

# Tarea 1 - Vectorial 201520

## 1. PART 1: 1.1 - 3.2

1.1. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable.

- (a) Probar que el gráfico de la función  $z = xf(y/x)$  pertenece a una superficie que consiste de las rectas que pasan por el punto  $(0,0,0)$  y una curva plana (¿cuál?). Superficies de este tipo se llaman *superficies cónicas*.

*Ayuda.* Ver Fig. 1.

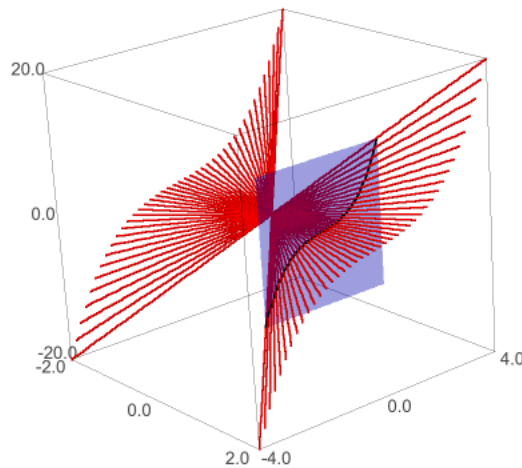


FIGURE 1. Ejercicio 1. El gráfico de la función  $z = xf(y/x)$  donde  $f(t) = t^3 + t$

- (b) Probar que todos los planos tangentes al gráfico de la función  $z = xf(y/x)$ , donde  $f(t)$  es una función diferenciable y  $x \neq 0$ , pasan por el origen.

1.2. Probar que el volumen del tetraedro formado por los planos coordenados y un plano tangente al gráfico de la función  $z = \frac{1}{xy}$ ,  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ , (ver Fig. 2) es una constante, es decir no depende del punto en que tomemos el plano tangente. ¿Cuál es la constante?

1.3. Consideremos la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y},$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes.

Probar que la función  $h(x, y, t) = g(x + at, y + bt)$  es una solución de la ecuación diferencial parcial para cualquier función  $g(u, v)$  diferenciable.

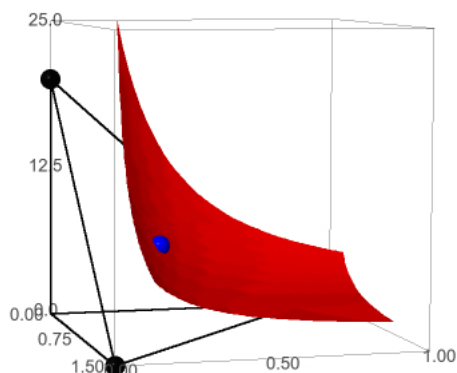


FIGURE 2. Ejercicio 2. El tetraedro formado por los planos coordenados y un plano tangente al gráfico de la función  $z = \frac{1}{xy}$ ,  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$

1.4. Sea  $\Gamma$  una curva parametrizada con la ecuación  $\vec{r} = \vec{\rho}(t)$ ,  $t \in (a, b)$ . Sea  $\kappa(t)$  la curvatura de la curva  $\Gamma$ .

El centro de curvatura de la curva  $\Gamma$  en un punto  $M(t) \in \Gamma$  es el punto  $A(t)$  que pertenece a la recta normal de la curva  $\Gamma$  en el punto  $M(t)$ , la distancia  $|M(t)A(t)| = 1/\kappa(t)$ , y el vector  $\overrightarrow{M(t)A(t)}$  apunta hacia la concavidad de la curva (ver Fig. 3). El sentido geométrico de centro de curvatura es que  $A(t)$  es el centro del círculo osculador de la curva en el punto  $M(t)$ , es decir el círculo que presenta la mejor aproximación a la curva en este punto (ver Fig. 4).

- (a) Hallar el conjunto de centros de curvatura de un círculo.
- (b) Hallar el conjunto de centros de curvatura de la parábola  $y = x^2/2$ . Hacer dibujo.

1.5. Considere la función  $f(x) = \ln(\sin(x))$ , para  $x$  en el intervalo  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ .

**VERDADERO O FALSO.** Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si esta es verdadera o falsa y de una justificación clara y concisa.

- (1) El punto  $\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})$  pertenece a la gráfica de  $f(x)$ .
- (2) El punto  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  pertenece a la gráfica de  $f(x)$ .
- (3) La función  $\sigma(t) = (t^2, \ln(\sin(t^2)))$  para  $t \in [\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \sqrt{\frac{\pi}{3}}]$  es una parametrización de la gráfica de  $f(x)$ .
- (4) La longitud de arco de la gráfica de  $f(x)$  es  $\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}\right)$

