

# SEGUIMIENTO ROBÓTICA INDUSTRIAL

## Cinemática Inversa de Manipulador de 6 DOF.

Santiago García Arango\*  
Ingeniería Mecatrónica, Universidad EIA  
Medellín, Colombia  
Email: \*santiago.garcia1999@hotmail.com

**Resumen**—En este artículo, se explicará el desarrollo y procedimiento para obtener las transformadas cinemáticas directas e inversas del robot manipulador “Baxter” de la empresa Rethink Robotics [4]. Estos procedimientos, tienen un trasfondo matemático y físico que se puede evidenciar en el libro guía de la asignatura: “Introducción a la robótica. Craig” [1]. De igual forma, se explicarán los procedimientos necesarios para desarrollar los modelos matemáticos, con base en dos artículos propuestos como apoyo metodológico: “Baxter Kinematic Modeling, Validation and Reconfigurable Representation” [3] y “Baxter Humanoid Robot Kinematics” [2].

**Index Terms**—Baxter, Cobot, Direct kinematics, Inverse Kinematics, DOF, Robotics, Denavit-Hartenverg, Trajectories, MATLAB, Tejada.

### I. INTRODUCCIÓN

La robótica hace parte de uno de los pilares tecnológicos y económicos más importantes de los últimos años, no solamente generando un impacto trascendental en sus aplicaciones industriales, sino expandiéndose a una gama de desarrollos y enfoques que hacen parte de las tecnologías de punta. La correcta implementación de sistemas robóticos, va de la mano con avances científicos, desarrollos de experimentos de nuevas tecnologías, aumento en la productividad de las empresas, gran capacidad de llevar a cabo tareas repetitivas de forma eficiente, mayor precisión a la hora de efectuar movimientos en el espacio, procesos de duración continua, automatización de labores que son repetitivas, aumento de la calidad de los trabajos manuales, entre otras.

Estas son algunas de la gran cantidad de razones por las cuales es una gran oportunidad estudiar la robótica y sus desarrollos físico-matemáticos, son de gran interés para cualquier individuo con una perspectiva loca de buscarle el sentido a cómo funcionan las máquinas de movimiento espacial, pero más aún, para tener una trascendencia con criterio matemático de cómo poder crear modelos o sistemas espaciales para llevar a cabo tareas limitadas por la imaginación... y como Albert Einstein decía, “Imagination is more important than knowledge. Knowledge is limited to all we now know and understand, while imagination embraces the entire world, and all there ever will be to know and understand”.

### II. ACLARACIONES PRELIMINARES

El propósito primordial de este artículo académico, es poder tener una buena aproximación a la cinemática inversa del robot Baxter de la compañía Rethink Robotics [4], buscando tener un modelo funcional para la simulación de sus movimientos espaciales y el correcto proceso de aprendizaje para seguir avanzando en los desarrollos de modelos matemáticos aplicados a robots manipuladores. Para el desarrollo adecuado de este componente teórico-práctico, se utilizó como trabajo guía a la publicación científica de Robert L. Williams II, titulada “Baxter Humanoid Robot Kinematics” [3].

Para el modelo matemático de un manipulador robótico, siempre es necesario tener herramientas que permitan analizar las diversas variables del robot, y que a su vez, logre tener la forma de interpretar estas variables y relacionarlas con las abstracciones matemáticas que se vean involucradas en el proceso (como lo son posiciones, orientaciones, ángulos, sistemas de referencia, coordenadas, entre otras). Es por esto que en los textos guías se plantean dos elementos importantes en cualquier desarrollo robótico espacial: la transformada cinemática directa y la transformada cinemática inversa [1].

Es importante aclarar que la cinemática inversa de un robot, hace referencia a ese proceso matemático por el cual se puede obtener cada uno de los movimientos de los actuadores respectivos de un robot, teniendo como entrada sus posiciones y orientaciones en un sistema de referencia absoluto. De igual forma, la cinemática directa de un robot, cumple el papel importante de interpretar esas articulaciones y sistemas de conexión de un robot, y mapearlas a una equivalencia de coordenadas cartesianas absolutas. Estas dos herramientas jugarán un papel indispensable en el desarrollo de este artículo y los modelos para llevar a cabo el proceso de movimiento y simulaciones de un manipulador de 7 grados de libertad, como lo es Baxter.

