NUMERIKUS MÓDSZEREK

C-Szakirány

Jegyzet

Tartalom

TÉMAKÖRÖK

- gépi számok
- GE és LU
- mátrixok
- polinominterpoláció
- numerikus módszerek

Bevezetés ①

Mérési hiba – A mérőműszer pontossága

Számítási hiba – Algoritmus hiba ($\sim$ zaj)

Inputhiba – gépi aritmetikából adódó (pl.: 0,001 reprezentáció)

Műveleti hiba – számításból adódó (pl: $1/3$)

$\sin(\pi)$ ← nem pontos, mert hatványsorral közelítjük. De ez határértéktől távol lehet

Végtelen sort véges sorral közelítünk

$\sum \frac{1}{k}$ lim $\to +\infty$

Ha két szám, ami hasonló méretű, akkor a különbségük kisebb lesz kivonási jegyveszteség.

két pontos eredmény kivonása pontatlan tud lenni

$$\sqrt{2017} - \sqrt{2016} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2017} + \sqrt{2016}}$$ pontosabb sokkal!

átalakít

$a = 10^{-20}$ $b = 1$ $(a+b)-b = 0$ $a+(b-b) = a$

Számítógépen nem csak a 0 nullelem.

Stabilitás

bemeneten kis $\Delta \Rightarrow$ kimeneten is Δ (kis változás lesz)

ugyanaz a művelet lehet átrendezéstől függően stabil. (előre vs hátra rekurzió vs explicit képlet)

Stabil, ha $\exists C > 0$ const, hogy B_1 B_2 bemenő adatból kapott K_1 K_2 kimenő adatokra:

$$\|K_1 - K_2\| \leq C \cdot \|B_1 - B_2\|$$

Numerikus Algoritmus

Aritmetikai és logikai műveletek véges hosszú sorozata

pl: fibonacci instabil, ha rekurzió

Gépi Számok

1ii

Fixpontos ctor(egész, tört)

egész . tört

rögzített.

könnyű összeszedni

minden két szám között

azonos távolság

Lebegőpontos

ctor(

egész + tört

lebegő pont

változik a távolság köztük

$\pm 0,\underbrace{1\ldots\ldots}_{t \text{ jegy}} \cdot 2^k$

normálalak szám 0-1 közé, mantisszát addig szorozzuk, ahogy leosztottuk.

$\pm 0,1010\cdots 2^k \longrightarrow$ karakterisztika $\cdot 2^{\bullet}$

$(k^- \le k \le k^+)$

ez mindig 1. Azért, hogy egyértelmű legyen a felírás.

Normalizált lebegőpontos szám

$$m = \sum_{i=1}^{t} m_i \cdot 2^{-i}$$

$t \in \mathbb{N}$, $m_1 = 1$, $m_i \in \{0,1\}$

$m_i = m[i]$, $m \in \{0,1\}^*$

$\underbrace{\boxed{\qquad\qquad}}_{\text{hány számjegy}} \cdot 2^k$

mantissza → hossza t

$$M' = (\underset{\downarrow}{t},\ \underbrace{k^-,\ k^+}_{\downarrow})$$

mantissza jegyeinek száma — karakterisztika

$$\pm[m_1 \dots m_t \mid k]$$

$$M = M \cup \{0\}$$

Az alap adatban nincs benne a 0, mert mantissza 1-el kezdődik 80 ptr.

① $1/2 \leq m < 1$ közé esnek a számok

② szimmetrikus 0-ra!

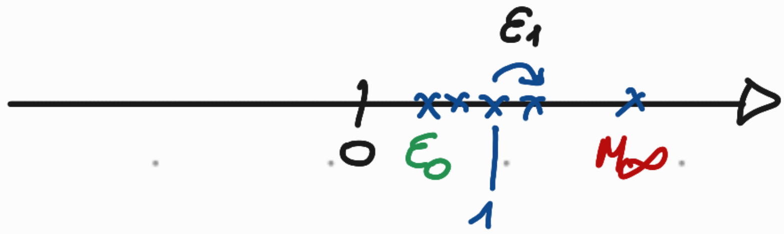
③ ε_0 — legkisebb elem

$$\varepsilon_0 = [10 \dots 0 \mid k^-] = \frac{1}{2} \cdot k^- = \boxed{2^{k^- - 1} \quad \varepsilon_0}$$

④ M_∞ — legnagyobb szám

$$M_\infty = [11 \dots 0 \mid k^+] = \boxed{(1-2^{-t}) \cdot 2^{k^+} \quad M_\infty}$$

Az a trükk, hogy $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\dots$ kiadja az utolsó, kevesebb $\left(\frac{1}{2}\right)^t$-el.



⑤ ε_1 — távolság.

1 és 1 felé szomszédjának a távolsága

$$\varepsilon_1 = [100 \dots 01 \mid 1] - [10 \dots 0 \mid 1] = 2^{-t} \cdot 2^1 = \boxed{2^{1-t} \quad \varepsilon_1}$$

⑥ M elemeinek száma

20 ptr

$$|M| = \underset{\pm}{2} \cdot \underbrace{2^{t-1}}_{\text{első jegy fix. többinél 0 v 1. tdb.}} \cdot (\underbrace{k^+ + k^- + 1}_{\text{itt bármi lehet } [k^-, k^+] \text{ között egy szám}}) + 1$$

pl $M(3,-1,2)$ $\quad \pm 0,1\underbrace{\_\ \_}_{\text{kettőt választunk.}} \cdot 2^k \quad (-1 \leq k \leq 2)$

$\varepsilon_0 = 0,25$
$\varepsilon_1 = 0,25$
$M_\infty = 3,5$ $\quad |M| = 33$

Input függvény $\quad$ δ: Valós $\to$ Gépi számok $\quad$ $\boxed{fl}$ FLOAT

$fl: \mathbb{R}_M \to M$ input fv:

$$fl(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |x| < \varepsilon_0 \\ \tilde{x} & \text{ha } \varepsilon_0 \leq |x| \leq M_\infty \end{cases}$$

$\to$ Ha nagyobb, akkor implementáció függő. M_∞ v INF

$\tilde{x} :=$ x-hez legközelebbi gépi szám

Inputhiba

$$|x - fl(x)| \leq \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{ha } |x| < \varepsilon_0 \\ \frac{1}{2}|x| \cdot \varepsilon_1 & \text{ha } \varepsilon_0 \leq |x| \leq M_\infty \end{cases}$$

Ha $\varepsilon_0 \leq |x| \leq M_\infty$

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_1}_{\text{inputhiba becslés relatív}} = 2^{-t}$$

$\to$ Viszonyszám: Hogyan viszonyul az eredeti szám nagyságrendjéhez

Mihez viszonyítva pici?

pl: szám 0,1
hiba 0,1 $\Rightarrow$
nagyon rossz!

Biz: Inputhiba képlete
Több eset lehetséges

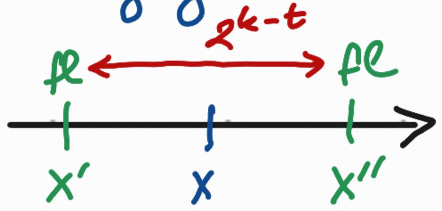
$\to$ $|x| < \varepsilon_0 \Rightarrow fl(x) = 0$.
ekkor: $|x - fl(x)| = |x|$ és $|x| < \varepsilon_0$
Ez egy triviális eset

→ $|x| \geq \varepsilon_0$ és $x \in M$

ekkor: $fl(x) = x$, $|x - fl(x)| = 0$

Eleve gépi számot akarunk átváltani. Ilyenkor 20 pfr az átváltás

→ Tényleg érdekes eset ahol konvertálni kell



x' és x'' két szomszédos fl. szám.

$x' \equiv [1 - \ldots - | k]$. x-hez tartozó karakterisztika

mennyi x' és x'' távolsága?

$$x'' - x' = 2^{-t} \cdot 2^{k} = \underline{\underline{2^{k-t}}}$$

x'-höz "1"-et adunk csak.

utolsó bit helye — A szám karakterisztikája

Ez a maximális hiba 2x-szerese! Hiszen két szám közti

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \cdot 2^{k} \cdot 2^{-t}}$$

Be kell hozni $|x|$-et.

Azt úgy lehet, hogy azt alsó szomszéddal alul lehet becsülni:

$\boxed{2^k \leq |x|}$ mert ezaz a szám ami $[100..0|k]$.

ekkor: $|x| \cdot 2^{-t} = \frac{1}{2} \cdot |x| \cdot \underbrace{2^{1-t}}_{\varepsilon_1 \text{ értéke}} = \boxed{\frac{1}{2} \cdot |x| \cdot \varepsilon_1}$

QED

Hibaszámítás

2

Ⓐ pontos érték ⇒ ezt gyakran nem tudjuk

ⓐ közelítő érték

Abszolút hiba

Mennyiben térünk el a pontos értéktől

$\Delta a := A - a$ pontos hiba

Abszolút hiba

$|\Delta a| := |A - a|$

Abszolút hibakorlát.

$\underbrace{\Delta_a}$ $\geq |\Delta a|$

bármilyen szám, ami felülről becsüli a hibát

Relatív hiba

Nagyságrendileg mekkora a hiba amit vétettünk. Arányítjuk a hibát a szám méretéhez.

$$\delta a := \underbrace{\frac{\Delta a}{A}} \approx \boxed{\frac{\Delta a}{a}}$$

ez egy jó definíció, de a gyakorlatban nem igazán hasznos.

Relatív hibakorlát

$\delta_a \geq |\delta a|$

PR π-re: $\approx 3{,}14$

Jó absz hibakorlát?

→ 0,15 absz hibakorlát ✓ jó

→ absz hiba 0,00159 a pontos

→ 0,002 a.h.k. ✓ jó

→ 0,001 a.h.k. — nem jó!

Alapműveletek hibakorlátai

	ABSZOLÚT	RELATÍV
±	$\Delta_a + \Delta_b$	$\dfrac{\lvert a\rvert \cdot \delta_a + \lvert b\rvert \cdot \delta_b}{\lvert a \pm b\rvert}$
×	$\lvert b\rvert \cdot \Delta_a + \lvert a\rvert \cdot \Delta_b$	$\delta_a + \delta_b$
/	$\dfrac{\lvert b\rvert \cdot \Delta_a + \lvert a\rvert \cdot \Delta_b}{b^2}$	$\delta_a + \delta_b$

csak a kivonás veszélyes a műveletre nézve.

Ha nem azonos nagyságrendű az előtte és utána lévő hiba.

két esetben nem teljesül a stabilitás!

$\Delta_{a/b}$ esetén: kicsi számmal osztunk

$\delta_{a\pm b}$ esetén: közeli számokat vonunk ki egymásból

Biz $\pm$ Absz. hiba!

$$\Delta(a\pm b) = (A\pm B)-(a\pm b) = (A-a)\pm(B-b) = \Delta a \pm \Delta b$$

ez nem hibakorlát. Ehhez absz. érték és becslés kell.

$$|\Delta(a\pm b)| = |\Delta a \pm \Delta b| \leq |\Delta a| + |\Delta b| \leq \Delta_a + \Delta_b = \Delta_{a\pm b}$$

háromszög egyenlőtlenség becslés!

ez egy korlát ami mindig nagyobb

$\pm$ Rel. hiba

$$\frac{\Delta(a\pm b)}{a\pm b} = \frac{\Delta a \pm \Delta b}{a \pm b} = \frac{a\cdot\delta a \pm b\cdot\delta b}{a\pm b}$$

felszorzok, leosztok 'a'-val. $\boxed{\frac{\Delta a}{a} = \delta a}$

→ hibakorláthoz mindkét oldal abszolútértékét vesszük.

$$\frac{|a\cdot\delta a \pm b\cdot\delta b|}{|a\pm b|} \leq \frac{|a|\cdot|\delta a| + |b|\cdot|\delta b|}{|a\pm b|} = \delta_{a\pm b}$$

számlálóban 3szög egyenlőtlenség

$|\delta a| \leq \delta_a$ mert az egy hibakorlát

Szorzás hibája

$$\Delta(a\cdot b) = AB - ab = A(B-b) + b(A-a) = A\cdot\Delta b + b\cdot\Delta a =$$

$$= (a+\Delta a)\Delta b + b\cdot\Delta a \approx a\cdot\Delta b + b\cdot\Delta a$$

$\Delta a\cdot\Delta b$ az elhanyagolható, nem kell vele foglalkozni

$$\delta(a\cdot b) = \frac{\Delta(a\cdot b)}{a\cdot b} \approx \frac{a\cdot\Delta b + b\cdot\Delta a}{a\cdot b} = \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a} =$$

$$= \delta b + \delta a$$

Osztás hibája

$\Delta b\cdot b$ elhanyagolható → mert csak "segítene" bizonyos esetekben. De max vesszük a hibakorlátot

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{A}{B} - \frac{a}{b} = \frac{Ab-aB}{Bb}$$

hozzáadunk és levonunk $a\cdot b$-t → $Ab - ab - aB + ab$ →

$$\frac{b\cdot(A-a) - a\cdot(B-b)}{(b+\Delta b)\cdot b}$$

Bb → $(b+\Delta b)\cdot b$ →

$$\approx \frac{b\cdot\Delta a - a\cdot\Delta b}{b^2}$$

Függvényérték abszolút hibája

egyszer folytonosan differenciálható valamilyen környezetében

Ha $f \in C^1(k_{\Delta_a}(a))$ és $k_{\Delta a} = [a - \Delta_a ; a + \Delta_a]$

akkor $\Delta f(a) = M_1 \cdot \Delta_a \rightarrow$ ez egy hibabecslés

ahol $M_1 = \max\{|f'(\xi)| : \xi \in k_{\Delta_a}(a)\}$

↳ lehető legnagyobb derivált maximuma.
Ezért kell a C^1 feltétel

Bemenő adatok $\boxed{M_1}$ - szeresére változik

pl: $\exp'$ $e^x \xrightarrow{\text{derivé}} e^x$ Ezért nagy a hiba

$\log x'$ $\log x \rightarrow \frac{1}{x}$ Ezért stabilabb

Biz Fvérték hibája

Lagrange középérték $\Delta f(a) = f'(\xi) \cdot \Delta a$

$f(A) - f(a) = f'(\xi) \cdot (A - a)$

Valamilyen $\xi \in k_{\Delta a}$ értékre

innen kell legnagyobb becslést venni.

$|\Delta f(a)| = |f'(\xi)| \cdot |\Delta a| \overset{?}{\leq} M_1 \cdot \Delta a$

Fvérték relatív hibája

Ha $f \in C^2(k_{\Delta_a}(a))$ és $k_{\Delta a} = [a - \Delta_a ; a + \Delta_a]$

↳ kétszer kell deriválhatónak lennie

$$\Delta f(a) = |f'(a)| \cdot \Delta_a + \frac{M_2}{2} \cdot \Delta_a^2$$

ahol $M_2 = \max\{|f''(\xi)| : \xi \in k_{\Delta_a}(a)\}$

↳ második derivált abszolút maximuma

Biz Fvérték Rel. hibája

Taylor-Formula

$$\Delta f(a) \underset{\text{def}}{=} f(A) - f(a) = f'(a) \cdot (A - a) + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2} \cdot (A - a)^2}$$

↳ Taylor formula 2, 3.
tagja. A 3. tag Lagrange-féle maradéktag
"a" körüli T-P, A-t helyettesítjük be!

Ezután felső becslés kell.

