Inhaltsverzeichnis

1 Fehler **2**
1.1 Kategorien . . . 2
1.2 Maschienenzahlen . . . 2
1.3 Formeln . . . 3

2 Interpolation **4**
2.1 Vandermonde . . . 4
2.2 Lagrage . . . 4
2.3 Newton . . . 5
2.4 Chebyshev Stützstellen . . . 5
2.5 Kubische Splines . . . 5
2.6 Nachteile Polynominterpolation . . . 6

3 Differenzenquotient **7**
3.1 Varianten . . . 7
3.2 Verfahrensfehler . . . 7
3.3 Absoluter Fehler . . . 7
3.4 Optimales h . . . 7
3.5 Ordnung des Fehlers . . . 8

4 Integration **9**
4.1 Trapez . . . 9
4.2 Simpson . . . 9
4.3 Newton-Cotes . . . 9
4.4 Gaus-Legendre Stützstellen . . . 10
4.5 Romberg . . . 10
4.6 Adaptiv . . . 11

5 Lineare Gleichungssysteme **12**
5.1 Rechenaufwand . . . 12
5.2 Normen . . . 12
5.3 Fehler . . . 12
5.4 LU-Zerlegung . . . 13
5.5 QR-Zerlegung: Householder . . . 13
5.6 Cholesky-Zerlegung . . . 15

6 Lineare Ausgleichsrechnung **16**
6.1 Normalengleichung . . . 16
6.2 Householder . . . 16

7 Iterative Verfahren **17**
7.1 Fixpunktiteration . . . 17
7.2 Newtonverfahren . . . 17
7.3 Sekantenverfahren . . . 17
7.4 Mehrdimensional . . . 17

1 Fehler

1.1 Kategorien

- Modellfehler (Vereinfachungen)
- Eingabefehler (ungenaue Daten oder vorherige Berechnungen)
- Verfahrensfehler (näherungsweise Berechnung, z.B. Linearisierung)
- Rundungsfehler (Maschienenzahlen)

1.2 Maschienenzahlen

Aufbau

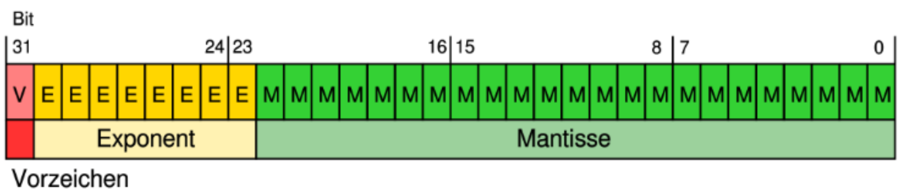

Abbildung 1: 32bit Fließkomma (single)

Standartgrößen

- Single: 32Bit
  VZ = 1Bit, EXP = 8Bit, MAN = 23Bit, B = 127
- Double: 64Bit
  VZ = 1Bit, EXP = 11Bit, MAN = 52Bit, B = 1023

Berechnung

- Dezimal zu Binär
  Für die Dezimalzahl **x** wiederhole:
  - $\widetilde{x} := 2 \cdot x$
  - $b_i = \widetilde{x}$ div 1
  - $x := \widetilde{x}$ mod 1

  Ergebnis: $0.b_1 b_2 ... b_n$
- Normalisierung $M = (0 := +, 1 := -)1.m \cdot 2^E$
- Exponent $e = E - B$

Rundungsfehler

- Auslöschung
  Subtraktion gleichgroßer Zahlen $\Rightarrow$ Ergebnis wird durch 0ller aufgefüllt
- Angleichung
  Addition oder Subtraktion, betragsmäßig sehr unterschiedlicher Zahlen

1.3 Formeln

- Absoluter Fehler: $\triangle x = |x - \widetilde{x}|$
- Relativer Fehler: $rel = \frac{\triangle x}{|x|}$
- Maschinengenauigkeit: $\epsilon = 2^{-n}$
- Kondition (Verstärkung von Eingabefehlern zu Ausgabefehlern)
  $\kappa = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x \right|$
  (schlechte Kondition wenn $\kappa \gg 1$)
- Taylorreihen
  - $sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots$
  - $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots$
  - $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}$
- Trigonometrische Umformungen
  - $sin(\alpha)^2 + cos(\alpha)^2 = 1$
  - $sin(-\alpha) = -sin(\alpha)$
  - $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$
  - $sin(2\alpha) = 2sin(\alpha)cos(\alpha)$
  - $cos(2\alpha) = cos(\alpha)^2 - sin(\alpha)^2$
  - $sin(\alpha + \beta) = cos(\alpha)sin(\beta) - sin(\alpha)cos(\beta)$
- Ableitung von Grundfunktionen
  - $(sin(x))' = cos(x)$
  - $(cos(x))' = -sin(x)$
  - $(ln(x))' = \frac{1}{x}$

