Bevezetés

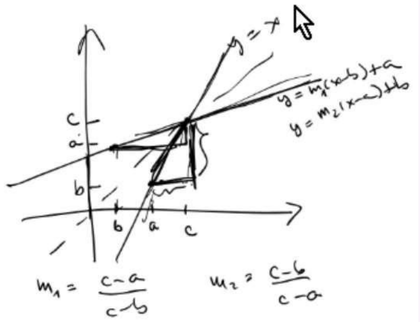
28 May 2022 19:56

Ezt a jegyzetet Eredetileg Tatai Áron (G07ZOE) (aron.tatai@gmail.com) Készítette az ELTE IK BSc 2021/ii. féléves Analízis II F tárgyhoz.

2. Differenciálszámítás II.

13 September 2021 08:12

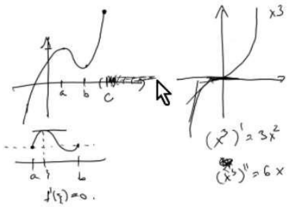
Függvénytulajdonságok Deriválttal

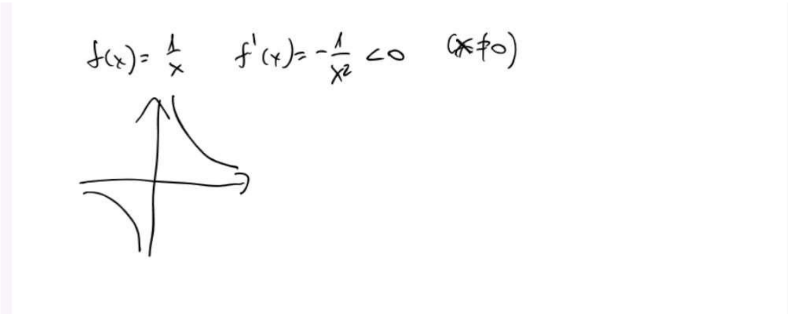


Lokális maximum (/hely) + Lokális minimum (/hely) == lokális szélsőérték / szélsóhely

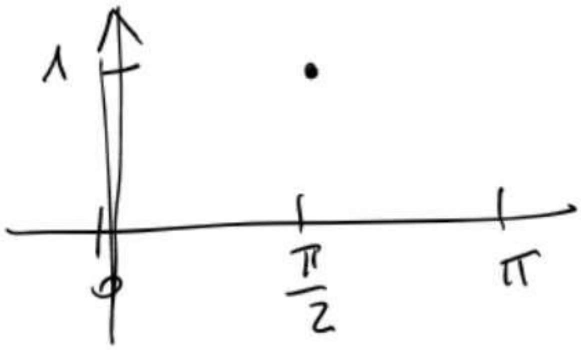
"elsőrendű" -> 1 derivált kell
Lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szűks. Feltétel::

Inflexiós pont:: x^3 x=0-ban





27 September 2021 08:43



$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin' x = \cos x \qquad \cos' x = -\sin x$$

$$\sin'' x = -\sin x \qquad \cos'' x = -\cos x$$

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \arcsin x & = \quad y & \Longleftrightarrow & \sin y = x. \\ \left(x \in [-1,1]\right) & \left(y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) & & \end{array}}$$

Fv tulajdonság és Derivált 2.

22 September 2021
12:25

Aszimptota

L' Hospital-szabály

Differenciálszámítás is jó Határérték kiszámolásához!

1 Deriválás I.

14 October 2021 19:29

Nevezetes Határértékek:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1}$$

Deriválás

Pontbeli derivált

Belső pont. $a \in A$ belső pont, ha
- $A \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}$
- $\exists k(a)$, hogy $k(a) \subseteq A$

$\boxed{\text{jele: } \operatorname{int} A}$

Pl.: $[0,1] \to (0,1)$

$(5,6] \cup \{7\} \to (5,6)$

$\{2,3,4\} \to \emptyset$

Differenciálhatóság

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható, ha

$\exists$ véges, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ határérték $\boxed{\text{jele } f'(a)}$

akkor: $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \boxed{f \in D\{a\}}$

más felírás $= f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$F(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$: differenciahányados

Tétel

Ha egy tétel deriválható a pontban, akkor folytonos.

$f \in D\{a\} \Rightarrow f \in C\{a\}$

(fordítva nem biztos igaz

Az Érintő

Az Érintő

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ha $f \in D\{a\}$ akkor

$(a, f(a))$ pontban $\exists$ érintője és ez az egyenes a

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

$$\underbrace{f'(a)x}_{Ax} + \underbrace{(f(a) - f'(a) \cdot a)}_{b}$$

Deriválási szabályok

+ c
× ÷

$$(f+g)'a = f'(a) + g'(a)$$

$$(cf)'(a) = c \cdot f'(a)$$

$$(f \cdot g)'a = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

$$\frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) g'(a)}{g^2(a)}$$

Összetett függvény ∘

$$(f \circ g)'(a) \neq f'(g'(a)) \doteq f'(g(a)) = g'(a)$$

Inverz fv. f^{-1}

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \Rightarrow (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Hatványsor deriváltja

Legyen $h := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad (x, a, \alpha_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$

$KH(r) > 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad x \in K_R(a)$$

akkor: $f'(x) = \sum_{n=1} n \cdot \alpha_n (x-a)^{n-1}$

Deriváltfüggvény

f: halmazon/intervallumon deriválható: $f \in D(A)$ / $f \in D(a,b)$

Deriváltfüggvény: $x \mapsto f'(x)$

ha: $- x \in \operatorname{int} D_f$

$- f \in D\{x\}$

$\boxed{\text{jele: } f'}$

Konstans $\boxed{c}$

$f(x) = c \xrightarrow{\prime} f'(x) = 0$

Hatvány $\boxed{x^n}$

$f(x) = x^n \xrightarrow{\prime} f'(x) = nx^{n-1}$

---

exponenciális $\boxed{e^x}$ **termész.**

$\exp(x) = e^x \xrightarrow{\prime} e^x$

Exponenciális függvény deriváltja önmaga

Logaritmus $\boxed{\ln x}$

$\ln x \xrightarrow{\prime} (\ln x)' = \frac{1}{x}$

Mert: $\ln = \exp^{-1}$

$$\left((\ln x)' = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x} \right)$$

$\boxed{a^x}$

$\boxed{\log_a x}$

$\boxed{a^x}$

$\exp_a x = a^x \rightarrow a^x \ln a$

$\boxed{\log_a x}$

$\log_a x \longrightarrow \dfrac{1}{x \ln a}$

$$\begin{tikzcd}
\sin \arrow[r] & \cos \arrow[d] \\
-\cos \arrow[u] & -\sin \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

#

1 Deriválás I. Gy

14 October 2021 20:22

e1F

1. Feladat. A differenciálhányados fogalmának segítségével határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény görbéjéhez az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban húzott érintőegyenes egyenletét!

$$f(x) = x^2 \qquad x_0 = 1$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{a}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(a+h)}^{\square^2} - \overbrace{f(a)}^{\square^2}}{h} =$$

$$\left(\lim_{h \to 0}\right) = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} =$$

$$= \frac{2ah + h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(2a + h)}{\cancel{h}} = 2a + h =$$

$$\lim (a = 1,\ h \to 0) = \underline{\underline{2}} \quad m$$

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = \qquad f(1) = 1^2 = 1$$

$$y = 2x - 1$$

1F

A definíció alapján lássuk be, hogy $f \in D\{a\}$, és számítsuk ki $f'(a)$-t

a) $f(x) = x^4;\ a = 1$

~~Definíció~~:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

vagy

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$= \frac{(1+h)^4 - 1^4}{h} =$$

$a^4 - b^4$

$$= \left(a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)\right.$$

$$(\cancel{1} + h - \cancel{1})\left((1+h)^3 + (1+h)^2 \cdot 1 + (1+h) \cdot 1 + 1\right) =$$

$$\frac{(\cancel{1+h-1})\left((1+h)^3+(1+h)^2\cdot 1+(1+h)\cdot 1+1\right)}{\cancel{h}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \underset{0}{(1+h)^3} + (1+\underset{0}{h^2}) + (1+\underset{0}{h}) + 1 = \underline{\underline{4}}$$

Tehát f deriválható 1-ben

$f'(1) = 4$ $\qquad$ $x^{4\prime} = 4x^3 \overset{x=1}{=} \underline{\underline{4}}$

b/

$f(x) = \sqrt{x}$ és $a = 2$ def. alapján

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} =$$

$$= \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\cancel{2}+\cancel{h}-\cancel{2}}{\cancel{h}(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

c/

$$f(x) = \frac{1}{x} \ : \ a=3; \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(3+h)-f(3)}{h} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3+h}-\frac{1}{3}}{h} = \frac{\frac{3-(3+h)}{3(3+h)}}{h} =$$

$$= \frac{\frac{-1\cdot \cancel{h}}{3(3+h)}}{1\cdot\cancel{h}} = \frac{\left(\frac{-1}{3\cdot(3+h)}\right)}{1} =$$

$$= \frac{-1}{9+3h} \xrightarrow{h\to 0} -\frac{1}{9}$$

d/ $f(x) = x|x| \qquad a=0$

$$\frac{f(a+h)+f(a)}{h} = \frac{f(0+h)+f(0)}{h} =$$

$$\frac{h|h|+0}{h} = |h| = 0$$

e/

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x<0 \\ x^2-x+1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases} \qquad a=0$$

$$f'(0) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} =$$

$$= \frac{-h\cdot 1}{h} = -1$$

$$f'(0) \quad \frac{f(a+h)-f(0)}{h} = \frac{h^2-h+\cancel{1}-(\cancel{1})}{h} =$$

$$= \frac{h(h-1)}{h} = h-1 = -1$$

2P

Függvények deriváltja

a/ $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3 =$

$= 12x^2 - 4x + 5$

b/ $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \left(x\cdot\left(x\cdot x^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2} =$

$\downarrow$

$\left(x\cdot\left(x^{3/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2}$

1. Átalakítás

$\left(x\cdot x^{3/4}\right)^{1/2}$ $\quad \left(x^{7/4}\right)^{1/2} = \underline{x^{7/8}}$

2. deriválás

$f_1 = x^{7/8} \Rightarrow f'(x) = \frac{7}{8} x^{7/8 - 1} = \frac{7}{8}\cdot x^{1/8} = \underline{\frac{7}{8\sqrt[8]{x}}}$

c/

$c = x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5} =$

$= 3x^2 - \frac{2}{x^3} + \frac{\cancel{5}}{\cancel{5}x^6} = \underline{3x^2 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6}}$

d/ paraméterek:

$\frac{x}{2}$

$$x^a + a^x + ax + \frac{x}{a} + \frac{a}{x} \qquad (a>0)$$

$$ax^{a-1} + a^x \ln a + a + \frac{1}{a} - \frac{a}{x^2}$$

---

3. Derivált:

a/ $x^2 \cdot \sin x = \boxed{f'g + fg'}$

$2x \cdot \sin x + x^2 \cos x$

b/ $e^x\left(\sqrt[3]{x^2} + e^2\right) \qquad \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

$e^x\left(\sqrt[3]{x^2} + e^2\right) + e^x\left(x^{2/3} + e^2\right)$ $\boxed{e^2 = 0}$

$+ \cdot \frac{2e^x}{3\sqrt[3]{x}}$

c/ $\frac{x^3+2}{x^2+x+5} = \qquad \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$$\frac{(3x^2)(x^2+x+5) - (x^3+2)(2x+1)}{(x^2+x+5)^2} =$$

$= 3x^4 + 3x^3 + 15x^2$ $-($

$2x^4 + x^3 + \underbrace{\quad}_{17x^2} \quad 4x + 2$ $)$

$$\frac{x^4+2x^3+15x^2-4x-2}{(x^2+x+5)^2}$$

---

d/

$$\frac{2^x+1}{2+\sin x} = \qquad \frac{f'g-fg'}{g^2} =$$

$$= \frac{2^x \cdot \ln 2 \cdot (2+\sin x) - (2^x+1)\cos x}{(2+\sin x)^2}$$

---

4. feladat

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

a/

$$f(x) = (5x^2+3x)^{2020}$$

$$2020\,(5x^2+3x)^{2019} \cdot (10x+3)$$

$$b = \sqrt{\underbrace{x+\sqrt{x}}_{g}}^{=f} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} \quad f \quad g$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$c = \overset{g}{\sin}\left(\overset{f}{\frac{x^2+1}{x+3}}\right) \qquad f'$$

$$\cos\frac{x^2+1}{x+3}\cdot\left(\frac{2x(x+3)-(x^2+1)\cdot 1}{(x+3)^2}\right) =$$

$$= \cdot\left(\frac{2x^2+6x-x^2-1}{x^2+6x+9}\right) =$$

$$\cos\frac{x^2+1}{x+3}\cdot\frac{x^2+6x-1}{x^2+6x+9}$$

d)

$$\overset{G}{\sin}\overset{F}{^2}\left(\ln\sqrt{1+\cos^2x}+1\right)$$

$$2\sin\left(\ln\sqrt{1+\cos^2x}+1\right)\cdot\left(\overset{F}{\sin}\left(\overset{G}{\ln\sqrt{1+\cos^2x}+1}\right)\right)' =$$

$$-\|-\cdot\cos\left(\ln\sqrt{1+\cos^2x}+1\right)\cdot\left(\overset{F}{\ln}\overset{G}{\sqrt{1+\cos^2x}}+1\right)' \qquad \ln x' = \frac{1}{x}$$

$$-\|-\cdot-\|-\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+\cos^2x}}\cdot(1+\cos^2x)'$$

$$2\cos x\cdot -\sin x =$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha \quad ?$$

$$\frac{2\sin(\overbrace{\ln\sqrt{1+\cos^2x}+1}^{\alpha})\cdot\cos(\overbrace{\ln\sqrt{1+\cos^2x}+1}^{\alpha})\cdot 2\cos\overbrace{x\cdot -\sin x}^{\beta}}{\sqrt{1+\cos^2x}\cdot 2\sqrt{1+\cos^2x}} =$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

$$\frac{\sin 2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\cdot \sin 2x}{2(1+\cos^2 x)}$$

3j

a/

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1-x}$$

with G over the base and H over the exponent.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x} \to \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}$$

$$f(x)=G^{H} \qquad e^{\ln G^{H}} = e^{H\cdot \ln G} \qquad \boxed{a = e^{\ln a}}$$

$$e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot(1-x)} =$$

$$= \exp\Big(\underbrace{(1-x)}_{f}\cdot \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{g}\Big)' =$$

$$\exp\left((1-x)\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\right)\cdot \overbrace{-1\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+(1-x)\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$$

? TODO

b/ $f(x)$

$$(\ln x)^{x+1} = \qquad a = e^{\ln a}$$

$$G^{H} = e^{H\cdot\ln G} -$$

$$\exp\left((x+1)\cdot \ln^2 x \right)$$

$$f' \Rightarrow \exp'\left(\left((x+1)\cdot \ln^2 x\right)\right) \cdot \left((x+1)\cdot \ln^2 x\right)' =$$

$$= \exp\left((x+1)\cdot \ln^2 x\right) \cdot 1\cdot \ln^2 x + (x+1)\cdot \ln^2(x)' \cdot \ln x'$$

$$\ln x^{x+1} \cdot \ln^2 x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot (x+1)$$

finito

Egyoldali pontbeli deriváltak

$$f := |x| := \begin{cases} x & \text{ha } x \geq 0 \\ -x & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$\nearrow \lim_{x \to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-x - 0}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1$$

$$\searrow \lim_{x \to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - 0}{x - 0} = \frac{x}{x} = 1$$

Tehát $f(x) = |x|$ nem deriválható $a = 0$ pontban

jobb / baloldali derivált

f'_+ $\quad f'_-$

f_- $\quad f_+$

Általánosabban:

$$f(x) \begin{cases} b(x) & \text{ha } x < a & \to & \lim_{a-0} b = \\ A & \text{ha } x = a & & A = \\ g(x) & x > a & \to & \lim_{a+0} g \end{cases} \quad \text{I. feltétel}$$

$$\boxed{b'_- = g'_+ \qquad \text{II. feltétel}}$$

1F

$$f: f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{ha } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

$$A = f(0) = 1 - 0 = \underline{1}$$

$$b(x) = 1 - x \to b' = -1$$

$$g(x) = e^{-x} \to g' = -1 \cdot e^{-x} \to$$

I: $b(0) = g(0) = 1$ ✓

II: $b'(0) = g'(0) = -1$

ezért $f \in D\{0\}$ és $f'(0) = -1$

Magasabb Rendű deriváltak

Magasabb rendű deriváltak

$f''(a) := (f')'(a)$:= második derivált

végtelenszer deriválható: $f \in D^\infty$ (pl. polinom, cos, sin)

$f+g \in D^n\{a\}$ és $(f+g)^{(n)}(a) = f^n a + g^n a$

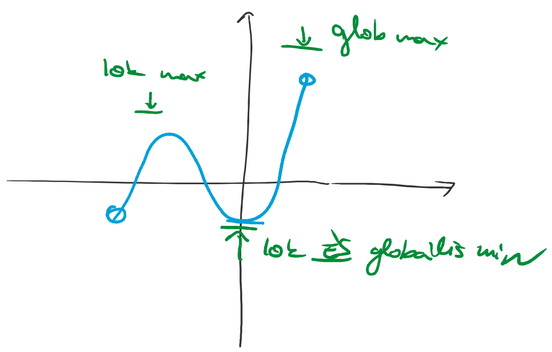
Leibniz-szabály $f \cdot g$ és $fg^{(n)} a = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}(a)$

FÜGGVÉNYTULAJDONSÁG + DERIVÁLT

Lokális szélsőérték

$\exists k(a) \subseteq D_f : \forall x \in k(a) \subseteq D_f$ esetén $f(x) \leq f(a)$

"a" pont ilyenkor lok. maxhely, $f(a)$ pedig lok. max



Lok szélsőérték

Szükséges feltétel:

→ $f \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \text{int}\, D_f$-ben

→ f-nek a-ban lok. szél. értéke van

⇓

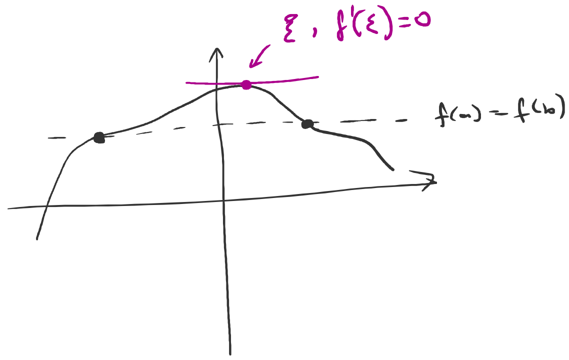
Ekkor $f'(a) := 0$

Stacionárius pont $\iff$ $a \in D_f$, ha $f'(a) = 0$

Rolle középértéktétel

$$\left.\begin{array}{l} f \in C[a,b] \\ f \in D(a,b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$$

$a < b$

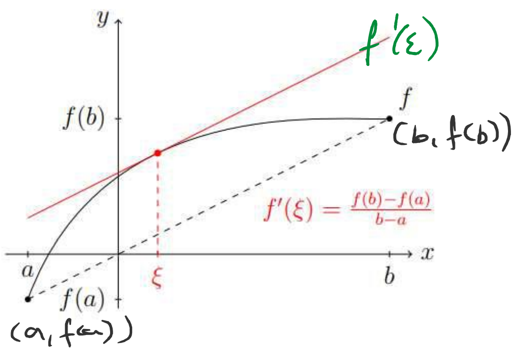


Cauchy-féle középértéktétel

$$\left.\begin{array}{l} f,g \in C[a,b] \\ f,g \in D(a,b) \\ \forall x \in (a,b) : g'(x) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b) : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Larange-féle középértéktétel

$$\left.\begin{array}{l} f \in C[a,b] \\ f \in D(a,b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Következményei:

1: $f : (a,b) \to$, $f \in D(a,b$

$f' = 0 \ (a,b) \iff f =$ állandó (a,b)-n

2: $f, g \ \dots$

$f' = g' \ (a,b)$-n $\iff \exists c \in \mathbb{R}, \ \forall x \ (a,b) : f(x) = g(x) + c$

Monotonitás

$f \nearrow \ (a,b)$-n $\iff f' \geq 0 \ (a,b)$-n

$\searrow \iff \leq$

$\uparrow \Longrightarrow >$

$\downarrow$ (x) $\Longrightarrow <$

$\uparrow \qquad \Rightarrow \qquad >$

$\downarrow \qquad \Rightarrow \qquad <$

x^3 pl nem

Lok. Széls. Ért. elégséges flt.

Előjelváltás derivált $- \to +$ ($g(t)$, $\exists \delta > 0$ úgy, hogy
$g < 0$ $(t-\delta, t)$-n és
$g > 0$ $(t, t+\delta)$-n

$f \in D(a,b)$
$\exists c \in (a,b)$ ahol $f'(c) = 0$ és
f' előjelet vált ?