$f''(\xi) \to$ felülről becsülhető M_2-vel.
$|\Delta a| \to$ f. becs. Δa

következmény Ha Δa kicsi:

$$\boxed{\delta_{f(a)} = \frac{|a| \cdot |f'(a)|}{|f(a)|} \cdot \delta_a}$$

Ezt onnan kapjuk, hogy $\frac{\Delta f(a)}{f(a)}$ a δ. leosztjuk az Absz hibát. illetve

$$|f'(a)| \cdot \Delta a + \underline{\frac{M_2}{2} \cdot \Delta_a^2} \Bigg\} \to$$

ez kicsi ezért elhagyhatjuk ezt a tagot. Hiba nagyságrendjét Δa adja

Ez a szám f kondíciószáma

$$\text{def fn } c(f, a) = \frac{|a| \cdot |f'(a)|}{|f(a)|} \cdot \delta_a$$

Függ az "a" ponttól $\to$
lokális szám

LER-ek alkalmazása 2ü

LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \quad + \dots a_{nn}x_n = b_n \end{matrix}\right\} Ax = b$$

$\boxed{a_{\text{SOR, OSZLOP}}}$

LER megoldható = b felírható "A" lineáris kombináció szerint.

$\exists!$ megoldás
"A" oszlopai lin. függetlenek
rang(A) = n
det(A) $\neq 0$
A invertálható
$x = A^{-1}b$

ekvivalens állítások

Ötlet: megoldás előtt hozzuk egyszerűbb alakra
diagonális v. felső Δ mx

papíron pontosak. Véges sok lépés
$\to$ után nem pontosíthatóak

Mx megoldók — Direkt módszerek — Gauss-elimináció, Progonka-módszer, LU-felbontás
— Iterációs módszerek
— Variációs módszerek

Gauss - Elimináció /GE/

$a_{i\,n+1} := b_i$ azaz $[A|b]$ tárolási forma

$$A^{(0)} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & & & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & & & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Cél: LER-t egyszerűsíteni

① b → j főátló alatt kinullázzuk az elemeket

② j → b főátló fölött

Kérdés mindig: aktuális sor hányszorosát kell levonni, hogy $a_{i1}^{(0)}$ kinullázódjon

első lépés $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \cdot a_{1j}^{(0)}$ $i = 2..n$, $j = 2..n+1$

általános lépés $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot a_{kj}^{(k-1)}$ k. lépésben $1..n-1$, $i = k+1..n$, $j = k+1..n+1$

$\left(\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right)$-szeresét a k-adik egyenletből, hogy $a_{ik}^{(k-1)}$ nulla legyen

Azért k+1-től megy, mert abban a lépésben már az attól balra lévő elemek már 0-k

Minden lépésben k. oszlopban az átló alatti elemeket kinullázzuk.

n-1 lépésben az mx már:

$$A^{(n-1)} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & \dots & & a_{1n}^{(0)} & a_{1n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & a_{nn+1}^{(n-1)} \end{array}\right] \rightarrow$$

utolsó sorból kijön az $a_{nn} x_n = a_{nn+1}$ osztással! x_n

$$x_n = \frac{a_{n\,n+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \qquad x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}}\left(a_{i\,n+1}^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} \cdot x_j\right)$$

Levonjuk x_j-t, ami a visszahelyettesítés során kiszámolt koordinátákat a jobboldalból.

Visszahelyettesítés

Ezután visszafelé haladunk. Végül $[I|x]$ alakkal kijön az eredmény.

GE-Alkalmazása ③

$\det(A) = \det(\triangledown \text{ alak}) = \prod_{k=1} a_{kk}^{(k-1)}$

felsőháromszög alakban

$[A|b_1|b_2 ..]$ $\downarrow$ GE, visszahely $\downarrow$ $[I|x_1|x_2 ..]$

-> $\updownarrow$ csere esetén det (-1)x-re változik

-> Illetve több jobboldallal meg lehet csinálni

-> mx inverzének megállapítása

$[A|I] \rightarrow$ GE, visszahely $[I|A^{-1}]$

Sorcsere esetén Inverz nem változik. oszlopcserénél igen

Megoldható LER $\longleftarrow$ szimpla GE elvégzé

Előfordulhat, hogy átló beli elem értéke 0, akkor elakad

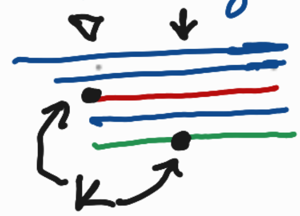
Főelemkiválasztás /Biztos & Stabil/

Def Részleges főelemkiválasztás

k-adik lépésben [m] indexet választunk, melyre a $|a_{mk}^{(k-1)}|$ maximális, $m \in \{k .. n\}$. Cseréljük ki k-t és m sort egymással. $O(n)$ összehasonlítás

Def Teljes Főelemkiválasztás $O(n^2)$

k. lépésben $[m_1, m_2]$ indexpárt választunk, melyre $|a^{(k-1)}_{m_1 m_2}|$ maximális. $m_1, m_2 \in \{k..n\}$.



$k \leftrightarrows m_1$ sor, $k \leftrightarrows m_2$ oszlop.

Q: Miért csináljuk
→ GE ne akadjon el.
→ mivel pivotelemmel osztunk.
Osztásnál nagy nevezővel akarunk osztani, hogy jobb legyen

Tétel GE elvégezhető sor, oszlopcsere nélkül

$\Updownarrow$

$a^{(k-1)}_{kk} \neq 0 \quad (k = 1..n-1)$

Főminor

$$D_k = \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}\right)$$

$k = 1..n$

Bal felső sarokdeterminánsok.

Tétel $D_k \neq 0 \quad (k = 1.. n-1)$

$\Updownarrow$

$a^{(k-1)}_{kk} \neq 0$

Ez nem jelenti, hogy van LER-nek megoldása!

! n. sarok-al-determináns lehet 0

Biz GE átalakításai det tartóak.

Determináns számításakor vigyázni kell

GE Műveletigénye

$$\boxed{\frac{2}{3} n^3 + O(n^2)}$$

① $(n-k)$
② $(n-k)(n-k+1)$
③ $(n-k)(n-k+1)$

Biz GE Műveletigény

összesen $(n-k)(2[n-k]+3)$ $\quad s := n-k \rightarrow$ Ez a "k." lépés műveletigénye csak

$$\sum_{s=1}^{n-1} s(2s+3) = 2\sum_{s=1}^{n-1} s^2 + 3\sum_{s=1}^{n-1} s = \frac{2(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{3(n-1)n}{2} =$$

számok összege 1..n-ig

$$= \frac{2}{3} n^3 + O(n^2)$$

Def $f(n)$ fv. $O(n^2)$ nagyságrendű, ha $\frac{f(n)}{n^2}$ korlátos minden $n \in \mathbb{N}$-re!

Visszahelyettesítés műveletigénye

$$\boxed{n^2 + \mathcal{O}(n)} \qquad x_n = \frac{a_{n\,n+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

i. sorra
- $\oslash$ 1
- $\otimes$ $n-i$
- $\ominus$ $n-i$

$\Big\}$ $2(n-i)+1$ művelet

$$1 + \sum_{s}^{n-1} (2s+1) = 1 + 2\frac{n(n-1)}{2} + (n-1) = n^2 + \mathcal{O}(n)$$

Alsó Δ MX - és GE

Ötlet: tároljuk el a GE egy lépését az eredeti mx-ben!

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ? \end{bmatrix}$$

Pont a kinullázott helyre Ge lehet írni!

Mi van akkor, ha több jobboldalra akarjuk Ax-et kiszámolni.
Ha $b_1 \dots b_n$-t ismerjük, az jó, mert a GE közben meg tudjuk oldani.
De! Ha mérési eredmény, akkor újra kéne GE-t számolni

L_k mátrix

Átlójában 1-esek. 1 oszlopban átló alatt értékek, máshol 0.

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1k} & 1 & & \\ & & \vdots & & 1 & \\ & & -l_{nk} & & & 1 \end{bmatrix} = \overset{\text{identitás mx}}{I} - \underline{l_k}\,\underset{\text{egységmx ??}}{e_k^T} \qquad l_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ l_{k+1k} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$L_k \cdot A^{(k-1)} = A^{(k)}$ Ezzel megkapjuk a GE másik alakj

$\underbrace{L_2 \cdot L_1}_{L\ \text{mx}} \cdot A =: U \rightarrow$ kapott felsőháromszögmátrix

$$A = \underbrace{L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdot \ldots}_{L} U = L \cdot U$$

Ez a mx LU felbontás!

könnyen invertálható

Alsó $3\triangle$ mx — L

$\mathcal{L}$

$\mathcal{L}_1$

Az átlóban csupa 1-esek vannak

$L, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$

ha $i < j$, $i > j$

Felső $3\triangle$ MX — $\mathcal{U}$

U_1

Fölső $\triangle$ való szorzás nem vezet ki a $\triangle$ halmazából. $\triangle$-ra is igaz.

∇ inverze is ∇ (ha létezik)
$1_{1,1}$ inverze is $1_{1,1}$ } $\triangle$-ra is igaz

L_k inverze átlók alatti elemek előjelét meg kell cserélni

Biz

$$\boxed{L_k^{-1} := I + l_k e_k^T}$$

$L_k \cdot L_k^{-1}$. Ha ez az inverz, akkor $= I$.

$$(I - l_k e_k^T)(I + l_k e_k^T) = I \underbrace{- l_k e_k^T + l_k e_k^T}_{0} - l_k \underbrace{e_k^T l_k}_{0} e_k^T = I$$

Ez egy skalár szorzat. l_k vektor $l_k \times e_k^T$. e_k-ban a k. elem nem 0. l_k pedig minden 0 k-ig. utána más

A skalárszorzat rész emiatt nulla lesz, tehát egyszerűbb a bizonyítás

Hogyan szorzunk $L_1 L_2$-t össze?

L_k mx-ek szorzata

A tagok összegei!

$$L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots =$$

Bemásoljuk egymásba.

Biz: indukcióval.

$$L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} = I + l_1 e_1^T + l_2 e_2^T$$

LU – Felbontás

szorzat felbontás

↳ Átlójában 1-esek vannak

3/ii

IV

$A = LU$ $L \in \mathcal{L}_1$ $U \in \mathcal{U}$

↳ alsó   ↳ felső   Δ-szög mx

U mx: teljes GE után hátramaradt rész

L-ből nem vezet ki a szorzás és invertálás

$L_{n-1} \cdots L_1 A = U$ balról szorozzuk

Majd fordított sorrendben L_k mx inverze

$$A = \underbrace{L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots}_{L} U = LU$$

L → ezt nem explicit mx műveletekkel kell elvégezni! Sokkal kényelmesebb

Tömör írásmód

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix} \xrightarrow{GE} \begin{bmatrix}1&2&3\\5&5&6\\9&8&9\end{bmatrix} \xrightarrow{GE} \cdots$$

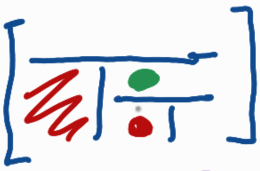
pivotelem

Fölösleges 0-k helyett L_k-t tárol. ↳ beírjuk L_K-t

pivotelem: GE aktuális k-jában lévő átló elem

$$\begin{bmatrix}2&0&3\\ &5&5\\ &-5&-5\end{bmatrix}$$

↳ L_k mx inverzének elemei.



kiolvasható az LU →

L_1 U

Pivotelem / elem hányadosa kerül be.

LU-Felbontás létezése

GE létezik (sorcsere nélkül, oszlop) ⟺ ∃LU-felbontás

Vagyis pivotelem sosem 0.

Det = 0 → ∞ sok LU

→ 0 db LU felbontás

→ főminorok

0 → nulla is lehet

∃LU ⟺ $k_{1..n-1}$: átló eleme nem nulla.

! k = n-ben lehet nulla!

! Ez nem az eredményre vonatkozik

Biz Ha $\det(A) \neq 0$ és $\exists LU$ akkor egyértelmű L, U
$L_1 U_1$ vs $L_2 U_2$ ugyanannak kell lennie.
determináns segítségével bizonyítjuk.
$U_1 \cdot U_2^{-1} = I \Rightarrow U_1 = U_2$ bizonyítva van.

$$L \in \mathcal{L}_1 \qquad U \in \mathcal{U}$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}} \quad i > j$$

$$u_{ij} = a_{ij}^{(i-1)} \quad i \leq j$$

Tfh: $Ax = b$ LER megoldható
megvan a $A = LU$ felbontás

$A x = L \underbrace{U x}_{y} = b$ helyett

→ feladat, mátrixai eredmény

- $Ly = b$ → alsó 3Δ mx — $n^2 + O(n)$
- $Ux = y$ → felső 3Δ mx — $n^2 + O(n)$

↳ visszahelyettesítés

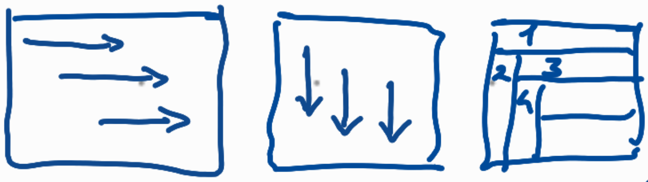
Ez sokkal majdnem annyi mint $2n^2 + O(n)$,
mx vektor szorzás. Tehát nagyon jó

Ez sokkal jobb, mint GE $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$
Persze a LU-hoz kell GE.
De egy több jobboldali vektorhoz már jobb a LU
ha mérésből származik

Megjegyzem a GE lépéseit és azokat alkalmazom

Elrendezések / LU kiszámolás

4



sor folytonos — oszlop folytonos — parketta-elrendezés

LU közvetlenül

első sor megegyezik az eredetivel ←

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{22} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

↳ eredeti mx lesz a szorzatban

LU-műveletigény:

$\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$

visszahelyettesítés

$n^2 + O(n)$

A = LU mx előállítása sorfolytonosan!

1) l_{21} ... u_{22} ... u_{23} sor! ismeretlen meghatároz

1a) $l_{21} \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -4$ $\Rightarrow$ $l_{21} = -2$

b) $l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} = 5$ $\Rightarrow$ $u_{22} = 5$

c) ⋮ ↘ szépen sorban kiszámolhatóak az ismeretlenek $u_{23} = 4$

⋮

2a) ⋮

→ előjöhet ellentmondásos egyenlet
↳ ilyenkor GE-ben még sorcserével lehet segíteni rajta

→ azonosság is előjöhet → bármilyen szám jöhet.

LU felbontás közvetlen kiszámolása

Megteremtettük a GE <=> LU felbontásra.

