

Chapitre 2 : Bases de l'électromagnétisme

Equations de Maxwell et leurs conséquences

La théorie de Kirchhoff, comme on l'a vu dans le deuxième chapitre, permet la mise en oeuvre rapide de systèmes de transmission, en optimisant les échanges d'énergie. Cependant, il existe bien des cas où l'on a besoin de connaître plus précisément le comportement d'une structure électromagnétique, notamment la répartition du champ électromagnétique.

De plus, la théorie des lignes ne s'applique qu'aux systèmes de transmission qu'on appelle des lignes, qui sont des systèmes particuliers, supportant des modes TEM (modes ne dépendant que d'une coordonnée d'espace). Or, la majorité des systèmes de transmission ne sont pas des lignes. On est donc amené à les étudier autrement, en particulier avec la théorie de Maxwell.

Le cours de première année développera la théorie de Maxwell en traitant le cas particulier des ondes planes, dans un milieu illimité. Ce sera au cours de deuxième année de traiter le cas d'ondes se propageant dans un milieu limité (ondes guidées notamment).

1. Grandeurs fondamentales électriques et magnétiques

Un champ est une propriété électromagnétique en tout point de l'espace. Il se traduit par une force sur toute particule. Les champs sont ici électriques et magnétiques. Ils sont définis par le modèle de Maxwell.

Champ électrique \vec{E} (V/m) : $\vec{F}_e = q\vec{E}$

Induction électrique (ou déplacement) \vec{D} (As/m²) : dans les milieux linéaires, on a $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, où ϵ est la permittivité du milieu.

Avec $\epsilon_0 =$ permittivité absolue du vide = $\frac{1}{36 \pi 10^9}$ (As/Vm), on note $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$

Induction magnétique \vec{B} (T ou Vs/m²) : $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

Champ magnétique \vec{H} (A/m) : dans les milieux linéaires, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ où μ est la perméabilité magnétique du milieu.

Avec $\mu_0 =$ perméabilité absolue du vide = $4\pi 10^{-7}$ (Vs/Am), on note $\mu = \mu_r \mu_0$.

N.B. Pour la plupart des milieux, $\mu=\mu_0$ sauf par exemple pour des matériaux ferromagnétiques ...

Densité de charges volumiques ρ (Cb/m³) ou surfaciques ρ_s (Cb/m²)

Densité de courant \vec{j} (A/m²) = $\vec{j}_C + \vec{j}_D$ (conduction + déplacement)

$\vec{j}_C = \sigma \vec{E}$ (loi d'Ohm) où σ est la conductivité du milieu (S/m)

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

2. Equations de Maxwell en régime quelconque du temps

Les grandeurs fondamentales décrites précédemment ne sont pas indépendantes entre elles. Elles sont reliées par les équations de Maxwell (1831-1879). Ces équations spécifient le fait que toute variation spatiale d'un champ en un point de l'espace est due (ou entraîne) l'existence, ou la variation temporelle, d'un autre champ en un même point de l'espace.

Nous ne démontrerons pas ces équations. Elles seront notre postulat.

En régime quelconque du temps, on utilisera les équations de Maxwell en notation réelle, à savoir :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{V/m}^2 \quad (1)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma \vec{E} \left(+ \vec{j}_a \right) \quad \text{A/m}^2 \quad (2)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho \quad (3)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (4)$$

Avec $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$

Attention, dans l'équation (3), on doit considérer toutes les charges, libres + fixes.

Il y a aussi une équation qui traduit la conservation de la charge : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{J}) = 0$. Cette équation est obtenue à partir des équations précédentes.

$\vec{J} = \vec{j}_C + \vec{j}_a$ (conduction + sources).

3. Equations de Maxwell en régime harmonique du temps - Différents milieux

On suppose que le volume V occupé par le matériau considéré ne contient pas de sources de champ donc $j_a=0$.

On peut montrer qu'en régime harmonique du temps, la densité de charges volumiques est forcément nulle.

3.1. Diélectriques parfaits

On rappelle les équations de Maxwell en écriture réelle :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{D} = 0$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

Champs complexes associés, en régime harmonique du temps :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E}$$

$$\text{div} \vec{D} = 0$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{avec } \vec{D} = \epsilon \vec{E} \text{ et } \vec{B} = \mu \vec{H}$$

3.2. Milieux à pertes purement diélectriques

Ce sont des milieux isolants $\sigma = 0$ mais ils présentent un hystérésis diélectrique qui se traduit par un retard entre la polarisation \vec{P}_E et le champ électrique \vec{E} .

Pour en tenir compte, il suffit d'introduire une permittivité complexe $\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon''$ ($\epsilon', \epsilon'' > 0$) dans l'écriture complexe des équations de Maxwell.

$$\vec{D} = \epsilon_c \vec{E}$$

$$\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon'(1 - j \tan \delta_e) \text{ où } \tan \delta_e = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$$

Attention, ne pas écrire : $\vec{D} = \epsilon_c \vec{E}$ mais :

$$\vec{D} = \epsilon' \vec{E} - \frac{\epsilon''}{\omega} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{et on a : } \vec{\text{rot}} \vec{H} = \epsilon' \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \omega \epsilon'' \vec{E}$$

Cela peut aussi se traduire par une conductivité apparente $\sigma_a = \omega \epsilon'' > 0$.

3.3. Milieux à pertes purement magnétiques

Pas de pertes diélectriques ϵ réel > 0 .

Pas de pertes par conduction $\sigma = 0$.

Ces matériaux présentent un cycle d'hystérésis magnétiques $B(H)$. Ce cycle d'hystérésis n'est en général pas de forme simple. On fera l'hypothèse suivante : si le champ appliqué $H(t)$ est sinusoïdal, l'induction $\vec{B}(t)$ n'est pas sinusoïdale mais on peut se contenter du premier terme du développement en série de Fourier de $B(t)$.

On définit alors une perméabilité complexe : $\mu_c = \mu' - j\mu'' = \mu'(1 - j \tan \delta_m)$.

Les tables donnent en général $\mu_r = \frac{\mu'}{\mu_0}$ et δ_m .

