1,2 LOGIKA, 0-rend, 1-rend

Ítélet-kalkulus

ítéletváltozó $\{x_1 \dots x_n\} = Var$

formula $\forall$ $x \in Var \to x \in Form$

$\exists$ $\varphi \in Form \to \neg\varphi \in$ ✓

$\neg$ $\varphi \to \theta$, $\varphi \wedge \theta$, $\varphi \vee \theta$ form

precedencia:
1. negáció $\neg$
2. konjunkció $\wedge$
3. diszjunkció $\vee$
4. implikáció $\to$

interpretáció $f: Var(\varphi) \to \{i, h\}$

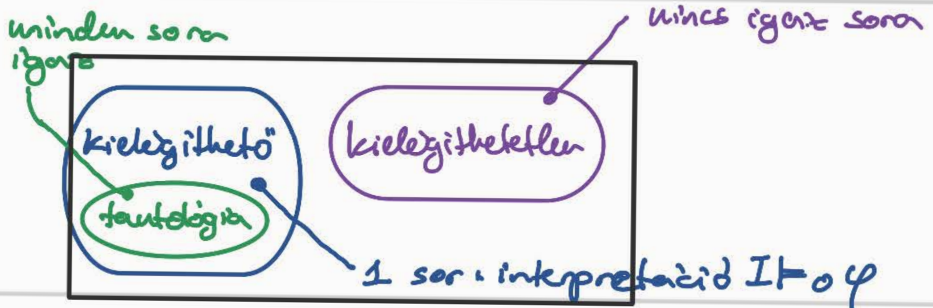
változó kiértékelés

igazságérték $x \in Var: \mathcal{B}_I(x) := I(x)$

ítélettábla | változók

interpretáció | i/h

Szemantika



$\top$: tautológia

$\perp$: kielégíthetetlen

KNF

φ kielégíthetetlen $\Leftrightarrow$ $\neg\varphi$ tautológia

$\mathcal{F} \models_0 \varphi \Leftrightarrow \mathcal{F} \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlen

literál $\to x, \neg x$

KONJUKTÍV ($\wedge$)

klóz = elemi diszjunkció $l_1 \vee l \dots l_n$ ahol literálpárok.

KNF = (klóz) $\wedge$ (klóz)

$x \vee \neg y \vee z$ = klóz, KNF

DNF

Minden φ formulához megadható DNF / KNF

érdemes kivont alakra hozni

1) $\to$ eliminálás $\varphi \to \psi$ ~. $\neg\varphi \vee \psi$

2) $\to$ $\neg$ csak ítéletváltozó előtt (DeMorgan)

3) $\to$ formula 2 szintűvé lapítása (Disztributivitás)

Ha $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ akkor $\mathcal{F} \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlen $\Rightarrow F_1 \wedge F_2 \wedge \neg\varphi$

Rezolúció

C_1 C_2 1 db komplemens literálpár.

$C_1 = C_1' \vee l_1$ és $C_2 = C_2' \vee l_2$. (l_1 komp lit l_2)

$res(C_1, C_2) := C_1' \vee C_2'$ rezolúció

$res(l_1, l_2) := \square$ (hamis)

klózhalmaz kielégíthetetlen $\Leftrightarrow$ S-ből véges sok lépésben levezethető

$x \vee y$, $\neg y \vee z \to x \vee z$

x, $\neg x \to \square$

$x \vee y$, $\neg x \vee \neg y \to$ ↯

fő logikai összekötő

2 Elsőrendű logika

Pred predikátum

Func függvény

Cnst konstans

Ind individuumváltozó

$\exists$ egzisztenciális, $\forall$ univerzális – kvantor

$x \in Ind \to x \in Term$

$c \in Cnst \to c \in Term$

$f \in Func \to t_1 \dots t_n \in Term$

$p(t_1 \dots t_n) \in Form \leftarrow Form \to$ atomi form

$\varphi \in Form \to \neg\varphi \in Form$

$\varphi \in Form, x \in Ind$ $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$ $\in Form$