Explicit képletek → jó sorrendben számolva

$i \le j$: $u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$

$i > j$: $\frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right)$

Biz Explicit képlet

i-dik SOR j-dik oszlop $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot u_{kj}$ → standard mx szorzás

kettévesszük a szorzást △ & ▽

n helyett csak i-ig elmenni $\sum_{k=1}^{i} l_{ik} \cdot u_{kj}$

kivesszük az utolsó elemet $(k=i)$

explicit: $u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$ ⟸ $u_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$

→ ezt akarjuk

L mx esetén ua. a trükk amit csinálunk

Műveletigény LE

ekvivalens a GE vel! [nincs levezetve]

U mx előállítása = GE

L mx az nem plusz igény, csak el kell menteni, ami a GE része. Plusz elemeket nem kell kiszámolni

$$\boxed{\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)}$$

$Ux = y$ / $Ly = b$ rögzített i sorra $(i-1)$ ⊗ $(i-1)$ ⊕

összesen: $2\frac{n(n-1)}{2}$

$$\boxed{n^2 + O(n)}$$

Megmaradási Tételek

4ü

GE egyes tulajdonságait a mx-nak megtartja

– A szimmetrikus, ha $A = A^T$

– Pozitív definit

Szimmetrián felül igaz az, hogy

- $\langle Ax, x\rangle = x^T A x > 0 \;:\; \forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$
- minden főminor $D_k = \det(A_k > 0)$
- minden sajátértéke pozitív

$\Big\}$ ezek ekvivalensek

– Szigorú diag. dominancia

- átlóban lévő elemek "sokkal" nagyobb
  → minden sorban az átlós elem nagyobb mint a többi abszolút összege

$$\begin{array}{c c}
\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \text{sor} \\ \leftarrow \end{matrix} \\
\uparrow\ \uparrow\ \uparrow & \\
\text{oszlop} &
\end{array}
\qquad |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ij}|$$

→ sorai

ji ↳ oszlopai

– félsávszélesség

$\forall\, i,j : |i-j| > s \;:\; a_{ij} = 0$

$\exists\, k,l : |k-l| = s \;:\; a_{kl} \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \; 1$$

Főátlótól leszámolunk s db elemet.
Azon kívül csak 0 szerepelhet

– profil

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{matrix} 0 & 0 & 2 & 1 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \end{bmatrix}
\end{array}$$

sorprofil — oszlopprofil

$\forall\, j = 1..k_i \;:\; a_{ij} = 0$ és $a_{i\,k_i+1} \neq 0$

$\forall\, i = 1..l_j \;:\; a_{ij} = 0$ és $a_{l_j+1,\,j} \neq 0$

Particionálás

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 \end{array}\right]$$

$Ax = b$ LER, k. sorban particionálunk. $A_{11}\ \exists^{-1}$

A_{11} mx $\in \mathbb{R}^{k\times k}$ invertálható

Schur-komplementer /blokkos GE/

cél: transzformáció, ahol A_{11} null (mátrix lesz)
particionálva:
GE általánosított lépése

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} = 0 & A_{22} \end{array}\right]$$

GE 1. lépésében:
van egy általános mx pivotelem A_{11} 1x1 elem!
$\Rightarrow$ kinullázódik A_{21}. A_{22} változik.
GE $k=1$-re van mindig

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1$$
$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2$$

A második egyenletből levonom az első sor $A_{21}A_{11}^{-1}$ szeresét.

Kiüti egymást a két A_{11}, ezért $A_{21}-A_{21}$ lesz.

$$② - (A_{21}\cdot A_{11}^{-1}) \rightsquigarrow ① \quad \overbrace{(A_{21}-A_{21}\cdot A_{11}^{-1}A_{11})}^{\approx 0}\cdot x_1$$
$$(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})\,x_2 =$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22}-A_{21}\cdot A_{11}^{-1}\cdot A_{12} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1 \end{array}\right]$$

↳ Schur komplementer

Ez egy blokkosított GE után kapott mx

Schur-komplementer

Az "A" mx A_{11}-re vonatkozó Schur-komplementere:

$$[A|A_{11}] = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

$(n-k)\times(n-k)$ mátrix

A GE-ről sok tulajdonság öröklődik a Schur komplementere.

Megmaradási feltételek GE ⟷ Schur

$\det(A) \neq 0 \implies \det([A|A_{11}]) \neq 0$

A szimmetrikus $\implies [A|A_{11}]$ szimmetrikus

A pozitív definit $\implies A$ pozitív definit

A szig diag dom (1) $\implies A$ szig diag dom

A félsávszélessége $\geq [A|A_{11}]$ félsávszélesség

Soronként és oszloponként megmaradnak a 0-k az első nem 0 elemig.

(1) Részleges Főelemkiválasztás $\implies$ Szig diag dom esetben ez az átlóban van, tehát nem kell ilyet csinálni. Szig diag dom mx esetén nem kell részleges főelemkiválasztás.

Biz Det

- GE det tartó, így $\det(A) = \det(A^{(1)}) \neq 0$.

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & [A|A_{11}] \end{array}\right]$$

$$\det(A^{(1)}) \neq 0$$

$$\underbrace{\det(A_{11})}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\det([A|A_{11}])}_{\neq 0}$$

következik.

Biz Szimm.

Ha A szimm, akkor A_{11} és A_{22} is az. $A_{21}^T = A_{12}$.

$$[A|A_{11}]^T = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^T =$$
$$= A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = [A|A_{11}]$$

Biz Poz Definit

Tudjuk $\langle Ax, x\rangle > 0 \quad \forall x \neq 0$ (vektor)

kell, hogy $\langle [A|A_{11}]x_2, x_2\rangle$ is $>0 \ \forall x \neq 0$-ra!

$$Ax = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ \hline A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \end{array}\right]$$

Az első k komp. legyen 0.

Legyen $x_1 \in \mathbb{R}^k$ vektor:

$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \implies x_1 := -A_{11}^{-1}A_{12}x_2$

↳ el akarjuk tüntetni A_{11}-et

$0 < \langle Ax, x\rangle$ skalárszorzat $=$ behelyettesítés

$$\langle \underbrace{A_{11}x_1 + A_{12}x_2}_{0}, x_1\rangle + \langle A_{21}x_1 + A_{22}x_2, x_2\rangle$$

$= 0$ pont nulla, ha x a kiütő szám.

$$\langle A_{21}(-A_{11}^{-1}A_{12}x_2) + A_{22}x_2, x_2\rangle = \langle [A|A_{11}]x_2, x_2\rangle$$

Biz Szig Diag Dom Ba kell látnunk

$$|a_{ii}^{(1)}| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{ij}^{(1)}| \qquad i = 2..n$$

→ Az első oszlopban 0-k vannak, mert a GE-t már elvégezve nézzük

GE első lépése után kapott elemek

GE általános képlete

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{jk}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot a_{kj}^{(k-1)}$$

behelyettesít

$$\left| a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i} \right| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left| a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \right|$$

Felszorozzuk $|a_{11}| \neq 0$-val

közelítjük a két oldalt, és belátjuk, hogy az is jó

Megkötések:

- $|a_{11}| \neq 0$ → ez egyértelmű, mert anélkül GE sincs
- $|a_{i1}| = 0$ → akkor a soron nem változtat, tehát diag. dom sem változik

---

Megmaradási tételek fontosak.

Tridiagonális → 3 átlóban van nem 0 elem

Progonka Módszer /GE rövidítve/

→ tridiagonális mx-re

tárolás $n^2 \longrightarrow 3n-2$

műveletigény $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2) \rightarrow 8n + O(1)$

GE sávszélesség megtartása miatt gyors!

i. egyenlet: $a_{ii}^{(i-1)}x_i + a_{i,i+1}^{(i-1)}x_{i+1} = a_{i,n+1}^{(i-1)}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & & \ddots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & & \\ 0 & \beta_2 & \ddots & & \gamma_{n-1} \\ 0 & \ddots & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x_i = f_i x_{i+1} + g_i}$$

$i = 1..n$

γ mellékátló

α főátló

β mellékátló

$$x_i = \underbrace{f_1}_{} x_{i+1} + \underbrace{g_i}_{}$$

1.
- 1. sor: $\alpha_1 x_1 + \gamma_1 x_2 = b_1 \rightarrow$ (x_1 kifejezve / kifejezzük x-et) $x_1 = \overbrace{-\frac{\gamma_1}{\alpha_1}}^{f_1} x_2 + \overbrace{\frac{b_1}{\alpha_1}}^{g_1}$
- többi sor: ?

↳ középső soroknál: tfh $g_1 \dots g_{i-1}$-ig megoldottuk

$$\beta_{i-1} \underbrace{x_{i-1}}_{\text{ezt ismerjük}} + \alpha_i x_i + \gamma_{i+1} x_{i+1} = b_1$$

$$\beta_{i-1}(f_{i-1}x_i + g_{i-1}) + \quad -\| - \quad = b_1$$

$$(\beta_{i-1}f_{i-1} + \alpha_i)x_i + \gamma_i x_{i+1} = b_i - \beta_{i-1}g_{i-1} \Rightarrow$$

2....n
$$f_i = \frac{\gamma_1}{\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1}} \qquad g_i = \frac{b_1 - \beta_{i-1} \cdot g_{i-1}}{\alpha_1 + \beta_{i-1}f_{i-1}}$$

↳ a visszafele menő rekurzióhoz kell.

→ utolsó sor: $\beta_{n-1}x_{n-1} + \alpha_n x_n = b_n$

itt dobjuk f_{i-1}, g_{i-1}-et

n..1-ig

visszafelé: $x_i = f_i x_{i+1} + g_i \quad (i = n-1..1)$

Progonka összegezve

előrefele

	f	g
1	$-\frac{\gamma_1}{\alpha_1}$	$\frac{b_1}{\alpha_1}$
2 ↓ n−1	$-\frac{\gamma_i}{\alpha_i+\beta_{i-1}\cdot f_{i-1}}$	$\frac{b_i-\beta_{i-1}\cdot g_{i-1}}{\alpha_i+\beta_{i-1}\cdot f_{i-1}}$
n	N/A	$\frac{b_i-\beta_{n-1}\cdot g_{n-1}}{\alpha_n+\beta_{n-1}\cdot f_{n-1}}$

f_i, g_i-ket előrehaladó rekurzióval először kiszámoljuk őket

Visszafele

$$x_n = g_n$$
$$x_{n-1} = f_i x_{i+1} + g_i$$

Visszafele haladó rekurzióval kiszámoljuk a megoldásvektor koordinátáit.

Progonka műveletigény

f_i, g_i-re 6 db művelet → $6(n-2)$ művelet kell.

$g_n = 5$ db

Visszafele pedig: $2(n-1)$

⊕

$8n-7 = 8n+O(1)$ művelet kell.

Vektornormák

vektor hossz

euklideszi

$$\boxed{\|x\|_2} := \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{x^Tx} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$n\in\mathbb{N}$. Az $\|\cdot\|$ $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$-t hívjuk normának

- $\|x\|\geq 0$
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\cdot\|x\|$
- $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ → háromszög egyenlőtlenség

$\left(\begin{matrix}\forall x,y \in\mathbb{R}^n\\ \forall\lambda\in\mathbb{R}\end{matrix}\right)$

Hossz ⊂ távolság mérése.
Aztán mátrixokra kiterjesztjük ki.
Leginkább mx norma a stabilitását mutatja a ER-nek.
Pici hibára mennyire érzékeny?
Ez a szám a kondíciószám (min 1)

CBS Egyenlőtlenség

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|_2\cdot\|y\|_2 \quad \sim 3\text{szöge}$$

Biz bármely $\|x-\alpha y\|_2^2 \geq 0$

$$\|x-\alpha y\|_2^2 = \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle =$$

$$= \underbrace{\langle x,x\rangle}_{\|x\|} - 2\alpha\langle x,y\rangle + \underbrace{\alpha^2\langle y,y\rangle}_{\|y\|}$$

$$\overbrace{\langle x,x\rangle}^{\|x\|_2} - 2a\langle x,y\rangle + \underbrace{\alpha^2\langle y,y\rangle}_{\|y\|_2} \qquad a>0$$

→ $D<0$ lesz mindig.
Tehát bebizonyítottuk

Pl:

$$x = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} \qquad \begin{aligned}\|x\|_1 &= 3+4 = 7\\ \|x\|_2 &= \sqrt{3^2+4^2} = 5\\ \underbrace{\|x\|_\infty}_{} &= \max\{3,4\} = 4\end{aligned}$$

↳ abszolútérték kell

csebisev norma

$$\boxed{\|x\|_\infty} = \max |x_i|$$

manhattan norma

$$\boxed{\|x\|_1} = \sum_i |x_i|$$

általános eset

$$\boxed{\|x\|_p} := \left(\sum_{i=1} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

az ezzel a képlettel definiált fv.-t vektornormát definiál

P-Norma

$(p \in \mathbb{R},\ 1 \leq p < \infty)$

p lehet kisebb mint 1, de akkor nem norma

- 0-1 között nem norma
- $p_1 \leq p_2 \Rightarrow \|x\|_{p_1} \geq \|x\|_{p_2}$
- $\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$

Normák közti egyenlőtlenségek

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$$

$$\|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

Def $\|\cdot\|_a$ $\|\cdot\|_b$ ekvivalens, ha $\exists c_1 c_2$, $\forall x$-re

$$c_1 \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq c_2 \|x\|_b$$

$\mathbb{R}^n$-en értelmezett vektornormák ekvivalensek egymással. Végesdimenziós terekben → $\| \|_2$-esben belátni tetszőleges p-re.

Konvergencia Vektornormában

x^* a sorozat határértéke

x_k konvergens, ha $\exists x^* \in \mathbb{R}$ lim, melyre

$$\lim_{k \to \infty} \|x_k - x^*\| = 0$$

→ különbségvektorok sorozatainak normája

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ \forall k \geq N_0 : \|x_k - x^*\| < \varepsilon$

Környezettel megfogalmazva
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ \forall k \geq N_0 : x_k \in K_\varepsilon(x^*)$

Mátrixnormák (5)

~ Vektornormák

$n \in \mathbb{N}$. Az $\|\cdot\|$ $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ -t hívjuk normának
↳ nem minden fv. mx norma.

- $|A| \geq 0$
- $\|A\| = 0 \iff x = 0$

- $\|\lambda A\| = \lambda \cdot \|A\|$
- $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(+) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

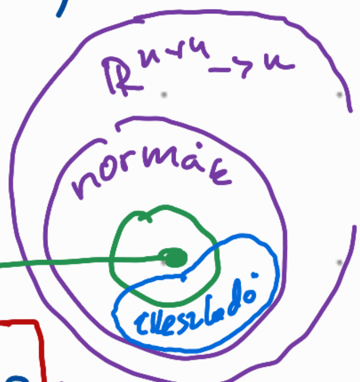
szubmultiplikativitás
ez egy új mátrix normára.

Mind az 5 kell ahhoz, hogy mxnorma legyen.

Frobenius-norma

$\|\cdot\|_F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ $\quad \|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$

összes elemet összeadjuk
ez egy mx norma, de nem indukált



Természetes mx normák /indukált/

$\| \ \|_v$ vektornorma segítségével lehet definiálni

$$\boxed{\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}}$$

↳ összes mx. v szerint

Vissza lehet ezeket a speciális mx normákat vektornormákra vezetni

Biz visszavezetjük normál vektornormákra

- $\|A\| \geq 0$
- Ha $A = 0$, akkor $\|Ax\|_v = 0 \iff$
  Ha $\sup 0$ akkor $\forall x$-re $A = 0$
- λ szorzás kiemelhető

kiemeljük a vektornormából

$$\|\lambda A\| = \sup \frac{\|\lambda A x\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda| \cdot \sup \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda|\,\|A\|$$

- $\triangle$ egyenlőtlenség

az összeg kettéválasztva
egy közös maximum

$$\|A+B\| = \sup \frac{\|(A+B)x\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup \frac{\|Ax\|_v + \|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq$$

$$\leq \sup \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} + \sup \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| + \|B\|$$

- szubmultiplikativitás

$B = 0 \rightarrow \|B\| = 0$ $\Rightarrow$ triviális esetek.

