Ondes planes en régime harmonique du temps
Correction

1 – $\vec{\text{rot}}\,\vec{\mathcal{E}} = -j\omega\mu_c\vec{\mathcal{H}}$

$\vec{\text{rot}}\,\vec{\mathcal{H}} = \sigma\vec{\mathcal{E}} + j\omega\varepsilon_c\vec{\mathcal{E}} = j\omega\left(\varepsilon_c + \dfrac{\sigma}{j\omega}\right)\vec{\mathcal{E}} = j\omega\varepsilon_{ca}\vec{\mathcal{E}}$

avec $\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon_c\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{B}} = \mu_c\vec{\mathcal{H}}$

$\text{div}\vec{\mathcal{D}} = 0$ d'où $\text{div}\vec{\mathcal{E}} = 0$

$\text{div}\vec{\mathcal{B}} = 0$ d'où $\text{div}\vec{\mathcal{H}} = 0$

2 – $\vec{\text{rot}}\,\vec{\text{rot}}\,\vec{\mathcal{E}} = -j\omega\mu_c\vec{\text{rot}}\,\vec{\mathcal{H}} = \omega^2\mu_c\varepsilon_{ca}\vec{\mathcal{E}}$

or $\vec{\text{rot}}\,\vec{\text{rot}}\,\vec{\mathcal{E}} = \vec{\text{grad}}\,\text{div}\vec{\mathcal{E}} - \vec{\Delta\mathcal{E}}$

soit $\Delta\vec{\mathcal{E}} + \omega^2\mu_c\varepsilon_{ca}\vec{\mathcal{E}} = \vec{0}$

3 – $\Delta\mathcal{V} + \omega^2\mu_c\varepsilon_{ca}\mathcal{V} = 0$ devient $\dfrac{f''}{f} + \dfrac{g''}{g} + \dfrac{h''}{h} = -\varepsilon_{ca}\mu_c\omega^2$

4 – Comme chacun des termes n'est fonction que d'une variable indépendante, il faut que les trois rapports du premier membre soient des constantes :

On peut poser $\dfrac{f''}{f} = (jk_{c1})^2$, $\dfrac{g''}{g} = (jk_{c2})^2$, $\dfrac{h''}{h} = (jk_{c3})^2$, où les k_{ci} sont des complexes, a priori.

5 – On a : $f'' - (jk_{ci})^2 f = 0$

soit $f(x) = f_0 e^{-k'_i x} e^{-jk_i x}$.

De même pour g(y) et h(z)

$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \exp\left[-\left(k'_1 x + k'_2 y + k'_3 z\right)\right]\exp\left[-j\left(k_1 x + k_2 y + k_3 z\right)\right]$

$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \exp\left[-\vec{k}'.\vec{r}\right]\exp\left[-j\vec{k}.\vec{r}\right]$

6 – $\vec{k}'$: vecteur d'affaiblissement

$\vec{k}$: vecteur d'onde

7 – SEA : $\vec{k}'.\vec{r} = \text{cte}$
SEP : $\vec{k}.\vec{r} = \text{cte}$

8 – Ici on cherche une onde plane homogène. Les plans d'onde sont SEA et SEP et ils sont définis par $\vec{r}.\vec{n} = \text{cte}$, donc $\vec{k}' = \pm\alpha\vec{n}$ et $\vec{k} = \pm\beta\vec{n}$.

9 – $j\vec{k}_c = \vec{k}' + j\vec{k} = \pm(\alpha + j\beta)\vec{n} = \pm\Gamma\vec{n}$

10 – Le vecteur d'onde indique la direction de la propagation. Il s'agit donc de la direction de $\vec{n}$, soit Oz.

11 – On peut écrire $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \exp\left[-j\vec{k}_c.\vec{r}\right]$, soit $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \exp\left[-\pm\Gamma z\right]$. La composante V ne dépend donc que de z. on aurait pu aussi raisonner sur la position du plan d'onde (qui est équiphase et équiamplitude) pour aboutir au même résultat.

12 – Puisque le champ électromagnétique est indépendant de x et de y, alors $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial}{\partial y} = 0$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{\mathcal{E}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} \\ 0 \end{vmatrix} = -j\omega\mu_c \begin{vmatrix} \mathcal{H}_x \\ \mathcal{H}_y \\ \mathcal{H}_z \end{vmatrix} \text{, donc } \mathcal{H}_z = 0$$

De même $$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{\mathcal{H}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \mathcal{H}_x \\ \mathcal{H}_y \\ \mathcal{H}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} \\ 0 \end{vmatrix} = -j\omega\varepsilon_{ca} \begin{vmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{vmatrix} \text{, donc } \mathcal{E}_z = 0$$

13 – $\frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial z^2} + \omega^2\mu_c\varepsilon_{ca}\mathcal{E}_x = 0$

$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial z^2} = (\pm\Gamma)^2 \mathcal{E}_x$, avec la relation de dispersion $\Gamma^2 = -\varepsilon_{ca}\mu_c\omega^2$

$\mathcal{E}_x = E_0 e^{-\Gamma z} + E_1 e^{+\Gamma z}$

Or, la propagation est dans le sens des z croissants, donc $E_1 = 0$

Soit $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_{x0} e^{-\Gamma z}$

De même $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_{y0} e^{-\Gamma z}$

14 – $\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} = -j\omega\mu_c \mathcal{H}_y$, soit $-\Gamma \mathcal{E}_x = -j\omega\mu_c \mathcal{H}_y$, soit encore $-\omega\sqrt{\varepsilon_{ca}\mu_c}\,\mathcal{E}_x = -j\omega\mu_c \mathcal{H}_y$

$$\frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}_y} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{ca}}{\mu_c}} = Z$$

