NUMERIKUS MÓDSZEREK

C-Szakirány

Jegyzet

Tartalom

TÉMAKÖRÖK
- gépi számok
- GE és LU
- mátrixok
- polinominterpoláció
- numerikus módszerek

Bevezetés ①

Mérési hiba – A mérőműszer pontossága

Számítási hiba – Algoritmus hiba (Σ, zaj)

Inputhiba – gépi aritmetikából adódó (pl. 0,001 reprezentáció)

Műveleti hiba – számításból adódó (pl: 1/3)

Sin(π) ← nem pontos, mert hatványsorral közelítjük. De ez határértéktől távol lehet

Végtelen sort véges sorral közelítünk

$\sum_{k}$ lim → +∞

Ha két szám, ami hasonló méretű, akkor a különbségük kisebb lesz kivonási jegyveszteség.

két pontos eredmény kivonása pontatlan tud lenni

$\sqrt{2017} - \sqrt{2016} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2017} + \sqrt{2016}}$ pontosabb sokkal!

átalakít

$a = 10^{-20}$ $b = 1$ $(a+b)-b = 0$ $a+(b-b) = a$

Számítógépen nem csak a 0 nullelem.

Stabilitás

bemeneten kis Δ ⇒ kimeneten is Δ (kis változás lesz)

ugyanaz a művelet lehet átrendezéstől függően stabil. (előre vs hátra rekurzió vs explicit képlet)

Stabil, ha $\exists C > 0$ const, hogy B_1 B_2 bemenő adatból kapott k_1 k_2 kimenő adatokra:

$$\|k_1 - k_2\| \leq C \cdot \|B_1 - B_2\|$$

Numerikus Algoritmus
Aritmetikai és logikai műveletek
véges hosszú sorozata

pl: fibonacci instabil, ha rekurzió

Gépi Számok

1.

Fixpontos ctor(egész, tört)

egész . tört

rögzített.

könnyű összeszedni
minden két szám között
azonos távolság

Lebegőpontos
ctor(

egész + tört

lebegő pont

változik a távolság köztük

$$\pm 0,\underbrace{1\ldots\ldots}_{t \text{ jegy}} \cdot 2^k$$

normalizált szám 0-1 közé,
mantisszát addig szorozzuk,
ahogy leosztottuk.

$\pm 0,1010\ldots 2^k \longrightarrow$ karakterisztika $\cdot 2^{\bullet}$
$(k^- \leq k \leq k^+)$

ez mindig 1. Azért,
hogy egyértelmű legyen
a felírás.

Normalizált lebegőpontos szám

$$m = \sum_{i=1}^{t} m_i \cdot 2^{-i} \qquad t \in \mathbb{N} \quad m_1 = 1, \quad m_i \in \{0,1\}$$

$$m_i = m[i] \qquad m \in \{0,1\}^*$$

$$\underbrace{\boxed{}}_{\text{hány számjegy}} \cdot 2^k$$

mantissza → hossza t

$M' = (\underbrace{t}_{\text{mantissza jegyeinek száma}}, \underbrace{k^-, k^+}_{\text{karakterisztika}})$ $\qquad \pm[m_1 \ldots m_t | k]$

$M = M \cup \{0\}$ Az alap adatban nincs benne a 0, mert mantissza 1-el kezdődik. 80 ptr.

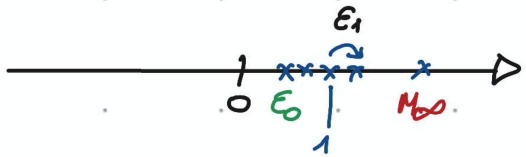
1. $1/2 \leq m < 1$ közé esnek a számok
2. Szimmetrikus 0-ra!
3. ε_0 — legkisebb elem

$$\varepsilon_0 = [10\ldots0 \mid k^-] = \frac{1}{2} \cdot k^- = \boxed{2^{k^- - 1} \quad \varepsilon_0}$$

4. M_∞ — legnagyobb szám

$$M_\infty = [11\ldots0 \mid k^+] = \boxed{(1-2^{-t}) \cdot 2^{k^+} \quad M_\infty}$$

Az a trükk, hogy
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{\ldots}$ kivéve
az utolsó, kerekebb
$\left(\frac{1}{2}\right)^t$ -el.



5. ε_1 — távolság.
1 és 1 feletti szomszédjának a távolsága

$$\varepsilon_1 = [100\ldots01 \mid 1] - [10\ldots0 \mid 1] =$$
$$2^{-t} \cdot 2^1 = \boxed{2^{1-t} \quad \varepsilon_1}$$

6. M elemeinek száma $\qquad$ 80 ptr

$$|M| = \underbrace{2}_{\pm} \cdot \underbrace{2^{t-1}}_{\text{első jegy fix. többinél 0 v 1. tdb.}} \cdot (\underbrace{k^+ + k^-}_{\text{itt bármi lehet } [k^-, k^+] \text{ között ennyi szám}} + 1) + 1$$

pl $M(3,-1,2)$ $\quad \pm 0,1\underbrace{\_\,\_}_{\text{kettőt választunk.}} \cdot 2^k \quad (-1 \le k \le 2)$

$\varepsilon_0 = 0,25$
$\varepsilon_1 = 0,25$
$M_\infty = 3,5 \qquad |M| = 33$

Input függvény $\quad f$: Valós → Gépi számok $\quad \boxed{fl}$ FLOAT

$fl: \mathbb{R}_M \to M$ input fv:

$$fl(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |x| < \varepsilon_0 \\ \tilde{x} & \text{ha } \varepsilon_0 \le |x| \le M_\infty \end{cases}$$

Ha nagyobb, akkor implementáció függő. M_∞ v INF

$\tilde{x} :=$ x-hez legközelebbi gépi szám

Inputhiba

$$|x - fl(x)| \le \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{ha } |x| < \varepsilon_0 \\ \frac{1}{2}|x| \cdot \varepsilon_1 & \text{ha } \varepsilon_0 \le |x| \le M_\infty \end{cases}$$

Ha $\varepsilon_0 \le |x| \le M_\infty$

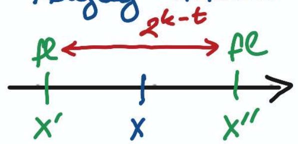
$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \le \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_1}_{\text{inputhiba becslés relatív}} = 2^{-t}$$

Viszonyszám: Hogyan viszonyul az eredeti szám nagyságrendjéhez
Mihez viszonyítva pici?
pl: szám 0,1
hiba 0,1 =>
nagyon rossz!

Biz: Inputhiba képlete
Több eset lehetséges
→ $|x| < \varepsilon_0 \Rightarrow fl(x) = 0$.
ekkor: $|x - fl(x)| = |x|$ és $|x| < \varepsilon_0$
Ez egy triviális eset

→ $|x| \ge \varepsilon_0$ és $x \in M$
ekkor: $fl(x) = x$, $|x - fl(x)| = 0$
Eleve gépi számot akarunk átváltani. Ugyanakkor 80 pt az átváltás

→ Tényleg érdekes eset ahol konvertálni kell



x' és x'' két szomszédos fl. szám
$x' \equiv [1\_ \dots \_|k]$. x-hez tartozó karakterisztika

mennyi x' és x'' távolsága?
$x'' - x' = 2^{-t} \cdot 2^k = \underline{\underline{2^{k-t}}}$
x'-höz "1"-et adunk csak.
utolsó bit helye $\quad$ A szám karakterisztikája

Ez a maximális hiba 2x-szerese!
Hiszen két szám közti
$\Downarrow$
$$\boxed{\frac{1}{2} \cdot 2^k \cdot 2^{-t}}$$

Be kell hozni $|x|$-et.
Azt úgy lehet, hogy azt alsó szomszéddal alul lehet becsülni:

$\boxed{2^k \le |x|}$ mert ezaz a szám ami $[100..0|k]$.

ekkor: $|x| \cdot 2^{-t} = \frac{1}{2} \cdot |x| \cdot \underbrace{2^{1-t}}_{\varepsilon_1 \text{ értéke}} = \boxed{\frac{1}{2} \cdot |x| \cdot \varepsilon_1}$

QED

Hibaszámítás

2

(A) pontos érték ⇒ ezt gyakran nem tudjuk

(a) közelítő érték

Abszolút hiba

Mennyiben térünk el a pontos értéktől

$\Delta a := A - a$ pontos hiba

Abszolút hiba

$|\Delta a| := |A - a|$

Abszolút hibakorlát.

$\underbrace{\Delta_a}$ $\geq |\Delta a|$

bármilyen szám, ami felülről becsüli a hibát

Relatív hiba

Nagyságrendileg mekkora a hiba amit vétettünk. Arányítjuk a hibát a szám nagyságához.

$$\delta a := \underbrace{\frac{\Delta a}{A}} \approx \boxed{\frac{\Delta a}{a}}$$

ez egy jó definíció, de a gyakorlatban nem igazán hasznos.

Relatív hibakorlát

$\delta_a \geq |\delta a|$

PR π-re: $\approx 3{,}14$

Jó absz hibakorlát?

→ 0,15 absz hibakorlát ✓ jó

→ absz hiba 0,00159 a pontos

→ 0,002 a.h.k. ✓ jó

→ 0,001 a.h.k. — nem jó!

Alapműveletek hibakorlátai

	ABSZOLÚT		RELATÍV
$\pm$	$\Delta_a + \Delta_b$	csak a kivonás	$\dfrac{\lvert a\rvert\cdot\delta_a + \lvert b\rvert\cdot\delta_b}{\lvert a\pm b\rvert}$
$\times$	$\lvert b\rvert\cdot\Delta_a + \lvert a\rvert\cdot\Delta_b$	veszélyes a műveletre nézve. (ha nem azonos nagyságrendű az előtte és utána lévő hiba.)	$\delta_a + \delta_b$
$/$	$\dfrac{\lvert b\rvert\cdot\Delta_a + \lvert a\rvert\cdot\Delta_b}{b^2}$		$\delta_a + \delta_b$

Két esetben nem teljesül a stabilitás!

$\Delta_{a/b}$ esetén: kicsi számmal osztunk

$\delta_{a\pm b}$ esetén: közeli számokat vonunk ki egymásból

Biz $\pm$ Absz. hiba!

$$\Delta(a\pm b) = (A\pm B) - (a\pm b) = (A-a) \pm (B-b) = \Delta a \pm \Delta b$$

ez nem hibakorlát. Ehhez absz. érték és becslés kell.

$$|\Delta(a\pm b)| = |\Delta a \pm \Delta b| \leq |\Delta a| + |\Delta b| \leq \Delta_a + \Delta_b = \Delta_{a\pm b}$$

háromszög egyenlőtlenség becslés! — ez egy korlát ami mindig nagyobb

$\pm$ Rel. hiba

$$\frac{\Delta(a\pm b)}{a\pm b} = \frac{\Delta a \pm \Delta b}{a \pm b} = \frac{a\cdot\delta a \pm b\cdot\delta b}{a\pm b}$$

felszorzok, leosztok „a"-val. $\boxed{\frac{\Delta a}{a} = \delta a}$ → hibakorláthoz mindkét oldal abszolútértékét vesszük.

$$\frac{|a\cdot\delta a \pm b\cdot\delta b|}{|a\pm b|} \leq \frac{|a|\cdot|\delta a| + |b|\cdot|\delta b|}{|a\pm b|} = \delta_{a\pm b}$$

számlálóban 3szög egyenlőtlenség

$|\delta a| \leq \delta_a$ mert az egy hibakorlát

Szorzás hibája

$$\Delta(a\cdot b) = AB - ab = A(B-b) + b(A-a) = A\cdot\Delta b + b\cdot\Delta a =$$
$$= (a+\Delta a)\Delta b + b\cdot\Delta a \approx a\cdot\Delta b + b\cdot\Delta a$$

$\Delta a\cdot\Delta b$ az elhanyagolható, nem kell vele foglalkozni

$$\delta(a\cdot b) = \frac{\Delta(a\cdot b)}{a\cdot b} \approx \frac{a\cdot\Delta b + b\cdot\Delta a}{a\cdot b} = \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a} = \delta b + \delta a$$

Osztás hibája

$\Delta b\cdot b$ elhanyagolható ↗ mert csak „segítene" bizonyos esetekben. De max válik a hibakorlátot

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{A}{B} - \frac{a}{b} = \frac{Ab - aB}{Bb}$$

$Ab - ab - aB + ab$ hozzáadunk és levonunk $a\cdot b$-t →

$$\frac{b\cdot(A-a) - a\cdot(B-b)}{(b+\Delta b)\cdot b} \approx \frac{b\cdot\Delta a - a\cdot\Delta b}{b^2}$$

$Bb \longrightarrow (b+\Delta b)\cdot b$

Függvényérték abszolút hibája

egyszer folytonosan differenciálható · valamilyen környezetében

Ha $f \in C^1(k_{\Delta_a}(a))$ és $k_{\Delta a} = [a - \Delta_a ; a + \Delta_a]$

akkor $\Delta f(a) = M_1 \cdot \Delta_a$ → ez egy hibabecslés

ahol $M_1 = \max\{|f'(\xi)| : \xi \in k_{\Delta_a}(a)\}$

↳ lehető legnagyobb derivált maximuma. Ezért kell a C^1 feltétel

Bemenő adatok $\boxed{M_1}$ - szeresére változik

pl: $\exp'$ $e^x \xrightarrow{\text{derive}} e^x$ Ezért nagy a hiba

$\log x'$ $\log x \to \frac{1}{x}$ Ezért stabilabb

Biz Fvérték hibája

Lagrange középérték $\Delta f(a) = f'(\xi) \cdot \Delta a$

$f(A) - f(a) = f'(\xi) \cdot (A - a)$

Valamilyen $\xi \in k_{\Delta a}$ értékre

innen kell legnagyobb becslést venni.

$|\Delta f(a)| = |f'(\xi)| \cdot |\Delta a| \overset{?}{\leq} M_1 \cdot \Delta a$

Fvérték relatív hibája

Ha $f \in C^2(k_{\Delta_a}(a))$ és $k_{\Delta a} = [a - \Delta_a ; a + \Delta_a]$

↳ kétszer kell deriválhatónak lennie

$$\Delta f(a) = |f'(a)| \cdot \Delta_a + \frac{M_2}{2} \cdot \Delta_a^2$$

ahol $M_2 = \max\{|f''(\xi)| : \xi \in k_{\Delta_a}(a)\}$

↳ második derivált abszolút maximuma

Biz Fvérték Rel. hibája

Taylor-Formula

$$\Delta f(a) \underset{def}{=} f(A) - f(a) = f'(a) \cdot (A - a) + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2} \cdot (A - a)^2}$$

↳ Taylor formula 2, 3. tagja. A 3. tag Lagrange-féle maradéktag "a" körüli T-D, A-t helyettesítjük be!

