# Bevezetés

08 September 2020 10:35

**Ezt a jegyzetet Eredetileg Tatai Áron (G07ZOE) (aron.tatai@gmail.com)**
**Készítette az ELTE IK BSc 2020/I.- es féléves matalapok tárgyhoz.**

**Az első 10 óra (5 hét, első ZH tananyaga) Nincs benne**

Számonkérés
- Középiskolai anyag ismétlés
- Komplex számok ; lineáris algebra
- Mátrixok
- Kép, analízis, valós fvények

- 3 db ZH -> semmilyen segédeszköz
- 10röpZH
- kisZH: ismétlő kérdésekből lesz

- Röpzh: 50%+ -> max 20 extra pont
- ZH: 3 × 50 pont -> 17 fölött sikeres

# 12: Mátrixok

20 October 2020 14:42

1) $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$ $[\,—\,] \times [\,|\,] =$

2) $I := \begin{cases} 0 & \text{ha } i \neq j \\ 1 & \text{ha } i = j \end{cases} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) $AI = I$ $IA = I$

$n \times n$ méretű $m \times m$ méretű

2) $\lambda \to$ számmal szorozható tetszőlegesen

3) $AB \neq BA$

4) Transzponálás / Adjungálás $\to$ (komplex számokra)

$A^T \in \mathbb{K}^{m \times n}$ $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$

$(A+B)^T = A^T + B^T$ $(A^T)^T = A$

$(AB)^T = B^T A^T$

5) Q: $A \times \{?\} = I \to$ értelmezzük-e az osztást?

$\frac{A}{I} = \{?\} \not\Rightarrow$ Invertálás

$A, C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ Def: $AC \equiv CA \equiv I$

"C a inverze"

$C \to A^{-1}$

| Reguláris / Invertálható | Szinguláris / nem Invertálható |
|---|---|
| $\exists A^{-1}$ | $\nexists A^{-1}$ |

$$\underbrace{A \cdot A^{-1}}= I$$

↳ így tudjuk megnézni, két mátrix egymás inverze-e.

12.2.1

$$AC = \begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & 5 & -3\\ -3 & 2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14 & -8 & -1\\ -17 & 10 & 1\\ -19 & 11 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = I$$

$-16+50-33$

$A^{-1} = C$

HF 12.2.1b

# 13 Determinánsok

20 October 2020 15:09

$A = [a_{11}]$ $\det(A) = a_{11}$

$A_{ij}$ ! $(A)_{ij}$

$A[i][j]$

Példa:

$A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = \text{Det} \Rightarrow -1$

$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$

$A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ [3] & [4] \end{bmatrix}$ $1 [4] - 2 [3] = -2$

| Det = 0 | Det ≠ 0 |
|---|---|
| nincs invert | van B invert |

Gy! 13.2.1 B = $\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

Determináns 'sora' 'oszlopa' szerint tetszőlegesen lehet számolni

$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & & \end{bmatrix}$

$$\text{Det}(A) = \text{Det}(A^T)$$

13.1

4) Ha két sorát felcseréljük akkor $\det(A) = -1 \cdot \det(A')$

5) Ha két sor ugyanaz, akkor $\det(A) = 0$

$A \in K^{n \times n}$

7) $\det(cA) = c^n A$ $(c = 2)$

6) Ha mátrix sor/oszlopát szorozzuk c-vel, akkor $\det(A) = c \cdot \det(A)$

8) Ha mátrix sor/oszlopai közül kettő egymás szorzata, akkor $\det(A) = 0$

$=$ 1) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

$=$

$\det(A+B) = ?$ Det C ahol C

$A^{n \times m} = \begin{bmatrix} \sim\sim \\ \text{———} \\ \sim\sim \end{bmatrix}$

$B^{n \times m} = \begin{bmatrix} \sim\sim \\ \text{———} \\ \sim\sim \end{bmatrix}$

csak egy sor / oszlopban különbözik

$C = \begin{bmatrix} \sim\sim \\ \alpha_j + \beta_j \,|\, \alpha_j + \beta_j \\ \sim\sim \end{bmatrix}$ a különböző sorban össze kell adni.

$=$

$A \begin{bmatrix} \sim\sim \\ \alpha_1 \; \cdots \; \alpha_n \\ \beta_1 \; \cdots \; \beta_n \\ \sim\sim \end{bmatrix} \to A' \begin{bmatrix} \sim\sim \\ \alpha_1 + c\beta_1 \,|\, \alpha_2 + c\beta_2 \,|\, \alpha_n + c\beta_n \\ \alpha_1 \; \cdots \; \beta_n \\ \sim\sim \end{bmatrix}$

$\det(A) \equiv \det(A')$

Tétel: Jobb-inverz létezése

$$\boxed{1 = \det(I)} = \underbrace{\det(AC)}_{\text{? egységmátrix}} = \det(A)\det(B)$$

? egységmátrix akkor ha $\det(A) \neq 0$

$\to$ A nem invertálható / singuláris

Tfh $\exists C \;\; \det(AC) = \det(I)$

x: Szorzat determinánsa

$\det(A) \times \det(C) = 1 \;\; \Rightarrow \;\; \det(A), \det(C) \neq 0$

főátló

$$\begin{bmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & - & 0 \end{bmatrix}$$

Diagonál Mátrix

$\det(D) =$ főátlóbeli elemek szorzata

TFH ha $\det(A) \neq 0$

$$C := \underbrace{\frac{1}{\det(A)}}_{c} \cdot \bar{A} \qquad c \cdot \bar{A}$$

$\tilde{A}_{ij} = a'_{ji}$

$A \to$ előjelezett aldetermináns mátrix $\boxed{a'_{ij}}$ $\to$ transzponált $= (\tilde{A})_{ij}$

$\to \boxed{a'_{ji}} = (\tilde{A})_{ij}$

4. Döntsük el, hogy $C$ inverze-e $A$-nak.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$AC = 1$

$\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 18 & 50 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

nem inverze

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 14 & -8 & -1 \\ -17 & 10 & 1 \\ -19 & 11 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 14 & -8 & -1 \\ -17 & 10 & 1 \\ -19 & 11 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$-51 + 38 + 14$

$-22 + 30 - 8$

$57 - 85 + 22$

$-33 + 50 - 16$

$76 - 34 - 42$

$-44 + 20 + 24$

Det

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \underbrace{a \cdot 1 \cdot \det([d])}_{ad} + \underbrace{b \cdot -1 \cdot \det([c])}_{bc} = \underline{\underline{ad - bc}}$$

Det

$$\det(A) = \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot (40 - 24) - (16 - 6) - 4 \cdot (8 - 5)$$

$$3 \cdot 16$$

$$48 - (10) - (12)$$

$$\underline{\underline{26}}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & & -1 & & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{matrix}$$

$$1 + 3$$

$$4$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{matrix}$$

$$-2 \qquad -4$$

Ism: 13 Determinánsok gyakorlás

08 November 2020 13:56

invert $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = ?$ $\begin{bmatrix} 16 & -10 & 3 \\ -24 & 28 & -11 \\ 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 16 & -24 & 26 \\ -10 & 28 & -26 \\ 3 & -11 & 13 \end{bmatrix}$ ✓

det: $3 \cdot (5 \cdot 8 - 4 \cdot 6)$

$48 \quad - 10 \quad - 4 \cdot 3 = \underline{26}$

13.2.2.2.b

invert $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 12 & +6 & -16 \\ +4 & 2 & +16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$

$\downarrow$

det

$3 \cdot 12 - 2 \cdot -6 \cdot -1 \cdot -16$

$36 + 12 \overbrace{+ 16}^{}_{28}$

$64$ ✓

$\frac{1}{64} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{32} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & -5 \\ -8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$

| Determináns tulajdonságai: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ | det értéke |
| --- | --- |
| → sor/oszlop csak 0 | 0 |
| → s/o felcserélése | $-1 \cdot \det$ |
| → 2 s/o azonos | 0 |
| → s/o szorzása n-el | $n \cdot \det$ |
| → ha mátrixot szorozzuk n-el | $c^n \cdot \det$ |
| → 2 s/o arányos | 0 $\rightsquigarrow (\times 2)\, 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$ |
| → $\det(A) + \det(B) =$ | $\det(A+B)$ |
| → mátrix s/o-hoz hozzáadjuk s/o n-szeresét | det $\rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ $\quad 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -2$ |
| → $\det A \cdot \det B$ | $\det(A \cdot B) \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 = -6 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}$ |

# 14 Vektorok → (Lineáris / Vektor) tér

21 October 2020 11:24

$\underline{a}$ $\underline{b}$ → $\underline{a}+\underline{b}$ vektor

✓ kommutatív $\underline{a}+\underline{b} = \underline{b}+\underline{a}$

✓ asszociatív $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c} = \underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$

✓ nullvektor identitás $(\underline{a}+\underline{0}) = \underline{a}$

✓ ellentettjével összege nulla $\underline{a}+(-\underline{a}') = 0$

nem feltétlen $(x\,-1)$ $\exists\,\underline{a}$.

$V_1 \,\oplus\, V_2$ } elvárt műveletek

$\lambda \,\otimes\, V$

↑ számmal szorzás

k Geometria → MÁTRIXOK ← Vektorok

polinomok → MÁTRIXOK

Egységes keretrendszer

Altér jellemzése

$S_5 = x - y,\ 3x + 2x + y \in \mathbb{R}^3$

$\overset{\longleftarrow x}{} \ \overset{y \longrightarrow}{}$ szétválasztása

$$\begin{pmatrix} x-y \\ 3x \\ 2x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

---

## Lineáris kombináció

k-elemű vektorrendszer

$\lambda_1 - \lambda_n$ -el vett skalárral kombinálva

$\sum_{n=1}^{k} \lambda_n x_n \rightarrow$ "V lineáris kombináció"

Ha $\lambda_1 .. \lambda_n$ mind 0, akkor triviális.

Ha $\exists\ \lambda_n \neq 0$ akkor nem triviális

① altérnek zártnak kell lennie
→ skalárral való szorzásra
→ önmagával összeadható

$W \in V$ $\quad W^*$ a vektorrendszer összes lehetséges lin. komb.-ja
↳ $W$ altér
↳ $V$ által generált / kifeszített altér
$\mathrm{Span}(x_1 .. x_n) = W^*$

## Def.

$\exists k \in \mathbb{N}^+\ \exists x_1 \dots x_k \in V$ : ← "Van véges generátorrendszer, ha"
$\mathrm{Span}(x_1 \cdots x_n) = W$

→ akkor $\mathrm{span}(x_1 \cdots x_n)$ az $W$, ami az altér egy generátorrendszere.
↓
akkor a $V$ vektortér véges dimenziójú

## Kanonikus egységvektor

n-edik eleme 1 → pl $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_n\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad (e_1 \cdots e_n)$$

↑
Generátorrendszere $\mathbb{K}^n$-nek

Sikerült - van - véges generátorrendszere ← terünk

→ $V$ altér elemeit generátorrendszerhez hozzáadhatjuk → eredmény nem annyira!

→ ha nem hagyhatunk el több elemet, akkor minimális generátorrendszer

Véges

$u = (1,2,-1)$ $v = (6,4,2)$ $x = (9,2,7)$ $y = (4,-1,8)$

(a): $-2u + 3v$

$(-2,-4,2) + (18,12,6) = (16,8,8)$ ✓

(b) $\mathrm{Span}(u,v)$

$W = \{ (\lambda + 6\mu,\ 2\lambda + 4\mu,\ 2\mu - \lambda) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^3$ ✓

$x \in W$ $(9,2,7)$ $\lambda\ \mu$?

komponensenként egyenlőnek kell lennie

$$\begin{aligned} \lambda + 6\mu &= 9 \quad (1) \\ 2\lambda + 4\mu &= 2 \quad (2) \\ -\lambda + 2\mu &= 7 \quad (3) \end{aligned}$$

$(1+3)$ $8\mu = 16$, $\mu = 2$

$((2) - 2(1))$ $4\mu - 12\mu = 2 - 18$, $-8\mu = -16$

egyenletrendszer lin.komb.-ja

$-\lambda + 4 = 7$

$-\lambda = 3$

$\lambda = -3$

$-6+8$

$$\begin{aligned} \lambda + 6\mu &= 4 \\ 2\lambda + 4\mu &= -1 \\ -\lambda + 2\mu &= 8 \end{aligned}$$

$(1+3)$ $8\mu = 12$, $\mu = \frac{2}{3}$

$-8\mu = -1 - 8$

$-8\mu = -9$

$8\mu = 9$

$\mu = \frac{9}{8}$

↯

3b $(x, y, z) \mid 2x - 3y + z = 0 \rightarrow z = -2x + 3y$ !

