

Probabilités et statistiques

INTRODUCTION

au 17ème siècle PASCAL et DE FERMAT ont basé leur travaux sur la Théorie des jeux. => À donné naissance à toutes la théorie combinatoire.

Au 20ème siècle, KOLMOGOROV à formalisé les statistiques pour arriver au formalisme moderne. Ses travaux sont basés sur la théorie de la mesure).

Notion intuitive de probabilité

- Sur 1D6, la probabilité d'obtenir un 5 est de $\frac{1}{6}$ uniquement si le dé est équilibré.
- Soit N lancers de 1D6 équilibré. La probabilités d'obtenir un 5 n'est valable que pour N grand.

MESURE ET PROBABILITÉS

Vocabulaire

Une Épreuve aléatoire $\Omega = \{\text{résultats possibles}\}$
 $\omega_p = \text{résultats élémentaires}$

exemple du dé

$$\omega_1 = 1, \omega_2 = 2$$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$A \subset \Omega$ événements = résultats possibles

$A =$ famille de A_i vérifiant 3 règles :

- $\Omega \in A$
- $\forall A_i \in A, C_{\Omega}^{A_i} \in A$
- $\forall A_i \in A, i \in A_i \in A$

L'ensemble forme une tribu A

Définition

On associe à chaque $A_i \in A$ un nombre \equiv probabilité

$$p : A \rightarrow [0, 1]$$

$A_i \rightarrow p(A_i) = \text{probabilité de réaliser } A_i \text{ sur une épreuve.}$

P vérifie 3 règles:

$$A_i \in A, p(\emptyset) = 0 \leq p(A_i) \leq 1 = p(\Omega)$$

$$A_i \in A, p(C_\Omega A_i) = 1 - p(A_i)$$

$$A_i \in A, i \in I \quad p\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} p(A_i)$$

ssi les A_i sont 2 à 2 disjoints.

exemple

dé à 6 faces

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ A_1 &= \{\Omega, \emptyset\} \\ A_2 &= \{\Omega, \emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\} \\ A_3 &= \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 2\}, \{1, 4, 5, 6\}\} \\ (\Omega, A, p) &\equiv \text{espace probabilisé}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_i \text{ et } A_j \text{ incompatible} &\quad p(A_i \cap A_j) = 0 \\ A_i \text{ et } A_j \text{ indépendants} &\quad p(A_i \cap A_j) = p(A_i) \times p(A_j) \\ \text{Probabilité inconditionnelle} &\quad p(A_i \mid A_j) = \frac{p(A_i \cap A_j)}{p(A_j)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{proba } A_i \text{ conditionnelement à } A_j \\ A_i \text{ sachant } A_j\end{aligned}$$

Loi des probabilités totales

partition (A_i) de $\omega \in A \rightarrow \bigcup_i A_i = \Omega, \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$

$$\forall B \in A, p(B) = \sum_{i \in I} p(B \mid A_i) p(A_i)$$

Formules de Bayes

Partition (A_i) de Ω : $\forall B \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} p(A_k | B) &= \frac{p(B|A_k)p(A_k)}{\sum_i p(B|A_i)p(A_i)} \\ &= \frac{p(A_k \cap B)}{p(B)} \end{aligned}$$

$B = \cup_i (B \cap A_i) \equiv$ partition de B.

$$\rightarrow p(B) = \sum_i p(B \cap A_i) = \sum_i p(A_i | B)p(A_i)$$

Propriété de la mesure de proba

$\forall A_i$ et A_j disjoints $p(A_i \cap A_j) = p(A_i) + p(A_j)$

Dans le cas général :

$$p(A_i \cap A_j) = p(A_i) + p(A_j) - p(A_i \cup A_j)$$

Voir schéma 1

Exercice

Je cherche mon cours, que j'ai rangé dans mon bureau avec une probabilité p. Le bureau possède 3 tiroirs semblables.

- J'ouvre le 1er tiroir ... en vain
- j'ouvre le 2ème tiroir ... en vain

Quelle est la probabilité de le trouver dans le 3ème tiroir ?

Soit A le cour dans le 3ème tiroir.

Soit B le cour ni dans le 1er, ni dans le 2ème.

$$\begin{aligned} p(A | B) &= \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \\ &= \frac{p(A)}{p(B)} \text{ car } A \text{ est compris dans } B \end{aligned}$$

Au départ : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_0\}$

avec ω_0 = pas dans le bureau.