$\Downarrow$

$\ominus \to \oplus$ lokminhely | 1-ha | $\oplus \to \ominus$ lokmaxhely

---

3F

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2} \qquad f'(x) = \frac{1 \cdot x^2 - (x+1) \cdot 2x}{x^4} =$$

$$\frac{x^2 - 2x^2 - 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{-x^2 - 2x}{x^4} = -\frac{x^2+2x}{x^4} =$$

$$= -\frac{x(x+2)}{x^4} = -\frac{x+2}{x^3}$$

ZH keresés: $x+2=0$, $x=-2$

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, \infty)$
f'	$-$	0	$+$		$-$
f	$\downarrow$	$-1/4$	$\uparrow$	X	$\downarrow$
Lok.		minimum			

$$\frac{x+1}{x^2} = \frac{-1}{4}$$

f	$\downarrow$	4		X	
lok		minimum			

Másodrendű elégséges feltétel

$f \in D^2\{a\}$

$f'(c) = 0 \wedge f''(c) \neq 0$!

$\Downarrow$ lok. szélsőérték

$f''(c) > 0$ lok min

$f''(c) < 0$ lok max

$(a, f(a))$ -nak van érintője, ha $f \in D\{a\}$. Az f fv grafikonjának a $(a, f(a))$ pontbeli érintője a
$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$ egyenes

1.

$$f(x) \quad \left(\frac{\sqrt{1+x}}{(x^2+1)^5}\right)' = ? \quad \frac{f'g - fg'}{g^2} =$$

$=$

$$\sqrt{1+x}' = (x+1)^{\frac{1}{2}} \quad \frac{\frac{(x^2+1)^5}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} \cdot 5(x^2+1)^4 \cdot 2x}{(x^2+1)^{10}}$$

Ötlet $\underbrace{\frac{a}{b}}_{f(x)} = \underbrace{\ln a - \ln b}_{\ln(f(x))}$

ez jobban deriválható

$$\ln\sqrt{1+x} - \ln(x^2+1)^5 = \underline{\frac{1}{2}\ln 1+x - 5\ln(x^2+1)}$$

$$\ln(f(x))' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot 1x^0 - 5\frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \left(\frac{1}{2(1+x)} - \frac{10x}{x^2+1}\right)$$

$$f(x)' = f(x) \cdot \ln(f(x))'$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{(x^2+1)^5} \cdot \left(\frac{1}{2(1+x)} - \frac{10x}{x^2+1}\right)$$

b) deriválható, egyenes egyenlete.

$y = Ax + B$ → Van érintő, mert $f \in D\{0\}$

Mivel

$\frac{f(x)}{x} = A$ | VAGY | $(f(x) - Ax) = B$

$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$

$\boxed{f(0) = 1 \quad f'(0) = \frac{1}{2}}$

$y = \frac{1}{2}(x - 0) + 0 = \underline{\frac{x}{2} + 1}$

Logaritmikus Deriválás

$f(x) = g(x)^{h(x)} \longrightarrow$

$\ln(f(x)) = h(x) \cdot \ln(g(x)) \Rightarrow$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x) \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$$

↓

$f'(x) = f(x) \cdot (\; \ldots\ldots$

Inverz Fv deriváltja

f^{-1} invertálható $b = f(a)$ pontban, és

$$\underline{(f^{-1}(b))'} = \frac{1}{f'(a)} = \underline{\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}}$$

② Lg.be: - invertálható
- invert deriválható
- számítsuk ki f^{-1}-et b-ben

a) $f(x) = x^3 + x \qquad b = -2$

- $f \in D(\mathbb{R})$-ben
- $f' = 3x^2+1 > 0$ $\boxed{f' = 3x+1}$

↳ f szig. mon növő függvény, így invertálható
↳ f folytonos, mert deriválható

|| - keressük a-t, ahol $f(a) = -2$

$\underbrace{x^3}_{-1} + \underbrace{x}_{-1} = -2$

↳ ötlet: $a = -1$

$f'(a) = f'(-1) \Rightarrow 3\cdot(-1)^2+1 = 4$

- Inverz fv szabályai teljesülnek

$$(f^{-1}(b))' = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

$$(f^{-1}(-2)) = (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{4}$$

ⓑ $f(x) = 2x + \ln(x^2+1) \qquad b := 2+\ln 2$

$f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x > 0 \rightarrow$ ezért szigmon nő, ezért invertálható

– ötlet $\underline{a = 1}$

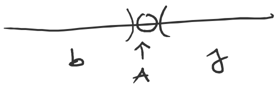
$$f(a) = f(1) = 2 + \ln 2$$
$$f'(a) = f'(1) = 2 + \frac{2+1}{1^2+1} = 3$$

[illegible]

$$\left(f^{-1}\right)'(2+\ln 2) = \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}.$$

Egyoldali Pontbeli derivált

$$f(x) \begin{cases} b(x) & x < a \\ A & x = a \\ j(x) & x > a \end{cases}$$



$f \in D\{a\}$, ha:

– $f \in C\{a\}$ és $\exists \lim_{a-0} b$, $\exists \lim_{a+0} j$ és ezek egyenlőek

– $b'(a) = j'(a) = f'(a)$

(4.) F Differenciálható-e a pontban:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x < 0 \\ \ln(x^2+1) & x \geq 0 \end{cases} \qquad a = 0$$

$$A = f(0) = \ln(0^2+1) = \ln 1 = \underline{0}$$
$$b = x^2+1 = 0+1 = \underline{1}$$

$b, j \in C\{0\}$ ✓

! DE ! $b(0) = 1 \neq j(0) = 0$ ezért 1. felt. nem teljesül, ezért $f \notin C\{0\}$

1/b

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ \sqrt{x^3+3} & x > 1 \end{cases} \qquad a = 1$$

0 – $2^1 = 2 = \sqrt{1^3+3} = \checkmark$

$b(1) = j(1) = A$

1 – $b'(x) = 2^x \cdot \ln x$

$j'(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+3}}$ Mivel deriválható, ezért b, j folytonos 1-ben

2 – $b'(1) \stackrel{?}{=} j'(1)$

$2^1 \cdot \ln 1 = \dfrac{3}{\sqrt{4}}$

$0 \neq \dfrac{3}{\sqrt{4}}$! ezért II. feltétel nem teljesül,

ezért $f \notin D\{1\}$-n.

c/

$$f(x) \begin{cases} \cos^2 x & x \leq \frac{\pi}{2} \\ \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad a = \frac{\pi}{2}$$

0 – $\underset{b(a) =}{\cos^2(a)} \stackrel{?}{=} \underset{j(a) =}{\left(a - \frac{\pi}{2}\right)^2}$

$\cos^2 \frac{\pi}{2} \stackrel{?}{=} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)^2$ $\qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$0 = 0 \checkmark$

I. feltétel teljesül $b(a) = A = j(a)$

1. — deriváltak, határérték.

$$h'(a) = 2\cos(a) \cdot -\sin(a) = 2\cos x \sin x$$

$$g'(a) = 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

II. feltétel teljesül, mert

$h'(\frac{\pi}{2}) = 0$, $g'(\frac{\pi}{2}) = 0$, és $h, g \in D\{\pi/2\}$-ben

Ezért $f \in D\{\pi/2\}$, és $f'(\pi/2) = 0$

/d

$$f(x) \begin{cases} x^3 + 1 & \text{ha } x < 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{ha } x > 0 \end{cases} \qquad a = 0$$

$h(x) = x^3 + 1 \qquad h(0) = 0^3 + 1 = 1$

$g(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad g(0) = \underline{1}$

nevezetes határérték, tudjuk, hogy létezik

I. feltétel ok: $h(0) = g(0) = A = 1$

$(ab) = a'b + b$

$h' = 3x^2 \Rightarrow h'(0) = 3 0^2 = \underline{0}$

$$g' = \frac{f'g - g'f}{g^2} = \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2} \overset{L'H}{=} \left\{ \frac{0}{0} \right.$$

$$\frac{\cos x - \sin x \cdot x + \cos x}{2x} = \frac{-\sin x \cdot \cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{-\sin x}{2} = 0$$

$$g'(0) \quad \lim \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x - 0} \quad / \cdot x \quad = \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) - x}{}$$

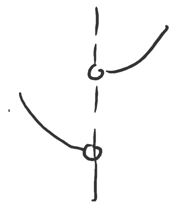
Sinx haránysor

$f'(0)\ \lim \dfrac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x - 0} = \dfrac{\sin x - x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - x}{x^2} =$

$= \lim \left(\sin x \text{ hatványsora}\right) = 0$

5. a/b paramétert keressünk, hogy differenciálhatóak legyenek a függvények

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + b & \text{ha } x < 1 \\ \frac{a}{x} & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$



$b(1) = j(1)$

$\underbrace{x^2 + b = \frac{a}{x}}$ de, $\underbrace{2x = -\frac{a}{x^2} \text{ -ben is}}$

$x^2 + b = -\dfrac{2x^3}{x} =$

$= x^2 + b = -2x^2$

$b = -3x^2$

$(x = 1)$

$b = -3$

$a = -2x^3$

$(x = 1)$

$a = -2$

/b $b = \sin ax + b \quad x \leq 0$

$j = e^{x^2} + x \quad x > 0$

$x = 0$ -t nézzük ahhoz hogy deriválható legyen,

$b(0) = g(0)$ és $b'(0) = g'(0)$.

$\sin ax + b = e^{x^2} + x$ és $(\sin ax + b)' = \cos ax \cdot a$

$(e^{x^2} + x) = e^{x^2} \cdot 2x + 1$

$\underline{b = 1}$

$\cos a 0 \cdot a =$

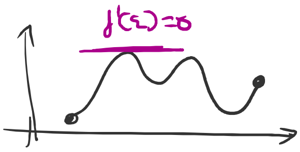
$1 \cdot a = 1 \cdot 2x + 1$

$a = 2 \cdot 0 + 1 = \underline{a = 1}$

Középértéktétel

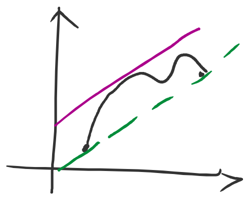
- Rolle

$$\left.\begin{array}{l} f \in D, C\,(a,b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$$



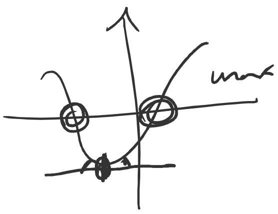
- Larange

$$f \in D, C\,(a,b) \} \Rightarrow \exists \xi \in (a,b) : \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}} = \underbrace{f'(\xi)}$$



(6) Legyen $a, b \neq 1 \in \mathbb{Z}^+$

igazoljuk $f(x) = a^x + b^x - 2$ | fv-nek max 2db zérushelye van

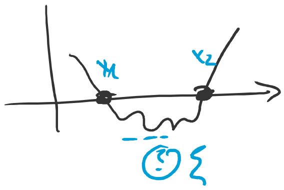


- Rolle miatt, ha $f \in D(a,b)$ két zérushelye van,

$f(x_1) = f(x_2) = 0$

$x_1 < \xi < x_2$

ZH1 ZH2



$f'(x) = a^x \cdot \ln a + b^x \ln a$

$|ZH| = 1$ (max)

$f''(x) \quad \underbrace{a^x}_{+}\underbrace{\ln^2 a}_{+} + \underbrace{b^x}_{+}\underbrace{\ln^2 a}_{+} > 0 \to |ZH| = 0$

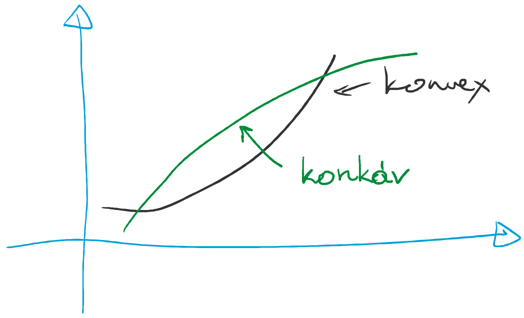
emiatt f-nek max 2 ZH-e lehet

(F) igazoljuk a következő egyenlőtlenséget!

$$x - \frac{x^2}{2} < \underbrace{\ln(x+1) < x}_{1.}$$

$\boxed{\text{TODO STILL}}$

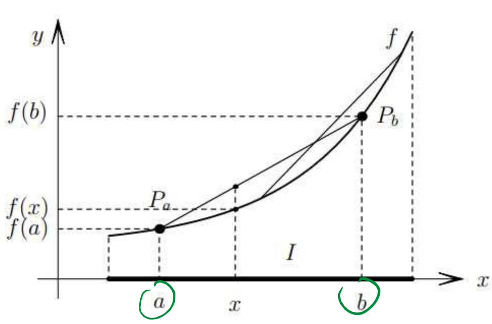
Konvex, Konkáv függvények



Egyenes egyenlet:

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

11.

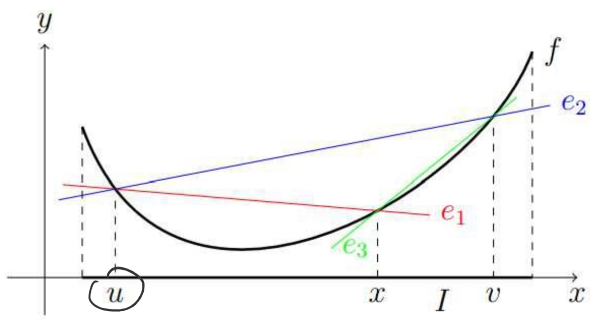


$f(x) \le y \to$ konvex

$f(x) \ge y \to$ konkáv

(szigorúan

Meredekség



$$e_1 \le e_2 \le e_3$$

$$\frac{f(x)-u}{x-u} \le \frac{f(v)-(u)}{v-u} \le \frac{f(x)-f(v)}{x-v}$$

f konvex (a,b)-n $\iff$ $f'' \ge 0$ (a,b)-n

konkáv $\le$

szig. konv $>$

szig. konkáv $<$

Inflexiós Pont

$(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, $f \in D(a,b)$.

Inflexiós pont, ha $\exists \delta > 0$: f konvex $(c-\delta, c]$-n és konkáv $[c, c+\delta]$-n. (vagy fordítva

(1F) Konvexitás, infl. pont. $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$; $\left(\frac{1}{x^3}\right)' = -\frac{2}{x^3}\cdot b$

$$\left(\frac{x+1}{x^2}\right)' = \frac{1\cdot x^2 - (x+1)2x}{x^4} = \frac{x^2 - 2x^2 - 2x}{x^4} = -\frac{x(2+x)}{x^4} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{x+2}{x^3}}}$$

$$\left(\frac{x+2}{x^3}\right)' = \frac{1\cdot x^3 - \left((x+2)3x^2\right)}{x^6} = -\frac{2x^{\cancel{3}} + 6x^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{6}}} = \frac{2x+6}{x^4}$$

ZH: $\underline{x = -3}$ $\qquad -3+6 = 0$ ✓

$-\infty \quad -3 \quad 0 \quad \infty$

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,0)$	0	$(0,\infty)$
f''	$-$	0	$+$		$+$
f	$\frown$	$-2/9$	$\smile$	$\times$	$\smile$
		infl. pont			

$$\frac{-3+1}{9} = \frac{2}{9}$$

Aszimptota

$a \in \mathbb{R}$ és $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. f-nek van

Aszimptotája, ha $\exists\, l(x) = Ax + B$ $(x \in \mathbb{R})$, amelyre

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - l(x)\right) = 0$$

akkor $\boxed{y = Ax + B}$ aszimptotája $(+\infty)$-ben f-nek

Aszimptota létezik iff.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \doteq A \quad \text{és} \quad \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - Ax \right) \doteq B$$

akkor $\ell(x) = Ax + B$ az f aszimptotája x-ben

L'Hospital-szabály

$(0/0)$

$$\left.\begin{array}{l} f, g \in D(a,b) \\ \forall x \in (a,b),\ g'(x) \neq 0^{*} \\ \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0^{*} \\ \exists \lim \dfrac{f'}{g'} \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \exists \lim \frac{f}{g} \text{ és } \lim_{a+0} \frac{f}{g} \doteq \lim_{a+0} \frac{f'}{g'}$$

$\frac{+\infty}{+\infty}$ esetben $\lim f = \lim g = +\infty$

$\frac{\pm\infty}{\mp\infty}$ –||– $-\infty$

Teljes Fv vizsgálat

① Kezdeti vizsgálat

- Deriválható
- Zérushely
- Előjelvizsgálat, Paritás, Periodicitás

② Lokális szélsőérték + Monotonitás

③ Konvexitás + infl. pontok

④ Határértékek és aszimptoták

⑤ Fv. grafikonja

#2 TFV: $f(x) = x - 1 - \frac{4x}{1+x^2} = \frac{(x+1)(x^2-2x-1)}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$

1) $f(x) = 0 \iff x = -1$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \iff x = 1 - \sqrt{2}, \quad x = 1 + \sqrt{2}$$

		-1		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$	
	$- +$		$+ +$		$+ -$		$+ +$
f	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

2) Monotonitás

$$f(x) = x - 1 - \frac{4x}{1+x^2} \to f'(x) : 1 - \frac{4 \cdot (1+x^2) - 4x(2x)}{(1+x^2)^2} =$$

$$\cancel{= \frac{4 + 4x^2 - 8x^2}{\dots}} =$$

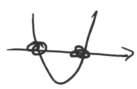
$$\Rightarrow x^4 + 6x^2 - 3 = 0$$

$$t = x^2 \to t^2 + 6t - 3 = 0$$

$$t = -3 - 2\sqrt{3}$$
$$t = -3 + 2\sqrt{3}$$

$x^2 = 2\sqrt{3} - 3 \longleftarrow$

$x_1 = \sqrt{2\sqrt{3} - 3}$ vagy $x_2 = -\sqrt{2\sqrt{3} - 3}$



$x =$		$-\sqrt{2\sqrt{3}-3}$		$\sqrt{2\sqrt{3}-3}$	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	max	$\downarrow$	min	$\uparrow$

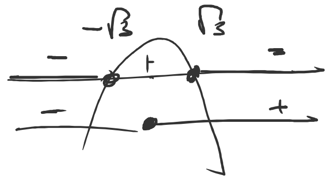
3 Konvexitás

$$f'' = \frac{x^4+6x^2-3}{(x^2+1)^2} = \left(\frac{f'g - fg'}{g^2}\right) = \frac{(4x^3+12x)(x^2+1)^2 - (x^4+6x^2-3)\,2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{8x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

ezért $f''(x) = 0 \iff$ $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{3}$

$x =$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cup$	-1	$\cap$	-1	$\cup$	-1	$\cap$
		inf		inf		inf	



4 Határérték & Aszimptotikák

$$\lim_{\pm\infty} \frac{4}{1+x^2} = \left(\frac{\pm\infty}{+\infty}\right) \overset{L'Hop}{=} \frac{4}{2x} = \lim \frac{2}{x} = 0$$

és

$$\lim f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x - 1 - \frac{4x}{1+x^2}\right) = \pm\infty - 1 - 0 = \pm\infty$$

ebből következik $\quad \div x$

$$\lim \frac{f(x)}{x} = A \to \lim\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{4}{1+x^2}\right) = 1 - 0 - 0 = \underline{\underline{1}} = A$$

$$\lim\left(f(x) - Ax\right) = B \to f(x) - \cancel{1x} = \lim\left(-1 - \frac{4x}{1+x^2}\right) = -1\ B$$

$$\lim \left(f(x) - Ax \right) = B \Rightarrow \quad f(x) - 1x = \lim \left(-1 - \frac{4x}{1+x^2} \right) = -1\ B$$

$$y = Ax + B \quad \text{aszimptota} \quad \underline{y = x1}$$

Monotonitás <-> Deriválás kapcsolata

$f \nearrow \iff f' \geq 0$

⋮ stb

1. legbővebb intervallum, ahol f monoton

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$$

$$12x(x^2 - x - 2)$$

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

$x_0 = 0$

$x_2 = +2$

$x_1 = -1$

	$-\infty$ … x_1	x_1	x_1 … x_0	x_0	x_0 … x_2	x_2	x_2 … $+\infty$
	− − −		+ − −		+ + −		+ + +
f'	−	0	+	0	−	0	+
	↓		↑		↓		↑

szigmon nő: $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$

szigmon csökken $(-\infty, -1) \cup (0, 2)$

1/b $\dfrac{x}{x^2 - 10x + 16}$ $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 8\}$ ← Hm…

$$f'(x) = \left(\frac{f'g - g'f}{g^2}\right) = \frac{(x^2 - 10x + 16) - x(2x - 10)}{((x-2)(x-8))^2} =$$

$x^2 - 10x + 16$

$(x-2)(x-8)$

$$= \frac{x^2 - 10x + 16 - 2x^2 + 10x}{\text{—}} =$$

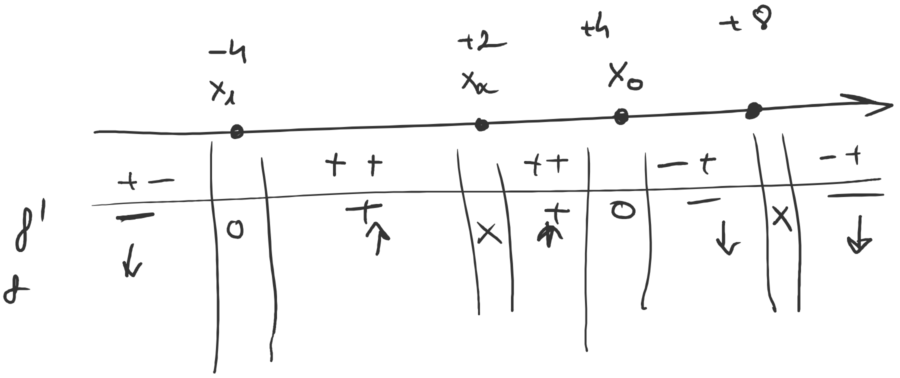
$$= \frac{-x^2 + 16}{\quad} =$$

$$\frac{(4-x)(4+x)}{((x-2)(x-8))^2} \to \text{mindig pozitív}$$

x_α x_β

$x_1 = 4$

$x_2 = -4$



$(-\infty, -4)$
$(-4, 2)$
$(2, 4)$
$(4, 8)$
$(8, +\infty)$

Lokális Szélsőérték

I.r szükséges $a \in \text{int } D_f$, $f \in D\{a\}$. $\to f'(a) = 0$

I.r elégséges f'-nak előjelváltása van $(- \to +)$ $(+ \to -)$

vagy

II.r elégséges. $f''>0$ $\cup$ lokminhely

$f''<0$ $\cap$ lokmaxhely

2F Számítsuk ki a $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ fv. lok. szélsőértékeit

$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$ hm.- hm.

kiemelés:

I $5x^2(x^2 - 4x + 3)$

$(x-1)(x-3)$

$x_0 = 0$

$x_1 = +1$

$x_2 = +3$

ezek stacionárius pontok.

