Ondes planes en régime harmonique du temps

On considère un milieu homogène, illimité, ε', ε'', μ', μ'', σ. Une onde monochromatique et homogène se propage dans un tel milieu, à la pulsation ω, dans la direction Oz, dans le sens des z croissants.

1 – Ecrire les équations de Maxwell dans ce contexte.

2 – En déduire l'équation de propagation valide dans ce milieu.

Soit $\mathcal{V}$ une composante quelconque de l'un des vecteurs complexes $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{H}}$, elle doit satisfaire l'équation d'onde scalaire : $\Delta\mathcal{V} + \omega^2\mu_c\varepsilon_{ca}\mathcal{V} = 0$

On travaillera en coordonnées cartésiennes : $\mathcal{V}(x,y,z)$. On cherche une solution sous la forme $\mathcal{V}=f(x).g(y).h(z)$.

3 – Montrer que, dans ce cas, l'équation de propagation peut s'écrire : $\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} + \frac{h''}{h} = -\varepsilon_{ca}\mu_c\omega^2$

4 – Montrer que l'on peut alors écrire : $\frac{f''}{f} = (jk_{c1})^2$, $\frac{g''}{g} = (jk_{c2})^2$, $\frac{h''}{h} = (jk_{c3})^2$, où les k_{ci} sont des constantes complexes vérifiant $(jk_{c1})^2 + (jk_{c2})^2 + (jk_{c3})^2 = -\varepsilon_{ca}\mu_c\omega^2$.

5 – Ecrivant $jk_{ci} = k'_i + jk_i$, où k_i et k'_i sont des constantes réelles, montrer alors que la solution générale de l'équation de propagation peut se mettre sous la forme : $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \exp\left[-\left(k'_1x + k'_2y + k'_3z\right)\right]\exp\left[-j\left(k_1x + k_2y + k_3z\right)\right]$.

6 – Que représentent les vecteurs $\vec{k} = \begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{vmatrix}$ et $\vec{k}' = \begin{vmatrix} k'_1 \\ k'_2 \\ k'_3 \end{vmatrix}$?

7 – En déduire l'équation des SEA et des SEP.

On appelle onde plane une onde électromagnétique telle que les SEA et les SEP sont des plans. Elle est, de plus, homogène si les SEA et les SEP sont confondues. On supposera que le plan d'onde a pour équation z =constante.

8 – Sachant que le module du vecteur d'onde est noté β (appelée constante de phase), et que le module du vecteur d'affaiblissement est noté α (appelée constante de pertes), écrire les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{k}'$ en fonction de $\vec{n}$, normale au plan d'onde.

9 – Finalement, écrire le vecteur d'onde complexe en fonction de la constante de propagation $\Gamma=\alpha+j\beta$.

On pourrait montrer que $\alpha = \omega\sqrt{|\varepsilon_{ca}||\mu_c|}\sin\left(\frac{\delta_{ea}+\delta_m}{2}\right)$ *et* $\beta = \omega\sqrt{|\varepsilon_{ca}||\mu_c|}\cos\left(\frac{\delta_{ea}+\delta_m}{2}\right)$.

10 – Quelle est la direction de propagation de ce champ électromagnétique ?

11 – Montrer que, dans ce cas, le champ électromagnétique de cette onde plane a des composantes indépendantes de x et de y.

12 – A l'aide des équations de Maxwell, montrer que les composantes $\mathcal{E}_z$ et $\mathcal{H}_z$ de ce champ électromagnétique sont forcément nulles.

13 – Reprenant l'équation de propagation vérifiée par le champ électromagnétique, déterminer $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_y$.

14 – En repartant des équations de Maxwell, élaborer les relations qui existent respectivement entre $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{H}_y$, puis entre $\mathcal{H}_x$ et $\mathcal{E}_y$. On posera $Z = \sqrt{\frac{\mu_c}{\varepsilon_{ca}}}$ (il s'agit de l'impédance d'onde).

On considère maintenant le cas où le milieu est sans pertes.

15 – Dans ce cas, vérifier que les champs électrique et magnétique réels sont orthogonaux.

16 – Déterminer la constante de phase, puis la vitesse de phase. Le milieu est-il dispersif ?

On considère maintenant le même type d'onde mais se propageant dans un milieu conducteur pour lequel $\sigma >> \varepsilon\omega$. Il s'agit d'un très bon conducteur.

17 – Ecrire les équations de Maxwell dans le conducteur en tenant compte des simplifications introduites par ses propriétés.

18 – En posant $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\pi\sigma\mu f}}$, montrer que le champ magnétique vérifie l'équation de propagation $\dfrac{\partial^2 \mathcal{H}_y}{\partial z^2} - j\dfrac{2}{\delta^2}\mathcal{H}_y = 0$.

19 – Montrer que δ est homogène à une longueur.
Calculer sa valeur numérique pour $f = 1\text{GHz}$ et $\sigma = 5{,}9.10^7\,\text{S/m}$.

20 – Intégrer l'équation de propagation précédente. En déduire l'expression du champ magnétique dans le cas où la propagation se fait suivant les z croissants.

21 – Quelle est la signification physique de δ ?

22 – Que remarque-t-on dans le cas particulier où le métal est parfait (conductivité infinie) ?