$\{(x, y, -2x+3y) \mid x, y, t = 0\}$

$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ +3 \end{pmatrix} = (1, 0, -2), (0, 1, 3)$ lin. kombinációi

3c) $(x-y+5z, 3x-z, 2x+y-7z, -x) \in \mathbb{R}^4$

$x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad y\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$

---

3d $(x, y, z) \mid x + 3y = 0 \qquad x = -3y$

$(-3y, y, z)$

$y\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

---

$W_1 \quad \{x, y, z \mid [2 \; -3 \; 5]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0)\}$

$2x - 3y + 5z = 0 \rightarrow x$ kifejezése

$x = \dfrac{3y - 5z}{2} \quad \ldots$

$W_2 \quad x, y, z \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{matrix} \rightarrow z = 2x$

$W_2$ $\quad x, y, z \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$ $\quad \begin{matrix} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad z = 2x$

$- \times 3$

$(1, \frac{7}{2}, 2)$

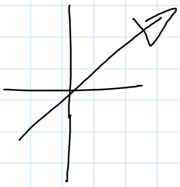
$7x - 2y = 0$

$\cancel{3x \quad 7y}$

$7x = 2y$

$y = \frac{7}{2} x$

(5)



$2x - y \;,\; y + z \;,\; z - 3x$

$\underbrace{4y + 6z - y} \;,\; y + z \;,\; z - 6y - 9z$

$x - 2y - 3z = 0$

$\boxed{x = 2y + 3z}$

$y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad z \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} 3y + 6z &= 0 \\ y + z &= 1 \\ -6y - 8z &= 4 \end{aligned}$$

$y = -2$ $\qquad -8z + 12z = 4$

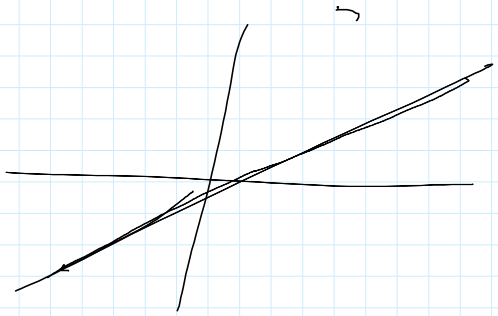
$y = -2$

$-6 + 6 = 0$

$-8z + 12z = 4$

$4z = 4$

$z = 1$



$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$-1$

$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix}$

$-1$

$1 -$

$-1$

$\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & \end{matrix}$

$1 + -2 \quad -1$

Lineárisan független HA nincs olyan nem triviális lin.komb, aminek az értéke $\bar{v}_0 = 0$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix} \quad \lambda_2 \begin{pmatrix}4\\3\\9\\4\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}5\\8\\9\\-5\end{pmatrix} = ? = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \quad (1)\\
2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 &= 0 \quad (2)\\
2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 9\lambda_3 &= 0 \quad (3)\\
-1\lambda_1 + 4\lambda_2 - 5\lambda_3 &= 0 \quad (4)
\end{aligned}\right\}$$

$\lambda_1$ dim $\quad 0\lambda_1 - 5\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \qquad 2 - 2\cdot(1)$

$\lambda_2$ dim $\quad -4\lambda_1 - 0\lambda_1 - 15\lambda_3 = 0 \qquad 3 - 3\cdot(1)$

$\lambda_3$ dim $\quad 0 = 0 \qquad 1 + 4$

## Egyértelmű előállítás tétele

Ha lineárisan független $\Longleftrightarrow$ $\vec{x}$ egyértelműen (csak egyféleképp) állítható elő

Ha lineárisan független $\Longleftrightarrow$ $x$ végtelen sokféleképpen állítható elő

## Összefüggő rendszer szűkítése

"elhagyható vektor úgy"
- → hogy a kifeszített alter nem változik
- → lehet hogy az új vektortér is összefüggő
  - ↳ addig hagyjuk el amíg független nem lesz

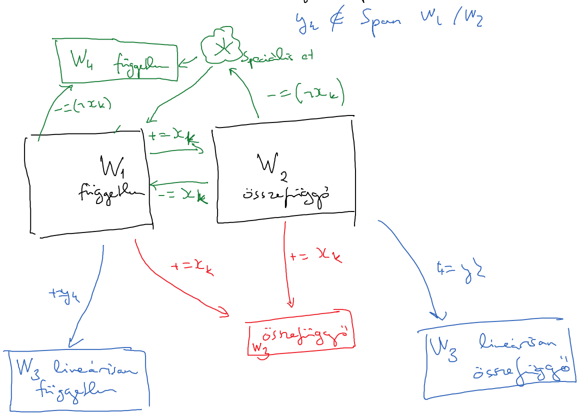
$W_1 = \mathrm{Span}(x_1 .. x_n)$ $\dim W_1 = \dim W_2$

$W_2$ $\mathrm{Span}(x_1 .. x_n, x_k)$

$x_k \in \mathrm{Span}\, W_1 / W_2$

$x_j \in \mathrm{Span}\, W_1 / W_2$

$y_k \notin \mathrm{Span}\, W_1 / W_2$



BÁZIS

## 17. Bázis, Dimenzió

15 November 2020 11:59

Bázis ← generátorrendszer
Bázis ← lin. független

"adott vektortér bázisa"

↓

Saját elemei közül nem hagyhatunk el

Pl: síkvektor → két nem egyenesen fekvő vektor
független

tér → 3, nem egy síkban fekvő

Bármely véges dimenziós ($\setminus \{0\}$) vektortérben van bázis

def $:= \dim(\{0\}) = 0$

|lin független| < |generátorrendszer|

|∀ generátorrendszer| dimenziója azonos! → kicserélési tétel

Elemszám V bármely két bázis hossza azonos

Kicserélési tétel

| | |
|---|---|
| $x_1 \dots x_k \in V$ lin. független rendszer | $y_1 \dots y_m \in V$ generátorrendszer |

$\forall i \in \{1 \dots k\} \ \exists_j \in \{1 \dots m\}$ st.

$(x_1, \dots x_{i-1}, y_j, x_{i+1} \dots x_k)$ független

⇓

következmények

→ generátorrendszer ⟺ lin. függ

→ $|\#\underbrace{\text{lin. független rendszer}}_{V}| \leq \dim(V)$

17.2. 1.

$x_1 ( 3 \quad 0 \quad -2 \quad 4 )$

$x_2 ( 2 \quad 1 \quad -1 \quad 3 )$

$3a + 2b - c - d = 0$ ①

$$\begin{array}{l} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \end{array}\begin{array}{cccc} a & b & \boxed{c} & d \\ 3 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

$3a + 2b - c - d = 0$ (1)

$b + 4c + d = 0$ (2)

$-2a - b + 2c + d = 0$ (3)

$4a + 3b + 0 - d = 0$ (4)

(4) − (1) (5) $a + b + c = 0$

(2) + (3) (6) $-2a + 6c + 2d = 0$

$a = -b - c$

2·(3) + 4 $+ b + 4c + d = 0$

(4) + (2) $4a + 4b + 4c = 0$

$a + b + c = 0$

$$\text{rang}(x_1 \dots x_n) = \dim \text{Span}(x_1 \dots x_n)$$

$$\to \quad 0 \leq \underbrace{\text{rang}(x_1 \dots x_k)}_{W} \leq k$$

$0$: W minden vektora nullvektor

$k$: w független

Lin. egyenletrendszer

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

← hagyományosan 0

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{átrendezve}} x \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & \\ \vdots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = Ax = b$$

$$x := [x_1 \dots x_n]$$

## Mátrix Rangja

Def.

$$\boxed{\dim O(A) \stackrel{!}{=} \dim S(A)}$$

Sorvektor $S(A)$

Oszlopvektor $O(A)$

?

$$\text{rang} \doteq \dim O(A)$$

$$\to \quad \text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$$

$$\to \quad 0 \leq \text{rang}(A) = \underline{\min\{m, n\}}$$

$\to$ $\text{rang}(A)^{m \times n} = m$ iff sorvektorok lin. függetlenek

$\text{rang}(A)^{m \times n} = n$ iff oszlopvektorok —||—

$$\to \quad b \in O(A)$$

$\to$ $\mathcal{M} =$
megoldáshalmaz

$|M| = 0 \leftarrow$ inkonzisztens

$|M| = \neg 0 \leftarrow$ konzisztens

---

**18.16. Tétel.** *Jelölje $\mathcal{M}_h$ a homogén rendszer megoldáshalmazát, azaz*

$$\underbrace{\mathcal{M}_h}_{\text{Altér}} := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n .$$

*Ekkor $\mathcal{M}_h$ altér $\mathbb{K}^n$-ben.*

$$\left[ A \mid x \right] = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

**1.** *Az $Ax = 0$ homogén egyenlet $\mathcal{M}_h$ megoldáshalmaza $n - r$ dimenziós altér $\mathbb{K}^n$-ben. Ennek az altérnek egy bázisa a (18.5) képletekkel értelmezett $v_{r+1}, \ldots, v_n$ vektorrendszer.*

**2.** *Ha az $Ax = b$ rendszer megoldható, akkor $\mathcal{M}$ megoldáshalmaza az $\mathcal{M}_h$ altér $x^B$-vel való eltolása.*

 / Komplex / összetett s a'náriu számok

16 November 2020 15:18

$x^2+1=0$

$\boxed{i^2=-1}$ IMAGINÁRIUS EGYSÉG

$z := \underset{\text{valós}}{x} + \underset{\text{képzetes rész}}{i \cdot y} \qquad x, y \in \mathbb{R} \qquad i = \sqrt{-1}$

$\oplus \ominus \to$ képzetes + valós összeadása / kivonása

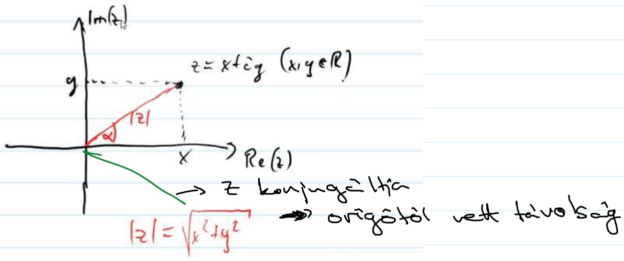
Szorzás $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$

$\to ( \dots + i^2 \cdot y_1 y_2)$, $i^2 \to (-1)$

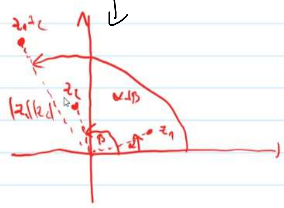
Osztás. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \underbrace{\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}}_{\text{valós rész}} + \underbrace{\frac{-x_1 \cdot y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}}_{\text{képzetes}} i$

konjugálttal szorzás $(x_2 - iy_2)$

Em l. Komplex "módmód":




Komplex számok szorzása




Trigonometrikus alak: szög ($\alpha$) + távolság

$z = x + iy \qquad z = |z|(\cos\alpha \cdot i \cdot \sin\alpha) = |z|\cos\alpha + i|z|\sin\alpha$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$ vagy $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ ($\bar{z}$: z konjugáltja)

## Feladatok, Példák

2/a $\frac{1}{2-3i} = \frac{1}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2+3i}{4-(\underbrace{3i^2}_{9})} \quad \frac{2+3i}{13} \quad \frac{2}{13} + \frac{3}{13} i$

2/c $(1-2i) \cdot (5+i) = 5 + i - 10i + 2 = 7 - 9i$

$-2 \cdot ii$
$-2 \cdot -1$
$+2$

3/e $(2-i)^2 + (2+i)^3$

$a^2 - 2ab + b^2$

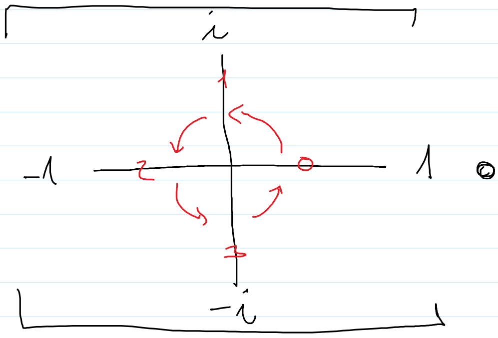
$4 - 4i + i^2 + 8 + 3 \cdot 4 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3$

