Симметричные семейства алгоритмов

$\mathbb{X} = (x_i)_{i=1}^L$ — генеральная выборка из L объектов;
$[\mathbb{X}]^\ell$ — множество всех разбиений полной выборки $\mathbb{X}$ на (X^ℓ, X^k).
Алгоритм — бинарный вектор $a \equiv \bigl(a(x_i)\bigr)_{i=1}^L$ длины L;
$\mathbb{A} = \{0, 1\}^L$ — множество всех алгоритмов длины L;
Детерминированный метод обучения — отображение вида $\mu\colon 2^\mathbb{A} \times [\mathbb{X}]^\ell \to \mathbb{A}$;
Рандомизированный метод обучения — отображение вида $\mu : 2^\mathbb{A} \times [\mathbb{X}]^\ell \times \mathbb{A} \to [0, 1]$;
Рандомизированная минимизация эмпирического риска — отображение, заданное как

$$\mu(A, X, a) = \begin{cases} \frac{1}{|A(X)|}, & a \in A(X), \\ 0, & a \notin A(X); \end{cases} \tag{1}$$

где $A(X) = \operatorname*{Argmin}_{a \in A} n(a, X)$;

Вероятность получить a в результате обучения: $P_\mu(a, A) = \frac{1}{C_L^\ell} \sum_{X \in [\mathbb{X}]^\ell} \mu(A, X, a)$;
Уклонение частот — $\delta(a, X^\ell) = \nu(a, X^k) - \nu(a, X^\ell)$, где $\nu(a, X) = \frac{1}{|X|} n(a, X)$;
Вклад a в вероятность переобучения: $Q_\mu(a, A) = \frac{1}{C_L^\ell} \sum_{X \in [\mathbb{X}]^\ell} \mu(A, X, a) \bigl[\delta(a, X) \geq \varepsilon\bigr]$
Вероятность переобучения: $Q_\mu(A) = \sum_{a \in A} Q_\mu(a, A)$, т.е. сумма вкладов алгоритмов.

Граф смежности множества алгоритмов — направленный граф $T(A) = (A, E)$, вершины которого соответствуют алгоритмам из A, а ребро $(a_1, a_2) \in E$ соединяет пары алгоритмов, чьи вектора ошибок отличаются только на одном объекте: $\rho(a_1, a_2) = 1$, причем число ошибок алгоритма a_2 на единицу больше, чем у a_1.

Определение 1. *Группой автоморфизма графа смежности $T(A) = (A, E)$ множества алгоритмов A называют подгруппу $Aut(T(A))$ группы перестановок вершин графа, такую что каждый ее элемент $\pi \in Aut(T(A))$ удовлетворяет двум условиям:*

- *Сохранение ребер графа и их ориентации:*

$$(a_1, a_2) \in E \to \bigl(\pi(a_1), \pi(a_2)\bigr) \in E; \tag{2}$$

- *Сохранение числа ошибок алгоритмов:*

$$n(a, \mathbb{X}) = n(\pi(a), \mathbb{X}). \tag{3}$$

Определение 2. *Группой симметрий множества алгоритмов $A \in 2^\mathbb{A}$ назовем подгруппу $S(A)$ группы перестановок объектов выборки, такую что для всякого $\pi \in S(A)$ выполнено $\pi(A) = A$.*

Классы идентичных алгоритмов — орбиты действия группы симметрий $S(A)$ на множестве алгоритмов A. $\Omega(A)$ — совокупность всех орбит множества алгоритмов A. $a_\omega \in A$ — представитель орбиты $\omega \in \Omega(A)$.

Теорема 1. *Идентичные алгоритмы дают равный вклад в вероятность переобучения:*

$$Q_\mu(A) = \sum_{\omega \in \Omega(A)} |\,\omega|\, Q_\mu(A, a_\omega). \tag{4}$$

Задачи

Задача 1. *Приведите нетривиальный пример рандомизированного метода обучения, отличный от рандомизированной минимизации эмпирического риска.*

Задача 2. *Приведите пример множества алгоритмов, в котором все алгоритмы имеют равную вероятность реализоваться в результате обучения методом минимизации эмпирического риска* $P_\mu(a, A)$*? Можете ли вы доказать свое утверждение? Останется ли справедливым ваше утверждение, если вместо рандомизированной минимизации эмпирического риска рассматривать произвольный рандомизированный метод обучения?*

Задача 3. *В каких пределах может меняться уклонение частот* $\delta(a, X^\ell)$*?*

Задача 4. *Докажите, что группа симметрии семейства алгоритмов равна пересечению групп симметрии слоев данного семейства.*

Задача 5. *Найдите группу симметрии множества, состоящего из одного алгоритма* a *с числом ошибок* $m = n(a, X)$.

Задача 6. *Пусть известны группы симметрии множества алгоритмов* A_1 *и* A_2*. Найдите группу симметрии множества алгоритмов* $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

Задача 7. *Найдите группу симметрии для следующего множества алгоритмов:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 8. *Докажите теорему о равном вкладе идентичных алгоритмов в вероятность переобучения для случая, когда вместо группы симметрии вам известна только некоторая ее подгруппа* $G \subset S(A)$.

Задача 9. *Найдите группу симметрии шара алгоритмов* $A_r(a_0) = \{a \colon \rho(a, a_0) \leq r\}$*. Опишите классы идентичных алгоритмов.*

Задача 10. *Найти группу симметрии монотонной и унимодальной сетки (определения см. в статье П. Ботова, ММРО'09)*

Задача 11. *Покажите, что для множества алгоритмов со связным графом смежности в приведенном выше определении условие 3 является избыточным.*

Задача 12. *Доказать, что группа симметрии множества алгоритмов* A *изоморфно вкладывается в* $Aut(T(A))$.

Задача 13. *Докажите, что для любого множества алгоритмов* $A \in 2^{\mathbb{A}}$ *и любой перестановки* $\pi \in S_L$ *группы* $S(A)$ *и* $S(\pi(A))$ *изоморфны. Подсказка: докажите, что они сопряжены* $S(\pi(A)) = \pi \circ S(A) \circ \pi^{-1}$ *и проверьте, что сопряжение устанавливает изоморфизм групп.*

Задача 14. *(*) Согласно теореме Келли любая конечная группа вкладывается в группу перестановок* S_L *(при достаточно большом* L*). Верно ли, что любую конечную группу можно представить как группу симметрии некоторого множества алгоритмов?*