer que $\vec{\mathcal{H}} \wedge \frac{\vec{k}}{\beta} = \frac{j\omega\varepsilon_{ca}}{\Gamma}\vec{\mathcal{E}}$

2.5.3. Impédance d'ondes

On définit l'impédance d'ondes par $Z_0 = \frac{\Gamma}{j\omega\varepsilon_{ca}} = \frac{j\omega\mu_c}{\Gamma} = \frac{1}{Y_0}$

En effet, on peut vérifier que $\Gamma^2 = -\varepsilon_{ca}\mu_c\omega^2$, il s'agit de l'équation de dispersion

D'où $Z_0 = \frac{j\omega\sqrt{\varepsilon_{ca}\mu_c}}{j\omega\varepsilon_{ca}} = \sqrt{\frac{\mu_c}{\varepsilon_{ca}}}$

2.5.4. Conclusion

En conclusion, on a obtenu les relations fondamentales suivantes : $\vec{n}.\vec{\mathcal{E}} = 0$ et $\vec{n}.\vec{\mathcal{H}} = 0$.
$\vec{n}\perp\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{n}\perp\vec{\mathcal{H}}$.
L'onde est TEM.

$\vec{\mathcal{E}} = Z_0\left[\vec{\mathcal{H}} \wedge \frac{\vec{k}}{\beta}\right]$ et $\vec{\mathcal{H}} = -Y_0\left[\vec{\mathcal{E}} \wedge \frac{\vec{k}}{\beta}\right]$

Si $\vec{n}$ est sur Oz alors $\vec{\mathcal{E}}^{\pm} = \vec{\mathcal{E}}_0^{\pm}e^{\mp\Gamma z}$

$\vec{\mathcal{H}}^{\pm} = \vec{\mathcal{H}}_0^{\pm}e^{\mp\Gamma z}$

$\vec{n}$(Oz) est la direction de propagation.

$\vec{\mathcal{E}}_0$ et $\vec{\mathcal{H}}_0$ sont des constantes et ne dépendent donc pas de x,y,z.

2.6. Quelques milieux particuliers

2.6.1. Diélectrique parfait

On considère un milieu diélectrique sans pertes, de caractéristiques ε μ, réels positifs. Dans ce cas, l'équation de dispersion s'écrit $\Gamma^2 = -\varepsilon\mu\omega^2$.

Ce terme étant réel pur négatif, la constante de propagation est imaginaire pure, soit $\alpha = 0$ et $\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$.

On peut d'ailleurs le vérifier à l'aide des expressions générales données $\alpha = \omega\sqrt{|\varepsilon_{ca}||\mu_c|}\sin\left(\frac{\delta_{ea}+\delta_m}{2}\right)$ et $\beta = \omega\sqrt{|\varepsilon_{ca}||\mu_c|}\cos\left(\frac{\delta_{ea}+\delta_m}{2}\right)$.

Dans ce milieu, on a $\delta_{ea} = 0$ et $\delta_m = 0$. Ce qui donne le même résultat.

Dans ce cas, $v_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \text{cte}$. Ce milieu n'est donc pas dispersif.

2.6.1. Très bon conducteur

On considère maintenant un très bon conducteur, de caractéristiques ε, μ réelles positives et de conductivité σ.

Le milieu étant un bon conducteur $\varepsilon\omega << \sigma$, alors $\varepsilon_{ca} \approx -j\frac{\sigma}{\omega}$ et $\tan(\delta_{ea}) = \frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \to \infty$, donc $\delta_{ea} \to \frac{\pi}{2}$.

On obtient donc $\alpha \approx \omega\sqrt{\frac{\sigma}{\omega}\mu}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \omega\sqrt{\frac{\sigma}{\omega}\mu}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}} = \sqrt{\pi\sigma\mu f}$, de même $\beta \approx \sqrt{\pi\sigma\mu f}$. En posant $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma\mu f}}$ (épaisseur de peau), on obtient $\alpha = \beta = \frac{1}{\delta}$ et les champs s'écrivent : $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\exp\left(-j\frac{z}{\delta}\right)$ de même $\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}}_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\exp\left(-j\frac{z}{\delta}\right)$.

On peut démontrer les mêmes résultats à partir de l'équation de dispersion : $\Gamma^2 = -\varepsilon_{ca}\mu\omega^2 \approx j\frac{\sigma}{\omega}\mu\omega^2 = j\sigma\mu\omega = e^{j\frac{\pi}{2}}\sigma\mu\omega = \left(e^{j\frac{\pi}{4}}\sqrt{\sigma\mu\omega}\right)^2$

Soit $\alpha + j\beta = e^{j\frac{\pi}{4}}\sqrt{\sigma\mu\omega} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{\sigma\mu\omega}$. D'où $\alpha = \beta = \sqrt{\pi\sigma\mu f}$.

Dans ce cas, $v_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\pi\sigma\mu f}} = \frac{2\pi f}{\sqrt{\pi\sigma\mu f}} = 2\sqrt{\frac{\pi f}{\sigma\mu}}$. Le milieu est dispersif puisque la vitesse de phase dépend de la fréquence.

2.6.3. Milieu quelconque

Dans le cas d'un milieu quelconque, caractérisé par ε', ε'', μ', μ'', σ, il y a deux moyens de calculer les constantes de pertes et de phase.

Soit on utilise les expressions générales : $\alpha = \omega\sqrt{|\varepsilon_{ca}||\mu_c|}\sin\left(\frac{\delta_{ea}+\delta_m}{2}\right)$ et $\beta = \omega\sqrt{|\varepsilon_{ca}||\mu_c|}\cos\left(\frac{\delta_{ea}+\delta_m}{2}\right)$.

Soit on utilise l'équation de dispersion : $\Gamma^2 = -\varepsilon_{ca}\mu_c\omega^2$, avec $\varepsilon_{ca} = \varepsilon' - j\varepsilon'' - j\frac{\sigma}{\omega}$ et $\mu_c = \mu' - j\mu''$.

Selon les approximations qui seront possibles, le milieu pourra être ou ne pas être dispersif. On calcule la vitesse de phase : $v_\varphi = \frac{\omega}{\beta}$.