Inhaltsverzeichnis

1 Ableiten

1.1 Grundfunktionen

- $(a^x)' = a^x \cdot ln(x)$
- $(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)} \cdot (ln(f(x)) \cdot g(x))'$
- $(x^r)' = rx^{r-1}$
- $(\frac{1}{x^r})' = \frac{r}{x^{r+1}}$
- $ln(x)' = \frac{1}{x}$
- $sin(x)' = cos(x)$
- $cos(x)' = -sin(x)$
- $arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $arccos(x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $arctan(x)' = \frac{1}{1-x^2}$

1.2 Ableitungsregeln

- $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$
- $f(x) = cu(x) \Rightarrow f'(x) = cu'(x)$
- $f(x) = u(x)v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
- $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$
- $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x))v'(x)$

1.2.1 Taylorreihe

- $T_a(f) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$

1.3 Trigonometrie

- $\alpha^\circ = \alpha^{(r)} \frac{180^\circ}{\pi}$
- $sin(\alpha)^2 + cos(\alpha)^2 = 1$
- $sin(-\alpha) = -sin(\alpha)$
- $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$
- $sin(2\alpha) = 2sin(\alpha)cos(\alpha)$
- $cos(2\alpha) = cos(\alpha)^2 - sin(\alpha)^2$
- $tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}$

1.4 Andere Formeln

- $i^2 = -1$
- $e^{i\varphi} = cos(\varphi) + i$

2 Abbildungen: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

2.1 Linearisierung

$$f(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \cdots x_n + \delta x_n) \approx f(x_1 \cdots x_n) + \frac{\delta f}{\delta x_1}\delta x_1 \cdots + \frac{\delta f}{\delta x_n}\delta x_n$$

2.2 Fehlerrechnung

$$e_{max} = \left|\frac{\delta f}{\delta x_1}(\bar{x_1} \cdots \bar{x_n})\Delta x_1\right| + \cdots + \left|\frac{\delta f}{\delta x_n}(\bar{x_1} \cdots \bar{x_n})\Delta x_n\right|$$

(Δx_i ist die Messabweichung, $\bar{x}_i$ der Messwert)

2.3 Richtungsableitung

- Gradient: $G_f = (\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \cdots \frac{\delta f}{\delta x_n})$
- Richtungsableitung: $f'_v(x_1, x_2, \cdots x_n) = \vec{v} \cdot G_f$
- Steigungsgerade: $g(x_1, x_2, \cdots x_n) = P + \lambda G_f(P)$
  - Richtung maximaler Steigung an einem Punkt P
    $\vec{d} = G_f(P)$
  - Steigung in Richtung $\vec{d}$
    $m = |\vec{d}|$
  - Steigungswinkel
    $\alpha = arctan(m)$

2.4 Integration

- Doppelintegral (Funktionen mit mehreren Parametern)
  $\int_B f(x,y) = \int_{a1}^{a2}(\int_{b1}^{b2} f(x,y)dy)dx$
- Geschachtelte Funktionen
  $\int_{B_{|_{f(x)}^{g(x)}}} f(x,y) = \int_{a1}^{a2}(\int_{f(x)}^{g(x)} f(x,y)dy)dx$
- Allgemein gilt:
  Sind $f_{x,y}$ und $f_{y,x}$ stetig, so ist $f_{x,y} = f_{y,x}$

2.5 Extremwerte

2.5.1 Rezept: Minimum/Maximum

1. $\frac{\delta}{\delta x} f(x_0, y_0) = 0 \wedge \frac{\delta}{\delta y} f(x_0, y_0) = 0$ Extremwert
2. $\Delta = \frac{\delta\delta}{\delta\delta x} f(x_0, y_0) \cdot \frac{\delta\delta}{\delta\delta y} f(y_0, y_0) \cdot (\frac{\delta}{\delta x \delta y} f(x_0, x_0))^2$
   - $\frac{\delta\delta}{\delta\delta x} f(x_0, y_0) < 0$ relatives Maximum

- $\frac{\delta\delta}{\delta\delta x} f(x_0, y_0) > 0$ relatives Minimum
- $\Delta < 0$ Sattelpunkt
- $\Delta = 0$ nicht Entscheidbar

3 Abbildungen: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

3.1 Linearisierung

$f(t + \Delta t) \approx f(t) + \Delta t \cdot f'(t)$

3.2 Tangentenvektor

- Gleichung:

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \Rightarrow f'(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

3.3 Parameterdarstellung

- Beispiel für Parameterdarstellung k von f mit Parameter t:

$$f(\theta) = \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \\ z(\theta) \end{pmatrix} \Rightarrow k(\theta) = \begin{pmatrix} x(t(\theta)) \\ y(t(\theta)) \\ z(t(\theta)) \end{pmatrix}$$

  - Definitionsbereich neu berechnen
  - Darstellung nur ohne weiteres möglich, wenn monoton

- Ableitung:
  $|f'(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$

- Integral:
  $\int_a^b |f'(t)| ds$

3.4 Bogenlänge

- Normale Funktionen: $L_{a,b} \approx \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

- Parameterdarstellung: $L_{a,b} = \int_a^b |f'(t)| ds$

  - Bogenlänge Schraubenlinie: $L_{a,b} = \int_a^b (\sqrt{R^2 + v^2} \cdot \alpha) d\alpha$
  - Bogenlänge Zykloide: $L_{a,b} = \int_a^b (2R \cdot sin(\frac{\varphi}{2})) d\varphi$
  - Bogenlänge bei Archimedische Spirale: $L_{a,b} = \int_a^b \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2} d\varphi$

3.5 Krümmung

- Normale Funktionen: $K(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}^3}$

- Parametrisiert: $K(t) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\left(\dot{x}\sqrt{1+\frac{\dot{y}}{\dot{x}}^2}\right)^3}$

- Krümmungskreis Radius: $\frac{1}{K(x)}$

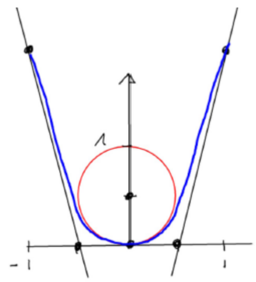

Abbildung 1: Krümmunkskreis im Scheitelpunkt

3.6 Linienintegrale

3.6.1 1. Art: ***Geschachtelte Funktion***

- Parameterdarstellung $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
- Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \int_a^b F(K(t)) \cdot |K'(t)| dt$

3.6.2 2. Art: ***Kurve im Vektorfeld***

- Parameterdarstellung $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
- Vektorfeld $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \int_a^b F(K(t)) \cdot K'(t) dt$

4 Differenzieren von Funktionen des Typs $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix}$$

4.1 Ableitung

$$f' \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta f_1}{x_n} \\ & \vdots & \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta f_m}{x_n} \end{pmatrix}$$

4.2 Linearisierung

4.2.1 Normale Funktionen

$$f \begin{pmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ \vdots \\ x_n + \Delta x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ & \vdots & \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta f_m}{\delta x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}$$

4.2.2 Verkettete Funktionen

1. Ansatz: **Vereinfachen**
   $(g \circ f)' = g'(f) = g'_f$

2. Ansatz: **Kettenregel**
   $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$

4.3 Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$\varphi(x)' = f(x, \varphi(x)) \Rightarrow \varphi(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)' dt + \varphi(x_0) \tag{1}$$

- Sonderfall: $f(x)$ unabhängig von $\varphi(x)$
  $\Rightarrow$ Lösung

- Allgemein: $\varphi(x)' = f(x, \varphi(x))$
  $\Rightarrow$ Näherung durch $\varphi(x) = (x - x_0) \cdot f(x_0, \varphi(x_0)) + \varphi(x_0)$
  für kleine $|x - x_0|$

4.4 System von Differenzialgleichungen 1. Ordnung

$$y_1' = f(x, y_1, \cdots y_n), \cdots y_n' = f(x, y_1, \cdots y_n) \tag{2}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(x_0) + f(x_0, \varphi(x_0)) \cdot (x - x_0) \tag{3}$$

4.4.1 Einzelteile der Gleichung

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x)_1 \\ \varphi(x)_2 \\ \vdots \\ \varphi(x)_n \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x)' = \begin{pmatrix} \varphi(x)'_1 \\ \varphi(x)'_2 \\ \vdots \\ \varphi(x)'_n \end{pmatrix}$$

$$f\left(x, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(x, y_1, \cdots y_n)_1 \\ \vdots \\ f(x, y_1, \cdots y_n)_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

4.5 Differenzialgleichung n-ter Ordnung