Electromagnétisme et Photonique

Anne VILCOT
Tan-Phu VUONG

Mars 2009

Chapitre 0 : Outils mathématiques

1. Généralités

1.1. Les grands noms de l'électromagnétisme

André Marie Ampère
Physicien français, né à Lyon en 1775 et mort à Marseille en 1836. Ses principales découvertes concernent l'électricité : loi des actions électrodynamiques, hypothèse des courants dans la matière. On lui doit les termes de courant et tension pour désigner ces grandeurs électriques.

Charles Augustin de Coulomb
Physicien français, né à Angoulème en 1736 et mort à Paris en 1806. On retiendra la loi de Coulomb en $1/r^2$ entre deux charges électriques, loi qu'il a établie expérimentalement et qui est l'un des modèles d'interaction les mieux vérifiés expérimentalement.

Michael Faraday
Physicien et chimiste anglais, né à Southwark en 1791 et mort à Hampton Court en 1876. Garçon de courses chez un bibliothécaire, il devient autodidacte en lisant de nombreux ouvrages scientifiques, notamment de chimie. Employé dans un laboratoire de chimie comme apprenti, il se révèle rapidement expérimentateur de génie. Il devient alors directeur du laboratoire et professeur de chimie. Ses contributions remarquables furent l'énoncé des lois de l'électrochimie et la découverte du benzène en 1824. En 1854, il énonce la célèbre loi de l'induction.

Carl Friedrich Gauss
Mathématicien, astronome et physicien allemand, né à Brunswick en 1777 et mort à Gottingen en 1855. Gauss est connu en physique pour avoir apporté, à partir de 1826, d'importantes contributions en optique et en électromagnétisme.

Heinrich Hertz
Physicien allemand, né à Hambur en 1857 et mort à Bonn en 1894. Il démontre en 1877 l'existence des ondes électromagnétiques, prévues par Maxwell, et fonde le domaine des télécommunications.

Gustav Robert Kirchhoff

Physicien allemand, né à Koenigsberg en 1824 et mort à Berlin en 1887. Il est surtout connu pour ses travaux en électricité, sur les lois des courants dérivés, lesquelles portent depuis son nom, ainsi que pour l'établissement de l'équation des télégraphistes.

James Clerk Maxwell

Physicien écossais, né à Edimburgh en 1831 et mort à Cambridge en 1879. C'est comme professeur d'université au King's College de Londres qu'il travaille sur l'électromagnétisme. Admirateur de Faraday, il parachève la synthèse de l'électromagnétisme en 1865 et en déduit une théorie de la lumière qui sera vérifiée par Hertz expérimentalement en 1887.

Georg Simon Ohm

Physicien allemand, né à Erlangen en 1789 et mort à Munich en 1854. Il découvre en 1827 la loi sur les circuits linéaires entre tension et courant. On a donné son nom à l'unité internationale de résistance.

John Henry Poynting

Physicien anglais, né à Monton près de Manchester en 1852 et mort à Birmingham en 1914. Il est surtout connu pour le théorème qui porte son nom sur l'énergie électromagnétique.

1.2. Les domaines de fréquences

Les phénomènes électriques ont été découverts très tôt dans l'histoire de l'humanité. Ils ont d'abord été objets de curiosité ou de crainte, puis d'expériences spectaculaires aux XVII^e et XVIII^e siècles.

Leur analyse scientifique entre 1785 et 1875 a conduit à l'élaboration d'une théorie cohérente de l'électricité dont la validité subsiste encore aujourd'hui sans modification essentielle.

Le concept d'onde électromagnétique est applicable des fréquences les plus faibles à celles les plus élevées présentes dans l'univers. Néanmoins, l'utilisation des ondes électromagnétiques à des fins de transmission d'informations reste contenue dans un domaine plus restreint du spectre électromagnétique.

f = 100 kHz à 300 MHz	λ = 1 à 10 m	Radiofréquences
f = 300 MHz à 40 GHz	λ = 1 à 10 cm	Microondes
f = 40 GHz à 1000 GHz	λ = 1 mm	Ondes millimétriques
f > 1 THz	λ = 10 µm	Infrarouge
f = 300 THz	λ = 1 µm	Visible

Nous pouvons remarquer que ce domaine est à la frontière entre 2 types de raisonnements : celui basse fréquence, propres aux circuits (résistances, capacités et inductances) et celui très haute fréquence, propre aux ultraviolets, rayons X, rayons gamma ...

