Optimización[1].

Examen Parcial #1

Nombre: 19 de marzo de 2008

---

1. Considere el programa lineal: $\min \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ sujeto a $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, donde

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Denote $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ las columnas de $\mathbf{A}$, y $\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6$ las columnas adicionales resultantes al añadir variables de holgura (a la primera y segunda restricción respectivamente) para poner el problema en forma estándar. Complete la siguiente tabla indicando en cada caso si la solución correspondiente a la base es o no una solución básica factible (SBF), y si es o no una SBF óptima. Calcule en cada caso el costo correspondiente a la solución.

Base	SBF?	SBF óptima?	Costo
$[\mathbf{a}_1 \vert \mathbf{a}_2]$	NO	NO	X
$[\mathbf{a}_1 \vert \mathbf{a}_3]$	SI	NO	6
$[\mathbf{a}_4 \vert \mathbf{a}_6]$	SI	SI	3

a)

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{No es factible.}$$

b)

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{es factible.}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} = \mathbf{c_N} - \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{no es óptima}
\end{aligned}$$

c)

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{es factible.}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} = \mathbf{c_N} - \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{óptima!}
\end{aligned}$$

---

[1] Usted debe justificar todas sus respuestas. Una respuesta que aparezca de la nada no tiene ningún valor.

2. Considere el siguente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{rrrrrrl} \text{máx} & 10x_1 & +24x_2 & +20x_3 & +20x_4 & +25x_5 & \\ \text{sujeto a} & x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +5x_5 & \leq 19 \\ & 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +x_5 & \leq 57 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

(a) Escriba el problema dual y verifique que $(\lambda_1,\ \lambda_2) = (4, 5)$ es una solución factible.

(b) **Usando información en la parte (a)** encuentre soluciones óptimas para el primal y el dual.

(a)

$$\left.\begin{array}{rrrl} \text{mín} & 19\lambda_1 & +57\lambda_2 & \\ \text{sujeto a} & \lambda_1 & +2\lambda_2 & \geq 10 \\ & \lambda_1 & +4\lambda_2 & \geq 24 \\ & 2\lambda_1 & +3\lambda_2 & \geq 20 \\ & 3\lambda_1 & +2\lambda_2 & \geq 20 \\ & 5\lambda_1 & +\lambda_2 & \geq 25 \\ & \lambda_1, & \lambda_2 & \geq 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{(\lambda_1,\ \lambda_2)=(4,5)} \begin{array}{rl} 14 & > 10 \\ 24 & = 24 \\ 23 & > 20 \\ 22 & > 20 \\ 25 & = 25 \end{array}$$

(b) Note que para $(\lambda_1,\ \lambda_2) = (4, 5)$ únicamente la segunda y quinta restricciones son activas. Si suponemos que estamos en una solución óptima, esto implicaría $x_1 = x_3 = x_4 = 0$. Es esto posible? Chequeando, dicha solución debe cumplir:

$$\begin{array}{rrl} 24x_2 & +25x_5 & = 361 \\ x_2 & +5x_5 & = 19 \\ 4x_2 & +x_5 & = 57 \end{array}$$

Note que la primera ecuación es combinación lineal de la segunda y la tercera. Si encontramos una solución a este sistema de ecuaciones (eliminando una de ellas) esta solución debe ser óptima para el primal (ya que sería una SBF cuyo valor objetivo es igual al valor objetivo del dual en (λ_1, λ_2)). Resolviendo:

$$\left.\begin{array}{rrl} x_2 & +5x_5 & = 19 \\ 4x_2 & +x_5 & = 57 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_1 = 14,\ x_2 = 1$$

Luego $x_1 = 14,\ x_2 = 1,\ x_1 = x_3 = x_4 = 0$ es una solución óptima para el primal y $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 5$ es una solución óptima para el dual.