Universidad de los Andes
Departamento de Ingeniería Industrial
Probabilidad y Estadística I (IIND2106)
Profesor Coordinador: Mario Castillo
Profesores: María Alejandra López, Astrid Bernal, Carlos Castellanos, Fabio Lagos, Gonzalo Torres, Hernando Mutis.
Segundo semestre de 2015

Complementaria 3
Variables aleatorias discretas y continuas, funciones de probabilidad, funciones de densidad, funciones de distribución acumulada, valor esperado y varianza. Función Generadora de Momentos

Punto 1 (Variable aleatoria discreta)

Con el propósito de brindar asesoría nutricional a los habitantes de un sector en la localidad de Sumapaz, se realizó una visita a cada una de las 100 viviendas que componen el sector de interés. Para cada una de las viviendas se registraron diferentes datos que son relevantes para la asesoría, por ejemplo, se registró el número de personas (por vivienda) que requieren orientación acerca de su régimen alimenticio.

En la tabla que sigue a continuación, se presenta la cuenta del número de viviendas en las que se encuentran 0, 1, 2, 3 o 4 personas que requieren asesoría nutricional:

Personas que requieren asesoría por vivienda	Número de viviendas en las que X personas requieren asesoría nutricional
0	10
1	25
2	40
3	15
4	10
Total	100

Para dar respuesta a los siguientes literales, se define la variable aleatoria X como el número de personas que requieren asesoría nutricional por vivienda.

a. Construya la función de probabilidad de la variable aleatoria X.

X: número de personas que requieren asesoría nutricional, por vivienda; para una vivienda seleccionada al azar.

R(X) = {0, 1, 2, 3, 4}

$0 \leq g_X(x) \leq 1$

$$\sum_{i=0}^{4} g_X(x_i) = 1$$

$$P(X = 0) = \frac{10}{100} = 0.10$$

$$P(X = 1) = \frac{25}{100} = 0.25$$

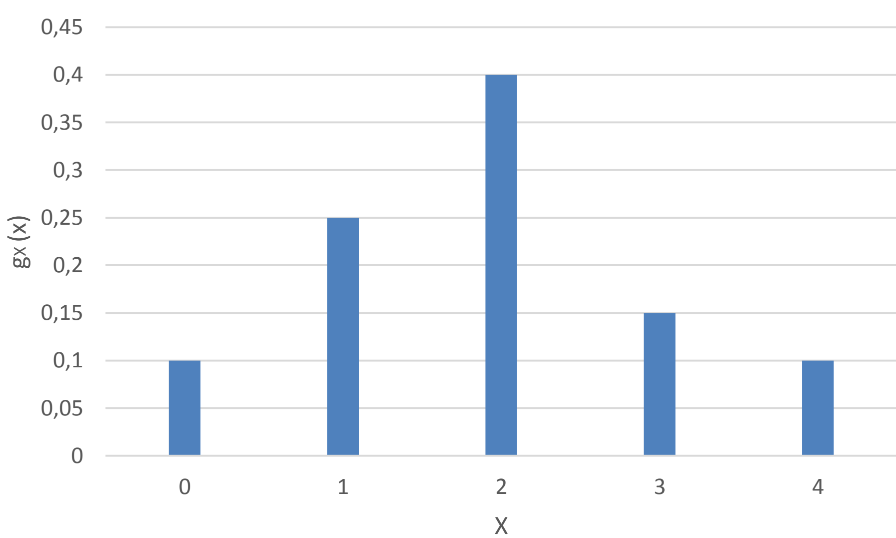
$$P(X = 2) = \frac{40}{100} = 0.40$$

$$P(X = 3) = \frac{15}{100} = 0.15$$

$$P(X = 4) = \frac{10}{100} = 0.10$$

$$g_X(x) = \begin{cases} 0.10 & x = 0 \\ 0.25 & x = 1 \\ 0.40 & x = 2 \\ 0.15 & x = 3 \\ 0.10 & x = 4 \\ 0 & d.l.c. \end{cases}$$

b. Grafique la función de probabilidad de la variable aleatoria X.