$\neg\varphi \wedge (\varphi \to \theta)$

φ részformula $\varphi \to \theta$ szerkezeti for

Arítás Interpretáció

$f(x, f(a, x))$ függvény $\to$ Ind

$p(x, y)$ predikátum $\to$ Interpretáció

$I = \langle U, I_{Pred}, I_{Func}, I_{Cnst} \rangle$

univerzum $p^I \subseteq U^{ar}$ $f^I: U^{ar} \to U$ $c^I \in U$

κ változókiértékelés, $Ind \to U$

igazságérték $|\neg\varphi|^{I,\kappa}$

$|\forall x\varphi|^I \to$ minden x-re

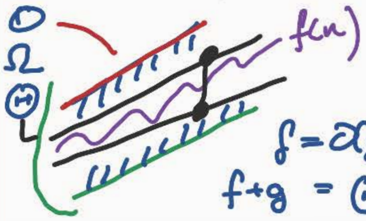
$|\exists x\varphi|^I \to$ legalább 1 x-re

(I, κ) értékelés $\to \{I, H\}$

elsőrendű következmény

végtelen keresési tér

2,3 big O, TG

Kötöttség Nagyságrend	kötött, ha x φ $\exists x\varphi$ vagy $\forall x\varphi$. Ha nincs így, akkor szabad φ zárt: $\lvert\varphi\rvert^{1}$ is elég $\lvert\varphi\rvert^{1,K}$ helyett kötött → zárt ~~kötött~~ szabad → nyitott	Fv-k aszimptotikus nagyságrendje  $f,g = O(h)$ $f+g = O(h)$ $f = O(g) \Rightarrow c\cdot f = O(g)$ $f+g = \Theta(\max\{f,g\})$
ISM 3 Ismétlés bigO	$G = \langle N, T, P, S \rangle$ N = nemterminális P = szabályrendszer T = terminális S = kezdőszimbólum $\in N$ 0...3 nyelv: rekurzívan felsorolható, reguláris 0...3 grammatikai: reguláris	$\exists \lim f/g$ határérték $f/g \to +\infty$: $f(n) = \Omega(g(n))$ $f/g \to c$: $f(n) = \Theta(g(n))$ a másik $f(n) =$ nem lesz $f/g \to 0$: $f(n) = O(g(n))$ polinom esetén $p(n) = \Theta(n^k)$
Ismétlés	$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$ szintetizáló a grammatika automata analizáló rendszer reguláris kifejezéssel kevesebb nyelvet lehet leírni. veremautomata, DVA, NDVA	$p(n)$ $(c>1)$: $p(n) = O(c^n)$ de $p(n) \neq \Omega(c^n)$ $\log_a n = \Theta(\log_b n)$ $(a,b>1)$ $\log n = O(n^c)$ de $n \neq \Omega(n^c)$ $d^n = O(c^n)$ de n $\Omega(c^n)$

	$\mathcal{L}_3$	$\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_3$	$\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2$
$\mathcal{L}_3$ vs 2 vs 1	7-el osztható $\{u \mid aabb \subseteq u\}$	$\{a^n b^n\}$ helyes ()-k	$\{a^n b^n c^n\}$ $\{uu \mid u \in \{a,b\}^*\}$

Parciális algoritmus: "nem" példányokon nem szükséges a terminál!

eldöntési probléma kimenete I, H
számítási probléma
$I = N \times N$, $O = N$
az összeadás!

Ha $\forall$ terminál $L(P)$+ talál..., akkor P algoritmikusan megoldható

3 Church-Turing Tézis	Church-Turing tézis $\forall$ formalizálható, algoval megoldható probléma ⇔ megoldható Turing géppel $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ $q_i, q_n, q_0 \in Q$ $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$ $\delta: (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$ STATE READ → STATE WRITE
Konfiguráció-átmenet	uqv → konfigurációja q_i → elfogadó, q_n → elutasító } megállási konfiguráció $u, v \in \Gamma^*$ és $v \neq \varepsilon$ $q \in Q$ egylépéses konfigurációátmenet $\vdash$ $\delta(q,a)$ $= r,b,R \to uqav \vdash ubrv'$ $= r,b,S \to uqav \vdash urbv$ $= r,b,L \to uqav \vdash u'rcbv$
Többlépéses konfiguráció átmenet	$\vdash^*$ többlépéses k.átmenet $\vdash^* \subseteq C_M \times C_M$. Reflexív, tranzitív lezárt $C \vdash^* C' :=$ ha $C = C'$ vagy $\exists n>0 \wedge C_1 \ldots C_n \in C_M$: $\forall i \leq n-1$-re $C_i \vdash C_{i+1}$. Valamint $C_1 = C$ és $C_n = C'$ C_1 C_k C_{k+1} C_n