Notre propos dans ce cours concernera plus particulièrement des domaines que l'on pourrait classer dans les thèmes des hyperfréquences et de l'optique. Ces thèmes sont en très forte activité du côté de la recherche, justement de par le développement extrêmement rapide des besoins et des possibilités dans le domaine des télécommunications.

1.3. Bibliographie

P.F. Combes, "*Microondes, Lignes, Guides et Cavités*", Editions Dunod, 1996.

P.F. Combes, "*Microondes, Circuits passifs, Propagation, Antennes*", Editions Dunod, 1997

F. Gardiol, "*Electromagnétisme*", Traité d'Electricité, volume 3, Editions Georgi, 1979.

J.P. Pérez, R. Carles, R. Fleckinger, "*Electromagnétisme, Fondements et applications*", Editions Masson, 1996.

S. Ramo, J.R. Whinnery, T. Van Duzer, "*Fields and waves in communication electronics*", John Wiley & Sons Inc, 1994.

S.E. Schwartz, "*Electromagnetics for Engineers*", Saunders College Publishing, 1990.

B.A. Saleh, M.C. Teich, "*Fundamentals of photonics*", Wiley, 1991.

Il ne s'agit pas d'une bibliographie qui se veut exhaustive, mais plutôt de compléments, pour ceux qui en ressentiraient l'envie et/ou le besoin.

2. Outils mathématiques

L'électromagnétisme (comme nous allons le voir) est régi par des relations mathématiques vectorielles. Pour pouvoir les traiter et les utiliser sans difficulté, nous allons avoir besoin d'outils mathématiques que nous allons rappeler ici brièvement.

Remarque : on travaillera dans ce cours majoritairement dans un système de coordonnées cartésiennes, sauf indication contraire.

2.1. Produit scalaire, produit vectoriel

$$\vec{A}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad \vec{B}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ Produit scalaire

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$ Produit vectoriel

2.2. Gradient, divergence, rotationnel, laplacien

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\Delta A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

opérateur nabla : $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\mathrm{div}\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A}$$

Remarques : $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\right) = 0 \ \forall \vec{A}$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\right) = \vec{0} \ \forall f$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\vec{A}\right) - \overrightarrow{\Delta A} \quad \forall \vec{A}$$

$$\frac{\partial\left(\mathrm{div}\vec{A}\right)}{\partial t} = \mathrm{div}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \text{ et } \int \left(\mathrm{div}\vec{A}\right)dx = \mathrm{div}\left(\int \vec{A}dx\right)$$

$$\mathrm{div}\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \mathrm{div}\left(\vec{A}\right) + \mathrm{div}\left(\vec{B}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{A}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{B}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(f + g\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(f\right) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(g\right)$$

2.3. Théorème de Stockes, théorème d'Ostrogradsky

Théorème de Stockes : $\oint_C \vec{A}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}.\overrightarrow{dS}$ où C est un contour fermé délimitant la surface quelconque S.

Théorème d'Ostrogradsky : $\iint_S \vec{A}.\overrightarrow{dS} = \iiint_V \mathrm{div}\vec{A} \ dV$ où S est une surface fermée délimitant le volume V.

3. Notation complexe

3.1. Notation sinusoïdale d'un vecteur

Les sources usuelles délivrent des signaux à spectre étroit, mais aucun générateur ne peut délivrer une raie monochromatique. Cependant, la théorie du champ électromagnétique est fondamentale en régime harmonique établi (monochromatique), on considèrera qu'elle est satisfaisante dans la plupart des cas réels.

La notation complexe est intéressante dès lors qu'on travaille avec des grandeurs variant dans le temps de manière sinusoïdale. En effet, la dépendance en fonction du temps des solutions des équations du champ étant connue, la méthode de séparation des variables s'applique et on est ramené à l'étude d'un problème ne dépendant que des coordonnées d'espace.

On considère un repère orthonormé Oxyz. On considère aussi le vecteur réel $\vec{V}(x,y,z,t)$.

$$\vec{V}(M,t) = \begin{pmatrix} V_x = a_x(x,y,z)\cos(\omega t + \Psi_x(x,y,z)) \\ V_y = a_y(x,y,z)\cos(\omega t + \Psi_y(x,y,z)) \\ V_z = a_z(x,y,z)\cos(\omega t + \Psi_z(x,y,z)) \end{pmatrix}$$

amplitude phase

ω est la pulsation du vecteur.