On écrira les équations en notation complexe : $\vec{B} = \mu_c \vec{H}$ d'où $\vec{B} = \mu' \vec{H} - j\mu'' \vec{H}$

$$\vec{B} = \mu' \vec{H} - \frac{\mu''}{\omega} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\text{et on a : } \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\mu' \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \omega \mu'' \vec{H}$$

3.4. Milieux à pertes par effet Joule

Ce sont des milieux conducteurs $\sigma \neq 0$, $\vec{j}_c = \sigma \vec{E}$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \text{ (notation réelle)}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{j}_t = \vec{j}_c + \vec{j}_b = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

soit en complexe : $\vec{J}_t = \sigma \vec{E} + j\omega \vec{E}$ que l'on peut encore noter : $\vec{J}_t = j\omega \epsilon_{ca} \vec{E}$

avec : $\epsilon_{ca} = \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)$ qui serait une permittivité complexe apparente.

On peut travailler alors comme dans le cas des milieux diélectriques à pertes diélectriques : $\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon''$ où $\epsilon' = \epsilon$ et $\epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}$.

3.5. Conducteurs

- très bons conducteurs : $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$

Le courant est pratiquement un courant de conduction : $j_D \ll j_C$ et $\delta_{ea} \rightarrow \pi/2$

- très mauvais conducteurs : $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1$

Le milieu est proche d'un diélectrique à faibles pertes : ϵ'' faible et $\delta_{ea} \rightarrow 0$

- cas intermédiaire : $\tan \delta_{ea} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$

Le matériau se compare à un diélectrique imparfait et $0 < \delta_{ea} < \pi/2$

3.6. Cas général

Le matériau présente des pertes par hystérésis diélectriques et magnétiques ainsi que des pertes Joule. Les grandeurs ϵ' , ϵ'' , μ' , μ'' , σ définissent complètement les propriétés du milieu considéré.

On définira alors $\tan \delta_{ea} = \frac{\epsilon'' + \frac{\sigma}{\omega}}{\epsilon'}$, et $\epsilon_{ca} = \epsilon' - j \left(\epsilon'' + \frac{\sigma}{\omega} \right)$, permittivité complexe apparente, regroupant les pertes diélectriques et les pertes par effet Joule.

4. Relations de passage d'un milieu à un autre - Continuité des champs

Ces relations sont encore appelées plus généralement conditions aux limites.

On considère le changement brusque entre un milieu $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ et un milieu $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$. Localement on suppose que la séparatrice entre les deux milieux est plane. Sur la séparatrice Σ , peuvent exister ρ_s et \vec{j}_s (\vec{j}_s n'existe que si il y a un conducteur parfait, ρ_s existe pour un diélectrique imparfait ou un conducteur).

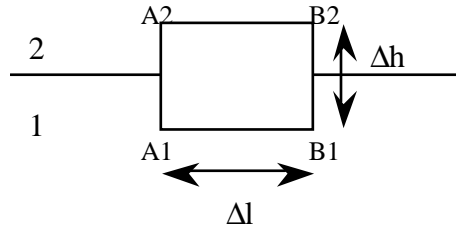
4.1. Conditions aux limites

On va démontrer rapidement les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{E}_{t2} - \vec{E}_{t1} &= \vec{0} \\ \vec{B}_{n2} - \vec{B}_{n1} &= \vec{0} \\ \vec{D}_{n2} - \vec{D}_{n1} &= \rho_S \vec{n}_{12} \\ \vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_{t2} - \vec{H}_{t1}) &= \vec{j}_S\end{aligned}$$

4.1.1. Champ électrique

On considère le rectangle infiniment petit : A1, B1, B2, A2.



$$\begin{aligned}\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \text{ (loi de Faraday)}\end{aligned}$$

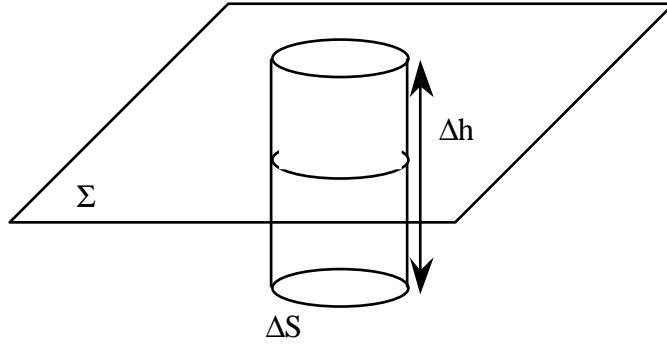
Lorsque $\Delta h \rightarrow 0$, $dS \rightarrow 0$,

il reste : $\vec{E}_2 \cdot \vec{t} \Delta l - \vec{E}_1 \cdot \vec{t} \Delta l = 0$ soit $\vec{E}_{t2} - \vec{E}_{t1} = \vec{0}$

Donc, quels que soient les milieux 1 et 2, la composante tangentielle du champ électrique est continue à l'interface.

4.1.2. Induction magnétique

On considère le cylindre de hauteur Δh , de base ΔS .



\vec{B} étant à flux conservatif :

$$\iint_{S(\text{fermée})} \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0$$

$$\text{soit } \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_{12} \Delta S - \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_{12} \Delta S + \phi_{\text{paroi latérale}} = 0$$

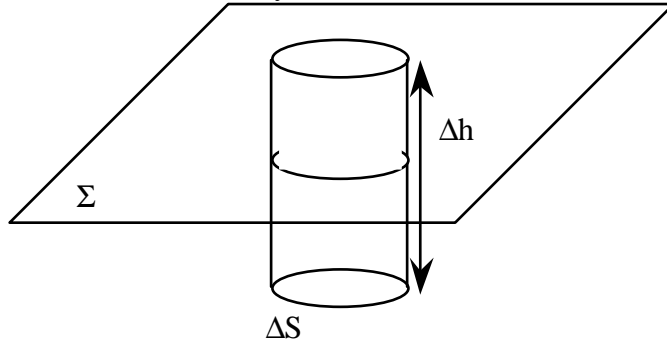
$$\text{or } \Delta h \rightarrow 0, \text{ d'où } \phi_{\text{paroi latérale}} = 0$$

$$\text{d'où } \vec{B}_{n2} - \vec{B}_{n1} = \vec{0}$$

Quels que soient les milieux 1 et 2, la composante normale de l'induction magnétique est continue à la traversée de l'interface.