TG által felismert nyelv
$L(M) = \{u \in \Sigma^* \mid q_0 u \sqcup \vdash^* x q_i y$ valamilyen $x, y \in \Gamma^*\}$

Turing felismerhető $L \subseteq \Sigma^*$ ha $L = L(M)$

Nyelv eldönthető: $\exists$ TG, $L = L(M)$ és $\forall$ bemeneten megállási konf-ba jut.

3,4 R, RE, TG

R RE

$RE = \{ L \mid \exists M$ TG, amelyre $L(M)=L \}$ Rekurzívan felsorolható

$R = \{ L \mid \exists M$ TG amely RE és minden inputra megáll$\}$ Rekurzív

$R \subseteq RE$

eldönti > felismeri

Időkorlátos M TG, ha $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\forall u \in \Sigma^*$ inputra legfeljebb $f(|u|)$ a futási ideje!

4 k-Szalag

Többszalagos TG — több szalag üres eleinte

konfiguráció $(q, u_1 \dots u_k, v_k) \to$ állapot módosul — kezdőkonfig!

$a_1 \dots a_k / b_1 \dots b_k, D_1 \dots D_k$ függvény

$q \to r$

$\delta : (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L,S,R\}^k$

k-szalagos TG $\vdash$, $\vdash^*$ reflexív, tranzitív

$C = (q, u_1, a_1 v_1 \dots u_k, a_k v_k)$

$R \Rightarrow u_i' = u_i b_i \quad v_i' = v_i \; (v \neq \sqcup)$

$S \Rightarrow u_i' = u_i \quad v_i' = b_i v_i \quad \boxed{C \in \Gamma}$

$L \Rightarrow u_i' = u_i c \quad v_i' = c b_i v_i$

k-szalag TG, egyirányú TG

két TG ekvivalens, ha azonos nyelvet ismernek fel.

$M_k \xrightarrow{} M_1$ (k-szalag → 1szalag)

$f(n)$ időigény — $O(f(n)^2)$ időkorlátos

$\Omega(n) = f(n)$

A szimuláció a fejek helyett $\boxed{\hat{}}$-s változattal történik. $\hat{a}bc\hat{a}$ — két fej szimulálása

Egy irányban végtelen TG — nem tud leesni

$M_1 \to M_{egyirányú}$

speciális szabály összekötni

NTG

Nemdeterminisztikus TG

$\delta : (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L,S,R\})$

$\mathcal{P}$ akárhány rendezett 3-ast rendelhet hozzá → akár üreset is

$\vdash$ átmenet módosul:

NTG

$(r,b,R) \in \delta(q,a) \to uqav \vdash ubrv'$ $(v' = [v=\varepsilon \, ? \, \sqcup : v])$

Többlépéses k.átmenet $\vdash^* \subseteq C_M \times C_M$

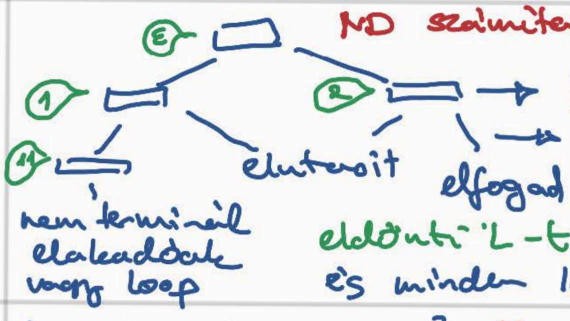
Felismert nyelv $L(M) = \{ u \in \Sigma^* \mid q_0 u \sqcup \vdash^*$ valamely $x, y \in \Gamma^*$, $y \neq \varepsilon$-ra$\}$

Több számítás lehet van szóra.