A continuación, se explicará el proceso metodológico para poder transformar la información de Baxter, en los modelos cinemáticos propuestos.

### III. DESARROLLO DE MATRICES DE TRANSFORMACIÓN

El primer paso que se realizó para la implementación de la simulación de Baxter, fue el de comprender aquellas transformaciones preliminares que deben existir siempre en cualquier cambio entre coordenadas estratégicas. En este caso, existen cuatro transformaciones constantes que son de suma relevancia para entender la cinemática de Baxter:

- Transformación entre origen de coordenadas y el comienzo del brazo robótico derecho  $\rightarrow {}^{W0}_{OR}T$
- Transformación entre origen de coordenadas y el comienzo del brazo robótico izquierdo  $\rightarrow {}^{W0}_{OL}T$
- Transformación entre el final del brazo robótico derecho y su respectiva herramienta  $\rightarrow {}^{7}_{GR}T$
- Transformación entre el final del brazos robótico izquierdo y su respectiva herramienta  $\rightarrow {}^{7}_{GL}T$

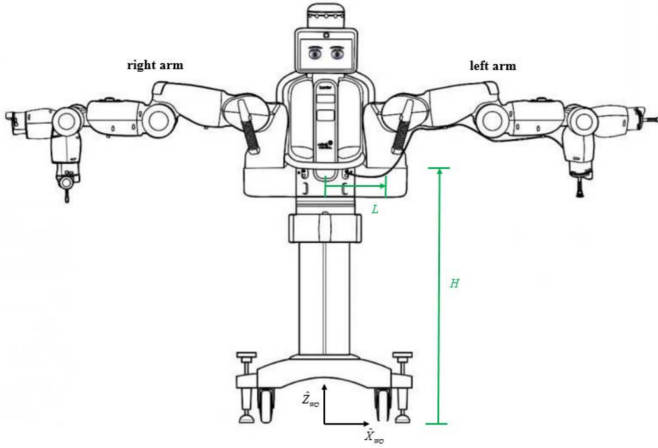


Figura 1: Origen de coordenadas y medidas del cuerpo del robot Baxter. Adaptado de (Williams L Robert) [3].

Como se puede evidenciar en la fig[1], existe una transformación inicial, para llevar el origen de coordenadas, hacia cada uno de los brazos robóticos. A continuación se pueden evidenciar las matrices que permiten lograr este procedimiento:

$${}^{W0}_{BL}T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & L \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -h \\ 0 & 0 & 1 & H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{W0}_{BR}T = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -L \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -h \\ 0 & 0 & 1 & H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De igual forma, se logró obtener las matrices de transformación entre cada uno de estos brazos y el origen del sistema coordinado basándose en los parámetros de Denavit-Hartenberg. Estas transformaciones se pueden evidenciar a continuación:

$${}^{BL}_0T = {}^{BR}_0T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teniendo entonces estas matrices, se puede obtener la transformación que permitirá llevar desde el origen de coordenadas, hasta el origen de coordenadas establecido por el procedimiento de Denavit-Hartenberg, es decir, las dos transformaciones constantes para transformar el sistema entre el origen de todo el sistema completo  $\{W0\}$  y el origen del sistema planteado por DH  $\{0\}$ .