4.1.3. Induction électrique

On applique le théorème de Gauss au cylindre de hauteur Δh et de base ΔS .



$$\iint_S \vec{D} \cdot \vec{dS} = Q_t \quad S \text{ fermée.}$$

On a postulé l'existence de ρ_S sur la séparatrice Σ .

$$\text{D'où } \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_{12} \Delta S - \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_{12} \Delta S + \phi_{\text{paroi latérale}} = Q_{\text{int}} + Q(\Sigma)$$

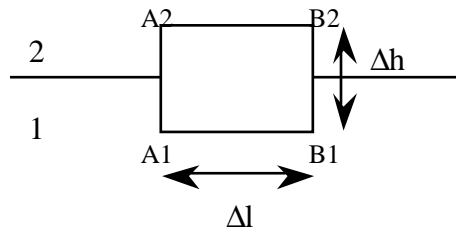
$$\text{or } \Delta h \rightarrow 0, \text{ d'où } \phi_{\text{paroi latérale}} = 0. \text{ De même, } Q_{\text{int}} \rightarrow 0 \text{ et } Q(\Sigma) = \rho_S \Delta S$$

$$\text{Soit : } \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_{12} \Delta S - \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_{12} \Delta S = \rho_S \Delta S \text{ d'où } \vec{D}_{n2} - \vec{D}_{n1} = \rho_S \vec{n}_{12}$$

Si $\rho_S = 0$, la composante normale de \vec{D} est continue à la traversée de l'interface.

4.1.4. Champ magnétique

On considère le rectangle A1, A2, B2, B1.



$$\begin{aligned}\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_c \right) \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_S \vec{j}_t \cdot d\vec{S} \\ &= \phi(\vec{j}_t)_{\text{volume}} + (\vec{j}_s)_{\Sigma}\end{aligned}$$

Si $\Delta h \rightarrow 0$, $\phi(\vec{j}_t)_{\text{volume}} \rightarrow 0$ et $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \vec{H}_2 \cdot \vec{t} \Delta l - \vec{H}_1 \cdot \vec{t} \Delta l$

$$\phi(\vec{j}_s)_{\Sigma} = \vec{j}_s \cdot \vec{t} \Delta l$$

soit : $\vec{H}_2 \cdot \vec{t} - \vec{H}_1 \cdot \vec{t} = \vec{j}_s \cdot \vec{t}$ que l'on peut encore écrire :

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_s \quad \text{ou} \quad \vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_{t2} - \vec{H}_{t1}) = \vec{j}_s$$

Cette relation permet de calculer \vec{j}_s si il existe et si on connaît \vec{H}_1 et \vec{H}_2 .

4.2. Cas particuliers

4.2.1. Isolant-isolant : $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$

$$\rho_s = 0, j_s = 0$$

Les relations de continuité s'écrivent :

$$\vec{E}_{t2} = \vec{E}_{t1}, \vec{H}_{t2} = \vec{H}_{t1}, \vec{B}_{n2} = \vec{B}_{n1}, \vec{D}_{n2} = \vec{D}_{n1}$$

4.2.2. Isolant conducteur $\sigma_1 = 0, \sigma_2 \neq 0$ ou conducteur - conducteur $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0$

L'un des milieux étant conducteur $\rho_s \neq 0, j_s = 0$

$$\vec{E}_{t2} = \vec{E}_{t1}, \vec{H}_{t2} = \vec{H}_{t1}, \vec{B}_{n2} = \vec{B}_{n1}, \vec{D}_{n2} - \vec{D}_{n1} = \rho_s \vec{n}_{12}$$

4.2.3. Diélectrique - conducteur parfait $\sigma_2 = 0, \sigma_1 = \infty$

Si l'un des deux conducteurs est parfait (admettons 1) alors $\vec{E}_1 = \vec{0}$ (car $\sigma_1 \rightarrow \infty$) d'où $\vec{E}_{t2} = \vec{0}$. La composante extérieure du champ électrique, au voisinage du conducteur ne peut qu'être perpendiculaire à sa surface (à la limite nulle, si le milieu 2 est parfait aussi mais cas sans intérêt).

Conducteur parfait d'où $j_s \neq 0$ et $\rho_s \neq 0$

$$\vec{E}_1 = \vec{H}_1 = \vec{B}_1 = \vec{D}_1 = \vec{0}$$

De même $\vec{B}_{n2} = \vec{0}$

$\vec{n}_{12} \wedge \vec{H}_{t2} = \vec{j}_s$ permet le calcul de \vec{j}_s si on mesure (ou calcule) \vec{H}_{t2} .

$\vec{D}_{n2} = \rho_s \vec{n}_{12}$ donne ρ_s .

5. Conservation de l'énergie électromagnétique - Théorème de Poynting

5.1. Théorème de Poynting dans un domaine incluant des sources du champ

5.1.1. Conservation de l'énergie

On considère un volume V (m^3) de matière dont les caractéristiques sont :
permittivité ϵ (F/m) réel >0
perméabilité μ (H/m) réel >0
conductivité σ (S/m) réel >0

Le volume V est donc le siège de pertes par conduction, mais non de pertes par hystérésis diélectrique ou magnétique. A l'intérieur du volume V , on inclut des sources du champ : il y a des points dans V où $\vec{j}_a \neq \vec{0}$.

On va écrire une équation-bilan des énergies mises en jeu dans le volume V pendant le temps dt .

