

# Teoría de Juegos

Fernando Lozano

Universidad de los Andes

8 de septiembre de 2014



# Ejemplo

- Fútbol: LADMH vs. MHNTA

# Ejemplo

- Fútbol: LADMH vs. MHNTA
  - ▶ LADMH : 4-3-3, 3-4-2-1

# Ejemplo

- Fútbol: LADMH vs. MHNTA
  - ▶ LADMH : 4-3-3, 3-4-2-1
  - ▶ MHNTA : 4-3-3, 4-1-2-2-1, 4-4-2

# Ejemplo

- Fútbol: LADMH vs. MHNTA
  - ▶ LADMH : 4-3-3, 3-4-2-1
  - ▶ MHNTA : 4-3-3, 4-1-2-2-1, 4-4-2

# Ejemplo

- Fútbol: LADMH vs. MHNTA
  - ▶ LADMH : 4-3-3, 3-4-2-1
  - ▶ MHNTA : 4-3-3, 4-1-2-2-1, 4-4-2
- Matriz de pagos (en diferencia de goles):

	MHNTA		
	<b>4-3-3</b>	<b>4-1-2-2-1</b>	<b>4-4-2</b>
LADMH <b>4-3-3</b>	2	1	-3
<b>3-4-2-1</b>	-1	-2	2

# Ejemplo

- Fútbol: LADMH vs. MHNTA
  - ▶ LADMH : 4-3-3, 3-4-2-1
  - ▶ MHNTA : 4-3-3, 4-1-2-2-1, 4-4-2
- Matriz de pagos (en diferencia de goles):

	MHNTA		
	4-3-3	4-1-2-2-1	4-4-2
LADMH 4-3-3	2	1	-3
3-4-2-1	-1	-2	2

- Qué formación debe usar cada equipo?

# Juegos de Matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Matriz de pagos (payoff).



# Juegos de Matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Matriz de pagos (payoff).
- Jugador fila vs. jugador columna.

# Juegos de Matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Matriz de pagos (payoff).
- Jugador fila vs. jugador columna.
- Si jugador fila selecciona fila  $i$  y jugador columna selecciona columna  $j$  ganancia de jugador fila (pérdida de jugador columna) es  $a_{ij}$ .

# Juegos de Matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Matriz de pagos (payoff).
- Jugador fila vs. jugador columna.
- Si jugador fila selecciona fila  $i$  y jugador columna selecciona columna  $j$  ganancia de jugador fila (pérdida de jugador columna) es  $a_{ij}$ .
- Juego de suma **cero**.

# Juegos Repetidos

# Juegos Repetidos

- Ganancia promedio en una secuencia de juegos.

# Juegos Repetidos

- Ganancia promedio en una secuencia de juegos.
- Estrategia pura: igual en todos los juegos.

# Juegos Repetidos

- Ganancia promedio en una secuencia de juegos.
- Estrategia pura: igual en todos los juegos.
- Estrategia mixta: Seleccionar jugada de acuerdo a probabilidades:

# Juegos Repetidos

- Ganancia promedio en una secuencia de juegos.
- Estrategia pura: igual en todos los juegos.
- Estrategia mixta: Seleccionar jugada de acuerdo a probabilidades:

Fila:  $q_1, q_2, \dots, q_m$



# Juegos Repetidos

- Ganancia promedio en una secuencia de juegos.
- Estrategia pura: igual en todos los juegos.
- Estrategia mixta: Seleccionar jugada de acuerdo a probabilidades:

Fila:  $q_1, q_2, \dots, q_m$

Columna:  $p_1, p_2, \dots, p_n$

# Juegos Repetidos

- Ganancia promedio en una secuencia de juegos.
- Estrategia pura: igual en todos los juegos.
- Estrategia mixta: Seleccionar jugada de acuerdo a probabilidades:

Fila:  $q_1, q_2, \dots, q_m$

Columna:  $p_1, p_2, \dots, p_n$

- Existe una estrategia mixta que usada por un jugador no le de ninguna ventaja al otro jugador?

