Propagation guidée sur une structure métallique planaire
Correction

1 – Il n'y a pas de pertes, donc s'il y a propagation $\Gamma = j\beta_g$, alors que s'il y a évanescence $\Gamma = \alpha_g$.

2 - $\underbrace{K_c^2}_{} = \underbrace{\Gamma^2}_{\text{réel} < 0} + \underbrace{\varepsilon_0\mu_0\omega^2}_{\text{réel} > 0}$

Donc K_c^2 est donc réel, soit négatif, soi positif
K_c est donc soit réel, soit imaginaire pur.

3 - $\vec{\mathcal{E}} = \begin{vmatrix} 0 \\ \mathcal{E}_y \\ 0 \end{vmatrix}$

$\mathrm{div}\vec{\mathcal{D}} = 0$, soit $\mathrm{div}\vec{\mathcal{E}} = 0$, soit encore $\dfrac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} = 0$

$\dfrac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} = 0$, $\vec{\mathcal{E}}$ est donc indépendant de y.

4 - $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathcal{E}} = -j\omega\mu_0\vec{\mathcal{H}}$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ \mathcal{E}_y \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} \\ 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} \end{vmatrix} = -j\omega\mu_0 \begin{vmatrix} \mathcal{H}_x \\ \mathcal{H}_y \\ \mathcal{H}_z \end{vmatrix}$$

Donc $\mathcal{H}_y(x, y, z) = 0$

5 - $\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} = j\omega\mu_0\mathcal{H}_x \\ \dfrac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} = -j\omega\mu_0\mathcal{H}_z \end{cases}$

$\mathcal{E}_y$ étant indépendant de y, alors $\mathcal{H}_x$ et $\mathcal{H}_z$ sont indépendants de y.

6 - $\Delta h_z(x) + K_c^2 h_z(x) = 0$

$$\frac{\partial^2 h_z(x)}{\partial x^2} = -K_c^2 h_z(x) = (\pm jK_c)^2 h_z(x)$$

7 - $h_z(x) = Ae^{-jK_c x} + Be^{+jK_c x}$

8 - $\mathcal{H}_z(x,z)$ est parallèle aux parois métalliques. On ne peut donc en tirer aucune information.

9 - $\mathcal{H}_z(x,z) = \left[Ae^{-jK_c x} + Be^{+jK_c x}\right]e^{-\Gamma z}$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} = -j\omega\mu_0 \mathcal{H}_z$$

Soit $\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} = -j\omega\mu_0\left[Ae^{-jK_c x} + Be^{+jK_c x}\right]e^{-\Gamma z}$

$$\mathcal{E}_y = -\frac{j\omega\mu_0}{jK_c}\left[-Ae^{-jK_c x} + Be^{+jK_c x}\right]e^{-\Gamma z}$$

$$\mathcal{E}_y = \frac{\omega\mu_0}{K_c}\left[Ae^{-jK_c x} - Be^{+jK_c x}\right]e^{-\Gamma z}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} = j\omega\mu_0 \mathcal{H}_x$$

Soit $\mathcal{H}_x = \frac{1}{j\omega\mu_0}\frac{j\omega\mu_0}{jK_c}(-\Gamma)\left[Ae^{-jK_c x} - Be^{+jK_c x}\right]e^{-\Gamma z}$

D'où $\mathcal{H}_x = \frac{-\Gamma}{jK_c}\left[Ae^{-jK_c x} - Be^{+jK_c x}\right]e^{-\Gamma z}$

10 – On doit avoir, en $x = \pm a$ $\mathcal{H}_x = 0$ et $\mathcal{E}_y = 0$

$\left[Ae^{-jK_c a} - Be^{+jK_c a}\right] = 0$ (1) en x=a

$\left[Ae^{+jK_c a} - Be^{-jK_c a}\right] = 0$ (2) en x=-a

11 – On a un système trivial. Pour éviter A=B=0, il faut que le déterminant soit nul, soit :

$\begin{vmatrix} e^{-jK_c a} & -e^{+jK_c a} \\ e^{+jK_c a} & -e^{-jK_c a} \end{vmatrix} = -e^{-2jK_c a} + e^{+2jK_c a} = 0$, soit $\sin(2K_c a) = 0$, soit enfin $K_c = \frac{n\pi}{2a}$