$A \cdot B = A \cdot 0 = 0 \Rightarrow \|AB\| = 0$

felszorzunk $\|Bx\|_v$-vel és leosztunk

$$\|A \cdot B\| = \sup \frac{\|ABx\|_v}{\|x\|_v} = \sup \frac{\|ABx\|_v}{\|Bx\|_v} \cdot \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq$$

(ugyanúgy a szuprémumot szét lehet választani) $\leq \sup \frac{\|Ay\|_v}{\|y\|_v} \cdot \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| \cdot \|B\|$

Az új változó lehetséges, úgy, hogy
$y = Bx$

↓

Átfogalmazható: $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup\limits_{\|y\|_v = 1} \|Ay\|_v$

max-ot is lehet írni

$$\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \leq \|A\| \rightarrow \|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v$$

vektornorma!

Illeszkedő mátrixnormák

Ha egy mx és egy v normára teljesül:

$\|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n \times n})$-re

akkor azok illeszkedőek.

Természetes mx-ek illeszkednek

vektorra illeszkedik a mxnorma

Frobéniusz $\rightarrow \|\ \|_2$-re.

Nevezetes Mxnormák

$$\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \Rightarrow \text{oszlopnorma}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \Rightarrow \text{sornorma}$$

$$\|A\|_2 = \left(\max_{i=1}^{n} \lambda_i (A^T A) \right)^{1/2} \qquad \Rightarrow \text{spektrálnorma}$$

$\lambda_i(M)$ = M mátrix i. sajátértéke. $Mv = \lambda v,\ v \neq 0$

Bebizonyítjuk, hogy ezek illeszkednek vektornormára.

Biz $\|A\|_1$

- $f(A)$-ra igaz $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$
- $\exists x$, hogy $\|Ax\|_v = f(A) \|x\|_v \Rightarrow$ akkor $f(A)$ tényleg a vektornorma.

Biz $\|A\|_\infty$

- Hasonlóan az előzőhöz $x = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ maximális sorösszegű sor előjeleinek megfelelően

Biz $\|A\|_2$ Nehezebb bizonyítás

- $A^T A \rightarrow$ szimmetrikus, sajátértéke nemnegatív $\Rightarrow$ pozitív szemidefinit

$- \quad (A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$ azaz A^TA szim.

azaz A^TA sajátértékei valósak

$A^TAy = \lambda y$ sajátvektor

Biz A^TA sajátértéke nemnegatív

↳ pozitív szemidefinit

$(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$. Azaz A^TA szimmetrikus

$y \neq 0$ A^TA mx-hez tartozó sajátvektor y (λ-hoz tartozó)

$A^TAy = \lambda \cdot y \qquad / \cdot$ bal y^T

$$\underbrace{y^TA^TAy}_{\|Ay\|_2} = \lambda \underbrace{y^Ty}_{\|y\|_2}$$

Ez ekvivalens a $\|\,\|_2$ definíciójával. Innen kifejezzük λ-t

↱ számláló és nevező is ≥ 0 mert hosszfogalom ~ norma.

$$\lambda = \frac{y^TA^TAy}{y^Ty} = \frac{(Ay)^TAy}{\|y\|_2^2} \geq 0$$

→ ezt a bizonyítást visszük tovább

A^TA szimmetrikus. Tudjuk, hogy $\exists U$ ortogonális mátrix, amire igaz lesz.

$y = Ux$ jelölés.

DIAGONALIZÁLÁS

$A^TA = U^TDU$

⇕

$UA^TAU^T = D$

Így D diagonálisban A^TA sajátértékei vannak jelen.

$$\|Ax\|_2^2 \stackrel{?}{=} \max \lambda_i\, A^TA \cdot \|y\|_2^2$$

$\|$

$(Ax)^TAx = x^TA^TAx = x^TU^TDUx =$ (diagonális)

$= (Ux)^TD(Ux) = y^TDy =$

y megadható egy összeg alakban is

$$\sum_{i=1} \underbrace{d_{ii}}_{} \cdot |y_i|^2 = \text{egyszerű, mert felbontjuk } D\text{-t.}$$

sajátértékek nemnegatívak

↱ felsőbecslés a legnagyobb d_{ii}-vel

$\boxed{\|y\|_2^2 = \|x\|_2^2}$

$\leq \max d_{ii} \cdot \sum |y_i|^2 = \max \lambda_i(A^TA) \cdot \|y\|_2^2$

Szimmetrikus mx-ek esetén, amivel bal-jobb szorzok, az ortogonális aminek az inverze önmaga transzponáltja

Spektrálsugár

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mx spektrál sugara $\varrho(A) = \max\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)|$

legnagyobb sajátérték abszolútértéke

$$\boxed{\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^T A)}}$$

$\Downarrow$ Ha A mx szimmetrikus

$\|A\|_2 = \varrho A$

Ha a mx csak valós számokat tartalmaz.

$A^* \longrightarrow A^T$

komplex számoknál

A^* : konj(A^T) pl. ennyi

Normális $\subseteq$ Önadjungált

Ha $A^*A = AA^* \Rightarrow \|A\|_2 = \varrho(A)$

$\mapsto$ Diagonalizálható

Biz $U^*AU = D = \mathrm{diag}(\lambda_i(A)) \Longleftrightarrow A = UDU$

$\mapsto$ sajátértékek ugyanazok

csak az átlóban vannak elemek, amik a mx sajátértékei

$\lambda_i(A^*A) = \lambda_i(D^*D) = |\lambda_i(A)|^2$

$\varrho(A^*A) = \varrho(A)^2$

$(U^*)^* = U$

innen: $\|A\|_2 = \varrho(A^*A)^{1/2} = \varrho(A)$

Frobenius norma nem Természetes / Indukált

Mátrix összes elemeinek négyzetösszegeinek gyöke

Nincs olyan vektornorma ami indukálja

Biz $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ normája:

$\|I\| = \sup \frac{\|Ix\|_v}{\|x\|_v} = 1$ $\left(\text{mert } \frac{\|x\|_v}{\|x\|_v}\right)$

$\|I\|_F = \sqrt{n} \longrightarrow n>1$-re már nem jó!

$n > 1$ esetén nincs olyan v. norma ami F-et indukálja $\lightning$ $\square$

$f : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$

Mx normák

Indukált

$\|\cdot\|_1$

$\|\cdot\|_2$

$\|\cdot\|_\infty$

$\|\cdot\|_F$

$\varrho(A) \leq \|A\|$ Spektrálsugár alulról becsüli az összes mxnormát

Biz $|\lambda| \leq \|A\|$ λ tetszőleges, $v \neq 0$ hozzátartozó sajátvektor.

$Av = \lambda v$

$Avv^T = \lambda vv^T$

szubmultiplikatív

$$\underline{\|A\| \cdot \|vv^T\|} \geq \|Avv^T\| = \overbrace{\|\lambda vv^T\| = \underline{|\lambda| \cdot \|vv^T\|}}$$

leosztunk vv^T.

$\|A\| \geq |\lambda|$

Állítások Ortogon. mx-ekre

$\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ vektor

Tehát [ ] mx a kettes normát nem változtatja!

$\|Q\|_2 = 1$

$\|QA\|_2 = \|AQ\|_2 = \|A\|_2$ nem változtatja a hosszát. Invariáns rá.

$\|A\|_F^2 = tr(A^TA)$ ahol $tr(B) := \sum_{k=1}^{n} b_{kk}$

$\|QA\|_F = \|AQ\|_F = \|A\|_F$

$\|\cdot\|_F \equiv \|\cdot\|_2$ ekvivalens. F-norma illeszkedik a 2-es normára.

$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A^TA)$

Mx kondíciószáma (5ii)

Mennyire érzékeny egy LER mennyire érzékeny
→ megoldómódszerek stabilitása

$$\boxed{\operatorname{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \qquad \mathcal{K}(A)$$

→ csak invertálható mx-e
→ normától függ az értéke

1: legkisebb cond → legkevésbé érzékeny

- indukáltnál $\operatorname{cond}(A) \geq 1$ → legjobb eset
- $\operatorname{cond}(cA) = \operatorname{cond}(A)$ → nem függ const szorzással
- Q ortogonális, $\operatorname{cond}_2(A) = 1$

$$\operatorname{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|} \quad \text{ha szimmetrikus}$$

$$\operatorname{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)} \quad \text{ha poz szemidefinit}$$

$$\operatorname{cond}_{\square}(A) \geq \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda(A)|} \quad \text{ha invertálható}$$

LER vektorának megváltoztatása

$Ax = b$ De! Perturbálás b-re ??? Pontatlan mérési eredmények!

kiszámolnánk

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

Az új megoldás Δx-el módosul

Perturbáció mértékét az abszolút / relatív hibával jellemezzük

Cél: találjunk egy számot.

$\delta b = \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$ → jobb oldal relatív hiba

$\delta x = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ → megoldás változása
hibavektor, pontos osztása

$\frac{\delta x}{\delta b} = 1235 \Rightarrow \mathrm{cond}(A) = 1623$

1000x-es a hibánál a módosulás.
Pontos hibát nem ismerjük!

A kondíciószámmal viszont lehet $\frac{\delta x}{\delta b}$-vel becsülni. az értéket

LER jobboldali hibájára való érzékenység

Tfh A invertálható és $b \neq 0$.

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{\mathrm{cond}(A)} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

azaz

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{cond}(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \mathrm{cond}(A) \cdot \delta b}$$

tényleges hiba alulról és felülről is becsülhető

Biz $A(x+\Delta x) = (b+\Delta b)$-ből kivonjuk $Ax = b$-t.
így: $A\Delta x = \Delta b$

Viszont $x = A^{-1}b$ és $\Delta x = A^{-1}\Delta b$ is igaz.

4 összefüggés → op: $m \times \nu$ normát alkalmazzuk
Ha illeszkedő a norma:

$\|b\| = \|Ax\|$ és $\|\Delta b\| = \|A\Delta x\|$ $\Rightarrow$ $\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$ és

$\|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|}$

Alsó becsléseket csinálunk.

egyszerűsítés

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \geq \frac{\frac{\|\Delta b\|}{\|A\|}}{\|A^{-1}\|\cdot\|b\|} = \frac{1}{\|A^{-1}\|\cdot\|b\|}\cdot\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Ez volt az <u>alsó</u> becslés. Felső becslésnél ezt használjuk fel a bizonyításhoz.

LER Mx-ének megváltoztatása

Akkor jön elő, ha a mx (~ modellezi az egyenletet)-ben van megváltozás.

$$Ax = b \implies (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

$$\frac{\delta x}{\delta A} = 4396 \qquad \text{cond}(A) = 1623$$

Ha A invertálható és $\|\Delta A\|\cdot\|A^{-1}\| > 0$, akkor indukált mxnormában.

$$\boxed{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}{1-\|\Delta A\|\|A^{-1}\|}\cdot\underbrace{\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}_{\text{relatív hiba}}}$$

$$\frac{A\cdot A^{-1}}{1-\cancel{A}\cdot A^{-1}}\cdot\frac{\cancel{A}}{A}$$

felülről becsülhető

Átfogalmazva

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1-\text{cond}(A)\cdot\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\cdot\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

Segédtétel

$\|M\| < 1$, akkor $(I + M)$ invertálható.

$$\boxed{\|(I+M)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|M\|}}$$

Egyesített tétel. Szorzásfelbontás (LER j+b)

$$Ax=b \implies (A+\Delta A)(x+\Delta x) = b+\Delta b$$

teljesül az alábbi becslés

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\mathrm{cond}(A)}{1-\mathrm{cond}(A)\cdot\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\cdot\left(\underbrace{\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}}_{\text{A és b relatív hibájának összege}}\right)$$

LU felbontás <u>nem</u> tudja javítani a kondíciószámot.

Biz

$$Ax=b \implies LUx=b \implies Ly=b,\quad Ux=y$$

$$A=LU \implies \|A\| < \|L\|\cdot\|U\|$$

$$A^{-1}=U^{-1}\cdot L^{-1} \implies \|A^{-1}\| \le \|L^{-1}\|\cdot\|U^{-1}\|$$

ebből következik: $\mathrm{cond}(A) \le \mathrm{cond}(L)\cdot \mathrm{cond}(U)$

$\mathrm{cond}(L)$, $\mathrm{cond}(U)$ lehet $\gg$ mind $\mathrm{cond}(A)$

Relatív maradék

$$\boxed{\eta = \frac{\|r\|}{\|A\|\cdot\|\tilde{x}\|}}$$

A módszer stabil, ha $\tilde{x}$ közelítő megoldásához tartozó

$(A+\Delta A)\cdot\tilde{x} = b$ -nél

$\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ kicsi = kicsit perturbált csak ~~$Ax=b$~~

$(A+\Delta A)\cdot\ \ = b$

ΔA igazából nem tudjuk. Csak $A\tilde{x}$-et számoljuk

$\tilde{x}$ az a $Ax=b$ közelítő megoldása.

Ha $\Delta A + A$ van, akkor ezzel 0

$\|r\|$ — reziduumvektor $\quad \boxed{r := b - A\tilde{x}}$

Pontos megoldás esetén reziduum vektor értéke nulla. $\tilde{x}$-al $A\tilde{x}$ nem teljesen b.
Ez az eltérés lesz r.

η pedig arra jó, hogy $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$-t tudjuk becsülni

Becslés relatív maradékra

$$\boxed{\eta \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}$$

→ Tehát ha η akkor $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ is nagy lesz.
Ehhez tehát nem kell más.

Biz Illeszkedő mxnormában adjuk meg.

tudjuk: $b = (A + \Delta A)\cdot\tilde{x} = A\tilde{x} + \Delta A\tilde{x}$.

$b - A\tilde{x} = r$. $r = \Delta A\tilde{x}$. Illeszkedés: $\|r\| \leq \|\Delta A\|\cdot\|\tilde{x}\|$

relatív maradék $\eta = \frac{\|r\|}{\|A\|\|\tilde{x}\|} \leq \frac{\|\Delta A\|\cdot\|\tilde{x}\|}{\|A\|\cdot\|\tilde{x}\|} \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$

Relatív maradék $\|\;\|_2$-ben

Ha A invertálható, akkor

$$\boxed{\eta_2 = \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}}$$

Biz belátjuk, hogy

$\Delta A = \frac{r\tilde{x}^T}{\tilde{x}^T\tilde{x}}$ $\boxed{A}$ jó perturbáció

Ha $\tilde{x}$ egy módosított LER megoldása, akkor ez megfelel a LER-beli ΔA-val!

$$(A + \Delta A)\cdot\tilde{x} = \left(A + \frac{r\tilde{x}^T}{\tilde{x}^T\tilde{x}}\right)\tilde{x} = A\tilde{x} + \underbrace{\frac{r\tilde{x}^T\tilde{x}}{\tilde{x}^T\tilde{x}}}_{} =$$

$$= A\tilde{x} + \underset{r \text{ definíció szerint}}{r} = Ax + (b - A\tilde{x}) = b \quad \square$$

számlálóban és nevezőben is ua a szám van. $\boxed{\tilde{x}^T\tilde{x}}$ egyszerűsítés

Felhasználjuk: $\|r\tilde{x}^T\|_2 = \|r\|_2\cdot\|\tilde{x}\|_2$

behelyettesítjük $\boxed{A}$-t

$$\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \overset{?}{=} \eta_2 \rightarrow \frac{\|r\tilde{x}^T\|_2}{\|A\|_2\|\tilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2\cdot\|\tilde{x}\|_2}{\|A\|_2\|\tilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2}{\|A\|_2\|\tilde{x}\|_2}$$

$\tilde{x}^T\tilde{x} \Rightarrow \|\tilde{x}\|_2^2$ ekvivalens.