$${}^{W0}_{OR}T = {}^{W0}_{BR}T \cdot {}^{BR}_{OR}T$$

$${}^{W0}_{OL}T = {}^{W0}_{BL}T \cdot {}^{BL}_{OL}T$$

Teniendo en cuenta esto, el resultado de las respectivas matrices de transformación entre el origen absoluto  $\{W0\}$  y el origen de DH  $\{0\}$ , es:

$${}^{W0}_{OL}T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & L \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -h \\ 0 & 0 & 1 & L_0 + H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{W0}_{BR}T = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -L \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -h \\ 0 & 0 & 1 & L_0 + H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la única matriz de transformación que se mantiene constante en el sistema global, es la encargada de llevar el final del brazo robótico de Baxter  $\{7\}$ , hacia la herramienta asociada  $\{GL\}$  o  $\{GR\}$ . En este caso, ambos brazos tendrán el mismo componente y sus matrices de transformación pueden evidenciarse a continuación:

$${}^{7}_{GL}T = {}^{7}_{GR}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estas matrices de transformación, juegan un papel esencial en los desarrollos explicados a continuación, y tienen la característica de ser constantes, independiente de la posición y orientación de los brazos de Baxter.

### IV. TRANSFORMADA CINEMÁTICA DIRECTA

El desarrollo de la transformada cinemática directa en los brazos de Baxter, fue desarrollado con base en los parámetros y procedimientos sugeridos por Denavit-Hartenberg. De igual forma, como el manipulador analizado tiene 7 DOF, se plantean dos soluciones posibles: trabajar con 7 o con 6 grados de libertad. La razón por la que se plantean estas dos posibilidades, es porque aunque la transformada cinemática directa es viable con 7 DOF, existe un gran reto para el cálculo de la transformada cinemática inversa de 7DOF, es por esto que se desarrollarán los procedimientos de la TCD y TCI utilizando 6 DOF.

A continuación, teniendo en cuenta este vector de posiciones  $[x, y, z]$ , Williams L Robert procede a encontrar una serie de relaciones matemáticas y geométricas, para obtener  $\theta_1, \theta_2$  y  $\theta_3$  de forma analítica. Estas relaciones pueden verse en detalle en el artículo guía de este documento [3]. Los resultados analíticos son entonces:

$$\theta_1 = \text{atan2}({}^0x_4, {}^0y_4)$$

$$\theta_{21,2} = t_{1,2}$$

$$\theta_{41,2} = \text{atan2}(-z - L_H \cdot \sin(\theta_{21,2}), \frac{x}{\cos(\theta_1)} - L_1 - L_H \cdot \cos(\theta_{21,2})) - \theta_{21,2}$$

\*Nota: revisar documentación para detalles de  $t_{1,2}$

Analizar estas expresiones analíticas, es muy interesante, pues le muestra al usuario que  $\theta_2$  depende directamente de un resultado de una solución cuadrática. Es por esto que de antemano existen unos rangos de trabajos delimitados directamente por el resultado real de  $\theta_2$  y que se traducen al workspace funcional de Baxter. De igual forma, al solucionar esta ecuación, se puede deducir que habrán dos configuraciones viables para cualquier posición de Baxter: codo arriba y codo abajo.

La siguiente etapa del desarrollo de la transformada cinemática inversa, es la búsqueda de los ángulos  $\theta_5$ ,  $\theta_6$  y  $\theta_7$ . Para poder llegar a una solución analítica, se utilizará lo que no se ha empleado aún de la matriz de transformación entre  $\{0\}$  y  $\{6\}$ , pero aprovechándose que ya se pueden conocer las matrices entre  $\{0\}$  y  $\{3\}$ , pues anteriormente ya se calcularon las entradas que se encargan de este procedimiento. Matemáticamente, esto se puede entender como:

$${}^0R = {}^0R \cdot {}^3R$$

Y como la matriz entre  $\{0\}$  y  $\{3\}$  ya es conocida, se puede hallar la matriz entre  $\{3\}$  y  $\{6\}$ , con manipulación de álgebra matricial...

$${}^3R = ({}^0R)^{-1} \cdot {}^6R$$

Es muy importante tener en cuenta, que la matriz de rotación entre  $\{0\}$  y  $\{3\}$  depende directamente de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_4$ , y que la matriz de rotación entre  $\{0\}$  y  $\{6\}$ , es algo que se puede obtener como entrada al proceso de transformada cinemática inversa, implicando que se conocen perfectamente estas dos condiciones en la operación ilustrada anteriormente. Esto permitirá entonces obtener un resultado analítico en términos de  $\theta_5$ ,  $\theta_6$  y  $\theta_7$  para la matriz de rotación resultante entre  $\{3\}$  y  $\{6\}$ .