- Suponga que el jugador columna escoge estrategia mixta  
 $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_n]$

- Suponga que el jugador columna escoge estrategia mixta  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_n]$
- Si el jugador fila escoge la fila  $i$  su ganancia esperada será:

- Suponga que el jugador columna escoge estrategia mixta  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_n]$
- Si el jugador fila escoge la fila  $i$  su ganancia esperada será:

$$z_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \dots + a_{in}p_n$$

- Suponga que el jugador columna escoge estrategia mixta  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_n]$
- Si el jugador fila escoge la fila  $i$  su ganancia esperada será:

$$z_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \dots + a_{in}p_n$$

- Cómo debe el jugador columna seleccionar su estrategia mixta  $\mathbf{p}$ ?

- Suponga que el jugador columna escoge estrategia mixta  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_n]$
- Si el jugador fila escoge la fila  $i$  su ganancia esperada será:

$$z_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \dots + a_{in}p_n$$

- Cómo debe el jugador columna seleccionar su estrategia mixta  $\mathbf{p}$ ?

# Programa Lineal

$$\begin{array}{llllll} \text{mín} & z & & & & \\ \text{sujeto a} & a_{11}p_1 & +a_{12}p_2 & \dots & +a_{1n}p_n & \leq z \\ & a_{21}p_1 & +a_{22}p_2 & \dots & +a_{2n}p_n & \leq z \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & a_{m1}p_1 & +a_{m2}p_2 & \dots & +a_{mn}p_n & \leq z \\ & p_1 & +p_2+ & \dots & +p_n & = 1 \\ & p_1, & p_2, & \dots & ,p_n & \geq 0 \end{array}$$



# Problema Dual

$$\begin{array}{llllll}
 \text{máx} & & y & & & \\
 \text{sujeto a} & a_{11}q_1 & +a_{21}q_2 & \dots & +a_{m1}q_m & \geq y \\
 & a_{12}q_1 & +a_{22}q_2 & \dots & +a_{m2}q_m & \geq y \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & a_{1n}q_1 & +a_{2n}q_2 & \dots & +a_{mn}q_m & \geq y \\
 & q_1 & +q_2+ & \dots & +q_n & = 1 \\
 & q_1, & q_2, & \dots & , q_n & \geq 0
 \end{array}$$



# Qué nos dice dualidad?

# Qué nos dice dualidad?

- Por el teorema de dualidad tenemos  $z^* =$

# Qué nos dice dualidad?

- Por el teorema de dualidad tenemos  $z^* = y^*$ .

# Qué nos dice dualidad?

- Por el teorema de dualidad tenemos  $z^* = y^*$ .
- Este es el valor del juego.

# Qué nos dice dualidad?

- Por el teorema de dualidad tenemos  $z^* = y^*$ .
- Este es el valor del juego.
- Punto de equilibrio.

- Si el jugador fila sigue estrategia  $\mathbf{q}$  y el jugador columna sigue estrategia  $\mathbf{p}$ , la ganancia esperada es

- Si el jugador fila sigue estrategia  $\mathbf{q}$  y el jugador columna sigue estrategia  $\mathbf{p}$ , la ganancia esperada es  $\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$



- Si el jugador fila sigue estrategia  $\mathbf{q}$  y el jugador columna sigue estrategia  $\mathbf{p}$ , la ganancia esperada es  $\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$
- Suponga que el jugador fila escoge estrategia mixta  $\mathbf{q}$ .

- Si el jugador fila sigue estrategia  $\mathbf{q}$  y el jugador columna sigue estrategia  $\mathbf{p}$ , la ganancia esperada es  $\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$
- Suponga que el jugador fila escoge estrategia mixta  $\mathbf{q}$ .
- El jugador columna quiere escoger estrategia  $\mathbf{p}$  que minimice  $\mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q}$ .

- Si el jugador fila sigue estrategia  $\mathbf{q}$  y el jugador columna sigue estrategia  $\mathbf{p}$ , la ganancia esperada es  $\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$
- Suponga que el jugador fila escoge estrategia mixta  $\mathbf{q}$ .
- El jugador columna quiere escoger estrategia  $\mathbf{p}$  que minimice  $\mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q}$ .
- Ganancia esperada del jugador fila es

- Si el jugador fila sigue estrategia  $\mathbf{q}$  y el jugador columna sigue estrategia  $\mathbf{p}$ , la ganancia esperada es  $\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$
- Suponga que el jugador fila escoge estrategia mixta  $\mathbf{q}$ .
- El jugador columna quiere escoger estrategia  $\mathbf{p}$  que minimice  $\mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q}$ .
- Ganancia esperada del jugador fila es  $\min_{\mathbf{p}} \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q}$ .