Ha $\eta_2 < \varepsilon_1$, akkor aritmetikában legpontosabb megoldás!

Nem Lineáris egyenletek Numerikus Megoldása

EA06 "8" HORNER

6

$f(x)=0$. $f=p$ polinom $\Rightarrow$ gyökkeresés

Eddig: $Ax=b$ LER.

Ez az, amikor f fv. lineáris, azaz

$f(x)=Ax-b$ alakú

Most f egy tetszőleges NLEgyenlet lesz.

pl: $f(x)=\cos(x)$

$f(x)=x^2-2$

$f(x^*)=0$ $x^*=?$ $\boxed{x^* = \text{egyenlet gyöke}}$

$\varphi \in \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ NLER egyenlet fixpontját keressük $x^*=\varphi(x^*)$ $x^*=?$

fixpontiteráció

$x^2+2x=0 \to$ $f(x)=0$ típusú egyenlet

$x=-x^2-x \to$ átfogalmazva. $x=\varphi(x)$ típusú lesz

Ism Bolzano tétel

Ha van egy folytonos fv $[a,b]$-n, és a,b előjele ellenkező, akkor $\exists$ gyök

Ha $f\in C[a,b]$-n és $f(a)\cdot f(b)<0$, akkor $\exists x^*\in(a;b)$: $f(x^*)=0$

BIZ intervallum felezéssel lett előállítva

Hibabecslés: k. felezésben milyen távol vagyunk a megoldástól. x_k, y_k

$$|x_k - x^*| < \frac{b-a}{2^k}$$ $\leftrightarrow$ Mindig felülről becsülhető a k. lépés intervallum felével.

Ha $f \in C[a,b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$
és $f \in D(a;b)$ és $f' > 0$ vagy < 0 → szigorúan nagyobb mint nulla. Szig mon, ezért egyértelmű a gyök
akkor $\exists ! x^* \in (a,b) : f(x^*)$

Fixpont tételek

ötlet: $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \varphi(x)$

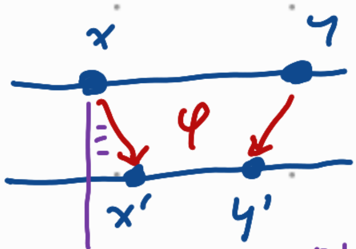
$x^* \in \mathbb{R}^n$ pontot a $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés fixpontjainak nevezzük, ha $x^* = \varphi(x^*)$
Függvény helyben hagyja.

Kontrakció

A $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés kontrakció, ha $\exists q \in [0,1)$, hogy → távolság ≈ norma

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \le q \cdot \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

q → kontrakciós együttható



felülről becsülhető az, hogy mennyire megy össze. $q < 1$.
Eredeti távolság mindig csökken

De! $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esetet nézzük csak, tehát elég abszolútérték

$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q \cdot |x-y|$ egydimenzióban.

Állítás: $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^1[a,b]$
és $|\varphi'(x)| < 1$ $\forall x \in [a,b]$ $\to$ két elégséges feltétel.
akkor φ kontrakció $[a,b]$-n.

De ha nem teljesülnek, attól még lehet kontrakció

Biz Lagrange középérték

$q := \max |\varphi'(x)| < 1$

def: $\forall x,y \in [a,b]$, $x<y$: $\exists \xi \in (x;y)$:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \underline{|\varphi'(\xi)| \cdot |x-y|} \leq q \cdot |x-y|$$

legnagyobb derivált, de még mindig kisebb mint 1.

Brouwer-féle fixponttétel

A fixpont létezéséről:

Ha $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ és $\varphi \in C[a,b]$-n
akkor $\exists x^*$ fixpont $[a,b]$: $\varphi(x^*) = x^*$

Biz Bolzano féle $g(x) = x - \varphi(x)$

Ezzel biztosítjuk a Bolzano-tétel feltételeit.

A végpontokon vizsgálni, hogy $g(a)$ és $g(b)$ ellentétes.

$g(a) = a - \varphi(a) \leq 0$ és $g(b) = b - \varphi(b) \geq 0$

$\Rightarrow g(a) \cdot g(b) \leq 0.$

(Ha $g(a) \cdot g(b) = 0$. Akkor valamelyik 0.
Ha valamelyik az, akkor a v b fixpont!
Tehát a végpont fixpont)

Másik esetben már teljesül a Bolzano tétel:

$\exists x^* \in (a,b)$: $g(x^*) = x^* - \varphi(x^*) = 0 \iff \varphi(x^*) = x^*$

Vagyis g-nek biztos van (a,b)-n gyöke!

x^* gyöke $\Rightarrow$ fixpontja

Banach-féle fixponttétel

Ha $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ ős kontrakció akkor

- Létezik fixpont pontosan egy létezik
  $\exists ! x^* \in [a,b] : x^* = \varphi(x^*)$
- $\forall x_0 \in [a,b]$ esetén az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ $k \in \mathbb{N}_0$ sorozat: konvergens és $\lim_{k \to \infty} x_k = x^*$
  Bárhonnan indulunk, x^* fixpontba konvergál
- hibabecslések igazak

$$|x_k - x^*| \le q^k \cdot |x_0 - x^*| \le q^k (b-a)$$

$$|x_k - x^*| \le \frac{q^k}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|$$

Minden lépésben egyre közelebb jövünk a megoldáshoz.
k. lépésben milyen messze vagyunk a megoldástól

Iteráció konvergenciájának elégséges feltétele.

Ha $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ ~ Banach fixponttétel
és $\varphi \in C^1[a,b]$
és $|\varphi'(x)| < 1$ $\forall x \in [a,b]$-n:
Akkor az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ iteráció konvergens ha $x_0 \in [a,b]$, és érvényesek a hibabecslések.

Lokális fixponttétel gyengítünk a feltételen:

Legyen $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$
Ha $\varphi \in C^1[a,b]$
és $\exists \xi \in [a,b]$ és $\delta > 0$ melyre
$|\varphi'(x)| \le q < 1$ $\forall x \in [\xi - \delta, \xi + \delta] \subset [a,b]$

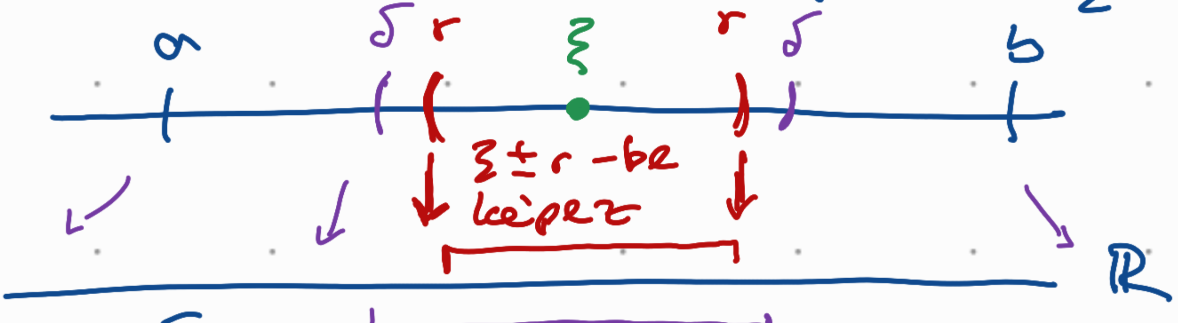
L ξ-nek δ sugarú környezetében a lokális H < 1

Ha $\exists r: 0 < r \leq \delta$ melyre

L $|\varphi(\xi) - \xi| \leq (1-q)\cdot r$

$\Rightarrow$ Akkor φ kontrakció $[\xi - r, \xi + r]$-en.

L és $\forall x \in [\xi - r, \xi + r]$: $\varphi(x) \in [\xi - r, \xi + r]$



Biz.

Feltétel az, hogy φ kontrakció a $\xi \pm \delta$ intervallumon.

Teljesül $\pm\delta$-n belül is. $\pm r \subset \pm \delta$

Tetszőleges $x \in [\xi - r, \xi + r]$ esetén

még intervallumra is képez, mert

$$|\varphi(x) - \xi| = |\varphi(x) \underbrace{- \varphi(\xi) + \varphi(\xi)}_{\text{bővítünk, levonunk}} - \xi| \leq$$

ennek $<r$-nek kell lennie

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| + |\varphi(\xi) - \xi| \leq$$

3Δ egyenlőtlenség

tétel 3. feltétele 1:1

φ kontrakciósság miatt felülről becsülhetjük

$$q\underbrace{(x - \xi)}_{\leq r} + (1-q)\cdot r = r$$

felső becslés.

Tehát a φ az $x \in [\xi - r, \xi + r]$-ben képez.

Teljesül a Banach-fixponttétel.

Konvergens az eljárás. □

$\Rightarrow$ Ha a lokális fixp. teljesül, akkor a lokálisé is teljesül!

Lehet a fv. össze-vissza lépked, de belekerül $\xi \pm r$-be előbb utóbb.

Konvergenciarend (6ii)

Milyen gyorsan tart egy sorozat a határértékéhez

Def x_k konvergens sorozat. x^* a határértéke.
p-ed rendben konvergens, ha
$\exists c \in (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$, hogy:

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = c}$$

$$\frac{\text{határérték távolság } k.+1 \text{ lépésben}}{|\text{távolság } k\text{-ban}|^p}$$

Mennyivel kerülök közelebb.

p értéke
→ túl nagy ⇒ $c = +\infty$
→ túl kicsi ⇒ $c = 0$ → A kapott konvergencia-rend nagyobb a megadottnál.
↳ adjust value

p egyértelmű, $p \geq 1$
p nem feltétlenül egész

x^* az 0

$\left(\frac{1}{2^n}\right)$ ⇝ $p=2 \Rightarrow \infty$, $p=1 \Rightarrow 1/2$

Tehát $p=1$ a konvergencia-rend!

$p=1$ ⇒ lineáris / elsőrendű
$p=2$ ⇒ kvadratikus / másodrendű
$p>1$ ⇒ szuperlineáris

Átfogalmazva a def:

$$\boxed{\begin{gathered}\exists K \in \mathbb{R}^+ : \forall k \in \mathbb{N}_0 : \\ |x_{k+1} - x^*| \leq K \cdot |x_k - x^*|^p\end{gathered}}$$

Olyan K számot keresünk, amivel a k+1 lépés hibája felülről becsülhet k-lépés p-ed.-ik hatványával · K

fixponttételek a konvergenciarendről nem állítanak

P-ed rendben konvergens iterációk

Legyen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^p[a,b]$ és az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ sorozat konvergens.
└ határértéke x^*

Ha $\varphi'(x^*) = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$, de → $p-1$ deriváltig 0
$\varphi^p \neq 0$ → de p-ben már nem.

⇒ Akkor a konvergencia p-edrendű és hibabecslése:

$$\boxed{|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_p}{p!} |x_k - x^*|^p}$$

$K \equiv \frac{M_p}{p!}$

Ahol $M_p = \max\limits_{\xi \in [a,b]} |\varphi^{(p)}(\xi)|$. → p-edik derivált abszolút maximuma

Biz A megoldás φ körüli Taylor-polinomját írjuk fel

$\exists \xi \in (x, x^*)$, hogy φ függvényértékét x-ben fel lehet írni a p-adrendű polinomjával
Maradéktag is lesz.

$$\varphi(x) = \varphi(x^*) + \boxed{} + \frac{\varphi^{(p)}}{p!}(x - x^*)^p$$

Minden tag kiesik Taylor-polinom.

Vizsgáljuk $x = x_k$ helyen. itt $\exists \xi_k$

M_p az ennek az abszolút maximuma

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = \underbrace{\varphi(x^*)}_{} + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k - x^*)^p$$

ez tudjuk, hogy fixpont.

Ezzel elértük, hogy $\frac{M_p}{p!} |x_k - x^*|^p$ formában van!

pedrend ++ Banach-fixpont

Akkor a konvergencia sebességét is tudjuk mondani:

Ha $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ és
x^* a φ fixpontja és
konvergenciarend feltétel teljesül

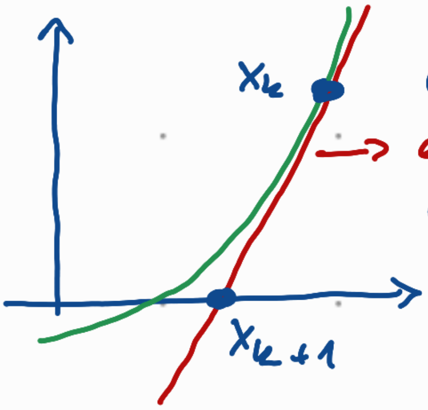
$\Longrightarrow$ Akkor:
- fixpont $\exists!$
- $\forall x_0 \in [a,b]$ esetén konvergens és $\lim x_k = x^*$
- a fenti hibabecslés teljesül.

1x

Newton-Módszer 7

Tetszőleges fv-hez iteráció készítése, amivel gyököt megkeressük

Feladat: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NLER zérushelyét (gyökét) keressük. $f(x^*) = 0$ $x^* = ?$ $\exists?$ több?



$f, x_k \to$ érintő $\to$ zérushely $\to x_{k+1}$

$\to$ egyszerűbb fv. $\Rightarrow$ ezt könnyű kiszámolni

érintő:

$$y - f(x_k) = f'(x_k) \cdot (x - x_k)$$

y=0-t keressük

Iterációs fv:
$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 0 \ldots}$$

Analitikus megközelítés: f gyöke $\approx x \to$ bizonyos feltételek mellett biztosítja a Taylor P.

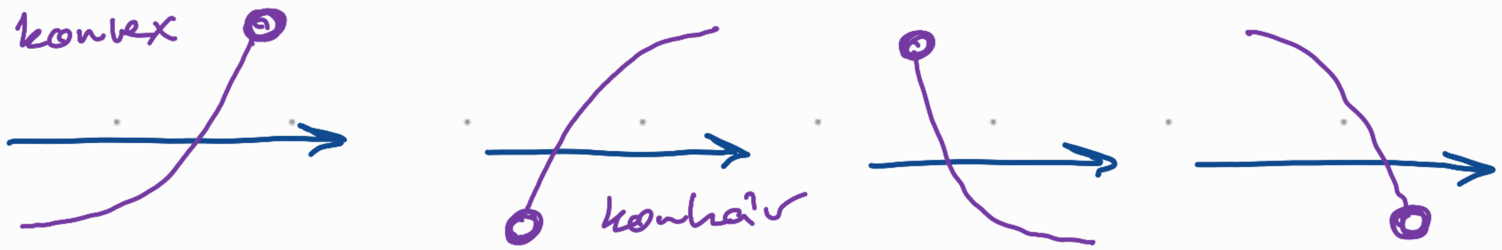
Ezt a tulajdonságot

Taylor polinom gyöke.

Csak 0. rendű, 1. rendű tagot nézzük.
így is levezethető.