Ezután felső becslés kell.

$f''(\xi)$ → felülről becsülhető M_2-vel.

$|\Delta a|$ → f. becs. Δa

következmény Ha Δa kicsi: Ezt onnan kapjuk, hogy $\frac{\Delta f(a)}{f(a)}$ a δ. leosztjuk az Absz hibát. illetve

$$\boxed{\delta_{f(a)} = \frac{|a| \cdot |f'(a)|}{|f(a)|} \cdot \delta_a}$$

$$\left.|f'(a)| \cdot \Delta a + \underline{\frac{M_2}{2} \cdot \Delta_a^2}\right\} \to$$ ez kicsi ezért elhagyhatjuk ezt a tagot. Hiba nagyságrendjét Δa adja

Ez a szám f **kondíciószáma**

def fn $c(f, a) = \frac{|a| \cdot |f'(a)|}{|f(a)|} \cdot \delta_a$

Függ az "a" ponttól → lokális szám

LER-ek alkalmazása 2ü

LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \quad + \dots a_{nn}x_n = b_n \end{matrix}\right\} Ax = b$$

$\boxed{a_{\text{SOR, OSZLOP}}}$

LER megoldható = b felírható "A" lineáris kombinációja szerint.

$\exists!$ megoldás
"A" oszlopai lin. függetlenek
rang(A) = n
det(A) ≠ 0
A invertálható
$x = A^{-1}b$

ekvivalens állítások

Ötlet: megoldás előtt hozzuk egyszerűbb alakra diagonális v. felső Δmx

papíron pontosak. Végessok lépés után nem pontosíthatóak

Mx megoldók
- Direkt módszerek
  - Gauss-elimináció
  - Progonka-módszer
  - LU-felbontás
- Iterációs módszerek
- Variációs módszerek

Gauss – Elimináció /GE/

$a_{i\,n+1} := b_i$ azaz [A|b] tárolási forma

$$A^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Cél: LER-t egyszerűsíteni

① b→j főátló alatt kinullázzuk az elemeket

② j→b főátló fölött

Kérdés mindig: aktuális sor hányszorosát kell levonni, hogy $a_{i1}^{(0)}$ kinullázódjon

első lépés $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \cdot a_{1j}^{(0)}$ $i = 2..n$, $j = 2..n+1$

általános lépés $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot a_{kj}^{(k-1)}$ k. lépésben $1..n-1$, $i = k+1..n$, $j = k+1..n+1$

$\left(\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right)$-szorosát a k-adik egyenletből, hogy $a_{ik}^{(k-1)}$ nulla legyen

Azért k+1-től megy, mert abban a lépésben már az attól balra lévő elemek már 0-k

Minden lépésben k. oszlopban az átló alatti elemeket kinullázzuk.

n-1 lépésben az mx már:

$$A^{(n-1)} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & \dots & & a_{1n}^{(0)} & a_{1\,n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & a_{n\,n+1}^{(n-1)} \end{array}\right] \rightarrow$$

utolsó sorból kijön az $a_{nn} x_n = a_{n\,n+1}$ osztással! x_n

$$x_n = \frac{a_{n\,n+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \qquad x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}}\left(a_{i\,n+1}^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} \cdot x_j\right)$$

Levonjuk x_j-t, ami a visszahelyettesítés során kiszámolt koordinátákat a jobboldalból.

Visszahelyettesítés

Ezután visszafele haladunk. Végül [I|x] alakkal kijön az eredmény.

GE-Alkalmazása ③

$\det(A) = \det(\triangledown \text{ alak}) = \prod_{k=1} a_{kk}^{(k-1)}$

felsőháromszög alakban

[A|b_1|b_2..] ↓ GE, visszahely ↓ [I|x_1|x_2..]

→ ↕ csere esetén det $(-1)x$-re változik

→ Illetve több jobboldallal meg lehet csinálni

→ mx inverzének megállapítása

[A|I] → GE, visszahely [I|A^{-1}]

sorcsere esetén inverz nem változik, oszlopcseréinél igen

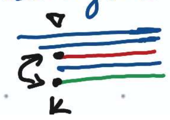
Megoldható LER ⟵ szimpla GE elvégzi

Előfordulhat, hogy átló beli elem értéke 0, akkor elakad

Főelemkiválasztás /Biztos & Stabil/

Def Részleges főelemkiválasztás

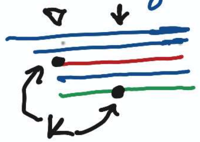
k-adik lépésben [m] indexet választunk, melyre a $|a_{mk}^{(k-1)}|$ maximális, $m \in \{k..n\}$. Cseréljük ki k & m sort egymással. $O(n)$ összehasonlítás



Def Teljes Főelemkiválasztás $O(n^2)$

k. lépésben $[m_1, m_2]$ indexpárt választunk, melyre $|a^{(k-1)}_{m_1 m_2}|$ maximális. $m_1, m_2 \in \{k..n\}$.

$k \leftrightarrow m_1$ sor, $k \leftrightarrow m_2$ oszlop.



Q: Miért csináljuk
→ GE ne akadjon el.
→ mivel pivotelemmel osztunk.
Osztásnál vagy nevezővel akarunk osztani, hogy jobb legyen

Tétel GE elvégezhető sor, oszlopcsere nélkül

$$\Updownarrow$$

$$a^{(k-1)}_{kk} \neq 0 \quad (k = 1..n-1)$$

Főminor

$$D_k = \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}\right)$$

$k = 1..n$

Bal felső sarokdeterminánsok.

Tétel $D_k \neq 0$ $(k = 1..n-1)$

$$\Updownarrow$$

$$a^{(k-1)}_{kk} \neq 0$$

Ez nem jelenti, hogy van LER-nek megoldása!

! n. sarok-al - determináns lehet 0

Biz GE átalakításai det tartóak.

Determináns számításakor vigyázni kell

GE Műveletigénye

$$\boxed{\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)}$$

⊘ $(n-k)$
⊗ $(n-k)(n-k+1)$
⊖ $(n-k)(n-k+1)$

Biz GE Műveletigény

összesen $(n-k)(2[n-k]+3)$ $\quad s := n-k \rightarrow$ Ez a "k." lépés műveletigénye csak

$$\sum_{s=1}^{n-1} s(2s+3) = 2\sum_{s=1}^{n-1} s^2 + 3\sum_{s=1}^{n-1} s = \frac{2(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{3(n-1)n}{2} =$$

számok összege 1..n-ig

$$= \frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$$

Def $f(n)$ fv. $O(n^2)$ nagyságrendű, ha $\frac{f(n)}{n^2}$ korlátos minden $n \in \mathbb{N}$-re!

Visszahelyettesítés műveletigénye

$$\boxed{n^2 + O(n)} \qquad x_n = \frac{a^{(n-1)}_{n\,n+1}}{a^{(n-1)}_{nn}}$$

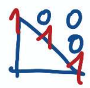
i. sorra
⊘ 1
⊗ $n-i$
⊖ $n-i$
} $2(n-i)+1$ művelet

$$1 + \sum_{s}^{n-1}(2s+1) = 1 + 2\frac{n(n-1)}{2} + (n-1) = n^2 + O(n)$$

Alsó △ MX-és GE

Ötlet: tároljuk el a GE egy lépését az eredeti mx-ban!

$$\begin{bmatrix} x & \\ x & x \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} & ? & \end{bmatrix}$$

Pont a kinullázott helyre be lehet írni!

Mi van akkor, ha több jobboldalra akarjuk Ax-et kiszámolni.
Ha $b_1 \dots b_n$-t ismerjük, az jó, mert a GE közben megtudjuk oldani.
De! Ha mérési eredmény, akkor újra kéne GE-t számolni

L_k mátrix

Átlójában 1-esek. 1 oszlopban átló alatt értékek, máshol 0.

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & -l_{k+1k} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & -l_{nk} & & & 1 \end{bmatrix} = I - l_k e_k^T \qquad l_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ l_{k+1k} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

identitás mx

egységmx ??

$L_k \cdot A^{(k-1)} = A^{(k)}$ Ezzel megkapjuk a GE másik alakját

$\underbrace{L_2 \cdot L_1}_{L \text{ mx}} \cdot A =: U \rightarrow$ kapott felsőháromszögmátrix

$A = \underbrace{L_1^{-1}\cdot L_2^{-1}\cdots}_{L}\, U = L\cdot U$ Ez a mx LU felbontás!

könnyen invertálható

Alsó 3szög mx — L, $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — Felső 3szög MX

$\mathcal{L}$ ha $i<j$ $i>j$ $\mathcal{U}$

$\mathcal{L}_1$ $\mathcal{U}_1$

Az átlóban csupa 1-esek vannak

Fölső △ való szorzás nem vezet ki a ▽ halmazából. △-ra is igaz.
▽ inverze is ▽ (ha létezik)
1_1▽ inverze is 1_1▽ } △-ra is igaz

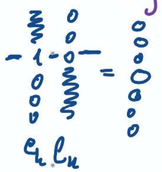
L_k inverze átlók alatti elemek előjelét meg kell cserélni

Biz

$\boxed{L_k^{-1} := I + l_k e_k^T}$ $L_k \cdot L_k^{-1}$. Ha ez az inverz, akkor $= I$.

$(I - l_k e_k^T)(I + l_k e_k^T) = I - \underbrace{l_k e_k^T + l_k e_k^T}_{0} - \underbrace{l_k e_k^T l_k}_{0} e_k^T = I$

Ez egy skalár szorzat. l_k vektor $l_k \times e_k^T$. e_k-ban a k. elem nem 0. l_k pedig minden 0 k-ig utána más



A skalárszorzat rész emiatt nulla lesz, tehát egyszerűbb a bizonyítás

Hogyan szorzunk $L_1 L_2$-t össze?

L_k mx-ek szorzata

A tagok összegei!

$L_1^{-1}\cdot L_2^{-2}\cdots =$

Bemásoljuk egymásba.

Biz: indukcióval.

$L_1^{-1}\cdot L_2^{-1} = I + l_1 e_1^T + l_2 e_2^T$

3/ii   IV

LU – Felbontás

szorzat felbontás

→ Átlójában 1-esek vannak

$A = LU$ $L \in \mathcal{L}_1$ $U \in \mathcal{U}$

bal alsó → felső △-szög mx

U mx: teljes GE után hátramaradt rész

L-ből nem vezet ki a szorzás és invertálás

$L_{n-1} \cdots L_1 A = U$ balról szorozzuk

Majd fordított sorrendben L_k mx inverze

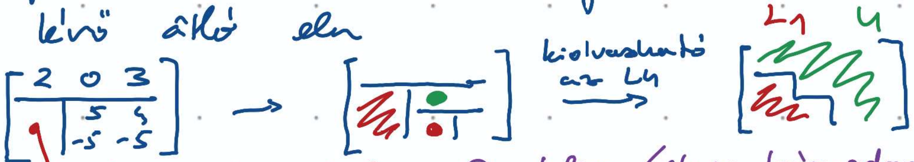
$A = \underbrace{L_1^{-1}\cdot L_2^{-1}\cdots}_{L}\, U = LU$

L → ezt nem explicit mx műveletekkel kell elvégezni! Sokkal kényelmesebb

Tömör írásmód $\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix} \xrightarrow{GE} \begin{bmatrix}1&2&3\\5&5&6\\9&8&9\end{bmatrix} \xrightarrow{GE} \ldots$ pivotelem

Fölösleges 0-k helyett L_k-t tárol. → beírjuk LK-t

pivotelem: GE aktuális k-jában lévő átló elem



→ L_k mx inverzének elemei.

Pivotelem / elem hányadosa kerül bele.

LU-Felbontás létezése

GE létezik (sorcsere / oszlop nélkül) $\iff$ $\exists$ LU-felbontás

Vagyis pivotelem sosem 0.

Det = 0 → ∞ sok LU
→ 0 db LU felbontás

→ főminorok
→ nulla is lehet

$\exists LU \iff k = 1..n-1$: átló eleme nem nulla.

! $k = n$-ben lehet nulla!

! Ez nem az eredményre vonatkozik

Biz Ha $\det(A) \neq 0$ és $\exists LU$ akkor egyértelmű L, U
$L_1 U_1$ vs $L_2 U_2$ ugyanannak kell lennie.
determináns segítségével bizonyítjuk.
$U_1 \cdot U_2^{-1} = I \Rightarrow U_1 = U_2$ bizonyítván.

$L \in \mathcal{L}_1$ $\quad U \in \mathcal{U}$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}} \quad i > j$$

$$u_{ij} = a_{ij}^{(i-1)} \quad i \leq j$$

Tfh.: $Ax = b$ LER megoldható
megvan a $A = LU$ felbontás

$Ax = L\underbrace{Ux}_{y} = b$ helyett

→ feladat, mátrixi eredmény

- $Ly = b$ → alsó 3Δ mx —— $n^2 + O(n)$
- $Ux = y$ → felső 3Δ mx —— $n^2 + O(n)$
  ↳ visszahelyettesítés

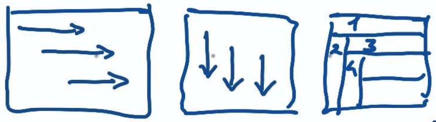
Ez sokkal majdnem annyi mint $2n^2 + O(n)$, mx vektor szorzás. Tehát nagyon jó

Ez sokkal jobb, mint GE $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$
Persze a LU-hoz kell GE.
De egy több jobboldali vektorhoz már jobb a LU
ha mérésből származik

Megjegyzem a GE lépéseit és azokat alkalmazom

4

Elrendezések / LU kiszámolása



sor folytonos $\quad$ oszlop folytonos $\quad$ parketta-elrendezés

LU közvetlenül

első sor megegyezik az eredeti mx-el ←

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

↳ eredeti mx lesz a szorzatban

LU-műveletigény:
$\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$

visszahelyettesítés
$n^2 + O(n)$

$A = LU$ mx előállítása. Sorfolytonosan!
1) l_{21} ... u_{22} ... u_{23} sor! ismeretlen meghatároz
1a) $l_{21} \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -4 \Rightarrow l_{21} = -2$
b) $l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} = 5 \Rightarrow u_{22} = 5$
c) ⋮ ↘ szépen sorban kiszámolhatóak az ismeretlenek $\quad u_{23} = 4$
⋮
2a) ⋮

→ előjelet ellentmondásos egyenlet
↳ ilyenkor GE-ben még sorcserével lehet segíteni rajta

→ azonosság is előjelet → bármilyen szám jöhet.

