Matemática estructural y lógica
Inducción y estructuras bien ordenadas.

Sebastián Valencia Calderón

Mayo 2013

Ejercicio 1. Demuestre que para todo número natural n, 5 divide a F_{5n}.

$$(\forall n : \mathbb{N} \mid: 5 \mid F_{5n})$$

La demostración se realizará usando el principio de inducción matemática, referido desde ahora como PIM. Para esto, se tomará como caso base el número cero, luego se suponrá el predicado para un natural cualquiera, y posteriormente, se estructura la demostración con PMI. Caso base: $P(0) : 5 \mid F_0 = 5 \mid 0 \equiv$ TRUE, Hipótesis inductiva: $(\forall k : \mathbb{N} \mid: 5 \mid F_{5k})$
Lema 1: $a \mid b \iff \frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$
L1 proof: $a \mid b \iff b = k_{\mathbb{Z}}a \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$
Lema 2: $a \mid b \Rightarrow a \mid kb$
L2 proof: $a \mid b \Rightarrow \frac{b}{a} \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k\frac{b}{a} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \mid kb \vdash$ **Lema 1 y clausura de** $\langle \mathbb{Z}, * \rangle$
Lema 3: $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b + c$
L3 proof: $a \mid b \Rightarrow b = ak_{\mathbb{Z}}; a \mid c \Rightarrow c = am_{\mathbb{Z}} :: b + c = a(k_{\mathbb{Z}} + m_{\mathbb{Z}}) \Rightarrow b + c = al_{\mathbb{Z}}$
$\vdash$ **Definición de divisibilidad y clausura de** $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$

$F_{5(k+1)} = F_{5(k+1)-1} + F_{5(k+1)-2} \vdash$ Definición Fibonacci
$= F_{5k+4} + F_{5k+3} \vdash$ Aritmética
$= (F_{5k+3} + F_{5k+2}) + (F_{5k+2} + F_{5k+1}) \vdash$ Definición de Fibonacci
$= F_{5k+3} + 2F_{5k+2} + F_{5k+1} \vdash$ Aritmética
$= (F_{5k+2} + F_{5k+1}) + 2(F_{5k+1} + F_{5k}) + F_{5k+1} \vdash$ Aritmética y definición de Fibonacci
$= (F_{5k+1} + F_{5k} + F_{5k+1}) + 2F_{5k+1} + 2F_{5k} + F_{5k+1} \vdash$ Aritmética y definición de Fibonacci
$= 5F_{5k+1} + 3F_{5k} \vdash$ Aritmética
$\Rightarrow ((5 \mid 5F_{5k+1}) \wedge (5 \mid 3F_{5k})) \vdash$ Lema 1 sobre $5F_{5k+1}$, lema 2 e hipótesis inductiva sobre $\mid 3F_{5k}$
$\Rightarrow 5 \mid (5F_{5k+1} + 3F_{5k}) \vdash$ Lema 3 con enunciado anterior
$\Rightarrow 5 \mid F_{5(k+1)} \vdash$ Sustitución de expresión equivalente
$\Rightarrow \vdash$ Por PMI, $P(n)$ es TRUE

Ejercicio 2. Demuestre el siguiente predicado.

$$P(n) :\equiv (\forall n : \mathbb{N} \mid n \geq 1 : F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n)$$

Caso base: $P(1) :\equiv F_2F_0 - F_1^2 = (-1)^1 \equiv -(1)^2 = (-1)^1 \equiv$ TRUE
Hipótesis inductiva: $(P(k) :\equiv \forall k : \mathbb{N} \mid k \geq 1 : F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2 = (-1)^k$
Posible consecuencia: $P(k+1) :\overset{?}{\equiv} F_{k+2}F_k - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$

$F_{k+2}F_k - F_{k+1}^2 = (F_{k+1} + F_k)F_k - F_{k+1}^2 \vdash$ Definición Fibonacci
$= F_kF_{k+1} + F_k^2 - F_{k+1}^2 \vdash$ Distributividad
$= F_kF_{k+1} + F_k^2 - (F_k + F_{k-1})^2 \vdash$ Def Fibonacci
$= F_kF_{k+1} + F_k^2 - F_k^2 - 2F_{k-1}F_k - F_{k-1}^2 \vdash$ Expansión binomial

$= F_kF_{k+1} - 2F_{k-1}F_k - F_{k-1}^2 \vdash$ Inverso aditivo sobre $\langle \mathbb{N}, + \rangle$
$= F_k(F_k + F_{k-1}) - 2F_{k-1}F_k - F_{k-1}^2 \vdash$ Def Fibonacci
$= F_k^2 + F_kF_{k-1} - 2F_{k-1}F_k - F_{k-1}^2 \vdash$ Distributiva
$= F_k^2 - F_{k-1}F_k - F_{k-1}^2 \vdash$ Álgebra
$= F_k^2 - F_{k-1}(F_k - F_{k-1}) \vdash$ Álgebra, factorización
$= F_k^2 - F_{k-1}F_{k+1} \vdash$ Def Fibonacci
$= (-1)(F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2) \vdash$ Inverso aditivo sobre $\langle \mathbb{N}, + \rangle$
$= (-1)(-1)^k \vdash$ Hipótesis inductiva
$= (-1)^{k+1} \vdash$ Propiedades potenciación
$\Rightarrow P(k+1),$ Por PMI, $P(n)$ es cierto para todo n

Ejercicio 3. Demuestre la siguiente expresión.