12 - $Ae^{-jK_c a} = Be^{+jK_c a}$

$$B = Ae^{-2jK_c a} = Ae^{-2j\frac{n\pi}{2a}a} = Ae^{-jn\pi} = (-1)^n A$$

$$\mathcal{H}_z(x,z) = H_0\left[e^{-jK_c x} + (-1)^n e^{+jK_c x}\right]e^{-\Gamma z}$$

13 - $K_c^2 = \Gamma^2 + \varepsilon_0\mu_0\omega^2$, soit $\beta_g^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2$

14 - $\beta_g^2 = 0$ donne $\varepsilon_0\mu_0\omega 4\pi^2 f_{cn}^2 = \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2$

Soit $f_{cn} = \frac{|n|\pi}{2a}\frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{|n|}{4a\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}(\mathrm{Hz})$

$f_{cn} = f_{c(-n)}$

15 – Mode TE$_{-n}$: $\mathcal{H}_z(x,z) = H_0\left[e^{-jK_cx} + (-1)^{-n} e^{+jK_cx}\right]e^{-\Gamma z} = H_0\left[e^{-jK_cx} + (-1)^{n} e^{+jK_cx}\right]e^{-\Gamma z}$, idem que pour le mode TE$_n$.

Les modes TE$_n$ et TE$_{-n}$ ne sont en fait qu'un seul mode.

16 - $\beta_g = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2}$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\beta_g} = \frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2}}$$

$$v_g = \frac{1}{\frac{d\beta_g}{d\omega}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{2\omega\varepsilon_0\mu_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2}}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2}}{\omega\varepsilon_0\mu_0}$$

$v_\varphi \neq v_g$, le mode est dispersif.

17 - $v_\varphi . v_g = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{1}{c^2}$

$v_\varphi > c$, $v_g < c$. C'est v_g qui représente le déplacement d'énergie. C'est normal que $v_g < c$.

18 - $K_c = \frac{\pi}{2a}$, donc n=1, soit B=-A

$$\mathcal{H}_x = \frac{-\Gamma}{j\frac{\pi}{2a}} H_0\left[e^{-j\frac{\pi}{2a}x} + e^{+j\frac{\pi}{2a_c}x}\right]e^{-\Gamma z} = -\beta_g\frac{4a}{\pi}H_0\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)e^{-j\beta_g z}$$

$$\mathcal{E}_y = \frac{\omega\mu_0}{\frac{\pi}{2a}} H_0\left[e^{-j\frac{\pi}{2a}x} + e^{+j\frac{\pi}{2a_c}x}\right]e^{-\Gamma z} = \omega\mu_0\frac{4a}{\pi}H_0\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)e^{-j\beta_g z}$$

$$\mathcal{H}_z = -2jH_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) e^{-j\beta_g z}$$

19 - $\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{H}}^*\right)$

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ \omega\mu_0 \frac{4a}{\pi} H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) e^{-j\beta_g z} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -\beta_g \frac{4a}{\pi} H_0^* \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) e^{+j\beta_g z} \\ 0 \\ +2jH_0^* \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) e^{+j\beta_g z} \end{vmatrix}$$

$$\vec{\mathcal{P}} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} 2j\omega\mu_0 \frac{4a}{\pi} |H_0|^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \\ 0 \\ \frac{1}{2}\beta_g \omega\mu_0 \left(\frac{4a}{\pi}\right)^2 |H_0|^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \end{vmatrix}$$

$$\vec{\mathcal{P}}_\tau = j\omega\mu_0 \frac{4a}{\pi} |H_0|^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$$

$$\vec{\mathcal{P}}_z = \beta_g \omega\mu_0 \left(\frac{4a}{\pi}\right)^2 |H_0|^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$$

20 - $P_\tau = \mathrm{Re}\left[\mathcal{P}_\tau\right] = 0$

$$P_z = \frac{\beta_g \omega\mu_0}{2} \left(\frac{4a}{\pi}\right)^2 |H_0|^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$$

21 – La puissance n’est rayonnée que dans la direction Oz, rien n’est transporté dans la direction Ox.