2 Interpolation

2.1 Vandermonde

- Allgemeine Formel

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_{n-1} x^{n-1}$$
$$A\vec{x} = \vec{y}$$

- Lösungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

- Hornerschema

$$p(x) = (...((c_n x + c_{n-1})x + c_{n-2})x + \cdots + c_1)x + c_0$$

- Aufwand: $O(n^3)$

2.2 Lagrage

- Einzelpolynom

$$L_j = \prod_{k=0, k\neq j} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \implies \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}$$

- Gesamtpolynom

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i$$

- Aufwand: $O(n^2)$

2.3 Newton

- Allgemeine Formel

$$p_n(x) = y_0 + y_{10}(x-x_0) + y_{210}(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + y_{n\cdots 3210}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

- Dividierte Differenzen (Diagonale y-Werte sind b-Werte)

$$\begin{array}{c|cccc}
x_0 & y_0 & & & \\
x_1 & y_1 & y_{10} & & \\
x_2 & y_2 & y_{21} & y_{210} & \\
x_3 & y_3 & y_{32} & y_{321} & y_{3210} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

$$y_{k\cdots l} = \frac{y_{k\cdots(l+1)} - y_{(k-1)\cdots l}}{x_k - x_l} \implies y_{321} = \frac{y_{32} - y_{21}}{x_3 - x_1}$$

- Aufwand: $O(n^2)$ (mit besserer Konstante)

2.4 Chebyshev Stützstellen

$$x_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right)$$

2.5 Kubische Splines

- Allgemeine Formel

$$s_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$$

- Formeln für die Parameter

1. $h_i = x_{i+1} - x_i$
2. $a_i = y_i$
3. $A\vec{c} = \vec{r} \implies c_i$

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \cdots \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{y_2-y_1}{h_1} - 3\frac{y_1-y_0}{h_0} \\ 3\frac{y_3-y_2}{h_2} - 3\frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \vdots \\ 3\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - 3\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{pmatrix}$$

$dim(A) = (n-2) \times (n-2)$ wobei n der Anzahl der Eingabewerte entspricht.

4. $b_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i)$
5. $d_i = \frac{c_{i+1}-c_i}{3h_i}$

- Aus den Ableitungen
  - $y_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_{i+1}$
  - $b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}$
  - $2c_i + 6d_i h_i = 2c_{i+1}$
- Natürliche Splines (Erste und letzte Spalte von A fallen weg) (Spline ist eine Gerade außerhalb des Intervalls)
  $c_0 = c_n = 0$
- Not-a-knot Splines (Erste u. letzte Spalte von A fallen weg) (Stetigkeit der 3. Ableitung für x_1 und x_{n-1})
  $d_0 = d_1 \wedge d_{n-2} = d_{n-1}$

  $$c_0 = \frac{(h_0 + h_1)c_1 - h_0 c_2}{h_1}$$

  $$c_n = \frac{(h_{n-2} + h_{n-1})c_{n-1} - h_{n-1}c_{n-2}}{h_{n-2}}$$

  Außerdem Anpassung des r-Vektors

  $$\begin{pmatrix} \frac{h_1}{h_0+h_1} \cdot r_1 \\ \vdots \\ \frac{h_{n-2}}{h_{n-2}+h_{n-1}} \cdot r_{n-1} \end{pmatrix}$$

- Fehler $H = \frac{h_{max}}{h_{min}}$

  $$|f(x) - s(x)| \leq 2H \cdot max_{x=x_0 \cdots x_n} |f^{(4)}(x)| h_{max}^4$$

2.6 Nachteile Polynominterpolation

- Interpolationsaufgabe höherer Ordnung sehr schlecht konditioniert
- Große Interpolations fehler in den Randbereichen
- Polynome hoher Ordnung sehr stark oszillieren
- Stückweise Interpolation oft nicht differenzierbar