II eléig. Felt.: f'' : $20x^3 - 60x^2 + 30x$

II elégs. felt.: f'' : $20x^3 - 60x^2 + 30x$

$10\underline{x}(2x^2 - 6x + 3)$

$f''(x_0^{(0)}) = 0$!

$f''(x_1^{(3)}) = 2\cdot 9 - 6\cdot 3 + 3 = 10\cdot 3(3) > 0$ ✓ lok minimum

$18 - 18 + 3$

$f''(1) = 10\cdot 1 \quad 2-6+3 = -1 < 0$ lok maxhely

Abszolút szélsőérték

f-nek $\exists$ abszolút maximuma, ha $\forall x \in D_f$ pontban $f(x) \leq f(\alpha)$. ($\alpha \in D_f$)

α : absz maxhely

$f(\alpha)$: absz maximum

Weierstrass tétele

Korlátos zárt $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon $f \in C[a,b]$

létezenek szélsőértékei α és β, hogy $\forall x \in D_f$ $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$

(a,b)-n stacionárius pontok $\overset{\subset}{\Rightarrow}$ abszolút szélsőértékek

8P Határozzuk meg $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ -t $\left(x \in [-\frac{1}{2}, 2]\right)$

$f'(x) = \left(\frac{f'g - g'f}{g^2}\right) = \frac{x^2+1 - 2x\cdot x}{(x^2+1)^2} =$

$= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0$, ha $1 - x^2 = 0$

$\downarrow$

stacionárius pontok: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

fv. értékek:

$-1 \notin [-\frac{1}{2}, 2]$

$f(1) = \frac{1}{2}$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{5}$$

$$f(2) = \frac{2}{5}$$

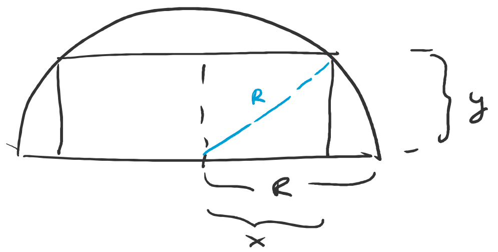
ezért ezek közül: f absz minhely $-\frac{1}{2}$, minimuma $-\frac{2}{5}$

f absz maxhely 1, maximuma $\frac{1}{2}$

Szöveges szélsőérték feladatok

5F

Határozzuk meg egy R sugarú félkörbe írt legnagyobb területű téglalap méreteit, ha a téglalap egyik oldala a félkör átmérőjén fekszik!



$$T = 2xy$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow \underline{y = \sqrt{R^2 - x^2}}$$

ezért
$$T = 2x \cdot \sqrt{R^2 - x^2}$$
$$T = 2\sqrt{\underbrace{R^2x^2 - x^4}}$$ $x > 0$

T max ha f max.

keressük meg $f(x) = R^2x^2 - x^4$ maximumát

$$f'(x) = 2R^2x - 4x^3$$
$$f''(x) = 2R^2 - 12x^2 = 2(R^2 - 6x^2)$$

$f'(x)$ zérushelyei: $2x(R^2 - 2x^2) = 0$

$(0, R)$-en

$$R^2 = 2x^2$$

$$\frac{R^2}{2} = x^2 \Rightarrow x = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$f''\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) = 2R^2 - 12\frac{R^2}{2} = 2R^2 - 6R^2 = -4R^2 < 0$$

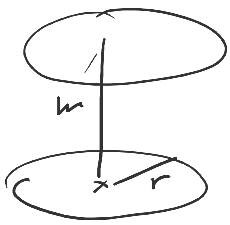
f'' negatív $\Rightarrow$ 2. rendű e.f. szerint lokmaxhely.

T legnagyobb ha $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$. $y = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$

azaz $x = y$

---

6. Feladat. Hogyan kell megválasztani egy 1 liter térfogatú, henger alakú konzervdoboz méreteit, hogy a gyártási költsége minimális legyen?



térfogat $= 1000$

$$A = 2r^2\pi + \underbrace{2r\pi m}_{\text{palást}}$$

$$V = \pi r^2 m = 1000 \Rightarrow m = \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} \rightarrow \text{keressük a minimumát}$$

$$f(x) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2} \rightarrow \frac{2\cancel{\pi}\cdot 1000\,\cancel{r}}{\cancel{\pi}\, r^{\cancel{2}}} = \frac{2000}{r}$$

$$\frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$f'(x) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \qquad A \in D^2(0,+\infty)$$

$$f''(x) = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

$f'(x)$ zHely: $4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \qquad r \neq 0$

$$2\pi r - \frac{1000}{r^2} = 0 \quad /:r$$

$$2\pi - \frac{1000}{r^3} = 0$$

$$2\pi r^3 - 1000 = 0$$

$$2\pi r^3 = 1000 \quad /:2\pi$$

$$r^3 = \frac{1000}{}$$

$$r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

$$r^3 = \frac{10}{2\pi}$$

$$2\pi r^3 = 1000$$

$$2\pi r^3 = 1000$$

$$r^3 = \frac{1000}{2\pi}$$

$$r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

$$P''\left(\frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}\right) = 4\pi + \frac{4000}{r^3} = 4\pi + \frac{4000}{\left(\frac{1000}{2\pi}\right)}$$

$$= 4\pi + 4000 \cdot \frac{2\pi}{10^3} > 0$$

másodrendű. e.f. szerint $r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$ a fv. lok. min. helye.

Ez absz. min. hely is, mert $A \in D^2(0, +\infty)$ és $A'(x) = 0$ egyenletnek 1db megoldása van

$$m = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi} \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{2\pi}}{10}\right)^2 =$$

4 Speciális FVk

19 October 2021 18:29

$$a^x = \exp_a(x) \to \exp_a(x)'' = \exp_a(x)' \cdot \ln a = \underbrace{\underbrace{\exp_a(x)}_{+} \cdot \underbrace{\ln^2 a}_{+}}_{\text{Szigorúan konvex (kiv } a=1)} > 0$$

$$\log_a x \to (\log_a x)'' = \frac{1}{x \ln a}' = \frac{1^2}{x^2 \ln a} \to \begin{cases} < 0 & \text{ha } a > 1 \\ > 0 & \text{ha } a < 1 \end{cases}$$

$$x^\alpha \to (x^\alpha)'' = (\alpha x^{\alpha-1})' = \underbrace{\alpha(\alpha-1)}_{\text{? előjel}} \underbrace{x^{\alpha-2}}_{+}$$

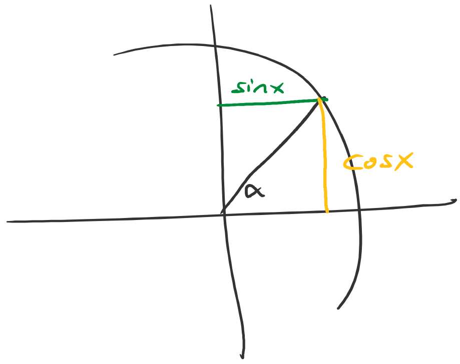
- $\alpha > 1$, $\alpha < 0$ → szkonvex
- $0 < \alpha < 1$ → szkonkáv
- $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ → konkáv + konvex

TRIGONOMETRIKUS FVK

sin ---- cos

$\cos^2 + \sin^2 = 1$

$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



C = CC − SS $\quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

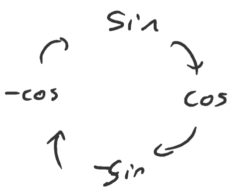
S = SC + CS $\quad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

α	0	30	45	60	90	180	270
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos}{\sin}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos(-x) = \cos x$



$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\frac{\sin x}{\cos x}$ $\quad \frac{\cos x}{\sin x}$

$\sin 3x = 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x$ (

$\cos 3x = \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x$

$\frac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad\qquad$ $\frac{\cos x}{\sin x}$

tg — — — — — ctg

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x$$

sin , cos Hatványsorként

$$\sin x = \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cos x = \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

sin $\uparrow$ $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\downarrow$ $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, szkonkáv $[0, \pi]$, 0 infl. pont eltolt

TG & CTG

$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad$ páratlan függvény, π szerint periodikus

$\mathrm{tg}\, x = 0 \iff \sin x = 0 \qquad x = k\pi$

$\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\, y$, ha $x = y + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sin(x-y) = 0$

$$\boxed{\mathrm{tg}' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \mathrm{tg}'' = 2\frac{\sin x}{\cos^3 x}}$$

$\mathrm{ctg} = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x}$, $\quad \mathrm{ctg} = -\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Trigonometrikus Fvk Inverzei (ARC *)

$\left(\sin_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} \quad \left(\cos_{|[0,\pi]}\right)^{-1} \quad \left(\mathrm{tg}_{|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1} \quad \left(\mathrm{ctg}_{(0,\pi)}\right)^{-1}$

$$\left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} \quad \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} \quad \left(tg|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right) \quad \left(ctg_{(0,\pi)}\right)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

arcsin arccos arctg arcctg

$$\arcsin x = y \iff \sin y = x$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{\arccos' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\lim_{x\to\mp\infty} \operatorname{arctg} x = \mp\frac{\pi}{2} \leftarrow \text{hr. aszimptotája}$$

$$\boxed{\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{tg' y} = \frac{1}{1+x^2}}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$

Hiperbolikus Fvk

$$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2k!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$ ptlan fv.

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$ páros fv

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

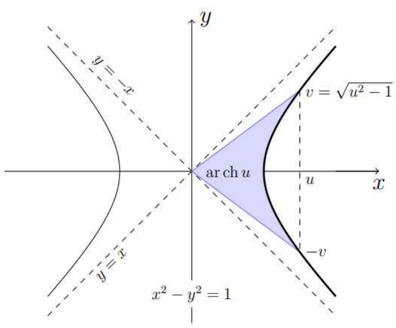
$$\boxed{\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{ch}' x = \operatorname{sh}(x)}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \qquad \operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{th} x = 1 \qquad \lim_{x \to 0+0} \operatorname{cth} x = +\infty$$

Area Fvk

$(\operatorname{sh})^{-1} \downarrow \operatorname{arsh}$ $\quad (\operatorname{ch}_{|[0,+\infty)})^{-1} \downarrow \operatorname{arch}$ $\quad (\operatorname{th})^{-1} \downarrow \operatorname{arth}$ $\quad (\operatorname{cth})^{-1} \downarrow \operatorname{arcth}$



$$\operatorname{ar\,sh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\operatorname{ar\,ch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad (x \in [1, +\infty)),$$

$$\operatorname{ar\,th} x = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad (x \in (-1, 1)),$$

$$\operatorname{ar\,cth} x = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad (|x| > 1).$$

Elemi Fvk helyettesítési értékei

$x \mapsto 1$	$x \mapsto x$	$x \mapsto \sin x$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto \operatorname{arctg} x$

$\oplus$

$+ \quad - \quad \times \quad \div$

$\Downarrow$

$\forall$

L'Hospital szabály

$$\lim_{a\to 0} f = \lim_{a\to 0} g = 0,\ +\infty,\ -\infty \quad , \quad \exists \lim \frac{f'}{g'}$$

1

/a
$$\lim_{x\to 1} \frac{5x^3-8x+3}{x^7+x-2} = \frac{5-8+3}{1+1-2} = \frac{0}{0} \text{ kritikus határérték}$$

$$\overset{\downarrow}{=} \text{L'Hop} = \frac{f'}{g'}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f' = 15x^2-8}{g' = 7x^6+1} = \underline{\underline{\frac{7}{8}}}$$

L'Hospital miatt,

$$\underline{\underline{\lim_{x\to 1} g(x) = \frac{7}{8}}}$$

/b
$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-8x+3}{x^7+x-2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \text{ L'Hospital}\right) = \frac{15x^2-8}{7x^6+x-2} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ L'H} =$$

$$\lim \frac{30x}{7\cdot 6x^5+1} = (\text{L'H}) = \lim \frac{30}{5\cdot 6\cdot 7x^4} = \frac{30}{+\infty} = \frac{1}{+\infty} = \underline{\underline{0}}$$

/c
$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^3-8} = \left(\frac{\sqrt{9}-3}{8-8} = \frac{0}{0} \text{ kritikus határérték}\right) \Rightarrow \text{L'Hosp} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+5}}\cdot 2x}{3x^2} = \frac{\cancel{2x}}{6x^2\sqrt{x^2+5}} = \lim \frac{1}{3x\sqrt{x^2+5}} =$$

$$= x\to 2 = \frac{1}{3\cdot 2\cdot\underbrace{\sqrt{4+5}}}\ = \underline{\underline{\frac{1}{18}}}$$

$$= x \to 2 = \frac{}{3 \cdot 2 \cdot \underbrace{\sqrt{4+5}}_{\sqrt{9} = 3}} = \frac{1}{18}$$

1d
$$\lim_{x \to 0} \frac{tg x - x}{x - \sin x} = \left(\frac{0-0}{0-0} \text{ kritikus határérték} \right) \Rightarrow \text{L'Hospital} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} =$$

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot (1 - \cos x)} = \frac{(1 - \cancel{\cos x})(1 + \cos x)}{(1 - \cancel{\cos x}) \cdot \cos^2 x} =$$

$$= \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

---

(2) L'Hospital határérték

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} \ ? \to \text{ közös nevező! } =$$

$$= \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \frac{0}{0} \text{ kritikus határérték} \to \text{L'Hospital} =$$

$$= \frac{e^x - 1}{(e^x - 1) + x \cdot e^x} = \frac{0}{0} \text{ kritikus h.} \to \text{L'Hosp} =$$

$$= \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{e^x}{e^x(2 + x)} = \frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2}$$

/b

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x e^{1/x} - x \right) = \text{?} + \infty - + \infty \text{ ?} =$$

$$= \quad x\left(e^{1/x} - 1\right) \to \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \text{ krit. } \quad \text{L'Hop} =$$

$$x \cdot \square = \frac{\square}{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{e^{1/x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} e^{1/x} = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

/c

$$\lim_{x \to 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x) = (0 \cdot \infty) \quad [\text{krit. határeérték:}]$$

$$a \cdot b \qquad \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(1-x)}} = \frac{0}{0} \text{ L'Hospital} =$$

$$\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} = \frac{\frac{1}{1-x} \cdot (-1)}{}$$

$$\| $$

$$\frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\frac{1}{1-x} \cdot \cancel{(-1)}}{\frac{1}{\ln^2 x \cdot x}} = \frac{x \cdot \ln^2 x}{1-x} =$$

$$\underbrace{\lim x}_{} \cdot \lim \frac{\ln^2 x}{1-x} =$$

$$\underbrace{}\qquad 1-x$$

$$1 \cdot \underbrace{\lim_{1-0} \frac{0}{0}}\quad \text{L'Hospital} =$$

$$= \frac{\overline{2\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{-1} = \frac{0}{-1} = \underline{0} \qquad = 1 \cdot 0 = \underline{0}$$

1d $\lim\limits_{x \to 1} \underbrace{(1-x)}_{0} \cdot \underbrace{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}_{+\infty} =$ 0·0 kritikus határérték.

(

$$(1-x) \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\cos\frac{\pi}{2}x} =$$

$$= \underbrace{\lim \sin\frac{\pi}{2}x}_{1 \cdot} \cdot \lim \frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \quad \left(\frac{0}{0}\right) \text{ L'Hospital} =$$

$$= \frac{-1}{-\sin\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2}} = 1 \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{2}{\pi}}}$$

---

3 $\boxed{f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x) \cdot g(x)}}$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = f^g = e^{\ln f \cdot g} =$$

$$\lim_{x \to \infty} = e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \cdot x} = e^{h(x)} \qquad e \text{ szigorúan nő!}$$

$$\lim_{x\to\infty} h = ?$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot x = (+\infty)\cdot(+\infty) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \text{ L'Hosp} =$$

$$= \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 0.\ \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = \underline{\underline{1}}$$

Aszimptota

$$f(x) = x^4 + x^3$$

$$\boxed{\begin{aligned} &y = Ax + B \\ &\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = A \\ &\lim_{x\to\infty} (f(x) - Ax) = B \end{aligned}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+x^3}{x} = \lim x^3 + x^2 \ \nexists, \text{ de } +\infty \text{ , mert nincs aszimptota}$$

$$b = \frac{x^2}{(x-1)^2} = (LH) = \frac{2x}{2(x-1)\cdot 1} = \lim \frac{x}{x-1} =$$

$$= LH = \frac{1}{1} = \quad B = 1$$

$\boxed{t=0}$

TELJES FÜV. VIZSG.

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$$

① kezdeti vizsgálatok

– nem páros / páratlan, nem periodikus

② Monotonitás

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \iff 4x^2(x-3) \iff \boxed{\begin{matrix} x_0 = 0 \\ x_1 = 3 \end{matrix}}$$

	$x<0$	0	$0<x<3$	3	$+\infty$
f'	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	$+10$	$\downarrow$		$\uparrow$
Qok:				min	

③ konvexitás

$$f'' = (4x^3 - 12x^2)' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) \iff \boxed{\begin{matrix} x_0 = 0 \\ x_1 = 2 \end{matrix}}$$

	$x<0$	0	$0<x<3$	6	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	10	$\frown$		$\smile$
		Inf.		inf	

④ Határérték és Aszimptoták

$+\infty$, $-\infty$

$$\lim_{+\infty} = x^4 - 4x^3 + 10 = \lim x^4\Big(1 - \underbrace{\frac{4}{x} + \frac{10}{x^4}}_{\to 0}\Big) = \underline{\lim x^4 = +\infty}$$

Aszimptota:
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^4 - 4x^3 + 10}{x} = x^3(\cdots) = \underline{+\infty}$$

$\exists$ lim, de nem véges

TO DO : TFV

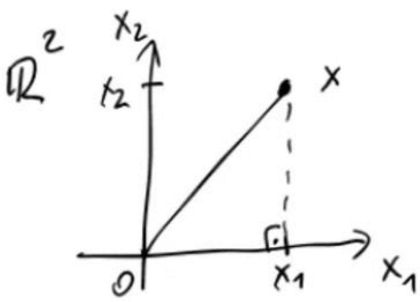
6. feladat.