→ Ha 1 is jó, már elfogad

ND. Számítási fa

ND számítási fa



→ $|\{C' \mid C \vdash C'\}|$ db gyereke

→ $\{C' \mid C \vdash C'\}$ gyerekei

eldönti L-t ha $\forall$ számítási fa véges, és minden levele elfogadó vagy elutasító

Shortlex és NTG⇒TG

$X = \{x_1 < x_2 < x_3 \dots\}$ Hossz-lexikografikus rendezés

$\forall$NTG $f(n)$ időkorláttal $\Rightarrow \exists$ TG $2^{O(f(n))}$

szelektor

NTG szimulálás:
- READONLY bemenet, olvasás
- szimuláció
- parciális szimuláció

mindig leszimulál egy szelektort, hogy az a változat terminál-e. shortlex sorrendben

5, 6 TG, Á'Hó, Rice, PMP, CF

Számosság

$|A| = |B|$ ha $\exists$ bijekció

$|A| > |B|$ ha $B \to A$ injekció, de nem bijekció

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ → megszámlálhatóan ∞

(természetes sz.) (átlós) (p/q tört) $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$

$|\mathbb{R}| = |(0,1)| = tg(\pi(x-\frac{1}{2}))|_{(0,1)}$ → kontinuum számosság

$|\mathbb{R}| = (a,b) = |[c,d]| = \mathbb{R}^n$

Halmazok számossága

$|\mathbb{N}| = |\{0,1\}^*| \neq |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$

$|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |\{L \mid L \subseteq \{0,1\}^*\}| = |[0,1)|$

biz: Cantor-féle átlós módszer

$\{0,1\}$ felett → több nyelv mint szó!

$\forall$ Halmazra: $\mathcal{P}(H) > H$

végtelen sok számosság $\exists$. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = |\mathbb{R}|$

karakterisztikus sorozat

$b_L = (b_1 \dots b_c)$ ahol

$b_i = 1 \iff w_i \in L$

$\mathcal{P}$ = hatványhalmaz

$\mathcal{P}(\{0,1\}^*) = \{L \mid L \subseteq \{0,1\}^*\}$

TG elkódolása

tfh: $\Sigma = \{0,1\}$

M kódja: $\langle M \rangle$ $\quad$ $\langle M, v \rangle = \langle M \rangle 111 w$

$M := (Q, \{0,1\}, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n)$

$(p_1 \dots p_k)$, $\{X_1 \dots X_m\}$ elkódolt TG

$k \geq 3$ $\quad$ $q_0 \dots q_i, q_n$

$m \geq 3$ $\quad$ $0, 1, \sqcup, \dots$

$\exists$ nem TG kódolható L

$\exists L \notin RE$

Lásd: ilyen $= \{w_i \mid w_i \notin L(M_i)\}$

átlós módszerrel

Univerzális TG: L_u felismer, nem dönt el!

$L_u \notin R$. $\quad$ h szalag: input, elkódolt TG, állapot, segédsz.

$L_u \in RE$.

R és RE tulajdonságai

Ahol $L \subseteq \Sigma^*$: $\bar{L} := \{u \in \Sigma^* \mid u \notin L\}$

L és $\bar{L} \in RE \to L \in R$

RE nem zárt komplementerre (pl: $L_u = L \in RE \setminus R$)

$L \in R \to \bar{L} \in R$

$M := (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, q_i, (q_n))$ kiszámító TG

$f: \Sigma^* \to \Delta^*$ szófv. Ha $\forall \Sigma^*$-re megáll. akkor $f(u) \in \Delta^*$ a kimenet

Visszavezetés + TG megállás

$L_1 \subseteq \Sigma^*$ visszavezethető $L_2 \subseteq \Delta^*$-ra $\iff \exists f: \Sigma^* \to \Delta^*$ hogy $w \in L_1 \iff f(w) \in L_2$.