3 Differenzenquotient

3.1 Varianten

- Vorwärtsdifferenz (von x aus nach rechts)
  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- Rückwertsdifferenz (von x aus nach links)
  $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$
- Zentral (von x aus zu beiden Seiten)
  $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

3.2 Verfahrensfehler

- Taylorreihe

$$T(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2}(x-a)^2+\cdots$$

- In Formel Einsetzen

a	x
x_0	$x_0 + h$

- Fehler Berechnen

$$e_v(h) = \left| \frac{T(f(x_0+h)) - f(x_0)}{h} - f^{(1)}(x_0) \right|$$

3.3 Absoluter Fehler

- $\epsilon_f = maximaler\ Rundungsfehler$
- $M = Maximum\ 2ter\ Ableitung$

$$|e(h)| \leq \frac{h}{2}M + \frac{2\epsilon_f}{h}$$

3.4 Optimales h

$$h_{opt} \approx 2\sqrt{\frac{|f(x_0)|\epsilon_f}{M}}$$

3.5 Ordnung des Fehlers

$Formel$	$e_v(h)$	$e_R(h)$
$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	$h\frac{f^{(2)}(z)}{2}$	$\frac{2\epsilon_f}{h}$
$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$	$h^2\frac{f^{(3)}(z)}{6}$	$\frac{\epsilon_f}{h}$
$f'(x_0) \approx \frac{-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)}{2h}$	$h^2\frac{f^{(3)}(z)}{3}$	$\frac{4\epsilon_f}{h}$
$f'(x_0) \approx \frac{-f(x_0+2h)+8f(x_0+h)-8f(x_0-h)+f(x_0-2h)}{12h}$	$h^4\frac{f^{(5)}(z)}{30}$	$\frac{3\epsilon_f}{2h}$

4 Integration

4.1 Trapez

- Einfach
  $T(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$

- Zusammengesetzt
  $T^{(n)}(f) = h(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n))$

- Fehler
  $\left| \int_a^b (f(x) - p(x))dx \right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12}$

- $M_{(n)} = max_{[a,b]}|f^{(n)}(x)|$

4.2 Simpson

- Einfach
  $S(f) = \frac{h}{6}(f(x_0) + 4f(\frac{x_0+x_1}{2}) + f(x_1))$

- Zusammengesetzt

$$S^{(n)}(f) = \frac{h}{6}\left(f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 4\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\big) + f(x_n)\right)$$

- Fehler
  $e_v = \left| \int_a^b (f(x) - p(x))dx \right| \leq \frac{M_4(b-a)^5}{2880}$

4.3 Newton-Cotes

- Allgemeine Formel

$$P(f) = (b-a)\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

- Tableau

n	a_i					$name$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				$Trapez$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$			$Simpson$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8} - Regel$
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$	$Milne/Boole$

4.4 Gaus-Legendre Stützstellen

- Formeln
  $x_k = \frac{b-a}{2}\widetilde{x}_k + \frac{b+a}{2}$
  $\alpha_k = \frac{b-a}{2}\widetilde{\alpha}_k$

- Werte für $\widetilde{x}_k$

n	$\widetilde{x}_k$			
0	0			
1	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$		
2	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	
3	$-\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$-\sqrt{\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\sqrt{\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$

- Werte für $\widetilde{\alpha}_k$

n	$\widetilde{\alpha}_k$			
0	2			
1	1	1		
2	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{9}$	
3	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$

4.5 Romberg

- Allgemeine Formel

$$T_h^{(k)} = \frac{2^{2k}T_{h/2}^{(k-1)} - T_h^{(k-1)}}{2^{2k}-1}$$

- Tableau

h	$T_h^{(0)}$			
$\frac{h}{2}$	$T_{h/2}^{(0)}$	$T_h^{(1)}$		
$\frac{h}{4}$	$T_{h/4}^{(0)}$	$T_{h/2}^{(1)}$	$T_h^{(2)}$	
$\frac{h}{8}$	$T_{h/8}^{(0)}$	$T_{h/4}^{(1)}$	$T_{h/2}^{(2)}$	$T_h^{(3)}$