La conservation de l'énergie indique que l'énergie fournie par les sources dW_a est égale à l'énergie nécessaire pour "augmenter" l'énergie électromagnétique dans V soit dW_{em} , augmentée de l'énergie perdue par effet Joule dW_J et de l'énergie traversant Σ (dW_R) :

$$dW_a(t) = dW_{em}(t) + dW_J(t) + dW_R(t)$$

$$P_a(t)dt = dt \iiint_V \frac{\partial W_{em}(t)}{\partial t} dV + dt \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{j}_c dV + dt \iint_{\Sigma} \vec{P}(t) \cdot \vec{n} d\Sigma \quad (\text{joules})$$

$$P_a(t) \text{ (W)}, W_{em}(t) \text{ (J/m}^3\text{)}, \vec{E} \cdot \vec{j}_c \text{ (W/m}^3\text{)}, \vec{P}(t) \text{ (W/m}^2\text{)}$$

$$P_a(t) = \iiint_V \frac{\partial W_{em}(t)}{\partial t} dV + \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{j}_c dV + \iint_{\Sigma} \vec{P}(t) \cdot \vec{n} d\Sigma \quad (\text{watts})$$

5.1.2. Théorème de Poynting

Considérant les équations de Maxwell, Poynting a tiré une relation intégrale qui peut être identifiée au bilan d'énergie ou de puissance donné précédemment. Cette identification conduit aux valeurs de P_a (puissance appliquée par les sources), de W_{em} (densité d'énergie électromagnétique du champ) et du vecteur \vec{P} qui sera le vecteur de Poynting.

$$\text{On a } \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j}_c + \vec{j}_a + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Toutes les grandeurs champs et densités de courant sont des fonctions de x, y, z, t .
Ces équations locales du champ sont valables pour tout milieu.

$$\text{On en tire : } \vec{j}_c = \vec{\text{rot}} \vec{H} - \vec{j}_a - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{Multipliant scalairement par } \vec{E}, \text{ il vient : } \vec{E} \cdot \vec{j}_c = \vec{E} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{H} - \vec{E} \cdot \vec{j}_a - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{Multipliant la seconde équation scalairement par } \vec{H} : \vec{H} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Soit } \vec{H} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{E} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

On retranche alors ce "zéro" du second membre de l'équation en \vec{E} :

$$\vec{E} \cdot \vec{j}_c = \vec{E} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{H} - \vec{H} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{j}_a - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{On a l'identité : } \vec{H} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{H} = \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H})$$

$$\text{Si de plus on écrit } \vec{D} = \epsilon \vec{E} \text{ et } \vec{B} = \mu \vec{H}, \text{ il vient : } \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \epsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\text{Or, } \frac{\partial(\vec{E} \cdot \vec{E})}{\partial t} = 2\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ De même pour } \vec{H}.$$

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon \vec{E} \cdot \vec{E} + \mu \vec{H} \cdot \vec{H}] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$$

$$\text{Reportant ces résultats, il vient : } \vec{E} \cdot \vec{j}_c = -\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) - \vec{E} \cdot \vec{j}_a - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$$

Cette équation est une équation locale vraie en tout t et en tout lieu. Intégrant sur le volume V , il vient :

$$\iiint_V \vec{E} \cdot \vec{j}_c dV = -\iiint_V \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) dV - \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{j}_a dV - \iiint_V \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dV$$

$$\text{Or : } \iiint_V \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) dV = \iint_{\Sigma} (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{n} d\Sigma$$

D'où finalement :

$$-\iiint_V \vec{E} \cdot \vec{j}_a dV = \iiint_V \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dV + \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{j}_c dV + \iint_{\Sigma} (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{n} d\Sigma \quad (\text{Watts})$$

$$P_a(t) = \iiint_V \frac{\partial W_{em}(t)}{\partial t} dV + \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{j}_c + \iint_{\Sigma} \vec{P}(t) \cdot \vec{n} d\Sigma \quad (\text{Watts})$$

Ces deux dernières expressions constituent le théorème de Poynting général dans un domaine incluant les sources. L'identification terme à terme conduit aux résultats suivants.

5.2. Vecteur de Poynting

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}$$

On aura alors l'expression de la densité de puissance rayonnée à travers $d\Sigma$:

$$\frac{dP_R}{d\Sigma} = \vec{P} \cdot \vec{n} = (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{n}$$

Les relations intégrales ont été établies pour un volume V entouré par la surface Σ avec la normale \vec{n} en tous points de Σ dirigée vers l'extérieur de V (théorème d'Ostrogradski).

Conséquence :

Si $\iint_{\Sigma} \vec{P} \cdot \vec{n} d\Sigma > 0$, la puissance instantanée au temps t sort de V à travers Σ .

Si $\iint_{\Sigma} \vec{P} \cdot \vec{n} d\Sigma < 0$, la puissance instantanée au temps t rentre dans V à travers Σ .

5.3. Valeurs moyennes en régime harmonique

On se place dans le cas général où le milieu présente les trois types de pertes possibles par hystérésis diélectrique et magnétique et par conductivité. Dans ce cas, les constantes caractéristiques sont $\epsilon_{ca} = \epsilon' - j\left(\epsilon'' + \frac{\sigma}{\omega}\right)$, $\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon''$, $\tan \delta_e = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$, $\mu_c = \mu' - j\mu''$, $\tan \delta_m = \frac{\mu''}{\mu'}$, σ .

Avec ϵ' , ϵ'' , μ' , μ'' , σ réels > 0 .

5.3.1. Energies électromagnétiques

La densité d'énergie est donnée par : $W_{em}(t) = \frac{1}{2} [\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}] (\text{J} / \text{m}^3)$

Introduisant les vecteurs complexes, on a : $\vec{D} = \epsilon_c \vec{E}$; $\vec{B} = \mu_c \vec{H}$

On définit alors la densité moyenne d'énergie électrique du champ par :

$$\overline{W_e} = \langle W_e \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right\rangle (\text{J} / \text{m}^3)$$

De même pour la densité moyenne d'énergie magnétique :

$$\overline{W}_m = \langle W_m \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right\rangle (\text{J} / \text{m}^3)$$

Les calculs seront conduits dans le seul cas de \overline{W}_e . On sait que :

$$\frac{1}{2} \langle \vec{E} \cdot \vec{D} \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \cdot \vec{D}^*] = \overline{W}_e. \text{ D'où en remplaçant } \epsilon_c \text{ par sa valeur :}$$

$$W_e = \frac{1}{4} \text{Re}[\vec{E} \cdot \vec{E}^* (\epsilon' + j\epsilon'')].$$

Or, $\vec{E} \cdot \vec{E}^*$ est le carré du module de \vec{E} , c'est donc un terme réel. Il vient donc les deux expressions importantes : $W_e = \frac{1}{4} \epsilon' \text{Re}[\vec{E} \cdot \vec{E}^*]$ ou $W_e = \frac{1}{2} \epsilon' E_{\text{eff}}^2$.

