Universidad de los Andes
Departamento de Ingeniería Industrial
Probabilidad y Estadística I (IIND2106)
Profesor Coordinador: Mario Castillo
Profesores: Alejandra López, Astrid Bernal, Carlos Castellanos, Fabio Lagos, Gonzalo Torres, Hernando Mutis.
Segundo semestre de 2015

COMPLEMENTARIA 1

Punto 1

Un grupo de estudiantes está desarrollando un proyecto de movilidad relacionado con los medios de transporte que se emplean para llegar a la Universidad. Dentro del estudio se propone la aplicación de una encuesta, en la cual se indaga acerca de las preferencias de transporte a 500 estudiantes de ingeniería de la Universidad de los Andes. Los resultados de dicha encuesta se presentan a continuación:

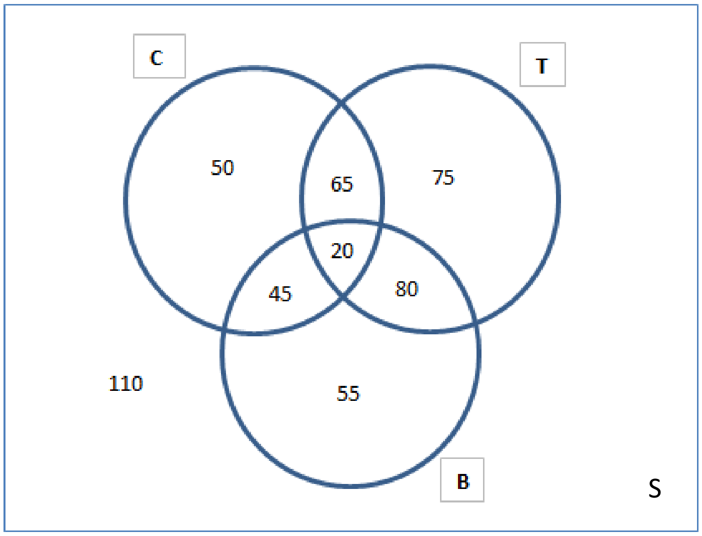
- 85 van a la universidad en carro y en Transmilenio.
- 65 utilizan tanto carro como bicicleta para transportarse.
- 75 van a la universidad únicamente en Transmilenio.
- 100 utilizan Transmilenio y bicicleta.
- 55 únicamente viajan en bicicleta.
- 180 usan carro.
- 20 utilizan los tres medios de transporte.

Si se escoge un estudiante al azar de la muestra mencionada, calcule la probabilidad de que dicho estudiante:

Para dar solución a los siguientes literales se definen primero los siguientes eventos:

C: Un estudiante utiliza el carro.
T: Un estudiante utiliza Transmilenio.
B: Un estudiante viaja en bicicleta.

Habiendo hecho esto, es posible construir el siguiente diagrama de Venn:



a) Utilice al menos uno de los tres medios de transporte.

Opción 1:

$$P(C \cup T \cup B) = P(C) + P(T) + P(B) - P(CT) - P(CB) - P(TB) + P(CTB)$$

$$P(C \cup T \cup B) = \frac{180}{500} + \frac{240}{500} + \frac{200}{500} - \frac{85}{500} - \frac{65}{500} - \frac{100}{500} + \frac{20}{500} = \frac{39}{50} = 0.78$$

Opción 2:

$$P(C \cup T \cup B) = 1 - P((C \cup T \cup B)^c)$$

$$P(C \cup T \cup B) = 1 - \frac{110}{500} = \frac{39}{50} = 0.78$$

b) No utilice ninguno de los tres medios de transporte mencionados.

$$P((C \cup T \cup B)^c) = \frac{110}{500} = 0.22$$

c) Se transporte en bicicleta, pero no que utilice Transmilenio para ir a la universidad.

$$P(BT^c) = \frac{Número\ de\ elementos\ en\ BT^c}{Número\ de\ elementos\ en\ \Omega} = \frac{55 + 45}{500} = \frac{1}{5} = 0.2$$

d) Se transporte únicamente en uno de los tres medios de transporte

$$P(C \cup T \cup B) - P(C \cap T) - P(T \cap B) - P(B \cap C) + 2P(C \cap T \cap B)$$

$$= \frac{390 - 85 - 100 - 65 + 2 * 20}{500} = \frac{9}{25} = 0.36$$

e) No utilice Transmilenio como medio de transporte.