$L_1 \leq L_2$ → tranzitív

Ha $L_1 \leq L_2 \wedge L_2 \in R(E) \to L_1 \in R(E)$

$L_1 \leq L_2 \wedge L_1 \notin R(E) \to L_2 \notin R(E)$

R és RE-re is

L_{halt}: $L_u \leq L_h \notin R$

↳ megállási probléma $\quad L_{halt} \in RE$

6 eldönthetetlen (RE) TG:

- $P = \{\emptyset\}$
- $P = \{P \mid$ véges$\}$
- környezetfüggetlen $\quad (\varepsilon \in L)$
- elfogadja-e az üres szót.

Rice Tétel + PMP

6 RE rekurzívan felsorolható nyelv.

$\mathcal{P} \subseteq RE$ → tulajdonság

$\mathcal{P} = \emptyset$, $\mathcal{P} = RE$ → triviális tul.

!trivi → $L_P \notin R$

$L_{PMP} = \{\langle D \rangle \mid D$-nek van megoldása$\} \notin R$

Poszt Megfelelkezési Probléma

$D = \left\{ \frac{u_1}{v_1} \dots \frac{u_n}{v_n} \right\}$ cél: dominókészlet alsó és felső részein ugyanaz a szó legyen kirakva véges hosszú kirakás. Dominókat $0..n^x$ lehet használni. $\quad L_u \leq L_{PMP}$

$L_{MPMP} \leq L_{PMP}$ és $L_u \leq L_{PMP}$

Környezetfüggetlen grammatika

CF = környezetfüggetlen (G_2)

$L_{ECF} \notin R \to L_{PMP} \leq L_{\overline{ECF}}$

Egyértelmű

$G_A = \{A, \{A\}, \Sigma \cup \Delta, P_A\} \to \overline{L(G_A)}$ CF.

$\quad\;\; B \;\; \{B\} \qquad\quad P_B \qquad\; G_B$ CF.]is

D.Veremautómata zárt a komplementerre.

$\exists$VA ami: $L(G_A)$-t felismeri.

eldönthetetlen $G_{1,2}$ CF grammatikákról:

- $L(G_1) \cap L(G_2) \stackrel{?}{=} \emptyset$
- egyenlőek
- részhalmaz (tartalmazás)
- $L(G_1) = \Gamma^*$ valamely Γ-ra.

7, 8 $\alpha_{0..3}$, LKA, $P \stackrel{?}{=} NP$

Problémák nullad + első rendű logikában

nulladrendű eldönthető
- φ kielégíthető/hetetlen
- φ tautológia
- $\varphi \sim_0 \psi$
- $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ (szemantikus köv)

$L_{AMP} \leq$ Validitypred

UnsatPred $\in RE$ ←

elsőrendű eldönthetetlen $\notin R$

VALIDITYPRED $= \langle\varphi\rangle \mid \varphi$ logikailag igaz

UNSAT — $= \langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthetetlen

SAT — $=$ kielégíthető

EQUIV — $= \langle\varphi,\psi\rangle$ $\varphi \sim \psi$ igaz

CONS — $= \mathcal{F} \models \varphi$

$\langle\varphi\rangle := \varphi\{0,1\}$ feletti kódolása

$\overline{UNSAT} =$ SATPRED → SatPred $\notin RE$

α_0 és NTG, α_1 és LKA

$\forall G$ grammatikához $\Longleftrightarrow$ $L(G)$-t felismerő NTG

TG: TG bemenete readonly; grammatika szabályai readonly; α Mondatforma

↳ G-hez TG is megadható

Minden M TG-hez $\Longleftrightarrow$ $L(M)$-et generáló Gr.