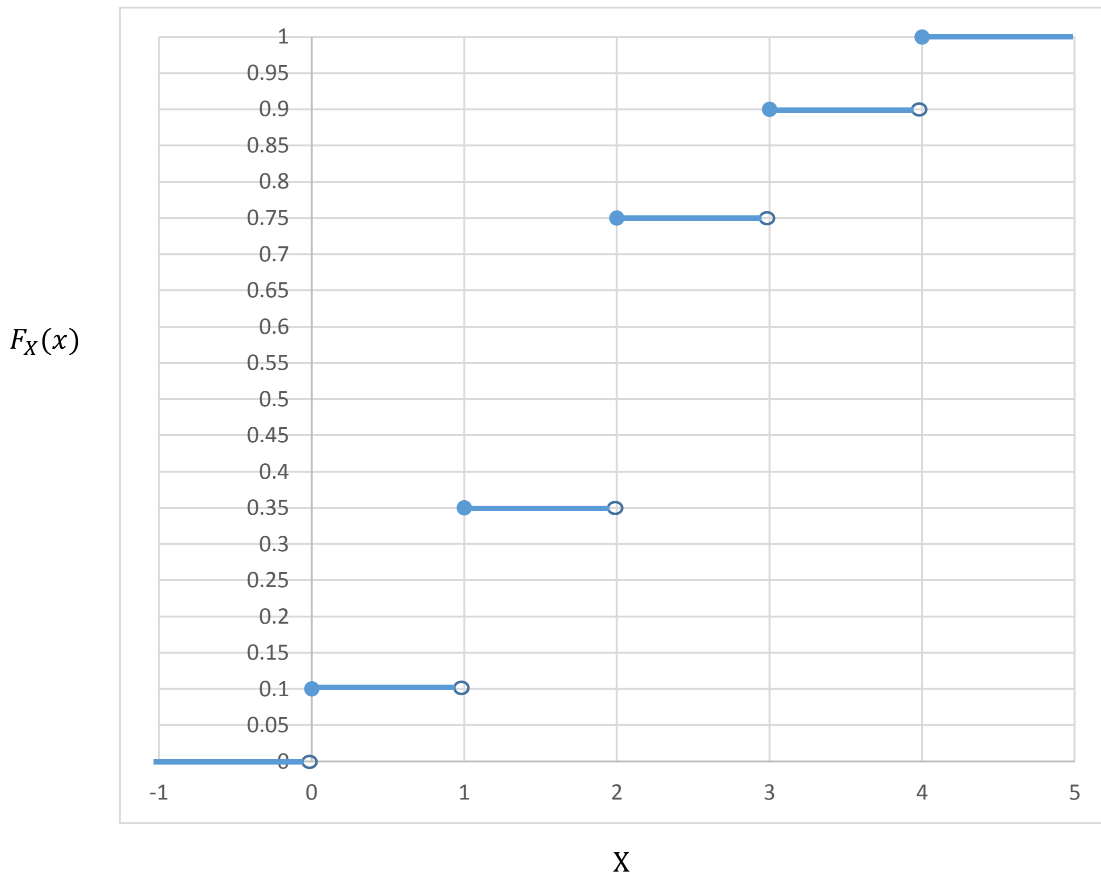


c. Construya la función de distribución de probabilidad acumulada (FDA) de la variable aleatoria X.

$$F_X(x_i) = P(X \leq x_i)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.10 & 0 \leq x < 1 \\ 0.35 & 1 \leq x < 2 \\ 0.75 & 2 \leq x < 3 \\ 0.90 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

d. Grafique la función de distribución de probabilidad acumulada (FDA) de la variable aleatoria X.



e. ¿Cuál es la probabilidad de que, en una vivienda seleccionada al azar, se encuentren 2 personas que requieran asesoría nutricional?

$$P(X = 2) = g_X(2) = 0.4$$

La probabilidad de que se encuentren exactamente dos personas que requieran asesoría nutricional, en una vivienda seleccionada aleatoriamente, es de 0.4.

f. ¿Cuál es la probabilidad de que en una vivienda seleccionada al azar, se encuentre que menos de 2 personas requieran asesoría nutricional?

Opción 1: se utiliza la función de probabilidad, evaluada en $x = 0$ y en $x = 1$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 1) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) + \mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) = \mathrm{g}_{\mathrm{X}}(0) + \mathrm{g}_{\mathrm{X}}(1) = 0.1 + 0.25 = 0.35$$

Opción 2: se utiliza la función de distribución acumulada, evaluada en $x = 1$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 1) = \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(1) = 0.35$$

g. ¿Cuál es la probabilidad de que en una vivienda seleccionada aleatoriamente, se encuentren más de tres personas requieran asesoría nutricional?

Opción 1: se utiliza la función de probabilidad, evaluada en $x = 4$.

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 3) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 4) = \mathrm{g}_{\mathrm{X}}(4) = 0.1$$

Opción 2: se utiliza la función de distribución acumulada.