3.2. Définitions module, valeur efficace

Module : $\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ dépend de x, y, z, t

Valeur efficace $V_{eff}^2 = \left\langle \left|\vec{V}\right|^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right)$: moyenne sur une période $T = 2\Pi/\omega$.

Vecteurs dérivés : $$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \omega \vec{V}(t + T/4)$$ $$\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{V}$$

3.3. Vecteurs repères $\vec{p}$, $\vec{q}$, polarisation

On peut écrire $\vec{V_i}$ sous la forme :

$$V_i(x,y,z,t) = a_i(x,y,z)\cos(\Psi_i(x,y,z))\cos(\omega t) - a_i(x,y,z)\sin(\Psi_i(x,y,z))\sin(\omega t)$$

avec i = x, y ou z

On peut poser : $\begin{array}{l} p_i(x,y,z) = a_i(x,y,z)\cos\Psi_i(x,y,z) \\ q_i(x,y,z) = a_i(x,y,z)\sin\Psi_i(x,y,z) \end{array}$

d'où $\vec{V}(x,y,z,t) = \vec{p}(x,y,z)\cos(\omega t) - \vec{q}(x,y,z)\sin(\omega t)$

Remarque importante : Quelle que soit la forme du vecteur réel $\vec{V}$ (mais à condition qu'il varie sinusoïdalement avec le temps) :

$\forall t$, au point M, $\vec{V}$ est dans le plan fixe défini par $\vec{p}$ et $\vec{q}$, et tourne dans ce plan, en fonction du temps. Alors qu'a priori, il pouvait prendre n'importe quelle position dans l'espace.

3.3.1. Polarisation rectiligne

Si $\vec{p}$ et $\vec{q}$ sont colinéaires, le vecteur $\vec{V}$ est polarisé rectilignement le long du support de $\vec{p}$ et $\vec{q}$.

Démo : - Si $\vec{p}$ et $\vec{q}$ colinéaires, on peut écrire : $\vec{q} = k\vec{p}$ (k réel)

$\vec{V} = \vec{p}(\cos\omega t - k\sin\omega t)$ qu'il est possible d'écrire : $\vec{V} = \dfrac{\vec{p}}{\cos\Psi}\cos(\omega t + \Psi)$

soit $\vec{V}(x,y,z,t) = \vec{V_0}(x,y,z)\cos(\omega t + \Psi(x,y,z))$

Le vecteur $\vec{V}$ est polarisé rectilignement sur le support de $\vec{p}$ et $\vec{q}$.

3.3.2. Polarisation elliptique

Si $\vec{p}$ et $\vec{q}$ sont non-colinéaires, le vecteur $\vec{V}$ est polarisé elliptiquement dans le plan passant par M(x, y, z) et contenant les vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{q}$. Cette polarisation elliptique peut dégénérer en polarisation circulaire.

On ne restreint pas la généralité de l'étude en supposant que le trièdre de référence Oxyz soit tel que le plan xOy soit le plan ($\vec{p}$, $\vec{q}$) et que le vecteur $\vec{p}$ soit aligné sur Ox.

On a alors $\vec{V} = \vec{p}\cos(\omega t) - \vec{q}\sin(\omega t)$ avec $\vec{p} = \left|\begin{array}{l} p \\ 0 \\ 0 \end{array}\right.$ et $\vec{q} = \left|\begin{array}{l} q\cos\theta \\ q\sin\theta \\ 0 \end{array}\right.$

$$\vec{V} = \left|\begin{array}{l} V_x = p\cos(\omega t) - q\cos\theta\sin(\omega t) \\ V_y = \quad\quad\quad\quad - q\sin\theta\sin(\omega t) \\ V_z = 0 \end{array}\right.$$

En éliminant le temps t entre les 2 expressions, il vient :

$$V_x^2 q^2 \sin^2\theta + V_y^2\left(p^2 + q^2\cos^2\theta\right) - 2V_x V_y q^2 \sin\theta\cos\theta = p^2 q^2 \sin^2\theta$$

Il s'agit bien de l'expression d'une ellipse.

Remarque : sens de rotation sur l'ellipse de polarisation : $\vec{V} = \vec{p}\cos(\omega t) - \vec{q}\sin(\omega t)$

on a donc toujours : $\begin{array}{l} \vec{V}(t=0) = \vec{p} \\ \vec{V}(t=-T/4) = \vec{q} \end{array}$

donc $\vec{V}$ tourne de $\vec{q}$ vers $\vec{p}$.

