Inhaltsverzeichnis

1 Ableiten

1.1 Grundfunktionen

- $(x^r)' = rx^{r-1}$
- $(\frac{1}{x^r})' = \frac{r}{x^{r+1}}$
- $ln(x)' = \frac{1}{x}$
- $sin(x)' = cos(x)$
- $cos(x)' = -sin(x)$
- $arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $arccos(x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $arctan(x)' = \frac{1}{1-x^2}$

1.2 Ableitungsregeln

- $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$
- $f(x) = cu(x) \Rightarrow f'(x) = cu'(x)$
- $f(x) = u(x)v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
- $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$
- $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x))v'(x)$

1.2.1 Taylorreihe

- $T_a(f) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$

1.3 Trigonometrie

- $\alpha^\circ = \alpha^{(r)} \frac{180^\circ}{\pi}$
- $sin(\alpha)^2 + cos(\alpha)^2 = 1$
- $sin(-\alpha) = -sin(\alpha)$
- $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$
- $sin(2\alpha) = 2sin(\alpha)cos(\alpha)$
- $cos(2\alpha) = cos(\alpha)^2 - sin(\alpha)^2$
- $tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}$

2 Abbildungen: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

2.1 Linearisierung

$$f(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \cdots x_n + \delta x_n) \approx f(x_1 \cdots x_n) + \frac{\delta f}{\delta x_1}\delta x_1 \cdots + \frac{\delta f}{\delta x_n}\delta x_n$$

2.2 Fehlerrechnung

$$e_{max} = \left|\frac{\delta f}{\delta x_1}(\bar{x_1} \cdots \bar{x_n})\Delta x_1\right| + \cdots + \left|\frac{\delta f}{\delta x_n}(\bar{x_1} \cdots \bar{x_n})\Delta x_n\right|$$

(Δx_i ist die Messabweichung, $\bar{x}_i$ der Messwert)

2.3 Richtungsableitung

- Gradient: $G_f = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \cdots \frac{\delta f}{\delta x_n}\right)$
- Richtungsableitung: $f'_v(x_1, x_2, \cdots x_n) = \vec{v} \cdot \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \cdots \frac{\delta f}{\delta x_n}\right)$
- Steigungsgerade: $g(x_1, x_2, \cdots x_n) = P + \lambda G_f(P)$
  - Richtung maximaler Steigung an einem Punkt P
    $\vec{d} = G_f(P)$
  - Steigung in Richtung $\vec{d}$
    $m = |\vec{d}|$
  - Steigungswinkel
    $\alpha = arctan(m)$

2.4 Integration

- Doppelintegral (Funktionen mit mehreren Parametern)
  $\int_B f(x,y) = \int_{a1}^{a2}(\int_{b1}^{b2} f(x,y)dy)dx$
- Geschachtelte Funktionen
  $\int_{B \left|{}^{g(x)}_{f(x)}\right.} f(x,y) = \int_{a1}^{a2}(\int_{f(x)}^{g(x)} f(x,y)dy)dx$
- Allgemein gilt:
  Sind $f_{x,y}$ und $f_{y,x}$ stetig, so ist $f_{x,y} = f_{y,x}$

2.5 Extremwerte

2.5.1 Rezept: Minimum/Maximum

1. $\frac{\delta}{\delta x} f(x_0, y_0) = 0 \wedge \frac{\delta}{\delta y} f(x_0, y_0) = 0$
2. $\Delta = \frac{\delta\delta}{\delta\delta x} f(x_0, y_0) \cdot \frac{\delta\delta}{\delta y \delta x} f(y_0, y_0) \cdot (\frac{\delta}{\delta x} f(x_0, x_0))^2$
   - $\frac{\delta\delta}{\delta\delta x} f(x_0, y_0) < 0$ relatives Maximum

- $\frac{\delta\delta}{\delta\delta x} f(x_0, y_0) > 0$ relatives Minimum
- $\Delta < 0$ Sattelpunkt
- $\Delta = 0$ nicht Entscheidbar

3 Abbildungen: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

3.1 Linearisierung

$f(t + \Delta t) \approx f(t) + \Delta t \cdot f'(t)$

3.1.1 Bogenlänge

- Normale Funktionen: $L_{a,b} \approx \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$
- Parametrisiert:

$$f : x \to \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix} \Rightarrow L_{a,b} = \int_a^b \left| \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ f_3'(x) \end{pmatrix} \right|_2 dx$$

3.1.2 Krümmung

- $K(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}^3}$
- Krümmungskreis Radius: $\frac{1}{K(x)}$

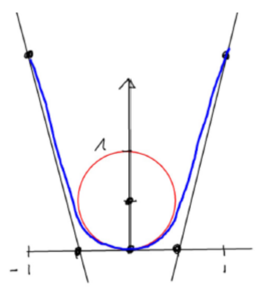

Abbildung 1: Krümmunkskreis im Scheitelpunkt