LU felbontás közvetlen kiszámolása

Megteremtettük a GE ⟺ LU felbontásra.
Explicit képletek → jó sorrendben számolva

$$i \leq j \quad u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

$$i > j \quad l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right)$$

Biz Explicit képlet

i-dik SOR j-dik oszlop $\quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}\cdot u_{kj}$ → standard mx szorzás

kettévesszük a szorzást △ & ▽

n helyett elég i-ig elmenni $\quad \sum_{k=1}^{i} l_{ik}\cdot u_{kj}$

kivesszük az utolsó elemet (k=i) $\quad u_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\cdot u_{kj}$

↳ ezt akarjuk

explicit: $u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\cdot u_{kj} \Leftarrow$

L mx esetén ue. a trükk amit csinálunk

Műveletigény LE

ekvivalens a GE-vel! [nincs levezetve]

U mx előállítása = GE

L mx az nem plusz igény, csak előjelet kell váltani, ami a GE része. Plusz elemeket nem kell kiszámolni

$$\boxed{\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)}$$

$Ux=y$ / $Ly=b$ $\quad$ rögzített i sorra $\quad (i-1)\ \otimes$, $(i-1)\ \oplus$

összesen: $2\frac{n(n-1)}{2}$

$$\boxed{n^2 + O(n)}$$

Megmaradási Tételek

4ii

GE egyes tulajdonságait a mx-ok megtartja

– A szimmetrikus, ha $A = A^T$

– Pozitív definit

Szimmetrián felül igaz az, hogy

- $\langle Ax, x\rangle = x^TAx > 0 : \forall\, 0\neq x\in\mathbb{R}^n$
- minden főminor $D_k = \det(A_k > 0)$
- minden sajátértéke pozitív

} ezek ekvivalensek

– Szigorú diag. dominancia

- átlóban lévő elemek "sokkal" nagyobb

→ minden sorban az átlós elem nagyobb mint a többi abszolút összege

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \leftarrow \text{sor} \qquad |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ij}|$$

oszlop

sorára

ji oszlopai

– félsávszélesség

$\forall i,j : |i-j| > s : a_{ij} = 0$

$\exists k,l : |k-l| = s : a_{kl} \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad 1$$

Főátlótól leszámolunk s db elemet. Azon kívül csak 0 szerepelhet

– profil

$$\begin{array}{c|c} & 0\ \ 0\ \ 2\ \ 1 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

sorprofil $\quad$ oszlopprofil

$\forall j = 1..k_i : a_{ij} = 0$ és $a_{i\,k_i+1} \neq 0$

$\forall i = 1..l_j : a_{ij} = 0$ és $a_{l_j+1,\,j} \neq 0$

Particionálás

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 \end{array}\right]$$

$Ax=b$ LER, k. sorban particionáljuk. $A_{11}\ \exists^{-1}$

A_{11} mx $\in \mathbb{R}^{k\times k}$ invertálható

Schur-komplementer /blokkos GE/

cél: transzformáció, ahol A_{11} null(mátrix elem)
particionálva:

GE általánosított lépése

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} = 0 & A_{22} \end{array}\right]$$

GE 1. lépésében:
van egy általános mx
pivotelem A_{11} 1x1 elem!
⇒ kinullázódik A_{21}. A_{22} változik.
GE $k=1$-re van mindig

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1$$
$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2$$

A második egyenletből levonom az első sor $A_{21}A_{11}^{-1}$ szeresét.

Kiüti egymást a két A_{11}, ebből $A_{21}-A_{21}$ lesz.
≈ 0

$$(2) - (A_{21}\cdot A_{11}^{-1}) \rightsquigarrow (1) \quad \underbrace{(A_{21} - A_{21}\cdot A_{11}^{-1}A_{11})}_{}\cdot x_1$$
$$(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})\, x_2 =$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} - A_{21}\cdot A_{11}^{-1}\cdot A_{12} \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1 \end{array}\right]$$

↳ Schur komplementer — Ez egy blokkosított GE után kapott mx

Schur-komplementer

Az "A" mx A_{11}-re vonatkozó Schur-komplementere:

$$[A|A_{11}] = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \qquad (n-k)\times(n-k) \text{ mátrix}$$

A GE-ről sok tulajdonság öröklődik a Schur komplementere.

Megmaradási feltételek GE ⟺ Schur

$\det(A) \neq 0$	$\Longrightarrow$	$\det([A\|A_{11}]) \neq 0$
A szimmetrikus	$\Longrightarrow$	$[A\|A_{11}]$ szimmetrikus
A pozitív definit	$\Longrightarrow$	A pozitív definit
A szig diag dom (1)	$\Longrightarrow$	A szig diag dom
A felsősávszélessége	$\geq$	$[A\|A_{11}]$ felsősávszélesség

Soronként és oszloponként megmaradnak a 0-k az első nem 0 elemig.

(1) Részleges főelemkiválasztás ⇒ szig diag dom esetben ez az átlóban van, tehát nem kell ilyet csinálni. Szig diag dom mx esetén nem kell részleges főelemkiválasztás.

Biz Det

• GE det tartó, így $\det(A) = \det(A^{(1)}) \neq 0$.

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & [A|A_{11}] \end{array}\right]$$

$\det(A^{(1)}) \neq 0$

$\underbrace{\det(A_{11})}_{\neq 0} \cdot \det([A|A_{11}])$. ⇒ $\neq 0$

következik.

Biz Szimm.

Ha A szimm, akkor A_{11} és A_{22} is az. $A_{21}^T = A_{12}$.

$$[A|A_{11}]^T = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-T}A_{12})^T =$$
$$= A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = [A|A_{11}]$$

Biz Poz Definit

Tudjuk $\langle Ax, x\rangle > 0\ \forall x \neq 0$ (vektor)
kell, hogy $\langle [A|A_{11}]x_2, x_2\rangle$ is $>0\ \forall x\neq 0$-ra!

$$Ax = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ \hline A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \end{array}\right]$$

Az első k komp. legyen 0.

Legyen $x_1 \in \mathbb{R}^k$ vektor:
$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \Longrightarrow x_1 = A_{11}^{-1}A_{12}x_2$
↳ el akarjuk tüntetni A_{11}-et

$0 < \langle Ax, x\rangle$ skalárszorzat behelyettesítés
$$= \underbrace{\langle A_{11}x_1 + A_{12}x_2, x_1\rangle}_{0} + \langle A_{12}x_1 + A_{22}x_2, x_2\rangle$$

0 pont nulla, ha x a kiütő szám.

$$\langle A_{21}(-A_{11}^{-1}A_{12}x_2) + A_{22}x_2, x_2\rangle = \langle [A|A_{11}]x_2, x_2\rangle$$

Biz Szig Diag Dom Be kell látnunk

$$|a_{ii}^{(1)}| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{ij}^{(1)}| \quad i=2..n$$

GE első lépése után kapott elemek

→ Az első oszlopban 0-k vannak, mert a GE-t már elvégezve nézzük

GE általános képlete

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot a_{kj}^{(k-1)}$$

behelyettesít

$$\left| a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i} \right| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left| a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \right|$$

Felszorozzuk $|a_{11}| \neq 0$-val

közelítjük a két oldalt, és belátjuk, hogy az is jó

Megjegyzések:

- $|a_{11}| \neq 0$ → ez egyértelmű, mert anélkül GE sincs
- $|a_{i1}| = 0$ → akkor a soron nem változtat, tehát diag. dom sem változik

---

Megmaradási tételek fontosak.

Tridiagonális → 3 átlóban van nem 0 elem

Progonka Módszer /GE rövidítve/

→ tridiagonális mx-re

tárolás $n^2 \longrightarrow 3n-2$

művelet igény $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2) \rightarrow 8n + O(1)$

GE Sávszélesség megtartása miatt gyors!

i. egyenlet: $a_{ii}^{(i-1)} x_i + a_{i,i+1}^{(i-1)} x_{i+1} = a_{i,n+1}^{(i-1)}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & \\ 0 & \beta_2 & \ddots & \gamma_{n-1} \\ 0 & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

γ mellékátló

α főátló

β mellékátló

$$\boxed{x_i = f_i x_{i+1} + g_i} \quad i=1..n$$

$$x_i = \underbrace{f_1}_{f_1} x_{i+1} + \underbrace{g_i}_{g_1}$$

1\. 1. sor: $\alpha_1 x_1 + \gamma_1 x_2 = b_1$ → kifejezzük x-et: $x_1 = \overbrace{-\frac{\gamma_1}{\alpha_1}} x_2 + \overbrace{\frac{b_1}{\alpha_1}}$ (x_1 kifejezve)

többi sor: ?

↳ középső soroknál: tfh $g_1 .. g_{i-1}$-ig megoldottuk

$$\beta_{i-1} \underbrace{x_{i-1}}_{\text{ezt ismerjük}} + \alpha_i x_i + \gamma_{i+1} x_{i+1} = b_1$$

$$\beta_{i-1}(f_{i-1} x_i + g_{i-1}) + \text{—"—} = b_1$$

$$(\beta_{i-1} f_{i-1} + \alpha_i) x_i + \gamma_i x_{i+1} = b_i - \beta_{i-1} g_{i-1} \Rightarrow$$

2…n $\left[f_i = \dfrac{\gamma_1}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}} \quad g_i = \dfrac{b_1 - \beta_{i-1} g_{i-1}}{\alpha_1 + \beta_{i-1} f_{i-1}} \right.$

→ a visszafele menő rekurzióhoz kell.

→ utolsó sor: $\beta_{n-1} x_{n-1} + \alpha_n x_n = b_n$

itt dobjuk f_{i-1}, g_{i-1}-et

n..1-ig

visszafelé: $\left[x_i = f_i x_{i+1} + g_i \quad (i=n-1..1) \right.$

Progonka összegezve

előrefele

	f	g
1	$-\frac{\gamma_1}{\alpha_1}$	$\frac{b_1}{\alpha_1}$
2 → n-1	$-\frac{\gamma_i}{\alpha_i+\beta_{i-1}\cdot f_{i-1}}$	$\frac{b_i-\beta_{i-1}\cdot g_{i-1}}{\alpha_i+\beta_{i-1}\cdot f_{i-1}}$
n	N/A	$\frac{b_i-\beta_{n-1}\cdot g_{n-1}}{\alpha_n+\beta_{n-1}\cdot f_{n-1}}$

f_i, g_i -ket előrehaladó rekurzióval először kiszámoljuk őket

Visszafele

$x_n = g_n$

$x_{n-1} = f_i x_{i+1} + g_i$

Visszafele haladó rekurzióval kiszámoljuk a megoldásvektor koordinátáit.

Progonka műveletigény

f_i, g_i -re 6 db művelet → $6(n-2)$ művelet kell.

$g_n = 5$ db

Visszafele pedig: $2(n-1)$

$8n-7 = 8n+O(1)$ művelet kell.

Vektornormák

vektor hossz

euklideszi

$$\boxed{\|x\|_2 :=} \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{x^Tx} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$n\in\mathbb{N}$. Az $\|\cdot\|$ $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ -t hívjuk normának

- $\|x\|\geq 0$
- $\|x\|=0 \iff x=0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
- $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ → háromszög egyenlőtlenség

$\left(\forall x,y\in\mathbb{R}^n,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}\right)$

Hossz c távolság mérése.
Aztán mátrixokra kiterjesztjük ki.
Legnagyobb mx norma a stabilitását mutatja a LER-nek.
Pici hibára mennyire érzékeny?
Ez a szám a kondíciószám (min 1)

CBS Egyenlőtlenség

$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|_2\cdot\|y\|_2$ ~ 3szöge

Biz bármely $\|x-\alpha y\|_2^2 \geq 0$

$\|x-\alpha y\|_2^2 = \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle =$

$= \underbrace{\langle x,x\rangle}_{\|x\|} - 2\alpha\langle x,y\rangle + \underbrace{\alpha^2\langle y,y\rangle}_{\|y\|}$

$\overbrace{\langle x,x\rangle}^{\|x\|_2} - 2\alpha\langle x,y\rangle + \underbrace{\alpha^2\langle y,y\rangle}_{\|y\|_2}$ $A>0$

→ $D<0$ lesz mindig.
Tehát bebizonyítottuk

Pl:

$x=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

$\|x\|_1 = 3+4 = 7$

$\|x\|_2 = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$\|x\|_\infty = \max\{3,4\} = 4$

↳ abszolútérték kell

csebisev norma

$\boxed{\|x\|_\infty} = \max |x_i|$

manhattan norma

$\boxed{\|x\|_1} = \sum |x_i|$

általános eset

$\boxed{\|x\|_p} := \sum_{i=1} (|x_i|^p)^{1/p}$

P-Norma → az ezzel a képlettel definiált fv-ke vektornormát definiál

$(p \in \mathbb{R},\ 1 \le p < \infty)$

p lehet kisebb mint 1, de akkor nem norma

- 0-1 között nem norma
- $p_1 \le p_2 \Rightarrow \|x\|_{p_1} \ge \|x\|_{p_2}$
- $\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$

Normák közti egyenlőtlenségek

$\|x\|_\infty \le \|x_1\| \le \sqrt{n}\|x\|_2$

$\|x\|_\infty \le \|x_1\| \le n\|x\|_\infty$

$\|x\|_\infty \le \|x_2\| \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$

Def $\|\cdot\|_a$ $\|\cdot\|_b$ ekvivalens, ha $\exists c_1 c_2$, $\forall x$-re
$c_1\|x\|_b \le \|x\|_a \le c_2\|x\|_b$

$\mathbb{R}^n$-en értelmezett vektornormák ekvivalensek egymással. Végesdimenziós keleten → $\|\ \|_2$-esben belátni tetszőleges p-re.

Konvergencia Vektornormákban

x^* a sorozat határértéke

x_k konvergens, ha $\exists x^* \in \mathbb{R}$ lim, melyre

$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x^*\| = 0$ → különböző vektorok sorozatainak normája

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \ge N_0 : \|x_k - x^*\| < \varepsilon$

Környezettel megfogalmazva

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \ge N_0 : x_k \in K_\varepsilon(x^*)$

Mátrixnormák

5

~ Vektornormák

$n \in \mathbb{N}$. Az $\|\cdot\|$ $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$-t hívjuk normának
↳ nem minden fv. mx norma.