7. Integrálszámítás Alk.

13 November 2021 11:25

8

19 November 2021 13:56



$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$

$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$

$\|x\|_1 \geq \|x\|_2$

$\geq \|x\|_\infty \geq \frac{1}{2} \|x\|_1$

$x \in \mathbb{R}^n$

$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$

$e_2 = (0, 1, 0, \dots 0)$

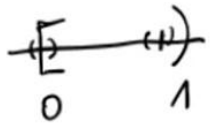
$\vdots$

$e_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$

$x \in \mathbb{R}$

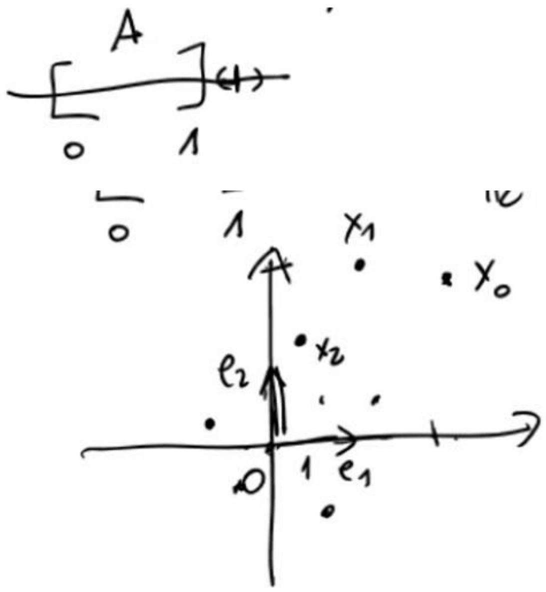
$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\underline{x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i}$

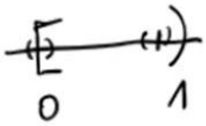


$A = [0, 1)$

$0 \notin \operatorname{int} A$

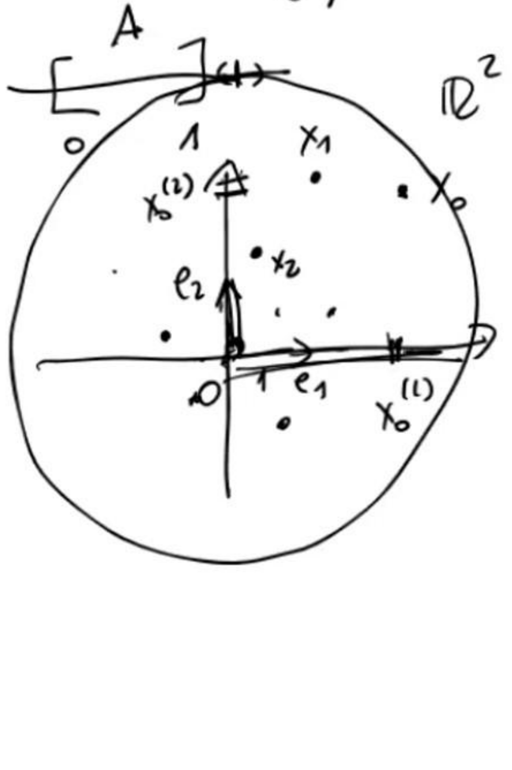


$x = (x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2$



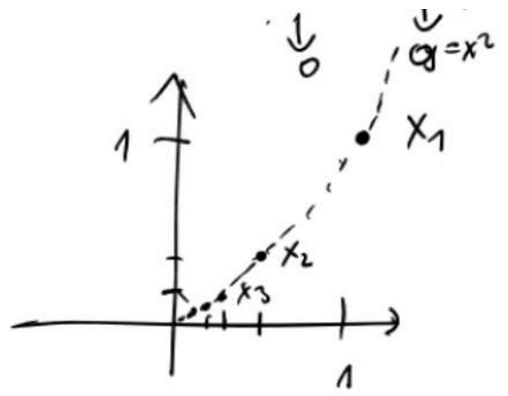
$A = [0,1)$

$0 \notin \operatorname{int} A$



$x = (x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2$

$X_k^{(i)}$ $\quad X_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$



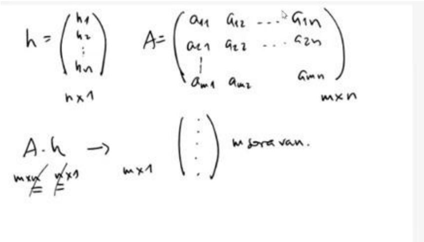
$X_k \to (0,0)$

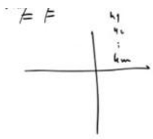
$a_k \to 0$

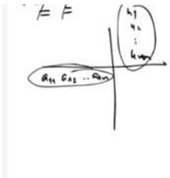
$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists k_0 \in \mathbb{N}: k > k_0 \Rightarrow \underbrace{|a_k - 0|}_{|a_k|} < \varepsilon$

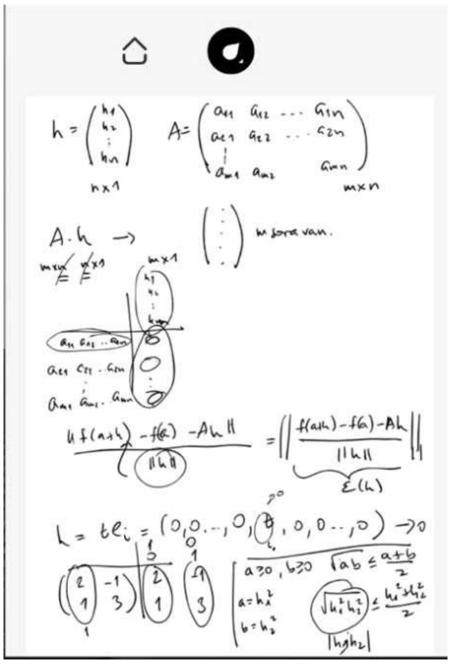
9. Többváltozós Fvk Differenciálszámítása

20 November 2021 15:49









3. Definíció. *Az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ függvény* **totálisan deriválható** *az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban (jelben: $\boldsymbol{f \in D\{a\}}$), ha*

$$\exists A \in \mathbb{R}^{m\times n}: \quad \lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - A\cdot h\|}{\|h\|} = 0.$$

Ekkor $f'(a) := A$ az f függvény **deriváltmátrixa** *az a pontban.*

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) = \Big(\underbrace{e^{xy}\cdot y}_{\substack{f_1(x,y)\\ f_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}}},\ \underbrace{(\sin x)\cdot y^2 x}_{\substack{f_2(x,y)\\ f_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}.}}\Big)$$

Deriváltmátrix

$$f(x,y) = (\underbrace{x^2y}_{f_1},\ \underbrace{x+y}_{f_2}) \qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\partial_1 f_1(x,y) = 2xy \qquad \partial_2 f_1 = x^2$$

$1 = x$

$$\partial_1 f_2(x,y) = 1 \qquad \partial_2 f_2 = 1$$

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ (? hogy lehet ezt deriválni ?)

10. Magasabb rendű deriváltak

05 December 2021 15:50

2. Definíció. *Ha az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ függvény kétszer deriválható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, akkor*

$$f''(a) = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(a) & \partial_{12} f(a) & \dots & \partial_{1n} f(a) \\ \partial_{21} f(a) & \partial_{22} f(a) & \dots & \partial_{2n} f(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{n1} f(a) & \partial_{n2} f(a) & \dots & \partial_{nn} f(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

az f **függvény** a **pontbeli Hesse-féle mátrixa**, *ahol*

$$\partial_{ij} f(a) = \partial_j \big(\partial_i f\big)(a) \quad \big(i = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, n\big).$$

$f(x,y) = x^2y + y \qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\partial_1 f(x,y) = 2x \qquad \partial_2 f(x,y) = x^2+1$

$\partial_{11} f =$

$f(x,y) = x^2y + y \qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\partial_1 f(x,y) = 2xy \qquad \partial_2 f(x,y) = x^2+1$

$\partial_{11} f = 2y \quad \underline{\partial_{12} f = 2x} \quad \underline{\partial_{21} f = 2x} \quad \partial_{22} f = 0$

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

1. Tétel (Young-tétel). *Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(2 \le n \in \mathbb{N})$ és $f \in D^2\{a\}$, akkor*

$$\partial_{ij} f(a) = \partial_{ji} f(a) \quad \forall\, i, j = 1, \dots, n \quad \textit{indexre.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to Q(h) = \underbrace{h_1^2 + h_2^2}_{\text{pozitív definit}} > 0, \text{ ha } h \neq (0,0)$$

Ez helyettesíti a $f'' \geq 0$ -t

$Q(h) = (h_1 - h_2)^2 = h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2$ ← lehet 0 is szemidefinit

7. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix, illetve a hozzá tartozó $Q(h) = \langle A \cdot h, h \rangle$ $(h \in \mathbb{R}^n)$ kvadratikus alak*

- **pozitív definit**, *ha $\forall\, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ esetén $Q(h) > 0$,*
- **negatív definit**, *ha $\forall\, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ esetén $Q(h) < 0$,*
- **indefinit**, *ha Q pozitív és negatív értéket is felvesz.*

poz
szemi poz
indefinit
szemi neg
neg

4. Tétel (Másodrendű elégséges feltétel a lokális szélsőértékre). *Legyen* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *és* $f \in C^2\{a\}$. *Tegyük fel, hogy*

- $f'(a) = 0$,
- *az* $f''(a)$ *Hesse-féle mátrix pozitív (negatív) definit.*

Ekkor az f függvénynek az a pontban lokális minimuma (maximuma) van.

Hesse mátrix

Példa. Legyen

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Ekkor $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Továbbá minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_x f(x, y) = 2x + y = 0, \quad \partial_y f(x, y) = x + 4y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = y = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy f-nek csak a $P(0, 0)$ pontban lehet lokális szélsőértéke. Másrészt

$$\partial_{xx} f(x, y) = 2, \quad \partial_{xy} f(x, y) = \partial_{yx} f(x, y) = 1, \quad \partial_{yy} f(x, y) = 4 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

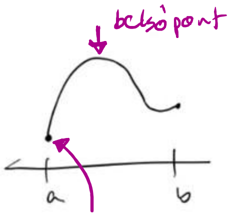
Mivel

$$D(0, 0) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 7 > 0 \qquad \text{és} \qquad \partial_{xx} f(x, y) = 2 > 0,$$

így f-nek a $P(0, 0)$ pontban lokális minimuma van.

Absz. szélsőérték

belsőpont (lokális és globális és abszolút szélsőérték)

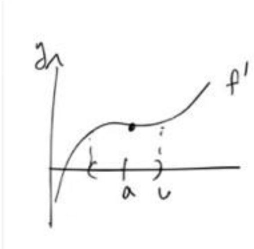


→ 1. stacionáriusnak kell lenni
④ határpontok
} a legnagyobb értéke absz. max.

Az inverzfüggvény-tétel

A valós-valós függvények inverzére vonatkozó deriválási szabály azt mondja ki, hogy ha az I nyílt intervallumon értelmezett, és ott szigorúan monoton és folytonos f függvény egy $a \in I$ pontban differenciálható, és $f'(a) \neq 0$, akkor a létező f^{-1} függvény differenciálható a $b = f(a)$ pontban és

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$



$f'(a) > 0$

$f'(x) > 0 \quad (x \in U)$

1. Tétel (Inverzfüggvény-tétel). *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Tegyük fel, hogy,*

a) f folytonosan deriválható Ω-n,

b) az $a \in \Omega$ pontban $\det f'(a) \neq 0$.

Ekkor

1. f lokálisan invertálható, azaz van olyan $a \in U$ és $f(a) \in V$ nyílt halmazok, hogy az $f_{|U} : U \to V$ függvény bijekció (következésképpen invertálható),

2. az f^{-1} inverz függvény folytonosan deriválható V-n és

$$(*) \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \left[f'(f^{-1}(y))\right]^{-1} \qquad (y \in V).$$

NEM KELL

Inverzfv.

deriváltmátrixnak az inverze

ZH1 Kidolgozott

13 October 2021 12:18

(1) $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & x\le 1 \\ \cos\left(\frac{x-1}{2}\right)-\frac{2}{a} & x>1\end{cases} \qquad a,b=? \Rightarrow f\in D\{1\}$

$g(x)=ax^2+bx$

$h(x)=\cos\left(\frac{x-1}{2}\right)-\frac{2}{a} \qquad \Rightarrow a\neq 0$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathcal{D}_g=\mathbb{R}, & g\in D(\mathbb{R}) \\ \mathcal{D}_h=\mathbb{R}, & h\in D(\mathbb{R}) \end{array}\right\} f\in D(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f\in D\{1\}$$

$\Updownarrow$

i) $g(1)=h(1)$

ii) $g'(1)=h'(1)$

$$\text{i)}\ \left.\begin{array}{l} g(1)=a\cdot 1^2+b\cdot 1=a+b \\ h(1)=\cos\left(\frac{1-1}{2}\right)-\frac{2}{a}=1-\frac{2}{a} \end{array}\right\} a+b=1-\frac{2}{a}$$

$$\text{ii)}\ \left.\begin{array}{l} g'(x)=2ax+b \Rightarrow g'(1)=2a+b \\ h'(x)=\sin\left(\frac{x-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}-0 \Rightarrow h'(1)=\sin\left(\frac{1-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=0 \end{array}\right\} 2a+b=0$$

$2a+b=0 \Rightarrow b=-2a$

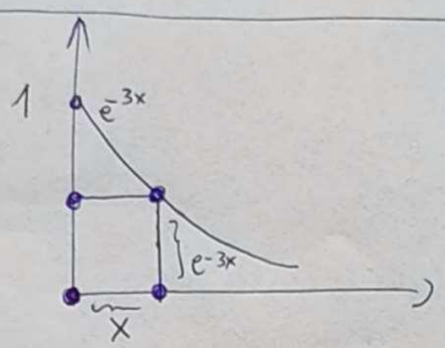
$a+b=1-\frac{2}{a} \Rightarrow a-2a=1-2/a \Leftrightarrow -a=1-2/a \Leftrightarrow -a^2=a-2$

$\Leftrightarrow a^2+a-2=0$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{2 megoldás:} \\ a=1 \text{ és } b=-2 \quad \text{vagy} \\ a=-2 \text{ és } b=4 \end{array}}$$

(2) Határozzuk meg azt a maximális területű téglalapot, amelynek egyik csúcsa az origó, ezzel szemközti csúcsa pedig az e^{-3x} függvény grafikonján helyezkedik el az első síknegyedben!



$T(x) = x\cdot e^{-3x} \quad \Rightarrow \quad T \in D(\mathbb{R})$

Keressük: $x \in (0,+\infty)$, amelyre $T(x)$ max.

$$T'(x) = 1\cdot e^{-3x} + x e^{-3x}\cdot(-3) = (1-3x)\cdot \underbrace{e^{-3x}}_{>0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-3x=0$$
$$\Leftrightarrow \quad x=1/3$$

$T' \in C(\mathbb{R})$ [sőt $T' \in D(\mathbb{R})$ $(T \in D^2(\mathbb{R}))$]

$$\left.\begin{array}{l} x<1/3 \Rightarrow T'(x)>0 \Rightarrow T\uparrow \\ x>1/3 \Rightarrow T'(x)<0 \Rightarrow T\downarrow \end{array}\right\} \quad x=1/3 \text{ lok. max. hely}$$

[vagy: $T''(x) = -3\cdot e^{-3x} + (1-3x)e^{-3x}\cdot(-3) = -3e^{-3x}(2-3x)$

$T''(1/3) = -3e^{-1}(2-1) = -3e^{-1} < 0 \Rightarrow x=1/3$ lok. max. hely]

$T \in D^3(\mathbb{R})$ és $T'(x)=0$ $(x>0)$ $\Leftrightarrow$ $x=1/3$, továbbá $x=1/3$ lok. max hely

$\Rightarrow$ $x=1/3$ absz. max. hely.

Ekkor: $T(x) = \frac{1}{3}\cdot e^{-1}$ (a max. területű téglalap területe).

③ a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\dfrac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{tg}x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0+0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$

---

a) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{tg}x}\right)=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{-\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{tg}x}\right)=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{L'H}{=}$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{-\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\cdot(-1)}{\frac{1}{\cos^2x}}\right)=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\cos^2x}{\frac{\pi}{2}-x}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'H}{=}$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{2\cos x(-\sin x)}{0-1}\right)=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\sin(2x)=0$$

b) $$(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}=e^{\ln\left((\operatorname{ctg}x)^{\sin x}\right)}=e^{(\sin x)\ln(\operatorname{ctg}x)}$$

$$\lim_{x\to 0+0}\left((\sin x)\cdot\ln(\operatorname{ctg}x)\right)=(0\cdot(+\infty))=\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{\ln\operatorname{ctg}x}{\frac{1}{\sin x}}\right)=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{L'H}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg}x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2x}\right)}{\left(-\frac{1}{\sin^2x}\right)\cos x}\right)=\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\cos x}\right)=\frac{0}{1}=0$$

$$\exp\in C\{0\}\Rightarrow\lim_{x\to 0+0}e^{(\sin x)\ln(\operatorname{ctg}x)}=e^0=1$$

(4) Telj fv. vizsgálat: $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2}{x^2-4}$ $\quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,2\})$

---

1 Kezdeti vizsgálatok

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2}{x^2-4} = \frac{x^2(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2}{x+2}$$

- f-nek nincs paritása, nem periodikus
- $f \in D^\infty(\mathbb{R} \setminus \{-2,2\})$
- $f(x) \geq 0 \iff x > -2$

  $f(x) \leq 0 \iff x < -2$

  $f(x) = 0 \iff x = 0$

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(\text{[illegible]}) - x^2\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2} = \frac{x\cdot(x+4)}{(x+2)^2} = 0 \iff \text{[illegible]} \lor x=-4$$

$$\left.\begin{array}{l} (x+2)^2 > 0 \quad (x \neq -2) \\ x^2+4x > 0 \iff x \in (-\infty,-4) \cup (0,+\infty) \end{array}\right\}$$

$f'(x) > 0 \iff$

$x \in (-\infty,-4) \cup (0,+\infty) \setminus \{$

$f'(x) < 0 \iff$

$x \in (-4,0) \setminus \{-2\}$

x	$x<-4$	-4	$-4<x<-2$	$-2<x<0$	0	$0<x<2$	$x>2$
f'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$
f	$\uparrow$	lok max	$\downarrow$	$\downarrow$	lok min	$\uparrow$	$\uparrow$

$\Downarrow$ $f(-4) = \dfrac{(-4)^2}{-4+2} = -8$

$\Downarrow$ $f(0) = 0$

3 konvexitás

$$f'(x) = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+4)\cdot(x+2)^2 - (x^2+4x)\cdot 2(x+2)\cdot 1}{(x+2)^4} =$$

$$= \frac{(2x+4)\cdot(x+2) - 2(x^2+4x)}{(x+2)^3} = \frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x}{(x+2)^3} =$$

$$= \frac{8}{(x+2)^3} \neq 0$$

$f''(x) > 0 \iff x > -2 \quad (x \neq 2)$

$f''(x) < 0 \iff x < -2$

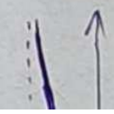
4 Határértékek, aszimptoták

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} x\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\right) = (\pm\infty)\cdot\left(\frac{1}{1+0}\right) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{x+2} = \frac{2^2}{2+2} = 1$$

$$\lim_{x\to -2\pm 0}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 4\cdot\lim_{x\to -2\pm 0}\left(\frac{1}{x+2}\right) = 4\cdot\lim_{x\to 0\pm 0}\frac{1}{x} = \pm\infty$$

5 Grafikon



Aszimptoták?

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{x}} = 1 = A$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-Ax) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x+2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x+2} - \frac{x^2+2x}{x+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{2x}{x+2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{2}{1+\frac{2}{x}}\right) = -2 = B$$

5. $f(x) = \sqrt{1+2x} \quad (x > -1/2)$

$T_{2,0} f(x) = ?$

Hiba $[-\frac{5}{18}, \frac{1}{4}]$-en?

$f(x) = (1+2x)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1+2x)^{-1/2} \cdot 2 = (1+2x)^{-1/2} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{2} (1+2x)^{-3/2} \cdot 2 = -(1+2x)^{-3/2} \Rightarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = \frac{3}{2} \cdot (1+2x)^{-5/2} \cdot 2 = 3 (1+2x)^{-5/2}$

$T_{2,0} f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 = 1 + x - \frac{x^2}{2}$

$\forall x \in [-\frac{5}{18}, \frac{1}{4}] \quad \exists \xi_x \in (-\frac{5}{18}, \frac{1}{4}) \quad$ (sőt...)