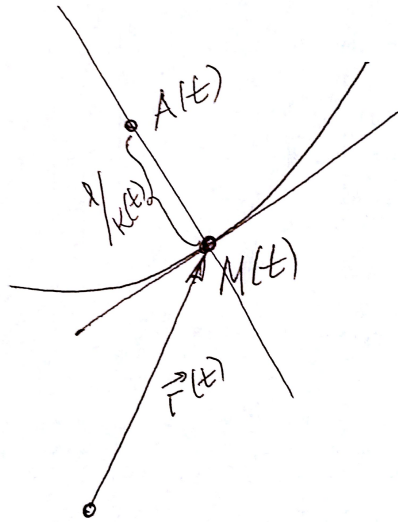


FIGURE 3. Ejercicio 4. Centro de curvatura

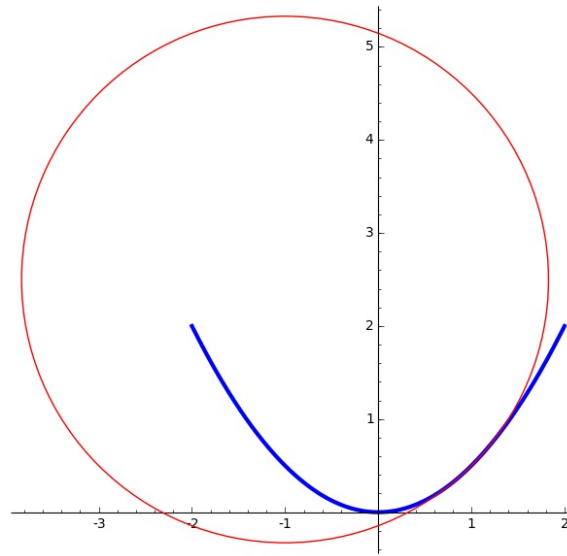


FIGURE 4. Ejercicio 4. El círculo osculador de parábola

1.6. La trayectoria  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$  de una bala de cañon disparada desde el origen con ángulo de elevación  $\theta$  satisface las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} x''(t) &= 0 & y''(t) &= -9.8 \\ x'(0) &= 100 \cos(\theta) & y'(0) &= 100 \sin(\theta) \\ x(0) &= 0 & y(0) &= 0 \end{aligned}$$

- (1) Encuentre las funciones  $x(t)$  y  $y(t)$  que describen la trayectoria de la bala (la respuesta debe depender del ángulo  $\theta$  y del tiempo  $t$ ).
- (2) Encuentre cuanto tiempo se demora la bala en caer al piso. (Este valor de  $t$  depende del ángulo de lanzamiento)

- (3) Haga una gráfica de la trayectoria de la bala para ángulos de disparo  $\theta = \frac{\pi}{3}$  y  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .
- (4) Para que valor del ángulo  $\theta$  la bala recorre una distancia **horizontal** máxima antes de caer al piso? Cual es el valor de esa distancia?
- (5) Encuentre una integral que represente la distancia total recorrida por la bala antes de caer al piso. (el resultado debe depender del ángulo inicial de disparo  $\theta$ ).

1.7. Hallar la curva paramétrica  $\vec{r}(t)$  tal que  $\vec{r}(1) = (0, -1, 1)$  y  $\vec{r}'(t) = (t, e^{t/2}, t^2)$ .

1.8. Dada la curva paramétrica  $\vec{r}(t) = (\cos(3t), \sin(3t), 2t^{3/2})$ , calcular:

- (1) La recta tangente en el punto  $(1, 0, 0)$ ;
- (2) La función curvatura  $\kappa(t)$ ;
- (3) La curvatura en el punto  $(0, 1, (\pi/3)^{3/2})$ .

1.9. En cual punto la recta tangente a la curva paramétrica  $\vec{r}(t) = (\frac{4}{3}t^3, 4t^2, t)$  es paralela al plano de ecuación  $2x - y + 2z = 3$ ?

1.10. Sea  $\vec{r}(t)$  una función vectorial diferenciable tal que  $\vec{r}(t) \neq \vec{0}$ . Demostrar que en un máximo o un mínimo local de  $\|\vec{r}(t)\|$  el vector  $\vec{r}'(t)$  es perpendicular a  $\vec{r}(t)$ .

## 2. PART 2: 4.1 - 4.6

2.1. Considere el campo escalar

$$f(x, y, z) = xy + yz + xy.$$

- (a) Encuentre el dominio.
- (b) Encuentre la dirección de más rápido crecimiento en el punto  $P(1, 1, 1)$ .

2.2. Considere el campo escalar,  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

- (a) Encuentre los dominios.
- (b) Encuentre la dirección de más rápido crecimiento en el punto  $P(1, 1, 1)$ .

2.3. Sea  $\vec{r} = (x, y, z)$  y  $r = \|\vec{r}\|$ . Demuestre que,

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

2.4. Sea  $A(-1, 0)$ , y  $B(1, 0)$  dos puntos en el plano  $xy$ . Considere  $r_1$  la distancia de un punto  $M(x, y)$  a  $A$  y  $r_2$  la distancia de  $M$  a  $B$  y potencial electrostático  $V = K \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)$ , con  $K$  constante, un campo escalar definido para todo  $(x, y) \neq A$ ,  $(x, y) \neq B$ .