- Si el jugador fila sigue estrategia  $\mathbf{q}$  y el jugador columna sigue estrategia  $\mathbf{p}$ , la ganancia esperada es  $\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$
- Suponga que el jugador fila escoge estrategia mixta  $\mathbf{q}$ .
- El jugador columna quiere escoger estrategia  $\mathbf{p}$  que minimice  $\mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q}$ .
- Ganancia esperada del jugador fila es  $\min_{\mathbf{p}} \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q}$ .
- Que estrategia debe seleccionar el jugador fila?

- Si el jugador fila sigue estrategia  $\mathbf{q}$  y el jugador columna sigue estrategia  $\mathbf{p}$ , la ganancia esperada es  $\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$
- Suponga que el jugador fila escoge estrategia mixta  $\mathbf{q}$ .
- El jugador columna quiere escoger estrategia  $\mathbf{p}$  que minimice  $\mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q}$ .
- Ganancia esperada del jugador fila es  $\min_{\mathbf{p}} \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q}$ .
- Que estrategia debe seleccionar el jugador fila?
  - La estrategia  $\mathbf{q}^*$  que **maximice**  $\min_{\mathbf{p}} \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q}$ .

- Si el jugador fila sigue estrategia  $\mathbf{q}$  y el jugador columna sigue estrategia  $\mathbf{p}$ , la ganancia esperada es  $\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$
- Suponga que el jugador fila escoge estrategia mixta  $\mathbf{q}$ .
- El jugador columna quiere escoger estrategia  $\mathbf{p}$  que minimice  $\mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q}$ .
- Ganancia esperada del jugador fila es  $\min_{\mathbf{p}} \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q}$ .
- Que estrategia debe seleccionar el jugador fila?
  - ▶ La estrategia  $\mathbf{q}^*$  que **maximice**  $\min_{\mathbf{p}} \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q}$ .
- Con la estrategia  $\mathbf{q}^*$  el jugador columna garantiza una ganancia de por lo menos

$$\min_{\mathbf{p}} \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q}^* = \max_{\mathbf{q}} \min_{\mathbf{p}} \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q}$$

- Suponga que el jugador columna escoge estrategia mixta  $\mathbf{p}$ .



- Suponga que el jugador columna escoge estrategia mixta  $\mathbf{p}$ .
- El jugador fila quiere escoger estrategia  $\mathbf{q}$  que maximice  $\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$ .

- Suponga que el jugador columna escoge estrategia mixta  $\mathbf{p}$ .
- El jugador fila quiere escoger estrategia  $\mathbf{q}$  que maximice  $\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$ .
- Pérdida esperada del jugador columna es

- Suponga que el jugador columna escoge estrategia mixta  $\mathbf{p}$ .
- El jugador fila quiere escoger estrategia  $\mathbf{q}$  que maximice  $\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$ .
- Pérdida esperada del jugador columna es  $\max_{\mathbf{q}} \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$ .

- Suponga que el jugador columna escoge estrategia mixta  $\mathbf{p}$ .
- El jugador fila quiere escoger estrategia  $\mathbf{q}$  que maximice  $\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$ .
- Pérdida esperada del jugador columna es  $\max_{\mathbf{q}} \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$ .
- Que estrategia debe seleccionar el jugador columna?

- Suponga que el jugador columna escoge estrategia mixta  $\mathbf{p}$ .
- El jugador fila quiere escoger estrategia  $\mathbf{q}$  que maximice  $\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$ .
- Pérdida esperada del jugador columna es  $\max_{\mathbf{q}} \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$ .
- Que estrategia debe seleccionar el jugador columna?
  - ▶ La estrategia  $\mathbf{p}^*$  que **minimice**  $\max_{\mathbf{q}} \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$ .