$f(x) - T_{2,0} f(x) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!} x^3$

$\Rightarrow \left| f(x) - T_{2,0} f(x) \right| = \frac{|f'''(\xi_x)|}{3!} |x|^3 = \frac{3 \cdot (1+2x)^{-5/2}}{3!} \cdot |x|^3 =$

$= \frac{1}{2\sqrt{(1+2x)^5}} \cdot |x|^3 \leq \frac{1}{2\sqrt{(1-\frac{5}{9})^5}} \cdot |x|^3 = \frac{1}{2(\sqrt{\frac{4}{9}})^5} \cdot |x|^3 =$

$$\Rightarrow \left|f(x) - T_{2,0} f(x)\right| = \frac{|f'''(\xi_x)|}{3!}|x|^3 = \frac{3\cdot(1+2x)^{-5/2}}{3!}\cdot|x|^3 =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{(1+2x)^5}}}_{\downarrow\; x\in\left[-\frac{5}{18},\,\frac{1}{4}\right]}\cdot|x|^3 \le \frac{1}{2\sqrt{\left(1-\frac{5}{9}\right)^5}}\cdot|x|^3 = \frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{4}{9}}\right)^5}\cdot|x|^3 =$$

$$= \frac{3^5}{2^6}\cdot|x|^3 \le \frac{3^5}{2^6}\cdot\left(\frac{5}{18}\right)^3 \le \frac{3^5}{2^6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{3^2}{2^6} = \frac{9}{64}$$

$$F \underset{\text{integrálás}}{\overset{\text{deriválás}}{\rightleftarrows}} f \qquad F: \text{ primitív fv.} \qquad x^2 \to \frac{x^3}{3} + c$$

f : integrandus

$$\int f = \int f(x)\,dx := \{F : I \to \mathbb{R} \mid F \in D \text{ és } F' = f\}$$

Alapintegrálok

$$\int \frac{1}{x} = \ln x \quad \longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{x} = -\ln x \quad (\text{ha } x < 0)$$

$$\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$\to \int \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

→ 1. Helyettesítési Szabály

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$$

pl:

$$\int x e^{x^2} = \frac{1}{2} \int \underbrace{2x}_{g'} \underbrace{e^{x^2}}_{f(g)} = \frac{1}{2} \int \underbrace{\exp(x^2)}_{f(g)} \cdot \underbrace{(x^2)'}_{g'} = \frac{1}{2} \exp(x^2) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f = \exp \\ f' = \exp \\ \hline g' = 2x \\ g = x^2 \end{array}}$$

$F(g(x)) \to$
$\exp(x^2)$

→ Parciális Integrálás

$$\int f(x) g'(x)\,dx \Rightarrow f(x) g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx$$

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

pl $\int \underset{f}{x} \underset{g'}{e^x} \, dx \overset{\text{parc}}{=} x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x = xe^x - \int e^x = xe^x - e^x + c = e^x(x-1)$

$g' = e^x$

$g = e^x$

→ Második helyettesítési szabály

tfh: – $f: I \to \mathbb{R}$ $g: J \to I$, $R_g = I$

– $g \in D$, $g' > 0$ J-n (vagy $g' < 0$)

– $(f \circ g) \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ -nek $\exists F$

$$\int f(x)\,dx \underset{\boxed{x = g(t)}}{\overset{2.\text{hsz}}{=}} \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt \Big]_{t = g^{-1}(x)}$$

pl: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ $(x \in -1,1)$

! $x = \sin t := g(t)$ $(t \in -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ① $g'(t) = \cos t$ (>0 ha $t \in \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$) ezért ↑, ezért invertálható

② ! $t = g^{-1}(x) = \arcsin x$ $(x \in -1,1)$

$\int \sqrt{1-x}\,dx = \sqrt{\sin 1 - \sin t^2} \cdot \cos t \; dt$

| ötlet: $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ |

$\cos t > 0 \to \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos x$

...xamples :

- linearization_trigo$(\cos(x)^2)$ returns $\frac{1+\cos(2x)}{2}$
- linearization_trigo$(\sin(x)^2)$ returns $\frac{1-\cos(2x)}{2}$

$\int \cos^2 x \, dt$ = linearizálunk $\int \frac{1+\cos 2t}{2} = \int \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \, dt$

$(t = \arcsin x) = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2 \arcsin x)}{4} + c$

Határozott Integrál

Korlátos fvk halmaza : $\underbrace{K[a,b]}$

felosztás halmaza : $\mathcal{F}[a,b]$

Darboux-féle alsó/ felső integrál $I_*(f) \leq I^*(f)$

Riemann-Integrálható $[a,b]$-n , ha $I_*(f) = I^*(f)$

$$\left(\int_a^b f := \int_a^b f(x)\,dx := I_*(f) = I^*(f) \qquad f \in [a,b]\right.$$

$$\text{ii}$$

jel: $R[a,b]$

$$T(A) := \int_a^b f(x)\,dx$$

– Minden folytonos fv. Integrálható

Tulajdonságok :

- $\forall \alpha, \beta$
  $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$ és $\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

- $f \cdot g \in R[a,b]$

- $\forall m : |g(x)| \geq m > 0 \quad (x \in [a,b])$
  akkor $\frac{f}{g}$ integrálható $[a,b]$-n

- $\int_a^a f := 0 \qquad \int_a^b f := -\int_b^a f$

- Additivitás
  $$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

ormában fogjuk írni:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad (x \in I).$$

Elemi feladatok

1.

$\sqrt{x} = x^{1/2}$

a) $$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx = \int \left(x\left(x\cdot(x)^{\frac12}\right)^{\frac12}\right)^{\frac12} =$$

$$\left(x\left(x^{3/2}\right)^{\frac12}\right)^{\frac12}$$

$$= \left(x\left(x^{3/4}\right)\right)^{1/2} =$$

$$\left(x^{7/4}\right)^{\frac12} = \int x^{\frac78} =$$

$$\int x^{\frac78} = \frac{x^{\frac{15}{8}}}{\frac{15}{8}} = \frac{8}{15}\sqrt[8]{x^{15}} + c$$

b) $$\int \frac{x^2-1}{x^2+1} = \left(\text{Milyen jó lenne, ha } \frac{a-1}{a}\text{!}\right) = \int \frac{\overbrace{x^2+1}^{}-2}{\underbrace{x^2+1}_{1}} = \overbrace{1}^{a} - \overbrace{\frac{2}{x^2+1}}^{b} \int$$

$$\left[\frac{1}{1-x^2} = \operatorname{arctg} x\right] \qquad \overbrace{x}^{a} - \overbrace{2\operatorname{arctg} x}^{b} + c$$

c) $$\int \frac{(x+1)^2}{x^3} = \left(\text{Milyen jó lenne, ha } a+b+c\text{!}\right) = \frac{x^2+2x+1}{x^3} = \frac{x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3} =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{\boxed{2}}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \ln x + \frac{\boxed{2}}{1-2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{1-3}\cdot\frac{1}{x^2} =$$

$$= \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}$$

d) $$\int \frac{3\cos^2 x + 2}{\cos 2x - 1}\,dx = \left(\text{Milyen jó lenne, ha tudnám az addíciós tételeket}\right) =$$

Addíciós
$$\left.\begin{array}{l} \cos^2 x = 1-\sin^2 x \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{array}\right\rangle = \frac{3(1-\sin^2 x)+2}{(\cos^2 x - \sin^2 x) - (\sin^2 x + \cos^2 x)} =$$

$$\frac{5-3\sin^2 x}{-2\sin^2 x} = \frac{5\ 3a}{2a} =$$

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{2\sin^2 x} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \left(\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x\right)$$

$$\underline{\frac{3x}{2} + \frac{5}{2}\cdot \operatorname{ctg} x} + C$$

(2.) Első helyettesítési szabály

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c \qquad (x \in I),$$

ahol F az f függvény egy primitív függvénye.

$$\to \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + c$$

$$\to \quad \int f^{\alpha}(x) f'(x) = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}$$

$$\to \quad \int f(ax+b) = \frac{F(ax+b)}{a}$$

a) $\int \frac{x}{x^2+3}\,dx \Rightarrow \left(\frac{f'}{f} = \ln f\right) = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3} = \frac{1}{2}\cdot \ln(x^2+3) + c$ ü

b) $\int \operatorname{tg} x\,dx \Rightarrow \left(\frac{f'}{f} = \ln x \quad \frac{\cos}{\sin}\right) = -\int \frac{\sin}{\cos}\,dx = -\ln(\cos x)$

c) $\int \frac{1}{x \ln x} \Rightarrow$ (mi jó lesz, ...) $= \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \ln(\ln x)$

c) $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} \Rightarrow \left(\begin{matrix} \text{mivel jó lesz,} \\ \text{ln } \frac{f'}{f} \end{matrix} \right) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \ln(\ln x)$

$\ln x' \rightsquigarrow \frac{1}{x}$

d) $\int \cos(5x-3)\,dx \Rightarrow \left(\begin{matrix} \text{lin. hely} \\ f(ax+b) = \frac{F(ax+b)}{a} \end{matrix} \right) \Rightarrow \frac{\sin(5x-3)}{5} + c$

$\boxed{\begin{matrix} F = \cos \\ a = 5 \\ b = -3 \end{matrix}}$

e) $\sin^5 x \cdot \cos^3 x \Rightarrow \left(\begin{matrix} \text{leggyök eszve:} \\ \cos^3 x = \cos x \cos^2 x = \\ (1-\sin^2)\cdot \cos x \end{matrix} \right) =$

$= \sin^5 x \cdot (1-\sin^2) \cdot \cos x = (\sin^5 x - \sin^7 x) \cdot \cos x \Rightarrow$

$\sin^5 x \cos x - \sin^7 x \cos x = \left(\begin{matrix} f^a \cdot f' \text{ típus} \\ f = \sin \\ f' = \cos \\ a = 5 \end{matrix} \right) =$

$= \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + c$

ötlet: linearizáljunk

f) $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \int (1) - \cos 2x =$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \int \cos 2x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2}$

kivesszük $x^{-\frac{3}{2}} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

g) $\frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{tg^3 x}} = \underbrace{(tg\, x)^{-\frac{3}{2}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}} \Rightarrow \frac{tg\, x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} =$

f^a $\qquad tg\,x' = \frac{f'}{\cos^2 x} \qquad - \frac{2}{\sqrt{tg\,x}}$

(h)

$$\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx =$$

$$\left(\ln' x = \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad \frac{1}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t \right)$$

$f(x) = \frac{1}{1+t^2}$

$g(x) = \ln x$

$$\frac{1}{\underbrace{1+\ln^2 x}_{(\ln x)^2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{(\ln x)'} = \operatorname{arctg} \cdot \ln x + c$$

Parciális Integrálás

$\rightarrow \quad \int \underbrace{P(x)}_{f} \cdot \underbrace{T(ax+b)}_{g'}\,dx \quad \leftarrow \quad T \in \{\exp,\ \sin, \cos, sh, ch\}$

$$\boxed{\int f \cdot g' = f g - \int f' \cdot g}$$

3. a)

$$\int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\sin x}_{g'}\,dx =$$

$$\begin{pmatrix} f(x) = x & \rightarrow f' = 1 \\ g'(x) = \sin x & \rightarrow g = -\cos x \end{pmatrix}$$

$$= -x \cdot \cos x - \int \underbrace{1 \cdot (-\cos)}_{-\sin x}$$

$$= -x\cos x + \sin x$$

b)

$$\int \underbrace{(x^2+3x)}_{f} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{g'} = \frac{1}{2}(x^2+3x) \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\int (2x+3) \cdot e^{2x} =$$

$f \qquad g$

$$\left(\begin{array}{l} g' = e^{2x} \to g = \frac{1}{2}e^{2x} \\ f = x^2+3x \to f' = 2x+3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{l} g' = e^{2x} \Rightarrow g\ \frac{1}{2}e^{2x} \\ f = 2x+3 \Rightarrow f' = 2 \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+3x)e^{2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2x+3)\,e^{2x} - \int \underbrace{2\cdot\frac{e^{2x}}{2}}_{\int e^{2x}}\right) =$$

$$\underline{\frac{1}{2}(x^2+3x)\,e^{2x} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}(2x+3)e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\Big)}\ ✓$$

$\to \quad \int P(x)\cdot G^n(ax+b)\,dx \qquad$ P: polinom

$G \in \{\ln, \text{arc}\ldots, \text{ar}\ldots\}$

- $f(x) = G^n(ax+b)$

$g' = P(x)$

(4)

a) $\int \ln x \; dx \quad (x \in 0, +\infty) = \int \ln(x)\cdot(x)' \overset{\text{parc}}{=}$

trükk: $\underbrace{\ln x}_{f} \cdot \underbrace{1}_{g'}$

$$= \ln x \cdot x - \int (\ln x)' \cdot x =$$

$$= x\ln x - \int \frac{1}{x}x =$$

$f(x) = \ln x \to \frac{1}{x}$

$g'(x) = 1 \to x$

$$= x\ln x - x + c$$

$$(x(\ln x - 1) + c$$

b) $\int \text{arctg}\,3x\,dx = x\,\text{arctg}\,3x - \int \frac{3}{9x^2+1}\cdot x =$

trükk $\quad \text{arctg}\,3x \cdot 1$

$f(x) = \text{arctg}\,3x \to \frac{3}{9x^2+1}$

$$= \left(\int \frac{3x}{1+9x^2}\right. \quad \left[\frac{f'}{f} \text{ ötlet -et akarunk}\right]$$

$9 \times 2 = 18$

$g'(x) = 1 \to x$

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{arctg}' x &\to \frac{1}{(x)^2+1} \\ \operatorname{arctg} ax &\to \frac{a}{(ax)^2+1} \end{aligned}}$$

$$\frac{1}{6} \cdot \int \frac{18x}{1+9x^2} = \frac{1}{6} \cdot \ln\left(1+9x^2\right)\Big)$$

$$x \operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{6}\left(1+9x^2\right) + c \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\longrightarrow \int e^{\alpha x+\beta} \cdot T(ax+b)\,dx \qquad T \in \{\sin, \cos, \operatorname{sh}, \operatorname{ch}\}$$

$f(x) := e^{\alpha x+\beta}$

$g' := T(ax+b)$

5

$$\underline{\int e^{2x} \cdot \cos x} \overset{\text{parc}}{=} e^{2x} \cdot \sin x - \int 2e^{2x} \cdot \sin x =$$

$$= e^{2x} \cdot \sin x - 2\int e^{2x} \cdot \sin x \overset{\text{parc}}{=}$$

$$-e^{2x} \cos x - 2 \int e^{2x} \cdot \cos x$$

$f(x) = e^{2x} \Rightarrow f' = 2e^{2x}$

$g' = \cos x \to g = \sin x$

$g_2' = \sin x \to g_2 = -\cos x$

Tehát: Egyenletet kell csinálnunk!

$$\int e^{2x} \cdot \cos x = e^{2x} \cdot \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4\int e^{2x} \cdot \cos x$$

$$5\int e^{2x} \cdot \cos x = e^{2x} \cdot \sin x + 2e^{2x} \cos x$$

$$\int e^{2x} \cdot \cos x = \frac{1}{5}\left(e^{2x} \cdot \sin x + 2e^{2x} \cos x\right) + c$$

6*

Racionális törtfvk

Elemi törtek

$$\boxed{\int \frac{1}{ax+b} = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c}$$

→ 1.

$n>1$

$$\boxed{\int \frac{1}{(ax+b)^n} = \frac{(ax+b)^{1-n}}{a(1-n)} + c}$$

$(ax+b)^{-n}$ ötlet

→ 2. típus

nyílt intervallum ahol ax^2+bx+c szig $\gtrless 0$

$$\int \frac{\boxed{2ax}+b}{\boxed{ax^2}+bx+c}\,dx = \left(\frac{f'}{f}\text{(alakú)}\right) = \ln|ax^2+bx+c|$$

→ 3. típus

$b^2-4ac<0 \to D<0 \to$ nincs gyök

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{1}{a(x+\alpha)^2+\beta}\,dx = \frac{1}{\beta}\int \frac{1}{\left(\sqrt{a/\beta}\,(x+\alpha)\right)^2+1}\,dx = \dots =$$

$$\frac{1}{\sqrt{a\beta}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{a/b}\,(x+\alpha)\right)$$

→ 4
→ 5 } Fuck this shit

1.

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-4)} = \text{parciális törtekre bontás} \quad \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} =$$

$$= \frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)} =$$

$$A(x-4)+B(x-2)=1$$

$$Ax-4A+Bx-2B=1$$

Ötlet: Bassunk le a diákokkal

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ -4A-2B=1 \end{array}\right\} \quad -2A=1 \Rightarrow A=-\frac{1}{2}$$

$$(B=-A) \qquad \qquad B=\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-4}=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-4}\,dx=$$

$$2<x<4$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln|x-4|=$$

$$\frac{1}{2}\left[\ln(x-2)+\ln(2-x)\right]$$

partial fraction expansion

6)

$$\frac{3x-5}{x^2+2x+1}=\left((x+1)^2\right)=\frac{3x-5}{(x+1)^2} \text{ parciális törtek} =$$

teljes négyzet

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)+B}{x^2+2x+1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A=3 \\ B=-8 \end{array}}$$

$$3x-5=A(x+1)+B$$

$$x=0 \rightarrow -5=A+B$$

$$x=-1 \rightarrow 3\cdot(-1)-5=B \rightarrow B=-8$$

$$A=3$$

$$\int\left(\frac{3}{x+1}-\frac{8}{(x+1)^2}\right)dx=3\ln(x+1)+\frac{8}{x+1}+c$$

c)

$$\frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1}=\text{maradékos osztás}=\frac{x(x^2-1)+x^2+3}{x^2-1}=$$

$$\boxed{x + \frac{x^2+3}{x^2-2}}$$

$$= x + \frac{x^2+3}{x^2-1} =$$

$$= x + 1 + \underbrace{\frac{4}{x^2-1}}_{\text{parc. tört:}}$$

$$\frac{2}{x-1} \cdot \frac{2}{x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = A(x+1) + B(x-1)$$

$x = 1 \Rightarrow 4 = 2A \rightarrow A = 2$

$x = -1 \Rightarrow 4 = -2B \rightarrow B = -2$

$\Rightarrow$ ezért $= \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-1}$

vagyis

$$\int \frac{3x-5}{x^2+2x+1} = \int \left(x+1 + \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-1} \right) \Rightarrow \frac{x^2}{2} + x + 2\ln(x+1) + 2\ln(1-x)$$

d/e $\rightarrow$ SKIPPERINO

Második helyettesítési szabály

$$\int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=\!=} \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt \Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

2.

$$\int \sqrt{e^x - 1}$$

$t = \sqrt{e^x - 1} \quad (x > 0, \Rightarrow t > 0)$

$\downarrow$ kifejezzük x-et

$t^2 = e^x - 1 = t^2 + 1 = e^x \Rightarrow \underline{\ln(1+t^2) = x} \rightarrow$

$\boxed{x = g(t)} := \ln(1+t^2)$

$$g'(t) = \frac{2t}{1+t^2} \quad (>0) \qquad g \text{ szigmon nő} \Rightarrow \text{invertálható}$$

$$\underline{g^{-1}(x) = t}$$

ezért,

Milyen jó lenne, ha $\frac{A}{A}$

$$\int \sqrt{e^x - 1} = \underbrace{\sqrt{e^{\ln(1+t^2)} - 1}}_{\sqrt{t^2} = t} \cdot \frac{2t}{1+t^2} = 2\int \frac{t^2}{t^2+1} = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} =$$

$$= 2\int 1 - \underbrace{\frac{1}{t^2+1}}_{\operatorname{arctg} t} = 2t - 2\operatorname{arctg} t + c =$$

visszahelyettesítünk

$$= \left\{ t = \sqrt{e^x - 1} \right\} = 2\sqrt{e^x-1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1} + c$$

Integrálfv

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad (x \in [a,b])$$

eltűnő integrálfv.
↓
$F(x_0) \doteq 0$

Határozott Integrál

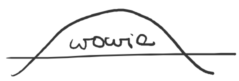
Ha $f \in C[a,b]$ → tetszőleges $x_0 \in [a,b]$ pontban eltűnő integrálfv.-re igaz, hogy

$$\left.\begin{array}{l} F \in C[a,b] \\ F \in D[a,b] \\ F'(x) = f(x) \end{array}\right\} \forall\, x \in (a,b) \text{ -re.}$$

Newton - Leibniz formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) := \left[F(x)\right]_a^b$$

$$\int_0^\pi \sin x \, dx$$

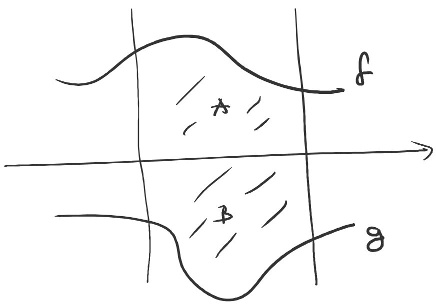


$$\int_0^\pi \sin x = \left[-\cos x\right]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 - -1 = \underline{\underline{2}}$$

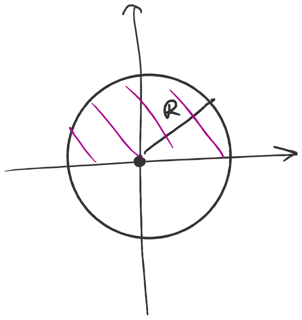
HATÁROZOTT INTEGRÁL ALKALMAZÁSAI

$$T(A) := \int_a^b f(x)\,dx$$

$$T(B) := \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)$$



kör területe



kör egyenlete: $x^2+y^2=R^2$

$$f(x) = \sqrt{R^2-x^2} \quad (x \in [-R,R])$$

$\downarrow$

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\, dx$$

$f \to F$?

tudjuk: $\int \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}\cdot \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{x-x^2} + c$

ezért $F = \frac{R^2}{2}\cdot \arcsin \frac{x}{R} + \frac{R}{2} x \sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2} + c$

$\downarrow$

$$\left[F(x)\right]_{-R}^{R} = \underline{R^2\cdot\frac{\pi}{2}} \to \text{teljes terület: } \underline{\underline{R^2\pi}}$$

Síkbeli Görbe Ívhossza

görbe grafikája: $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in [a,b]\}$

rektifikálható (van ívhossza:)

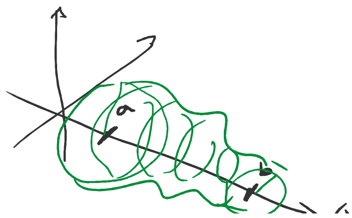
$$\to \quad \ell(\Gamma_f) := \sup\{\ell_f(\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} < +\infty$$

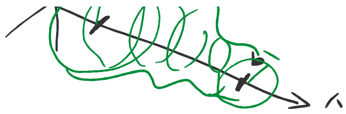
$$\boxed{\ell(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx}$$

Grafikon ívhosszának a képlete

Forgástest térfogata

forgástest: $A_f := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le x \le b,\ y^2+z^2 \le f^2(x)\}$





forgástest térfogata

$$\boxed{\pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$$

pl: gömb térfogata:

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

NL-formula: $\pi \int_a^b f^2(x) = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx =$ primitív fv.

$$= \pi\left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \pi\left(\left(R^2 R - \frac{R^3}{3}\right) - \left(R^2(-R) + \frac{R^3}{3}\right)\right) =$$

$$= \underbrace{R^3 - \frac{R^3}{3}} - -R^3 + \frac{-R^3}{3} =$$

$$\frac{2R^3}{3} + \frac{2R^3}{3} = \frac{4R^3}{3}$$

forgástest felszíne:

$$2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)^2]}\,dx$$

Improprius Integrálok

$$G(x) := \int_x^b f(t)\,dt \qquad f: (a, b]$$

f impropriusan integrálható ha $\exists \lim G$ véges határérték, hogy

$$\int_a^b f := \lim_{x \to a} G(x)$$

pl:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0+0} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0+0} \left[2\sqrt{x}\right]_t^1 = \lim\left(2 - 2\sqrt{t}\right) = 2$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0+0} \int_t^1 \frac{1}{x} = \lim_{t\to 0+0} \left[\ln x\right]_t^1 = \lim\left(\ln 1 - \underbrace{\ln t}_{0}\right) = +\infty$$

pl.:

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\qquad$ $[1, +\infty)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim \underbrace{-\frac{1}{t}} - (-1) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

3. Integrálszámítás III. GY
04 December 2021 23:55

Második Helyettesítési Szabály

$$\int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt \Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

$\to$ $\int R(e^x)$ alapú integrálok

$t = e^x$

$x = \ln t =: g(t)$ $\to$ ezért alakja $D_g = \ln^{-1}[I] = J$

$g(t) = \ln t$ $\quad g'(t) = \frac{1}{t} > 0$, ha $t \in J$

g szig. mon. növő

ezért invertálható, ezért

$\| \; g^{-1}(x) = e^x = t$

$$\int R \circ \exp = \int R(e^x)\,dx \underset{x=\ln t}{=} R(t)\cdot \frac{1}{t}\,dt.$$

$\to$ $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ $\to$ folytonos integrandus esetében $\quad t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

kifejezzük:

$t \to x$ $\qquad t^n = \frac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{ax+b = ct^n x + dt^n}{\boxed{g(t) = x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}}}$

visszahelyettesítve:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) = \int \Big(g(t), t\Big)\cdot g'(t)\,dt \qquad (t \in J)$$

1./a

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x + 2}\,dx$$

alkalmazzuk $\underset{\sim\sim\sim}{t = e^x}$ Ekkor

$\to$ $x = \ln(t) := g(t)$

$x \in \mathbb{R}$, ezért $\mathbb{R} \in \mathbb{R}$.