De même $\frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{H}_x} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_{ca}}{\mu_c}} = -Z$

15 – $\mathcal{E}_x \mathcal{H}_x + \mathcal{E}_y \mathcal{H}_y = 0$, soit encore $\mathcal{E}_x \mathcal{H}_x + \mathcal{E}_y \mathcal{H}_y + \mathcal{E}_z \mathcal{H}_z = 0$

D'où $\vec{\mathcal{E}}.\vec{\mathcal{H}} = 0$

Mais attention, ce n'est pas parce que $\vec{\mathcal{E}}.\vec{\mathcal{H}} = 0$ qu'on a forcément $\vec{E}.\vec{H} = 0$. Il faut le démontrer.

$$\vec{E}.\vec{H} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}.\vec{\mathcal{H}}^*\right] + \frac{1}{2}\left[\vec{\mathcal{E}}.\vec{\mathcal{H}}e^{2j\omega t}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}.\vec{\mathcal{H}}^*\right]$$

Or $\vec{\mathcal{E}} = \left|\begin{array}{l}\mathcal{E}_x\\ \mathcal{E}_y\\ \mathcal{E}_z\end{array}\right.$ et $\vec{\mathcal{H}} = \left|\begin{array}{c}-\frac{\mathcal{E}_y}{Z}\\ \frac{\mathcal{E}_x}{Z}\\ 0\end{array}\right.$, Z étant réel, on a $\vec{\mathcal{H}}^* = \left|\begin{array}{c}-\frac{\mathcal{E}_y^*}{Z}\\ \frac{\mathcal{E}_x^*}{Z}\\ 0\end{array}\right.$

Donc $\vec{\mathcal{E}}.\vec{\mathcal{H}}^* = -\frac{1}{Z}\left[\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y^* - \mathcal{E}_y\mathcal{E}_x^*\right] = -\frac{1}{Z}\,j\,\mathrm{Im}\left(\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y^*\right) = -\frac{1}{Z}\,j\,\mathrm{Im}\left(\mathcal{E}_{x0}\mathcal{E}_{y0}^*\right)$

Donc $\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}.\vec{\mathcal{H}}^*\right] = 0$, soit $\vec{E}.\vec{H} = 0$

16 – On sait que $\beta = \omega\sqrt{|\varepsilon_{ca}||\mu_c|}\cos\left(\frac{\delta_{ea} + \delta_m}{2}\right)$. Ce qui donne, dans un milieu dans pertes : $\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$

La vitesse de phase vaut alors : $v_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \mathrm{cte}$

La vitesse de phase étant indépendante de la fréquence, le milieu n'est pas dispersif. Quelle que soit la fréquence du signal, celui-ci se propagera à la même vitesse.

17 – $\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{\mathcal{E}} = -j\omega\mu\vec{\mathcal{H}}\\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{\mathcal{H}} = j\omega\varepsilon\vec{\mathcal{E}} + \sigma\vec{\mathcal{E}} \approx \sigma\vec{\mathcal{E}}\\ \mathrm{div}\vec{\mathcal{D}} = 0\\ \mathrm{div}\vec{\mathcal{B}} = 0\end{array}\right.$

18 – $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{\mathcal{H}}\right) = -j\omega\mu\sigma\vec{\mathcal{H}}$

$\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{\mathcal{H}}) - \overrightarrow{\Delta\mathcal{H}} = -j\omega\mu\sigma\vec{\mathcal{H}}$

$\overrightarrow{\Delta\mathcal{H}} - j\omega\mu\sigma\vec{\mathcal{H}} = \vec{0}$

$\omega\mu\sigma = 2\pi f\mu\sigma = \dfrac{2}{\delta^2}$

$\overrightarrow{\Delta\mathcal{H}} - j\dfrac{2}{\delta^2}\vec{\mathcal{H}} = \vec{0}$

19 – $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\pi\sigma\mu f}}$ $\quad\left|\begin{array}{c} f - s^{-1} \\ \mu - VsA^{-1}m^{-1} \\ \sigma - Sm^{-1} \end{array}\right.$

$\delta - \left(Sm^{-1}VsA^{-1}m^{-1}s^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}} = m$

δ est proportionnelle à une longueur

δ=2,07µm

20 – $\dfrac{\partial^2\mathcal{H}_y}{\partial z^2} - j\dfrac{2}{\delta^2}\mathcal{H}_y = 0$ et $j = \left(\dfrac{1+j}{\sqrt{2}}\right)^2$

$\mathcal{H}_y(z) = Ae^{\left(\frac{1+j}{\delta}\right)z} + Be^{-\left(\frac{1+j}{\delta}\right)z}$

A=0 car la propagation est suivant les z croissants. On peut aussi dire que $e^{\frac{z}{\delta}}$ croît vers l'infini, ce qui n'est physiquement pas acceptable. D'où $\mathcal{H}_y(z) = \mathcal{H}_{y0}e^{-\left(\frac{1+j}{\delta}\right)z}$

21 – δ est l'épaisseur de peau. Après z = δ, il y a un affaiblissement en 1/e : le champ électromagnétique est quasiment nul au-delà de l'épaisseur de peau.

22 – Si $\sigma \to \infty$ $\delta \to 0$. Alors $\mathcal{H}_y(z) \to 0$. On obtiendrait le même résultat pour le champ électrique.

Donc le champ électromagnétique est nul dans un conducteur parfait.