- Diagonale Ausgerechnet

0	1	2	3
$T_h^{(0)}$	$\frac{4T_{h/2}^{(0)}-T_h^{(0)}}{3}$	$\frac{16T_{h/2}^{(1)}-T_h^{(1)}}{15}$	$\frac{64T_{h/2}^{(2)}-T_h^{(2)}}{63}$

- Bedingung für Termination

$$\frac{|T_h^{(k)}(f) - T_h^{(k-1)}(f)|}{|T_h^{(k)}(f)|} \leq TOL$$

4.6 Adaptiv

1. Starte mit $I_0 = [a, b]$ und TOL:

   - $S^{(0)}_{[a,b]}(f)$
   - $S^{(1)}_{[a,b]}(f) = S^{(0)}_{[a,\frac{a+b}{2}]}(f) + S^{(0)}_{[\frac{a+b}{2},b]}(f)$

2. Wenn $|S^{(0)}_{[a,b]}(f) - S^{(1)}_{[a,b]}(f)| > (2^q - 1) \cdot TOL$ dann:

   (a) Halbiere Intervall I in $[a_1, b_1]$ und $[a_2, b_2]$

   (b) Wiederhole den Algorithmus für jedes Teilintervall

3. Fehler

$$E_h(f) = I(f) - S_h(f) \approx \frac{2^q}{2^q - 1}(S_{h/2}(f) - S_h(f))$$

   - Simpson: $q = 4$
   - Trapez: $q = 2$

5 Lineare Gleichungssysteme

5.1 Rechenaufwand

- $v^T \cdot w \Rightarrow O(n)$
- $A \cdot v \Rightarrow O(n^2)$
- $A \cdot B \Rightarrow O(n^3)$
- $Ax = b \Rightarrow O(n^3)$

5.2 Normen

Vektornorm

1. Summennorm $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
2. Euklidsche Norm $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
3. Maximumnorm $||x||_\infty = max(x)_{i=1\cdots n}|x_i|$

Matrixnorm

Maß für maximale Streckung eines Vektors

1. Spaltensummennorm $||A||_1 = max(x)_{j=1\cdots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
2. Euklidsche Norm $||A||_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$
3. Zeilensummennorm $||A||_\infty = max(x)_{i=1\cdots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

5.3 Fehler

- Absoluter Fehler
$$|| \triangle x|| \leq ||A^{-1}|| \cdot || \triangle b||$$
- Relativer Fehler
$$\frac{|| \triangle x||}{||x||} \leq (||A^{-1}|| \cdot ||A||) \cdot \frac{|| \triangle b||}{||b||}$$
- Kondition
$$\kappa(A) = ||A^{-1}|| \cdot ||A||$$

Eigenschaften: Kondition

- $\kappa(A) \geq 1$
- $\kappa(I) = 1$
- $\kappa(\lambda A) = \kappa(A)$
- singulär: $\kappa(A) = \infty$

5.4 LU-Zerlegung

Kompakte Schreibweise

$$LU = \begin{pmatrix} u & u & u & u \\ l & u & u & u \\ l & l & u & u \\ l & l & l & u \end{pmatrix}$$

Bessere Kondition

- Vertausche in jeder Spaltenrechnung, so dass der Pivot am größten ist (Permutationsvector p)
- Für jeden Schritt (m = Zeilenindex):

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \widetilde{m} \\ \vdots \\ \widetilde{m} \end{pmatrix}$$

5.5 QR-Zerlegung: Householder

Eigenschaften der Q-Matrix

- $Q^{-1} = Q^T$
- $||Q||_2 = 1$
- $Q^T Q = QQ^T = I$
- für jede reguläre Matrix existiert eine QR-Zerlegung
  - A ist regulär wenn es eine inverse gibt
  - regulär wenn rank(A) = n

Verfahren

$$A = QR \Rightarrow R \cdot \vec{x} = Q^T \cdot \vec{b}$$

Berechnung von $Q^T \cdot \vec{b}$ und R

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

1. Householdervektor

$$\vec{v}_1 = \vec{a}_1 + sign(\vec{a}_{11}) \cdot ||\vec{a}_1||_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Spiegelung

$$Q_1 a_i = a_i - \frac{2}{v_1^T v_1} v_1 (v_1^T a_i)$$

$$Q_1 b = b - \frac{2}{v_1^T v_1} v_1 (v_1^T b)$$

3. Iteration

$$A_2 = Q_2 = \begin{pmatrix} Q_1 a_1 & Q_1 a_2 & \cdots & Q_1 a_n \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \widetilde{Q}_2 & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \widetilde{b}_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