- $|A| \ge 0$
- $\|A\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\lambda A\| = \lambda \cdot \|A\|$
- $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$
- $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$ → szubmultiplikativitás: ez egy új mátrixnormára.

Mind az 5 kell ahhoz, hogy mxnorma legyen.

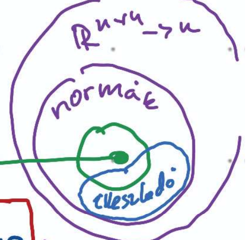
Frobenius-norma

$\|\cdot\|_F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ $\quad \|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$

összes elemet összeadjuk

ez egy mx norma, de nem indukált

Természetes mx normák /indukált/



$\|\ \|_v$ vektornorma segítségével lehet definiálni

$$\boxed{\|A\| := \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}}$$

→ összes mx. v szorzat

Vissza lehet ezeket a speciális mx normákat vektornormákra vezetni

Biz visszavezetjük normál vektornormákra

- $\|A\| \geq 0$
- Ha $A=0$, akkor $\|Ax\|_v = 0 \iff$
  Ha sup 0 akkor $\forall x$-re $A=0$
- λ szorzás kiemelhető

kiemeljük a vektornormából

$$\|\lambda A\| = \sup \frac{\|\lambda A x\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda| \cdot \sup \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda| \, \|A\|$$

- Δ egyenlőtlenség

az összeg kettéválasztva egy közös maximum

$$\|A+B\| = \sup \frac{\|(A+B)x\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup \frac{\|Ax\|_v + \|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq$$

$$\leq \sup \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} + \sup \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| + \|B\|$$

- szubmultiplikativitás

$B=0 \rightarrow \|B\| = 0$ => triviális esetek.

$A \cdot B = A \cdot 0 = 0 \Rightarrow \|AB\| = 0$

felszorzunk $\|Bx\|_v$-vel és leosztunk

$$\|A \cdot B\| = \sup \frac{\|ABx\|_v}{\|x\|_v} = \sup \frac{\|ABx\|_v}{\|Bx\|_v} \cdot \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq$$

(ugyanúgy a szuprémumot szét lehet választani) $\leq \sup \frac{\|Ay\|_v}{\|y\|_v} \cdot \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| \cdot \|B\|$

Az új változó lehetséges, úgy, hogy $y = Bx$

↓

Átfogalmazható: $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{\|y\|_v = 1} \|Ay\|_v$

max-ot is lehet írni

$$\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \leq \|A\| \rightarrow \|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v$$

vektornorma!

Illeszkedő mátrixnormák

Ha egy mx és egy v normára teljesül:

$\|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n \times n})$-re

akkor azok illeszkedők.

vektorra illeszkedik a mxnorma

Természetes mx-ek illeszkednek

Frobenius => $\| \ \|_2$-re.

Nevezetes Mxnormák

$$\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$ ⇓ oszlopnorma

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$ => sornorma

$$\|A\|_2 = \left(\max_{i=1}^{n} \lambda_i (A^T A) \right)^{1/2}$$ spektrálnorma

$\lambda_i(M) =$ M mátrix i. sajátértéke. $Mv = \lambda v,\ v \neq 0$

Bebizonyítjuk, hogy ezek illeszkednek vektornormára.

Biz $\|A\|_1$

- $f(A)$-ra igaz $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$
- $\exists x$, hogy $\|Ax\|_v = f(A) \|x\|_v$ => akkor $f(A)$ tényleg a vektornorma.

Biz $\|A\|_\infty$

- Hasonlóan az előzőhöz $x = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ maximális sorösszegű sor előjelének megfelelők

Biz $\|A\|_2$ Nehezebb bizonyítás

- $A^T A$ → szimmetrikus, sajátértéke nemnegatív
  ↳ pozitív szemidefinit

– $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$ azaz A^TA szim.
azaz A^TA sajátértékei valósak

$A^TAy = \lambda y$ sajátvektor

Biz A^TA sajátértéke nemnegatív
↳ pozitív szemidefinit

$(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$. Azaz A^TA szimmetrikus

$y \neq 0$ A^TA mx-hez tartozó sajátvektor y (λ-hoz tartozó)

$A^TAy = \lambda \cdot y$ $/\cdot$ bal y^T

$\underbrace{y^TA^TAy}_{\|Ay\|_2} = \lambda \underbrace{y^Ty}_{\|y\|_2}$

Ez ekvivalens a $\|\|_2$ definíciójával.
Innen kifejezzük λ-t

számláló és nevező is ≥ 0 mert hosszfogalom ~ norma.

$$\lambda = \frac{y^TA^TAy}{y^Ty} = \frac{(Ay)^TAy}{\|y\|_2^2} \geq 0$$

→ ezt a bizonyítást visszük tovább

A^TA szimmetrikus.
Tudjuk, hogy $\exists U$ ortogonális mátrix, amire igaz lesz.

$y = Ux$ jelölés.

DIAGONALIZÁLÁS
$A^TA = U^TDU$
$\Updownarrow$
$UA^TAU^T = D$
Így D diagonálisban A^TA sajátértékei vannak jelen.

$\|Ax\|_2^2 \overset{?}{=} \max \lambda_i\, A^TA \cdot \|y\|_2^2$

$(Ax)^TAx = x^TA^TAx = x^TU^T\underset{\text{diagonális}}{D}Ux =$

$= (Ux)^TD(Ux) = y^TDy =$

y megadható egy összeg alakban is

$\sum_{i=1} d_{ii} \cdot |y_i|^2$ = egyszerű, mert felbontjuk D-t.

sajátértékek nemnegatívak
↳ felsőbecslés a legnagyobb d_{ii}-vel

$\boxed{\|y\|_2^2 = \|x\|_2^2}$

$\leq \max d_{ii} \cdot \sum |y_i|^2 = \max \lambda_i(A^TA) \cdot \|y\|_2^2$

Szimmetrikus mx-ek esetén, amivel bal-jobb szorzok, az ortogonális aminek az inverze önmaga transzponáltja

Spektrálsugár

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mx spektrálsugara $\varrho(A) = \max_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)|$

legnagyobb sajátérték abszolútértéke

$$\boxed{\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^TA)}}$$

$\Downarrow$ Ha A mx szimmetrikus

$\|A\|_2 = \varrho A$

Ha a mx csak valós számokat tartalmaz.
$A^* \longrightarrow A^T$
komplex számoknál
A^* : konj(A^T) plusz

Normális $\subseteq$ Önadjungált

Ha $A^*A = AA^* \Rightarrow \|A\|_2 = \varrho(A)$
↳ Diagonalizálható

Biz $U^*AU = D = \mathrm{diag}(\lambda_i(A)) \longleftrightarrow A = UDU$
↳ sajátértékek ugyanazok

csak az átlóban vannak elemek, amik a mx sajátértékei

$\lambda_i(A^*A) = \lambda_i(D^*D) = |\lambda_i(A)|^2$

$\varrho(A^*A) = \varrho(A)^2$

$(U^*)^* = U$

innen: $\|A\|_2 = \varrho(A^*A)^{1/2} = \varrho(A)$

Frobenius norma nem Természetes / Indukált

Mátrix összes elemének négyzetösszegének gyöke
$f : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$

Nincs olyan vektornorma ami indukálja

Mx normák
Indukált: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$
$\|\cdot\|_F$

Biz $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ normája:

$\|I\| = \sup \frac{\|Ix\|_v}{\|x\|_v} = 1$ $\left(\text{mert } \frac{\|x\|_v}{\|x\|_v}\right)$

$\|I\|_F = \sqrt{n} \to n>1$-re már nem jó!

$n > 1$ esetén nincs olyan v.norma ami F-et indukálja

$\lightning$ $\square$

$\varrho(A) \leq \|A\|$ Spektrálsugár alulról becsüli az összes mxnormát

Biz $|\lambda| \leq \|A\|$ λ tetszőleges, $v \neq 0$ hozzátartozó sajátvektor.

$Av = \lambda v$

$Avv^T = \lambda vv^T$

szubmultiplikatív

$\underbrace{\|A\| \cdot \|vv^T\|}_{\text{leosztunk } vv^T} \geq \|Avv^T\| = \overbrace{\|\lambda vv^T\| = |\lambda| \cdot \|vv^T\|}$

leosztunk vv^T.

$\|A\| \geq |\lambda|$

Állítások Ortogon. mx-ekre

$\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ vektor

Tehát [---] mx a vektor normát nem változtatja!

$\|Q\|_2 = 1$

$\|QA\|_2 = \|AQ\|_2 = \|A\|_2$ nem változtatja a hosszát. Invariáns rá.

$\|A\|_F^2 = tr(A^TA)$ ahol $tr(B) := \sum_{k=1}^{n} b_{kk}$

$\|QA\|_F = \|AQ\|_F = \|A\|_F$

$\|\cdot\|_F \equiv \|\cdot\|_2$ ekvivalens, F-norma illeszkedik a 2-es normára.

$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A^TA)$

Mx Kondíciószáma

5ii

Mennyire érzékeny egy LER mennyire érzékeny

→ megoldómódszerek stabilitása

$\boxed{cond(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|}$ $\kappa(A)$

→ csak invertálható mx-a

→ normától függ az értéke

1: legkisebb cond → legkevésbé érzékeny

- indukáltnál $cond(A) \geq 1$ → legjobb eset
- $cond(cA) = cond(A)$ → nem függ const szorzással
- Q ortogonális, $cond_2(A) = 1$

$cond_2(A) = \dfrac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$ ha szimmetrikus

$cond_2(A) = \dfrac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$ ha poz szemidefinit

$cond_\square(A) \geq \dfrac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda(A)|}$ ha invertálható

LER Vektorának megváltoztatása

$Ax = b$ De! Perturbálás b-re ??? Pontatlan mérési eredmények!

kiszámolják

$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$

Az új megoldás Δx-el módosul

Perturbáció mértékét az abszolút / relatív hibával jellemezzük

Cél: feláldjuk egy számot.

$$\delta b = \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$ → jobb oldal relatív hiba

$$\delta x = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$$ → megoldás változása
hibavektor, pontos osztása

$$\frac{\delta x}{\delta b} = 1235 \Rightarrow cond(A) = 1623$$

1000x-es a hibának a módosulás.

A kondíciószámmal viszont lehet $\frac{\delta x}{\delta b}$-vel becsülni az értéket

Pontos hibát nem ismerjük!

LER jobboldali hibájára való érzékenység

Tfh A invertálható és $b \neq 0$.

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{cond(A)} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

azaz

$$\boxed{\frac{1}{cond(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq cond(A) \cdot \delta b}$$

tényleges hiba alulról és felülről is becsülhető

Biz $A(x+\Delta x) = (b+\Delta b)$-ből kivonjuk $Ax = b$-t.
így: $A\Delta x = \Delta b$

Viszont $x = A^{-1}b$ és $\Delta x = A^{-1}\Delta b$ is igaz.

4 összefüggés → op: mx-v norma alkalmazzuk

Ha illeszkedő a norma:

$\|b\| = \|Ax\|$ és $\|\Delta b\| = \|A\Delta x\|$ $\Rightarrow$ $\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$ és

$\|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|}$

Alsó becsléseket csinálunk.

egyszerűsítés

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \geq \frac{\frac{\|\Delta b\|}{\|A\|}}{\|A^{-1}\| \cdot \|b\|} = \frac{1}{\|A^{-1}\| \cdot \|b\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Ez volt az alsó becslés. Felső becslésnél ezt használjuk fel a bizonyításhoz.

LER Mx-ének megváltoztatása

Akkor jön elő, ha a mx (~ modellezi az egyenletet)-ben van megváltozás.

$$Ax = b \Longrightarrow (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

$$\frac{\delta x}{\delta A} = 4396 \qquad cond(A) = 1623$$

Ha A invertálható és $\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| > 0$, akkor indukált mxnormában.

$$\boxed{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \|A^{-1}\|} \cdot \underbrace{\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}_{\text{relatív hiba}}}$$

felülről becsülhető

$$\frac{A \cdot A^{-1}}{1 - A \cdot A^{-1}} \cdot \frac{A}{A}$$

Átfogalmazva

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{cond(A)}{1 - cond(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

Segédtétel

$\|M\| < 1$, akkor $(I+M)$ invertálható.

$$\boxed{\|(I+M)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|}}$$

Egyszerűsített tétel. Szorzásfelbontás (LER $Ax=b$)

$$Ax = b \implies (A+\Delta A)(x+\Delta x) = b + \Delta b$$

teljesül az alábbi becslés

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\mathrm{cond}(A)}{1-\mathrm{cond}(A)\cdot\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)}_{\text{A és b relatív hibájának összege}}$$

LU felbontás nem tudja javítani a kondíciószámot.

Biz

$Ax = b \implies LUx = b \implies Ly = b,\; Ux = y$

$A = LU \implies \|A\| < \|L\|\cdot\|U\|$

$A^{-1} = U^{-1}\cdot L^{-1} \implies \|A^{-1}\| \le \|L^{-1}\|\cdot\|U^{-1}\|$

ebből következik: $\mathrm{cond}(A) \le \mathrm{cond}(L)\cdot\mathrm{cond}(U)$

$\mathrm{cond}(L), \mathrm{cond}(U)$ lehet $\gg$ mind $\mathrm{cond}(A)$

Relatív maradék

$$\boxed{\eta = \frac{\|r\|}{\|A\|\cdot\|\tilde{x}\|}}$$

A módszer stabil, ha $\tilde{x}$ közelítő megoldásához tartozó

$(A+\Delta A)\cdot\tilde{x} = b$ -nél

$\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ kicsi = kicsit perturbált csak $\cancel{Ax=b}$

$(A+\Delta A)\cdot \;= b$

ΔA igazából nem tudjuk. Csak A mx et számoljuk

$\tilde{x}$ az a $Ax=b$ közelítő megoldása.

Ha $\Delta A + A$ van, akkor ezzel 0

$\|r\|$ — reziduumvektor $\boxed{r := b - A\tilde{x}}$

VII

Pontos megoldás esetén reziduum vektor értéke nulla. $\tilde{x}$-al $A\tilde{x}$ nem teljesen b. Ez az eltérés lesz r.

η pedig arra jó, hogy $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$-t tudjuk becsülni

Becslés relatív maradékra

$$\boxed{\eta \le \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \rightarrow$$

Tehát ha η akkor $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ is nagy lesz. Ehhez tehát nem kell más.