3.3.3. Polarisation circulaire

Prenant l'expression de l'ellipse précédente et considérant le cas particulier p=q et $\theta=\pm\Pi/2$, il vient $V_x^2+V_y^2=p^2=q^2$. La polarisation elliptique a dégénéré en polarisation circulaire.

D'où les conditions d'obtention de la polarisation circulaire :

- vecteurs repères $\vec{p}$ et $\vec{q}$ égaux en module et perpendiculaires entre eux
- ou bien, composantes rectangulaires (sans le temps) du vecteur $\vec{V}$ doivent être égales et déphasées de $\pm\Pi/2$.

3.4. Vecteurs complexes indépendants du temps associés aux vecteurs réels à variation sinusoïdale avec le temps

3.4.1. Définition - Intérêt

Considérons le vecteur réel $\vec{V}$(x,y,z,t) :

$$\vec{V}(M,t) = \begin{cases} V_x = a_x(x,y,z)\cos\left(\omega t + \Psi_x(x,y,z)\right) \\ V_y = a_y(x,y,z)\cos\left(\omega t + \Psi_y(x,y,z)\right) \\ V_z = a_z(x,y,z)\cos\left(\omega t + \Psi_z(x,y,z)\right) \end{cases}$$

On peut écrire pour chaque composante (i=x,y,z) :

$$V_i = \mathrm{Re}\left[a_i(x,y,z)\exp\left(j\Psi_i(x,y,z)\right)\exp(j\omega t)\right].$$

Donc, si on définit le vecteur complexe $\vec{\mathcal{V}}$(x,y,z) associé au vecteur réel $\vec{V}$(x,y,z,t) par les relations :

$$\vec{\mathcal{V}} = \begin{vmatrix} \mathcal{V}_x = a_x(x,y,z)\exp\left(j\Psi_x(x,y,z)\right) \\ \mathcal{V}_y = a_y(x,y,z)\exp\left(j\Psi_y(x,y,z)\right) \\ \mathcal{V}_z = a_z(x,y,z)\exp\left(j\Psi_z(x,y,z)\right) \end{vmatrix}$$

on aura la relation de définition de $\vec{\mathcal{V}}$: $\vec{V}$ (x,y,z,t)=Re[$\vec{\mathcal{V}}$(x,y,z) exp(jωt)].

Les a_i peuvent être supposés réels >0. S'ils sont négatifs, on peut inclure le signe en ajoutant ±(2k+1)Π à Ψ_i. Les Ψ_i sont les arguments des composantes du vecteur complexe $\vec{\mathcal{V}}$ et la somme ($\omega t+\Psi_i$) est la phase de la composante V_i du vecteur réel $\vec{V}$.

Intérêt : Les équations de champ dépendent des quatre variables (x,y,z,t). La dépendance en ωt des solutions permet de séparer les variables et les équations de champ en employant les vecteurs complexes associés aux vecteurs réels ne dépendant que des trois coordonnées d'espace.

3.4.2. Remarque fondamentale

Représentation du vecteur complexe $\vec{\mathcal{V}}$:

Les trois scalaires complexes $\mathcal{V}_x, \mathcal{V}_y, \mathcal{V}_z$, définis ci-dessus peuvent être considérés comme les composantes du vecteur complexe $\vec{\mathcal{V}}$ sur les trois axes du trièdre. On peut écrire : $\vec{\mathcal{V}} = \vec{l}\mathcal{V}_x + \vec{m}\mathcal{V}_y + \vec{n}\mathcal{V}_z$, mais il est impossible de donner une représentation géométrique du vecteur complexe $\vec{\mathcal{V}}$ dans l'espace usuel à trois dimensions. Il faut toujours, après calcul sur les vecteurs complexes, revenir aux vecteurs réels qui, seuls, peuvent être représentés dans un système d'axes usuel.

Une assimilation abusive entre vecteurs réels et complexes peut conduire à des erreurs très grossières. Voir ci-après les opérations non linéaires sur les vecteurs : produit scalaire et produit vectoriel.