Sans effectuer d'autres calculs, on obtient pour la densité d'énergie magnétique moyenne : $W_m = \frac{1}{4} \mu' \text{Re}[\vec{H} \cdot \vec{H}^*]$ ou $W_m = \frac{1}{2} \mu' H_{\text{eff}}^2$.

Intégrant alors ces résultats sur le volume V de matériau, les énergies moyennes électrique et magnétique seront données par les expressions :

$$\overline{T}_e = \iiint_V \overline{W}_e dV ; \overline{T}_m = \iiint_V \overline{W}_m dV \quad (\text{joules})$$

$$\text{soit encore : } \overline{T}_e + \overline{T}_m = \overline{T}_{\text{em}} = \frac{1}{4} \iiint_V [\epsilon' \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \mu' \vec{H} \cdot \vec{H}^*] dV \quad (\text{joules})$$

5.3.2. Valeurs moyennes des pertes par conduction (pertes Joule)

Les pertes Joule dans le volume V sont données en valeur instantanée par :

$$P_J = \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{j}_c dV = \iiint_V \sigma \vec{E} \cdot \vec{E} dV = \iiint_V \frac{1}{\sigma} \vec{j}_c \cdot \vec{j}_c dV \quad \text{avec } \vec{j}_c = \sigma \vec{E} \text{ et } \sigma \text{ réel positif.}$$

On calcule la valeur moyenne de ces pertes par : $\overline{P}_J = \langle P_J \rangle$

$$\text{Ce calcul fait intervenir par exemple : } \langle \vec{E} \cdot \vec{j}_c \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \cdot \vec{j}_c^*]$$

or $\vec{E} \cdot \vec{j}_c^* = \sigma \vec{E} \cdot \vec{E}^*$ et comme σ réel >0 , alors $\vec{E} \cdot \vec{j}_c^*$ est réel.

$$\text{Il vient donc : } \overline{P}_J = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{j}_c^* dV = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV = \frac{1}{2} \iiint_V \frac{1}{\sigma} \vec{j}_c \cdot \vec{j}_c^* dV (W)$$

On peut aussi, comme précédemment, remplacer $\vec{E} \cdot \vec{E}^*$ par $2E_{\text{eff}}^2$ et il vient :

$$\overline{P}_J = \iiint_V \sigma E_{\text{eff}}^2 dV = \iiint_V \frac{1}{\sigma} J_{c_{\text{eff}}}^2 dV \quad (\text{watts})$$

5.3.3. Valeurs moyennes des pertes diélectriques et magnétiques

Pour un diélectrique imparfait $\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon''$, la densité de courant total s'écrit, avec $\sigma=0$

$$\vec{j}_t = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon' \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \omega \epsilon'' \vec{E}.$$

C'est la somme d'un courant de déplacement $\epsilon' \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ en quadrature avec \vec{E} et d'un courant de conduction fictif $\vec{j}_{cf} = \omega \epsilon'' \vec{E}$ en phase avec \vec{E} qui caractérise complètement les pertes par hystérésis diélectrique.

Compte tenu des résultats obtenus ci-dessus dans le cas d'une conduction vraie σ réel >0 , on pourra donc écrire

$$\bar{P}_e = \iiint_V \langle \vec{E} \cdot \vec{j}_{cf} \rangle dV = \iiint_V \langle \vec{E} \cdot \omega \epsilon'' \vec{E} \rangle dV$$

$$\text{Soit } \bar{P}_e = \omega \epsilon'' \iiint_V \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle dV. \text{ Alors, avec } \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \cdot \vec{E}^*] = \frac{1}{2} [\vec{E} \cdot \vec{E}^*] :$$

$$\bar{P}_e = \frac{\omega \epsilon''}{2} \iiint_V (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) dV$$

En ce qui concerne les pertes par hystérésis magnétique, on peut, bien que les courants magnétiques n'aient pas de réalité physique, suivre le processus établi auparavant et écrire, sans autres calculs :

$$\bar{P}_m = \frac{\omega \mu''}{2} \iiint_V [\vec{H} \cdot \vec{H}^*] dV = \mu'' \iiint_V H_{eff}^2 dV$$

Cette expression, formulée par analogie, est confirmée expérimentalement.

Remarque : Ces pertes sont essentiellement positives ; donc ϵ'' , $\mu'' >0$, ce qui fonde a posteriori les écritures $\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon''$ et $\mu_c = \mu' - j\mu''$.

5.3.4. Vecteur de Poynting moyen - Densité de puissance moyenne

En ce qui concerne les puissances instantanées et le vecteur de Poynting instantané, on avait obtenu $dP_R = \vec{P} \cdot \vec{n} d\Sigma = n \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) d\Sigma = n \cdot [\vec{E}_t \wedge \vec{H}_t] d\Sigma$ (watts).

On passe immédiatement aux valeurs moyennes en remarquant simplement que, par exemple : $\langle \vec{E} \wedge \vec{H} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \wedge \vec{H}^*] :$

$$d\bar{P}_R = \langle \vec{P} \rangle \cdot \vec{n} d\Sigma = \frac{1}{2} n \cdot \text{Re}[\vec{E} \wedge \vec{H}^*] d\Sigma = \frac{1}{2} \vec{n} \cdot \text{Re}[\vec{E}_t \wedge \vec{H}_t^*] d\Sigma \quad (\text{watts}).$$

Ceci représente la puissance moyenne traversant $d\Sigma$. Le sens de transfert est celui du vecteur $\langle \vec{P} \rangle$:

Si $\langle \vec{P} \rangle \cdot \vec{n} > 0$, c'est aussi le sens de \vec{n} .

Si $\langle \vec{P} \rangle \cdot \vec{n} < 0$, c'est le sens de $-\vec{n}$.

5.3.5. Puissance moyenne rayonnée à travers une surface fermée

On considère le volume V entouré par une surface Σ fermée sans singularité.

Par définition de la densité de puissance rayonnée dP_R à travers $d\Sigma$, la puissance moyenne \bar{P}_R traversant la surface Σ fermée est donnée par : $\bar{P}_R = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \text{Re}[\vec{E} \wedge \vec{H}^*] \vec{n} d\Sigma$

Règle : la normale \vec{n} étant orientée vers l'extérieur de V :

Si $P_R > 0$, la puissance moyenne sort de V .