$12i - 6 - i$

$$4 - 4i + i^2 + 8 + 3\cdot 4\cdot i + 3\cdot 2\cdot i^2 + i^3$$
$$12i - 6 \quad - i$$

$$3 - 4i + 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i = \underline{5 + 7i}$$

| $i$ | $i^0$ | $i^1$ | $i^2$ | $i^3$ | $i^4$ | $i^5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $i$ | $-1$ | $-i$ | $1$ | $i$ |




$$\frac{1+5i}{3+2i} = \frac{1+5i \cdot 3-2i}{9+4} = \frac{(3+10)+(-2i+15i)}{13} = \frac{13+13i}{13} = \frac{13}{13}+\frac{13}{13}i = 1+i$$

$3^2 - (2i^2)$

$-2i^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$\frac{1+i}{3-i} + \frac{3-i}{1+i} = \frac{(1+i)(1+i)+(3-i)(3-i)}{(3-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1+9-6i+i^2}{4+2i}$$

$3+3i-i-i^2$ $\qquad \frac{8-4i}{4+2i} =$

$$= \frac{(8-4i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \frac{(4-2i)(2-i)}{2^2-2i^2} = \frac{8-4i-4i+2i^2}{4+1}$$

$$\frac{6-8i}{5} \qquad \frac{6}{5}+\frac{8}{5}i$$

$$(1+i)(1-i) = 1 - i + i - i^2 = 1 - -1 = \boxed{2}$$

$$(1+i)^4 = 4$$

$(1+i)^2 = \boxed{2i}$

$(1-i)^2 = \boxed{-2i}$ $\Big\}\ \square^2 = -4$

---

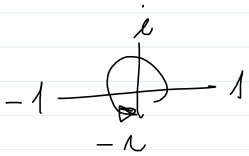
$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2018} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2019}$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)$$

$$\frac{(1-i)^2}{1^2-i^2} = \frac{-2i}{2} \qquad -i$$

$$\frac{(1+i)^2}{1^2-1^2} \qquad \frac{2i}{2} \qquad -i^{2019} = i \qquad -1+i$$

$$i^{2018} = -1$$




3/a $\quad x^3 - x^2 + 8x + 10 = 0 \quad ; \; z_1 = 1+3i \qquad 1-3i$

Ha komplex szám gyök, akkor konjugáltja is gyök

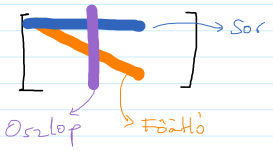
$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

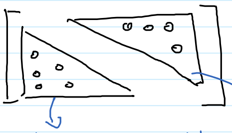
$$\boxed{n = \left(\sqrt{n}\cdot i\right)^2}$$

ZH2 - Ism: 12,13,18/ii,19, Mátrixok

14 November 2020 13:53

$A = \begin{bmatrix} A(1,1) & \cdots & A(1,N) \\ \vdots & & \\ & & A(M,N) \end{bmatrix}$ $\quad A^{m\times n}$



alsó háromszögmátrix ⊕ felső –||–

egységmátrix ∈ diagonálmátrix

$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \\ & & 1 \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

Négyzetes Mátrix:

| | |
|---|---|
| Reguláris ← vs → | Szinguláris |
| • invertálható | • nem invertálható |
| • $\exists A^{-1}$ | • $\nexists A^{-1}$ |

Nullmátrix = Minden eleme 0 → $\mathbb{O}$

Sor/Oszlopmátrix = $\mathbb{K}^{m\times 1}$ / $\mathbb{K}^{1\times m}$

Összeadás

⊕ Kommutatív, Asszociatív, Disztributív

→ $A + \mathbb{O} = A$

$A + (-A) = \mathbb{O}$

Szorzás számmal

$\lambda$ ⊛ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ Disztributív

$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

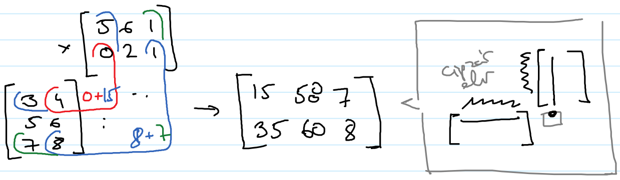
$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

Szorzás Mátrixal

[ ] ⊛ Asszociatív $(AB)C = A(BC)$

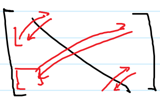
Disztributív $A(B+C) = AB + BC$

$A\boxed{I} = A$ ↪ egységmátrix | $(\lambda A)B = \lambda(AB)$




Transzponálás

⊤



$(A^T)^T = A$

$(AB)^T = B^T A^T$

$\boxed{A^T}$ (Adjungálás: Komplex számokkal $A^*$)

Részmátrix

⊡ $A\begin{bmatrix} \vdots & i & \vdots \\ j & & \end{bmatrix}^{n\times n}$ → $i$ és $j$ törlésével kaptott részmátrix $\boxed{A_{ij}}$

Determinánsok

Ⓓ

→ $A = [a_{11}]^{1\times 1} := \det(A) = a_{11}$

→ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{2\times 2} := \det(A) = ad - bc$

**Determináns tulajdonságai:** $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

| Determináns tulajdonságai | det értéke |
|---|---|
| → sor/oszlop csak 0 | 0 |
| → s/o felcserélése | $-1 \cdot \det$ |
| → 2 s/o azonos | 0 |
| → s/o szorzása n-el | $n \cdot \det$ |
| → ha mátrixot szorozunk n-el | $c^n \cdot \det$ |
| → 2 s/o arányos | 0 ⇝ $(\times 2) 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$ |
| → $\det(A) + \det(B) =$ | $\det(A+B)$ |

$\to$ $\det(A) + \det(B) =$ $\qquad\qquad$ $\det(A+B)$

$\to$ mátrix s/o-hoz hozzáadjuk $\qquad$ det $\quad \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \quad 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -2$

s/o n-szeresét

$\to$ $\det A \cdot \det B$ $\qquad\qquad$ $\det(A \cdot B) \quad \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 = -6 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}$

## Aldeterminánsmátrix

(d)

$$\begin{bmatrix} a(1,1) & \cdots \\ \vdots & a(n,n) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_{11}' & \cdots \\ \vdots & \ddots & A_{nn}' \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

## Inverz mátrix

(1)

$$A^{-1} := \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (2 \times 2) \qquad \text{inv}: \frac{1}{\det(A)} \left[ A' \right]$$

# 20 Mx Saját{érték,vektor} I.

07 December 2020 14:01

1A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \end{array}$$

$$(2-\lambda)\cdot[(-2-\lambda)\cdot(2-\lambda)-(-3)\cdot 1] \to (2-\lambda)[(2-\lambda)(-2-\lambda) \quad +3]$$

$$+1\,[3(2-\lambda)-3] \qquad + 3(2-\lambda)-3$$

$$-1\,[3+1(-2-\lambda)] \qquad -(3-2-\lambda)$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-4+3) + 2 - 2\lambda$$

$$\downarrow$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-1) \quad -2(\lambda-1)$$

$$\downarrow$$

$$(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) - 2(\lambda-1)$$

$\lambda_1 = 1$ ✓ $\quad (\lambda-1)\cdot[(2-\lambda)(\lambda+1)-2] = 0$

$$\downarrow$$

$$-\lambda^2+2+\lambda-2$$

$$(\lambda-1)(-\lambda^2+\lambda) = (\lambda-1)\cdot\lambda(-\lambda+1) = 0$$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 1$

$\lambda_1 = 1 \quad a(\lambda_1) = 2$

$\lambda_2 = 0 \quad a(\lambda_1) = 1$ Sajátértékek

---

Sajátbázis

eredetibe visszahelyettesíteni

$\to \lambda_2 = 0$

$$(A - \lambda I)x = 0 \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ nullvektor

gauss. elimin.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & \boxed{1} & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[S_2+2S_3]{S_1+S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \text{végtelen} \xrightarrow[S_3+S_2]{S_2-S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 + x_3 = 0$$

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \underline{\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}} \right. \Leftarrow \quad \begin{array}{c} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 = -x_3 \\ \hline x_2 = -3x_3 \end{array}$$

↳ sajátvektorok halmaza

egy vektor van !

$x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és ez alért is generál

| sajátvektor nem lehet nullvektor

$\dim W_0 = 1 \iff$ geometriai multiplicitás $= 1$

$\to \lambda_1 = 1$.

$(A - \lambda I)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[s_3 - 3s_1]{s_1 + s_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ \underline{x_1 = x_2 + x_3} \end{array}$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

↳ 2 lin. független.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\dim W_1 = 2 \qquad g(\lambda_2) = 2$

Van sajátbázis :
$$\left. \begin{array}{l} a(1) = g(1) = 2 \\ a(0) = g(0) = 1 \end{array} \right\} \leftarrow$$

# 20 Mx Saját{érték,vektor} II.

10 December 2020 14:29

1b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = ?$

sajátértékek:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda) - 1\right] +$ $\rightarrow$ $(1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) - (1-\lambda)$

$-1\left[-(2-\lambda) + 1\right] \longrightarrow -2+\lambda+1$

$(1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$

$a(1) = 2 \quad a(2) = 1$ sajátérték

sajátvektorok

$\lambda_2 = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{s_1+s_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{s_2-s_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 - x_3 = 0$

$x_1 = x_3$

$x_2 = 0$

$$M = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{sajátvektor pl: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\dim W_2 = 1 \; = \; g(2) = 1 \iff a(2)$ ✓

$\lambda_1 = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] =$$

$x_3 - x_2 = 0$

$x_1 - x_2 = 0$

$x_1 = x_2$

$x_2 = x_3$

$$M = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v \text{ pl: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\dim W_1 = 1 \Rightarrow g(1) = 1 \neq a(1)$

$\Rightarrow$ nincs sajátbázis, mert $a(1) > g(1)$

1d

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = 0$

$$1\left[-(1-\lambda) - 0\right] +$$

$$-(1-\lambda)\left[(1-\lambda)(1-\lambda) + 3\right] +$$

$$0 -$$

$$-(1-\lambda)\left[(1-\lambda)(1-\lambda) + \quad\right]$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4$$

$$(1-\lambda)\left[\underbrace{\lambda^2 - 2\lambda + 5}\right]$$

$\lambda^2 - 2\lambda + 5$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2}$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$1 \pm \sqrt{-16} \to 4i$

$1 \pm 2i$

$a(\lambda_1) = 1 \qquad \lambda_1 = 1$

$a(\lambda_2) = 1 \qquad \lambda_2 = 1 + 2i$

$a(\lambda_3) = 1 \qquad \lambda_3 = 1 - 2i$

$\lambda_2 = \quad 1 + 2i$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2i & -1 & -1 & 0 \\ \boxed{1} & -2i & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2i & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[s_1 + 2i s_2]{s_3 - 3s_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2i & 0 & 0 \\ 0 & 6i & -2i & 0 \end{array}\right]$$

$\downarrow \; :2i$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & \boxed{-1} & 0 \\ 1 & -2i & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & +1 & \\ 1 & -2i & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right]$$

$x_3 - 3x_2 = 0$

$x_1 = 2i x_2$

$$W_{1+2i} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i x_2 \\ x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix} =$$

$$x_2 \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \to \text{példavektor: } \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

# 21 Mx diagonalizálhatósága

11 December 2020 09:07

**Def** Mátrixok hasonlóság $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$A \sim B$, ha $\exists C$ st. invertálható és $\boxed{B = C^{-1}AC}$

$\rightarrow$ szimmetrikus ($A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$)

**Tétel (21.3)** Ha $A \sim B$, akkor karakterisztikus polinomjuk megegyeznek
'' sajátértékei

**Biz:** Ha $A \sim B \Rightarrow \exists C$ invertálható $: B = C^{-1}AC$

$\boxed{B \text{ karakterisztikus polinomja } P_B(\lambda)}$
$A$ — " — $P_A(\lambda)$

$\rightarrow$ Ha $A \sim B$ akkor sajátértékeik megegyeznek

**Def** $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. $A$ diagonalizálható iff $A$ hasonló egy diagonális mátrix

$\exists C$ inv. mátrix : $C^{-1}AC = D \sim$ diagonálmx.