3.4.3. Relations entre le vecteur réel et le vecteur complexe associé

On rappelle : $\vec{V} = \vec{p}\cos(\omega t) - \vec{q}\sin(\omega t)$

Considérons le vecteur complexe $\vec{\mathcal{V}}(x,y,z) = \vec{p} + j\vec{q}$ et exécutons l'opération $\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{V}}\exp(j\omega t)\right]$, il vient $\mathrm{Re}\left[\vec{p}\exp(j\omega t) + j\vec{q}\exp(j\omega t)\right] = \vec{p}\cos(\omega t) - \vec{q}\sin(\omega t)$

Et donc, vecteur réel $\vec{V} = \vec{p}\cos(\omega t) - \vec{q}\sin(\omega t)$

vecteur complexe $\vec{\mathcal{V}}(x,y,z) = \vec{p} + j\vec{q}$

Vecteur complexe conjugué de $\vec{\mathcal{V}}$: $\vec{\mathcal{V}}^* = \vec{p} - j\vec{q}$.

3.4.4. Opérations sur les vecteurs complexes

3.4.4.1. Introduction

Les opérations linéaires sur les vecteurs complexes s'effectuent sans difficultés majeures. Mais, il faut prendre des précautions dans le cas des opérations non linéaires faisant intervenir des vecteurs complexes : voir ci-après multiplications scalaire et vectorielle. Le résultat de ces opérations est fondamental pour certains théorèmes d'électromagnétisme.

3.4.4.2. Opérations linéaires

a. Dérivation du vecteur complexe associé à un vecteur réel à variation sinusoïdale avec le temps

soit $\vec{\mathcal{V}} = \left| \begin{array}{l} \mathcal{V}_x = a_x \exp(j\Psi_x) \\ \mathcal{V}_y = a_y \exp(j\Psi_y) \end{array} \right.$ et $\vec{\mathcal{V}}' = \left| \begin{array}{l} \mathcal{V}'_x = \omega a'_x \exp(j(\Psi'_x + \Pi/2)) \\ \mathcal{V}'_y = \omega a'_y \exp(j(\Psi'_y + \Pi/2)) \end{array} \right.$

alors $\vec{V} = \left| \begin{array}{l} V_x = a_x \cos(\omega t + \Psi_x) \\ V_y = a_y \cos(\omega t + \Psi_y) \end{array} \right.$ et $\vec{V}' = \left| \begin{array}{l} V'_x = a'_x \cos(\omega t + \Psi_x + \Pi/2) \\ V'_y = a'_y \cos(\omega t + \Psi_y + \Pi/2) \end{array} \right.$

Donc si $\vec{\mathcal{V}}' = j\omega\vec{\mathcal{V}}$, alors $\vec{V}' = \partial\vec{V}/\partial t$

Dériver un vecteur réel à variation sinusoïdale avec le temps correspond à multiplier par $j\omega$ le vecteur complexe associé.

b. Interprétation de l'opération $\vec{n}.\vec{\mathcal{V}}$

Soient $\vec{n}$ le vecteur unitaire fixe d'une direction Δ et $\vec{\mathcal{V}}$ le vecteur complexe associé au vecteur réel $\vec{V}$.

$\vec{n}$ (α, β, γ) dans le trièdre Oxyz.

$\vec{\mathcal{V}}(\mathcal{V}_x, \mathcal{V}_y, \mathcal{V}_z)$, composantes de $\vec{\mathcal{V}}$.

$u = \vec{n}.\vec{\mathcal{V}} = \alpha\mathcal{V}_x + \beta\mathcal{V}_y + \gamma\mathcal{V}_z$.

Multipliant par $\exp(j\omega t)$ et prenant les parties réelles, il vient :

$\mathrm{Re}(u \exp(j\omega t)) = \alpha\mathrm{Re}(\mathcal{V}_x \exp(j\omega t)) + \beta\,\mathrm{Re}(\mathcal{V}_y \exp(j\omega t)) + \gamma\,\mathrm{Re}(\mathcal{V}_z \exp(j\omega t))$.

D'où la relation $\mathrm{Re}\left[\vec{n}.\vec{\mathcal{V}} \exp(j\omega t)\right] = \vec{n}.\vec{V}$

Règle : La condition $\vec{n}.\vec{\mathcal{V}} = 0$ est nécessaire pour que le vecteur réel $\vec{V}$ soit orthogonal à la direction fixe Δ de vecteur unitaire $\vec{n}$.

c. Interprétation de l'opération $\vec{n} \wedge \vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{V}}'$

Soient $\vec{\mathcal{V}} = \vec{p} + j\vec{q}$ et $\vec{V} = \vec{p}\cos(\omega t) - \vec{q}\sin(\omega t)$, expressions de $\vec{V}$ et du vecteur complexe associé, à l'aide des vecteurs repères $\vec{p}$ et $\vec{q}$.