Si $P_R < 0$, la puissance moyenne entre dans V .

On définit alors le vecteur de Poynting complexe par $\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} (\vec{E} \wedge \vec{H}^*)$

La relation liant les vecteurs complexe $\vec{\mathcal{P}}$ et réel \vec{P} est la suivante :

$$\langle \vec{P} \rangle = \langle \vec{E} \wedge \vec{H} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \wedge \vec{H}^*] \text{ d'où l'on tire } \langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \wedge \vec{H}^*] = \text{Re}[\vec{\mathcal{P}}]$$

Mais la relation $\vec{P} = \text{Re}[\vec{\mathcal{P}} e^{j\omega t}]$ n'est pas vraie.

En effet, $\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ n'est pas un vecteur réel dépendant du temps par $\sin(\omega t)$ ou $\cos(\omega t)$.

5.4. Bilan des puissances dans un domaine incluant les sources

On peut redémontrer le théorème de Poynting, en notation complexe. On obtiendra ainsi une équation-bilan qui gère le répartition de la puissance moyenne active fournie par les sources, à savoir : $\bar{P}_a = [\bar{P}_J + \bar{P}_e + \bar{P}_m] + \bar{P}_R$ (watts)

Cas particulier : dans un domaine sans source

Si le domaine V ne contient pas de sources du champ, soit $\vec{j}_a = \vec{0}$ en tous points de V , il vient l'équation-bilan :

$$0 = \bar{P}_J + \bar{P}_e + \bar{P}_m + \bar{P}_R ;$$

Cette équation montre que $\bar{P}_R < 0$: il est nécessaire qu'une puissance $|\bar{P}_R|$ entre dans V pour compenser les pertes totales dans le volume V .

On en déduit que si le domaine V est un domaine idéal sans pertes et s'il ne contient pas de sources de champ, on a $\bar{P}_R = 0$, ce qui signifie que si une puissance entre par une certaine partie de Σ , il en ressort une puissance égale sur le reste de la surface Σ .

5.5. Bilan des puissances actives et réactives - Vecteur de Poynting complexe

5.5.1. Préliminaires

Il a été établi dans les pages précédentes une relation (§5.1.) qui exprime la conservation de la puissance instantanée dans un milieu comportant ou non des sources du champ. Ces résultats ont été établis sans préciser le mode de dépendance des champs avec le temps t . Ils sont vrais pour tout régime variable de façon quelconque avec le temps.

Maintenant, on s'intéresse à un régime harmonique établi ; les calculs vont être repris en utilisant alors les vecteurs complexes indépendants du temps. On déduira alors les bilans des puissances active et réactive mises en jeu.

5.5.2. Calculs

Ils seront effectués dans le cas le plus général : le milieu considéré présente des pertes diélectriques ($\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon''$), des pertes magnétiques ($\mu_c = \mu' - j\mu''$) et des pertes par conduction (σ).

De plus, on considère qu'en des points déterminés des sources du champ existent $\vec{j}_a \neq \vec{0}$.

Equations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \text{Ecriture réelle : } \vec{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\text{rot}} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_c + \vec{j}_a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ecriture complexe : } \vec{\text{rot}} \vec{E} &= -j\omega \mu_c \vec{H} & \vec{B} &= \mu_c \vec{H} \\ \vec{\text{rot}} \vec{H} &= j\omega \epsilon_c \vec{E} + \vec{j}_c + \vec{j}_a & \vec{D} &= \epsilon_c \vec{E} \end{aligned}$$

$$\text{On calcule } \vec{j}_c : \vec{j}_c = \vec{\text{rot}} \vec{H} - j\omega \epsilon_c \vec{E} - \vec{j}_a$$

$$\text{On calcule } \vec{j}_c^* : \vec{j}_c^* = \vec{\text{rot}} \vec{H}^* + j\omega \epsilon_c^* \vec{E}^* - \vec{j}_a^* \text{ avec } \epsilon_c^* = \epsilon' + j\epsilon''$$

$$\text{On multiplie scalairement par } \vec{E} : \vec{E} \cdot \vec{j}_c^* = \vec{E} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{H}^* + j\omega \epsilon_c^* \vec{E} \cdot \vec{E}^* - \vec{E} \cdot \vec{j}_a^*$$

$$\text{On a, en considérant la première équation de Maxwell : } \vec{\text{rot}} \vec{E} + j\omega \mu_c \vec{H} = 0$$

$$\text{ou en multipliant scalairement par } \vec{H}^* : \vec{H}^* \cdot \vec{\text{rot}} \vec{E} + j\omega \mu_c \vec{H}^* \cdot \vec{H} = 0$$

On retranche alors 0 du second membre de $\vec{E} \cdot \vec{j}_c^*$:

$$\vec{E} \cdot \vec{j}_c^* = \left(\vec{E} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{H}^* - \vec{H}^* \cdot \vec{\text{rot}} \vec{E} \right) + j\omega \epsilon_c^* \vec{E} \cdot \vec{E}^* - j\omega \mu_c \vec{H} \cdot \vec{H}^* - \vec{E} \cdot \vec{j}_a^*$$

Or $\vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H}^* - \vec{H}^* \cdot \text{rot } \vec{E} = -\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}^*)$, d'où en développant $\epsilon_c^* = \epsilon' + j\epsilon''$;
 $\mu_c^* = \mu' + j\mu''$:

$$\begin{aligned}\vec{E} \cdot \vec{J}_c^* &= -\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}^*) + j\omega(\epsilon' \vec{E} \cdot \vec{E}^* - \mu' \vec{H} \cdot \vec{H}^*) - \omega(\epsilon'' \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \mu'' \vec{H} \cdot \vec{H}^*) - \vec{E} \cdot \vec{J}_a^* \\ -\vec{E} \cdot \vec{J}_a^* &= \vec{E} \cdot \vec{J}_c^* + \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}^*) - j\omega(\epsilon' \vec{E} \cdot \vec{E}^* - \mu' \vec{H} \cdot \vec{H}^*) + \omega(\epsilon'' \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \mu'' \vec{H} \cdot \vec{H}^*)\end{aligned}$$

On divise alors tous les termes par 2 et on intègre sur le volume V entouré par la surface Σ fermée sans singularité. \vec{n} normale unitaire à Σ est dirigée vers l'extérieur de V.

