Tarea 1 - Vectorial 201520

1. Part 1: 1.1 - 3.2

1.1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable.

(a) Probar que el gráfico de la función $z = xf(y/x)$ pertenece a una superficie que consiste de las rectas que pasan por el punto $(0, 0, 0)$ y una curva plana (¿cuál?). Superficies de este tipo se llaman *superficies cónicas*.

Ayuda. Ver Fig. 1.

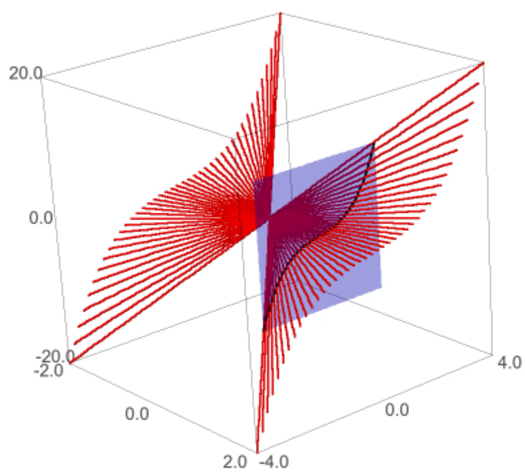

Figure 1. Ejercicio 1. El gráfico de la función $z = xf(y/x)$ donde $f(t) = t^3 + t$

(b) Probar que todos los planos tangentes al gráfico de la función $z = xf(y/x)$, donde $f(t)$ es una función diferenciable y $x \neq 0$, pasan por el origen.

1.2. Probar que el volumen del tetraedro formado por los planos coordinados y un plano tangente al gráfico de la función $z = \frac{1}{xy}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, (ver Fig. 2) es una constante, es decir no depende del punto en que tomemos el plano tangente. ¿Cuál es la constante?

1.3. Consideremos la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y},$$

donde a y b son constantes.

Probar que la función $h(x, y, t) = g(x + at, y + bt)$ es una solución de la ecuación diferencial parcial para cualquier función $g(u, v)$ diferenciable.

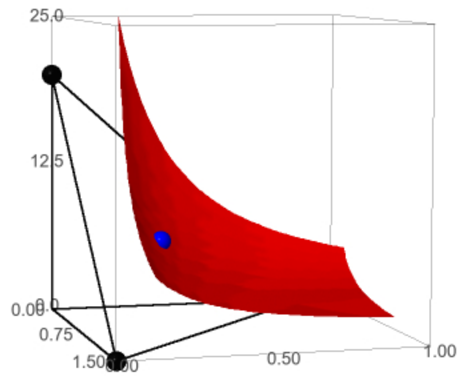

FIGURE 2. Ejercicio 2. El tetraedro formado por los planos coordinados y un plano tangente al gráfico de la función $z = \frac{1}{xy}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$

1.4. Sea Γ una curva parametrizada con la ecuación $\vec{r} = \vec{\rho}(t)$, $t \in (a, b)$. Sea $\kappa(t)$ la curvatura de la curva Γ.

El centro de curvatura de la curva Γ en un punto $M(t) \in \Gamma$ es el punto $A(t)$ que pertenece a la recta normal de la curva Γ en el punto $M(t)$, la distancia $|M(t)A(t)| = 1/\kappa(t)$, y el vector $\overrightarrow{M(t)A(t)}$ apunta hacia la concavidad de la curva (ver Fig. 3). El sentido geométrico de centro de curvatura es que $A(t)$ es el centro del círculo osculador de la curva en el punto $M(t)$, es decir el círculo que presenta la mejor aproximación a la curva en este punto (ver Fig. 4).

(a) Hallar el conjunto de centros de curvatura de un círculo.
(b) Hallar el conjunto de centros de curvatura de la parábola $y = x^2/2$. Hacer dibujo.

1.5. Considere la función $f(x) = \ln(\sin(x))$, para x en el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$.
VERDADERO O FALSO. Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si esta es verdadera o falsa y de una justificación clara y concisa.