**Tétel** $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ $A$ diagonizálható iff, létezik sajátbázisa)
van $n$ lin. független sajátvektora

---

Feladatok

(1a) diagonizálható? Alakja?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 1$
$a(0) = 1 \Leftrightarrow g(1) = 2$
$g(0) = 1 \Leftrightarrow g(1) = 2$

páronként megegyeznek $\therefore$ páronként diagonalizálható

3 lin. függ: $\lambda_1\ 0 \Rightarrow (-1, -3, 1)$
$\lambda_2\ 1 \Rightarrow (1, 1, 0)$
$1 \Rightarrow (1, 0, 1)$

sajátértékek

$$D = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

kell $C^{-1} \rightarrow$ kell Det

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \det \Rightarrow -1 + 2 = 1$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \cdot \mathrm{adj}(C) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & +3 & -1 \\ -1 & -2 & +1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}^{\pm} \to \cdot \frac{1}{1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \nearrow C^{-1}$$

$$\underline{C^{-1} A C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow D$$

$4 - 3 + 1$

---

Alkalmazás

$$C^{-1} A C = D \Rightarrow A = C D C^{-1}$$

$$A^{20} = ?$$

$$A = (C \cdot D \cdot C^{-1}) \cdot (C \cdot D \cdot C^{-1}) \cdots (C D C^{-1})$$

$$\underbrace{C \cdot D \cdot (\underbrace{C^{-1} \cdot C}_{I}) \cdot D \cdot \underbrace{C^{-1}}_{I}}_{C \cdot D^{20} C^{-1}} \quad !$$

nem lesz ZH-ban !

---

1b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

előző rész tartalmából

$\lambda_1 = 2$, $a(2) = 1$, $g(2) = 1$

$\lambda_2 = 1$, $a(1) = 2$, $g(1) = 1 \Leftarrow$ egy darab sajátvektor

$\Downarrow$

emiatt nem diagonalizálható

---

1c

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

saját {érték, vektor, bázis}

$\downarrow$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \end{bmatrix}$$

det

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$ det

$(1-\lambda)\cdot\left[-\lambda(1-\lambda) - 1\right] +$

$-1\cdot(\lambda+1)$

$2\cdot(1-(1-\lambda))$

$-\lambda - 1 + 2(\cancel{1} + \lambda)$

$-\lambda - 1 + 2\lambda$

ty 1

$-\lambda(1-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) + (\lambda+1) + 2 - 2(1-\lambda)$

$-1+\lambda+\lambda+1$

$2\lambda + 2 - 2 + 2\lambda$

$4\lambda + 4$

$-\lambda(1-\lambda)(1-\lambda) - 4(\lambda+1) = 0$

$(1-\lambda)\left[\lambda^2 - \lambda - 1\right] + (\lambda - 1)$

!

$-1(1-\lambda)$

$(1-\lambda)\left[\lambda^2 - \lambda - 1 - 1\right] =$

$(1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$

$\lambda_1 = 1$

$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1\cdot -2}}{2}$

$\frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \to \frac{-1\pm 3}{2}$

$\lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = -1$

| $\lambda$ | értéke | $a(\lambda)$ | $g(\lambda)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | $-1$ | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 1 |

diagonalizálható

$(1-\lambda)(\lambda^2-2) + (\lambda+1) + 2(\lambda+1) + 2$

$\lambda^2 - 2 - \lambda^3 + 2\lambda + \lambda + 1 + 2\lambda + 4$

$-\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0$

$\lambda_1 = -1$

$(-\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0$

$-1\lambda^2 + 2\lambda$

$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 3$

$a(-1) = 1 \qquad a(3) = 2$

Trash

szépítettük

$\lambda_1 = 1$ esetében

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$ gauss elimináció

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$ gauss elimináció

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_3 - 2s_2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \underline{1} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1s_1 + s_3]{-1s_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \underline{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_2 &= x_3 \\ x_1 &= x_3 \end{aligned}}$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sajátvektor.

---

$\lambda_2 = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[s_2 + s_3]{s_3 - 2s_2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ \underline{1} & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[s_2 + s_3]{s_1 + 2s_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \underline{1} & 0 & -1 \\ 0 & \underline{1} & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = x_3$
$x_2 = 0$ ! !

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sajátvektor :)

---

$\lambda_3 = -1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & \boxed{1} \end{bmatrix} \xrightarrow[s_3 + s_2]{s_1 - s_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & \underline{1} & 0 \\ 2 & -1 & \underline{1} \end{bmatrix} \xrightarrow[s_1 + s_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & \underline{1} & 0 \\ 5 & 0 & \underline{1} \end{bmatrix}$$

$x_2 = -3x_1$
$x_3 = -5x_1$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -3x_1 \\ -5x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$$

$x \in \mathbb{R}$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ sajátvektor}$$

A diagonizálható

$$D = ? \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{C^{-1} A C = D}$$ → Pont mint a definícióban

→ M → saját {vektor, érték}

→ diag → diag alak

→ algebrai / geometriai multiplicitás

⊛ Vektorok közti szorzás

Def V vektortér ($\mathbb{R}$ fölött) $(x, y \in V \ , \ \lambda \in \mathbb{R})$

$x+y$ — $\lambda$ számmal szorzás

$\boxed{xy = x \cdot y = \langle x, y \rangle}$ → vektorszorzat

Ha $\exists \langle \cdot, \cdot \rangle$

Tulajdonságai

1. Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok, akkor $\underline{a} \cdot \underline{b}$ egy valós szám (innen ered a skaláris szorzat elnevezés) $\langle a, b \rangle = \lambda$
2. $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$ (kommutativitás) $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$
3. $(\lambda \underline{a}) \cdot \underline{b} = \lambda \cdot (\underline{a} \cdot \underline{b})$ (szorzat szorzása) $\langle \lambda a, b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle$
4. $\underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{ab} + \underline{ac}$ (összeg szorzása, disztributivitás) $\langle a, (b+c) \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$
5. $\underline{a} \cdot \underline{a} \geq 0$, s itt egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $\underline{a} = \underline{0}$ $\langle a, a \rangle > 0$, kivéve $a = 0 \to \langle a, a \rangle := 0$

Skalárszorzat $\mathbb{R}^n$-ben.

Tulajdonságai: $\langle x, \underline{0} \rangle = \langle \underline{0}, x \rangle = 0$

$\langle a, b \rangle = |a| \cdot |b| \cdot \cos\alpha$ ← elég gagyi magasabb $\mathbb{R}^n$-ben

$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + b_1 b_2$

$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 \cdots a_n b_n$

→ vektorhossz, abszolútérték

Def Vektor normája

$\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle = |\underline{a}|^2 \quad (\underline{a} \in \mathbb{R}^2)$

$\mathbb{R}^n$ $\boxed{\|a\| = \sqrt{\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle}}$

$(\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n))$

$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 \cdots + a_n^2}$

Tulajdonságai

- ha $\underline{x}$ : $\|\underline{x}\| \geq 0$
  ... $x = 0$

→ merőlegesség

Def Merőlegesség / Ortogonalitás

$x, y \in V$ vektorok ortogonálisak, ha

$\langle \underline{a}, b \rangle = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\alpha$

$90^\circ \to 0$

ha derékszöget zárnak be

skalárszorzatuk nulla (0)

$x = (-1, 1, 1, -1)$

$y = (1, 0, 0, -1)$ merőleges

$\langle x, y \rangle = \ldots = 0$ $\boxed{x \perp y}$

• ha $\underline{x}$ : $\|\underline{x}\| \geq 0$

$\|\underline{x}\| = 0$ iff $\underline{x} = \underline{0}$

• $\|\lambda x\| \iff |\lambda|\|x\|$

$\langle x,y \rangle = -1 + 1 = 0$ $\boxed{x \perp y}$

→ ugye $\langle \underline{0}, ? \rangle = 0$

↳ nullvektor mindenre merőleges

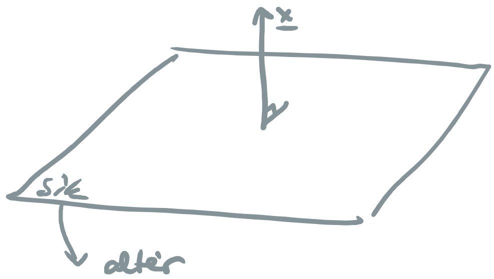
---

normálás $\|\langle \hat{i}, \hat{j} \rangle\| = 1$

$\underline{x}$ irányában mutató egységvektor

$\boxed{\frac{\underline{x}}{\|x\|}}$ → hosszával elosztás

---

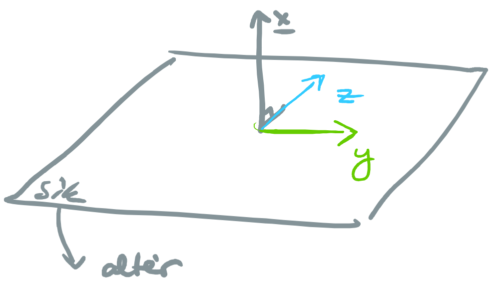



x merőleges, ha $\forall y \in S$ esetén $\langle y, x \rangle = 0$

vagyis $\forall y \in S$ : $y \perp x$

$\boxed{\text{altér} \perp x \text{ ha}}$

Tétel: $\underline{x} \in V$ és $W \subseteq V$ altér, akkor $\underline{x} \perp W$, ha $\forall w \in W$ esetén $\underline{x} \perp \underline{w}$




síkra merőleges az altérre, ha (z és y nem párhuzamosak)

Ha $x \perp y$ és $x \perp z \Rightarrow x \perp S$

y, z ilyenkor generátorrendszer ⊕ Bázis

Tétel (22. h) Ha $e_1, e_2 \dots e_n \in V$

$W = \mathrm{Span}(e_1 \cdots e_n)$ és $\underline{x} \in V$

$x \perp W \iff \langle x, e_i \rangle \; \forall i \in \{1..n\}$

---

Def $x_1, x_2 \dots x_n \in V$ ← vektorrendszer

**Def** $x_1, x_2 \,..\, x_n \in V$ ← vektorrendszer

→ ortogonális, ha bármely két különböző vektor $\perp$

$\forall i,j \in \{1..n\},\ i \neq j : \langle x_i, x_j \rangle = 0$

$\boxed{\text{OR}}$

(vagy OR)

$\Downarrow$

→ ortonormált, ha ortogonális és

$\forall i \in \{1..n\} : \|i\| = 1$

$\boxed{\text{ONR}}$

(vagy ONB)

ha bázisról beszélünk (vagy alter bázisa)

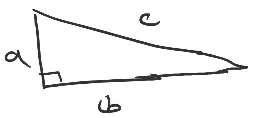
---

**Tétel** (22.8) legyen $x_1 \dots x_n \in V \setminus \{\underline{0}\}$ egy OR.

$\Rightarrow$ az a rendszer lin. független.

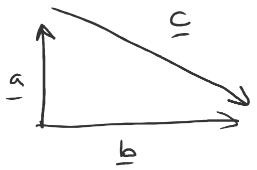
---

Pitagorasz-tétel



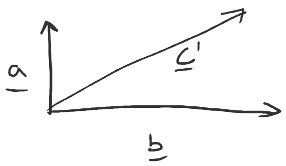

$a^2+b^2=c^2$

$\Downarrow$




$|\underline{a}|^2+|\underline{b}|^2=|\underline{c}|^2$

$\Downarrow$




$|\underline{c}'| = |\underline{c}'|$

$\underline{c}' = \underline{a} + \underline{b}$

$\downarrow$

$$\boxed{|\underline{a}|^2+|\underline{b}|^2 = |\underline{a}+\underline{b}|^2}$$

$\Downarrow$

Általánosítás

$x_1, x_2 \cdots x_n \in V$ $\boxed{\text{OR}}$ rendszer

$$\|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2 = \|x_1 \cdots x_n\|^2$$

Biz: $\|x_1 \cdots x_n\|^2 = \langle x_1 + \cdots + x_n , x_1 + \cdots x_n \rangle =$

$$= \langle x_1, x_1 \rangle + \cancel{\langle x_1, x_2 \rangle} \cdots + \cancel{\langle x_1 x_n \rangle} +$$
$$\cancel{\langle x_2 x_1 \rangle} + \cdots \qquad \cancel{\langle x_2 x_n \rangle} +$$
$$\vdots$$
$$\cancel{\langle x_n x_1 \rangle} + \qquad + \langle x_n x_n \rangle$$

$\leftarrow$ OR miatt

$$\Downarrow$$

$$\langle x_1, x_1 \rangle \cdots \langle x_n, x_n \rangle$$
$$\|x_1\|^2 \cdots \|x_n\|^2$$

