Optimización

Tarea #0 Fecha límite: 22 de Agosto de 2014

---

1. Considere el sistema de m ecuaciones en n incóginitas (con $m \leq n$) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Una solución básica del sistema de ecuaciones se define como una solución en la cual a lo sumo m variables son diferentes de cero (estas se llaman variables básicas). Para el caso:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & -3 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   a) Halle todas las soluciones de este sistema de ecuaciones.

   b) Encuentre todas las soluciones básicas del sistema.

2. Una matriz $\mathbf{B}$ es similar a una matriz $\mathbf{A}$ (denotado por $\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$) si existe una matriz invertible $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$. Demuestre que:

   (a) Si $\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

   (b) Si $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$ y $\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$ entonces $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$

   (c) Matrices similares tienen los mismos valores propios.

   (d) Matrices similares pueden tener vectores propios diferentes (Ayuda: construya un contraejemplo con matrices 2×2).

3. Suponga que se conoce la matriz inversa de una matriz $\mathbf{A}_0 \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Se desea calcular la inversa de una nueva matriz:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0 + \mathbf{XRY} \tag{1}$$

   donde $\mathbf{X}, \mathbf{Y}^T \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{r\times r}$.

   Una forma de calcular esta inversa es utilizar la fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury:

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \mathbf{A}_0^{-1} - \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{YA}_0^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{R}^{-1})^{-1}\mathbf{YA}_0^{-1} \tag{2}$$

   Note que dada $\mathbf{A}_0^{-1}$, esta fórmula requiere el cálculo de la inversa de matrices de tamaño r, mientras que en el cálculo directo se requiere invertir una matriz de tamaño m. Ya que el costo de la inversión de una matriz es proporcional aproximadamente al cubo de su tamaño, este cálculo es mucho más eficiente para $r < m$.

   a) Verifique que el lado derecho de (2) es efectivamente $\mathbf{A}_1^{-1}$ (Ayuda: pre-multiplique y pos-multiplique (2) por $\mathbf{A}_1$ dado en (1).

   b) Usando MATLAB, halle los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ y los vectores propios correspondientes $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ de la siguiente matriz:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & 10 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 10 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

c) Usando la descomposición espectral $\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$, aplique cuatro veces la fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury para calcular (a mano) la inversa de la matriz $\mathbf{I} + \mathbf{B}$ (note que en este caso $R = 1$). Verifique su resultado usando MATLAB® [1]

4. Sea $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz positiva definida.

   a) Demuestre que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}^{-1}} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{y}$ es un producto interno en $\mathbb{R}^n$.

   b) Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ las columnas de $\mathbf{Q}$. Demuestre que

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle_{\mathbf{Q}^{-1}} = q_{ij}$$

   donde q_{ij} es la entrada i, j de $\mathbf{Q}$.

5. (a) Halle el rango y los cuatro valores propios para las matrices de unos y de "tablero de ajedrez":

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Cuáles son los vectores propios correspondientes a los valores propios diferentes de cero?

   (b) Halle el rango y los valores propios para las matrices de unos y de "tablero de ajedrez" de tamaño $n \times n$. Cuántos valores propios diferentes a cero hay en este caso?

   (c) Si A es la matriz de unos de tamaño 4×4, halle los valores propios y el determinante de $A - I$.

6. Sea $f(\mathbf{w})$ una función escalar de un vector $\mathbf{w}$ de dimensión n. El gradiente de $f(\mathbf{w})$ con respecto a $\mathbf{w}$ está definido como:

$$\nabla_{\mathbf{w}} f(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{w})}{\partial w_1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{w})}{\partial w_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{w})}{\partial w_n} \end{bmatrix}$$

   (a) Sea

$$f(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{A} \mathbf{w} + \mathbf{b}^T \mathbf{w} + c$$

   donde $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica de $n \times n$, $\mathbf{b}$ es un vector de $n \times 1$ y c es un escalar. Muestre que:

$$\nabla_{\mathbf{w}} f(\mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{b}$$

[1] Para una introducción al uso de matlab, abra MATLAB ,escriba "helpwin", y vaya a "Begin here", o haga click aquí.

(b) La matriz Hessiana está definida como:

$$\mathbf{H} = \nabla^T \left(\nabla_{\mathbf{w}} f(\mathbf{w})\right) = \nabla^2_{\mathbf{w}} f(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{w})}{\partial w_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{w})}{\partial w_1 \partial w_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{w})}{\partial w_1 \partial w_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{w})}{\partial w_2 \partial w_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{w})}{\partial w_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{w})}{\partial w_2 \partial w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{w})}{\partial w_n \partial w_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{w})}{\partial w_n \partial w_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{w})}{\partial w_n^2} \end{bmatrix}$$

Para $f(\mathbf{w})$ definida anterioremente demuestre que:

$$\mathbf{H} = \nabla^2_{\mathbf{w}} f(\mathbf{w}) = \mathbf{A}$$

7. Considere la función cuadrática $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A_i} \mathbf{x}$.

(a) Utilice las funciones **contour** y **mesh** de MATLAB® para graficar la función f y sus curvas de contorno en el rango $[-1, 1]^2$, para las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 9{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 9{,}5 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -9{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -9{,}5 \end{bmatrix}$$

(b) Halle los valores propios y vectores propios para las matrices A_1, A_2, A_3, A_4. Cómo se relacionan estos valores con las gráficas que usted obtuvo?.