Monoton konvergencia

Ha $f \in C^2[a,b]$ és kétszer folyt. differenciálható
$\exists x^* \in [a,b]: f(x^*) = 0$ lokális gyök $[a,b]$-n
f' és f'' állandó előjelű külön külön végig egy előjelű
$x_0 \in [a,b]: f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$
$\Rightarrow$ Akkor x_0-pontból indított Newton-módszer monoton konvergál x^*-hoz



$f' = \oplus$ $f'' = \oplus$ | $f' = \oplus$ $f'' = \ominus$ | $f' = \ominus$ $f'' = \oplus$ | $f' = \ominus$ $f'' = \ominus$

Balról jobbra növekszik / monoton nő

Biz A $f' > 0$, $f'' > 0$ esetre.
$f(x_0) > 0 \rightarrow$ Taylor formula 2 fokú, x_k középpont:
$\exists \xi_k \in (x, x_k)$

$$f(x) = \underbrace{f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)}_{=0 \text{ mert gyököt beírunk}} + \underbrace{\frac{f''(\xi_k)}{2}}_{\text{maradéktag } >0 \text{ feltétel.}} \cdot \underbrace{(x - x_k)^2}_{>0}$$

x_{k+1}-et helyettesítjük be
következik: monoton fogyó: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} < x_k$
Valamint x_k alulról korlátos:
$0 = f(x^*) < f(x_k)$ és f szigmon nő $\Rightarrow x^* < x_k$

$\Rightarrow$ így konvergens a sorozat: $\hat{x} = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$

↳ ismeretlen de létező határérték

Átviteli elv:
Folytonos fv-k esetén tudjuk: ÉT-ben konvergens sorozat $\Rightarrow$ ÉK-ben lévő tagok sorozatán tart határértékben felvett fv- értékhez.

$$f(\hat{x}) = \lim_{k\to\infty}(x_{k+1}) = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{f''(\xi_k)}{2}}_{\text{korlátos}} \underbrace{(x_{k+1}-x_k)^2}_{\to 0 \text{ mert Cauchy:}} = 0$$

sorozat tagjai közötti különbség tart $\to 0$-ba

Mon. konv.
nem mondja ki, hogy
- milyen gyorsan közelít
- milyen távolról lehet indulni

↓ lokális!

Lokális Konvergenciatétel

Ha $f \in C^2[a,b]$-n és

$\exists x^* \in [a,b] : f(x^*) = 0$ van gyök $[a,b]$-n

f' állandó előjelű

$m_1 = \min\limits_{a \mapsto b} |f'(x)| > 0$

$$\boxed{M = \frac{M_2}{2m_1}}$$

$M_2 = \max\limits_{a \mapsto b} |f''(x)| < +\infty$

↳ felülről korlátos

$x_0 \in [a,b] : |x_0 - x^*| < r \to x_0$ legyen x^* r sugarú körében benne.

ahol $r = \min\left\{ \frac{1}{M}, \underbrace{|x^* - a|, |x^* - b|}_{[a,b]\text{-n belül}} \right\}$

$\Rightarrow$ Akkor x_0-ból indított Newton-módszer másodrendben konvergens, és

$$\boxed{|x_{k+1} - x^*| \leq M \cdot |x_k - x^*|^2}$$

Hibabecslés érvényes.

"Legyünk elég közel" $\Rightarrow$ nagyon gyorsan konvergál.

"Előbb-utóbb" a monoton konvergens elég gyors lesz $\Rightarrow$ mert teljesül a lok. konvergencia.

Biz Taylor-formula $\exists \xi_k \in (x_k, x^*)$, másodfokú maradéktaggal. $\Rightarrow$ másodrendben konvergál

Hiányzik: Miért konvergál.

Bevezetjük $\varepsilon_k := x_k - x^*$.

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq M \cdot |\varepsilon_k|^2$$

Ez azért $\neq 0$, mert

Taylor formulából: $\dfrac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|} \neq 0 \longrightarrow$ Ez feltétel volt

Biz Konvergencia

Teljes indukcióval: $k_r(x^*)$ környezetben marad.

Tudjuk: $|x_0 - x^*| < r$. Tfh: $|x_k - x^*| = |\varepsilon_k| < r < \frac{1}{M}$

Ekkor: $|\varepsilon_{k+1}| = |x_{k+1} - x^*|$ Ezt akarjuk bemutatni

$$\leq M \cdot |\varepsilon_k|^2 =$$

$$= \underbrace{(M|\varepsilon_k|)}_{<1} \cdot |\varepsilon_k| < |\varepsilon_k| < r$$

Az egyes iterációk során nem lépünk ki k_r-ből

Bizonyítás többi része

Megjegyzés

Ha az érintőnknek nincs gyöke $f'(x_k) = 0$
$\Rightarrow$ Akkor elakadunk.

Néha csak elsőrendű a konvergencia.

Ha: $f'(x^*) = 0$ azaz többszörös gyök. $\rightarrow$ fv-re a newton módszer.

kiküszöbölhető

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Ha r-szeres gyök: $x_{k+1} = x_k - r \cdot \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

Lehetett volna $\varphi(x) := x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ is a definíció, de akkor $C^3[a,b]$ feltétel kellett volna.

Nem biztos, hogy konvergál.

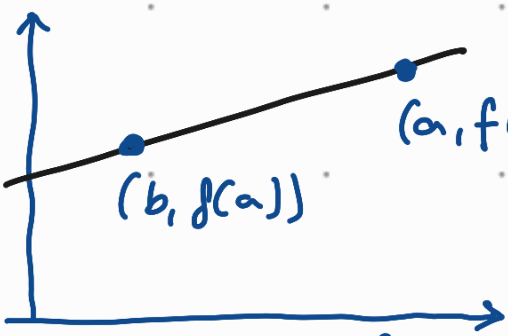
- $f'(x) = 0$
- köröz gyök körül. → pontos számolás esetén
- nagyon távol a gyöktől

Húr & Szelőmódszer 7_{II}

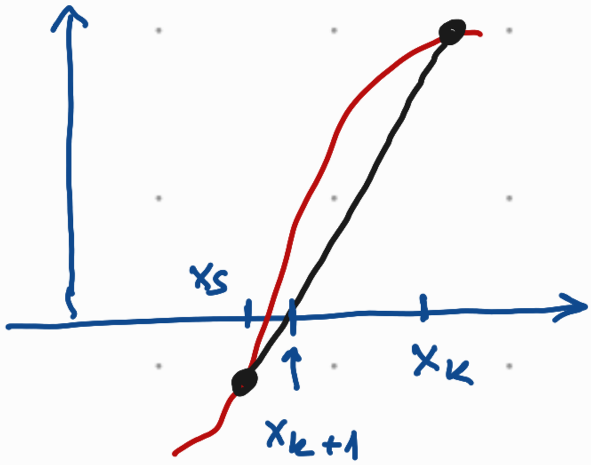
Newton módszer baja:
- f' kell → lehet nehéz.
- ha nem ismerjük f-et, csak közelítőleg.

kell egy olyan, amihez nem kell deriválni.

Húrmódszer



⇒



egyenes $m = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$

egyenlete

Az $y=0$-t keressük

$$\boxed{y - f(a) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \cdot (x - a)}$$

$y=0$ zérushely: $y = \dfrac{f(a) \cdot (a-b)}{f(a) - f(b)}$

Def $f \in C[a,b]$ esetén, ha $f(a) \cdot f(b) < 0$ akkor a húrmódszer.

$x_0 = a \qquad x_1 = b$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)\cdot(x_k - x_s)}{f(x_k) - f(x_s)}$$

$s =$ legnagyobb index, amire $f(x_k)\cdot f(x_s) < 0$

Megköveteljük, hogy x_s az x_k-val ellentétes előjelű.

Húrmódszer konvergenciája

Ha $f \in C^2[a,b]$ és

$f(a)\cdot f(b) < 0$ és

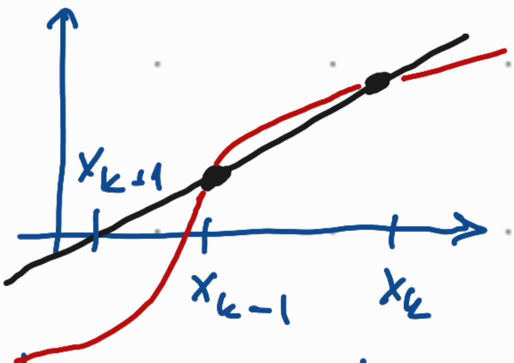
$M\cdot(b-a) < 1$.

$\Rightarrow$ Akkor a húrmódszer konvergál x^*-hoz és

$$\boxed{|x_k - x^*| \cdot \frac{1}{M}\left(M\cdot|x_0 - x^*|\right)^k} \qquad M = \frac{M_2}{2m_1}$$

Szelőmódszer

Mindegy, az előjel



$x_0, x_1 \in [a,b]$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)\cdot(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

konvergens ha $f \in C^2[a,b]$ és

f' állandó előjelű!

$x_0, x_1 \in [a,b]$

$$\left.\begin{array}{l}|x_0 - x^*| \\ |x_1 - x^*|\end{array}\right\} < r := \min\left\{\frac{1}{M}, |x^*-a|, |x^*-b|\right\}$$

akkor konvergenciarend $\boxed{p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Newton-módszer többváltozós esetre

Feladat: $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad F(x) \mapsto x = ?$

$F(x) = 0 \iff x = \phi(x)$

Def Többváltozós NM $\to$ felülettel közelítjük, vagy Taylor-polinomját vesszük

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(F'(x^{(k)})\right)^{-1} \cdot F(x^{(k)})$$

$\hookrightarrow$ mátrixxal nem lehet osztani, de inverzével lehet szorozni

Broyden módszer: az invertálást próbálja kiküszöbölni

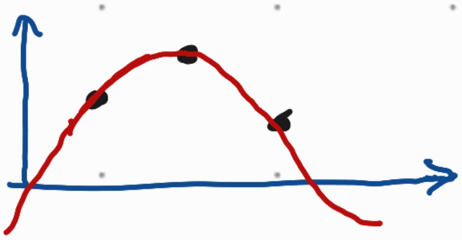
Interpoláció Polinomokkal

8

két nagy családja van

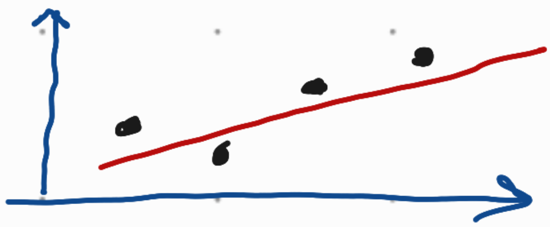
Nehéz fv-eket $\Rightarrow$ könnyíteni

① Interpoláció



Olyan fv-t keresünk ami illeszkedik a pontokra.

② Approximáció



Olyan fv-t keresünk, ami közel van a mérési pontokhoz.

Interpolációs Alapfeladata

$x_0 \dots x_n \in [a,b]$ alappontok

$y_0 \dots y_n \in \mathbb{R}$ függvényértékek

Keressünk $p_n \in P_n$ polinomot, hogy

↳ legfeljebb n-ed fokú polinom

$$p_n(x_i) = y_i \quad i = 0..n$$

Ezt a p_n polinomot interpolációs polinomnak hívjuk.

IP egyértelmű létezése

$$\boxed{\exists!\, p_n \in P_n : \quad p_n(x_i) = y_i}$$

LER megoldás a bizonyításban lévő mx rosszul kondicionált.

↳ Matematikai bizonyításra nagyon jó

Lagrange-Alak

$$\boxed{l_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}} \qquad l_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

↓

Lagrange alappolinomok

l_k felírható így is

$$l_k(x) = \frac{\omega_k(x)}{(x - x_k)\cdot \omega_n'(k_n)} \qquad \omega_n(x) = \prod_{j=0} (x - x_j)$$

Lagrange interpolációs polinom

$$\boxed{L_n(x) = \sum y_k l_k(x) \equiv p_n(x)}$$

Osztott differenciák

$x_0 \cdots x_n$ által meghatározott elsőrendű o.d.

$$f[x_i, x_{i+1}] := \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \qquad i = 0 .. n-1$$

$$f[x_i, x_{i+1} \cdots x_{i+k-1}, x_{i+k}] := \frac{f[x_{i+1} \cdots x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1} \cdots x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

$k = 0 .. n \quad i = 0 \ldots n-k$

Táblázatba rendezve

x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$	elsőrendű	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

$$\frac{f[x_1, x_2] - f[x_0 - x_1]}{x_2 - x_0} \longrightarrow$$ második rendű osztott differencia

Newton-féle bázis

korábban $1, x, x^2 \ldots$, és $l_0, l_1 \ldots$ volt.

$$1, \ (x - x_0), \ (x - x_0)(x - x_1), \ \ldots \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

Newton-alak

$$\boxed{N_n(x) := f(x_0) + \sum f[x_0, x_1 \cdots x_k] \cdot \omega_{k-1}(x)} \equiv L_n$$

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, x_{n+1}] \cdot \omega_n(x)$$

$\rightarrow$ rekurzívan hozzáadható új alappont!

Lagrange-alaknál az összes bázisban szerepel az alappont ⇒ mindent újra kell számolni.
Newton alakban ∃ rekurzió

Osztott differenciák tulajdonságai

$$\boxed{f[x_0, x_1 \dots x_k] = \sum \frac{f(x_j)}{\omega_k'(x_j)}}$$

Felírható zárt alakban is.

Ha σ a $(0 \dots k)$ értékek permutációja, akkor

$$f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(k)}] = f[x_0, x_1 \dots x_k]$$

Az OD-ben a sorrend nem számít.
Szimmetrikusak az alappontokra nézve.

Biz Newton alak

Tudjuk: Lagrange interpoláció

konstans érték
$L_0(x) = f(x_0)$

$$L_n(x) = L_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(L_k(x) - L_{k-1}(x)\right) \rightarrow \text{teleszkópikus összeg}$$

ahol L_k az $x_0 \dots x_k$ alappontokon alapuló L. P

→ képletszerűen kiszámolható az alappontok Lin komb. ja-ként

$$\frac{f(x_k)}{\omega_{k-1}(x_k)} = \frac{L_k - 1(x_k)}{\omega_{k-1}(x_k)} = c_k$$

$\vdots$

$$\frac{f(x_k)}{\omega_{k-1}(x_k)} - \sum \frac{f(x_j)}{(x_k - x_j)\,\omega'_{k-1}(x_j)} = c_k$$

$\sqrt{\text{Biz többi része.}}$

$\rightarrow \omega_{k-1}(x_k) = \omega_k'(x_k)$

ω egy szorzat

Visszahelyettesítünk

$$\sum_{j}^{k} \frac{f(x_j)}{\omega'_k(x_j)} = f[x_0 \dots x_k] = c_k$$

$\exists\, \xi_x \in [x, x_0]$ osztott dif kifejez

$$f[x, x_0] = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = f'(\xi_x)$$

Hibaformulák

Mekkora a hiba azokban a pontokban, ahol nincs interpoláció?

$x \in \mathbb{R}$ tetszőleges

$[a,b]$ intervallum, $x_0 \dots x_n$ és x által kifeszített intval.

Továbbá $f \in C^{n+1}[a,b]$-n.

Ekkor $\exists \xi_x \in [a,b]$, melyre

$\exists \xi(x)$, hogy a pontos hiba ebben az alakban előáll

$$\boxed{f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot \omega_n(x)}$$

$$\omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

f^{n+1} derivált abszolút maximumát keressük

$$M_{n+1} := \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

$$\left(\|f^{(n+1)}\|_{C[a,b]} \text{ és } \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \right)$$

Így a hibabecslés:

Gyakorlati szempontból ez egy jó felső becslés

$$\boxed{|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega_n(x)|}$$

Általános érvényű.