Finalmente, el autor del texto guía, desarrolla el procedimiento matemático para desarrollar las operaciones necesarias y encontrar las ecuaciones que gobiernan independientemente a  $\theta_5$ ,  $\theta_6$  y  $\theta_7$ . Estas ecuaciones se pueden demostrar que son:

$$\theta_5 = \text{atan2}(R_{33}, R_{13})$$

$$\theta_7 = \text{atan2}(-R_{22}, R_{21})$$

$$\theta_6 = \text{atan2}(\frac{R_{21}}{\cos(\theta_7)}, -R_{23})$$

\*Nota: Recordar que en estas ecuaciones, “R”, hace referencia a  ${}^3R$

## VI. PROGRAMACIÓN DEL MODELO

Finalmente, luego de desarrollar los procedimientos matemáticos, analíticos y sus respectivas simplificaciones para obtener las transformadas cinemáticas que gobiernan al robot Baxter en modo de operación de 6 DOF, se procede a programarlo en un entorno de simulación (en este caso MATLAB). A continuación, se plantea el diagrama de bloques que explica el procedimiento del sistema en términos generales.

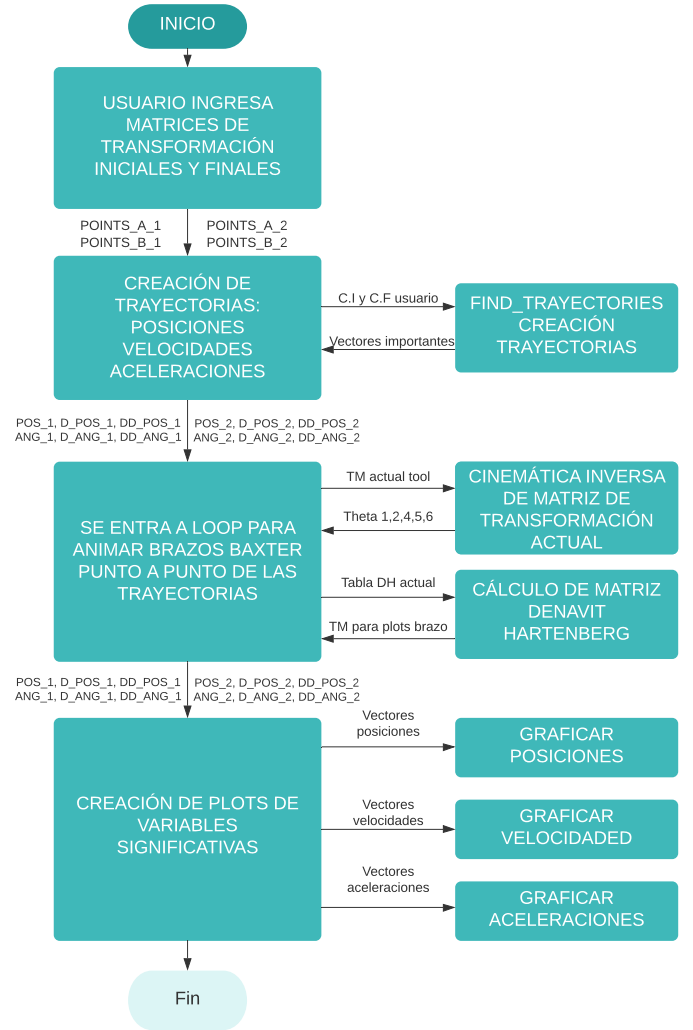


Figura 3: Diagrama de flujo de algoritmo para simulación completa de movimiento de brazos de Baxter. Elaboración propia

Como la programación de este sistema completo tiene gran cantidad de funciones y sub-funciones, se proceden a explicar estas de manera general, y se propone al lector revisar los anexos de este documento, para visualizar los algoritmos completos de simulación y sus detalles específicos.