Calculons $\mathrm{Re}\left[\vec{n} \wedge \left(\vec{p}\exp(j\omega t) + j\vec{q}\exp(j\omega t)\right)\right] = \vec{n} \wedge \left(\vec{p}\cos\omega t - \vec{q}\sin\omega t\right) = \vec{n} \wedge \vec{V}$

Donc $\vec{n} \wedge \vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{V}}'$ entraîne $\vec{V}' = \vec{n} \wedge \vec{V}$.

Règle : si le produit vectoriel $\vec{n} \wedge \vec{\mathcal{V}}$ est nul, le vecteur réel $\vec{V}$ est parallèle à la direction Δ de vecteur unitaire $\vec{n}$.

3.4.4.3. Opérations non linéaires sur les vecteurs complexes

On ne traitera que les deux cas très importants suivants :

- calcul du produit scalaire $\vec{V}_1 . \vec{V}_2$ et de sa valeur moyenne $\left\langle \vec{V}_1 . \vec{V}_2 \right\rangle$ à l'aide des vecteurs complexes associés $\vec{\mathcal{V}}_1$, $\vec{\mathcal{V}}_2$.

-calcul de produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ et de sa valeur moyenne $\left\langle \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \right\rangle$ à l'aide des vecteurs complexes associés $\vec{\mathcal{V}}_1$, $\vec{\mathcal{V}}_2$.

a. Produit scalaire $u = \vec{V}_1 . \vec{V}_2$

Remplaçant $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ par leurs expressions en fonction des vecteurs complexes associés, il vient :

$$u = \frac{1}{2}\left[\vec{\mathcal{V}}_1 e^{j\omega t} + \vec{\mathcal{V}}_1^{*} e^{-j\omega t}\right] . \frac{1}{2}\left[\vec{\mathcal{V}}_2 e^{j\omega t} + \vec{\mathcal{V}}_2^{*} e^{-j\omega t}\right]$$

$$u = \frac{1}{4}\left[\vec{\mathcal{V}}_1 . \vec{\mathcal{V}}_2^{*} + \vec{\mathcal{V}}_1^{*} . \vec{\mathcal{V}}_2 + \vec{\mathcal{V}}_1 . \vec{\mathcal{V}}_2 e^{2j\omega t} + \vec{\mathcal{V}}_1^{*} . \vec{\mathcal{V}}_2^{*} e^{-2j\omega t}\right]$$

D'où le résultat : $u = \vec{V}_1 . \vec{V}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{V}}_1 . \vec{\mathcal{V}}_2^{*}\right] + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{V}}_1 . \vec{\mathcal{V}}_2 e^{2j\omega t}\right]$.

Règle : Si le produit scalaire $\vec{\mathcal{V}}_1 . \vec{\mathcal{V}}_2$ de deux vecteurs complexes est nul, il n'est pas certain que la valeur instantanée du produit scalaire des vecteurs réels associés $\vec{V}_1 . \vec{V}_2$ soit nulle.

Valeur moyenne du produit scalaire : $\left\langle \vec{V}_1 . \vec{V}_2 \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{V}}_1 . \vec{\mathcal{V}}_2^{*}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{V}}_1^{*} . \vec{\mathcal{V}}_2\right]$.

Cette expression est fondamentale pour le calcul des densités d'énergie électromagnétique.

b. Produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

De la même façon que précédemment, en passant de la multiplication scalaire à la multiplication vectorielle, il vient :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{V}}_1 \wedge \vec{\mathcal{V}}_2^{\,*}\right] + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{V}}_1 \wedge \vec{\mathcal{V}}_2 e^{2j\omega t}\right]$$

Règle : si $\vec{\mathcal{V}}_1 \wedge \vec{\mathcal{V}}_2 = 0$, on peut avoir $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ non nul, en valeur instantanée.

Valeur moyenne du produit vectoriel :

on a $\left\langle \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{V}}_1 \wedge \vec{\mathcal{V}}_2^{\,*}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{V}}_1^{\,*} \wedge \vec{\mathcal{V}}_2\right]$

Cette expression est fondamentale pour le calcul de la valeur moyenne du vecteur de Poynting : $\left\langle \vec{P} \right\rangle = \left\langle \vec{E} \wedge \vec{H} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{H}}^{\,*}\right]$