Probabilités et statistiques

INTRODUCTION

au 17ème siècle PASCAL et DE FERMAT ont basé leur travaux sur la Théorie des jeux. => À donné naissance à toutes la théorie combinatoire.

Au 20ème siècle, KOLMOGOROV à formalisé les statistiques pour arriver au formalisme moderne. Ses travaux sont basés sur la théorie de la mesure).

Notion intuitive de probabilité

- Sur 1D6, la probabilité d'obtinir un 5 est de $\frac{1}{6}$ uniquement si le dé est équilibré.
- Soit N lancés de 1D6 équilibré. La probabilités d'obtenir un 5 n'est valable que pour N grand.

MESURE ET PROBABILITÉS

Vocabulaire

Une Épreuve aléatoire $\Omega = \{\text{résultats possibles}\}$
ω_p = résultats élémentaires

exemple du dé

$\omega_1 = 1, \omega_2 = 2$
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A \subset \Omega$ évènements = résultats possibles

A = famille de A_i vérifiant 3 règles :

- $\Omega \in A$
- $\forall A_i \in A, C_\Omega^{A_i} \in A$
- $\forall A_i \in A, i \in A_i \in A$

L'ensemble forme une tribut A

Définition

On associe à chaque $A_i \in A$ un nombre $\equiv$ probabilité

$$\begin{array}{ll} p: & A \to [O,1] \\ & A_i \to p(Ax) = \text{probabilité de réaliser} A_i \text{sur une épreuve.} \end{array}$$

P vérifie 3 règles:

$$A_i \exists A, p(\emptyset) = 0 \leq p(A_i) \leq 1 = p(\Omega)$$
$$A_i \exists A, p(C_\Omega A_i) = 1 - p(A_i)$$
$$A_i \exists A, i \in I p(U(i \in I)A_i) = \sum_{i \in I} p(A_i)$$

ssi les A_i sont 2 à 2 disjoints.

exemple

dé à 6 faces

$$\begin{array}{rl} \Omega & = \{1,2,3,4,5,6\} \\ A_1 & = \{\Omega, \emptyset\} \\ A_2 & = \{\Omega, \emptyset, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}\} \\ A_3 & = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2,3,4,5,6\}, \{1,3,4,5,6\}, \{1,2\}, \{1,4,5,6\}\} \\ (\Omega, A, p) & \equiv \text{espace probabilisé} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} A_i \text{ et } A_j \text{ incompatible} & p(A_i \cap A_j) = 0 \\ A_i \text{ et } A_j \text{ indépendants} & p(A_i \cap A_j) = p(A_i) \times p(A_j) \\ \text{Probabilité inconditionnelle} & p(A_i \mid A_j) = \frac{p(A_i \cap A_j)}{p(A_j)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{proba} & A_i \text{ conditionnelement à } A_j \\ & A_i \text{ sachant } A_j \end{array}$$

Loi des probabilités totales

partition (A_i) de $\omega \in A \to \cup_i A_i = \Omega, \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$

$\forall B \in A, p(B) = \sum_{i \in I} p(B \mid A_i) p(A_i)$

Formules de Bayes

Partition (A_i) de Ω : $\forall B \in A$

$$\begin{aligned} p(A_k \mid B) &= \frac{p(B|A_k)p(A_k)}{\sum_i p(B|A_i)p(A_i)} \\ &= \frac{p(A_k \cap B)}{p(B)} \end{aligned}$$

$B = \cup_i (B \cap A_i) \equiv$ partition de B.
$\rightarrow p(B) = \sum_i p(B \cap A_i) = \sum_i p(A \mid A_i)p(A_i)$

Propriété de la mesure de proba

$\forall A_i$ et A_j disjoints $p(A_i \cap A_j) = p(A_i) + p(A_j)$
Dans le cas général :
$p(A_i \cap A_j) = p(A_i) + p(A_j) - p(A_i \cap A_j)$

Voir schéma 1

Exercice

Je cherche mon cours, que j'ai rangé dans mon bureau avec une probabilité p. Le bureau possède 3 tiroirs semblables.

- J'ouvre le 1er tiroir ... en vain
- j'ouvre le 2ème tiroir ... en vain

Quelle est la probabilité de le trouver dans le 3 ème tiroir ?