#### VI-A. USUARIO INGRESA MATRICES DE TRANSFORMACIÓN

La primera etapa del algoritmo, consta en obtener las posiciones y orientaciones indicadas de cada uno de los dos brazos de Baxter. Este se realizó a través de cuatro interfaces de usuario que tenían la siguiente estructura visual cada una de ellas:

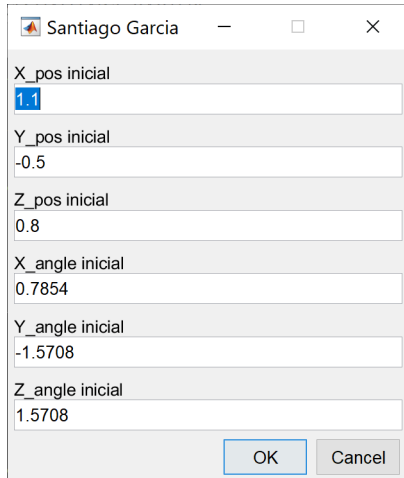


Figura 4: Ejemplo de una de las interfaces de usuario para el ingreso de condiciones iniciales y finales para el brazo de Baxter. Elaboración propia a través de MATLAB.

#### VI-B. CREACIÓN DE TRAYECTORIAS DE 5TO ORDEN

La siguiente etapa importante, es un ciclo en donde se generan las respectivas trayectorias de 5to orden para cada una de las variables de interés en el proceso. En esta ocasión se generaron las trayectorias con estas variables para cada brazo robótico:

- Posición lineal en x.
- Posición lineal en y.
- Posición lineal en z.
- Posición angular en x.
- Posición angular en y.
- Posición angular en z.
- Velocidad lineal en x.
- Velocidad lineal en y.
- Velocidad lineal en z.
- Velocidad angular en x.
- Velocidad angular en y.
- Velocidad angular en z.
- Aceleración lineal en x.
- Aceleración lineal en y.
- Aceleración lineal en z.
- Aceleración angular en x.
- Aceleración angular en y.
- Aceleración angular en z.

Estas variables se programaron a través de ciclos estratégicos y una correcta generación de trayectorias respectivas, con ayuda de una función llamada “find\_trayectories()”, para lograr modularizar y optimizar este proceso iterativo.

#### VI-C. ANIMACIÓN DE TRAYECTORIAS

Esta etapa del algoritmo consta de varias partes indispensables, así como se puede observar en diagrama de flujo de la sección anterior fig[3]. En primera instancia, la forma de graficar correctamente a Baxter, es a través de una etapa de generación de líneas entre puntos estratégicos, donde estos se podrán generar programando de forma iterativa un barrido de los parámetros de Denavit-Hartenberg, para luego acceder a cada punto del robot. Sin embargo, para poder lograr esto, es de suma importancia tener cada uno de los ángulos  $\theta_i$ , presentados en los modelos matemáticos anteriores.

Teniendo en cuenta este panorama general, la animación de trayectorias se ejecuta a través de un ciclo determinado por una cantidad de puntos fijos a recorrer. Esta cantidad de iteraciones depende de la función que generó las trayectorias en los items previos. Cada vez que accede al ciclo, calcula la cinemática inversa de cada brazo respectivamente y luego devuelve como parámetros respectivos todos los  $\theta_i$  necesarios para comprender las articulaciones y su comportamiento para obtener dicho punto en el espacio.

Una vez se llegue a esta etapa en donde se logre tener ambas transformadas cinemáticas inversas, se procede a continuar el algoritmo con un barrido estratégico de forma ascendente de los cálculos de las matrices de transformación a través de la tabla de Denavit-Hartenberg y obtener cada una ellas entre los puntos del robot Baxter. Es importante aclarar que estos puntos luego se multiplicarán con las matrices de transformación entre  $\{W0\}$  y  $\{0\}$ , para generar las coordenadas finales con respecto al origen absoluto. Además de lo mencionado anterior, es importante tener en cuenta que en esta etapa del proceso, se están desarrollando continuamente los cálculos de la transformada cinemática directa e inversa, siendo un algoritmo que refleja la utilidad completa y bi-direccional de ambos modelos matemáticos.