További összefüggéseket tudjuk

Hibaformula Newton-alakra

$x \in \mathbb{R}$ tetszőleges $x \neq x_i$. Ekkor

$$\boxed{f(x) - N_n(x) = f[x, x_0 \dots x_n] \cdot \omega_n(x)}$$

plusz egy sorát kiszámoljuk

Biz Hibaformula

Úgy tekintjük x-et, mint egy alappont.

$$f(x) - N_n(x) = N_{n+1} - N_n = f[x, x_0 \dots x_n] \cdot \omega_n$$

pontos hibát explicit alakban fel tudjuk írni

következmény

$$f[x, x_1 \dots x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

Ha $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_i$
$[a,b]$ $x, x_1 \dots x_n$!
$\exists \xi_x \in [a,b]$ melyre

Csebisev-Polinomok

Hogyan válasszuk meg az alappontokat

9

→ hogy lesz minimális a hibabecslés
↳ nem a hibát optimalizálja hanem a hibabecslést lesz pontosabb

$$\boxed{T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))} \qquad x \in [-1,1]$$

Rekurziós alak

$T_0(x) = 1 \qquad T_1(x) = x$

$T_{n+1}(x) := 2x \cdot T(x) - T_{n-1}(x) \qquad n = 1..$

Biz addíciós tétel kétszer

$\alpha = \arccos(x)$, $x = \cos(\alpha)$:

$2x \cdot T(x) - T_{n-1}(x) = 2\cos(\alpha) \cdot \cos(n\alpha) - \cos((n-1)\alpha)$ 1x

$= \boxed{\cdots} \cos(n\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \sin(n\alpha) \cdot \sin(\alpha) =$

$= \cos((n+1)\alpha) = \underline{T_{n+1}}$

$P_n \in P_n$ Főegyüttható: 2^{n-1} $\quad n \geq 1$

1 főegyütthatós csebisev polinom.

↓

egy-főegyütthatós: $\boxed{\tilde{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)}$

Tétel

→ T_n-nek n db különböző valós gyöke $[-1,1]$

→ 0-ra szimmetrikus

→ n prs/ptln ⟺ T prs/ptln

Explicit képlet gyökökre [absz max 1, úgy, hogy n-edfokú]

$$\boxed{x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\cdot\pi\right)}$$, $k = 0 .. n-1$

↳ $\cos(\arccos(x)) = 0 \iff n \cdot \arccos(x_k) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

T_{n+1}-nek $n+1$ db szélsőértéke van $[-1,1]$-en

Ortogonális rendszert alkotnak.

$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$] → súlyozott skalárszorzat
→ előjeles összegzés ≈ szorzat

$$\langle T_n, T_k \rangle_w = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) \cdot T_k(x)}{\sqrt{1+x^2}} dx = 0 \quad n \neq k$$

↳ bármely két cseb. polinom ⤨ ort. egymásra

Csebisev-tétel /miért ezek minimalizálják az interpolációs hibáját/

Extremális tulajdonsága a polinomoknak.
Ezért a csebisev pol.-ok minimalizálják az int. pol hibáját

$$\min_{\tilde{Q} \in P_n^{(1)}} = \|\tilde{Q}\|_\infty = \|\tilde{T}_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$$ = absz. max! → $\tilde{T}$

↓ összes egyfőegyütthatójú n-ed fokú polinom

↘ absz. max lehető legkisebb

$\|\tilde{Q}\|_\infty = \|\tilde{Q}\|_{C[-1,1]}$

↘ A csebisev polinomnak legkisebb $[-1,1]$-en a absz. max.-a!

Vegyük az összes "n" főegyütthatójú polinomot.
Ezek közül a Cseb-pol aminek a legkisebb a csúcsa.

Következmény $\Rightarrow$

Válasszuk meg $\boxed{\omega_n = \prod_{j=0}^{n} (x - y_j)}$ -nél a csebisev polinom gyökeit

$\Rightarrow$ alappontok.

úgy, hogy ω_n -nek a minimuma $\| \|_\infty$ -ra nézve.

úgy kell megválasztani, hogy az n+1. csebisev polinom legyen..

Interpolációs Hibája

lagrange-e

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \|\tilde{T}_{n+1}\|_\infty = \boxed{\frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}}$$

ez csak $[-1, 1]$-en $\to$ $[a, b]$-n $\underbrace{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}}_{\text{a kettő szorzata kell ha } [a,b]}$

ki lehet terjeszteni.

$$\boxed{\varphi(x) :=} \frac{b-a}{2} \cdot x + \frac{a+b}{2}, \quad x \in [-1, 1]$$

$\hookrightarrow$ átképezés más intervallumba

Interpolációs Polinomok konvergenciája

$(x_0^{(0)}) \to L_0$

$(x_0^{(1)}, x_1^{(1)}) \to L_1$

$\vdots \qquad \vdots$

$(x_0^n, x_1^n, x_2^n) \to L_n$

alappontsor $\to$ interpolációs polinom

Egy másik ilyen lehetne a csebisev polinom

Kérdések $\to$? $\lim_{x \to \infty} \|f - L_n\|_\infty = 0$

Ha növelem az alappontok számát, akkor tart-e az illesztett fv.

milyen x-re?

milyen f-re?

$\downarrow$

nem mindig igaz.

$\downarrow$

mikor igaz?

Tfh: $f \in C^\infty[a,b]$ és $\exists M>0: \|f^{(n)}\|_\infty \leq M^n$

van M ami minden deriváltjánál kisebb

akkor $\forall (x_k^{(n)} : k=0..n)$

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0$$

Végtelenül folyt. differenciálható: minden alappontrendszer jó.

Marcinkiewicz Ha $f \in C[a,b]$, akkor létezik jó (speciális) alappontrendszersorozat. (egyenletes konvergencia)

Faber "Nincs univerzális alappontrendszer"
$\forall (x_k^{(n)} : k=0..n)$ alappontrendszer sorozat esetén $\exists f \in C[a,b]$, hogy
$\lim \|f - L_n\|_\infty \neq 0$

Lagrange interpoláció zavart hibája

Q: mi van, ha már az alappontsorozat (amit mérek) se pontos már?

$f(x_0) .. f(x_n) \to L_n$ → pontos interpoláció

$f(\tilde{x}_0) .. f(\tilde{x}_n) \to \tilde{L}_n$

$\} \; |L_n - \tilde{L}_n|$ — $f(x)$ — $\tilde{f}(x)$

$f(x)=y$ koordináta picit pontatlan

Lebesgue $/L/$ Lagrange alappolinomok abszolútértékeinek összegei

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |l_k(x)| \quad x \in [a,b]$$

alsó becslés: $\Lambda_n \geq \frac{2}{\pi} \ln(n+1) + c$ $(c \in \mathbb{R})$ állandó

Lebesgue állandó $\Lambda_n := \max L_n(x) = \|L_n\|_\infty$

örökölt hiba

A pontoshoz képest vizsgáljuk

$$\boxed{\begin{gathered} |L_n - \tilde{L}_n| \leq \varepsilon \cdot \Lambda_n \\ \varepsilon = \max |f(x_i) - \tilde{f}(x_i)| \end{gathered}}$$

$\hookrightarrow$ mérőműszer maximális hiba

Inverz Interpoláció

gyökkeresés interpol-al

ötlet: $f(x) = 0 \rightsquigarrow x^*$ $\quad L_n(x^*) = 0$ -t megoldjuk

$x_{k+1} = x^*$!

Ez nem általánosítható $n > 2$-re

trükk: $f(x^*) = 0 \iff x^* = f^{-1}(0)$ megoldás

Az inverz fv közelítése a 0 pontban $\Rightarrow$ megadja a gyöknek egy közelítését

$f(x_0) .. f(x_n)$ ÉS $x_0 .. x_n$ -re felírjuk a $Q_n(y) \approx f^{-1}(y)$

$x \,|\, f(x) \underset{\text{helyett}}{\rightsquigarrow} f(x) \,|\, x$ -et interpolálom

Invertálható fv-eket lehet közelíteni az inverz interpolációval. ÉS gyököt keresni

Általánosított Inverz $\approx$ Approximáció

(10)

Legkisebb négyzetek módszere (LSM)

Alappontok $\Rightarrow$ polinom (n-ed) x_i pontokban

a $\underbrace{(y_i - p(x_i))^2}_{\sum}$ minimális

általában pontszám $\gg n$ — sokkal kisebb a pontszám

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} (y_i - p_n(x_i))^2} \rightarrow$$

"elég közel van"
Minimális az eltérések négyzetösszege

írjuk fel egy n-ed fokú polinomot LER-ként

$P(x_n) = y_i \quad i=1..N \qquad p_n(x) = a x^n + \dots a_1 x + a_0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & x_2^2 & \vdots \\ & & \ddots & \\ 1 & x_N & \dots & x_N^n \end{bmatrix}_{N \times (n+1)} \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_N \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}_N$$

$Aa = y$ kell megoldani

nem négyzetes mx ??

$\rightarrow$ ha $N = n+1$ akkor interpolációs de most nem

$N > n+1$ esetben alapból nem megoldható.

Általánosított Inverz

túlhatározott teljes rangú mx általános megoldása:

$$n\begin{array}{c} m \\ \begin{bmatrix} m<n \\ \\ \end{bmatrix}\end{array} \qquad\qquad n\begin{array}{c} m \\ \begin{bmatrix} \quad m>n \quad \end{bmatrix}\end{array}$$

túlhatározott

rang$(B) = m$

$B^+ = (B^T B)^{-1} B^T$

Ezt fogjuk használni.

alulhatározott

rang$(A) = n$

$A^+ = A^T \underbrace{(A A^T)^{-1}}_{\text{az inverz miatt kell a teljes rang}}$

$$a^+ = A^+ y = (A^T A)^{-1} \cdot A^T y \iff \underbrace{A^T \cdot A}_{} \cdot a^+ = A^T y$$

ez egy négyzetes mx! Erre már lehet más felbontást csinálni

Teljes rang = maximális számú független sora & oszlopa van

Explicit alak: Gauss-féle normálegyenlet

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i & \cdots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & & \\ \vdots & & & \\ \sum x_i^n & & & \sum x_i^{2n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i^1 y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^n y_i \end{bmatrix}$$

Alappontok hatványössege.
Mellékátlókban ua. értékek szerepelnek.

Tulajdonságok → Az illesztett polinom helyettesítési értékei, és a koordináták közti négyzetes távolság legkisebb

$$\| A \cdot a^+ - y \|_2 \le \| A \cdot a - y \|_2 \quad \forall a \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Bármilyen "a"-t veszünk, az mindig nagyobb, tehát az a^+ minimalizálja

Szinte sose lesz pontos megoldás.

$$\| A \cdot a - y \|_2^2 = \sum (p_n(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \| \, \|_2\text{-ben.}$$

Négyzetesen legjobban közelít

Ha egyenest illesztünk!

Nullára szimmetrikus alappontok esetén.

- Ha A teljes rangú
  $\Rightarrow$ Akkor A^TA szimmetrikus, invertálható

pl. $-1, 1$

- LER alakja $n=1$-ben

(!) Ha $\sum x_i = 0$

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{n}\sum y_i \quad a_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

ennek megoldása átosztva a diagonális elemekkel.

- Négyzetesen legjobban közelítő egyenes átmegy az átlagok pontján:

$$p = \left(\frac{1}{N}\sum x_i, \frac{1}{N}\sum y_i\right)$$

$\rightarrow$ Miért minimalizálja a négyzetes eltérést a képlet?

Biz Szélsőérték

Adott: y_i x_i. Változók: $P_n(x)$ polinom. $\rightarrow$ Ezt minim.

minimalizálandó fv.

$$F(a_0 \dots a_n) := \sum_{i=1}^{N} (y_i - p_n(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \sum_{j=0}^{n} a_j (x_i)^j\right)^2$$

Szélsőérték szükséges feltétele:

Ha deriválható a fv, akkor a derivált $= 0$

deriváljuk k-adik változó szerint

$$\frac{\partial F}{\partial a_k}(a_0, \dots a_n) = 0 \qquad k = 0 \dots n$$

belső fv deriváltja

$$\sum_{i=1}^{N} 2 \cdot (y_i - p_n(x_i)) \cdot \underbrace{\left(-\frac{\partial p_n}{\partial a_k}(x_i)\right)}_{} = 0 \quad /:2$$

$y_i x_i$-ket átviszük

$$\sum^{N} p_n(x_i) \cdot (-(x_i)^k) = \sum y_i (x_i)^k$$

újra behelyettesítjük

$$\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=1}^{n} a_j (x_i)^j \cdot (x_i)^k \Rightarrow \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=1}^{N} a_j (x_i)^{j+k} = \sum_{i=1}^{N} y_i (x_i)^k$$

összevonjuk

kiemelhető.

Kiemelve a_j-t a belső Σ-ből megkapjuk a normálegyenletet

F'' poz. definit $\Rightarrow$ így minimumhely.

F' vektor F'' mx.

Numerikus Integrálás (11)

Feladat:

$\int_a^b f(x)\,dx$ illetve a $\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx$

kiszámolása, ahol w = súlyfüggvény > 0

Eddig: Primitív fv $\mapsto$ Newton-Leibniz

Baj: - nehéz, vagy nincs!

$\int_0^1 e^{-x^2} = ?$ $\Rightarrow$ Numerikus Integrálás kell.

lehet hogy képlet sincs! $\Rightarrow$ két érték között becsülni

$f(x)$-et közelítsük $\rightarrow$ L_n-el.

$\int_a^b w(x)\,dx < \infty$

$$\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)\,w(x)\,dx =$$

$$= \sum \int f(x_k)\underbrace{l_k(x)}_{\text{Lagrange alappolinomok}}w(x)\,dx = \sum f(x_k)\underbrace{\int_a^b l_k(x)w(x)\,dx}_{\text{alappolinomok integrálja}} =$$

$\boxed{\sum A_k f(x_k)}$ kvadratúra formula

$\hookrightarrow$ Alappontokban felvett fvérték bármely lin komb.-ja

kvadratúra interpolációs, ha: $A_k = \int_a^b l_k(x)\,w(x)\,dx$

Pontossági tétel $\rightarrow$ El kell dönteni egy formuláról, hogy interpolációs-e.

$\forall f \in P_n$-re: $\rightarrow$ legfeljebb n-edfokú polinom

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx = \sum A_k f(x_k) \iff$$

feltétel, hogy pontos 0, 1 ... n-edfokúra

$A_k = \int_a^b l_k\, w(x)\,dx \quad k = 0 .. n$

$f \equiv 1$-re konstans 1 fv.

$$\sum_i A_k = \int_a^b w(x)dx := \mu_0$$

$w(x) \equiv 1$ is igaz, akkor

$\sum_i A_k = b-a$ ezen múlik, hogy interpolációs múlik alapesetben.

A $\sum A_k f(x_k)$-ban $2(n+1)$ db változó van.

$\hookrightarrow$ Ezekre is pontos tud lenni, ha még az alappontokat is rögzítjük ($\sim$ Csebisev polinom is ilyen)

Formula típusok

- Newton-Cotes: $w(x)\equiv 1$, $\{x_i : i = 0..n\}$ egyenletes felosztás $[a,b]$-n
- Csebisev típus: $A_k \equiv A$ összes együttható egyenlő
- Gauss típus: maximális $\underline{2n+1}$-ig pontos
  ez a maximum

Newton-Cotes típusú kvadratúraformulák

Zárt $\leftarrow$ Az intervallum két szélső pontja is része az alappontoknak | Nyílt

$Z(n)$ | $Ny(n)$

$x_0 = a \quad x_n = b$ | $x_0 = a+h \quad x_n = b-h$

$h = \dfrac{b-a}{n}$ | $h = \dfrac{b-a}{n-2}$

$x_k = a + kh \quad k = 0..n$ | $x_k = a+kh \quad k = 1..n-1$

$\hookrightarrow$ a, b NEM alappont

$w(x) \equiv 1$ és $x_k = x_0 + kh$ formulában van.