Soit A le cour dans le 3ème tiroir.
Soit B le cour ni dans le 1er, ni dans le 2ème.

$$\begin{aligned} p(A \mid B) &= \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \\ &= \frac{p(A)}{p(B)} \text{ car A est compris dans B} \end{aligned}$$

Au départ : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_0\}$
avec $\omega_0 =$ pas dans le bureau.
$\omega_i =$ dans le tiroir $i (i = 1, 2, 3)$

La tribu utile sur cet exemple :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\Omega, \emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_0\}, \ldots\} \\ A_2 &= \{\Omega, \emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_0\}, \{\omega_0\}, \{\omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}\} \end{aligned}$$

Pour A_2, les probabilités sont respectivement de $\{1, 0, \frac{2\cdot}{3}, 1-p+\frac{p}{3}, 1-p, \frac{p}{3}, p, 1-p+\frac{2\cdot p}{3}\}$

$$A'_2 = \{\{\omega_3, \omega_0\}, \emptyset, \{\omega_3\}, \{\omega_0\}\}$$

VARIABLE ALEATOIRE RÉELLE CONTINUE

Soit une variable aléatoir x à valeurs sur $\mathbb{R}$

$$\Omega = \mathbb{R}$$
$$A_i \subset \Omega$$
$$A = \{A_i\} = tribu$$

Les A_i de base sont $]-\infty; x] \hookrightarrow$ tribu Borclienne $\equiv \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

Fonction de répartition de la variable aléatoire x

$$F_x : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to [0,1] \\ x \in \mathbb{R} \to \text{proba}(x \in]-\infty, x]) \end{array}$$

Il existe 3 types de variables aleatoires.

- continue : F_x est continue. **cf fig 2**
- discrete : F_x est continue par morceaux. **cf fig 3**
- mixte : (ex: temps d'attente à un feu) **cf fig 3**

propritétés de F_x :

$$\forall x \in \mathbb{R}$$
$$F_x(-\infty) \leq F_x(x) \leq 1 = F_x(+\infty)$$
$$F_x \text{ est croissante}$$
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$$
$$F_x(b) - F_x()$$
$$]-\infty, b]\ ]-\infty, a]$$

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(u)\mathrm{d}$$

fct répartition

$$f_x(x) = \frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}x} \text{ (au sens des distributions)}$$

Densité de probabilité $f_x = \frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}x} \leq 0$i.
f_x est sommable : $\int_{\mathbb{R}} f_x(x)$x $= 1 \rightarrow \hat{f}_x$ existe (le chapeau correspond à la transformée de Fourier).

$$\begin{aligned} \text{La probabilité de } (x \in]a,b) &= F_x(b) - F_x(a) \\ &= \int\limits_a^b F_x(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

exemple

Loi uniforme sur [a,b], avec b > a.

f_x est constante sur [a,b], et nulle ailleurs

cf ex 5

Loi de Gauss

C'est la même chose que la loi normale N(m, σ^2).$F_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x-m)^2}{2\sigma^2}$\$

cf fig 6

NB : $F_x(x) \rightarrow$ table de loi

Loi de Cauchy (a>0)

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}$$

$$F_x(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{a}$$

Espérance mathématique d'une variable aléatoire x de densité de probabilité f_x

$$\boxed{E\{x\} = \int\limits_{\mathbb{R}} x f_x(x)\mathrm{d}}$$

NB : peut ne pas exister.

exemple : Cauchy $E(x) = +\infty$

$$E\{g(x)\} = \int\limits_{\mathbb{R}g(x)f_x(x)\mathrm{d}}$$

La fonction g doit être mesurable $\sim$ continue par morceaux, en particulier : $g(x) = x^n$

$$E(x^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n f_x(x)\mathrm{d}x$$

On appelle cette fonction un moments d'ordre n.

n = 1 $\rightarrow$ moyenne de x
n = 2 $\rightarrow$ dispertion de x

Variance de x : $E\{[x - E(x)]^2\} = \text{var(x)}$ (NB: la partie entre crochet est une variable aléatoire x contrée).

$$\begin{aligned} \text{var}(x) &= E(x^2) - E^2(x) \\ &= E\{x^2 - 2xE(x) + E^2(x)\} \\ &= E(x^2) - 2E(x)E(x) + E^2(x) \\ &= E(x^2) - E^2(x) \end{aligned}$$

NB : E est un opérateur binaire.

$$\begin{aligned} \text{E(x)} &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} xF_x(x)\mathrm{d}x \\ \text{E(ax + b)} &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} (ax+b) f_x(x)\mathrm{d}x \\ &= a \textstyle\int_{\mathbb{R}} x f_x(x)\mathrm{d}x + b \textstyle\int_{\mathbb{R}} x f_x(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Inégalité de Bienaginé - Chebychev

Variable aléatoire x de densité de probabilité f_x. La probabilité $(|x - E(x)| > a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\equiv \text{var}(x) \\ \sigma &\equiv \sqrt{\text{var}(x)} \end{aligned}$$

σ est l'écart type.

