Теорема 0.1. *Пусть A — весь m-й слой. Тогда среднее значение вероятности переобучения случайного d-подмножества семейства A есть*

$$\bar{Q}(A,d) = 1 - \frac{C^d_{C^m_L(1-H^{l,m}_L(s))}}{C^d_{C^m_L}},$$

где $H^{l,m}_L(s) = \sum\limits_{i=1}^{\lfloor s\rfloor} \frac{C^i_m C^{l-i}_{L-m}}{C^l_L}$, $s = \frac{l}{L}(m - \varepsilon k)$.

Доказательство.

$$\bar{Q}(A,d) = \frac{1}{C^d_D} \sum_{\substack{A'\subset A:\\ |A'|=d}} Q(A'),$$

где $D = C^m_L$ — число алгоритмов в слое, $Q(A)$ — вероятность переобучения семейства A'. Далее:

$$\bar{Q}(A,d) = \frac{1}{C^d_D} \sum_{\substack{A'\subset A:\\ |A'|=d}} \frac{1}{C^l_L} \sum_{X\in[\mathbb{X}]^l} \frac{\sum_{a\in A'(X)} \bigl[\delta\bigl(a,X\bigr) \geqslant \varepsilon\bigr]}{|A'(X)|},$$

где $A'(X) = \arg\min\limits_{a\in A'} n\bigl(a,X\bigr)$. Здесь мы просто выписали вероятность переобучения рандомизированного метода в явном виде. Несложно заметить, что в слое $\sum_{a\in A'(X)} \bigl[\delta\bigl(a,X\bigr) \geqslant \varepsilon\bigr] = |A'(X)| \bigl[\delta\bigl(a_0,X\bigr) \geqslant \varepsilon\bigr]$ для произвольного $a_0 \in A'(X)$. Таким образом:

$$\bar{Q}(A,d) = \frac{1}{C^d_D} \sum_{\substack{A'\subset A:\\ |A'|=d}} \frac{1}{C^l_L} \sum_{X\in[\mathbb{X}]^l} [\exists a \in A' \colon n\bigl(a,X\bigr) \leqslant s],$$

где $s = \lfloor \frac{l}{L}(m - \varepsilon k)\rfloor$.

Переставим местами знаки суммирования:

$$\bar{Q}(A,d) = \frac{1}{C^l_L}\frac{1}{C^d_D} \sum_{X\in[\mathbb{X}]^l} \underbrace{\sum_{\substack{A'\subset A:\\ |A'|=d}} [\exists a \in A' \colon n\bigl(a,X\bigr) \leqslant s]}_{F(X)}.$$

Несложно заметить, что в случае, когда A — весь слой, $F(X) = \mathrm{const}(X)$. Фиксируем произвольное разбиение X.

$$\bar{Q}(A,d) = \frac{1}{C^l_L}\frac{1}{C^d_D} \sum_{X\in[\mathbb{X}]^l} \sum_{\substack{A'\subset A:\\ |A'|=d}} [\exists a \in A' \colon n\bigl(a,X\bigr) \leqslant s] = \frac{1}{C^d_D} \sum_{\substack{A'\subset A:\\ |A'|=d}} [\exists a \in A' \colon n\bigl(a,X\bigr) \leqslant s] = \tag{0.1}$$

$$= \frac{1}{C^d_D} \sum_{\substack{A'\subset A:\\ |A'|=d}} \Bigl(1 - [\forall a \in A' \colon n\bigl(a,X\bigr) > s]\Bigr) = 1 - \frac{1}{C^d_D} \underbrace{\sum_{\substack{A'\subset A:\\ |A'|=d}} \prod_{a\in A'} [n\bigl(a,X\bigr) > s]}_{?}. \tag{0.2}$$

Итак, у нас есть D различных бинарных переменных вида $z_i = [n(a_i, X) > s]$, $i = 1, \ldots, D$. Нас интересует сумма всевозможных произведений d различных из них (один из «основных симметрических многочленов» этих переменных). Очевидно, что

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leqslant D} z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_d} = C^d_{\text{число ненулевых } z_i}.$$

Таким образом

$$\bar{Q}(A, d) = 1 - \frac{1}{C_D^d} \sum_{\substack{A' \subset A:\\ |A'| = d}} \prod_{a \in A'} [n(a, X) > s] = 1 - \frac{C^d_{|a \in A:\, n(a,X) > s|}}{C_D^d}. \qquad (0.3)$$

После несложных вычислений и с учетом того, что $D = C_L^m$ получаем искомый результат. ■

Теорема 0.2. *В общем случае $A \subset A_m$, $|A| = D$, где A_m — m-й слой алгоритмов, формула выглядит следующим образом:*

$$\bar{Q}(A) = 1 - \frac{\sum_{X \in [\mathbb{X}]^l} C^d_{N(X)}}{C_D^d C_L^l},$$

где $N(X) = \sum\limits_{a \in A} \big[n(a, X) > s\big]$.