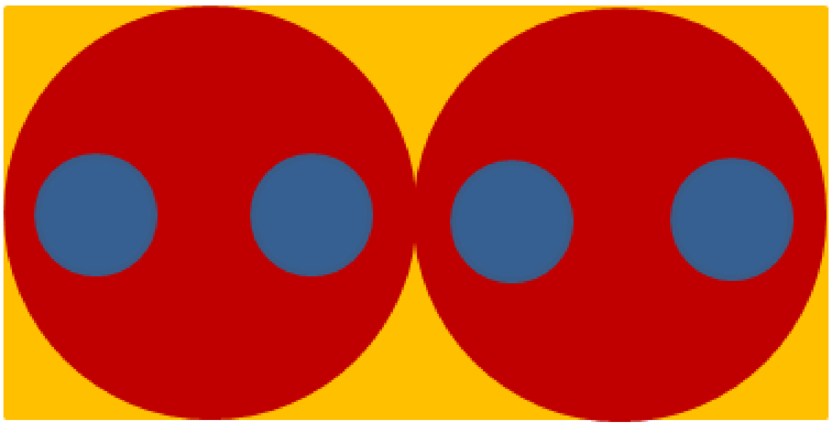
$$P(T^c) = 1 - P(T) = 1 - \frac{65 + 20 + 80 + 75}{500} = \frac{13}{25} = 0.52$$

f) Utilice solo dos de los tres medios de transporte mencionados.

$$P(B \cap C) + P(B \cap T) + P(C \cap T) - 3P(C \cap T \cap B) = \frac{65}{500} + \frac{100}{500} + \frac{85}{500} - 3\left(\frac{20}{500}\right)$$
$$= \frac{19}{50} = 0.38$$

Punto 2

Usted ha decidido entrar en el siguiente juego, en el que apuesta una moneda de $1,000 pesos:



El juego consiste en lanzar un dardo al tablero. Si el dardo cae en el área amarilla, usted no gana ni pierde y se lleva la moneda que apostó. Si cae en el área de los dos círculos rojos se pierde la moneda de $1,000 que apostó, pero si cae en los círculos azules usted gana una moneda de $1,000 pesos adicional a la que apostó.

Las dimensiones del tablero son 40 cm de largo por 20 cm de ancho. Los radios de los círculos rojos son de 10 cm y los radios de los círculos azules son de 4 cm.

Teniendo en cuenta la información anterior ¿cuál es la probabilidad de no perder su moneda?

$$\text{Área del Rectangulo} = 800\ cm^2$$
$$\text{Área de un Círculo Rojo} = \pi * r^2 = 3.1416 * 100 = 314.159\ cm^2$$
$$\text{Área de un Círculo Azul} = \pi * r^2 = 3.1416 * 16 = 50.2655\ cm^2$$
$$\text{Área Total} = 800\ cm^2$$

$$P(Ganar\ \$1{,}000) = \frac{4 * (50.2655)}{800} = 0.251$$

$$P(Perder\ \$1{,}000) = \frac{2 * 314.159 - 4 * (50.2655)}{800} = 0.534$$

$$P(No\ ganar\ ni\ perder) = \frac{800 - 2 * 314.159}{800} = 0.215$$

La probabilidad de no perder la moneda sería la probabilidad de ganar $1,000 y de no ganar ni perder.

$$P(No\ perder\ su\ moneda) = P(Ganar\ \$1{,}000) + P(No\ ganar\ ni\ perder)$$

$$P(No\ perder\ su\ moneda) = 0.251 + 0.215 = 0.466$$

Punto 3

En la tabla de abajo se resume cierta información (frecuencias absolutas) relacionada con las variables Antigüedad Laboral y el Nivel Intelectual, tomada de una muestra aleatoria de 735 personas:

		Nivel Intelectual			
		Alto	***Bajo***	***Medio***	***Total general***
Antigüedad	***Antiguo***	34	53	279	*366*
	Nuevo	16	28	129	*173*
	Veterano	16	24	156	*196*
	Total general	*66*	*105*	*564*	**735**

Utilizando la información de la tabla calcule la probabilidad de que una persona seleccionada al azar:

- Sea Nueva.
- Tenga un Nivel Intelectual Medio y sea Veterana.
- Tenga un Nivel Intelectual Alto o sea Veterana.
- Sea Nuevo y tenga un Nivel Intelectual Medio o Alto.

De acuerdo con la tabla y las preguntas mencionadas, podríamos identificar los siguientes eventos:

A: La persona escogida tiene un Nivel Intelectual Alto
M: La persona escogida tiene un Nivel Intelectual Medio
V: La persona escogida es un Veterano
N: La persona escogida es un Nuevo

Con los eventos definidos, podemos calcular las probabilidades siguiendo el siguiente análisis:

- Primero, la probabilidad de que una persona seleccionada sea nueva (es decir, $P\{N\}$) sólo dependerá de la variable Antigüedad. Por lo tanto sólo debemos buscar la fila correspondiente a "Nuevo", sumar para todos los valores de la fila (que es la suma de la última columna de Total general) y esta suma nos da el número total de casos asociados al evento N. Luego, dividiendo entre el número total de casos, tenemos que $P(N) = \frac{173}{735} = 0.24$.

- La segunda probabilidad es la intersección de 2 eventos, dado que la afirmación es de tipo "y". Los dos eventos mencionados son M y V. Buscamos la intersección en la tabla y tenemos que $P(M \cap V) = \frac{156}{735} = 0.212$.

- Para la tercera, la afirmación es de tipo "o", lo que significa que debemos analizar la unión de los eventos A y V. Por definición, $P(A \cup V) = P(A) + P(V) - P(A \cap V)$, todos valores que se encuentran explícitos en la tabla. De esta manera, reemplazamos y tenemos que $P(A \cup V) = \frac{66+196-16}{735} = 0.33$.

- Finalmente, tenemos una afirmación tipo "y" seguida de una afirmación tipo "o". Esta probabilidad se interpreta como la intersección entre un evento y la unión de otros dos eventos. $P\big(N \cap (M \cup A)\big) = \frac{16+129}{735} = 0.197$.

Punto 4

En los juegos Panamericanos 2015, 5 parejas de casados compraron tiquetes para asistir a la final de tenis Bagnis vs Barrientos. Los 10 tiquetes se han comprado de manera aleatoria en puestos consecutivos en la misma fila (uno al lado del otro).

a) ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar, si cada pareja se sienta junta?

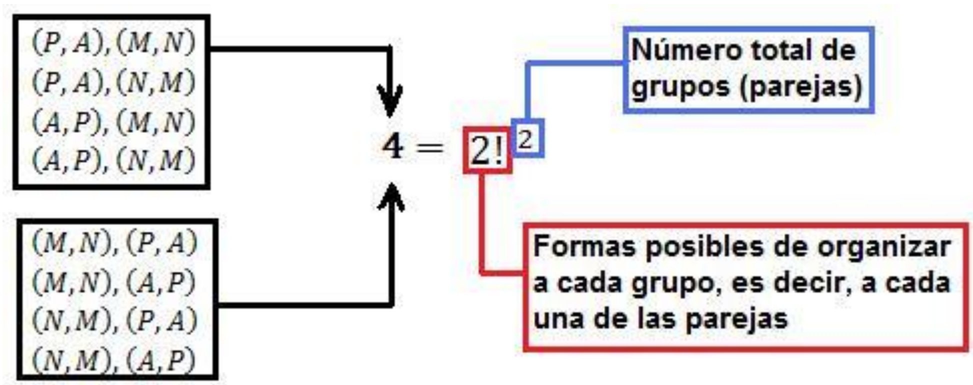
Si consideramos cada pareja como un conjunto, obtenemos 5 conjuntos que podemos ubicar de 5! Formas distintas. Por cada una de las posibles formas en que podemos ubicar los 5 conjuntos, existen 2^5 configuraciones distintas puesto que cada pareja puede sentarse de 2 formas diferentes (Hombre Mujer, o Mujer Hombre). De este modo, existen $((5!)(2^5))$= 3840 maneras distintas de sentarse para que cada pareja quede junta.