Biz Illeszkedő mxnormában adjuk meg.

tudjuk: $b = (A+\Delta A)\cdot\tilde{x} = A\tilde{x} + \Delta A\tilde{x}$.

$b - A\tilde{x} = r$. $r = \Delta A\tilde{x}$. Illeszkedés: $\|r\| \le \|\Delta A\|\cdot\|\tilde{x}\|$

relatív maradék $\eta = \frac{\|r\|}{\|A\|\|\tilde{x}\|} \le \frac{\|\Delta A\|\cdot\|\tilde{x}\|}{\|A\|\cdot\|\tilde{x}\|} \le \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$

Relatív maradék $\|\;\|_2$-ben

Ha A invertálható, akkor

$$\boxed{\eta_2 = \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}}$$

Biz belátjuk, hogy $\Delta A = \frac{r\tilde{x}^T}{\tilde{x}^T\tilde{x}}$ jó perturbáció

Ha $\tilde{x}$ egy módosított LER megoldása, akkor ez megfelel a LER-beli ΔA-val!

$$(A+\Delta A)\cdot\tilde{x} = \left(A + \frac{r\tilde{x}^T}{\tilde{x}^T\tilde{x}}\right)\tilde{x} = A\tilde{x} + \frac{r\tilde{x}^T\tilde{x}}{\underbrace{\tilde{x}^T\tilde{x}}} =$$

számlálóban és nevezőben is van a szám van. $\boxed{\tilde{x}^T\tilde{x}}$ egyszerűsítés

$$= A\tilde{x} + \underset{r \text{ definíció szerint}}{r} = Ax + (b - A\tilde{x}) = b \quad \square$$

Felhasználjuk: $\|r\tilde{x}^T\|_2 = \|r\|_2\cdot\|\tilde{x}\|_2$

behelyettesítjük ΔA-t

$$\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \overset{?}{=} \eta_2 \rightarrow \frac{\|r\tilde{x}^T\|_2}{\|A\|_2\|\tilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2\cdot\|\tilde{x}\|_2}{\|A\|_2\|\tilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2}{\|A\|_2\|\tilde{x}\|_2}$$

$\tilde{x}^T\tilde{x} \Rightarrow \|\tilde{x}\|_2^2$ ekvivalens.

Ha $\eta_2 < \varepsilon_1$, akkor aritmetikában legpontosabb megoldás!

Nem Lineáris egyenletek Numerikus Megoldása

EA06 "8" HORNER

6

$f(x)=0$. $f=p$ polinom $\Rightarrow$ gyökkeresés

Eddig: $Ax=b$ LER.

Ez az, amikor f fv. lineáris, azaz $f(x)=Ax-b$ alakú

Most f egy tetszőleges NLEgyenlet lesz.

pl: $f(x) = \cos(x)$

$f(x) = x^2 - 2$

$f(x^*)=0$ $x^*=?$ $\boxed{x^* = \text{egyenlet gyöke}}$

$\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NLER egyenlet fixpontját keressük $x^*=\varphi(x^*)$ $x^*=?$

fixpontiteráció

$x^2+2x=0 \to$ $f(x)=0$ típusú egyenlet

$x=-x^2-x \to$ átfogalmazva. $x=\varphi(x)$ típusú lesz

Ism Bolzano tétel

Ha van egy folytonos fv $[a,b]$-n, és a,b előjele ellentétes, akkor $\exists$ gyök

Ha $f \in C[a,b]$-n és $f(a)\cdot f(b)<0$, akkor $\exists x^* \in (a;b): f(x^*)=0$

Biz intervallum felezéssel lett előállítva

Hibabecslés: k. felezésben milyen távol vagyunk a megoldástól. x_k, y_k

$$|x_k - x^*| < \frac{b-a}{2^k} \leftrightarrow$$

Mindig felülről becsülhető a k. lépés intervallum felével

Ha $f \in C[a,b]$, $f(a)\cdot f(b)<0$ és $f \in D(a;b)$ és $f'>0$ vagy <0 akkor $\exists! x^* \in (a,b): f(x^*)$

Szigorúan nagyobb mint nulla. Szig mon, ezért egyértelmű a gyök

Fixpont tételek

ötlet: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\varphi(x)$

$x^* \in \mathbb{R}^n$ pontot a $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés fixpontjainak nevezzük, ha $x^*=\varphi(x^*)$

Függvény helyben hagyja.

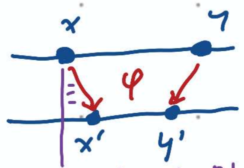
Kontrakció

A $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés kontrakció, ha $\exists\, q \in [0,1)$, hogy

távolság ≈ norma

$$\|\varphi(x)-\varphi(y)\| \le q\cdot\|x-y\| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$$

q kontrakciós együttható



felülről becsülhető az, hogy mennyire nagy össze. $q<1$. Eredeti távolság mindig csökken

De! $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esetet nézünk csak, tehát elég abszolútérték

$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q \cdot |x-y|$ egydimenzióban.

Állítás: $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^1[a,b]$
és $|\varphi'(x)| < 1$ $\forall x \in [a,b]$ → két elégséges feltétel.
akkor φ kontrakció $[a,b]$-n.

De ha nem teljesülnek, attól még lehet kontrakció

Biz Lagrange középértékt

$q := \max |\varphi'(x)| < 1$

def: $\forall x,y \in [a,b]$, $x < y$: $\exists \xi \in (x;y)$:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \underbrace{|\varphi'(\xi)| \cdot |x-y|} \leq q \cdot |x-y|$$

legnagyobb derivált, de még mindig kisebb mint 1.

Brouwer-féle fixponttétel

A fixpont létezéséről:

Ha $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ és $\varphi \in C[a,b]$-n

akkor $\exists x^*$ fixpont $[a,b]$: $\varphi(x^*) = x^*$

Biz Bolzano féle $g(x) = x - \varphi(x)$

Ezzel biztosítjuk a Bolzano-tétel feltételeit.

A végpontokon vizzük, hogy $g(a)$ és $g(b)$ ellentétes.

$g(a) = a - \varphi(a) \leq 0$ és $g(b) = b - \varphi(b) \geq 0$

$\Rightarrow g(a) \cdot g(b) \leq 0$.

(Ha $g(a) \cdot g(b) = 0$. Akkor valamelyik 0.
Ha valamelyik az, akkor a v b fixpont!
Tehát a végpont fixpont)

Másik esetben már teljesül a Bolzano tétel:

$\exists x^* \in (a,b)$: $g(x^*) = x^* - \varphi(x^*) = 0 \iff \varphi(x^*) = x^*$

Vagyis g-nek biztos van (a,b)-n gyöke!
x^* gyöke → fixpontja

Banach-féle fixponttétel

Ha $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ és kontrakció akkor

- Létezik fixpont pontosan egy létezik
  $\exists ! x^* \in [a,b]$: $x^* = \varphi(x^*)$

- $\forall x_0 \in [a,b]$ esetén az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ $k \in \mathbb{N}_0$
  sorozat: konvergens és $\lim_{k \to \infty} x_k = x^*$
  Bárhonnan indulunk, x^* fixpontba konvergál
- hibabecslések igazak
  $$|x_k - x^*| \leq q^k \cdot |x_0 - x^*| \leq q^k (b-a)$$
  $$|x_k - x^*| \leq \frac{q^k}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|$$
  Minden lépésben egyre közelebb jövünk a megoldáshoz.
  k. lépésben milyen messze vagyunk a megoldástól

Iteráció konvergenciájának elégséges feltétele.

Ha $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ ~ Banach fixponttétel.
és $\varphi \in C^1[a,b]$
és $|\varphi'(x)| < 1$ $\forall x \in [a,b]$-n:
Akkor az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ iteráció konvergens
ha $x_0 \in [a,b]$, és érvényesek a hibabecslések.

Lokális fixponttétel gyengítünk a feltételen!

Legyen $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$
Ha $\varphi \in C^1[a,b]$
és $\exists \xi \in [a,b]$ és $\delta > 0$ melyre
$|\varphi'(x)| \leq q < 1$ $\forall x \in [\xi - \delta, \xi + \delta] \subset [a,b]$

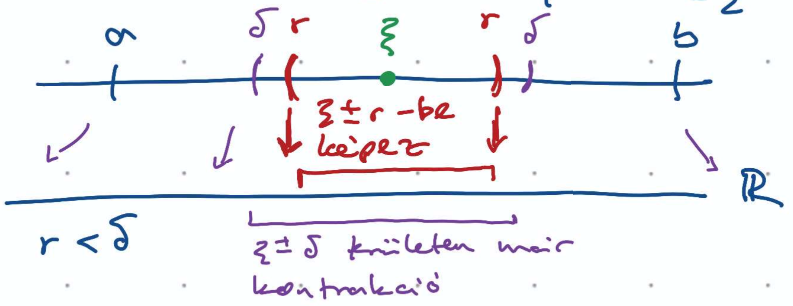
L ξ-nek δ sugarú környezetében a lokális $H < 1$

Ha $\exists r: 0 < r \le \delta$ melyre

L $|\varphi(\xi) - \xi| \le (1-q)\cdot r$

$\Rightarrow$ Akkor φ kontrakció $[\xi - r, \xi + r]$-en.

L és $\forall x \in [\xi - r, \xi + r]: \varphi(x) \in [\xi - r, \xi + r]$



Biz.

Feltétel az, hogy φ kontrakció a $\xi \pm \delta$ intervallumon.

Teljesül $\pm\delta$-n belül is. $\pm r \subset \pm\delta$

Tetszőleges $x \in [\xi - r, \xi + r]$ esetén még intervallumra is képez, mert

$$|\varphi(x) - \xi| = |\underbrace{\varphi(x) - \varphi(\xi) + \varphi(\xi)}_{\text{bővítünk, levonunk}} - \xi| \le$$

ennek $< r$-nek kell lennie

Δ egyenlőtlenség

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| + |\varphi(\xi) - \xi| \le$$

tétel 3. feltétele 1:1

φ kontrakciósság miatt felülről becsülhetjük

$$q\underbrace{(x-\xi)}_{\le r} + \underbrace{(1-q)\cdot r = r}_{\text{felső becslés}}$$

Tehát a φ az $x \in [\xi - r, \xi + r]$-ben képez.

Teljesül a Banach-fixponttétel.

Konvergens az eljárás. □

$\Rightarrow$ Ha a lokális fixp. teljesül, akkor a lokális is teljesül!

lehet a fr. össze-vissza lépked, de belekerül $\xi \pm r$-be előbb utóbb

Konvergenciarend (6ii)

Milyen gyorsan tart egy sorozat a határértékéhez

Def x_k konvergens sorozat. x^* a határértéke.
p-ed rendben konvergens, ha
$\exists c \in (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$, hogy:

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = c}$$

$$\frac{\text{határérték távolság } k+1 \text{ lépésben}}{|\text{távolság } k\text{-ban}|^p}$$

Mennyivel kerülök közelebb.

p értéke

$\to$ túl nagy $\Rightarrow c = +\infty$

$\to$ túl kicsi $\Rightarrow c = 0 \to$ A keresett konvergenciarend nagyobb a megadottnál.

↳ adjust value

$\left(\frac{1}{2^n}\right) \rightsquigarrow$ x^* az 0

$p=2 \Rightarrow \infty$

$p=1 \Rightarrow 1/2$

Tehát $p=1$ a konvergenciarend!

p egyértelmű, $p \ge 1$

p nem feltétlenül egész

$p=1 \Rightarrow$ lineáris / elsőrendű

$p=2 \Rightarrow$ kvadratikus / másodrendű

$p>1 \Rightarrow$ szuperlineáris

Átfogalmazva a def:

$$\boxed{\exists K \in \mathbb{R}^+ : \forall k \in \mathbb{N}_0 : \quad |x_{k+1} - x^*| \le K \cdot |x_k - x^*|^p}$$

Olyan K számot keresünk, amivel a k+1 lépés hibája felülről becsülhet k-lépés p-edik hatványával · K

fixponttételek a konvergenciarendről nem állítanak

P-ed rendben konvergens iterációk

Legyen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^p[a,b]$ és

az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ sorozat konvergens.

└ határértéke x^*

Ha $\varphi'(x^*) = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$, de → p-1 deriváltig 0

$\varphi^{p} \neq 0$ → de p-ben már nem.

=> Akkor a konvergencia p-edrendű és hibabecslése:

$$\boxed{|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_p}{p!}|x_k - x^*|^p}$$

$K = \frac{M_p}{p!}$

Ahol $M_p = \max_{\xi \in [a,b]} |\varphi^{(p)}(\xi)|$. → p-edik derivált abszolút maximuma

Biz A megoldás φ körüli Taylor-polinomját írjuk fel

$\exists \xi \in (x, x^*)$, hogy φ függvényértékét x-ben fel lehet írni a p-adrendű polinommal
Maradéktag is lesz.

$$\varphi(x) = \varphi(x^*) + \underbrace{\square}_{} + \frac{\varphi^{(p)}}{p!}(x - x^*)^p$$

Minden tag kiesik Taylor-polinom.

Vizsgáljuk $x = x_k$ helyen. itt $\exists \xi_k$

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = \underbrace{\varphi(x^*)}_{} + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k - x^*)^p$$

M_p az ennek az abszolút maximuma

ez tudjuk, hogy fixpont.

Ezzel elértük, hogy $\frac{M_p}{p!}|x_k - x^*|^p$ formában van!

p-edrend ++ Banach-fixpont

Akkor a konvergencia sebességét is tudjuk mondani:

Ha $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ és
x^* a φ fixpontja és
konvergenciarend feltétel teljesül

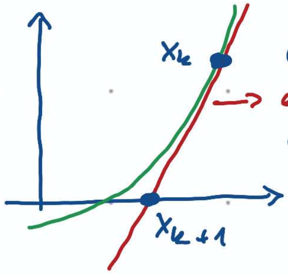
=> Akkor:
- fixpont $\exists!$
- $\forall x_0 \in [a,b]$ esetén konvergens és $\lim x_k = x^*$
- a fenti hibabecslés teljesül.

1x

Newton-Módszer 7

Tetszőleges fv-hez iteráció készítése, amivel gyököt megkeressük

Feladat: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NLER zérushelyet/gyökét keressük. $f(x^*) = 0$ $x^* = ?$ $\exists$? több?



f, x_k → érintő → zérushely → x_{k+1}

→ egyszerűbb fv. => ezt könnyű kiszámolni

érintő:

$$y - f(x_k) = f'(x_k) \cdot (x - x_k)$$

$y = 0$-t keressük

Iterációs fv:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 0..}$$

Ezt a tulajdonságot bizonyos feltételek kellett biztosít-ja a Taylor P.