- Suponga que el jugador columna escoge estrategia mixta  $\mathbf{p}$ .
- El jugador fila quiere escoger estrategia  $\mathbf{q}$  que maximice  $\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$ .
- Pérdida esperada del jugador columna es  $\max_{\mathbf{q}} \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$ .
- Que estrategia debe seleccionar el jugador columna?
  - ▶ La estrategia  $\mathbf{p}^*$  que **minimice**  $\max_{\mathbf{q}} \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$ .
- Con la estrategia  $\mathbf{p}^*$  el jugador columna garantiza una pérdida de máximo

$$\max_{\mathbf{q}} \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}^* = \min_{\mathbf{p}} \max_{\mathbf{q}} \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{p}$$

## Teorema

*Teorema minimax* (von Neumann)

$$\min_{\mathbf{p}} \max_{\mathbf{q}} \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q} = \max_{\mathbf{q}} \min_{\mathbf{p}} \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q}$$

de vuelta al ejemplo...

	MHNTA		
	<b>4-3-3</b>	<b>4-1-2-2-1</b>	<b>4-4-2</b>
LADMH <b>4-3-3</b>	2	1	-3
<b>3-4-2-1</b>	-1	-2	2



de vuelta al ejemplo...

	MHNTA		
	<b>4-3-3</b>	<b>4-1-2-2-1</b>	<b>4-4-2</b>
LADMH <b>4-3-3</b>	2	1	-3
<b>3-4-2-1</b>	-1	-2	2

- MHNTA debe resolver:

de vuelta al ejemplo...

	MHNTA		
	<b>4-3-3</b>	<b>4-1-2-2-1</b>	<b>4-4-2</b>
LADMH <b>4-3-3</b>	2	1	-3
<b>3-4-2-1</b>	-1	-2	2

- MHNTA debe resolver:

$$\min z$$

de vuelta al ejemplo...

	MHNTA		
	<b>4-3-3</b>	<b>4-1-2-2-1</b>	<b>4-4-2</b>
LADMH <b>4-3-3</b>	2	1	-3
<b>3-4-2-1</b>	-1	-2	2

- MHNTA debe resolver:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & z \\ \text{sujeto a} & 2p_1 + p_2 - 3p_3 \leq z \end{array}$$

de vuelta al ejemplo...

		MHNTA		
		<b>4-3-3</b>	<b>4-1-2-2-1</b>	<b>4-4-2</b>
LADMH	<b>4-3-3</b>	2	1	-3
	<b>3-4-2-1</b>	-1	-2	2

- MHNTA debe resolver:

$$\begin{array}{ll}
 \text{mín} & z \\
 \text{sujeto a} & 2p_1 + p_2 - 3p_3 \leq z \\
 & -p_1 - 2p_2 + 2p_3 \leq z
 \end{array}$$

de vuelta al ejemplo...

		MHNTA		
		<b>4-3-3</b>	<b>4-1-2-2-1</b>	<b>4-4-2</b>
LADMH	<b>4-3-3</b>	2	1	-3
	<b>3-4-2-1</b>	-1	-2	2

- MHNTA debe resolver:

$$\begin{array}{llllll}
 \text{mín} & & z & & & \\
 \text{sujeto a} & 2p_1 & +p_2 & -3p_3 & \leq & z \\
 & -p_1 & -2p_2 & +2p_3 & \leq & z \\
 & p_1 & +p_2 & +p_3 & = & 1
 \end{array}$$

de vuelta al ejemplo...

		MHNTA		
		<b>4-3-3</b>	<b>4-1-2-2-1</b>	<b>4-4-2</b>
LADMH	<b>4-3-3</b>	2	1	-3
	<b>3-4-2-1</b>	-1	-2	2

- MHNTA debe resolver:

$$\begin{array}{llll}
 \text{mín} & z & & \\
 \text{sujeto a} & 2p_1 & +p_2 & -3p_3 \leq z \\
 & -p_1 & -2p_2 & +2p_3 \leq z \\
 & p_1 & +p_2 & +p_3 = 1 \\
 & p_1, & p_2, & p_3 \geq 0
 \end{array}$$

de vuelta al ejemplo...

	MHNTA		
	4-3-3	4-1-2-2-1	4-4-2
LADMH 4-3-3	2	1	-3
3-4-2-1	-1	-2	2

- MHNTA debe resolver:

$$\begin{array}{ll}
 \text{mín} & z \\
 \text{sujeto a} & 2p_1 + p_2 - 3p_3 \leq z \\
 & -p_1 - 2p_2 + 2p_3 \leq z \\
 & p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\
 & p_1, p_2, p_3 \geq 0
 \end{array}$$

- Solución:  $p_1^* = 0$ ,  $p_2^* = \frac{5}{8}$ ,  $p_3^* = \frac{3}{8}$ ,  $z^* = -\frac{1}{2}$ .