Para entender mejor de dónde viene este resultado, tratemos un ejemplo ilustrativo con dos parejas (Pablo, Alejandra) y (María, Nicolás). Primero tratamos a cada pareja como un gran conjunto, por lo que tendríamos 2 conjuntos. Estos 2 grupos se pueden organizar de 2! Formas posibles:

(P,A),(M,N)

(M,N),(P,A)

Ahora bien, por cada una de estas configuraciones podemos organizar a las personas de 4 maneras sin separar las parejas:



Por lo tanto vemos que hay 8 combinaciones posibles que corresponden a $(2!)(2!)^2$. De forma similar ocurre para las 5 parejas del problema original: $(5!)(2!)^5$

b) Si las 10 personas llegan de forma aleatoria e independiente, y se sientan en el orden en que van llegando de izquierda a derecha de la fila (no importa si las parejas no quedan juntas), encuentre la probabilidad de que todos los hombres queden sentados juntos.

Definimos el evento T: Todos los hombres se sientan juntos

$$P(T) = \frac{\#configuraciones\ donde\ todos\ los\ hombres\ se\ sientan\ juntos}{\#total\ de\ configuraciones\ posibles}$$

El total de configuraciones posibles es 10!

Para encontrar de cuántas formas se pueden sentar las 10 personas de modo que los 5 hombres queden juntos consideramos a los 5 hombres como un solo grupo H y a las mujeres las consideramos individualmente. Tenemos entonces que las 5 mujeres y el grupo H se pueden organizar de 6! formas posibles. Sin embargo, por cada una de estas 6! formas posibles, el grupo H se puede organizar “por dentro” de 5! formas distintas. De este modo, encontramos que hay (6!)x(5!) configuraciones en donde todos los hombres se sientan juntos. Obtenemos lo siguiente:

$$P(T) = \frac{5!\,6!}{10!} \approx \mathbf{0.02381}$$

Para entender mejor de dónde viene el total de eventos favorables (cuando todos los hombres están juntos) consideremos un ejemplo de 2 parejas (M1,H1), (M2,H2).

Armamos un solo grupo inseparable de los hombres (el grupo H). Debemos organizar entonces 3 “grupos”: H,M1,M2. Sabemos que esto se puede hacer de 3! Formas distintas:

$$HM_1M_2$$
$$HM_2M_1$$
$$M_1HM_2$$
$$M_2HM_1$$
$$M_1M_2H$$
$$M_2M_1H$$

Por cada una de estas combinaciones, al interior del grupo H podemos organizar a los 2 hombres de 2! formas diferentes. Por ejemplo, para la primera configuración, obtenemos 2 configuraciones posibles en las cuales todos los hombres están juntos:

$$H_1H_2M_1M_2$$
$$H_2H_1M_1M_2$$

Esto ocurre para las 3!=6 configuraciones mostradas arriba. De aquí obtenemos que las posibilidades de sentar a todos los hombres juntos es:

$$3!\,2! = \left(\left(\frac{n}{2}+1\right)!\right)\left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)$$

Donde n es el número total de personas

Para nuestro problema original, el número de eventos o configuraciones favorables (donde todos los hombres están juntos sería (6!)(5!).

c) Al finalizar el primer set del partido, el grupo se da cuenta que necesita dinero para comprar bebidas y comida. Si se necesitan 4 personas para ir hasta el cajero automático por el dinero, ¿de cuántas formas se pueden seleccionar estas 4 personas?