- (a) Halle  $r_1$ , y  $r_2$  en términos de  $x$  e  $y$ .
- (b) Halle  $\nabla V(x, y)$
- (c) Considere el cuadrado con vértices  $C(1, 1)$ ,  $D(-1, 1)$ ,  $E(-1, -1)$ , y  $F(1, -1)$ . Halle el potencial electrostático en los vértices del cuadrado, los puntos medios de los lados y en el centro del cuadrado (son 9 puntos en total). Si en algún punto no está definido, explique porqué no lo está.
- (d) Halle el gradiente  $\nabla V$  en los vértices del cuadrado, los puntos medios de los lados y en el centro del cuadrado (son 9 puntos en total). Dibuje los anteriores vectores en el plano  $xy$ . Si en algún punto no está definido, explique porqué no lo está.
- (e) Encuentre las curvas de nivel para los valores  $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$  y dibújelas.

**Nota de interés:** A  $V$  se le conoce como el potencial electrostático debido a dos filamentos infinitos de densidades  $\lambda$ , y  $-\lambda$  paralelos al eje  $z$  que pasan por  $A$  y  $B$ . La constante  $K = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}$ . Para los cálculos de este ejercicio considere  $K = 1$ .

2.5. Sea  $G$  el subconjunto del plano dado por

$$G = \{(x, y) : x^4 + y^4 = 1\}$$

- (1) Verifique que el punto  $(1, 0)$  pertenece a  $G$ .
- (2) Escriba el enunciado del Teorema de la función implícita para una función escalar diferenciable  $F(x, y)$  en  $\mathbb{R}^2$
- (3) Utilice el Teorema de la función implícita para demostrar que existe una función  $h(y)$  definida cerca de  $y = 0$  que cumple:  $h(0) = 1$  y la gráfica  $\Gamma = \{(x, y) \mid x = h(y)\}$  coincide con  $G$  en algun disco alrededor de  $(1, 0)$ .
- (4) Calcule  $h'(0)$ ,  $h''(0)$ ,  $h'''(0)$ .
- (5) Escriba la aproximación de Taylor de  $h(y)$  de orden tres alrededor de  $y = 0$ .

2.6. Resuelva los siguientes problemas usando diferenciación implícita.

- (1) Asuma que  $y$  es una función diferenciable de  $x$  y que  $e^{xy} = e^{4x} - e^{5y}$ . Encuentre una expresión para  $y'(x)$  en términos de  $x$  y  $y$ .
- (2) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación  $(x^2 + y^2)^3 = 8x^2y^2$  en el punto  $(-1, 1)$ .

2.7. Identificar y dibujar las curvas de nivel de la superficie definida implícitamente por las siguientes ecuaciones

- (1)  $2x - 3y + z^2 = 1$
- (2)  $4z + 2y^2 - x = 0$
- (3)  $y^2 = 2x^2 + z$
- (4)  $x^2 - 4z - y = 2$
- (5)  $x - 4z - y^2 = 2$

2.8.

- (1) Calcule la ecuacion de la superficie que se obtiene al rotar alrededor del eje  $z$  el circulo de radio  $r$  centrado en el punto  $(0, R, 0)$  que esta en el plano  $yz$ :

$$(y - R)^2 + z^2 = r^2.$$

Esta superficie se conoce como el toro 2-dimensional.

- (2) Calcule la ecuacion del plano tangente al toro 2-dimensional en un en punto arbitrario  $(x_0, y_0, z_0)$ .

2.9.

- (1) Calcule la ecuacion de la superficie que se obtiene al rotar alrededor del eje  $x$  la curva dada por

$$y = \cosh(x)$$

Esta superficie se conoce como la catenoide.

- (2) Calcule la ecuacion del plano tangente a la catenoide en un en punto arbitrario  $(x_0, y_0, z_0)$ .

2.10.

- (1) (a) Calcule la ecuacion de la superficie que se obtiene al rotar alrededor del eje  $z$  el circulo de radio  $r$  centrado en el origen  $(0, 0, 0)$  que esta en el plano  $yz$ :

$$y^2 + z^2 = r^2.$$

- (b) Identificar la superficie y calcular el plano tangente a esta superficie en un en punto arbitrario  $(x_0, y_0, z_0)$ .

- (2) (a) Calcule la ecuacion de la superficie que se obtiene al rotar alrededor del eje  $z$  la hiperbola que esta en el plano  $yz$ :

$$z^2 - y^2 = 1.$$

- (b) Identificar la superficie y calcular el plano tangente a esta superficie en un en punto arbitrario  $(x_0, y_0, z_0)$ .

- (3) (a) Calcule la ecuacion de la superficie que se obtiene al rotar alrededor del eje  $y$  la recta que esta en el plano  $yz$ :

$$z = y.$$

- (b) Identificar la superficie y calcular el plano tangente a esta superficie en un en punto arbitrario  $(x_0, y_0, z_0)$ .