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 3) = 1 - \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(3) = 1 - 0.9 = 0.1$$

h. ¿Cuál es la probabilidad de que en una vivienda seleccionada al azar, se encuentre más de una persona y máximo tres que requieran asesoría nutricional?

Opción 1: se utiliza la función de probabilidad, evaluada en $x = 2$ y en $x = 3$.

$$\mathrm{P}(1 < \mathrm{X} \leq 3) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 2) + \mathrm{P}(\mathrm{X} = 3) = \mathrm{g}_{\mathrm{X}}(2) + \mathrm{g}_{\mathrm{X}}(3) = 0.4 + 0.15 = 0.55$$

Opción 2: se utiliza la función de distribución acumulada.

$$\mathrm{P}(1 < \mathrm{X} \leq 3) = \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(3) - \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(1) = 0.9 - 0.35 = 0.55$$

i. ¿Cuál es el valor esperado del número de personas, por vivienda, que requieren asesoría nutricional en el sector de interés, en Sumapaz?

$$E[x] = \sum_{R(X)} g_X(x) * x$$

$$\mathrm{E}[\mathrm{x}] = 0.1 * 0 + 0.25 * 1 + 0.4 * 2 + 0.15 * 3 + 0.1 * 4$$
$$\mathrm{E}[\mathrm{x}] = 1.9 \text{ personas}$$

j. Calcule la desviación estándar.

$$Var[X] = \sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$Var[X] = \sum_{R(X)} g_X(x) * x^2 - \left(\sum_{R(X)} g_X(x) * x\right)^2$$

$$(E[X])^2 = (1.9)^2$$

$$\sum_{R(X)} g_X(x) * x^2 = 0.1 * 0^2 + 0.25 * 1^2 + 0.4 * 2^2 + 0.15 * 3^2 + 0.1 * 4^2 = 4.8$$

$$Var[X] = 4.8 - (1.9)^2 = 1.19$$

$$Desv[X] = \sqrt{Var[x]} = 1.09$$

Punto 2 (Variable aleatoria continua)

El tiempo que tarda una persona en ir desde su hogar hasta su lugar de trabajo, en horas, se puede modelar a través de la variable aleatoria X, cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0.5 \leq x \leq 1 \\ k(25 - 3x^2) & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{d.l.c} \end{cases}$$

a. Halle el valor de la constante **k** de tal manera que la función de densidad de probabilidad este correctamente definida.

Para que la FDP este correctamente definida se debe cumplir que:

$$\int_{R(X)} f(x)\ dx = 1$$

$$\int_{0.5}^{1} 1\ dx + \int_{1}^{3} k(25 - 3x^2)\, dx = 1$$

$$[x]_{0.5}^{1} + [k(25x - x^3)]_1^3 = 1$$

$$[1 - 0.5] + \big[k\big((75 - 27) - (25 - 1)\big)\big] = 1$$
$$0.5 + 48k - 24k = 1$$
$$0.5 + 24k = 1$$
$$k = 0.5/24$$
$$k = \frac{1}{48}$$

b. Encuentre la función de distribución de probabilidad acumulada de la variable aleatoria X.

Para el rango, $0.5 \le x \le 1$

$$\int_{-\infty}^{x} f_x(t)\,dt \rightarrow \int_{0.5}^{x} 1\,dt = x - 0.5$$

Para el rango, $1 \le x \le 3$

$$\underbrace{(1-0.5)}_{\substack{\text{Es necesario tener en cuenta} \\ \text{la acumulada del rango anterior}}} + \int_{1}^{x} \frac{1}{48}(25-3t^2)dt = 0.5 + k[25t - t^3]_1{}^x =$$

$$0.5 + k[25(x-1) - (x^3 - 1)] = 0.5 + 25kx - 25k - x^3k + k =$$

$$0.5 - \frac{(x^3-25x+24)}{48}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0.5 \\ x - 0.5 & 0.5 < x \le 1 \\ 0.5 - \dfrac{(x^3 - 25x + 24)}{48} & 1 < x \le 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

c. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona, seleccionada de manera aleatoria, se demore exactamente 1.5 horas en llegar al trabajo?