Se hace el cálculo de la combinación de 4 en 10:

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{(10-4)!\,4!} = 210\, posibilidades$$

La razón por la cual se trata de una combinación y no de una permutación es que el orden no importa. Es decir, nos da lo mismo si las 4 personas que van a retirar dinero son (A,B,C,D), o si son (B,A,C,D), o cualquiera de las 4! posibles combinaciones de estas 4 personas.

d) Suponga que una de las parejas (Juan y Paula) deciden que irán juntos a retirar el dinero dentro del grupo de las 4 personas seleccionadas para tal fin. ¿Cuál es la probabilidad de que esta pareja esté dentro de las 4 personas que van a retirar dinero?

Para determinar el número de posibilidades en las que esta pareja está dentro del grupo de los 4, se asume que ambos ya están por dentro, y que sólo falta seleccionar 2 de las otras 8 personas, lo cual podemos hacer de $\binom{8}{2}$ distintas maneras.
Se define el siguiente evento:

Evento A: la pareja en cuestión va a retirar dinero

Se calcula la probabilidad como:

$$P(A) = \frac{\#\, Posibilidades\ en\ las\ que\ la\ pareja\ aparece\ dentro\ de\ los\ 4}{\#\, Total\ de\ posibilidades\ en\ que\ podemos\ escoger\ las\ 4\ personas}$$

$$P(A) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{28}{210} \approx 0.133$$

Punto 5

Tres átomos tipo A, tres B, tres C y tres D se deben combinar para formar una molécula en cadena de longitud 12. Algunas de las posibles configuraciones moleculares son ABCDABCDABCD, y BCDDAAABDBCC.

a) ¿De cuántas formas se pueden organizar los átomos para formar una molécula?

Como las cadenas se construyen a partir de 4 grupos de átomos, entre las cuales no hay distinción (no se distinguen entre sí), el orden de la molécula sólo se verá afectado por el grupo de átomos.
De manera que usamos las combinaciones con repetición tomando tres elementos a la vez:

$$\binom{12}{3} * \binom{9}{3} * \binom{6}{3} * \binom{3}{3} = \frac{12!}{3! * 9!} * \frac{9!}{3! * 6!} * \frac{6!}{3! * 3!} * \frac{3!}{3!} = 369600\ posibilidades$$

Otra forma de solución sería: Cada una de los átomos se puede ordenar de 3! formas posibles, y como son 4 grupos de átomos con 3! formas diferentes, hay $3!^4$ formas en las que se pueden desordenar los átomos entre los grupos:

$$\frac{12!}{3!\,3!\,3!\,3!} = 369600\ posibilidades$$

b) Si ahora se pueden distinguir entre los átomos A1, A2, A3, y también entre los átomos de tipo B, C y D, ¿De cuántas formas se pueden organizar los átomos para formar una molécula?

Como ahora las moléculas se construyen a partir de 4 grupos de átomos que se pueden distinguir entre todas, el orden de la cadena se verá afectado por los diferentes grupos de átomos.

$$\#\, moléculas = 12P12 = 12!$$

c) Suponga que se elige al azar una cadena del tipo descrito en el literal a), ¿cuál es la probabilidad de que los átomos del mismo grupo terminen juntos (uno junto al otro como BBBCCCDDDAAA)?

Evento A: los átomos del mismo grupo terminan juntos.

El orden de los grupos se puede calcular como 4! El número de cadenas totales se calcula entonces como:

$$P(A) = \frac{\#\, Posibilidades\ en\ las\ que\ las\ átomos\ aparecen\ juntos}{\#\, Total\ de\ posibilidades\ en\ que\ podemos\ escoger\ las\ moléculas}$$

Los átomos que aparecen juntos se determinan sabiendo que hay cuatro grupos de átomos y cuatro posibles grupos o formas de elegirlos:

$$\#\, Total\ de\ posibilidades\ de\ escoger\ las\ moléculas = 4P4 = 4!$$

Sabemos que el número de posibilidades de escoger las moléculas cuando son distinguibles entre si es 369900.

La probabilidad es:

$$P(A) = \frac{4!}{369900}$$