	MHNTA		
	<b>4-3-3</b>	<b>4-1-2-2-1</b>	<b>4-4-2</b>
LADMH <b>4-3-3</b>	2	1	-3
<b>3-4-2-1</b>	-1	-2	2



	MHNTA		
	<b>4-3-3</b>	<b>4-1-2-2-1</b>	<b>4-4-2</b>
LADMH <b>4-3-3</b>	2	1	-3
<b>3-4-2-1</b>	-1	-2	2

- LADMH debe resolver:

	MHNTA		
	<b>4-3-3</b>	<b>4-1-2-2-1</b>	<b>4-4-2</b>
LADMH <b>4-3-3</b>	2	1	-3
<b>3-4-2-1</b>	-1	-2	2

- LADMH debe resolver:

$$\max_y$$

	MHNTA		
	<b>4-3-3</b>	<b>4-1-2-2-1</b>	<b>4-4-2</b>
LADMH <b>4-3-3</b>	2	1	-3
<b>3-4-2-1</b>	-1	-2	2

- LADMH debe resolver:

$$\begin{array}{ll}
 \text{máx} & y \\
 \text{sujeto a} & 2q_1 - q_2 \geq y
 \end{array}$$

	MHNTA		
	<b>4-3-3</b>	<b>4-1-2-2-1</b>	<b>4-4-2</b>
LADMH <b>4-3-3</b>	2	1	-3
<b>3-4-2-1</b>	-1	-2	2

- LADMH debe resolver:

$$\begin{array}{ll}
 \text{máx} & y \\
 \text{sujeto a} & 2q_1 - q_2 \geq y \\
 & q_1 - 2q_2 \geq y
 \end{array}$$

	MHNTA		
	<b>4-3-3</b>	<b>4-1-2-2-1</b>	<b>4-4-2</b>
LADMH <b>4-3-3</b>	2	1	-3
<b>3-4-2-1</b>	-1	-2	2

- LADMH debe resolver:

$$\begin{array}{ll}
 \text{máx} & y \\
 \text{sujeto a} & 2q_1 - q_2 \geq y \\
 & q_1 - 2q_2 \geq y \\
 & -3q_1 + 2q_2 \geq y
 \end{array}$$

	MHNTA		
	<b>4-3-3</b>	<b>4-1-2-2-1</b>	<b>4-4-2</b>
LADMH <b>4-3-3</b>	2	1	-3
<b>3-4-2-1</b>	-1	-2	2

- LADMH debe resolver:

$$\begin{array}{llll}
 \text{máx} & y & & \\
 \text{sujeto a} & 2q_1 & -q_2 & \geq y \\
 & q_1 & -2q_2 & \geq y \\
 & -3q_1 & +2q_2 & \geq y \\
 & q_1 & +q_2 & = 1
 \end{array}$$

	MHNTA		
	<b>4-3-3</b>	<b>4-1-2-2-1</b>	<b>4-4-2</b>
LADMH <b>4-3-3</b>	2	1	-3
<b>3-4-2-1</b>	-1	-2	2

- LADMH debe resolver:

$$\begin{array}{llll}
 \text{máx} & y & & \\
 \text{sujeto a} & 2q_1 & -q_2 & \geq y \\
 & q_1 & -2q_2 & \geq y \\
 & -3q_1 & +2q_2 & \geq y \\
 & q_1 & +q_2 & = 1 \\
 & q_1, & q_2 & \geq 0
 \end{array}$$

	MHNTA		
	4-3-3	4-1-2-2-1	4-4-2
LADMH 4-3-3	2	1	-3
3-4-2-1	-1	-2	2

- LADMH debe resolver:

$$\begin{array}{llll}
 \text{máx} & y & & \\
 \text{sujeto a} & 2q_1 & -q_2 & \geq y \\
 & q_1 & -2q_2 & \geq y \\
 & -3q_1 & +2q_2 & \geq y \\
 & q_1 & +q_2 & = 1 \\
 & q_1, & q_2 & \geq 0
 \end{array}$$

- Solución:



	MHNTA		
	4-3-3	4-1-2-2-1	4-4-2
LADMH 4-3-3	2	1	-3
3-4-2-1	-1	-2	2

- LADMH debe resolver:

$$\begin{array}{llll}
 \text{máx} & y & & \\
 \text{sujeto a} & 2q_1 & -q_2 & \geq y \\
 & q_1 & -2q_2 & \geq y \\
 & -3q_1 & +2q_2 & \geq y \\
 & q_1 & +q_2 & = 1 \\
 & q_1, & q_2 & \geq 0
 \end{array}$$

- Solución:  $y^* =$

	MHNTA		
	4-3-3	4-1-2-2-1	4-4-2
LADMH 4-3-3	2	1	-3
3-4-2-1	-1	-2	2

- LADMH debe resolver:

$$\begin{array}{llll}
 \text{máx} & y & & \\
 \text{sujeto a} & 2q_1 & -q_2 & \geq y \\
 & q_1 & -2q_2 & \geq y \\
 & -3q_1 & +2q_2 & \geq y \\
 & q_1 & +q_2 & = 1 \\
 & q_1, & q_2 & \geq 0
 \end{array}$$

- Solución:  $y^* = -\frac{1}{2}$ ,

	MHNTA		
	4-3-3	4-1-2-2-1	4-4-2
LADMH 4-3-3	2	1	-3
3-4-2-1	-1	-2	2

- LADMH debe resolver:

$$\begin{array}{llll}
 \text{máx} & y & & \\
 \text{sujeto a} & 2q_1 & -q_2 & \geq y \\
 & q_1 & -2q_2 & \geq y \\
 & -3q_1 & +2q_2 & \geq y \\
 & q_1 & +q_2 & = 1 \\
 & q_1, & q_2 & \geq 0
 \end{array}$$

- Solución:  $y^* = -\frac{1}{2}$ , por holgura complementaria:

	MHNTA		
	4-3-3	4-1-2-2-1	4-4-2
LADMH 4-3-3	2	1	-3
3-4-2-1	-1	-2	2

- LADMH debe resolver:

$$\begin{array}{llll}
 \text{máx} & y & & \\
 \text{sujeto a} & 2q_1 & -q_2 & \geq y \\
 & q_1 & -2q_2 & \geq y \\
 & -3q_1 & +2q_2 & \geq y \\
 & q_1 & +q_2 & = 1 \\
 & q_1, & q_2 & \geq 0
 \end{array}$$

- Solución:  $y^* = -\frac{1}{2}$ , por holgura complementaria:

$$\left. \begin{array}{lll}
 q_1 & -2q_2 & = -\frac{1}{2} \\
 -3q_1 & +2q_2 & = -\frac{1}{2}
 \end{array} \right\}$$

	MHNTA		
	4-3-3	4-1-2-2-1	4-4-2
LADMH 4-3-3	2	1	-3
3-4-2-1	-1	-2	2

- LADMH debe resolver:

$$\begin{array}{llll}
 \text{máx} & & y & \\
 \text{sujeto a} & 2q_1 & -q_2 & \geq y \\
 & q_1 & -2q_2 & \geq y \\
 & -3q_1 & +2q_2 & \geq y \\
 & q_1 & +q_2 & = 1 \\
 & q_1, & q_2 & \geq 0
 \end{array}$$

- Solución:  $y^* = -\frac{1}{2}$ , por holgura complementaria:

$$\left. \begin{array}{lll} q_1 & -2q_2 & = -\frac{1}{2} \\ -3q_1 & +2q_2 & = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

	MHNTA		
	4-3-3	4-1-2-2-1	4-4-2
LADMH 4-3-3	2	1	-3
3-4-2-1	-1	-2	2

- LADMH debe resolver:

$$\begin{array}{llll}
 \text{máx} & & y & \\
 \text{sujeto a} & 2q_1 & -q_2 & \geq y \\
 & q_1 & -2q_2 & \geq y \\
 & -3q_1 & +2q_2 & \geq y \\
 & q_1 & +q_2 & = 1 \\
 & q_1, & q_2 & \geq 0
 \end{array}$$

- Solución:  $y^* = -\frac{1}{2}$ , por holgura complementaria:

$$\left. \begin{array}{lll} q_1 & -2q_2 & = -\frac{1}{2} \\ -3q_1 & +2q_2 & = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{2}$$