On remarque alors que l'on aura à intégrer

$$\frac{1}{2} \iiint_V \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}^*) dV = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} (\vec{E} \wedge \vec{H}^*) \cdot \vec{n} d\Sigma$$

Il vient alors l'équation bilan :

$$-\iiint_V \frac{\vec{E} \cdot \vec{J}_a^*}{2} dV = \iiint_V \frac{\vec{E} \cdot \vec{J}_c^*}{2} dV + \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} (\vec{E} \wedge \vec{H}^*) \cdot \vec{n} d\Sigma - \frac{j\omega}{2} \iiint_V (\epsilon' \vec{E} \cdot \vec{E}^* - \mu' \vec{H} \cdot \vec{H}^*) dV + \frac{\omega}{2} \iiint_V (\epsilon'' \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \mu'' \vec{H} \cdot \vec{H}^*) dV$$

5.5.3. Vecteur de Poynting complexe

On définit alors le vecteur de Poynting complexe par $\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} (\vec{E} \wedge \vec{H}^*)$

La relation liant les vecteurs complexe $\vec{\mathcal{P}}$ et réel \vec{P} est la suivante :

$$\langle \vec{P} \rangle = \langle \vec{E} \wedge \vec{H} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \wedge \vec{H}^*] \text{ d'où l'on tire } \langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \wedge \vec{H}^*] = \text{Re}[\vec{\mathcal{P}}]$$

Mais la relation $\vec{P} = \text{Re}[\vec{\mathcal{P}} e^{j\omega t}]$ n'est pas vraie.

En effet, $\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ n'est pas un vecteur réel dépendant du temps par $\sin(\omega t)$ ou $\cos(\omega t)$.

Exemple : onde plane

C'est la solution la plus simple des équations de Maxwell dans un milieu diélectrique sans pertes et sans conductivité : ϵ, μ réels >0 , $\sigma=0$

Elle s'écrit $E_0, H_0 >0$

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - \beta z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ H_0 \cos(\omega t - \beta z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a alors } \vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 H_0 \cos^2(\omega t - \beta z) \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{P}(x, y, z, t) = \frac{E_0 H_0}{2} \vec{n} [1 + \cos(2(\omega t - \beta z))]$$

$$\text{On aura alors } \vec{E}(x, y, z) = \begin{pmatrix} E_0 e^{-j\beta z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{H}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ H_0 e^{-j\beta z} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{H}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ H_0 e^{+j\beta z} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et il vient } \vec{P} = \frac{1}{2} (\vec{E} \wedge \vec{H}^*) = \frac{1}{2} E_0 H_0 \vec{n}$$

$$\text{On remarque bien que } \langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{2} E_0 H_0 \vec{n} = \text{Re}[\vec{P}]; \text{ mais en revanche } \vec{P} \neq \text{Re}[\vec{P} e^{j\omega t}].$$

Il faut noter que, dans ce cas particulier, le vecteur de Poynting complexe est purement réel : ce n'est évidemment pas vrai dans tous les cas.

5.5.4. Bilan des puissances dans un domaine incluant les sources

Considérant l'équation bilan donnée au paragraphe 3.2., les termes qui la composent peuvent être identifiés comme suit :

On a vu ci-dessus les relations :

$$\frac{1}{2} \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J}_c dV = \bar{P}_J \quad \text{pertes Joule moyennes dans } V$$

$$\frac{\omega}{2} \iiint_V \epsilon'' \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV = \bar{P}_e \quad \text{pertes moyennes diélectriques dans } V$$

$$\frac{\omega}{2} \iiint_V \mu'' \vec{H} \cdot \vec{H}^* dV = \bar{P}_m \quad \text{pertes moyennes magnétiques dans } V$$

De plus, on avait obtenu :

$$\frac{1}{4} \iiint_V \epsilon' \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV = \bar{T}_e \quad \text{énergie moyenne électrique dans } V$$

$$\frac{1}{4} \iiint_V \mu' \vec{H} \cdot \vec{H}^* dV = \bar{T}_m \quad \text{énergie moyenne magnétique dans } V$$

D'où la relation :

$$-j\frac{\omega}{2} \iiint_V [\epsilon'' \vec{E} \cdot \vec{E}^* - \mu'' \vec{H} \cdot \vec{H}^*] dV = -j\frac{\omega}{2} [4\bar{T}_e - 4\bar{T}_m] = 2j\omega [\bar{T}_e - \bar{T}_m]$$

Dans ces conditions, l'équation bilan s'écrit en utilisant la définition du vecteur de Poynting complexe donné ci-dessus :

$$-\iiint_V \frac{\vec{E} \cdot \vec{j}_a^*}{2} = [\bar{P}_J + \bar{P}_e + \bar{P}_m] + 2j\omega [\bar{T}_m - \bar{T}_e] + \iint_{\Sigma} \vec{P} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma$$

Or, nous venons de démontrer que la puissance moyenne rayonnée à travers Σ s'écrivait :

$$\bar{P}_R = \iint_{\Sigma} \frac{1}{2} \text{Re} [\vec{E} \wedge \vec{H}^*] \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma \quad (\text{watts})$$

Dans le cas général, $\vec{P} = \frac{1}{2} (\vec{E} \wedge \vec{H}^*)$ est complexe et il est alors très clair que le bilan proposé par l'équation ci-dessus est un bilan complexe portant donc d'une part sur les puissances actives (termes réels) et réactives (termes imaginaires). Dans ces conditions, on a :

$$\iint_{\Sigma} \vec{P} \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = \bar{P}_R + jQ_R$$

Le flux du vecteur de Poynting complexe à travers Σ est égal à la somme d'un terme réel à valeur moyenne non nulle qui est la puissance active en W traversant Σ , et d'un terme imaginaire à valeur moyenne nulle sur la période qui représente l'amplitude des échanges d'énergie réactive entre V et l'extérieur de V . De la même façon, compte tenu de la relation $P_a(t) = -\iiint_V \vec{E} \cdot \vec{j}_a \cdot dV$ qui donne la puissance instantanée $P_a(t)$, on aura

$\bar{P}_a + jQ_a = -\iiint_V \frac{\vec{E} \cdot \vec{j}_a^*}{2} dV$, relation qui définit la puissance active $\bar{P}_a(W)$ et la puissance réactive $Q_a(VAR)$ venant des sources du champ.