$$P(n) :\equiv \sum_{i=0}^{n} (\frac{-1}{2})^i = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3 \times 2^n}$$

$$\text{Caso base:} \quad P(0) :\equiv \sum_{i=0}^{0} (\frac{-1}{2})^i = 1 = \frac{2^1 + 1}{3 \times 1} = 1 \equiv \text{TRUE}$$

$$\text{Hipótesis inductiva:} \quad P(k) :\equiv \sum_{i=0}^{k} (\frac{-1}{2})^i = \frac{2^{k+1} + (-1)^k}{3 \times 2^k}$$

$$\sum_{i=0}^{k+1} (\frac{-1}{2})^i = (\frac{-1}{2})^0 + (\frac{-1}{2})^1 + \ldots + (\frac{-1}{2})^{k-1} + (\frac{-1}{2})^k + (\frac{-1}{2})^{k+1} \tag{1}$$

$$(\sum_{i=0}^{k} (\frac{-1}{2})^i) + (\frac{-1}{2})^{k+1} \tag{2}$$

$$\frac{2^{k+1} + (-1)^k}{3 \times 2^k} + (\frac{-1}{2})^{k+1} \vdash \text{Hipótesis inductiva} \tag{3}$$

$$\frac{2^{k+1} + (-1)^k}{3 \times 2^k} + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} \vdash \text{Álgebra} \tag{4}$$

$$\frac{2^{k+1}(2^{k+1} + (-1)^k) + (3 \times 2^k)(-1)^{k+1}}{3 \times 2^k \times 2^{k+1}} \vdash \text{Álgebra} \tag{5}$$

$$\frac{2^k[2(2^{k+1} + (-1)^k) + 3(-1)^{k+1}]}{3 \times 2^k \times 2^{k+1}} \vdash \text{Factorización} \tag{6}$$

$$\frac{2(2^{k+1} + (-1)^k) + 3(-1)^{k+1}}{3 \times 2^{k+1}} \vdash \text{Simplificación} \tag{7}$$

$$\frac{2^{k+2} + (-1)^k[2 + 3(-1)]}{3 \times 2^{k+1}} \vdash \text{Factorizaación} \tag{8}$$

$$\frac{2^{k+2} + (-1)^k(-1)}{3 \times 2^{k+1}} \vdash \text{Aritmética} \tag{9}$$

$$\frac{2^{k+2} + (-1)^{k+1}}{3 \times 2^{k+1}} \vdash \text{Aritmética} \tag{10}$$

$$\Rightarrow \text{P(n) por PMI} \tag{11}$$

Ejercicio 4. Demuestre el siguiente teorema.

$$dlast(S \triangleright x) = S$$

Caso base: $P(\epsilon) :\equiv (dlast(\epsilon \triangleright x)) = (dlast(x \triangleleft \epsilon)) = \epsilon \vdash$ Axioma de anexar con cadena vacia $\equiv$ TRUE Hipótesis inductiva: $P(S) :\equiv (\forall S, x \mid dlast(S \triangleright x) = S)$

$$dlast((y \triangleleft S) \triangleright x) = dlast(y \triangleleft (S \triangleright x)) \vdash \text{Asociatividad de listas} \tag{12}$$
$$dlast(y \triangleleft (S \triangleright x)) = y \triangleleft dlast(S \triangleright x) \vdash \text{Definición } dlast(x \triangleleft S) \tag{13}$$
$$y \triangleleft dlast(S \triangleright x) = y \triangleleft S \vdash \text{Hipótesis inductiva} \tag{14}$$
$$\Rightarrow dlast((y \triangleleft S) \triangleright x) = y \triangleleft S \Rightarrow P(y \triangleleft S) \vdash \text{PMI} \tag{15}$$

Ejercicio 5. Demuestre el siguiente teorema.

$$asc(S \triangleleft x) \equiv asc(S) \wedge (x \leq min_S(S))$$

Caso base: $P(\epsilon) :\equiv asc(S \triangleleft \epsilon) = asc(\epsilon) \wedge (x \leq min(\epsilon)) = TRUE \wedge (x \leq \infty) \equiv (TRUE \wedge TRUE) \equiv TRUE \vdash$ Definición de asc y ∞, propiedades $\wedge$

Hipótesis inductiva: $P(S) :\equiv (\forall S, x \mid asc(S \triangleleft x) \equiv asc(S) \wedge (x \leq min_S(S)))$
Por hipótesis inductiva, y simplificación sobre P(n), $x \leq min_S(S)$. Por definición, $min_S(y \triangleleft S) = min(y, min_S(S))$. Como S es una secuencia ascendente por P(n), $min_S(S) = car(S)$, y $min_S(y \triangleleft S) = min(y, car(S))$, para que $asc(y \triangleleft S)$, sea cierto, $y \leq car(S)$, es decir $y = min_S(y \triangleleft S)$.

$$asc(x \triangleleft (y \triangleleft S)) = x \leq y \wedge asc(y \triangleleft S) \vdash \text{Definición de } asc \tag{16}$$
$$= asc(y \triangleleft S) \wedge x \leq y \vdash \text{Simetría de } \wedge \tag{17}$$
$$= asc(y \triangleleft S) \wedge x \leq min_S(y \triangleleft S) \vdash \text{Hipótesis inductiva y deducción de arriba} \tag{18}$$
$$\Rightarrow P(y \triangleleft S) \vdash \text{Por PMI, P(n) es cierto} \tag{19}$$