---

Legyen $e_1 \dots e_n \in V$ vektorrendszer, $W$ az általuk generált altér

$W = \text{Span}(e_1 \cdots e_n)$

$\underline{x} \in W$

Tudjuk, hogy $\exists\, \lambda_1 \dots \lambda_n$ :

$$\langle \underline{x}, e_1 \rangle = \lambda_1 \underline{\langle e_1, e_1 \rangle} + \lambda_2 \langle e_2 e_1 \rangle + \dots \lambda_n \langle e_n e_1 \rangle$$
$$\langle \underline{x}, e_2 \rangle = \lambda_1 \underline{\langle e_1, e_2 \rangle} + \cdots$$
$$\vdots$$
$$\langle \underline{x}, e_n \rangle = \lambda_1 \underline{\langle e_1, e_n \rangle} + \cdots \lambda_n \langle e_n, e_n \rangle$$

lin. egyenletrendszer
$n$ egyenlet
$n$ változó
$(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$

együtthatók $\Downarrow$ mátrixos formába lèterít

megoldásvektor

$$\begin{pmatrix} \langle \underline{x}\ e_1 \rangle \\ \langle x\ e_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle x\ e_n \rangle \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \langle e_1\ e_1 \rangle & \langle e_2\ e_1 \rangle & \langle e_n, e_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_1, e_n \rangle & \cdots & \langle e_n, e_n \rangle \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{E}}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ha $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{I}}$ : $\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = \langle x, e_1 \rangle \\ \lambda_2 = \langle x, e_2 \rangle \\ \lambda_n = \langle x, e_n \rangle \end{array}\right\}$ ez jó lenne : Fourier együtthatók (ha ez egy ONR)

Akkor igaz ha csak a főátlóban van érték, ami egy

: $\forall i$ -re $\langle e_i \, e_i \rangle = 1$

$\underbrace{\forall i, j \text{-re } \; i \neq j}_{\text{ekkor ez egy } \boxed{\text{ONR}}}$ : $\langle e_i \, e_j \rangle = 0$

# 22 Valós Eukledeszi terek II. Gyak

11 December 2020 22:56

BÁZIS $\to$ OB $\to$ ONB

②

$$\underline{x} = (1, -2, -3, 5)$$
$$\underline{y} = (-1, 2, -1, 0)$$
$$\underline{z} = (2, -1, 1, 3)$$

a/ $\langle x, y \rangle$

$-1 - 4 + 3 = 2$

b/ $\|x\|$

$1 + 4 + 9 + 25 = \sqrt{39}$

c/ $\|x - z\| =$ $-1 \quad -1 \quad -4 \quad 2$ $\sqrt{22}$

$1 \quad 1 \quad 16 \quad 4$

d/
$$\frac{\langle x\, z\rangle \cdot y - \langle y\, z\rangle x}{\|y\|^2} = \frac{(\overbrace{2+2-3+15}^{16}) \cdot y - (\overbrace{-2-2-1}^{-5}) x}{\sqrt{1+4+1}^{\,2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}^{\,2}} \cdot (-16, 32, -16, 0) - (-5, +10, +15, -25) =$$

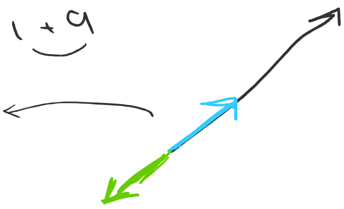
$$= \frac{1}{6} \cdot (-11, 22, -31, 25)$$

e/1 $z$ irányú egységvektor ?

$$\underline{z} = (2, -1, 1, 3)$$

$$\frac{z}{\|z\|} = \frac{(2, -1, 1, 3)}{\sqrt{15}}$$

$4 + 1 + 1 + 9$



/2 $z$-vel ellentétes irányú e.v.

$$-\frac{1}{\sqrt{15}}(2, -1, 1, 3)$$

$-\frac{1}{\sqrt{15}}(2,-1,1,3)$

---

3

$u_1 = (1,1,1,1)$
$u_2 = (1,-1,-1,1)$
$u_3 = (-1,0,0,1)$

a) ortogonális -e, $\Leftrightarrow$ vektorok páronként merőlegesek

$\langle u_1, u_2\rangle \quad 1-1-1+1=0 \quad \checkmark \quad u_1 \perp u_2$
$\langle u_2\ u_3\rangle \quad -1+1=0 \quad \checkmark \quad u_2 \perp u_3$
$\langle u_1\ u_3\rangle \quad -1+1=0 \quad \checkmark \quad u_1 \perp u_3$

} O.R.

b) pitagorasz tétel ellenőrzése

ezért használhatjuk

$\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \|u_3\|^2 = 4+4+2 = 10$
$\|u_1+u_2+u_3\|^2 = \|(1,0,0,3)\|^2 = 1+9=10$

} azonos ü

# 23 Valós Euklideszi terek III.

11 December 2020 23:22

Elmélet

ONR bázis előnyös

→ előállítható lin. komb.

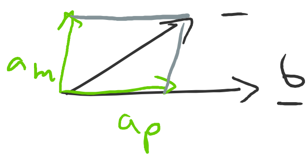
→ $\lambda$-együtthatók gyorsan számolhatóak

---

Bázis $\overset{?}{\Longrightarrow}$ OB $\overset{?}{\Longrightarrow}$ ONB

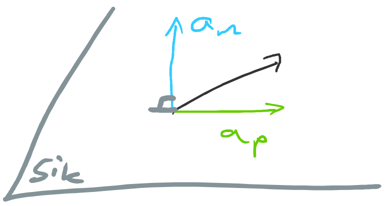
→ $\mathbb{R}^2$-ben

$\underline{a} = \underline{a}_p + \underline{a}_m$




$\boxed{\begin{matrix} a_p \parallel b \\ a_m \perp b \end{matrix}}$

→ $\mathbb{R}^3$-ban




$\boxed{\begin{matrix} a_p \in S \\ a_m \perp S \end{matrix}}$ ⟷ Altérre való merőleges vektor

Tétel: Felbontási tétel

$e_1 \dots e_n$: ONR $\qquad W = \mathrm{Span}(e_1 \dots e_n)$

(ilyenkor bázis is)

Ekkor $\forall x \in V$ egyértelműen felbontható $x = x_p + x_m$, ahol

$x_p \in W$

$x_m \perp W$

Számolás

$$\begin{cases} \underline{x}_p = \sum_{i=1}^{n} \langle \underline{x}, \underline{e}_i \rangle \cdot \underline{e}_i \\ x_m = \underline{x} - \underline{x}_p \end{cases}$$

→ $\boxed{\text{Merőleges vetület} \quad \text{Jele: } \mathrm{Proj}_W(x)}$

$$\underline{x}_m = \underline{x} - \underline{x}_p$$

---

$(u_1 \dots u_n)$ : OOR ← nem ortonormált rendszer  $W = \mathrm{Span}(u_1 \dots u_n)$

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \quad \dots \quad e_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$$

$(e_1 \dots e_n)$ már ONR

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} \left\langle x_1, \frac{u_i}{\|u_i\|} \right\rangle \frac{u_i}{\|u_i\|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|u_i\|^2} \langle x, u_i \rangle u_i =$$

$$\|u_i\|^2 = \langle u_i, u_i \rangle$$

$$\boxed{= \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} \cdot \underline{u}_i}$$

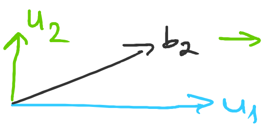
---

Eljárás : Gram-Schmidt féle Ortogonalizáció

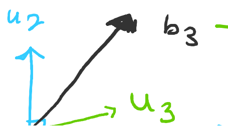
random bázis $\xrightarrow{G.S.}$ O(N)B

→ $b_1, b_2 \dots b_n$ bázis (nem O(N)B)

① $\longrightarrow b_1 \rightarrow u_1$ : 1 dim Altert generál. és merőlegesség

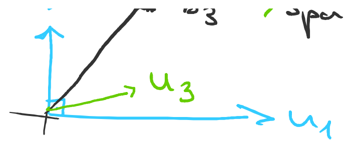
② 


$b_2 \rightarrow \mathrm{Span}(u_1, u_2)$ : felbontható $b_2$ → $u_1 \perp b_m$, $b_p \| u_1$-ra!

③ 


$b_3 \rightarrow \mathrm{Span}(u_1, u_2, u_3)$

③ $u_3$ span$(u_1, u_2, u_3)$




⋮

④ $b_4 \to u_4 \quad \dots \quad \text{span}(u_1 \dots u_3)$

---

Számolás

$$u_1 = b_1$$

$$u_2 = b_2 - \overbrace{\frac{\langle b_2, u_1 \rangle}{\underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{\text{const.}}} u_1}^{\text{párhuzamos összetevő}}$$

$$u_{\boxed{3}} = \overbrace{b_3}^{u_3 \perp} - \left( \overbrace{\frac{\langle b_{\boxed{3}} u_1 \rangle}{\langle u_1 u_1 \rangle} u_{\boxed{1}}}^{u_1 \parallel} + \overbrace{\frac{\langle b_{\boxed{3}} u_2 \rangle}{\langle u_2 u_2 \rangle} u_2}^{u_2 \parallel} \right)$$

---

Feladatok

① 
$$\left.\begin{array}{l} u_1 = (1, 1, 1, 1) \\ u_2 = (1, -1, -1, 1) \\ u_3 = (-1, 0, 0, 1) \end{array}\right\} \text{ tudjuk: ortogonális rendszer}$$

/c bontsuk fel $\underline{x} = (2, 1, 3, 1)$ ezen altérben és rá merőleges altér

Projekciós tétel

$W = \text{span}(u_1, u_2, u_3)$

Σ1 ∥

$$\text{Proj}_W x = \frac{\langle x, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle x, u_2 \rangle}{\langle u_2 \, u_2 \rangle} u_2 + \frac{\langle x, u_3 \rangle}{\langle u_3 \, u_3 \rangle} u_3$$

$$\frac{2+1+3+1}{4} \cdot u_1 + \frac{2-1-3+1}{4} u_2 + \frac{-2+1}{2} u_3 =$$

$$\frac{7}{4}(1,1,1,1) - \frac{1}{4}(1,-1,-1,1) - \frac{1}{2}(-1,0,0,1) =$$

$$= \frac{1}{4}\underset{6\quad 8\quad 8\quad 6}{(7,7,7,7)} - \frac{1}{4}(1,-1,-1,1) - \frac{1}{4}(-2,0,0,2) =$$

$$= \frac{1}{4}(8,8,8,4) = (2,2,2,1) = x_p$$

$$x_m = (2,1,3,1) - (2,2,2,1) = (0,-1,+1,0)$$

$(x_m + u_1,\ x_m + u_2,\ x_m + u_3) \to$ merőleges az altérre

# 23 Való Euklideszi terek IV.

12 December 2020 11:46

② + ③

$$b_1 = (1,1,1,1)$$
$$b_2 = (3,3,-1,-1)$$
$$b_3 = (-2,0,6,8)$$

: csináljunk OR
: majd csináljunk ONR-t

$b_1 \perp b_2 = 3+3\cancel{-1}\cancel{-1} = 6 \neq 0 \to$ nem merőleges

G.S. ort. eljárás

① $b_1$: legegyszerűbb → tartsuk meg

$$u_1 = (1,1,1,1)$$

$$u_2 = b_2 - \frac{\langle b_2, u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle} u_1 = (3,3,-1,-1) - \cancel{\frac{3+3-2}{4}} (1,1,1,1)$$

$$(3,3,-1,-1) - 1\cdot(1,1,1,1)$$

$$u_2 = (2,2,-2,-2) \parallel (1,1,-1,-1)$$ ← észre lehet venni. ☺

$b_3 = (-2,0,6,8)$

$$u_3 = b_3 - \frac{\langle b_3 u_1\rangle}{\langle u_1 u_1\rangle} u_1 - \frac{\langle b_3 u_2\rangle}{\langle u_2 u_2\rangle} u_2 =$$

$$b_3 - \cancel{\frac{-2+6+8}{4}}\left(\frac{12}{4}\right) 3u_1 - \frac{\overbrace{4-12}^{-8}-16}{\underbrace{4+4+4+4}_{16}} \to \frac{-24}{16} \to u - 2u_2$$

$$(-2,0,6,8) - (3,3,3,3) + (4,4,-4,-4) =$$

WTF

$$(-2,0,6,8) + (-1,-1, \text{[redacted]}) = \underline{(-3,-1,13,15)}$$

$$(-2,0,6,8) - (3,3,3,3) + (4,4,-4,-4) =$$

$$\boxed{u_3 = (1,1,-1,1)}$$

$$\mathrm{Span}(b_1,b_2,b_3) = \underbrace{\mathrm{Span}(u_1,u_2,u_3)}_{\text{egymásra merőlegesek}}$$