Cf démo dans le poly

Changement de variable

v.a.x de la loi connue f_x.

- Loi bijection croissante :

$$y = h(x)$$

$$h \equiv \text{continue par morceaux}$$

cf fig 7

$$
\begin{aligned}
F_y(y) &= p(y \leq y) \\
&= p(x \leq h^{-1}(y)) \\
&= F_x(h^{-1}(y)) \\
F_y(y) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_y(y) \\
&= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_x(h^{-1}(y)) \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} h^{-1}(y) \\
&= f_x(h^{-1}(y)) \tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}
\end{aligned}
$$

- Loi bijection décroissante :

cf fig 8

$$
\begin{aligned}
F_y(y) &= p(x \in [h^{-1}(y), +\infty[) \\
&= 1 - F_x(h^{-1}(y)) \\
f_y(y) &= -f_x(h^{-1}(y)) \tfrac{\mathrm{d}h^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}
\end{aligned}
$$

- Loi bijective :

$$f_y(y) = f_x(h^{-1}(y)) |\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}|$$

- Cas général :

soient $\{x_i\}, i \in I$ les antécédants de y.

$$h(x_i) = y \forall i \in I$$

$$f_y(y) = \sum_{i \in I} f_x(h^{-1}(y)) |\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}|$$

exercice : x uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

$y = a \sin x, a > 0$

cf ex 9

$$\forall y \text{ tel que } |y| > a, f_y(y) = 0$$

$$f_y(y) = f_x(x_i) |\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}|_{x=x_i} + f_x(x_i) |\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}|_{x=x_2} = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}}$$

$$x_1 = \arcsin(\frac{y}{a})$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-(\frac{y}{a})^2}}$$
$$x_2 = \pi - x_1$$
$$x_2 = \pi - \arcsin(\frac{y}{a})$$
$$\Rightarrow |\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}|_{x=x_2} = |\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}|_{x=x_2} = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}}$$

Rappels

$$F_x(x) = \text{proba}(X \leq x)$$
$$f_x(x) = \frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}x}\text{d.d.p.}$$
$$E(g(x)) = \int_{\mathrm{R}} g(x) f_x(x) \mathrm{x}$$
$$f_x(x)\mathrm{x} = 1 et f_x(x) \geq 0$$

f_x chapeau (V), TF de f_x (x) existe###################

Fct caractérisques

$$\phi_x : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$$
$$t \to E\{e^{itx}\}$$

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t^k}\phi_x(t) = \int \mathrm{R}(ix)^k e^{itx} f_x(x)\mathrm{x}$$
$$\phi_x^{(k)}(0) = i^k \int \mathrm{R}x^k f_x(x)\mathrm{x}(\text{avec le contenue de l'intégrale} = E(x^k))$$

Si la v.a.x possède des moments jusqu'à l'ordre k, sa fonction caractéristique est k fois dérivable en t=° et $\phi_x^{(k)}(0) = i^k E(x^k)$.

Ex : Loi gaussienne

$$\begin{aligned} X \to \mathcal{N}(m, \sigma^2) & \\ f_x(x) &= \tfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp - \tfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \\ \phi_x(t) &= e^{itm} e^{-t^2\sigma^2/2} \end{aligned}$$

∞ dérivale en t=0.

$\rightarrow E(x^k)$ existe $\forall k$

$$E(x) = \int \mathrm{R} x f_x(x) \mathrm{x}$$
$$= ...$$
$$= m$$

$$\phi'_x(t) = ime^{itm} e^{-t^2\sigma^2/2}$$
$$= e^{itm} t\sigma^2 e^{-t^2\sigma^2/2}$$
$$\phi'_x(0) = \Im$$

$Var(x) = E(x^2) - E^2(x)$

Ex: Loi de Cauchy

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}$$
$$a \in \mathrm{R}$$
$$\forall k \in \mathrm{N}^* E(x^k = ... = \infty$$
$$\phi_x(t) = e^{-a|t|}$$

V.A. RÉELLE DISCRETE

v.a.x d valeurs dans R, mais :

$$\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$
$$= \{x_i, i \in \mathrm{I}$$

Fct répartition

$\forall x \in \mathrm{R} F_x(x) = \text{proba}(X \leq x)$

F_x est continue à droite, continue par morceux, en tout x.

$$F_x(x_i) - \lim h \rightarrow 0^+ F_x(x-h) = proba(X = x_i)$$

densité de probabilité

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}x}(x) \\
f_X &= \frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}x} \\
&= \sum_{i \in I} \text{ proba } X = x_i \delta_{x_i}
\end{aligned}
$$