4. Verwende $\widetilde{Q}_2$ und $\widetilde{b}_2$ und wiederhole schritte

$$\vec{a}_i := Q_1 \widetilde{a}_{i+1}$$

$$\vec{b}_i := Q_1 \widetilde{b}_{i+1}$$

5. Zusammensetzen

$$R = \begin{pmatrix} Q_1 & & \\ & \widetilde{Q}_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$Q^T \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \widetilde{b}_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

5.6 Cholesky-Zerlegung

Positiv definit

- Alle Eigenwerte sind positiv
- LU-Zerlegung ohne Vertauschungen $\Rightarrow$ positive U-Diagonale

Verfahren

Allgemeine Formel: $A = L \cdot L^T$
Verwendung: $Ax = b \Rightarrow Ly = b \Rightarrow L^T x = y$

$$l_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i < j \\ \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} & \text{für } i = j \\ \frac{1}{l_{jj}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}) & \text{für } i > j \end{cases}$$

Vergleich: LU, QR, Cholesky

- LU
  - Rechenaufwand: $(O(n^3))$
  - Sehr schlechte Kondition bei fast Singulären Matrizen
  - Bei fast Singularität durch Rundungsfehler nicht mehr eindeutig lösbar.
- QR
  - Rechenaufwand: doppelt so groß wie der der LU Zerlegung
  - Numerisch Stabil
- Cholesky
  - Geringster Rechenaufwand: halb so groß wie der der LU zerlegung
  - Kondition verschlechtert sich nicht
  - Matrizen sind nie singulär
  - Keine Pivot-Suche nötig für numerische Stabilität
  - Nur bei Positiv Definiten Matrizen möglich

6 Lineare Ausgleichsrechnung

6.1 Normalengleichung

Allgemeine Formel

- $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)$
- Ausgleichsproblem

$$A = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & \cdots & f_n(x_m) \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A^T A\alpha = A^T b$$

- Aufwand $m \cdot n^2 + \frac{1}{3}n^3$

6.2 Householder

- Approximierende Funktion: $f(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x$
- Ausgleichsproblem: $A\alpha = f(\vec{x}) \Rightarrow R\alpha = Q^T \cdot f(\vec{x})$
- Wende Householder auf Ausgleichsproblem an
- Residuum (Näherungsfehler)

$$Q^T\vec{b} = \begin{pmatrix} \vdots \\ res \end{pmatrix}$$

7 Iterative Verfahren

7.1 Fixpunktiteration

- Gleichung umformen: $f(x) = 0 \Rightarrow x = g(x)$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = x\alpha f(x)$$

- Konvergent (anziehend) wenn: $|g'(x*)| < 1$ für gegebenen Punkt

7.2 Newtonverfahren

- Allgemeines Verfahren

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- Als Fixpunkt

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

- Quadratische Näherung, nicht nur linear

$$x_{i+1} = x_i - m\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

  m ist Position der gesuchten Nullstelle

7.3 Sekantenverfahren

- Allgemeine Verfahren

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1}} f(x_i)$$

- Konvergiert nur linear

7.4 Mehrdimensional

Eine Gleichung

1. Gradient

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x_1} \\ \frac{\delta f}{\delta x_2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

2. Jacobi-Matrix J_g

$$J_g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\delta \nabla f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta \nabla f_1}{\delta x_2} & \cdots \\ \frac{\delta \nabla f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta \nabla f_2}{\delta x_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3. Iteration

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i - J_g^{-1}(\vec{x}_i) \cdot \nabla f(\vec{x}_i)$$

GLS

1. Alle Gleichungen nach 0 auflösen

$$g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\vec{x}) \\ g_2(\vec{x}) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

2. Jacobi-Matrix J_g

$$J_g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\delta g_1}{\delta x_1} & \frac{\delta g_1}{\delta x_2} & \cdots \\ \frac{\delta g_2}{\delta x_1} & \frac{\delta g_2}{\delta x_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3. Iteration

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i - J_g^{-1}(\vec{x}_i) \cdot g(\vec{x}_i)$$