Analitikus megközelítés: f gyöke ≈ x → bizonyos feltételek

Taylor polinom gyöke.

Csak 0. rendű, 1. rendű tagot nézzük.
így is levezethető.

Monoton konvergencia

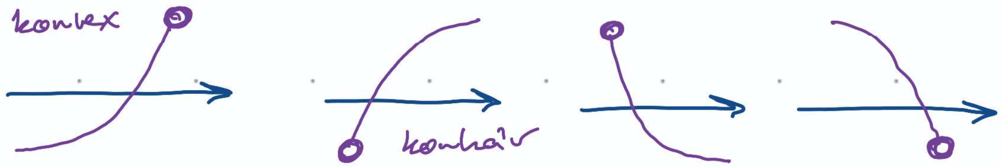
Ha $f \in C^2[a,b]$ és kétszer folyt. differenciálható

$\exists x^* \in [a,b] : f(x^*) = 0$ létezik gyök $[a,b]$-n

f' és f'' állandó előjelű külön külön végig egy előjelű

$x_0 \in [a,b] : f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

=> Akkor x_0-pontból indított Newton-módszer monoton konvergál x^*-hoz



$f' = +$, $f'' = +$ | $f' = +$, $f'' = -$ | $f' = -$, $f'' = +$ | $f' = -$, $f'' = -$

Balról jobbra növekszik / monoton nő

Biz: A $f' > 0$, $f'' > 0$ esetre.

$f(x_0) > 0$ → Taylor formula 2 fokú, x_k középpont:

$\exists \xi_k \in (x, x_k)$ ≥0 mert gyököt beírunk; maradéktag >0 feltétel.

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(\xi_k)}{2} \cdot (x - x_k)^2$$

>0 >0

x_{k+1}-et helyettesítjük be

következik: monoton fogyó: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} < x_k$

Valamint x_k alulról korlátos:

$0 = f(x^*) < f(x_k)$ és f szigorúan nő => $x^* < x_k$

=> így konvergens a sorozat: $\hat{x} = \lim_{k \to \infty} x_k$

↳ ismeretlen de létező határérték

Átviteli elv:
Folytonos fv-k esetén
tudjuk: ÉT-ben konvergens
sorozat => ÉK-ben lévő tagok
sorozatán tart határértékben
felvett fv- értékhez.

$$f(\hat{x}) = \lim_{k \to \infty} (x_{k+1}) = \lim_{k \to \infty} \underbrace{\frac{f''(\xi_k)}{2}}_{\text{korlátos}} \underbrace{(x_{k+1} - x_k)^2}_{\to 0 \text{ mert Cauchy}} = 0$$

Mon. konv.
nem mondja ki, hogy sorozat tagjai közötti különbség tart →0-ba
- milyen gyorsan közelít
- milyen távolról lehet indulni

↓ lokális!

Lokális konvergenciatétel

Ha $f \in C^2[a,b]$-n és

$\exists x^* \in [a,b] : f(x^*) = 0$ van gyök $[a,b]$-n

f' állandó előjelű

$m_1 = \min_{a \to b} |f'(x)| > 0$

$$\boxed{M = \frac{M_2}{2m_1}}$$

$M_2 = \max_{a \to b} |f''(x)| < +\infty$
↳ felülről korlátos

$x_0 \in [a,b] : |x_0 - x^*| < r$ → x_0 legyen x^* r sugarú körében benne.

ahol $r = \min\left\{\frac{1}{M}, \underbrace{|x^* - a|, |x^* - b|}_{[a,b]\text{-n belül}}\right\}$

=> Akkor x_0-ból indított Newton-módszer másodrendben konvergens, és

$$\boxed{|x_{k+1} - x^*| \le M \cdot |x_k - x^*|^2}$$

Hibabecslés érvényes.

"Legyünk elég közel" $\Rightarrow$ nagyon gyorsan konvergál.

"Előbb-utóbb" a monoton konvergens elég gyors lesz $\Rightarrow$ mert teljesül a lok. konvergencia.

Biz Taylor-formula $\exists \xi_k \in (x_k, x^*)$, másodfokú maradéktaggal. $\Rightarrow$ másodrendben konvergál

Hiányzik: Miért konvergál.

Bevezetjük $\varepsilon_k := x_k - x^*$.

$$|\varepsilon_{k+1}| \le M \cdot |\varepsilon_k|^2$$

Ez azért $\neq 0$, mert

Taylor formulából: $\dfrac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|} \neq 0 \longrightarrow$ Ez feltétel volt

Biz Konvergencia

Teljes indukcióval: $k_r(x^*)$ környezetben marad.

Tudjuk: $|x_0 - x^*| < r$. Tfh: $|x_k - x^*| = \underbrace{|\varepsilon_k| < r}_{\text{Ezt akarjuk bemutatni}} < \frac{1}{M}$

Ekkor: $|\varepsilon_{k+1}| = |x_{k+1} - x^*|$

$$\le M \cdot |\varepsilon_k|^2 =$$

$$= \underbrace{(M|\varepsilon_k|)}_{<1} \cdot |\varepsilon_k| < |\varepsilon_k| < r$$

Az egyes iterációk során nem lépünk ki K_r-ből

Bizonyítás többi része

Megjegyzés

Ha az érintőnek nincs gyöke $f'(x_k) = 0$
$\Rightarrow$ Akkor elakadunk.

Néha csak elsőrendű a konvergencia.

Ha: $f'(x^*) = 0$ azaz többszörös gyök. $\rightarrow$ fv-re a newton módszer.

kiküszöbölhető: $g(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Ha r-szeres gyök: $x_{k+1} = x_k - r \cdot \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

Lehetett volna $\varphi(x) := x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ is a definíció, de akkor $C^3[a,b]$ feltétel kellett volna.

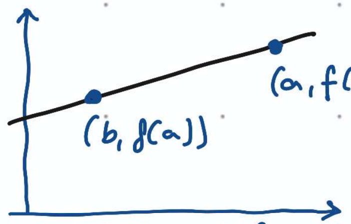
Nem biztos, hogy konvergál.
- $f'(x) = 0$
- közös gyök körül. $\rightarrow$ pontos számolás esetén
- nagyon távol a gyöktől

Húr & Szelőmódszer (7 II)

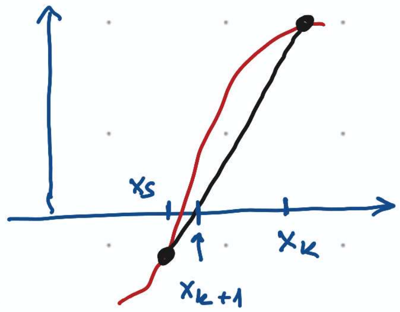
Newton módszer baja: • f' kell $\rightarrow$ lehet nehéz.
• ha nem ismerjük f-et, csak közelítőleg.

kell egy olyan, amihez nem kell deriválni.

Húrmódszer



$\Rightarrow$



egyenes $m = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$ Az $y=0$-t keressük

egyenlete

$$\boxed{y - f(a) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \cdot (x - a)}$$

$y=0$ zérushely: $y = \dfrac{f(a) \cdot (a-b)}{f(a) - f(b)}$

Def $f \in C[a,b]$ esetén, ha $f(a) \cdot f(b) < 0$ akkor a húrmódszer.

$x_0 = a \qquad x_1 = b$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)\cdot(x_k - x_s)}{f(x_k) - f(x_s)}$$

$s =$ legnagyobb index, amire $f(x_k)\cdot f(x_s) < 0$

Megköveteljük, hogy x_s az x_k-val ellentétes előjelű.

Húrmódszer konvergenciája

Ha $f \in C^2[a,b]$ és

$f(a)\cdot f(b) < 0$ és

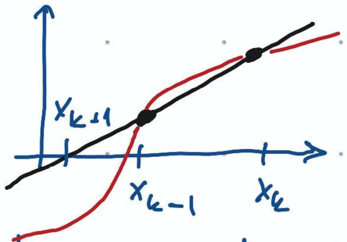
$M\cdot(b-a) < 1$.

$\Rightarrow$ Akkor a húrmódszer konvergál x^*-hoz és

$$\boxed{|x_k - x^*| \le \frac{1}{M}\left(M\cdot|x_0 - x^*|\right)^k} \qquad M = \frac{M_2}{2m_1}$$

Szelőmódszer

Mindegy, az előjel



$x_0, x_1 \in [a,b]$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)\cdot(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

konvergens ha $f \in C^2[a,b]$ és

f' állandó előjelű!

$x_0, x_1 \in [a,b]$

$$\left.\begin{array}{l}|x_0 - x^*| \\ |x_1 - x^*|\end{array}\right\} < r := \min\left\{\frac{1}{M}, |x^* - a|, |x^* - b|\right\}$$

akkor konvergenciarend $\boxed{p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Newton-módszer többváltozós esetre

Feladat: $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad F(x) \mapsto x = ?$

$F(x) = 0 \iff x = \phi(x)$

Def Többváltozós NM $\to$ felülettel közelítjük, vagy Taylor-polinomját vesszük

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(F'(x^{(k)})\right)^{-1}\cdot F(x^{(k)})$$

↳ mátrixxal nem lehet osztani, de inverzével lehet szorozni

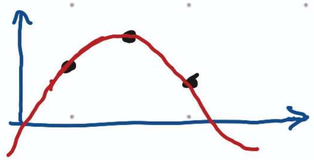
Broyden módszer: az invertálást próbálja kiküszöbölni

Interpoláció Polinomokkal (8)

két nagy családja van

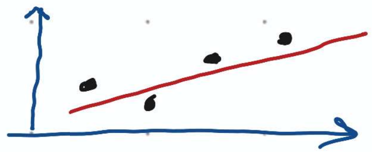
Nehéz fv-eket $\Rightarrow$ közelíteni

① Interpoláció



Olyan fv-t keresünk ami illeszkedik a pontokra.

② Approximáció



Olyan fv-t keresünk, ami közel van a mérési pontokhoz.

Interpolációs Alapfeladat

$x_0 \dots x_n \in [a,b]$ alappontok

$y_0 \dots y_n \in \mathbb{R}$ függvényértékek

Keressünk $p_n \in P_n$ polinomot, melyre
↳ legfeljebb n-ed fokú polinom

$$p_n(x_i) = y_i \quad i = 0..n$$

Ezt a p_n polinomot interpolációs polinomnak hívjuk.

IP egyértelmű létezése

$$\boxed{\exists ! p_n \in P_n : \quad P_n(x_i) = y_i}$$

LER megoldás a bizonyításban lévő mx rosszul kondicionált.

→ Matematikai bizonyításra nagyon jó

Lagrange-Alak

$$\boxed{l_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}} \qquad l_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

Lagrange alappolinomok

l_k felírható így is

$$l_k(x) = \frac{\omega_k(x)}{(x - x_k) \cdot \omega_n'(x_k)} \qquad \omega_n(x) = \prod_{j=0} (x - x_j)$$

Lagrange interpolációs polinom

$$\boxed{L_n(x) = \sum y_k l_k(x) \equiv p_n(x)}$$

Osztott differenciák

$x_0 \dots x_n$ által meghatározott elsőrendű o.d.

$$f[x_i, x_{i+1}] := \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \qquad i = 0..n-1$$

$$f[x_i, x_{i+1} \dots x_{i+k-1}, x_{i+k}] := \frac{f[x_{i+1} \dots x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1} \dots x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

$k = 0..n \quad i = 0 \dots n-k$

Táblázatba rendezve

x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$	elsőrendű	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

$$\frac{f[x_1, x_2] - f[x_0 - x_1]}{x_2 - x_0} \longrightarrow$$ második rendű osztott differencia

Newton-féle bázis

korábban $1, x, x^2 \dots$, és $l_0, l_1 \dots$ volt.

$$1, \ (x - x_0), \ (x - x_0)(x - x_1), \ \dots \ \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

Newton-alak

$$\boxed{N_n(x) := f(x_0) + \sum f[x_0, x_1 \dots x_k] \cdot \omega_{k-1}(x)} \equiv L_n$$

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, x_{n+1}] \cdot \omega_n(x)$$

→ rekurzívan hozzáadható új alappont!

Lagrange-alaknál az összes bázisban szerepel az alappont ⇒ mindent újra kell számolni.
Newton alakban ∃ rekurzió

Osztott differenciák tulajdonságai

$$\boxed{f[x_0, x_1 \dots x_k] = \sum \frac{f(x_j)}{\omega_k'(x_j)}}$$

Felírható zárt alakban is.

Ha σ a $(0 \dots k)$ értékek permutációja, akkor

$$f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(k)}] = f[x_0, x_1 \dots x_k]$$

Az OD-ben a sorrend nem számít.
Szimmetrikusak az alappontokra nézve.

Biz Newton alak

Tudjuk: Lagrange interpoláció

konstans érték
$L_0(x) = f(x_0)$

$$L_n(x) = L_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(L_k(x) - L_{k-1}(x)\right) \to \text{teleszkópikus összeg}$$

ahol L_k az $x_0 .. x_k$ alappontokon alapuló L. P

→ képletszerűen kiszámolható az alappontok Lin komb. ja-ként

$$\frac{f(x_k)}{\omega_{k-1}(x_k)} = \frac{L_k - 1(x_k)}{\omega_{k-1}(x_k)} = c_k$$

$\vdots$

$$\frac{f(x_k)}{\omega_{k-1}(x_k)} - \sum \frac{f(x_j)}{(x_k - x_j)\,\omega'_{k-1}(x_j)} = c_k$$

→ $\omega_{k-1}(x_k) = \omega_k'(x_k)$
ω egy szorzat

Biz többi részre.

Visszahelyettesítünk

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\omega_k'(x_j)} = f[x_0 .. x_k] = c_k$$

$\exists \xi_x \in [x, x_0]$ osztott dif kifejez.

$$f[x, x_0] = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = f'(\xi_x)$$

Hibaformulák

Mekkora a hiba azokban a pontokban, ahol nincs interpoláció?