Lineárisan korlátolt automata $(\Sigma \cup \{\rhd, \lhd\})^*$

benet $\rhd \frown \lhd$

NTG, korlátolt tárral

G-hez $\Longleftrightarrow$ LKA

$\alpha_1 \subset R$ (L_{LKA}-ától) Ha A LKA $\Rightarrow$ eldönthető

R, RE, Chomsky nyelvosztály

α_3 — DVA, reguláris, NDVégesAutomata

— — Det. Verem A

α_2 — Veremautomata

α_1 — LKA

— R TG ami minden inputra megáll

α_0 RE TG, NTG

szigorúbb ↑

8

TIME$(f(n)) = \{L \mid L$ eldönthető időkorlátos det. TG$\}$

NTIME$(f(n)) = \{L \mid L$ eldönthető időkorlátos NTG$\}$

NTIME$(f(n)) =$ TIME$(2^{O(f(n))})$

8

Bonyolultságelmélet R-beli problémáik

$P \subseteq NP$ (tipp $P \neq NP$)

NP ↦ polinom időben ellenőrizhető

polinom időben kiszámítható

↳ $\forall$ időkorlátos TG: $f: \Sigma^* \to \Delta^*$

polinom időben visszavezethető

↳ $L_1 \subseteq \Sigma^*$ $L_2 \subseteq \Delta^*$-re, ha $\exists$ ilyen, hogy: $w \in L_1 \Longleftrightarrow f(w) \in L_2$

$L_1 \leq_p L_2$

$f(L_1) \subseteq L_2$ és $f(\overline{L_1}) \subseteq \overline{L_2}$

nem injektív és nem szürjektív.

$L_1 \leq_p L_2 \wedge L_2 \in P \to L_1 \in P$

— $\in NP$ — $\in NP$

nem kell L-nek C-ben lennie!

C-teljesség

C nehéz → $\forall L' \in C$ esetén $L' \leq_p L \Rightarrow$ "L C-nehéz"

C teljes → C nehéz $\oplus$ $L \in C$

ilyen C: P, NP, EXP

NP-teljes: $\forall L' \in NP : L' \leq_p L$ és $L \in NP$

Ha találnánk $L \in NP$ teljes-t, amire $L \in P$, akkor $P = NP$ igaz lenne. De nem találtunk ilyet.

Cook-Levin tétel

• SAT $= \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthető nulladrendű KNF$\}$ = NP teljes

NP tételek

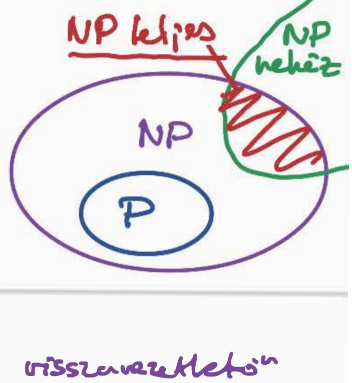
L NP-teljes $\wedge$ $L \leq L' \wedge L' \in NP \to$ L' NP-teljes

kSAT = minden klóz pontosan k db, páronként különböző literált tartalmaz =

$(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge \ldots$

$= \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthető kKNF$\}$

3SAT NP teljes SAT $\leq_p$ 3SAT



P tételek

HORNSAT P-beli

Horn formula: minden tagja max 1 nem $\neg$-lt literált tartalmaz

$(\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_1)$

$= \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthető Horn formula$\}$

2SAT P-beli

↳ gráfbejárásra visszavezethető

$O(|V| + |E|) \Rightarrow \max\{n, m\}$

↳ G_φ egyetlen erősen összefüggő komponense sem tartalmaz literálpárt!

9,10 Gráfok, Színezhetőség, NP-köztes.

3-színezhetőség

$k \in \mathbb{N} \geq 1$, irányítatlan gráf k-színezhető

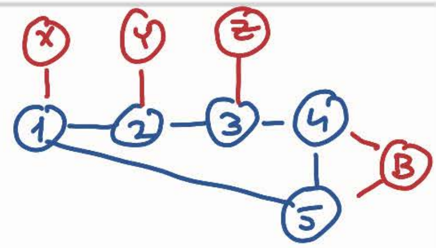
$G(E,V)$ k-színezhető $\iff \exists f : V \to \{1..k\}$