$P(X = 1.5) = 0 \rightarrow$ Cuando la variable aleatoria es continua, la probabilidad de X sea exactamente igual a un número es infinitesimalmente pequeña.

d. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona, seleccionada de manera aleatoria, se demore entre 0.7 y 2 horas en llegar a su trabajo?

$$P(0.7 \le x \le 2) = F_X(2) - F_X(0.7)$$

$$= 0.5 - \frac{(2^3 - 25(2) + 24)}{48} - [0.7 - 0.5] = 0.875 - 0.2 = 0.675$$

La probabilidad de que una persona tarde entre 0.7 y 2 horas en llegar a su trabajo es de 0.675.

e. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona se demore entre 0.8 y 3.5 horas en llegar a su trabajo si parte de su casa?

$$P(0.8 \le x \le 3.5) = F_X(3.5) - F_X(0.8)$$
$$= 1 - [0.8 - 0.5] = 1 - 0.3 = 0.7$$

La probabilidad de que una persona se tarde entre 0.8 y 3.5 horas en llegar a su trabajo es de 0.7.

f. Encuentre el valor esperado de la variable aleatoria X. Interprete este resultado.

$$E[X] = \int_{R(X)} xf(x)\ dx = \int_{0.5}^{1} x\ dx + \int_{1}^{3} kx(25 - 3x^2)\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0.5}^{1} + \left[k\left(\frac{25x^2}{2} - \frac{3x^4}{4}\right)\right]_{1}^{3} = \left(\frac{1 - 0.25}{2}\right) + \frac{1}{48}\left(\frac{25(9-1)}{2} - \frac{3(81-1)}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{48}(100 - 60) = \frac{3}{8} + \frac{40}{48} = \frac{29}{24} = 1.20 \text{ Horas.}$$

Se espera que una persona, seleccionada de manera aleatoria, se tarde en promedio 1.2 horas en ir desde su hogar hasta su lugar de trabajo.

g. Encuentre la desviación estándar de la variable aleatoria X.

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

$$E[X^2] = \int_{R(X)} x^2 f(x)\ dx = \int_{0.5}^{1} x^2\ dx + \int_{1}^{3} kx^2(25 - 3x^2)\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0.5}^{1} + \left[k\left(\frac{25x^3}{3} - \frac{3x^5}{5}\right)\right]_{1}^{3} = \left(\frac{1 - 0.125}{3}\right) + \frac{1}{48}\left(\frac{25(27-1)}{3} - \frac{3(243-1)}{5}\right)$$

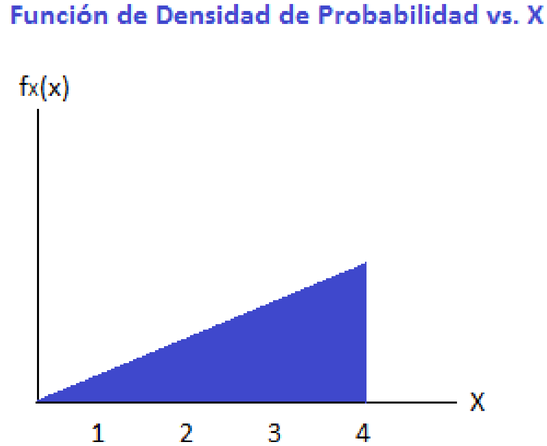
$$= \frac{7}{24} + \frac{1}{48}\left(\frac{650}{3} - \frac{726}{5}\right) = \frac{7}{24} + \frac{67}{45} = 1.7806$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 1.7806 - (1.208^2) = 0.3213 \text{ horas al cuadrado}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{0.3213} = \mathbf{0.567\ horas}$$

Punto 3 (Función de densidad de probabilidad)

La siguiente gráfica muestra la región en la cual está definida la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X, la cual representa los ingresos (en millones de pesos) de una tienda de ropa, para un fin de semana seleccionado de manera aleatoria.



El gerente de la tienda se encuentra realizando un estudio de mercadeo y requiere información detallada del comportamiento de la variable, por lo que le solicita ayuda respondiendo los siguientes literales:

a. Defina la variable aleatoria en términos del problema.

$$\text{X: ingresos mensuales de la compañía}$$

b. Encuentre la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X.

Para que la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria esté correctamente definida, es necesario que el área bajo la curva (probabilidad en todo el rango de X) sea igual a 1.

Opción 1:

Área del triángulo = 1

$$A = \frac{b * h}{2} = \frac{4 * h}{2} = 1$$

$$h = \frac{1}{2}$$

La altura del triángulo es ½, pero se debe determinar la ecuación de la recta

$$f_X(x) = mX + b$$

$$\frac{1}{2} = m(4) + 0 \qquad m = \frac{1}{8}$$

La ecuación de la recta es $f_X(x) = \frac{1}{8}x$, y por lo tanto la función de densidad de probabilidad es $f_X(x) = \frac{1}{8}x$.