Continuando con el proceso de animación de trayectorias, es de gran importancia aclarar que los procesos de cinemática directa e inversa, ambos fueron explicados en la primera sección de este documento, y se siguió estas relaciones matemáticas para el algoritmo implementado en MATLAB. Este desarrollo puede evidenciarse en los anexos del documento.

#### VI-D. GRÁFICAS DE VARIABLES IMPORTANTES

Finalmente, el desarrollo del algoritmo de simulación de Baxter planteado en este documento académico, concluye con las gráficas respectivas de cada una de las trayectorias mencionadas en la programación de las curvas de 5to orden. Este desarrollo se realiza al finalizar el algoritmo y permite no solamente tener una realimentación visual del proceso y

evolución de un movimiento suave con Baxter, sino que permite verificar que no existan curvas con indeterminaciones o condiciones matemáticas imposibles.

## VII. RESULTADOS DE SIMULACIONES

En primer lugar, el procedimiento de la simulación tuvo resultados exitosos y se lograron generar diversas trayectorias ingresadas por el usuario para la validación del desempeño de los brazos robóticos de Baxter. A continuación se mostrarán algunos de los resultados obtenidos para múltiples ejemplos del algoritmo funcional y su consolidación del componente teórico-práctico de la robótica aplicada:

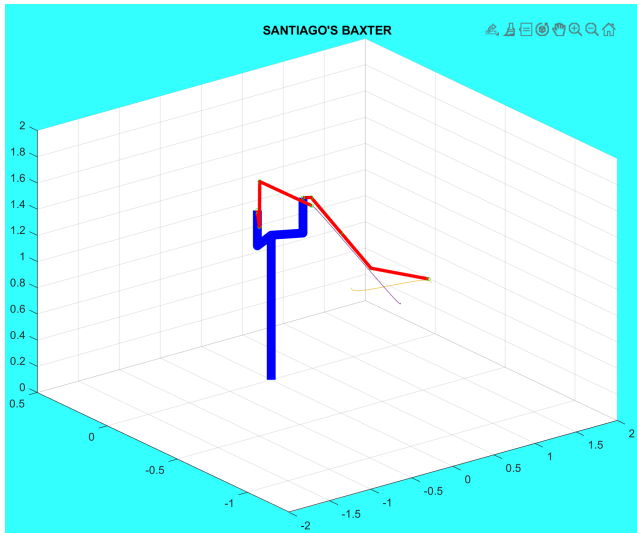


Figura 5: Simulación activa en comienzo de unas trayectorias ingresadas por el usuario para cada brazo de Baxter. Elaboración propia a través de MATLAB.

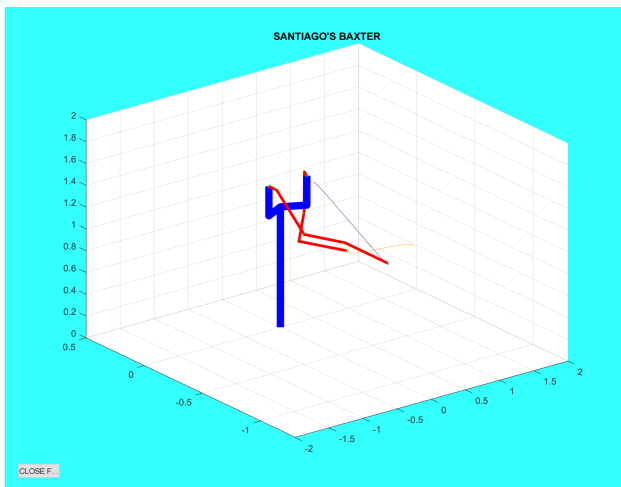


Figura 6: Simulación finalizada de unas trayectorias ingresadas por el usuario para cada brazo de Baxter. Elaboración propia a través de MATLAB.