Ainsi, le bilan des puissances s'écrit :

$$\bar{P}_a + jQ_a = [\bar{P}_J + \bar{P}_e + \bar{P}_m] + \bar{P}_R + jQ_R + 2j\omega [\bar{T}_m - \bar{T}_e]$$

Cette relation se décompose suivant les deux relations :

$$\bar{P}_a = [\bar{P}_J + \bar{P}_e + \bar{P}_m] + \bar{P}_R \quad (\text{watts})$$

$$Q_a = Q_R + 2\omega [\bar{T}_m - \bar{T}_e] \quad (VAR)$$

Interprétation :

- puissances actives ou moyennes : les sources fournissent la puissance d'alimentation \bar{P}_a , la puissance \bar{P}_R qui va être rayonnée à l'extérieur de V à travers Σ est la différence $\bar{P}_R = \bar{P}_a$ - pertes totales dans V .
 $\bar{P}_R > 0$ c'est-à-dire sortant de V si $\bar{P}_a >$ pertes.

- puissances réactives : en ce qui concerne les puissances réactives, on remarque que :
 $2\omega \bar{T}_m$ représente la puissance réactive associée à l'énergie magnétique totale \bar{T}_m (joules) contenue dans V ;
 $(-2\omega \bar{T}_e)$ représente la puissance réactive associée à l'énergie électrique totale \bar{T}_e (joules) contenue dans V .

On peut alors construire les analogies suivantes.

L'énergie magnétique moyenne totale dans V est : $\bar{T}_m = \iiint_V \frac{1}{2} \mu' H_{\text{eff}}^2 dV$ (joules)

Pour une self pure L parcourue par un courant $i(t)$: $W_m(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$ (joules)

Si on considère une dépendance harmonique du temps : $W_m = \frac{1}{2} L I_{\text{eff}}^2$ (joules)

Calculons alors : $2\omega \bar{W}_m = \omega L I_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$
et comme $\sin \phi = 1$: $2\omega \bar{W}_m = Q_m$ (VAR).

D'où les analogies physiques :

<u>Champ magnétique</u>	<u>self pure</u>
- énergie moyenne totale	- énergie moyenne
$\bar{T}_m = \iiint_V \frac{1}{2} \mu' H_{\text{eff}}^2 dV$	$\bar{W}_m = \frac{1}{2} L I_{\text{eff}}^2$
- puissance réactive associée	- puissance réactive
associée	
$Q_m = 2\omega \bar{T}_m$	$Q_m = 2\omega \bar{W}_m$
<u>Champ électrique</u>	<u>Capacité pure</u>
- énergie totale moyenne	- énergie moyenne
$\bar{T}_e = \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon' E_{\text{eff}}^2 dV$	$\bar{W}_e = \frac{1}{2} C V_{\text{eff}}^2$
- puissance réactive associée	- puissance réactive
associée	
$Q_e = 2\omega \bar{T}_e$	$Q_e = 2\omega \bar{W}_e$

On justifie par cette analogie la puissance réactive globale du champ électromagnétique :

$$Q_{\text{em}} = Q_m - Q_e = 2\omega [\bar{T}_m - \bar{T}_e]$$

On pourra remarquer que si, dans un volume V, on obtient $\bar{T}_m = \bar{T}_e$, il y a résonance au sens de l'égalité des puissances réactives et, dans ce cas, on a $Q_a = Q_R$.

En résumé :

$$\bar{P}_a = -\frac{1}{2} \text{Re} \left[\iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J}_a^* dV \right]$$

$$\bar{P}_J = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J}_c^* dV$$

$$\bar{P}_e = \frac{\omega}{2} \iiint_V \epsilon'' \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV$$

$$\bar{P}_m = \frac{\omega}{2} \iiint_V \mu'' \vec{H} \cdot \vec{H}^* dV$$

$$\bar{P}_R = \frac{1}{2} \text{Re} \iint_{\Sigma} [\vec{E} \wedge \vec{H}^*] \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma ; \vec{n} \text{ normale extérieure à V sur } \Sigma$$

$$\begin{aligned}
Q_a &= -\frac{1}{2} \text{Im} \left[\iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J}_a^* dV \right] \\
Q_R &= \frac{1}{2} \text{Im} \left[\iint_{\Sigma} [\vec{E} \wedge \vec{H}^*] \cdot \vec{n} d\Sigma \right] = \frac{1}{2} \text{Im} \left[\iint_{\Sigma} \vec{P} \cdot \vec{n} d\Sigma \right] \\
Q_{em} &= 2\omega [\bar{T}_m - \bar{T}_e] \\
\bar{T}_e &= \frac{1}{4} \iiint_V \epsilon' \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV ; \bar{T}_m = \frac{1}{4} \iiint_V \mu' \vec{H} \cdot \vec{H}^* dV
\end{aligned}$$

5.5.5. Cas particulier : bilan des puissances dans un domaine sans source

Si le domaine V ne contient pas de sources du champ, soit $\vec{j}_a = \vec{0}$ en tous points de V , il vient les deux équations bilans :

$$0 = \bar{P}_j + \bar{P}_e + \bar{P}_m + \bar{P}_R ; 0 = 2\omega [\bar{T}_e - \bar{T}_m] + Q_R$$

La première équation montre que $\bar{P}_R < 0$: il est nécessaire qu'une puissance $|\bar{P}_R|$ entre dans V pour compenser les pertes totales dans le volume V .

On en déduit que si le domaine V est un domaine idéal sans pertes et s'il ne contient pas de sources de champ, on a $\bar{P}_R = 0$, ce qui signifie que si une puissance entre par une certaine partie de Σ , il en ressort une puissance égale sur le reste de la surface Σ .

Quant au bilan de puissance réactive, il s'établit en remarquant que la puissance réactive échangée à travers de la surface Σ compense les puissances réactives mises en jeu par les énergies électrique et magnétique des champs régnant à l'intérieur de V .

Cas particulier : si $\bar{T}_e = \bar{T}_m$ sur le volume V qui est alors résonant, la puissance Q_R échangée à travers Σ est nulle.