$x \in \mathbb{R}$ tetszőleges
$[a,b]$ intervallum, $x_0 \dots x_n$ és x által kifeszített intvl.
Továbbá $f \in C^{n+1}[a,b]$-n.
Ekkor $\exists \xi_x \in [a,b]$, melyre

∃ξ(x), hogy a pontos hiba ebben az alakban előáll

$$\boxed{f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot \omega_n(x)}$$

$$\omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

$$M_{n+1} := \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

f^{n+1} derivált abszolút maximumát keressük

$$\left(\|f^{(n+1)}\|_{C[a,b]} \text{ és } \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \right)$$

Így a hibabecslés:

→ Gyakorlati szempontból ez egy jó felső becslés

$$\boxed{|f(x) - p_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega_n(x)|}$$

Általános érvényű.

További összefüggéseket tudjuk

Hibaformula Newton-alakra

$x \in \mathbb{R}$ tetszőleges $x \ne x_i$. Ekkor

$$\boxed{f(x) - N_n(x) = f[x, x_0 .. x_n] \cdot \omega_n(x)}$$

Biz Hibaformula

plusz egy sort kiszámolunk

Úgy tekintünk x-re, mint egy alappont.

→ pontos hibát explicit alakban fel tudjuk írni

$$f(x) - N_n(x) = N_{n+1} - N_n = f[x, x_0 .. x_n] \cdot \omega_n$$

következmény

$$f[x, x_1 .. x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

Ha $x \in \mathbb{R}$, $x \ne x_i$
$[a,b]$ $x, x_1 \dots x_n$!
$\exists \xi_x \in [a,b]$ melyre

Csebisev-Polinomok (9)

Hogyan válasszuk meg az alappontokat

→ hogy lesz minimális a hibabecslés
↳ nem a hibát optimalizálja hanem a hibabecslést teszi pontosabbá

$$\boxed{T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))} \qquad x \in [-1,1]$$

Rekurziós alak

$T_0(x) = 1$ $\qquad T_1(x) = x$

$T_{n+1}(x) := 2x \cdot T(x) - T_{n-1}(x)$ $\qquad n = 1..$

Biz addíciós tétel kétszer

$\alpha = \arccos(x)$, $x = \cos(\alpha)$:

1x

$2x \cdot T(x) - T_{n-1}(x) = 2\cos(\alpha)\cdot\cos(n\alpha) - \cos((n-1)\alpha)$

$= \boxed{\dots} \cos(n\alpha)\cdot\cos(\alpha) - \sin(n\alpha)\cdot\sin(\alpha) =$

$= \cos((n+1)\alpha) = \underline{T_{n+1}}$

1 főegyütthatós csebisev polinom.

$P_n \in P_n$ Főegyüttható: 2^{n-1} $\qquad n \geq 1$

↓

egy-főegyütthatós: $\boxed{\tilde{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)}$

Tétel

→ T_n-nek n db különböző valós gyöke $[-1,1]$

→ 0-ra szimmetrikus

→ n prs/ptln ⟺ T prs/ptln

Explicit képlet Gyökökre

[absz max 1, úgy, hogy n-edfokú]

$$\boxed{x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\cdot\pi\right)} \quad , k = 0..n-1$$

↳ $\cos(\arccos(x)) = 0 \iff n\cdot\arccos(x_k) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

T_{n+1}-nek $n+1$ db szélsőértéke van $[-1,1]$-en

Ortogonális rendszert alkotnak.

$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ → súlyozott skalárszorzat
→ előjeles összegzés ≈ szorzat

$\langle T_n, T_k \rangle_w = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)\cdot T_k(x)}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = 0$ $\qquad n \neq k$

↳ bármely két cseb. polinom ort. egymásra

Csebisev-tétel

/miért ezek minimalizálják az interpolációs hibáját/

Extremális tulajdonsága a polinomoknak.
Ezért a csebisev pol.-ok minimalizálják az int.pol hibáját

$$\min_{\tilde{Q} \in P_n^{(1)}} \|\tilde{Q}\|_\infty = \|\tilde{T}_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$$

absz. max! → $\tilde{T}$

↓ összes egyfőegyütthatójú n-ed fokú polinom

↘ absz.max lehető legkisebb
$\|\tilde{Q}\|_\infty = \|\tilde{Q}\|_{C[-1,1]}$

↘ A csebisev polinomnak legkisebb $[-1,1]$-en a absz. max.-a!

Vegyük az összes "n" főegyütthatójú polinomot.
Ezek közül a Cseb-pol aminek a legkisebb a csúcsa.

Következmény $\Rightarrow$

Válasszuk meg $\boxed{\omega_n = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)}$-nél a csebisev polinom gyökeiket $\Rightarrow$ alappontok.

úgy, hogy ω_n-nek a minimuma $\|\ \|_\infty$-ra nézve.

úgy kell megválasztani, hogy az n+1. csebisev polinom legyen.

Interpolációs Hibája

lagrange

$$\|f - L_n\|_\infty \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \|\tilde{T}_{n+1}\|_\infty = \boxed{\frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}}$$

ez csak $[-1,1]$-en $\rightarrow$ $[a,b]$-n $\underbrace{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}}$

ki lehet terjeszteni.

a kettő szorzata kell ha $[a,b]$

$$\boxed{\varphi(x) := \frac{b-a}{2} \cdot x + \frac{a+b}{2}} \quad , x \in [-1,1]$$

$\hookrightarrow$ átképezés más intervallumba

Interpolációs Polinomok konvergenciája

$(x_0^{(1)}) \rightarrow L_0$

$(x_0^{(1)}, x_1^{(1)}) \rightarrow L_1$

$\vdots$

$(x_0^n, x_1^n, x_2^n) \rightarrow L_n$

alappontsor $\rightarrow$ interpolációs polinom

Egy másik ilyen lehetne a csebisev polinom

Kérdések $\rightarrow$ Ha növelem az alappontok számát, akkor tart-e az illesztett fv.

? $\lim\limits_{x\to\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0$

milyen x-re?

milyen f-re?

$\downarrow$

nem mindig igaz.

$\downarrow$

mikor igaz?

Tfh: $f \in C^\infty[a,b]$ és $\exists M > 0: \|f^{(n)}\|_\infty \le M^n$

van M ami minden deriváltjánál kisebb

ekkor $\forall (x_k^{(n)} : k = 0..n)$

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0$$

Végtelenül folyt. differenciálható: minden alappontrendszer jó.

Marcinkiewicz Ha $f \in C[a,b]$, akkor létezik jó alappontrendszersorozat. (egyenletes konvergencia)

speciális

Faber "Nincs univerzális alappontrendszer."

$\forall (x_k^{(n)} : k = 0..n)$ alappontrendszer sorozat esetén $\exists f \in C[a,b]$, hogy

$$\lim \|f - L_n\|_\infty \ne 0$$

Lagrange interpolációs öröklött hibája

Q: mi van, ha már az alappontsorozat se pontos már?

" amit mérek

$f(x_0) .. f(x_n) \rightarrow L_n \rightarrow$ pontos interpoláció

$f(\tilde{x}_0) .. f(\tilde{x}_n) \rightarrow \tilde{L}_n$

$\} \; |L_n - \tilde{L}_n|$ — $f(x)$ — $\tilde{f}(x)$

$f(x) = y$ koordináta picit pontatlan

Lebesque $|L|$ Lagrange alappolinomok abszolútértékeinek összegei

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |l_k(x)| \quad x \in [a,b]$$

alsó becslés: $\Lambda_n \geq \frac{2}{\pi} \ln(n+1) + c$ $(c \in \mathbb{R})$ állandó

Lebesque állandó $\Lambda_n := \max L_n(x) = \|L_n\|_\infty$

önöllött hiba

A pontoshoz képest vizsgálik

$$\boxed{\begin{aligned} |L_n - \tilde{L}_n| &\leq \varepsilon \cdot \Lambda_n \\ \varepsilon &= \max |f(x_i) - f(\tilde{x}_i)| \end{aligned}}$$

→ mérőműszer maximális hiba

Inverz Interpoláció

gyökkeresés interpol-al

ötlet: $f(x) = 0 \rightsquigarrow x^*$ $L_n(x^*) = 0$ -t megoldjuk

$x_{k+1} = x^*$!

Ez nem általánosítható $n > 2$-re

trükk: $f(x^*) = 0 \iff x^* = f^{-1}(0)$ megoldás

Az inverz fv közelítése a 0 pontban ⇒ megadja a gyöknek egy közelítését

$f(x_0) \dots f(x_n)$ ÉS $x_0 \dots x_n$ -re felírjuk a $Q_n(y) \approx f^{-1}(y)$

$x \mid f(x)$ $\underset{\text{helyett}}{\rightsquigarrow}$ $f(x) \mid x$ -et interpolálom

mor

Invertálható fv-eket lehet közelíteni az inverz interpolációval. ÉS gyököt keresni

Általánosított Inverz

≈Approximáció

10

Legkisebb négyzetek módszere (LSM)

Alappontok ⇒ polinom (n-ed) x_i pontokban

a $\underbrace{(y_i - p(x_i))^2}_{\sum}$ minimális

általában pontszám >> n → sokkal kisebb a pontszám

"elég közel van"

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} (y_i - p_n(x_i))^2}$$

→ Minimális az eltérések négyzetösszege

írjuk fel egy n-ed fokú polinomot $c \in \mathbb{R}$-ből

$P(x_n) = y_i \quad i = 1..N$ $\quad p_n(x) = a x^n + \dots a_1 x + a_0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & x_2^2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^n \end{bmatrix}_{N \times (n+1)} \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_n \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}_N$$

$Aa = y$ kell megoldani — nem négyzetes mx ???

→ ha $N = n+1$ akkor interpoláció. de most nem

$N > n+1$ esetben alapból nem megoldható.

Általánosított Inverz

túlhatározott teljes rangú mx általános megoldása:

$$n\begin{bmatrix} m<n \end{bmatrix}^{m} \qquad n\begin{bmatrix} m>n \end{bmatrix}^{m}$$

túlhatározott

rang(B) = m

$$B^+ = (B^TB)^{-1}B^T$$

Ezt fogjuk használni.

alulhatározott

rang(A) = n

$$A^+ = A^T\underbrace{(AA^T)^{-1}}_{\text{az inverz miatt kell a teljes rang}}$$

$$a^+ = A^+y = (A^TA)^{-1}\cdot A^Ty \iff \underbrace{A^T\cdot A}\cdot a^+ = A^Ty$$

Teljes rang = maximális számú független sora & oszlopa van

ez egy négyzetes mx! Erre már lehet más felbontást csinálni

Explicit alak: Gauss-féle normálegyenlet

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i & \cdots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & & \\ \vdots & & & \\ \sum x_i^n & & & \sum x_i^{2n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i^1 y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^n y_i \end{bmatrix}$$

Alappontok hatványössege. Mellékátlókban ua. értékek szerepelnek.

Tulajdonságok → Az illesztett polinom helyettesítési értékei, és a koordináták közti négyzetes távolság legkisebb

$$\|A\cdot a^+ - y\|_2 \le \|A\cdot a - y\|_2 \quad \forall a \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Bármilyen "a"-t veszünk, az mindig nagyobb, tehát az a^+ szinte sose lesz pontos megoldás. minimalizálja

$$\|A\cdot a - y\|_2^2 = \sum (p_n(x_i) - y_i)^2 \to \| \|_2\text{-ben.}$$

Négyzetesen legjobban közelít.

Ha egyenest illesztünk!

- Ha A teljes rangú
  ⇒ Akkor A^TA szimmetrikus, invertálható
- LER alakja n=1-ben

! Ha $\sum x_i = 0$

Nullára szimmetrikus alappontok esetén. pl. −1, 1

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{n}\sum y_i \quad a_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

ennek megoldása átosztva a diagonális elemekkel.

- Négyzetesen legjobban közelítő egyenes átmegy az átlagok pontján:

$$p = \left(\frac{1}{N}\sum x_i, \frac{1}{N}\sum y_i\right)$$

→ Miért minimalizálja a négyzetes eltérést a képlet?

Biz Szélsőérték

Adott: $y_i\ x_i$. Változók: $P_n(x)$ polinom. → Ezt minim.

minimalizálandó fv.

$$F(a_0 \ldots a_n) := \sum_{i=1}^{N}(y_i - p_n(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \sum_{j=0}^{n} a_j (x_i)^j\right)^2$$

Szélsőérték szükséges feltétele:

Ha deriválható a fv, akkor a derivált = 0

↓ deriváljuk k-adik változó szerint

$$\frac{\partial F}{\partial a_k}(a_0, \ldots a_n) = 0 \quad k = 0\ldots n$$

belső fv deriváltja

$$\sum_{i=1}^{N} 2\cdot(y_i - p_n(x_i))\cdot\left(-\frac{\partial p_n}{\partial a_k}(x_i)\right) = 0 \quad /:2$$

$y_i x_i$ -ket átviszük

újra behelyettesítjük ←

$$\sum^{N} p_n(x_i)\cdot(-(x_i)^k) = \sum^{N} y_i(x_i)^k$$

$$\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{n} a_j(x_i)^j\cdot(x_i)^k \Rightarrow \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=1}^{N} a_j (x_i)^{j+k} = \sum_{i=1}^{N} y_i(x_i)^k$$

összevonjuk ↗ kiemelhető.

kiemelve a_j-t a belső Σ-ből

megkapjuk a normálegyenletet

F'' poz. definit ⇒ egy minimumhely.

F' vektor F'' mx.

Numerikus Integrálás (11)

Feladat:

$\int_a^b f(x)\,dx$ illetve a $\int_a^b f(x)w(x)\,dx$

kiszámolása, ahol w = súlyfüggvény > 0

Eddig: Primitív fv $\mapsto$ Newton-Leibniz

Baj: - nehéz, vagy nincs!

$\int_0^1 e^{-x^2} = ?$ $\Rightarrow$ Numerikus Integrálás kell.

lehet hogy képlet sincs! $\Rightarrow$ két mérés között becsülni

$f(x)$-et közelítsük $\to$ L_n-el.

$\int_a^b w(x)\,dx < \infty$

$\int_a^b f(x)w(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)w(x)\,dx =$

$= \sum f(x_k)\underbrace{l_k(x)}_{\text{Lagrange alappolinomok}} w(x)\,dx = \sum f(x_k)\underbrace{\int_a^b l_k(x)w(x)\,dx}_{\text{alappolinomok integrálja}} =$

$\boxed{\sum A_k f(x_k)}$ kvadratúra formula

↳ Alappontokban felvett fvértékek bármely lin komb.-ja

kvadratúra interpolációs, ha: $A_k = \int_a^b l_k(x)w(x)\,dx$

Pontossági tétel → El kell dönteni egy formuláról, hogy interpolációs-e.