Zárt N-C formula együtthatói

Bármely x kifejezhető $x = a + th$, ahol $t \in [0, n]$

$x - x_j = (t-j)h \rightarrow$ j. edik alappont

$x_k - x_j = (k-j)h \rightarrow$ j, k-adik alappontok távolsága

$$A_k \overset{(=)}{=} \int_a^b l_k(x)dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots \sqrt{k} \cdots (x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots \sqrt{k} \cdots (x_k-x_n)} dx$$

pontossági tétel szerint

A k-adik elem a lagrange polinomban sincs benne

$$t = \frac{x-a}{h}$$

$$A_k = h \cdot \int_0^n \frac{(t-0)\cdots \sqrt{k} \cdots (t-n)}{(k-0)\cdots \sqrt{k} \cdots (k-n)} dt =$$

nevező egy konstans, kiemeljük

integrálás határait vissza kell tolni.

$$= h \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{k!\cdot(n-k)!} \cdot \int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-k} dt =$$

h-t kihelyettesítjük $\frac{b-a}{n}$-el

első k tényező $\sqrt{k}$ k+1 től a végéig

zárt a formula

$$= (b-a)\cdot \underbrace{\frac{(-1)^{n-k}}{n\,k!(n-k)!} \cdot \int_a^b \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-k} dt}_{B_k^z} := B_k^{(z)}$$

– intervallum hosszától független

B_k együtthatók kiszámolása

Nyílt N-C együtthatók

$x = a + th \quad t \in [0, n+2]$

$x_i = (a+th) - (a+(j+1)h) = h(t-(j+1))$

$x_j = (a+(k+1)h) - (a+(j+1)h) = (k-j)h$

$B_k^{(Ny)}$

Interpolációból indulunk ki újra

$$B_{Ny} = \frac{(-1)^{n-k}}{(n+2)\cdot k!(n-k)!} \cdot \int_0^{n+2} \frac{(t-1)\cdots(t-(n+1))}{t-(k+1)} dt$$

Tétel

nyílt és zártra is!

$$\sum_{k=0}^n B_k = 1 \qquad B_k = B_{n-k}$$

elég együtthatók felét $k=0..n$ kiszámolni

Biz $f \equiv 1$-re pontos a formula.

Alappontok szimmetriájából $(y := n-t)$

Nevesített N-C formulák

11ii

Pontossági tétel jobboldaláról:

Együtthatói meghatározhatóak azzal, hogy leellenőrizzük, hogy mekkora polinomig pontosak.

teljz tte

$P_n \overset{\text{pontosság}}{\sim} 1, x, \ldots x^n$

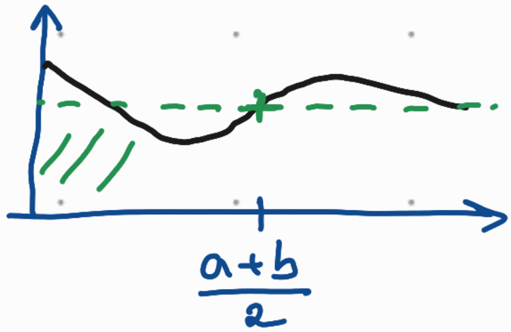
Nem kell explicit kiszámolni az együtthatókat

$\int_a^b 1\,dx \;\ldots\; \int_a^b x\,dx \;\ldots$ Ha az összesre teljesül, akkor kvadratúra formula

Érintő formula N-C kvad. $\sim N_1(0)$

$$\boxed{\int_a^b f \approx (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

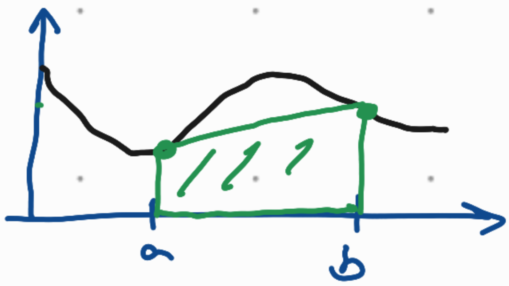
$E(f)$



$A_0 = b - a$

Trapéz formula $\sim Z(1)$

$$\boxed{\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2}\cdot\left(f(a)+f(b)\right)}$$



$T(f)$ két alappont $A_0 = A_1$

$A_0 + A_1 = b - a \mapsto A_0 = A_1 = \frac{b-a}{2}$ → kvadratúra formula együtthatói

$B_k^{(z)} = 1/2$

Simpson-formula $\sim Z(2)$

$$\boxed{\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6}\cdot\left(f(a) + 4\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}$$

$S(f)$

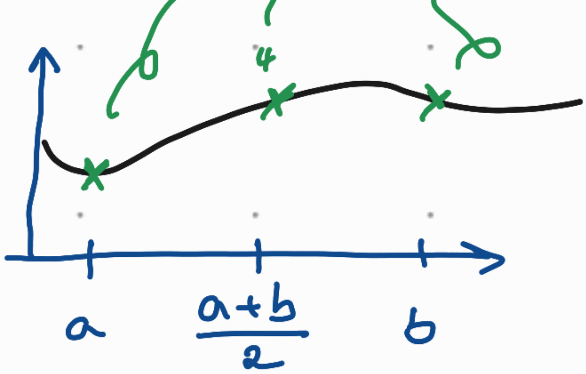
másodfokú polinommal becsüljük

együtthatók 1-4-1

$\frac{4}{6}(b-a) = A_1$ → középső együttható

$\frac{1}{6}(b-a) = A_0 = A_2$

↳ szimmetriáról szóló tételt használva.



Integrálszámítás középértéktétele

Ha $f \in C[a,b]$-n és $g \geq 0$, akkor $\exists \xi \in (a,b)$

$$\boxed{\int_a^b fg = f(\xi) \cdot \int_a^b g}$$

A bizonyításhoz szükséges.
Szorzatintegrál felbontható

Az érintő hibaformulája

$$\int_a^b f - E(f) = \frac{(b-a)^3}{24} \cdot \underbrace{f''(\eta)}$$

$\exists \eta \in [a,b]$
Ez magában nem hasznos, mert semmit sem mond ki η-ról

felülről akarjuk becsülni ezzel.

vs

$$\boxed{\leq \frac{M_2}{24} \cdot (b-a)^3}$$

$$M_2 := \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Trapézformula hibája

$$\int_a^b - T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\eta) \leq$$

$f \in C^2[a,b]$

$$\boxed{\frac{M_2}{12} \cdot (b-a)^3}$$

Felső becslés

Simpson formula hibája

$$\int_a^b f - S(f) = -\frac{(b-a)^5}{4! \cdot 5!} \cdot f^{(4)}(\eta) \leq$$

$f \in C^4[a,b]$

$$\boxed{-\frac{M_4}{2880} \cdot (b-a)^5}$$

Általános hibaképlete N-C

Ha n ptlu és $f \in C^{n+1}[a,b]$, akkor $\exists \xi \in [a,b]$

alappontok száma

$$\int_a^b f - I(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \int_a^b \omega_n(x)\,dx$$

?? hasonlít a képlet az interpolációhoz

$I :=$ N-C kvadratúra formula

egyi különbség

Ha n prs ⇝ ptlu alappont

akkor: $$\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \cdot \int_a^b x \cdot \omega_n(x)\,dx$$

alappontok

Általános hibabecslés

Trapéz formula összetett változata

1 helyett "sokat" alkalmazunk =>

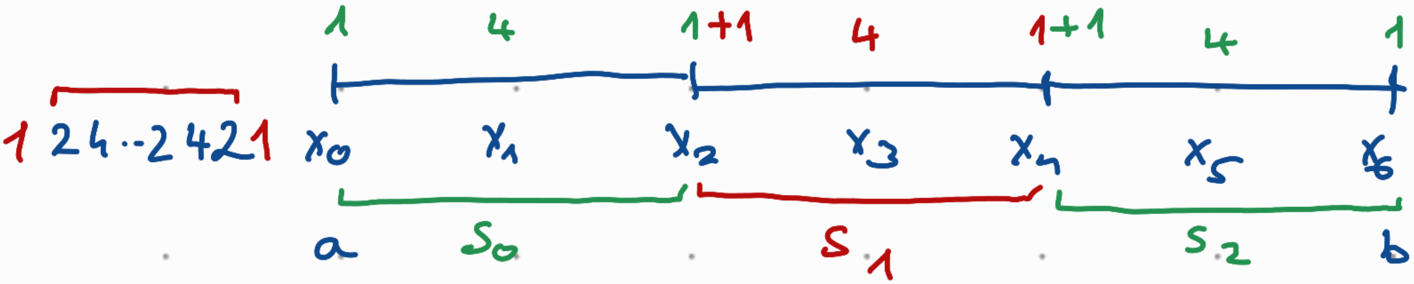
$[a,b]$ intervallumot m egyenlő részre osztjuk és a részintervallumokon alkalmazzuk.

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2m} \cdot \left(f(a) + \underline{2\sum f(x_k)} + f(b) \right) := T_m(f)$$

összetett hiba: $$-\frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot \underbrace{f''(\eta)}_{M_2}$$

Összetett Simpson formula

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{3m} \cdot \left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{m/2} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{m/2-1} f(x_{2k}) + f(b) \right)$$



összetett hiba: $\frac{(b-a)^5}{180m^4} \cdot f^{(4)}(\eta)$

Ha $f \in C^2[a,b]$ és $f \in C^4[a,b]$, akkor $m \to \infty$ -ben

$T_m(f) \xrightarrow[m^2]{} \int_a^b f$ és $S_m(f) \xrightarrow[m^4]{} \int_a^b f$ → S-formula 2× sűrűbb m ⇒ 16× pontosabb

— nagyságrendben — közelít az alappontok számának függvényében

Richardson-féle extrapoláció

Trapézformulával akarjuk: $2m \to 1/4$ hiba helyett $2m \to 1/16$ hiba

Olyan helyeken jó, ahol a mérés is drága, tehát nem lehet nagyon sok alappont

Trapézformula m és $2m$ alappontra:

m: $\frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot f''(\eta_1)$ $2m$: $\frac{(b-a)^3}{48m^2} \cdot f''(\eta_2)$

Ha f'' elég sima ($= f'''$ elég pici) $\Rightarrow f''(\eta_1) \approx f''(\eta_2)$ akkor ② egyenlet $16\times$ − ① ⇒

Javító formulák

Trapéz

$\frac{1}{3}\left[4T_{2m}(f) - T_m(f)\right] = S_m(f)$

A simpson formulát adja!

$\mathcal{O}(h^4) \approx m^4$

Ha f'' korlátos $[a,b]$-n

$\left|\int_a^b f - T_m(f)\right| \leq \left|T_m(f) - T_{2m}(f)\right|$

Nincs szükség a deriváltra, csak a mérések kellenek a hibabecsléshez.

Simpson

$\frac{1}{15}\left[16S_{2m}(f) - S_m(f)\right]$

közelítés hibája $\mathcal{O}(h^6)$

Ha $f^{(4)}$ korlátos $[a,b]$-n

$m \to 2m$: $1 \to 1/64$ hiba

$\left|\int_a^b f - S_m(f)\right| \leq \left|S_m(f) - S_{2m}(f)\right|$

Gyökök becslése

12

Ez máshol van a tananyagban, de nem kapcsolódik sehova máshova

Vizsga 3×5 kérdés
0 — 15
kettes: 8p 12p hármas

n-edfokú polinom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_1 x + a_0$$

$a_i \in \mathbb{R}$

$a_0 \neq 0$

$a_n \neq 0$

Ha $a_0 = 0$, akkor $x = 0$ gyök → egyszerűsíthető

komplex gyök is lehet

Becslés polinom gyökeire:

P(n) polinomra bármely x_k-ra:

$$\boxed{r < |x_k| < R}$$

$$\boxed{R = \frac{\max_{i=0}^{n-1} |a_i|}{|a_n|} \qquad r = \frac{1}{1 + \frac{\max_{i=1}^{n} |a_i|}{|a_0|}}}$$

Origó középű nyílt körgyűrűt adunk meg

Biz

$$y := \frac{1}{x} \Rightarrow P(x) \to P\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$P(x_k) = 0 \iff Q\left(\frac{1}{x_k}\right) = 0$$

$$\frac{1}{|x_k|} < 1 + \frac{\max_{i=1}^{n} |a_i|}{|a_0|} = \frac{1}{r} \Rightarrow |x_k| > r$$

Horner Algoritmus (12ii)

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_2x^2 + a_1x + a_0 =$

Átzárójelezve:

$$P(x) = \underbrace{(a_n x^{n-1} + \dots a_2 x + a_1)}_{a_1^{(1)} \text{ – első derivált}} \cdot x + a_0 =$$

$$= \underbrace{(\dots)}_{a_2^{(1)}} x + a_1) x + a_0 =$$

$$= ((\dots(\; a_{n-1}^{(1)} \dots) \dots) \dots) + a_0$$

Horner Algoritmus

$P(x)$ polinom ξ helyen vett helyettesítési értéke:

$$a_n^{(1)} = a_n$$

$$a_k^{(1)} = a_k + \xi \cdot a_{k+1}^{(1)} \qquad k = n-1 \dots 1, 0$$

ekkor $P(\xi) = a_0^{(1)}$

N-edfokú polinom adott helyen felvett értéke kiszámítható $O(n)$-ben ($n \otimes$, $n \oplus$)

Példa

$P(x) = 1x^5 + 6x^4 - x^3 + 3x^2 - 15x - 7$ $\boxed{\xi = 2}$

1	6	−1	3	−15	−7
2	2·1	2·8	2·15	2·33	2·51
1	8	15	33	51	$\boxed{95}$

← $P(2) = 95$

Deriválttal kapcsolat

$$P(x) = a_0^{(1)} + (x-\xi)\cdot \underbrace{\left(a_1^{(1)} + \ldots \; a_n^{(1)} x^{n-1}\right)}_{P_1(x)}$$

ahol az $a_i^{(1)}$ értékeket a Horner algo adja.

$$\boxed{P'(\xi) = P_1(\xi) = a_1^{(2)}}$$

ez egy Taylor-polinom ξ körül.

Továbbá:

$$\frac{P^{(j)}(\xi)}{j!} = P_j(\xi) = a_j^{(j+1)}$$

ahol $P_j(x) = a_j^{(j)} + \ldots + a_n^{j} x^{n-j}$

Pl: $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ $\quad \boxed{\xi = 1}$

1	-2	3	-1	1
1	$1\cdot 1$	$1\cdot(-1)$	$1\cdot 2$	$1\cdot 1$
1	-1	2	1	$\boxed{1 = P(1)}$
1	$1\cdot 1$	$1\cdot 0$	$1\cdot 2$	
1	0	2	$\boxed{3 = P'(1)}$	
1	$1\cdot 1$	$1\cdot 1$		
1	1	$\boxed{3 = \frac{P''(1)}{2}}$		
	1			

$$\boxed{2 = \frac{P'''(1)}{3!}}$$