③ csináljunk ONB-t

$u_1 = (1, 1, 1, 1)$ $\quad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{4}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$u_2 = (1, 1, -1, -1) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$u_3 = (-1, 1, -1, 1) \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$Span(e_1 \cdots e_3)$ egy ONB

---

④ Általános csináljunk: OB ⊕ ONB

$$W = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \quad 3y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 = 0 ; \quad 5y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 2y_4 = 0 \}$$

$(y_1, \; y_2, \; y_3, \; y_4)$

$$y_3 = \underbrace{2y_4 - 2y_2 - 3y_1}$$

$$5y_1 + 4y_2 + \overbrace{6y_4 - 6y_2 - 9y_1} + 2y_4 = 0$$

$$-4y_1 - 2y_2 + 8y_4 = 0$$

$$y_2 = 4y_4 - 2y_1$$

$$y_3 = 2y_4 - 8y_4 + 4y_1 - 3y_1$$

$$y_3 = -6y_4 - \cancel{7}y_1$$

$(y_1, -2y_1 + 4y_4, -7y_1 - 6y_4, y_4)$

jó volt alapból

$$\boxed{y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

---

$$\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 3_9 & 2_6 & \boxed{1}_3 & -2_{-6} & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{s_2-3s_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 2_4 & \boxed{1} & 0 & -4_8 & \end{array}\right]$$

$$\downarrow s_1 - 2s_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|} -1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

$$x_3 - x_1 + 6x_4 = 0$$
$$x_2 - 2x_1 - 4x_4 = 0$$

$$x_3 = x_1 - 6x_4$$
$$x_2 = -2x_1 + 4x_4$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 + 4x_4 \\ x_1 - 6x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \to \underbrace{x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{generátorrendszer}}$$

(biztos nem párhuzamosak)

$\therefore$ lin függetlenek

$\therefore$ bázis vektor

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = (1, -2, 1, 0) \\ b_2 = (0, 4, -6, 1) \end{array}\right\} \to \text{ortogonálisak-e:}$$

$$0 \underbrace{- 8 - 6}_{-14} \neq 0 \qquad b_1 \not\perp b_2$$

## GS. Ortogonalizálás

(1) $u_1 = b_1 \quad (1, -2, 1, 0) \qquad b_2 = (0, 4, -6, 1)$

$$u_2 = b_2 - \frac{\langle b_2 u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 \Rightarrow \frac{-14}{6} u_1 = -\frac{7}{3} u_1 =$$

$$= (0, 4, -6, 1) - -\frac{7}{3}(1, -2, 1, 0)$$

$$\left(0, \frac{12}{3}, -\frac{18}{3}, \frac{3}{3}\right) + \left(\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}, \frac{7}{3}, 0\right) =$$

$= \underline{\frac{1}{3}(7,-2,-11,3)} \parallel (7,-2,-11,3) = u_2$

$\to$ ONR számolás

$$\frac{x}{\sqrt{49+4+121+9}} = \frac{1}{\sqrt{183}} u_2 = e_2$$

$\sqrt{49+4+121+9}$ ← $\|x\|$

$$\frac{}{1+4+1} = \frac{1}{\sqrt{6}} u_1 = e_1$$

$e_1, e_2$ ONB-t alkotnak ☺

---

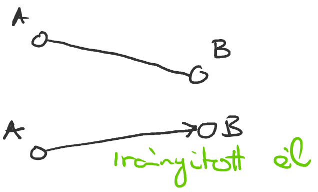
Hf: $b_1 \leftrightarrow b_2$ felcserélése!

# 24 Függvények I.

12 December 2020 12:13

Függvény: egyértelmű hozzárendelés

Def Rendezett párok:




→ rendezetlen pár | Jel: $\{A, B\} = \{B, A\}$ → halmazok

→ rendezett pár | $(A, B) \neq (B, A)$

Descartes-szorzat

Legyen $A, B \neq \emptyset$

$$\boxed{A \times B = \{(a, b) \; a \in A, \; b \in B\}}$$

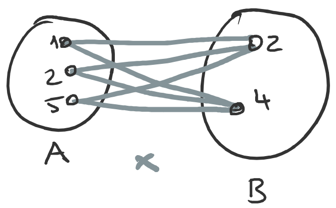
Jel: ×

→ nem kommutatív $(A \times B \neq B \times A)$

$A = \{1, 2, 5\}$

$B = \{2, 4\}$

$A \times B = \{(1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (5,2), (5,4)\}$




$$\boxed{\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \mathbb{R}^2}$$ → halmaz saját magával szorzás "R-ed kettő"

Ha $A, B \neq \emptyset$, akkor létezik

$(R \neq \emptyset)$ $R \subseteq A \times B$ halmazt Relációnak nevezzük

↳ tetszőleges részhalmaz

Pl: $A, B = \mathbb{N}$ : $R_s = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 : m = 2n\} = \{(0,0), (1,2) \dots\}$

Függvények $A, B \neq \emptyset$

$f \subseteq A \times B$ függvény, ha

$\forall (x,y) \wedge (x,z) \Rightarrow y=z$

**Def:** Értelmezési tartomány

$f$. függvény É.T.-ja

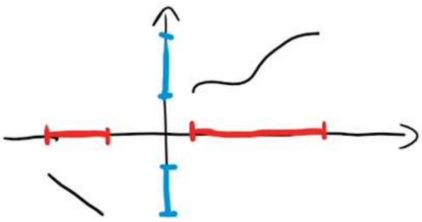
$\boxed{\text{Jel: } D_f =}\ \{x \in A : \exists y \in B : (x,y) \in f\}$

domain

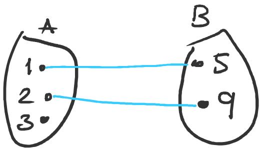
**Def:** Értékkészlet

$\boxed{\text{Jel: } R_f =}\ \{y \in B : \exists x \in A : (x,y) \in f\}$

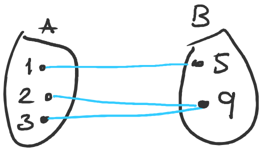
range



$D_f$
$\Downarrow$
$R_f$




$\rightarrow \quad A \neq D_f \quad \rightarrow$ Jel: $f \subseteq A \times B$, $f \in A \to B$




$\rightarrow \quad A = D_f \quad \rightarrow$ $f: A \to B$ Jel

---

## Jelölések

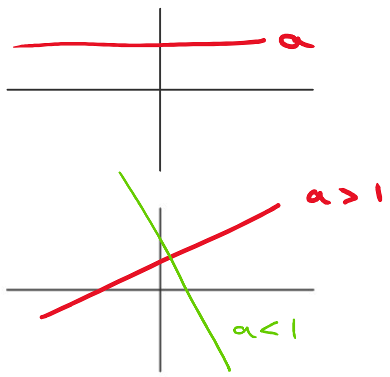
$y = x^2 \equiv f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} \equiv f(x) = x^2$

---

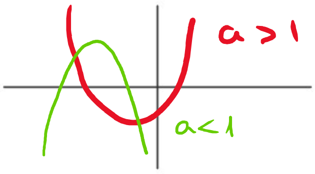
## Valós fv.-k

$n \in \mathbb{N}$
$a \in \mathbb{R}$
$b \in \mathbb{R}$
$c \in \mathbb{R}$

1. konstans (egyenes) $\quad f(x) = a$ (ha $a=0$)
2. elsőfokú $\quad f(x) = ax + b$

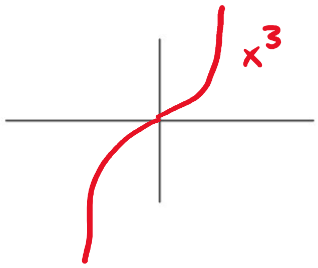


③ másodfokú (parabola) $f(x) = ax^2+bx+c$




④ Általános hatványfüggvény $f(x) = x^n$

$(n = 0, 1, 2, 3)$ most $n = 3$ pl.!

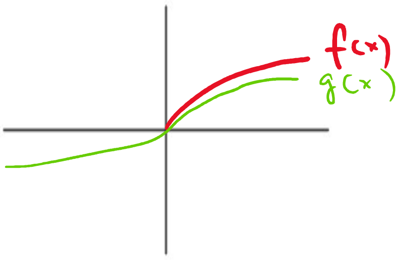



inverze (24.)

⑤ Gyökfüggvény $f(x) = \sqrt[2n]{x}$

$g(x) = \sqrt[2n+1]{x}$

$(n=1)$ most

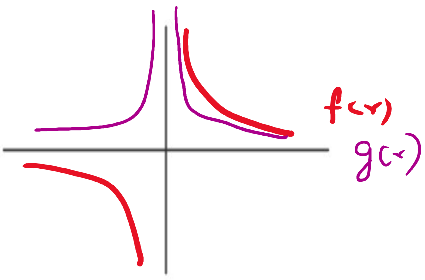



⑥ Törtfüggvények (hiperbola) $x \neq 0$

$f(x) = \frac{1}{x^{2n+1}}$

$g(x) = \frac{1}{x^{2n+2}}$

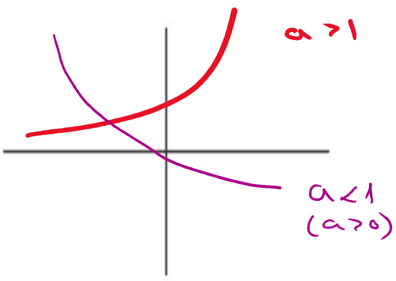
$(n=0)$ most




⑦ Exponenciális fv. $f(x) = h^x$

$(h \neq 1, h \in R)$

pl: $\boxed{e^x}$




inverze (24.)

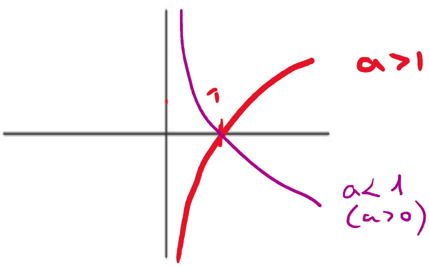
⑧ Logaritmus fv

$\boxed{\log \quad \ln \quad \lg}$

$x > 0$

$f(x) = \log_h x$

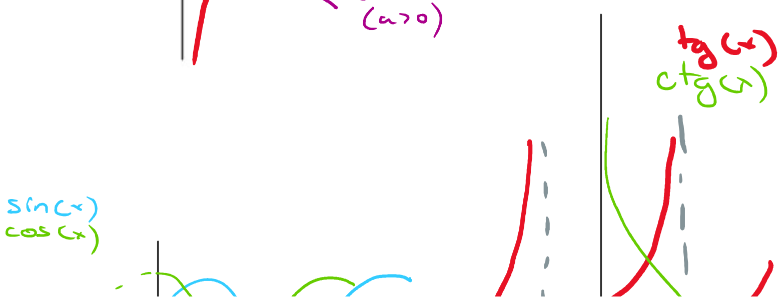
$(h \neq 1, h \in R)$




⑨ trigonometrikus fv.

a b c

sin(x)



(9) trigonometrikus fv.