ω_i = dans le tiroir i ($i = 1, 2, 3$)

La tribu utile sur cet exemple :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\Omega, \emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_0\}, \dots\} \\ A_2 &= \{\Omega, \emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_0\}, \{\omega_0\}, \{\omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}\} \end{aligned}$$

Pour A_2 , les probabilités sont respectivement de $\{1, 0, \frac{2}{3}, 1-p+\frac{p}{3}, 1-p, \frac{p}{3}, p, 1-p+\frac{2p}{3}\}$

$$A'_2 = \{\{\omega_3, \omega_0\}, \emptyset, \{\omega_3\}, \{\omega_0\}\}$$

VARIABLE ALEATOIRE RÉELLE CONTINUE

Soit une variable aléatoire x à valeurs sur \mathbb{R}

$$\Omega = \mathbb{R}$$

$$A_i \subset \Omega$$

$$A = \{A_i\} = \text{tribu}$$

Les A_i de base sont $] -\infty; x] \hookrightarrow \text{tribu Borclienne} \equiv \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

Fonction de répartition de la variable aléatoire x

$$F_x : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \\ x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{proba}(x \in] -\infty, x])$$

Il existe 3 types de variables aléatoires.

- continue : F_x est continue. **cf fig 2**
- discrete : F_x est continue par morceaux. **cf fig 3**
- mixte : (ex: temps d'attente à un feu) **cf fig 3**

propriétés de F_x :

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$F_x(-\infty) \leq F_x(x) \leq 1 = F_x(+\infty)$$

$$F_x \text{ est croissante}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$$

$$F_x(b) - F_x(a)$$

$$] -\infty, b] -] -\infty, a]$$

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(u) du$$

fct répartition

$$f_x(x) = \frac{dF_x}{dx} \text{ (au sens des distributions)}$$

Densité de probabilité $f_x = \frac{dF_x}{dx} \geq 0$.

f_x est sommable : $\int_{\mathbb{R}} f_x(x) dx = 1 \rightarrow \hat{f}_x$ existe (le chapeau correspond à la transformée de Fourier).

$$\begin{aligned} \text{La probabilité de } (x \in]a, b) &= F_x(b) - F_x(a) \\ &= \int_a^b f_x(x) dx \end{aligned}$$

exemple

Loi uniforme sur $[a, b]$, avec $b > a$.

f_x est constante sur $[a, b]$, et nulle ailleurs

cf ex 5

Loi de Gauss

C'est la même chose que la loi normale $N(m, \sigma^2)$. $f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$

cf fig 6

NB : $F_x(x) \rightarrow$ table de loi

Loi de Cauchy ($a > 0$)

$$\begin{aligned} f_x(x) &= \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2} \\ F_x(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{a} \end{aligned}$$

Espérance mathématique d'une variable aléatoire x de densité de probabilité f_x

$$E\{x\} = \int_{\mathbb{R}} x f_x(x) dx$$

NB : peut ne pas exister.

exemple : Cauchy $E(x) = +\infty$

$$E\{g(x)\} = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_x(x) dx$$

La fonction g doit être mesurable \sim continue par morceaux, en particulier :
 $g(x) = x^n$

$$E(x^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n f_x(x) dx$$

On appelle cette fonction un moments d'ordre n .

$n = 1 \rightarrow$ moyenne de x

$n = 2 \rightarrow$ dispersion de x

Variance de x : $E\{[x - E(x)]^2\} = \text{var}(x)$ (NB: la partie entre crochet est une variable aléatoire x centrée).

$$\begin{aligned} \text{var}(x) &= E(x^2) - E^2(x) \\ &= E\{x^2 - 2xE(x) + E^2(x)\} \\ &= E(x^2) - 2E(x)E(x) + E^2(x) \\ &= E(x^2) - E^2(x) \end{aligned}$$

NB : E est un opérateur binaire.

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{\mathbb{R}} x f_x(x) dx \\ E(ax + b) &= \int_{\mathbb{R}} (ax + b) f_x(x) dx \\ &= a \int_{\mathbb{R}} x f_x(x) dx + b \int_{\mathbb{R}} f_x(x) dx \end{aligned}$$

Inégalité de Bienaginé - Chebychev

Variable aléatoire x de densité de probabilité f_x . La probabilité $(|x - E(x)| > a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\equiv \text{var}(x) \\ \sigma &\equiv \sqrt{\text{var}(x)} \end{aligned}$$

σ est l'écart type.

Cf démo dans le poly

Changement de variable

v.a.x de la loi connue f_x .

- Loi bijection croissante :

$$y = h(x)$$

$h \equiv$ continue par morceaux

cf fig 7

$$\begin{aligned}
F_y(y) &= p(y \leq y) \\
&= p(x \leq h^{-1}(y)) \\
&= F_x(h^{-1}(y)) \\
F_y(y) &= \frac{d}{dy} F_y(y) \\
&= \frac{d}{dx} F_x(h^{-1}(y)) \frac{dx}{dy} h^{-1}(y) \\
&= f_x(h^{-1}(y)) \frac{dx}{dy}
\end{aligned}$$

DISCRETE

VECTORIELLE

REGRESSION

THEOREMES AUX LIMITES

$$x^2 = 3$$

$$y^3 = 3_2$$

ESTIMATION PARAMÈTREQUE

TESTS D'HYPETHÈSES

Références

BASS : Éléments de calcul des probabilités MASSON VENTETSEL : Théorie des probabilités MIR RÉNYI : Calcul des probabilités MASSON (I.GABAY)
JAFFARD : Méthodes de la statistique MASSON Série SCHAUM chamilo