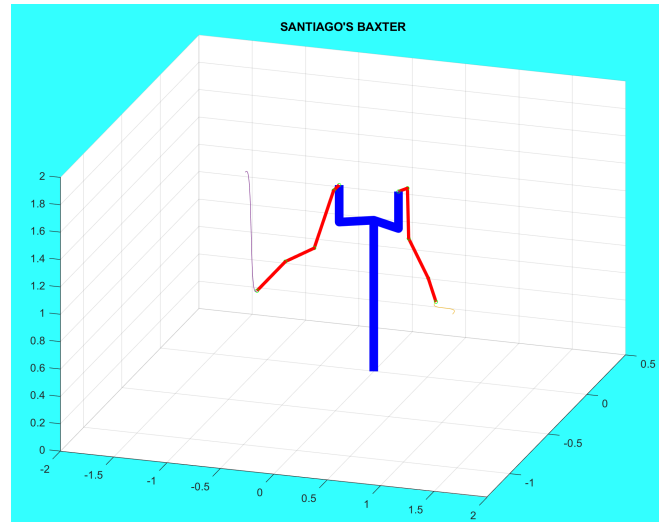


Figura 7: Simulación finalizada de unas trayectorias ingresadas por el usuario para cada brazo de Baxter. Elaboración propia a través de MATLAB.

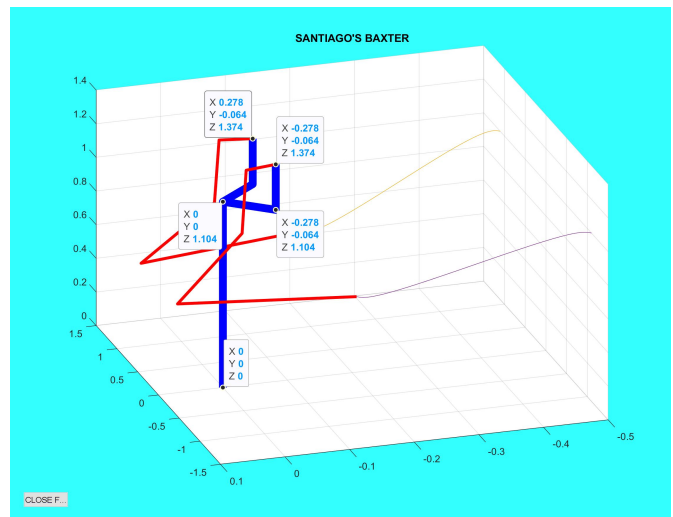


Figura 8: Simulación finalizada para unas trayectorias ingresadas por el usuario para cada brazo de Baxter. Elaboración propia a través de MATLAB.

Como se puede observar en las figuras anteriores, el algoritmo tiene la ventaja de ir mostrando una simulación en tiempo real del proceso que lleva a cabo cada una de las articulaciones del robot Baxter. Este procedimiento tiene además la versatilidad de poder ejecutar dos trayectorias diferentes en cada uno de los brazos y ejecutarlas “en paralelo”. De igual forma, en la fig[8], se le agregaron los puntos claves en el espacio que conforman la configuración espacial del cuerpo del robot Baxter, permitiendo dar la ilusión que efectivamente el cuerpo de Baxter se encuentra físico en el espacio y garantiza que no hayan choques con respecto a este.

Por último, se mostrarán algunos ejemplos de los resultados de las gráficas de las variables importantes para



el análisis de los cambios de posiciones, velocidades y aceleraciones en el tiempo.

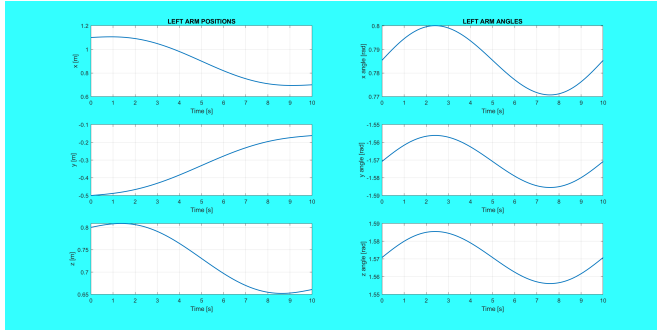


Figura 9: Resultados de posiciones lineales y angulares para trayectoria específica de herramienta de Baxter. Elaboración propia a través de MATLAB.