Moments

$$
\begin{aligned}
E\{X^k\} &=< f_x, x^k > \\
&= \sum_{i \in I} p(X = x_i) x_i^k
\end{aligned}
$$

Fonction Caractéristique

$$
\phi_x(t) = \sum_{l \in I} p(x = x_l) e^{itx_1}
$$

Exemple

- Loi de Bernouilli ($p \in [0,1]$). x peut valoir 1 ou 0.

ainsi :

$$
\left.\begin{array}{ll} \mathrm{X} = 1 & = p \\ \mathrm{X} = 0 & = 1 - p \end{array}\right.
$$

$p = 1/2$ Connu sous la loi de *pile ou face*.

$$
\forall k \in \mathrm{N}^*, E(x^k) = p
$$

$$
\mathrm{var}(x) = p - p^2
$$

$$
Var(x) = p(1-p)
$$

cf fig 10

$$Y = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Chaque x_k suit une loi de Bernouilli (p). Les X_k sont 2 à 2 indépendants. X suit une loi Binomiale (n,p).

$$\forall y \in \{0, 1, 2, ..., n\} p(Y = y) C_n^y p^y (1-p)^{n-y}$$
$$Y = y_i \Rightarrow y\text{présents} \rightarrow p^y$$
$$n - y\text{absents} \rightarrow (1-p)^{n-y}$$

nb :

$$C_n^y = \frac{n!}{y!(n-y)!}$$
$$A_n^y = \frac{n!}{(n-y)!}$$

Maintenant $n \rightarrow \infty$, alors, comme $np = \lambda = \text{ constante } > 0$.

$$Y = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

C'est la loi de Poisson, qui ne dépand que de λ.

$$p(Z = z) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^z}{z!} \forall z \in \mathrm{N}$$
$$E(X) = ... = \lambda$$
$$\mathrm{Var}(X) = ... = \lambda$$

V.A. Réelle vectorielle

Permet de prendre en compte les éventuelles dépendances entre plusieures variables.

Fct de répartition

$$F_x(\overrightarrow{x}) = \text{proba}(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_m)$$

Propriétés :

$$0 = F_{\overrightarrow{x}}(-\infty, x_2, ..., x_n) \leq F_{\overrightarrow{x}}(\overrightarrow{x}) \leq 1 = F_{\overrightarrow{x}}(\infty, \infty, ..., \infty)$$

- n = 2

$$\text{proba}(a < x_1 \leq b, c < x_2 \leq d) = F_{x_1,x_2}(b, d) - F_{\overrightarrow{x}}(b, c) - F_{\overrightarrow{x}}(a, d) + F_{\overrightarrow{x}}(a, c)$$

cf fig 11

Densité de probabilité

$$f_{\overrightarrow{x}} = \frac{d^n}{d_{x_1}, d_{x_2}, ..., d_{x_n}} F_{\overrightarrow{x}}(\overrightarrow{x})$$

- n = 2

$$\text{proba}(a < x_1 \leq b, c < x_2 \leq d) = \int\limits_{x_1 \in]a,b], x_2 \in]c,d]} f_{\overrightarrow{x}} \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2$$

Lois marginales (n=2)

couple de v.a. (x, y)

$$F_{x,y}(x,y)\text{connue} \Rightarrow F_x(x) * F_{x,y}(x,\infty)$$

de même

$$f_x(x) = \frac{\mathrm{d}F_x(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{x,y}(x,\infty) = \int_{\mathrm{R}} f_{x,y}(x,y)\mathrm{y}$$

Indépendances - Loi conditionnelle

Si x et y sont indépendantes alors $\forall (x,y) f_{x,y}(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$ et $f_{x,y}(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$

Loi conditionnelle $f_{x|y}(x|y) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_y(y)}$. Formule des probabilités totales ;

$$F_y(y) = \int \mathrm{R} f_{x,y}(x,y)\mathrm{x} = \int \mathrm{R} f_{y|x}(y|x) f_x(x)\mathrm{x}$$

DISCRETE

VECTORIELLE

REGRESSION

THEOREMES AUX LIMITES

ESTIMATION PARAMÈTREQUE

TESTS D'HYPETHÉSES

Références

BASS : Éléments de calcul des probabilités MASSON VENTETSEL : Théorie des probabilités MIR RÉNYI : Calcul des probabilités MASSON (I.GABAY) JAFFARD : Méthodes de la statistique MASSON Série SCHAUM chamilo