$D_g = (0, +\infty)$

$g'(t) = \frac{1}{t}$, és >0, ezért g szigmon nő, ezért invertálható, ezért

$\to$ $g^{-1}(x) = e^x = t$

Második helyettesítési szabály:

$$\int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt \Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx = \int \frac{t^3}{t+2} \cdot \frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t^2}{t+2} =$$

$$= \int \frac{\boxed{t^2-4}+4}{t+2} = \int \left(\frac{(t+2)(t-2)}{t+2} + \frac{4}{t+2}\right) =$$

$$= \int t-2 + 4\int \frac{1}{t+2} = \frac{t^2}{2} - 2t + 4\ln(t+2) + c$$

$$\Rightarrow t = e^x \to \frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + 4\ln(e^x+2) + c$$

TADA!

$$\int \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\,dx$$

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \to \begin{pmatrix} n=3 \\ a=1 \\ b=1 \\ c=1 \\ d=0 \end{pmatrix} \qquad t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} =$$

fejezzük ki x-et: $= t^3 = \frac{x+1}{x}$

$$\boxed{\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}}$$

$$t^3 = 1 + \frac{1}{x}$$

$$t^3 - 1 = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1}{t^3-1}$$

$$x = \frac{1}{t^3-1} = g(t) \qquad t \in (1, +\infty)$$

g deriválható, és $g' = -\frac{1}{(t^3-1)^2} \cdot 3t^2 < 0$, ha $t > 0$,

ezért invertálható.

$$g^{-1}(x) = t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} \qquad (x \in 0, +\infty)$$

- 2. helyettesítési szabály:

$$\int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt \Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

$$\int \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{t^3-1}\right)^2} \cdot t \cdot \left(-\frac{3t^2}{(t^3-1)^2}\right) dt =$$

$$= t \cdot (t^3-1)^2 \cdot \frac{-3t^2}{(t^3-1)^2} = -3\int t^3\,dt =$$

$$= -\frac{3}{4} t^4$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} \rightarrow -\frac{3}{4}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{4/3}$$

$$\int \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\,dx = \int \frac{1}{x^2} \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\,dx = -\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' dx = (f^{1/3} \cdot f' \text{ típus}) =$$

$$= -\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4/3}}{4/3} + c = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^4} + c \quad \big(x \in (0, +\infty)\big).$$

Newton-Leibniz Formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: \left[F(x)\right]_a^b$$

(2) Számítsuk ki

/a $\displaystyle\int_{10}^{66} \frac{1}{x - \sqrt[3]{x-2} - 2}$ -t.

$\rightarrow$ $t = \sqrt[3]{x-2}$ helyettesítés

$t^3 = x - 2 \;=\; \underline{x = t^3 + 2}$

$x = t^3 + 2 = g(t) \;\rightarrow\; g' = \underline{3t^2}$

$\underline{2 < t < 4}$ $\leftarrow$ $10 < x < 66$, ezért ott szigorúan nő a fv, ezért invertálható, ezért $\exists\, g^{-1}(x)$

$\rightarrow$ második helyettesítési szabály:

$$\underline{\int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dx}$$

$$\frac{1}{t^3 - 2 - t - 2} \cdot 3t^2 = \frac{3t^2}{t^3 - t} =$$

$$= \int \frac{3t}{t^2 - 1} = 3\int \frac{t}{t^2-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{l}\text{milyen jó, lenne,} \\ \text{ha } \quad \frac{f'}{f}\end{array}\right) = \frac{3}{2}\int \frac{2t}{t^2 - 1} = \frac{3}{2}\cdot \ln(t^2 - 1) + c = \left(t = \sqrt[3]{x-2}\right) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{2}\cdot \ln\left(\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2 - 1\right) + c}} = F$$

$\rightarrow$ Newton leibniz formula:

$$F(66) - F(10) = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2$$

$$\frac{3}{2}\cdot \ln(16 - 1) \;-\;-\;-\;-\; \frac{3}{2}\cdot \ln 5$$

Határozott Integrál alkalmazásai

Síkidom területe: $T(B) = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$

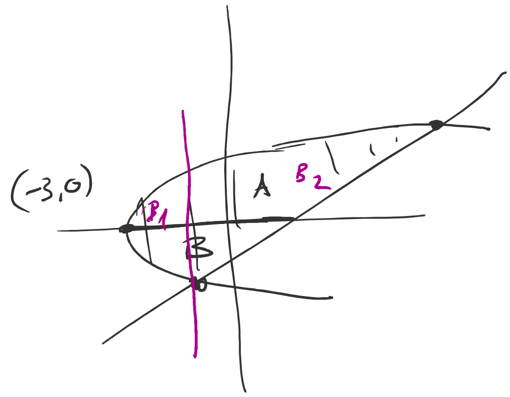
3. Számoljuk ki

$$\left.\begin{aligned} f &: \quad y = x - 1 \\ g &: \quad y^2 = 2x + 6 \end{aligned}\right\} \text{ területét}$$

→ 1. Metszéspont keresése

$$\left.\begin{aligned} y &= x - 1 \\ y^2 &= 2x + 6 \end{aligned}\right\}$$

$$(x-1)^2 = 2x + 6$$
$$x^2 - 2x + 1 = 2x + 6$$
$$x^2 - 4x - 5 = 0$$
$$x_1 = 5$$
$$x_2 = -1$$



felső ág egyenlete: $y = \sqrt{2x+6}$

alsóé: $y = -\sqrt{2x+6}$

$B_1 = \quad -3 \leq x \leq -1$

$B_2 = \quad -1 \leq x \leq 5$

$$T(B_1) = \int_{-3}^{-1} \left(\sqrt{2x+6} - \left(-\sqrt{2x+6}\right)\right) dx =$$

$$2\int_{-3}^{-1} \sqrt{2x+6} = 2\left[\frac{(2x+6)^{3/2}}{3/2 \cdot 2}\right]_{-3}^{-1} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3} - \sqrt{0^3}\right) = \frac{16}{3}$$

$$(2x+6)^{1/2} \to \frac{(2x+6)^{3/2}}{3/2 \quad 2}$$

$$T(B_2) \quad \int_{-1}^{5} \left(\sqrt{2x+6} - (x-1)\right) = \left[\frac{(2x+6)^{3/2}}{3/2 \cdot 2} - \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{5} = \frac{38}{3}$$

$$T(B_1) + T(B_2) = 18$$

Egyszerűbben:

$$\left.\begin{array}{l} y = x-1 \\ y^2 = 2x+6 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x_1 = y+1 \\ x_2 = \frac{y^2}{2} - 3 \end{array}\right. \to$$

$$y+1 = \frac{y^2}{2} - 3$$

$$y+4 = \frac{y^2}{2}$$

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -2 \le y \le 4,\ \frac{y^2}{2} - 3 \le x \le y+1 \right\}$$

$$2y+8 = y^2$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = -2$$

$$T(B) = \int_{-2}^{4} \left(y+1 - \left(\frac{y^2}{2} - 3\right)\right) =$$

$$\int_{-2}^{4} y+4 - \frac{y^2}{2} = \text{prim. fv} = \left[\frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6}\right]_{-2}^{4} =$$

$$= \ldots = 18$$

Síkbeli görbe ívhossza

$$\ell(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

---

(4). Határozzuk meg a

$$f(x) = \frac{2(x-1)^{3/2}}{3} \qquad (2 \le x \le 5) \text{ ívhosszát}$$

$$f'(x) = 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2(x-1)^{1/2}}{3} = (x-1)^{1/2} = \sqrt{x-1}$$

$f'(x) = \sqrt{x-1}$, ez folytonos $[2,5]$-n

$$\ell(\Gamma_f) = \int \sqrt{1 + f'(x)^2} = \int_2^5 \sqrt{1 + x - 1} = \int_2^5 \sqrt{x} = = \int x^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_2^5 = \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_2^5 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{5^3} - \sqrt{2^3}\right)$$

Forgástest térfogata

$$A_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le x \le b,\quad y^2 + z^2 \le f^2(x)\}$$

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx}$$

5.

$f(x) = \sin x$ $\circlearrowright x$ $x \in [0, \pi]$

$\to$ $f(x) = \sin x$ folytonos, ezért Riemann integrálható.

forgástest térfogata

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \;\; dx \qquad \left| \; \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \; \right|$$

$$\pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx \overset{\text{(kivisszük 2-t)}}{=} \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} 1 - \cos 2x =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} =$$

$$\frac{\pi}{2}\left(\left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2}\right) - \underbrace{\left(0 - \frac{\sin 0}{2}\right)}_{0}\right) = \underline{\frac{\pi}{2} \cdot \pi} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{2}}}$$

Improprius Integrál

$$\overset{\text{gáj}}{f : (a, b]} \to \text{vezessük be:} \quad G(x) := \int_x^b f(t)\, dt$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f := \lim_{x \to a} G(x)$$

6/a

$$\int^{+\infty} xe^{-2x}\, dx \qquad f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

⑥/a

$$\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,dx \,, \qquad f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$$

felülről impropius

parciális integrálással

$$\boxed{\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g}$$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-2x} = xe^{-2x} - \int \frac{e^{-2x}}{2} = -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-2x}}{2} =$$

$f = x$

$g' = e^{-2x}$

$g = -\frac{e^{-2x}}{2}$

$$= -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{2} + c$$

ezért

$$\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-2x} = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{1\cdot e^{-2x}}{4}\right]_0^t =$$

$$= \lim_{t\to\infty} -\underbrace{\frac{t}{2e^{2t}}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{4e^{2t}}}_{0} - \underbrace{\frac{0\cdot}{2}}_{0} - \frac{1}{4} = -\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

mellék:

$$\frac{t}{2e^{2t}} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{L'H}{=} \frac{1}{4e^{2t}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \;!$$

/b

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx \qquad \text{impropius.}$$

$0 \le x \le 2$

↳ $x \ne 0$!
$x \ne 2$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \underline{\arcsin(x-1) + c}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \underline{\arcsin(x-1)+c}$$

$2x - x^2 \longrightarrow$

milyen jó lenne ha

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$0 \leftarrow \quad 1 \quad \rightarrow 2$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} = \lim_{t\to 0+0} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} = \lim_{t\to 0+0} \Big[\arcsin(x-1)\Big]_t^1 = 0 - \arcsin(t-1) =$$

$$= \underline{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} = \lim_{t\to 2-0} \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} = \lim_{t\to 2-0} \Big[\arcsin(x-1)\Big]_1^t = \arcsin(1) - \arcsin(0)$$

$$= + \frac{\pi}{2}$$

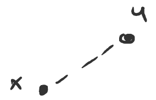
ezért

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} = \underline{\underline{\pi}}$$

$\boxed{\text{eof}}$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

euklideszi norma: $\|(x,y)\| := \sqrt{x^2+y^2}$



$d(x,y) := \|x-y\|$

$K_r(a) := \{ x \in \mathbb{R}^2 : \|x-a\| < r \}$

Def. alapján biz.be:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(1)

Def. $\left[\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in D_f, \ \|(x,y) - (0,0)\| < \delta\text{-ban } |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon . \right]$

→ legyen $\varepsilon > 0$.

1) Ha $(x,y) = (0,0) \to |f(x,y) - f(0,0)| = 0 < \varepsilon$ ✓

2) Különben $|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} - 0 \right| = \dfrac{x^2|y^3|}{2x^2+y^2} \leq$ ezt tudjuk

elhagyjuk

$\leq \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \cdot |y^3| \leq \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \cdot |y^3| \leq |y^3| \leq$ $\left(\boxed{\text{Tfh } \|(x,y)\| < 1} \right)$ $\Rightarrow |y| < 1$

$\leq |y|^2 \leq \boxed{x^2+y^2} = \|(x,y)\|^2 < \varepsilon$

mert $\|(x,y)\| < \sqrt{\varepsilon}$

Így, ha $\delta := \min\{\boxed{1}, \sqrt{\varepsilon}\}$ akkor $f \in C\{0,0\}$

---

(2)

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} \end{cases}$$

—

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} \\ 0 & \text{ha } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

nem folytonos

1) $f(0,0) = 0 < \varepsilon$ ✓

2) $|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \dfrac{2xy}{x^2+y^2} - 0 \right| = \dfrac{|2xy|}{x^2+y^2} \leq$

$\leq$ (vegyük észre, ha pl $x=y$ egyenes, akkor) $\dfrac{2x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{2x^2}{2x^2} = 1 \not< \forall\varepsilon$

Ha $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ ha $n \to \infty$ de!

$(x_n, y_n) = (n, n) \to +\infty$ ha $n \to +\infty$

(3.)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f minden origón átmenő egyenesre folytonos, de $f \in C\{(0,0)\}$

M:

1) $\to$ $f|_{y=0}$: $\varphi(x) = f(x,0) = 0$

2) $\to$ $f|_{x=0}$: $\varphi(y) = f(0,y) = 0$

3) $\to$ $y = mx$: $\varphi(x) = f(x, mx) = 0$

ez: $\varphi(x) = \dfrac{x^2 \cdot mx}{x^4 + (mx)^2} = \dfrac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = m\dfrac{x^3}{x^4+m^2x^2} = \dfrac{mx}{x^2+m^2}$

$\oplus$ $f(0,0) = 0$, így $\varphi(0) = 0$.

⊕ $f(0,0) = 0$, így $\varphi(0) = 0$.
így φ folytonos fv. tetszőleges m (és $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

1) $= f(x,0) = \dfrac{x^2 \cdot 0}{x^4 + 0} = \underline{0} < \varepsilon$ ✓

2) $= f(0,y) = \dfrac{0 \cdot y}{0 + y^2} = \underline{0} < \varepsilon$ ✓

→ vegyük észre:

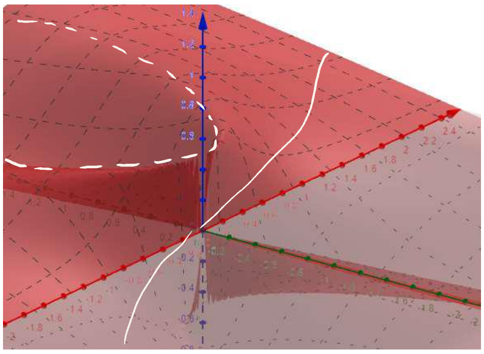
$$f(x,y) = f(x, mx^2) = \frac{x^2 \cdot mx^2}{x^4 + (mx^2)^2} = \frac{m}{1+m} \; !$$

(vegyük észre, hogy ki tudjuk lőni az összes változót)

nem függ x-től

(gyártsunk le egy ellenpéldát!
$m = 1$)

$f(x_n, y_n)(n) \to \left(\frac{1}{n} \;\; \left(\frac{1}{n}\right)^2\right) \to (0,0)$, ha $n \to +\infty$



de $f(x_n, y_n) = \frac{1}{2}$ (mert $\frac{n}{1+m^2}$ és $m=1$)

ezért f nem folytonos

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Fvk. Határértéke

Ha van két sorozat ami $a_1 a_2$-höz konvergál, de $\lim_1 \neq \lim_2$, akkor f-nek nincs lime (a_1, a_2)-ben

4. Lássuk be:

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$\to$ $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, hogy $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$,

$0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta$ esetén $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$.

Rögzítsük $\varepsilon > 0$. Ekkor $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ -ban:

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \left(\text{Tudjuk: } |xy| < \frac{x^2+y^2}{2} \right) \leq$$

$$\frac{\overset{>0}{x^2+y^2}}{2\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2}\boxed{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2}\underbrace{\boxed{\|(x,y)\| < \varepsilon}}_{\|(x,y)\| < \boxed{2\varepsilon}}$$

konstans elég

Tudjuk még: $\sqrt{x^2y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{2}$

$\delta := \boxed{2\varepsilon}$ akkor a feltétel teljesül

b) $$\lim_{x,y\to 0,0} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = 2$$

$$\left| \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} - 2 \right| = \left(\text{bevisszük a } 2\text{-t} \right) =$$

$\sqrt{a}-1$

$-2\cdot -1 \to 2$

$$= \frac{\overset{a^2}{x^2+y^2+1} - \overset{2ab}{2\sqrt{x^2+y^2+1}} + \overset{b^2}{1}}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} \quad \to \quad \begin{aligned} a &= \sqrt{x^2+y^2+1} \\ b &= -1 \end{aligned} \quad =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}} = \sqrt{x^2+y^2+1}-1 = \sqrt{a}-b \cdot \frac{\sqrt{a}+b}{\sqrt{a}+b} =$$

$\sqrt{a}-b$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{a-b^2}{\sqrt{a}+b} = \frac{x^2+y^2+\cancel{1}-\cancel{1}}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} \leq$$

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| < \varepsilon$$

$\delta := \varepsilon$ választással a feltétel teljesül.

(5) Biz be

a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y}{(x^2+y^2)^2} & \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\left|\frac{x^4 y}{(x^2+y^2)^2}\right| = \frac{x^4|y|}{(x^2+y^2)^2} = |y|\frac{(x^2)^2}{(x^2+y^2)^2} = \left(\text{De jó lenne, ha felbontott is ok lenne}\right) \le$$

$$|y|\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} = |y| \le \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| < \varepsilon.$$

Így ha $\delta = \varepsilon$, akkor teljesül a feltétel

b)

$$g(x,y) = \frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}$$ -nek nincs! határértéke

$$\left|\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}\right| \le \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} = 1 \not< \varepsilon \quad \text{nem jó!}$$

ellenpéldát kell találni!

kell $\lim a = \lim b = (0,0)$ akkor $f(a), f(b) \neq 0$

tipp: (x, mx)

$$g(x,y) = g(x,mx) = \frac{x^4}{(x^2+(mx)^2)^2} = \frac{x^4}{x^4(m^2+1)} = \frac{1}{(1+m)^2} \quad \text{! oggag}$$

$$(x^2+m^2x^2)^2$$

$$(x^2 + m^2x^2)^2$$

$$x^4 + 2m^2x^4 + m^4x^4$$

$$x^4\left(2m^2+m^4+1\right)$$

$$x^4(1+m^2)^2$$

ekkor vegyünk $m=0$-t.

$m=0 \to (x,y)_n := \left(\frac{1}{n}, 0\right) \to (0,0)$, de $g(x,y)_n = \frac{1}{(1+0)^2} = 1$!

$m=1 \to (x,y)_n := \left(\frac{1}{n}, 1\cdot\frac{1}{n}\right) \to (0,0)$, de $g(x,y)_n = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$!

mind

$$\lim a = \lim b = (0,0)$$

de

$$g(a) \neq g(b)$$

ezért g fvnek nincs határértéke a $(0,0)$ pontban

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Parciális Deriválása

⑥ Alábbi Fvk x, y szerinti parc.d.