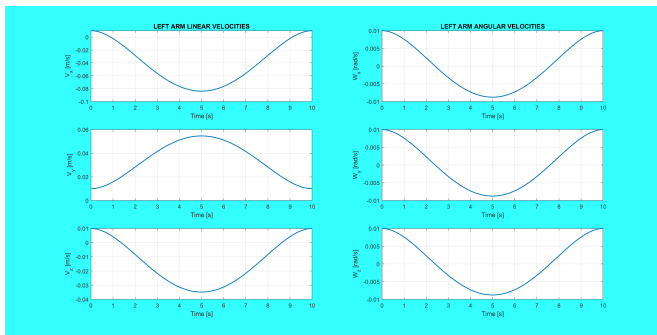


Figura 10: Resultados de velocidades lineales y angulares para trayectoria específica de herramienta de Baxter. Elaboración propia a través de MATLAB.

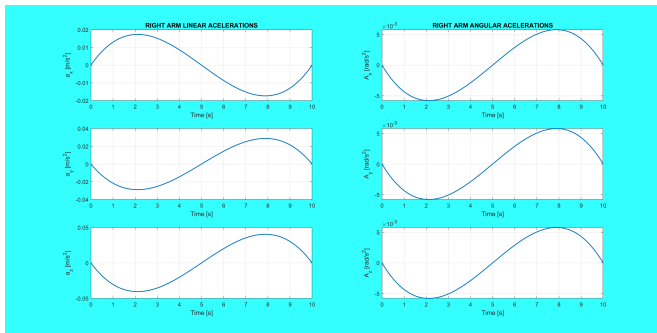


Figura 11: Resultados de aceleraciones lineales y angulares para trayectoria específica de herramienta de Baxter. Elaboración propia a través de MATLAB.

## VIII. CONCLUSIONES

Para concluir, el desarrollo y manejo adecuado de herramientas matemáticas como la transformada cinemática directa e inversa, son de suma importancia para lograr integrar algoritmos que permitan comprender el comportamiento espacial de cualquier manipulador robótico. El desarrollo de este trabajo permitió seguir creciendo en la abstracción de modelos útiles para el desarrollo de simulaciones y aproximaciones teórico-prácticas a diversos robots en el espacio, siendo de gran relevancia para el aprendizaje académico de la robótica industrial y dando un buen soporte para futuras implementaciones reales en robots reales.

De igual forma, se cumplió el objetivo propuesto por la guía a seguir y se culminó la simulación con un buen entendimiento general de la forma de moverse en el espacio del robot Baxter, permitiéndole a los estudiantes cuestionarse muchos aspectos de dicho robot, como lo son los métodos de control, de seguimiento de trayectorias con otros criterios de desempeño y la validación de retos más complejos para cualquier aplicación futura.

## REFERENCIAS

- [1] John J. Craig. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control (3rd Edition)*. 4th edition. Pearson education, 2004. ISBN: 978-0201543612.
- [2] L. E Silva y col. “Baxter Kinematic Modeling, Validation and Reconfigurable Representation”. En: *SAE 2016 World Congress and Exhibition 1.1* (abr. de 2016), págs. 1-12. DOI: 10.4271/2016-01-0334. URL: [https://www.researchgate.net/publication/299640286\\_Baxter\\_Kinematic\\_Modeling\\_Validation\\_and\\_Reconfigurable\\_Representation](https://www.researchgate.net/publication/299640286_Baxter_Kinematic_Modeling_Validation_and_Reconfigurable_Representation).
- [3] Robert L. Williams II. “Baxter Humanoid Robot Kinematics”. En: *Mechanical Faculty, Ohio University 1.1* (abr. de 2017), págs. 1-68. URL: <https://www.ohio.edu/mechanical-faculty/williams/html/pdf/BaxterKinematics.pdf>.
- [4] Rethink Robotics. *Industries for Collaborative Robots*. URL: <https://www.rethinkrobotics.com/>. (accessed: 12.09.2020).