$\forall f \in P_n$-re: → legfeljebb n-edfokú polinom

$\int_a^b f(x)w(x)\,dx = \sum A_k f(x_k) \iff$

feltétel, hogy pontos 0, 1 ... n-edfokúra

$A_k = \int_a^b l_k w(x)\,dx$ $\quad k = 0..n$

$f \equiv 1$-re konstans 1 fv.

$\sum A_k = \int_a^b w(x)\,dx := \mu_0$

$w(x) \equiv 1$ is igaz, akkor

$\sum A_k = b-a$ ezen múlik, hogy interpolációs múlik alapesetben.

A $\sum A_k f(x_k)$-ban $2(n+1)$ db változó van.

↳ Ezekre is pontos tud lenni, ha még az alappontokat is előírjuk (~ Csebisev polinom is ilyen)

Formula típusok

- Newton-Cotes: $w(x) \equiv 1$, $\{x_i : i = 0..n\}$ egyenletes felosztás $[a,b]$-n
- Csebisev típus: $A_k \equiv A$ összes együttható egyenlő
- Gauss típus: maximális $2n+1$-ig pontos (ez a maximum)

Newton-Cotes típusú kvadratúraformulák

Zárt ← Az intervallum két szélső pontja is része az alappontoknak

Zárt $Z(n)$	Nyílt $Ny(n)$
$x_0 = a \quad x_n = b$	$x_0 = a+h \quad x_n = b-h$
$h = \frac{b-a}{n}$	$h = \frac{b-a}{n-2}$
$x_k = a + kh \quad k = 0..n$	$x_k = a+kh \quad k = 1..n-1$
	a, b NEM alappont

$w(x) \equiv$ és $x_k = x_0 + kh$ formában van.

Zárt N-C formula együtthatói

Bármely x kifejezhető $x = a + th$, ahol $t \in [0,n]$

$x - x_j = (t-j)h$ → j. edik alappont

$x_k - x_j = (k-j)h$ → j, k-adik alappontok távolsága

Nevesített N-C formulák

11ii

$$A_k \overset{(=)}{=} \int_a^b l_k(x)\,dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots \cancel{k} \cdots (x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots \cancel{k} \cdots (x_k-x_n)}\,dx$$

pontossági tétel szerint

A k-adik elem a lagrange polinomban sincs benne

$$t = \frac{x-a}{h}$$

$$A_k = h\cdot\int_0^n \frac{(t-0)\cdots \cancel{k} \cdots (t-n)}{(k-0)\cdots \cancel{k} \cdots (k-n)}\,dt =$$

nevező egy konstans, kiemeljük

integrálás határait vissza kell tolni.

$$= h\cdot \frac{(-1)^{n-k}}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-k}\,dt =$$

h-t kihelyettesítjük $\frac{b-a}{n}$-el

első k tényező $\sqrt{k}$ k+1 től a végéig

zárt a formula

$$= (b-a)\cdot \underbrace{\frac{(-1)^{n-k}}{n\,k!(n-k)!}\cdot\int_a^b \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-k}\,dt}_{B_k^Z} := B_k^{(Z)}$$

intervallum hosszától független

B_k együtthatók kiszámolása

Nyílt N-C együtthatók

$x = a + th \quad t\in[0, n+2]$

$x_i = (a+th) - (a+(j+1)h) = h(t-(j+1))$

$x_j = (a+(k+1)h) - (a+(j+1)h) = (k-j)h$

Interpolációból indulunk ki újra

$$B_{Ny} = \frac{(-1)^{n-k}}{(n+2)\cdot k!(n-k)!}\cdot\int_0^{n+2}\frac{(t-1)\cdots(t-(n+1))}{t-(k+1)}\,dt$$

$B_k^{(Ny)}$

Tétel

nyílt és zártra is!

elég együtthatók felét kiszámolni

$$\sum_{k=0}^n B_k^{\bullet} = 1 \qquad B_k = B_{n-k} \qquad k=0..n$$

Biz $f\equiv 1$-re pontos a formula.
Alappontok szimmetriájából $(y := n-t)$

Pontossági tétel jobboldaláról:
Együtthatói meghatározhatóak azzal, hogy leellenőrizzük, hogy mekkora polinomig pontosak.

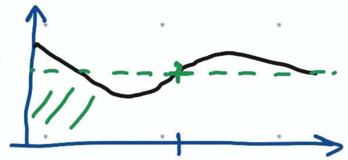
$P_n \overset{\text{pontosság}}{\sim} 1, x, \ldots x^n$ teljesülje

Nem kell explicit kiszámolni az együtthatókat $\int_a^b 1\,dx \ldots \int_a^b x\,dx \ldots$ Ha az összes teljesül, akkor kvadratúra formula

Érintő formula N-C kvad. ~ Ny(0)

$$\boxed{\int_a^b f \approx (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

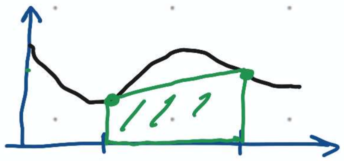
E(f)



$A_0 = b-a$

Trapéz formula ~ Z(1)

$$\boxed{\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2}\cdot\left(f(a)+f(b)\right)}$$



T(f) két alappont $A_0 = A_1$

$A_0 + A_1 = b-a \mapsto A_0 = A_1 = \frac{b-a}{2}$ → kvadratúra formula együtthatói

$B_k^{(Z)} = 1/2$

Simpson-formula ~ Z(2)

$$\boxed{\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6}\cdot\left(f(a) + 4\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}$$

S(f)

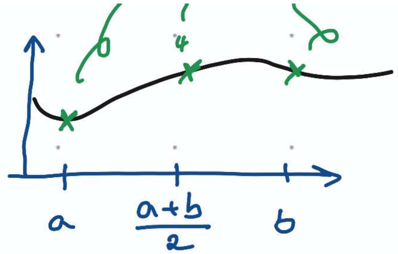
másodfokú polinommal becsüljük

együtthatók 1–4–1

$\frac{4}{6}(b-a) = A_1 \to$ középső együttható

$\frac{1}{6}(b-a) = A_0 = A_2$

↳ szimmetriáról szóló tételt használva.



Integrálszámítás középértéktétele

Ha $f \in C[a,b]$-n és $g \geq 0$, akkor $\exists \xi \in (a,b)$

$$\boxed{\int_a^b fg = f(\xi) \cdot \int_a^b g}$$

A bizonyításhoz szükséges. Szorzatintegrál felbontható

Az érintő hibaformulája

$$\int_a^b f - E(f) = \frac{(b-a)^3}{24} \cdot f''(\eta)$$

$\exists \eta \in [a,b]$ Ez magában nem hasznos, mert semmit sem mond ki η-ról

vs felülről akarjuk becsülni ezzel.

$$\boxed{\leq \frac{M_2}{24} \cdot (b-a)^3} \qquad M_2 := \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Trapézformula hibája

$$\int_a^b - T(f) = \quad f \in C^2[a,b]$$

$$-\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\eta) \leq$$

$$\boxed{\frac{M_2}{12} \cdot (b-a)^3}$$

Felső becslés

Simpson formula hibája

$$\int_a^b f - S(f) = \quad f \in C^4[a,b]$$

$$-\frac{(b-a)^5}{4! \cdot 5!} \cdot f^{(4)}(\eta) \leq$$

$$\boxed{-\frac{M_4}{2880} \cdot (b-a)^5}$$

Általános hibaképlete N–C

Ha n ptln és $f \in C^{n+1}[a,b]$, akkor $\exists \xi \in [a,b]$

↳ alappontok száma

$$\int_a^b f - I(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \int_a^b \omega_n(x)\,dx$$

?? hasonlít a képlet az interpolációhoz

$I :=$ N–C kvadratúra formula

↓ enyi különbség

Ha n prs $\leadsto$ ptln alappont

akkor: $\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \cdot \int_a^b x \cdot \omega_n(x)\,dx$

alappontok

Általános hibabecslés

Trapéz formula összetett változata

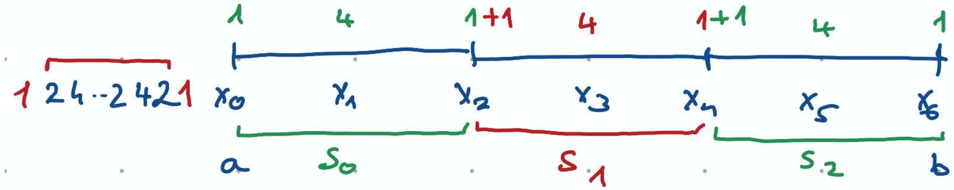
1 helyett "sokat" alkalmazunk $\Rightarrow$
$[a,b]$ intervallumot m egyenlő részre osztjuk és a részintervallumokon alkalmazzuk.

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2m} \cdot \left(f(a) + 2\sum f(x_k) + f(b)\right) := T_m(f)$$

összetett hiba: $-\frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot \underbrace{f''(\eta)}_{M_2}$

Összetett Simpson formula

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{3m} \cdot \left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{m/2} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{m/2-1} f(x_{2k}) + f(b)\right)$$



összetett hiba: $\frac{(b-a)^5}{180m^4} \cdot f^{(4)}(\eta)$

Ha $f \in C^2[a,b]$ és $f \in C^4[a,b]$, akkor $m \to \infty$ -ben

$T_m(f) \xrightarrow[m^2]{} \int_a^b f$ és $S_m(f) \xrightarrow[m^4]{} \int_a^b f$ → S-formula 2×sűrűbb m => 16×pontosabb

nagyságrendben közelít az alappontok számának függvényében

Richardson-féle extrapoláció

Trapézformulával akarjuk: 2m → 1/4 hiba helyett 2m → 1/16 hiba

Olyan helyeken jó, ahol a mérés is drága, tehát nem lehet nagyon sok alappont

Trapézformula m és 2m alappontra:

m: $\frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot f''(\eta_1)$

2m: $\frac{(b-a)^3}{48m^2} \cdot f''(\eta_2)$

Ha f'' elég sima ($= f'''$ elég pici) $\Rightarrow f''(\eta_1) \approx f''(\eta_2)$ akkor ② egyenlet 16× − ① $\Rightarrow$

Javító formulák

Trapéz

$\frac{1}{3}\left[4T_{2m}(f) - T_m(f)\right] = S_m(f)$

A simpson formulát adja!

$O(h^4) \approx m^4$

Ha f'' korlátos $[a,b]$-n

$\left|\int_a^b f - T_m(f)\right| \leq |T_m(f) - T_{2m}(f)|$

Nincs szükség a deriváltra, csak a mérések kellenek a hibabecsléshez.

Simpson

$\frac{1}{15}\left[16 S_{2m}(f) - S_m(f)\right]$

közelítés hibája $O(h^6)$

Ha $f^{(4)}$ korlátos $[a,b]$-n

$m \to 2m$: $1 \to 1/64$ hiba

$\left|\int_a^b f - S_m(f)\right| \leq |S_m(f) - S_{2m}(f)|$

Gyökök becslése (12)

Ez máshol van a tananyagban, de nem kapcsolódik sehova máshova

Vizsga 3×5 kérdés: 0 … 15; kettes: 8p, 12p hármas

n-edfokú polinom

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \dots + a_1 x + a_n$ $a_i \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$

Ha $a_0 = 0$, akkor $x = 0$ gyök → egyszerűsíthető

komplex gyök is lehet

Becslés polinom gyökeire:

$P(n)$ polinomra bármely x_k-ra: $\boxed{r < |x_k| < R}$

$$\boxed{R = \frac{\max\limits_{i=0}^{n-1} |a_i|}{|a_n|} \qquad r = \frac{1}{1 + \frac{\max\limits_{i=1}^{n} |a_i|}{|a_0|}}}$$

Origó középpű nyílt körgyűrűt adunk meg

Biz

$y := \frac{1}{x} \to P(x) \to P\left(\frac{1}{y}\right)$

$P(x_k) = 0 \iff Q\left(\frac{1}{x_k}\right) = 0$

$\frac{1}{|x_k|} < 1 + \frac{\max\limits_{i=1}^{n} |a_i|}{|a_0|} = \frac{1}{r} \Rightarrow |x_k| > r$

Horner Algoritmus (12ii)

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0 =$

Átzárójelezve:

$P(x) = \underbrace{(a_n x^{n-1} + \dots a_2 x + a_1)}_{a_1^{(1)} \text{ – első derivált}} \cdot x + a_0 =$

$= \underbrace{(\dots)}_{a_2^{(1)}} x + a_1) x + a_0 =$

$= (((a_{n-1}^{(1)} \dots) \dots) \dots) + a_0$

Horner Algoritmus

$P(x)$ polinom ξ helyen vett helyettesítési értéke:

$a_n^{(1)} = a_n$

$a_k^{(1)} = a_k + \xi \cdot a_{k+1}^{(1)}$ $\quad k = n-1 \dots 1, 0$

ekkor $P(\xi) = a_0^{(1)}$

N-edfokú polinom adott helyen felvett értéke kiszámítható $O(n)$-ben $(n \otimes, n \oplus)$

Példa

$P(x) = 1x^5 + 6x^4 - x^3 + 3x^2 - 15x - 7$ $\quad \boxed{\xi = 2}$

	1	6	−1	3	−15	−7
2		2·1	2·8	2·15	2·33	2·51
	1	8	15	33	51	$\boxed{95}$

← $P(2) = 95$

Deriválttal kapcsolat

$P(x) = a_0^{(1)} + (x - \xi) \cdot \overbrace{(a_1^{(1)} + \dots \; a_n^{(1)} x^{n-1})}^{P_1(x)}$

ahol az $a_i^{(1)}$ értékeket a Horner algo adja.

$\boxed{P'(\xi) = P_1(\xi) = a_1^{(2)}}$ ez egy Taylor-polinom ξ körül.

Továbbá:

$$\frac{P^{(j)}(\xi)}{j!} = P_j(\xi) = a_j^{(j+1)}$$

ahol $P_j(x) = a_j^{(j)} + \dots + a_n^{j} x^{n-j}$

Pl: $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ $\quad \boxed{\xi = 1}$

1	−2	3	−1	1
1	1·1	1·(−1)	1·2	1·1
1	−1	2	1	$\boxed{1 = P(1)}$
1	1·1	1·0	1·2	
1	0	2	$\boxed{3 = P'(1)}$	
1	1·1	1·1		
1	1	$\boxed{3 = \frac{P''(1)}{2}}$		
	1			

$$\boxed{2 = \frac{P'''(1)}{3!}}$$