melyre $\forall x,y \in V : f(x) = f(y) \Rightarrow \{x,y\} \notin E$

$3SAT \leq_p 3Színezés$ — ha két pontnak ua. színe, akkor nincs közös élük

kSzínezés $= \{\langle G\rangle \mid k\text{-színezhető}\} \in$ NP teljes

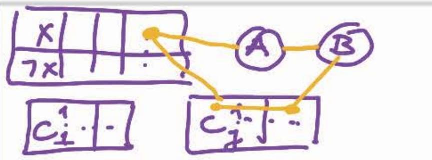
$\langle G\rangle$: G szomszédsági mx



2Színezhetőség

páros gráfok → lineáris időben eldönthető

2Színezés $\in P$ → szélességi bejárás semelyik 2 komponense nem azonos



Klikk

KLIKK $= \{\langle G,k\rangle \mid G$-nek van k elemű részgr.$\}$ $(k \dots 0)$ igaz ●

Független Ponthalmaz ● $(k..0)$

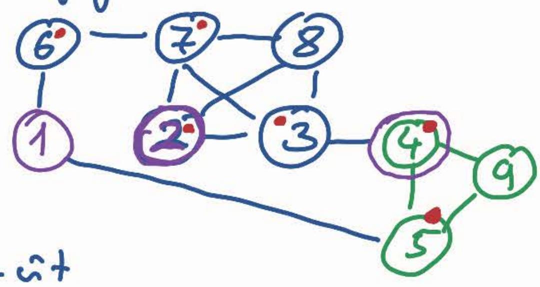
Lefogó Ponthalmaz ● minden élt lefognak $(k \dots |V(G)|)$

Ponthalmazok

NP teljes $3SAT \leq_p$ Független ponthalmaz

F. Ponthalmaz $\leq_p$ klikk

$\leq_p$ Lefogó ponthalmaz



Hamilton

$\forall$ pontot egyszer bejáró út Hamilton út.

HÚ $= \langle G,s,t\rangle$ irányított gráfban H-út

IHÚ $= \langle G,s,t\rangle$ irányítatlan gráfban H-út

IHK $= \langle G\rangle$ — " — H-kör

NP-teljes $SAT \leq_p HÚ$

φ KNF-hez (G_φ, s, t)-t konstruálunk $\iff$ G_φ-ben van út $s \to t$

Utazóügynök probléma
TSP NP-teljes
$IHK \leq_p TSP$
Hamilton kör a lehető legkisebb összsúllyal! vv. Poli

10 Diophantosz

Lineáris Diophantoszi Egyenletrendszer = NP teljes* (NP nehéz. NP teljes akkor, ha adunk felső korlátot)

$\{\langle A,b\rangle \mid Ax \leq b$ egész együtthatós ez-nek van $\mathbb{Z}$-n megoldás.$\}$

$3SAT \leq_p DER$ | $3SAT \leq_p$ Részletösszeg

Részletösszeg

Részletösszeg = NP teljes

$\{\langle S,k\rangle \mid S$ egész számok halmaza. van S' részhalmaz, $\sum S' = k\}$ $S=\{1,2,3\}$ $k=4$ $S'=\{1,3\}$

Hátizsák

Hátizsák NP-teljes részletössz $\leq_p$ Hát.

$\frac{a_1}{p_1} \dots \frac{a_k}{p_k} \to I \subseteq \{1..n\}$

(1) kimarad

melyre $(b,k) \to \sum_{i \in I} a_i \leq b$ I-beli elemek

és $\sum_{i \in I} p_i \geq k$

Partíció

Partíció probléma NP teljes

multihalmaz ami 2 egyenlő részre osztható szét

részletösszeg $\leq_p$ hát

Ládapakolás

Ládapakolás NP-teljes

$1..i..n$ súlyok k egyenlő részre osztani kell? min k?

partíció $\leq_p$ ládap.