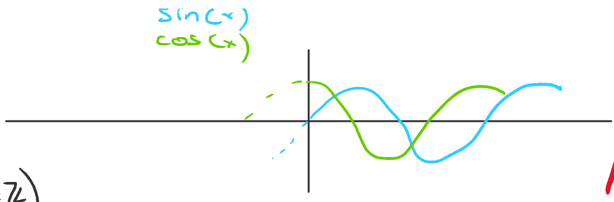
á b c

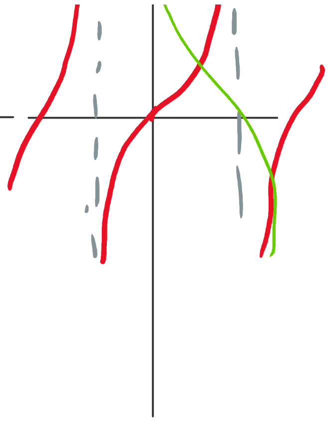
sin(x)

cos(x)

tg(x) $\rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

ctg(x) $\rightarrow x \neq k\pi$



TITKOS FÜGGVÉNY

(10) Hiperbolikus függvények

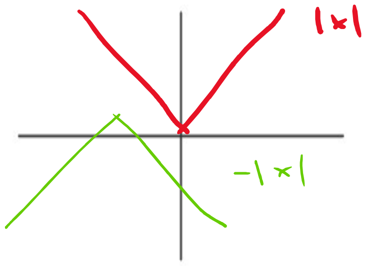
sh(x) = sinh(x)

ch(x) = cosh(x)

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

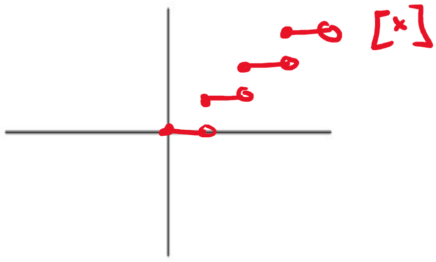
(11.) Abszolútérték fv. $f(x) = |x|$

$$|x| := \begin{cases} x : & x \geq 0 \\ -x : & x \leq 0 \end{cases}$$




(12.) Egészrészfv. $f(x) = [x]$

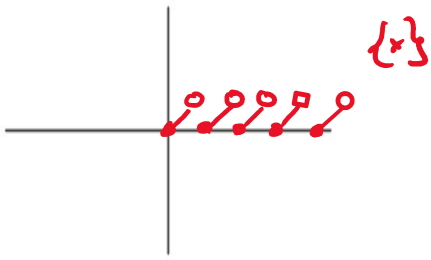
[x] := x-hez legközelebbi eső, nála nem nagyobb szám




(13) Törtrészfv. $f(x) = \{x\}$

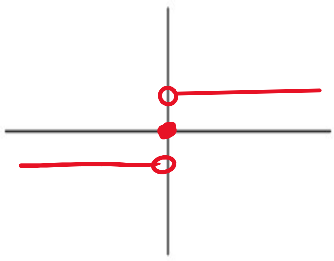
$\{x\} := x - [x]$

$\{x\}$ ÉK : $\{-1 \ldots 1\}$



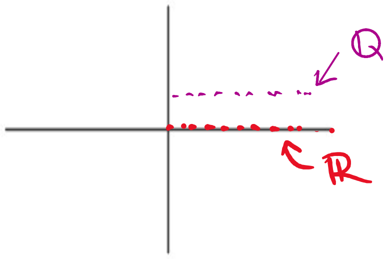

(14) előjelfüggvény $f(x) = sign(x)$

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



(15) Dirichlet fv.  $f(x)$

$$D(x) = \begin{cases} 1 : & x \in \mathbb{Q} \\ 0 : & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



# 24 Függvények II.

12 December 2020 19:27

(1a) É.T. számolás

$f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^3-1}{x}}$ ← függvénykompozíció

$\square \geq 0$ x nem lehet 0

$\Rightarrow x \neq 0$

$\Rightarrow \dfrac{2x^3-1}{x} \geq 0$

⊕⊕ ⊖ ⊖

$2x^3-1 \geq 0$ és $x > 0$ vagy $2x^3-1 \leq 0 \wedge x < 0$

$x \geq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \wedge x > 0$ $x \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \wedge x < 0$

$x \geq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $x < 0$

$x \in (-\infty; 0) \cup \left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}; \infty\right)$

---

(1b)

$f(x)$ $\sqrt{\lg(x^2-5x+7)}$

$\rightarrow \lg(\square) > 0$

$\rightarrow \sqrt{\square} \geq 0$

1.) $x^2-5x+7 > 0$

$D: -5^2-4\cdot 7 = -3$

- nincs gyöke
- felfele nyílik

$\Rightarrow$ mindenhol pozitív

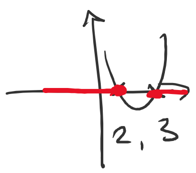
teljesül $x \in (-\infty, \infty)$

2.) $\lg(x^2-5x+7) \geq 0$

$\lg(\sim) \geq \lg 1$ (lg szig. mon. nő)

$x^2-5x+7 \geq 1$

$x^2-5x+6 \geq 0$




$D_f: x \in (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$

---

Ábrázolás

# Ábrázolás

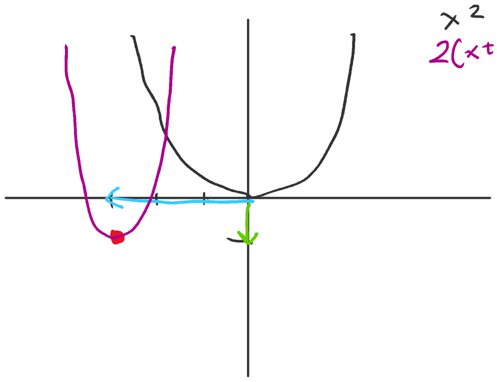
összenyomás, nyújtás, tükrözés

x tengely tolás

y tengely tolás

(4a)

$$\boxed{2}\left(x\ \boxed{+3}\right)^2 \boxed{-1} \to a(x+b)^2+c$$




(4b)

$-x^2+5x+3$ → teljes négyzetté alakítás

$$-(x-5x)+3 = -\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right]+3 =$$

$+\frac{25}{4}$

$$= -\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\underbrace{\frac{25}{4}+\frac{12}{4}} = -\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{37}{4}$$

$\frac{1}{x}$

(4g)

$$f(x) = \frac{4x-1}{2x-1} \Rightarrow$$

cél: (2) konstansleválasztás
(1) számlálóból törtek eltüntetése

$$(1).= \frac{2x-1}{2x-1} \to \frac{2\cdot(2x-1)+1}{2x-1} \to \frac{2\cancel{(2x-1)}}{\cancel{2x-1}}+\frac{1}{2x-1} \to$$

$$= 2+\frac{1}{2x-1} = 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{2}} \to \boxed{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x-\boxed{\frac{1}{2}}}+\boxed{2}$$

Def: Függvénykompozíció

**Def: Függvénykompozíció**

$A, B, C, D$

$f \in A \to B$

$g \in C \to D$

$\boxed{\text{Jel: } (f \circ g)(x)}$ → $f$ és $g$ kompozíciója
→ összetett fv.

$\neq (g \circ f)(x)$

$f(x) = \sqrt{x-1}$

$g(x) = \sin(x)$

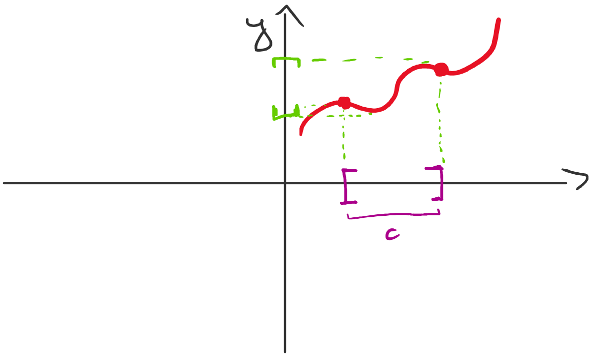
$(f \circ g)(x) \to \sqrt{\sin(x) - 1}$

$(g \circ f)(x) \to \sin\left(\sqrt{x-1}\right)$

# 25. (ős)Kép, É.K., Inverzfv. I.

13 December 2020 10:39

$f: A \to B$ függvény




**Def:** A Halmaz képe:

$C \subseteq A$ akkor $C$ $f$ általi képe az

$$\boxed{\text{jel: } f[C] = \{ f(x) : x \in C \}}$$

$f[D_f] = R_f$

Pl: $f(x) = x^2$, $C = [-1, 2]$ → $f[C] = ?$

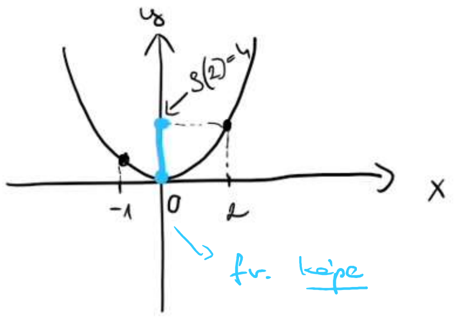
$f[C] = \{ x^2 : x \in -1 \le x \le 2 \}$

két eset:

→ $-1 \le x \le 0 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 1$

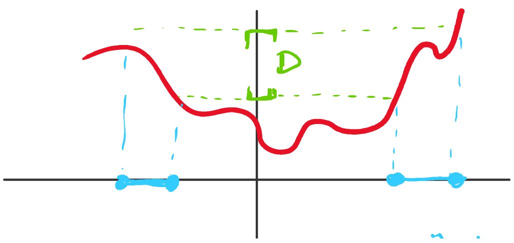
→ $0 \le x \le 2$, $0 \le x^2 \le 4$

$$\underbrace{[0,1] \cup [0,4]}_{f[C] = [0,4]}$$




Kép fordítottja

$f: A \to B$




x-en határozzuk meg, mi fog D-be vetítődni

Def: Őskép

$D \subseteq B$ Ekkor: $D$ a fv. általi ősképe:

$$\boxed{\text{jel: } f^{-1}[D] = \{x \in D_f : f(x) \in D\}}$$

$$f^{-1}[D] \subseteq A \qquad f^{-1}[R_f] = D_f$$

Pl: $f(x) = x^2 \quad D = [1, 2]$ őskép = ?

$$f^{-1}[D] \to \{x \in \mathbb{R} : 1 \le x^2 \le 2\}$$

↓ egyenlőtlenségrendszer

$$1 \le x^2 \le 2$$

x poz — x negatív

$\sqrt{x}$ — $\sqrt{x}$

$$\underbrace{1 \le x \le \sqrt{2} \quad \boxed{\cup} \quad -\sqrt{2} \le x \le -1}$$

$$[-\sqrt{2}, -1] \cup [\sqrt{2}, 1]$$

mathset

$f(x) = \frac{1}{x} \qquad D = (1, 1] \qquad (\setminus \{0\})$

$-1 < \frac{1}{x} \le 1 \to x < 0$ : $\frac{1}{x} > -1$ és $\frac{1}{x} \le 1$

$1 < -x$ és $\boxed{1 \ge x}$

$\boxed{-1 > x}$ $\wedge$

$$\underbrace{\qquad}_{-1 > x}$$

$x > 0$

$\frac{1}{x} > -1$ és $\frac{1}{x} \le 1$

$1 > -x$

$\boxed{-1 < x}$ $\wedge$ $\boxed{1 \le x}$

$\boxed{-1 < x}$ $\wedge$

$\underline{x \geq 1}$ $\longrightarrow$ $\cup$

$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

---

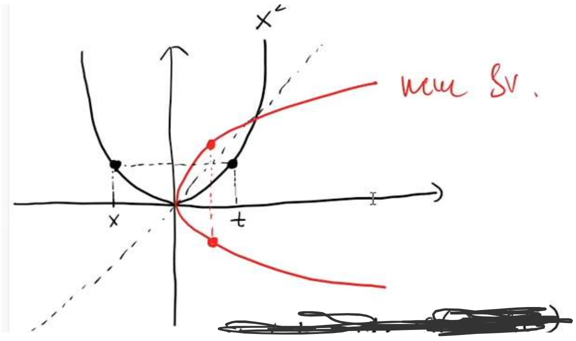
**Def: Inverzfüggvény** $\boxed{\text{Jel: } f^{-1}}$

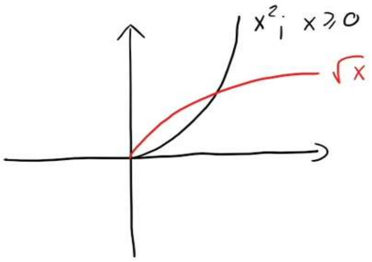
$f(x) = x^2$

$f^{-1}(x) = ?$ : $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$

$f(x) = \ln(x)$
$\underline{g(x) = e^x}$
$f(g(x)) = \ln(e^x) = x$
$g(f(x)) = e^{\ln x} = x$

nem minden fv. invertálható




$\Rightarrow$ ez már invertálható

**Def:** $f: A \to B$ fv invertálható (= injektív)

- $\forall x, t \in D_f$ : $x \neq t \Rightarrow f(x) \neq f(t)$

más megfogalmazás

- $\forall x, t \in D_f$ : $f(x) = f(t) \Rightarrow x = t$

---

Pl: $f(x) = 2x - 7$ $(x \in \mathbb{R})$ halmaz: $(-\infty, \infty)$

$\to$ invertálható? mi az inverze:

Def(I): legyen $\underline{x \neq t}$ : $f(x) - f(t) \Rightarrow \neq 0$

$2x - 7 - (2t - 7) =$

$2x - 2t \quad =$

$\underbrace{2(x-t)}_{\neq 0} \quad \neq 0$ $\rightarrow$ csak akkor 0, ha $x = t$

Def(I) : $f(x) = f(t)$ : $\left.\begin{aligned} 2x - 7 &= 2t - 7 \\ 2x &= 2t \end{aligned}\right\}$ ekvivalens átalakítások !