Opción 2:

Integral bajo la curva en todo el rango de X = 1

$$f_X(x) = mx \quad => \quad \int_0^4 f_X(x)dx = 1 \quad => \int_0^4 mxdx = 1 \quad => \quad \left.\frac{mx^2}{2}\right|_0^4 = 1 \quad => \quad m = \frac{1}{8}$$

Por lo tanto, la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X está definida por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \mathrm{d.l.c.} \end{cases}$$

c. Halle la función de distribución de probabilidad acumulada (FDA) de la variable aleatoria X.

Por definición, se tiene que la función de distribución acumulada para una variable aleatoria continua es:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{t}{8}dt = \left.\frac{t^2}{16}\right|_0^x = \frac{x^2}{16}$$

Por lo tanto, la función de distribución acumulada de la variable aleatoria X es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{16} & 0 < x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

d. ¿Cuál es la probabilidad de que los ingresos de la compañía, en un fin de semana seleccionado al azar, estén entre 2 y 4 millones de pesos?

Opción 1:

Se utiliza la función de distribución de probabilidad de acumulada.

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 2) = F_X(4) - F_X(2) = \frac{4^2}{16} - \frac{2^2}{16} = \frac{12}{16} = 0.75$$

Opción 2:

Se utiliza la función de densidad de probabilidad.

$$P(2 \leq X \leq 4) = \int_2^4 \frac{1}{8} x dx = \frac{1}{16} x^2 |_2^4 = \frac{12}{16} = 0.75$$

e. Los costos en los que incurre la tienda se pueden definir como una función de los ingresos, y están dados por: $c(X) = \frac{X}{2} - \frac{1}{3}$. De acuerdo con esta información, encuentre el valor esperado del costo.

$$\mathrm{E}[c(X)] = \int_{R(X)} [f_X(x) * c(X)] dx$$

$$\mathrm{E}[c(X)] = \int_{R(X)} \left[f_X(x) * \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3} \right) \right] dx$$

$$\mathrm{E}[c(X)] = \frac{1}{8} \int_0^4 \left[\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} \right) \right] dx$$

$$\mathrm{E}[c(X)] = \frac{1}{8} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{6} \right) \Big|_0^4$$

$$\mathrm{E}[c(X)] = 1$$

En promedio, los costos en los que incurre la compañía son de 1 millón de pesos en un fin de semana.

Punto 4 (Función Generatriz De Momentos)

Sea X una variable aleatoria discreta con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$g_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = 2,4,6 \\ 0 & d.l.c \end{cases}$$

a. Encuentre la función generatriz de momentos (FGM) de la variable aleatoria X

La función generatriz de momentos se define como:

$$\Psi_x(t) = E(e^{tx})$$

$$\Psi_x(t) = \sum_{R(X)} e^{tx} g_X(x_i) \;\; donde \; R(X) = \{2,4,6\}$$

$$\Psi_x(t) = \frac{1}{3} e^{2t} + \frac{1}{3} e^{4t} + \frac{1}{3} e^{6t}$$

b. Use la FGM para encontrar el valor esperado de la variable X. Compare dicho resultado con el valor que obtendría utilizando la definición del valor esperado.

$$E(X) = \Psi_x{}'(0)$$
$$\Psi_x{}'(t) = \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{4}{3}e^{4t} + \frac{6}{3}e^{6t}$$
$$\Psi_x{}'(0) = E(X) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{6}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

Por la definición de valor esperado:

$$E[X] = \sum_{R(X)} g_X(x) * x$$

$$E[X] = \frac{1}{3} * 2 + \frac{1}{3} * 4 + \frac{1}{3} * 6 = 4$$

Los resultados por los dos métodos son equivalentes.

c. Use la FGM para hallar la varianza de la variable X

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$E(X^2) = \Psi_x{}''(0) \quad \rightarrow \quad \Psi_x{}''(t) = \tfrac{4}{3}e^{2t} + \tfrac{16}{3}e^{4t} + \tfrac{36}{3}e^{6t}$$
$$\Psi_x{}''(0) = E(X^2) = \frac{4}{3} + \frac{16}{3} + \frac{36}{3} = \frac{56}{3} = 18.67$$
$$Var(X) = 18.67 - 16 = 2.67$$
$$desv.esta(X) = \sqrt{2.67} = 1.63$$