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^3}{xy} \qquad \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$f'_x = \frac{2x\cdot xy - y\cdot(x^2-y^3)}{(xy)^2} = \frac{2x^2y - x^2y + y^4}{(xy)^2} = \frac{x^2y + y^4}{(xy)^2}$$

$$f'_y = \frac{-3y^2\cdot xy - x\cdot(x^2-y^3)}{(xy^2)} = \frac{-2xy^3 - x^3}{x^2y^2}$$

(7) $f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + x + y^2$

$f'_x = 3yx^2 + 2y^2x + 1$

$f'_y = x^3 + 2x^2y + 2y$

		$(1,0)$
$f''_{xx} =$	$6yx + 2y^2$	0
$f''_{yy} =$	$2x^2 + 2$	4
$f''_{xy} =$	$3x^2 + 4xy$	3
$f''_{yx} =$	$3x^2 + 4xy$	3

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Iránymenti Deriváltjai

(8) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) \qquad a = (a_1, a_2) = (1,1)$

a) $\partial_v f$ iránymenti derivált

az kell, hogy $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 1$, wowie! sin cos

$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1 \qquad (\alpha \in [0, 2\pi))$

1.m. deriváltsághoz

$F_v(t) := f(a + tv) = f(a_1 + tv_1,\ a_2 + tv_2) =$

$f(1 + t\cdot\cos\alpha \quad 1 + t\cdot\sin\alpha) \Rightarrow (1 + t\cos\alpha)^2 - (1 + t\cos\alpha)(1 + t\sin\alpha) + (1 + t\sin\alpha)^2 =$

valós-valós fv. deriválható

így $\partial_v f(1,1) = \sin\alpha + \cos\alpha$

b) ellenőrizzük, hogy $(1,1)$ az e.

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2x - y \\ f'_y &= 2y - x \end{aligned}\right\} \text{folytonosak } \forall (x,y) \in \mathbb{R}\text{-ben}$$

$$\partial_v f(1,1) = \left\langle \begin{pmatrix} \partial_1 f(1,1) \\ \partial_2 f(1,1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{matrix} \right\rangle = \cos\alpha + \sin\alpha$$

---

9. Határozzuk meg a $f(x,y) = \dfrac{y^3}{e^{2x+1}}$ fv. iránymenti deriváltját

$P(-\frac{1}{2}, 1)$-ben.

$u = (1,2)$ vektor.

-> parciális deriváltak

$$\frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$f'_x = \frac{-e^{2x+1} \cdot 2 \cdot y^3}{(e^{2x+1})^2} = -2\frac{y^3}{e^{2x+1}}$$

$$f'_y = \frac{3y^2 \cdot e^{2x+1} - 0}{(e^{2x+1})^2} = \frac{3y^2}{e^{2x+1}}$$

-> u normálása : $\frac{u}{\|u\|}$ =

$$f'(P) = f'(-\tfrac{1}{2}, 1) = \left(\partial_x f(-\tfrac{1}{2}, 1) , \partial_y f(-\tfrac{1}{2}, 1) \right) =$$

$$(-2 , 3)$$

-> normálás

$$v = \frac{u}{\|u\|} = \frac{(1,2)}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}$$

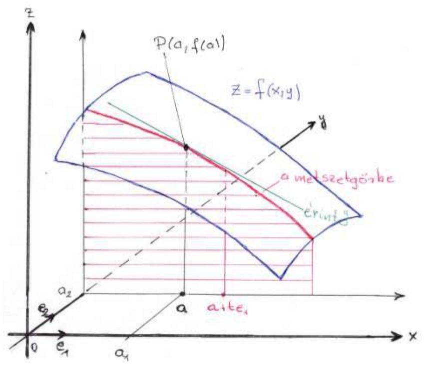
$$\partial_v f(-\tfrac{1}{2}, 1) = \left\langle (-2,3), \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle = -\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{4}{\sqrt{5}}}}$$

QED

4. TöbbvFvkd I.

06 December 2021 16:31

Parciális Deriváltak $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ -re



f fv x szerinti parc. deriváltja a pontban

$$\boxed{\partial_x f(a)}$$

$$\partial_x f(a) = F_x'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{F_x(t) - F_x(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}$$

$F_x'(0)$ metszésgörbe a $P(a, f(a))$ érintőjének meredeksége

$$F_i : \underset{(t \in k(0))}{t} \mapsto f(a_1, a_2, \dots, \underbrace{a_i + t}_{i\text{-edik}}, \dots a_n) = f(a + te_i)$$

$$e_i := (0, 0 \dots \overbrace{1}, \dots 0) \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

kanonikus bázis

---

pl

$$f(x,y) = \underbrace{x e^{x^2+y^2}}_{f \quad g} - 3y$$

$$f_x' = 1 \cdot e^{x^2+y^2} + x \cdot 2x e^{x^2+y^2}$$

$$f_y' = \cancel{x} e^{x^2+y^2} \cdot 2y - 3$$

↳ mert ez konstans

Magasabb Rendű Parciális Deriváltak

$$\partial_{ij} f(a) = \partial_i \partial_j f(a) = \partial_i (\partial_j f)(a)$$

f_{ii}'' => másodrendű tiszta parc.der. -> ∂_i^2, ∂_i^2 ..

f_{ij}'' => vegyes

Iránymenti deriváltak $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$-re.

parc derivált : $\times^{y}_{x}$ kanonikus alakban volt megadva iránymenti : v egységvektor $\quad \|v\|^2 = 1$

$(v_1^2 + v_2^2 + \dots v_n^2)$

$$F_v : \underset{(t \in k(0))}{t} \mapsto f(a_1 + t v_1, a_2 + t v_2, \dots a_n + t v_n) \doteq f(\vec{a} + t\vec{v})$$

$\boxed{F_v'}$ f a-n v pontbeli irányment deriváltja.

$\boxed{f_v'(a) \qquad \partial_v f(a)}$

Pl: $\quad f(x,y) = x e^{x+y} + \sin xy \qquad v = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$a = (0,0)$ pont $\qquad \|v\| \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \underline{1}$ ✓ v hossza jó ☺

$$f\left((0,0) + t\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}t, \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) =$$

$$\frac{1}{2}t \cdot e^{\frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}t} + \sin\left(\frac{1}{2}t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}t}_{f} \cdot \underbrace{e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}t}}_{g} + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t^2\right) = \text{deriváljuk}$$

$$= \underbrace{\underset{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}t}} + \underset{0}{\frac{1}{2}t} \cdot e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}t} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2}} + \underset{0}{\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t^2\right)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}t =$$

$$F_v'(0) = \frac{1}{2}$$

Tétel: Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D_f$ és f-nek $\exists \partial$-jai $k(a) \subset D_f$ környezetben, és ezek $C\{a\}$-k.

Ekkor tetszőleges $v = (v_1 \cdots v_n)$ vektornak létezik irányment deriváltja.

Így a számítások:

$f(x,y) = x e^{x+y} + \sin xy \qquad v = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad a = (0,0)$

$f_x' = 1 e^{x+y} + x \cdot e^{x+y} \cdot 1 + \cos xy \cdot y \quad \to f_x'(0,0) = 1$

$f_y' = x e^{x+y} \cdot 1 + \cos xy \cdot x \quad \to f_y'(0,0) = 0$

$$f'_x = 1e^{x+y} + x \cdot e^{x+y} \cdot 1 + \cos xy \cdot y \quad \to \quad f'_x(0,0) = 1$$

$$f'_y = x e^{x+y} \cdot 1 + \cos xy \cdot x \quad \to \quad f'_y(0,0) = 0$$

$$\partial f(a) = f'_x(0,0) \cdot v_1 + f'_y f(0,0) \cdot v_2 =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Totális Derivált

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ totálisan deriválható az $a \in \operatorname{int} D_f$ pontban, ha

$$\exists A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \lim_{h \to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - A \cdot h \|}{\| h \|} = 0$$

akkor $\boxed{f'(a) := A}$ f deriváltmátrixa

Pl: $f(x,y) = xy$ $\quad a = (1,2)$ pontban vett deriváltmátrixa:

$$f'(1,2) = \left(\underset{(y)(1,2)}{f'_x(xy)(1,2)}, \underset{(x)(1,2)}{f'_y(xy)(1,2)} \right)$$

$$(2, \quad 1)$$

Normák ekvivalenciái:

$$\|y\|_\infty \leq \|y\| \leq \sqrt{m}\|y\|_\infty$$

Totális és Parciális Derivált

Jacobi Mátrix

$$\exists\, \partial_i f_j(a) \quad (\forall i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m) \quad \text{és}$$

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \cdots & \partial_n f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \cdots & \partial_n f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \partial_2 f_m(a) & \cdots & \partial_n f_m(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Elégséges feltétel totális deriválhatóságra

$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

tfh a-nak $\forall$ $K(a) \subset D_f$ környezete, amely minden $i = [1, n]$-re:

a) $\exists \partial_i f(x)$ minden $x \in K(a)$-ban

b) a $\partial_i f : K(a) \to \mathbb{R}$ parciális d.fv. folytonos.

$\Downarrow$

Ekkor f totálisan deriválható

Felület Érintősíkja

$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ -nek az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban van érintősíkja,

ha $f \in D\{(x_0, y_0)\}$

Sík általános egyenlete: $Ax + By + Cz = D$

$\vec{n}(A, B, C)$ a sík egy normálvektora

ebből következik

$$\overbrace{z - f(a,b)}^{Z} = \overbrace{\partial_x f(a,b)\cdot(x-a)}^{X} + \overbrace{\partial_y f(a,b)(y-b)}^{Y}$$

Példa: $P_0 = (1, 2)$ $a = 1$, $b = 2$

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= xy \\ \partial_x f(x,y) &= y \\ \partial_y f(x,y) &= x \\ f(1,2) &= 2 \end{aligned}\right\}$$

érintősík egyenlete

$z - f(1,2) = \underline{\partial_x f(1,2)}\cdot(x-1) + \partial_y f(1,2)(x-2) \Rightarrow$

$z - 2 = 2(x-1) + 2(y-2) = \underline{\underline{2x + y - z = 2}}$

Deriválási szabályok

$f, g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ és $f, g \in D\{a\}$, akkor $\forall \alpha, \beta$:

- $(\alpha f + \beta g) \in D\{a\}$
- $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$

- $(\alpha f + \beta g) \in D\{a\}$
- $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f(a) + \beta g'(a)$

$f \in \mathbb{R}^{m} \to S$ $\qquad g \in \mathbb{R}^{n \to m}$

$(f \circ \theta)'(a) = f'((g(a)) \cdot g'(a)$

↳ mátrixszorzás!

Pl:

$f(x, y, z) = x + y^z \qquad (\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1)$

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ xyz \\ x \end{pmatrix} \begin{matrix} = y_1 \\ = y_2 \\ = y_3 \end{matrix} \quad (\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$$

1. 2. 3.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial z}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x} + \ldots u_2 + u_3 =$$

$$= 1 \cdot 2x + y_3 \cdot yz + y_2 \cdot 1 = \ldots = \frac{\partial (f \circ g)}{\partial x} = 2x + 2xyz$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \ldots \qquad 2x + xyz + xyz =$$

WTF

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \ldots$$

Gradiens Vektor

$$\partial_v f(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) \cdot s_i$$

$$\boxed{\text{grad } f(a) = (f_1'(a), f_2'(a), f_3(a) \cdots f_n'(a))}$$

Gradiens vektor

Ebbe az irányban mutató iránymenti derivált a legnagyobb

$$\underline{w} := \frac{\text{grad } f(a)}{\|\text{grad } f(a)\|} = \frac{(f_1'(a), f_2'(a) \cdots f_n'(a))}{\|\text{grad } f(a)\|}$$

Magasabbrendű Deriváltak

→ gradiens vektor

$f'(x) = (f_1'(x), f_2'(x) \dots f_n'(x))$.

$\downarrow$

$f''(a) := f''(a) = \underbrace{(\text{grad} f)'(a)}_{n \times n\text{-es mx}}$

Fv. kétszer deriválható az $a \in D_f$ pontban ($D^2\{a\}$), ha

— $\exists K(a) \subset D_f$, hogy $f \in D\{x\}$, $\forall x \in K(a)$ pontban

— $\forall i = [1, n]$ indexre $\partial_i f \in D\{a\}$

TLDR: ha deriválható egyszer és utána megegyszer

Hesse-féle mx

$$f''(a) = \begin{pmatrix} \partial_{11} & & \partial_{1n} \\ & \ddots & \\ \partial_{n1} & & \partial_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad \partial_{ij} f(a) := \partial_j(\partial_i) f(a)$$

Young-tétel

Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, akkor $\partial_{ij} f(a) = \partial_{ji} f(a)$ $\forall i,j$ indexre

Példa:

$$xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$f \notin D^2\{a\}$

$\downarrow$

$\partial_{12} f(0,0) = -1$

$\partial_{21} f(0,0) = 1$!

$f \in D^2\{a\}$ akkor a Hesse mátrix szimmetrikus.

Taylor-Polinomok

Vegyük a $F(t) := f(a + th) - t$ $(t \in \mathbb{R})$, $f \in D^2(K(a))$

alkalmazzuk a Taylor-formulát:

$$\boxed{\begin{aligned}&\nu \in (0,1)\\ &F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!} F''(\nu)\end{aligned}}$$

$\hookrightarrow F(0) = F(a + 0 \cdot h) = f(a)$

$\hookrightarrow F'(t) = f'(a + th) \cdot h = \boxed{\partial_1 f(a + th) h_1 + \partial_2 f(a + th) h_2 = \langle f'(a+th), h \rangle}$

$\to F'(0) = \langle f'(a+th), h \rangle$

$\to F''(t) = \left(\partial_1 f(a+th) h_1 + \partial_2 f(a+th) h_2 \right)' =$

$\left[\partial_1 f'(a+th) h \right] h_1 + \left[\partial_2 f'(a+h) \right] h_2 =$

$= \boxed{\langle f''(a+th) \cdot h, h \rangle}$

hi: $f''(a+th) = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(a+th) & \partial_{12} f(a+th) \\ \partial_{21} f(a+th) & \partial_{22} f(a+th) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \to \langle$ oszlopvektor $\cdot h \rangle \to$ szám

$$F(1) = f(a+h) = f(a) + \langle f'(a) h \rangle + \frac{1}{2!} \langle f''(a) \cdot h, h \rangle + \underbrace{\frac{1}{2!} \langle \eta(h) \cdot h, h \rangle}_{\text{maradéktag alakítása}}$$

$$\langle \eta(h) \cdot h, h \rangle = \sum_{i,j=1}^{2} \eta_{ij}(h) \cdot \frac{h_i h_j}{\|h^2\|} \qquad \text{De!} \qquad \Updownarrow$$

$\frac{|h_i h_j|}{\|h^2\|} \leq 1$ és $\lim_0 \eta_{ij} = 0 \to$ ezért $\varepsilon(h) \cdot \|h\|^2$

ahol ε bármely f amire $\lim_0 \varepsilon = 0$ teljesül

Taylor-Formula with Peano

$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\lim_0 \varepsilon = 0$

$$f(a+h) = \underline{f(a) + \langle f'(a), h \rangle + \langle \tfrac{1}{2} f''(a) \cdot h, h \rangle} + \varepsilon(h) \cdot \|h^2\|$$

$$\boxed{T_{2,a} := f(a) + \langle f'(a), h \rangle + \langle \tfrac{1}{2} f''(a) h, h \rangle}$$

$$\boxed{T_{2,a} := f(a) + \langle f'(a), h \rangle + \langle \tfrac{1}{2} f''(a) h, h \rangle}$$

Pl: $f(x,y) = e^x \cos y$ $\quad a = (0,0)$ körüli

$T_{2,a}$-ját

$$T_{2,a} f(h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{ij}(a) h_i h_j$$

$(x,y) = a + h \to (h_1, h_2)$

$f(x,y) = e^x \cos y \to f(0,0) = 1$

		$f(0,0)$
$\partial_x =$	$e^x \cos y$	1
$\partial_y =$	$-e^x \sin y$	0
$\partial_{xy} =$	$-e^x \sin y$	0
$\partial_{yx} =$	$-e^x \sin y$	0
$\partial_{xx} =$	$e^x \cos y$	1
$\partial_{yy} =$	$-e^x \cos y$	-1

$\to$ Hesse mx: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot h_i \cdot h_j$

Keresett Taylor polinom

$$T_{2,a} f(h) = \underbrace{\boxed{f(0,0)}}_{1} + 1 \cdot \boxed{x} + 0 \cdot \boxed{y} + \frac{1}{2}\left(1 \boxed{x^2} + 2 \cdot 0 \boxed{xy} - \boxed{y^2}\right)$$

$$\underline{1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2}$$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Szélsőértékei

abszolút maximuma: $\forall x \in D_f : f(x) \leq f(a)$

lokális maximuma: $\forall x \in K(a) : f(x) \leq f(a)$

min / maxhely → szélsőértékhely

max / max → szélsőérték

Elsőrendű szükséges f. lok. sz.-re

- $f \in D\{a\}$ és
- f. lokális szélsőértéke van.

Ekkor $f'(a) = 0$ azaz

$$f'(a) = (\partial_1 f(a), \dots \partial_n f(a)) = (0 \dots 0)$$

$$\Updownarrow$$

Ekkor $a \in \text{int}\, D_f$ pont stacionárius.

Szükséges megoldani az

$$\left.\begin{aligned} \partial_1 f(x_1 \dots x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ \partial_n f(x_1 \dots x_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{egyenletrendszert.}$$

Másodrendű elégséges feltétel lok. sz. értékre.

$$f(a+h) = f(a) + \langle f'(a), h\rangle + \tfrac{1}{2}\langle f''(a)h, h\rangle + \varepsilon(h) \cdot \|h\|^2$$

ha $f'(a) = 0$ akkor $\langle f'(a), h\rangle = 0$ $\forall h$ esetén

Kvadratikus Alak

$A = [a_{ij}]^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix

$$Q(h) := \langle Ah, h\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot h_i \cdot h_j$$

(+) Pozitív definit, ha $\forall$ eleme > 0

(−) Negatív definit, ha $\forall$ eleme < 0

(N) Indefinit! ha poz és neg. is!

Taylor-formula átrendezve:

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} \overbrace{Q(h)}^{f''\langle (a)h, h\rangle} + \varepsilon(h) \cdot \|h\|^2$$

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} Q(h) + \varepsilon(h) \cdot \|h\|$$

$\downarrow$

poz. definit esetén: lok. min. hely!

2.R. Elégséges (Szükséges) felt.

$f'(a) = 0$

$f''(a)$ Hesse féle mátrix pozitív/negatív (szemi) definit.

$\downarrow$

Ekkor f-nek az a pontban lok min/max helye van!

Másodrendű Szükséges feltétel lok. sz. értékre

$\left.\begin{array}{l} (\nu+)\ \text{Poz szemidefinit } Q(h) \geq 0 \\ (\nu-)\ \text{Neg szemidefinit } Q(h) \leq 0 \end{array}\right\}$ $Q(h) = \langle A \cdot h, h \rangle$

$\downarrow$

Ha $f'(a)=0$ és $f''(a)$ Hesse-féle mx indefinit, akkor f-nek nincs lok. szélsőértéke!

Sylveszter - Kritérium

bal felső determinánsa

$$D_{\text{Sylv.krit}} := \det \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} & \cdots} & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ...

Tfh: $\partial_1 f(a) = 0 \quad \partial_2 f(a) = 0$

$$D(a) := \det \begin{pmatrix} \partial_{11} f(a) & \partial_{12} f(a) \\ \partial_{21} f(a) & \partial_{22} f(a) \end{pmatrix}$$

$\to$ ha $D(a) > 0$ és $\partial_{11} f(a) \gtrless 0$
akkor f-nek lok min/max-imuma van.

$\to$ ha $D(a) < 0$ akkor ez
nyeregpont, nincs szélsőérték

$\to$ ha $D(a) = 0$ akkor nem tudjuk

→ ha $D(a)=0$ akkor nem tudjuk megállapítani.

Pl.:

$$f(x,y) = x^2+xy+2y^2 \,.$$ polinom → $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}$ esetén!

$\boxed{1}$ $\partial_x = 2x+y$
$\partial_y = 4y+x$

! keressük $=0$-t

$$\left.\begin{aligned} 2x+y&=0 \\ 4y+x&=0 \end{aligned}\right\} \quad x=y=0 \to P_0(?,?)$$

$(-7y=0 \to y=0 \to x=0)$

$P(0,0)$-ban lehet szélsőérték!

$\boxed{2}$ $\partial_{xx} = 2$
$\partial_{yy} = 4$
$\left.\begin{aligned}\partial_{xy} &= 1\\ \partial_{yx} &= 1\end{aligned}\right\}$ ✓ D^2

- $D(0,0) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4\end{pmatrix} = 8-1 = 7 > 0$ ✓
- $\partial_{xx} = 2 > 0$ ✓

Így $P(0,0)$ lok. minimuma f-nek.

$$f(x,y) = x^2-y^2 \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$ $f(x,y)$ folytonos $D^2(\mathbb{R}^2)$-n

$\boxed{1}$ $\partial_x = 2x$
$\partial_y = -2y$

$$\to \left.\begin{aligned} 2x&=0 \\ -2y&=0 \end{aligned}\right\} \quad x=y=0 \to P(?,?)$$

Így $P_0(0,0)$, ez lehet az egyetlen szélsőérték.