$x = t \rightarrow 0$

Inverze? : $y = 2x - 7$ ← kifejezzük $x$-et

$\frac{y}{2} = x - \frac{7}{2}$

$x = \frac{1}{2}(y+7) := f^{-1}(y)$

---

$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ : int : $x \in [-3, 3]$

$\underbrace{f(x) = f(t)}_{\text{egyezik}}$ = $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-t^2}$ $\quad /\square^2$ ← ekv. mert poz.

$9 - x^2 = 9 - t^2$

$x^2 = t^2$

$|x| = |t|$ $\quad$ $\left.\begin{aligned} \text{pl} : x &= -1 \\ t &= 1 \end{aligned}\right\}$ De! itt nem egyezik

ezért nem invertálható

---

$f(x)$ $\sqrt{9-x^2}$ : int $x \in [0, 3]$

$\underbrace{f(x) = f(t)}_{=}$ ...... $x^2 = t^2$ $\quad /\sqrt{\square}$ mivel $x, t \geq 0$

$\underbrace{x = t}_{=}$

ezért invertálható
(vagyis injektív)

---

$f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ $\quad x \in [0, \infty)$

invertálható? $f(x) = f(t)$

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} \qquad (x, t \text{ pozitív})$$

$$(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{t}) = (1-\sqrt{t})(1+\sqrt{x})$$

$$\cancel{1}+\sqrt{t}-\sqrt{x}-\cancel{\sqrt{xt}} = \cancel{1}-\sqrt{t}-\cancel{\sqrt{xt}}+\sqrt{x}$$

$$\sqrt{t}-\sqrt{x} = \sqrt{x}-\sqrt{t}$$

$$2\sqrt{t} = 2\sqrt{x}$$

$$\sqrt{t} = \sqrt{x} \qquad /\square^2$$

$$t = x \qquad \ddot\smile \text{ injektív}$$

$ÉT: [0, \infty)$

$\to ÉK: ?\ R_f:$

egészrészleválasztás

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{-(1+\sqrt{x})+2}{1+\sqrt{x}} = -1 + \underbrace{\frac{2}{1+\sqrt{x}}}_{>0} \to x \in [0, \infty)$$

$$R_f \subseteq (-1, \infty)$$

$\to$ inverzfüggvény

$$y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \to -1 + \frac{2}{1+\sqrt{x}} \to y+1 = \frac{2}{1+\sqrt{x}} \qquad /\cdot\ 1+\sqrt{x}$$

$$1+\sqrt{x} = \frac{2}{y+1}$$

pozitív vagy nulla

$$\sqrt{x} = \underbrace{\frac{2}{y+1}-1} \qquad /\square^2$$

ezért, ez $\geq 0$

$$\frac{2}{y+1} \geq 1$$

$$2 \geq y+1$$

$$y \leq 1$$

$$f^{-1}(y) \leftarrow x = \left(\frac{2}{y+1}-1\right)^2$$

25 (ős)Kép, É.K., Inverzfv. II.

13 December 2020 13:13

3a) $f(x) = x^2-6x+5 \quad (x\in\mathbb{R})$

$\boxed{R_f = ? \quad R_F \text{ számolás}}$

$$R_f = \{ y\in\mathbb{R} : \exists x\in\mathbb{R} : \underbrace{y = x^2-6x+5}_{\text{megoldhatónak kell lennie}} \}$$

$$0 = x^2-6x+5-y$$

$$D = \underline{b^2-4ac \geq 0}$$

$$(-6)^2 - 4(5-y) \geq 0$$

$$36-20+4y \geq 0$$

$$\underline{y \geq -4} \quad : \quad R_f = [-4, \infty)$$

$$(x-3)^2-4$$

---

$f(x) \to x^2-6x+5 \qquad x \in [-1, 6]$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16+4y}}{2} =$$

$$\frac{6\pm\sqrt{4(4+y)}}{2} = 3\pm\sqrt{4+y}$$

$y \geq -4$

$$-1 \leq 3\pm\sqrt{4+y} \leq 6$$

(+)

$$-4 \leq \underbrace{\sqrt{4+y}}_{\text{poz}} \leq 3$$

$$0 \leq \sqrt{4+y} \leq 3 \quad /\square^2$$

(−)

$$-4 \leq -\sqrt{4+y} \leq 3 \quad / \cdot -1$$

$$4 \geq \underbrace{\sqrt{4+y}}_{\text{poz}} \geq -3$$

$$\geq 0$$

$$\overbrace{0 \le \sqrt{4+y}}^{poz} \le 3 \quad /\square^2$$

$$\boxed{-4 \le} \; y \le 5$$

vagy

$$4 \ge \underbrace{\sqrt{4+y}}_{poz} \ge -3$$
$$\ge 0$$
$$16 \ge 4+y \ge 0$$
$$12 \ge y \ge -4$$

$$R_f \in [-4, 12]$$

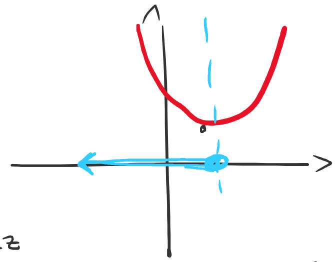
---

8b) $f(x) = x^2 - 2x + 2 \qquad x \in (-\infty, 1]$

invertálható-e.

$(x-1)^2+1$

ezen az intervallumon szig. mon. csökken.



1. $x \neq t \Rightarrow f(x) \neq f(t)$

$$x^2 - 2x + 2 - (t^2 - 2t + 2)$$
$$x^2 - t^2 - 2x + 2t =$$
$$= (x-t)(x+t) - 2(x-t) =$$
$$\underbrace{(x-t)}_{\neq 0}\underbrace{(x+t-2)}_{\downarrow} = \qquad (x \neq t)$$

$x, t$ értéke max $1+1$

2. $f(x) = f(t)$

$$x^2 - 2x + 2 = t^2 - 2t + 2$$
$$x^2 - t^2 = 2(x-t)$$
$$\cancel{(x-t)}(x+t) = 2\cancel{(x-t)}$$
$$\underline{x+t} = 2 \qquad x, y \text{ max } 1, 1$$

1/2 → injektív : invertálható

$R_f$ = $y = x^2 - 2x + 2$ , megoldható

$R_f = \quad y = x^2 - 2x + 2$ megoldható

$\quad\quad 1 \quad -2 \quad (2-y)$

$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (2-y) \geq 0$

$1 - 8 - 4y \geq 0$

$-7 \geq 4y$

$-\frac{4}{7} \geq y$

???.

$\boxed{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

$4 - 8 + y \rightarrow \cancel{4}_2(y-1)$

$\frac{+2 \pm \sqrt{4 - (4 \cdot (2-y))}}{2}$

$1 \pm \frac{\sqrt{\cancel{4}(y-1)}}{\cancel{2}} \rightarrow \frac{2\sqrt{y-1}}{2}$

$I: \boxed{y \geq 1}$

$1 + \sqrt{y-1} \leq 1$ | $1 - \sqrt{y-1} \leq 1$

$\sqrt{y-1} \leq 0 \quad \boxed{y \geq 1}$ | $0 \leq \sqrt{y-1}$

$\downarrow$

$\boxed{y \leq 1}$ és $\boxed{y \geq 1}$ és $\boxed{1 \leq y}$

vagy

$\boxed{R_f : y \geq 1}$

$y = x^2 - 2x + 2 \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{y-1}$

$y = (x-1)^2 + 1$

$(x-1)^2 = y - 1 \quad /\sqrt{\ }$

$x - 1 = \sqrt{y-1}$

$x = \sqrt{y-1} + 1$

$x = 1 - \sqrt{y-1}$

$y \geq 1$

$$\boxed{\begin{matrix} D_f = R_{f^{-1}} \\ R_f = D_{f^{-1}} \end{matrix}} \begin{matrix} = (-\infty, 1] \\ = [1, \infty) \end{matrix}$$

---

$f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$ $\qquad x \in (1, \infty)$

invertálható : tfh. $f(x) = f(t)$

$$\frac{3x+2}{x-1} = \frac{3t+2}{t-1} \qquad / \cdots$$

$$(3x+2)(t-1) = (3t+2)(x-1)$$

$$3xt + 2t - 3x = 3xt - 3t + 2x$$

$$5t = 5x$$

$$t = x \qquad \checkmark \qquad \text{invertálható}$$

Értékkészlet

$$R_f = \left\{ y \in \mathbb{R} : \exists x \in (1, \infty) : y = \frac{3x+2}{x-1} \right\}$$

$$y(x-1) = 3x+2$$

$$yx - y = 3x + 2$$

$$\cancel{3x - xy + y + 2 = 0}$$

$$\cancel{(x \quad)(-y+3 \quad ?}$$

$$yx - 3x = y + 2$$

$$x(y-3) = y+2$$

$$\boxed{x = \frac{y+2}{y-3}} \qquad \begin{matrix} x \to (1, \infty) \\ y \neq 3 \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$y+2 \quad 1$$

$0$

$$\frac{y+2}{y-3} > 1$$

$y+2 > y-3$

$\boxed{y > 3}$

~~jól kell~~ ~~BONTANI~~

$$\boxed{f^{-1} = \frac{y+2}{y-3} \; ; \text{ ha } \; y > 3}$$

# 26. Korlátosság, Szélsőérték

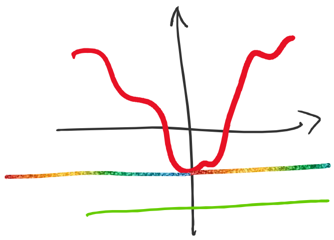
13 December 2020 10:40

**Def:** Korlátosság

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (valós - valós fv.-ről beszélünk csak)

- alulról korlátos, ha
  $\to \exists k \in \mathbb{R} : f(x) \geq k \quad \forall x \in D_f$

- felülről korlátos
  $\to \exists K \in \mathbb{R} : f(x) \leq K \quad \forall x \in D_f$




korlátos, ha alulról és felülről is korlátos

---

Szélsőérték számolás

$\to$ másodfokú fvt.

---

(12a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 + x^4 + 7}{x^3 + x^2 + 1}$ ; határértéke $+\infty$

$\left.\begin{matrix} \text{NRA} \\ \hline \text{NRF} \end{matrix}\right\}$ lesz az alsó

$\forall P > 0 \quad \exists k \in \quad x > k : f(x) > P$

---

$$\frac{x^4 - 2x^3}{3x^3} = \frac{1}{2}x^4 + \underbrace{\frac{1}{2}x^4 - 2x^3}_{+ x^3\left(\frac{1}{2}x - 2\right)} \Leftarrow x > 4$$

$$\frac{\frac{1}{2}x^4}{3x^3} \qquad \boxed{\frac{1}{6}x}$$

pozitív konstansfüggvény végtelenbe tart.

(2) $\frac{1}{6}x > P \; : \; x > 6P \; : \; k = \max\{4, 6P\}$

(2) $\frac{1}{6}x > P \quad : \quad x > 6P \quad : \quad k = \max\{4, 6P\}$

(12c) minusz e

$$\lim_{x \to \infty} = \frac{x^3 + x^2 - 2x - 3}{9 - 4x^2} = -\infty$$

visszavezetjük az alapesetre

$$-\frac{x^3 + x^2 - 2x - 3}{9 - 4x^2}$$

$\frac{NRA}{NRF}$

$$\frac{x^3 - 5x}{-4x^2} \rightarrow \frac{\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^3 - 5x}{} \qquad \frac{\frac{1}{2}x^3 + x\left(\frac{1}{2}x^2 - 5\right)}{4x^2}$$

$x^2 > 10$
pl.
$x > 4$

korlát pl. 4

$$\frac{\frac{1}{2}x^3}{4x^2} = \frac{1}{8}x$$

$\frac{1}{8}x > -P \qquad x > -8P \rightarrow \boxed{k = \max\{4, -8P\}}$

itt először    innen mindig

(12b) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 3}{x^3 + 2x - 5} \rightarrow \frac{NRA}{NRF}$

$\lim_{x \to a} = 2$