NP-köztes

Ladner Ha $P \neq NP$, akkor $\exists$ NP-köztes nyelv $\to L \in NP$, $L \notin P$ és L nem NP-teljes

Gráfizomorfia $= \{\langle G_1,G_2\rangle \mid G_1$ és G_2 izomorfak$\} \in QP$

$QP = TIME(2^{\log(n)^c})$ ~ kvázi polinom időben

Részgráfizomorfia már NP teljes

Prímfaktorizáció $= \{\langle n,k\rangle \mid n$-nek van k-nál kisebb prímtényezője$\}$

10, 11 Co#, SpaceTime bonyiság

CoC, CoNP

$CoC := \{ \bar{L} \in C \}$ C bonyolultsági osztályra

C zárt polinomidejű visszavezetésre, ha:

$L_2 \in C$ és $L_1 \le_p L_2 \Rightarrow L_1 \in C$

N és NP zárt C-re ⇒ Ha C zárt akkor CoC is

CoNP zárt a polinomidejű visszavezetésre.

CoNP

L C teljes ⟺ $\bar{L}$ coC teljes

UNSAT = $\{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthetetlen nulladrendű$\}$] CoNP teljes ?NP beli

TAUT = $\{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ nulladrendű formula tautológia$\}$

ÁLTSAT = $\{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthető -u-$\} \sim$ SAT] NP teljes

$\overline{\text{ÁLTSAT}}$ = UNSAT UNSAT $\le_p$ TAUT

CoNP: olyan nyelvek, amik polinom időben eldönthetők

CoNP ≠? NP

L coNP teljes és $L \in NP \Rightarrow NP = CoNP$

?sejtés → ez nem igaz

Tár-Bonyiság

Többlet tárigény: input tárolásán kívül felhasznált tárat

- eldöntésnél input területének írását számoljuk
- számításnál nem

Offline OTG

OTG = Offline Turing Gép ⟺ TG konstruálható

első szalag readonly. többi munkaszalag.

$\delta: (Q \setminus \{q_i, q_n\}) \times \Gamma^{k+1} \to Q \times \Gamma^k \times \{L, S, R\}$

itt nem írhatunk

NOTG = Nem det. OTG

Számító OTG = első RO, utolsó WO (k+2) munkaszalag!

SPACE

OTG többlet tárigény: # cellák, ami fölött járt a fej

többlet tárkorlátos f(n): ha inputra max f(|u|) a tárigény

NOTG-re: az adott inputra legnagyobb számítása

SPACE(f(n)) := {L | L eldönthető O(f(n)) f.tkorlátos D. OTG-vel}

NSPACE(f(n)) := {L | L eldönthető O(f(n)) f.tkorlátos NOTG-vel}

P/NP SPACE

$P\_SPACE = \bigcup_{k \ge 1} SPACE(n^k)$

$NP\_SPACE = \bigcup_{k \ge 1} NSPACE(n^k)$

ELÉR ∈ P = {<G, s, t> | G gráfban van s–t út}

ELÉR ∈ TIME(n^2) ELÉR ∈ SPACE($\log^2 n$)

L : SPACE(log n) ← Mint logaritmus

NL : NSPACE(log n)

szublineáris OTG → TG is elég

---

konfigurációs gráf: M NTG G_M csúcsai M konfigjai és $(c, c') \in E(G_M)$ $\vdash_M c'$

elérhetőségi módszer. alkalmazása a konf. gráfra.

Savitch tétele: Ha $f(n) \ge \log(n) \Rightarrow NSPACE(f(n)) \subseteq PSPACE(f^2(n))$

P_SPACE = NP_SPACE $L \in NSPACE(n^k) \to L \in SPACE(n^{2k})$

$NL \subseteq P$

11, □ NL, L

ELÉR ∈ NL

Logaritmikus tárral visszavezethető

Ha $L_1 \le_\ell L_2$ és a visszavezető fv logaritmikus többlet tárkorlátos tg.

NL nehéz Ha $L' \in NL$ nyelvre $L' \le_\ell L$

L osztály zárt a $\le_\ell$ műveletre

$L \le_\ell$ ELÉR

NL teljes Ha NL nehéz és $L \in NL$

$NL = CoNL$

$EXPTIME := \bigcup TIME(2^{n^k})$

$L \subseteq NL \subseteq P$ $\subseteq NP$ / $\subseteq CoNP$ $\subseteq$ NP_SPACE $\subseteq$ PSPACE $\subseteq$ EXPTIME $\subseteq R$