$\boxed{2}$ $\partial_{xx} = 2$
$\partial_{yy} = -2$
$\left.\begin{aligned}\partial_{xy} &= 0\\ \partial_{yx} &= 0\end{aligned}\right\}$ D^2 ✓

$$\to D(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2\end{pmatrix} = 2\cdot -2 < 0$$

! nyeregpont, nincs szélsőérték

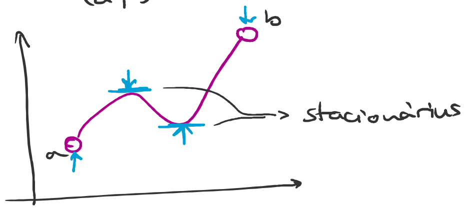
$\partial_{4}x = 0$.

Abszolút szélsőérték

$\rightarrow$ fv. folytonos egy $[a,b]$ intervallumon
- ↳ zárt
- ↳ korlátos

$\rightarrow$ differenciálható (a,b)-n

$\mapsto$ Weierstrass



$H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, zárt.

Tfh, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, léteznek parc. deriváltak $\forall h \in H$-ban.

Ekkor f legkisebb/nagyobb értékét vagy

$\rightarrow$ $a \in \operatorname{int} D_f$ belső pontban, ahol $\partial_i f(a) = 0$ $\forall i$-re, vagy

$\rightarrow$ H határain veszi fel.

Totális Derivált

deriváltmx : $f'(a) = (\partial_1 f(a), \partial_2 f(a))$

① A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy:

$f(x,y) = 2x^2 + 3xy - y^2$ t.d. a $a=(1,2)$-ben

f' !

$f'(a)$ Jacobi mx!

Def: $a = (a_1, a_2) = (1,2)$

$h = (h_1, h_2)$

$\exists A = (A_1, A_2) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ mátrix, amire:

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - A\cdot h|}{\|h\|} \overset{ekv}{=} \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left| f(a+h) - f(a) - (A_1 \cdot A_2)\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0 \quad (*)$$

$2x^2 + 3xy - y^2$ $a_1 = 1$, $a_2 = 2$

$$f(a+h) - f(a) = f(a_1 + h, a_2 + h) - \underline{f(a_1, a_2)} \overset{\leftarrow f \rightarrow}{=}$$

$$2(1+h_1)^2 + 3(1+h_1)(2+h_2) - (2+h_2)^2 - [\underset{2}{2\cdot 1^2} + \underset{6}{3\cdot 1\cdot 2} - \underset{4}{2^2}] =$$

$$= 2h_1^2 + 4h_1 + 2 + 6 + 6h_1 + 3h_2 + 3h_1h_2 - h_2^2 - 4h_2 - 4 - \cancel{4} =$$

$$10h_1 - h_2 + 2h_1^2 - h_2^2 + 3h_1h_2 \cancel{-2} = \underbrace{(10\ -1)\cdot\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2\end{pmatrix}}_{\text{jó rész}} + \overbrace{2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2}^{\text{maradék}}$$

nem szabad const-nak maradni

legyen $A = (10\ -1)$

$$\boxed{*}_t = \frac{2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \quad \text{biz be: } t \to 0$$

biztos negatív

$$\frac{2h_1^2 + |3h_1h_2 - h_2^2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \qquad \frac{2(h_1^2 + h_2^2) + 3|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le$$

tudjuk

$$\left(|h_1h_2| \le \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2)\right.$$

$$\leq \frac{\overset{3+4}{=} \overset{\leq 4}{\frac{7}{2}}\left(h_1^2+h_2^2\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \overset{h\sqrt{a}\sqrt{a}/\sqrt{a}}{\frac{h\,a}{\sqrt{a}}} \leq 4\sqrt{h_1^2+h_2^2} \to 0 \quad \left(\text{ha } \begin{matrix} h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0 \end{matrix}\right)$$

rendőrelv miatt: $\lim\limits_{h \to (0,0)} t = 0$

Ellenőrzés

$$\boxed{2x^2+3xy-y^2}$$

		$(1,2)$
$f'_x =$	$4x+3y$	$\to 10$
$f'_y =$	$3x-2y$	$\to -1$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$f'_{xx} = 4$

$f'_{yy} = -2$

$f'_{xy} = 3$

$f'_{yx} = 3$

Jacobi mx: $(10 \ -1)$

ez egyezik a korábbival.

---

2. biz be: $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$

folyt a $(0,0)$-ban, $\exists$ parc. d., de nem differenciálható.

1. Folytonosság

$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$: $\forall (x,y) \in D_f$-hez,

$\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$ pontban: $|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$

vagyis

$$\left|\sqrt{|xy|} - 0\right| \leq \sqrt{|xy|} \to \left(\overset{\text{tudjuk}}{|h_1h_2| \leq \frac{1}{2}(h_1^2+h_2^2)}\right) \leq \sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \stackrel{!}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|(x,y)\| < \varepsilon \to \boxed{\|(x,y)\| < \sqrt{2}\,\varepsilon}$$

$\boxed{\delta := \sqrt{2}\,\varepsilon}$, teljesül $\boxed{*}$, vagyis $f \in C\{(0,0)\}$.

$\to 2$

$$\left.\begin{array}{l}\exists\, \partial_1 f(0,0) \\ \exists\, \partial_2 f(0,0)\end{array}\right\}$$ igazolása

$\partial_1 f(x,y) \Rightarrow \quad y=0 \to 0 \qquad \left(\sqrt{|xy|} \quad y=0 \to 0 \right.$

$\quad$ –"–

$f \notin D\{(0,0)\}$ -ban !

$$f'(0,0) = (f_1'(0,0), f_2'(0,0)) = (0 \;\; 0)$$

$$n: (x_n, y_n) := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right). \quad \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$$

totális derivált :

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\overset{0+h}{f(a+h)} - \hat{f(a)} - \left(\partial_1 \hat{f}(0,0)\;\; \partial_2 \overset{\times}{f}(0,0)\right)\cdot \overset{\times}{\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2\end{pmatrix}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$a=0$
$f'_x = 0$
$f'_y = 0$

$$= \frac{f(n)}{n} = \lim \frac{\sqrt{h_1^2 \cdot h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{\frac{2}{h^2}}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ellentmondás! $\quad f$ nem differenciálható

(3.) $\quad f(x,y) \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

f a $(0,0)$ -ban

1 — folytonos
2 — $\forall$ irány mentén deriválható
3 — totálisan nem deriválható!

1) $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists \delta > 0$, hogy $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x,y) - (0,0)\| < \delta$ esetén
$$|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon.$$

$$\left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| = \frac{|x| \cdot y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{|x| \cdot (x^2+y^2)}{x^2+y^2} =$$

$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| < \varepsilon$$

$$\downarrow$$

$\delta = \varepsilon$ jó választás

— $\forall$ irány mentén deriválható!

$v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ $\quad \|v\| = 1$ ✓ $\quad \alpha \in [0, 2\pi)$

$$\varphi(t) := f(0 + tv) = f(tv) = f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) =$$

$$= \frac{t\cos\alpha \cdot t\sin^2\alpha}{\underbrace{(t\cos\alpha)^2 + (t\sin\alpha)^2}_{1.\ (\text{de miért?})}} = \frac{\cancel{t}\cos\alpha \cdot (\cancel{t}\sin\alpha)^2}{\cancel{t^2}} = (\cos\alpha)(\sin\alpha)^2 \cdot t$$

$$(t\cos\alpha)^2 + (t\sin\alpha)^2 =$$
$$t^2 \cdot \cos^2\alpha + t \cdot \sin^2\alpha =$$
$$t^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) =$$
$$t^2$$

$\downarrow$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv deriválható

Ezért deriválható a $t = 0$-ban

$$\varphi'(0) = (\cos\alpha)(\sin\alpha)^2 \cdot [t=0]$$

$$\partial_v f(0,0) = (\cos\alpha)(\sin\alpha)^2$$

— Totálisan nem deriválható

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \begin{matrix} \leftarrow f \\ \leftarrow g \end{matrix} \qquad \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$f'_x = \frac{y^2(x^2+y^2) - 2x \cdot xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial_y' = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2y \cdot xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial'(0,0) = (\partial_1(0,0), \partial_2(0,0)) = (0, 0)$$

totális derivált

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left| f(h_1,h_2) - \overbrace{f(0,0)}^{0} - \overbrace{(\partial_1(0,0), \partial_2(0,0))\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}^{0} \right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim \frac{\left(\frac{h_1 h_2^2}{h_1^2+h_2^2 \to 1}\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2} \to \frac{1}{2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to 0} \frac{h_1 h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} \overset{?}{=} 0$$

keressünk f-et ami 'nem jó'

$$n: (x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{\to 0} \frac{\frac{1}{h^3}}{\left(\frac{2}{h^2}\right)^{3/2}} \to \text{nem } 0\text{-hoz tart}$$

tehát f nem differenciálható (0,0)-ban :)

Felület Érintősíkja

Emlékeztető. Az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ pontban *van érintősíkja*, ha $f \in D\{(x_0,y_0)\}$. ***Az érintősík egyenlete***:

$$z - f(x_0,y_0) = \partial_1 f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + \partial_2 f(x_0,y_0) \cdot (y - y_0),$$

amelynek egyik **normálvektora**: $\vec{n}(\partial_1 f(x_0,y_0), \partial_2 f(x_0,y_0), -1)$.

$$f(x,y) = \sqrt{x^2-2y^2} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 > y^2)$$

a) elsőrendű parc!

$$\partial_x' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} \qquad \frac{3}{1} \qquad \sqrt{a}' = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$\partial_y' = -\frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}} \cdot 4y = -\frac{2y}{\sqrt{x^2-y^2}} \qquad \frac{2 \cdot 2 = 4}{1} \qquad \underline{-4}$$

b) $P_0(3,2)$

$$z - \underbrace{f(3,2)} = f_1'(3,2)(x-3) + f_2'(3,2)(y-2).$$

$$\sqrt{x^2-2y^2} - 1 = 3(x-3) + 4(y-2) =$$

$$= x^2-2y^2-1 = 3x - 9 + 4y + 8 =$$

$$\underbrace{\boxed{x^2-2y^2}}_{z} - 1 = 3x + 4y - 1 \Rightarrow \underline{3x - 4y - z = 0}$$

-érintő: $\vec{n} : (f_x'(3,2),\ f_y'(3,2),\ -1)$

$$\vec{n} = (3,-4,-1)$$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú fvk. lok. szélsőértékei

$\to$ $\partial_1 f(a) = 0 \qquad \partial_2 f(a) = 0$

$\to$ $D(a) := \det\begin{pmatrix} \partial_{11} f(a) & \partial_{12} f(a) \\ \partial_{21} f(a) & \partial_{22} f(a) \end{pmatrix}$

$\to$ $\partial_{11} > 0 \to$ minimum

$\partial_{11} < 0 \to$ maximum

⑤. Szélsőértékhelyek

$$f(x,y) := x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2$$

Az $f \in D^2(\mathbb{R}^2)$-n, mert kétváltozós polinom

$\to$ 1. rend. szf.

$$\left.\begin{aligned} \partial_x &= 3x^2 - 6x + 2y = 0 \\ \partial_y &= 2x + 2y = 0 \end{aligned}\right\} \quad x = -y \to$$

$$3y^2 + 6x + 2y = 0$$

$$3y^2 + 8y = 0$$

$$y(3y+8) = 0$$

$y_1 = 0$, $y_2 = -\frac{8}{3}$

$x_1 = 0$, $x_2 = +\frac{8}{3}$

stacionárius pontok $P_0(0,0)$ $P_1(+8/3,\ -8/3)$

$\to$ 2. rend. szf.

Hesse féle mátrix:

$\partial_{xy} = 2$

$\partial_{yx} = 2$

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} 6x-6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$D_1 = 6x - 6$

$D_2 = \underline{2(6x-6) - 4}$

$\partial_{xx} = 6x - 6$

$\partial_{yy} = 2$

$P_0: D_1 < 0, \; D_2 = -12 - 4 = -16$ ↯ indefinit

$P_1: D_1 > 0, \; D_2 = \underset{20}{2}(\underbrace{16-6}_{10}) - 4 = 16$ poz.definit

P_1 · lok min hely

---

⑥ Nézzük lok szélsőértékeit.

$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

Az $f \in D^2(\mathbb{R}^2)$-n, mert kétváltozós polinom

→ 1. szükséges feltétel:

$$\left.\begin{aligned} \partial_x &= 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ \partial_y &= 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{aligned}\right\} \quad x = y \to \quad \begin{aligned} 4x^3 - 4x &= 0 \\ 4x(x^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$x_0 = 0 \to y_0 = 0$

$x_1 = 1 \to y_1 = 1$

$x_2 = -1 \to y_2 = -1$

$P_0(0,0)$, $P_1(1,1)$, $P_2(-1,-1)$ stacionárius pontok

→ 2. elégséges

Hesse féle mátrix

$\partial_{xx} = 12x^2 - 2$

$\partial_{yy} = 12y^2 - 2$

$\partial_{xy} = -2$

$\partial_{yx} = -2$

$$\rightarrow \quad D_2 = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$$

$D_1 = 12x^2 - 2$

$P(0,0) \to D_1 < 0 \to D_2 = 0$!

$P(1,1) \to \underset{(10)}{D_1} > 0 \to 100 - 4 = 96 > 0$ ✓ → $P(1,1)$ lok min hely

$P(-1,-1) \to \underset{(10)}{D_1} > 0 \to 100 - \; = 96 > 0$ ✓ → $P(1,1)$ lok min hely

nem alkalmazható!

ötlet: nézzünk hogy 2 egyenest

$f(0,0) = 0 \to$ azonos előjel kell.

$f(x,y) = x^4 + y^4 \underbrace{- x^2 - 2xy - y^2}$

$x^4 + y^4 - (x+y)^2$

$f(x,x) - f(x,-x) = 2x^4 \to$ pozitív v. nulla

x, y ...

→ $f(x,y) = f(x,-x) = 2x^4$ → pozitív v. nulla

→ $f(x,y) = f(x,0) = x^4 - x^2 = x^2(x^2-1)$ → ez − ha $|x|<1$

találtunk kettő egyenest aminek nem azonos az előjele $(0,0)$ körül ⇒ nincs f-nek $(0,0)$-ban lok. sz. értéke.

---

(7) Határozzuk meg $f(x,y) = x^3y^5$ lok. sz.értékeit

→
$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= x^3y^5 \\ \partial_x &= 3x^2y^5 = 0 \\ \partial_y &= 5x^3y^4 = 0 \end{aligned}\right\}$$
$x=0$ és $y \in \mathbb{R}$, vagy $y=0$ és $x \in \mathbb{R}$

$P_1(0,y)$ $\quad P_2(x,0)$ → stacionárius pontok

→ Hesse-féle mátrix

$$\partial_{xx} = 6xy^5$$
$$\partial_{yy} = 20x^3y^3 \qquad D_2 = \det\begin{pmatrix} 6xy^5 & 15x^2y^4 \\ 15x^2y^4 & 20x^3y^3 \end{pmatrix}$$
$$\partial_{xy} = 15x^2y^4$$
$$\partial_{yx} = 15x^2y^4 \qquad D_1 = 6xy^5$$

$$\left.\begin{aligned} P_1(0,y) &= D_1 = 0\,! \\ P_2(x,0) &= D_1 = 0\,! \end{aligned}\right\}$$ nincs lokális szélsőérték

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú fvk felt. szélsőértékei

$U \in \mathbb{R}^2$ $\quad f, g : U \to \mathbb{R}$ és

$a \in H_g := \{ z \in U \mid g(z) = 0 \} \neq 0$

f-nek $g=0$ mellett a pontban

→ felt absz max, ha
$\forall x \in H_g : f(x) \le f(a)$

→ felt lok max, ha
$\exists k(a) \subseteq U, \ \forall x \in k(a) \cap H_g : f(x) \le f(a)$

Lagrange

Tfh

1) $U \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz $f, g : U \to \mathbb{R}$ $\exists$ parciális deriváltak, és ezek folytonosak

2) $(x_0, y_0) \overset{\in U}{}$ pontban a f-nek $g=0$-feltétellel vonatkozó felt lok szélsőértéke van.

c) $g'(x_0, y_0) = (\partial_1 g(x_0 y_0), \partial(x_0, y_0)) \overset{de!}{\neq} (0,0)$

⇓

ekkor $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, hogy

$$\mathcal{L}(x,y) := f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

$$\boxed{\mathcal{L}'(x_0, y_0) := (\partial_x \mathcal{L}(x_0, y_0), \partial_y \mathcal{L}(x_0, y_0)) = (0,0)}$$

Larange Alkalmazása

1) képezzük $\underline{\mathcal{L}(x,y)} := f(x,y) + \lambda g(x,y)$

2) megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\quad \partial_x \underline{\mathcal{L}(x,y)} = \partial_x f(x,y) + \lambda \partial_x g(x,y) = 0 \\ &\bullet\quad \partial_y \underline{\mathcal{L}(x,y)} = \partial_y f(x,y) + \lambda \partial_y g(x,y) = 0 \\ &\bullet\quad g(x,y) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \frac{x,y,\lambda}{\text{kiszámoljuk}}$$

↳ így kapunk $P_1 \cdots P_n\ (x_0, x_y)$-t

3) $\mathcal{L}'(x_0,y_0)=0$ csak szükséges, nem elégséges feltétel!

↓

Felt. Lok. Sz.értékre vonatkozó 2rendű elégséges felt!

1✓ 2✓ 3✓

az $(x_0,y_0) \in U$-ban $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ teljesül a szükséges flt.

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda_0 g(x,y)$$

$$D(x_0, y_0, \lambda_0) = \det \left(\begin{array}{c|cc} 0 & \partial_1 g(x_0,y_0) & \partial_2 g(x_0,y_0) \\ \hline \partial_1 g(x_0,y_0) & \partial_{11} \mathcal{L}(x_0,y_0) & \partial_{12} \mathcal{L}(x_0,y_0) \\ \partial_2 g(x_0,y_0) & \partial_{21} \mathcal{L}(x_0,y_0) & \partial_{22} \mathcal{L}(x_0,y_0) \end{array}\right)$$

ha $D > 0 \Rightarrow x_0, y_0$ felt lok <u>max</u>hely

ha $D < 0 \Rightarrow x_0, y_0$ felt lok <u>min</u> hely

Példa:

$$f(x,y) := xy \qquad g(x,y) := \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \qquad g = 0$$

→ $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$-ben.

→ g'? $\Rightarrow (\partial_1 g(x,y), \partial_2 g(x,y)) = \left(\frac{x}{4}, y\right) = (0,0)$ lít:

$\to$ g' ? $\Rightarrow$ $(\partial_1 g(x,y), \partial_2 g(x,y)) = \left(\frac{x}{4}, y\right) = (0,0)$ élő:

$\hookrightarrow$ H_g ? $\Rightarrow$ $H_g := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$ - beli pontban.

Deriv hisszen ha $g'\left(\frac{x}{2}, y\right) = (0,0) \iff x = 0$ és $y = 0$ de

Rendes $g(0,0) = -1 \neq 0$ ✓

$\to$ Lagrange függvénye:

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

$$\mathcal{L}(x,y) = xy + \lambda\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right)$$

$\to$ egyenletrendszer

1> $\partial_1 \mathcal{L}(x,y) = y + \lambda \frac{x}{4} = 0$

2> $\partial_2 \mathcal{L}(x,y) = x + \lambda y = 0$

3> $g(x,y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$

2> $\boxed{x = -\lambda y}$

2→1> $y - \frac{\lambda^2 y}{4} = 0 \to 0 = y\underbrace{\left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right)}_{0} \Rightarrow \lambda^2 = 4 \to \lambda = \pm 2$

tudjuk, hogy $y \neq 0$

$\lambda = 2$

2> $x = -2y$

2→3> $\frac{4y^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \to y^2 = 1 \to y = 1 \quad x = -2$

$(-2y)^2$

$\hookrightarrow y = -1 \quad x = 2$

$P_1(-2, 1)$ $P_2(2, -1)$

$\lambda = -2$

$\underline{\lambda = -2}$

$x = 2y$

$2 \to 3 \rangle \longrightarrow y^2 = 1$ $\quad \to y = 1 \quad x = 2$

$\quad \to y = -1 \quad y = -2$

$P_3(2,1) \qquad P_4(-2,-1)$

$\sim$

→ elégséges feltétel:

$$\partial_1 g(x,y) = \frac{x}{4} \qquad \partial_2 g(x,y) = y$$

$$\partial_{11} = \frac{\lambda}{4} \qquad \partial_{22} = \lambda \qquad \partial_{12} = 1 \qquad \partial_{21} = 1$$

$$D(x,y,\lambda) = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{x}{4} & y \\ \frac{x}{4} & \frac{\lambda}{4} & 1 \\ y & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \boxed{x = -\lambda y} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{-\lambda y}{4} & y \\ \frac{-\lambda y}{4} & \frac{\lambda}{4} & 1 \\ y & 1 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$\lambda = 2$
- $P(2,-1)$: $D(2,-1,2) < 0$ — felt lok min hely
- $P(-2,1)$: < 0 — felt lok minhely

$\lambda = -2$
- $P(2,1)$: > 0 — f. l. maxhely
- $P(-2,-1)$: > 0 — f. l. maxhely

6. TöbbvFvkd III. GY

07 December 2021 00:09

Feltételes szélsőérték