(1) El punto $\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})$ pertenece a la grafica de $f(x)$.
(2) El punto $(\frac{\pi}{2}, 0)$ pertenece a la gráfica de $f(x)$.
(3) La función $\sigma(t) = (t^2, \ln(\sin(t^2)))$ para $t \in [\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \sqrt{\frac{\pi}{3}}]$ es una parametrización de la gráfica de $f(x)$.
(4) La longitud de arco de la gráfica de $f(x)$ es $\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}\right)$

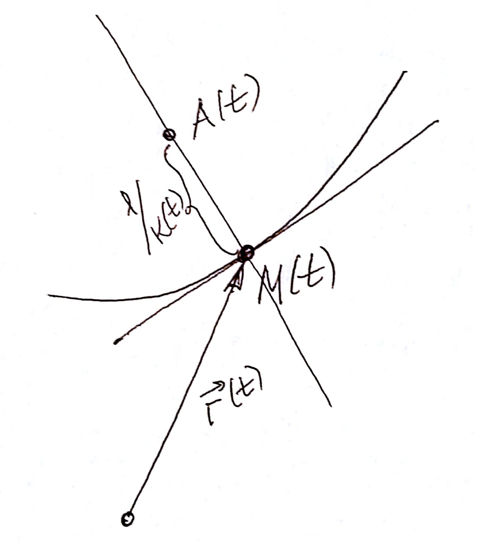

FIGURE 3. Ejercicio 4. Centro de curvatura

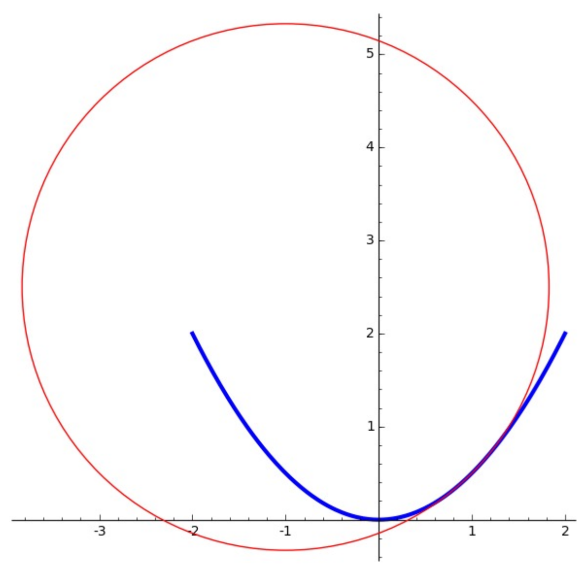

FIGURE 4. Ejercicio 4. El círculo osculador de parábola

1.6. La trayectoria $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ de una bala de cañon disparada desde el origen con ángulo de elevación θ satisface las siguientes ecuaciones

$$\begin{array}{ll} x''(t) = 0 & y''(t) = -9.8 \\ x'(0) = 100\cos(\theta) & y'(0) = 100\sin(\theta) \\ x(0) = 0 & y(0) = 0 \end{array}$$

(1) Encuentre las funciones $x(t)$ y $y(t)$ que describen la trayectoria de la bala (la respuesta debe depender del ángulo θ y del tiempo t).
(2) Encuentre cuanto tiempo se demora la bala en caer al piso. (Este valor de t depende del ángulo de lanzamiento)

(3) Haga una gráfica de la trayectoria de la bala para ángulos de disparo $\theta = \frac{\pi}{3}$ y $\theta = \frac{\pi}{6}$.
(4) Para que valor del ángulo θ la bala recorre una distancia **horizontal** máxima antes de caer al piso? Cual es el valor de esa distancia?
(5) Encuentre una integral que represente la distancia total recorrida por la bala antes de caer al piso. (el resultado debe depender del ángulo inicial de disparo θ).

1.7. Hallar la curva parametrica $\vec{r}(t)$ tal que $\vec{r}(1) = (0, -1, 1)$ y $\vec{r}\,'(t) = (t, e^{t/2}, t^2)$.

1.8. Dada la curva parametrica $\vec{r}(t) = (\cos(3t), \sin(3t), (2t)^{3/2})$, calcular:
(1) La recta tangente en el punto $(1, 0, 0)$;
(2) La función curvatura $\kappa(t)$;
(3) La curvatura en el punto $(0, 1, (\pi/3)^{3/2})$.

1.9. En cual punto la recta tangente a la curva parametrica $\vec{r}(t) = (\frac{4}{3}t^3, 4t^2, t)$ es paralela al plano de ecuación $2x - y + 2z = 3$?

1.10. Sea $\vec{r}(t)$ una función vectorial diferentiable tal que $\vec{r}(t) \neq \vec{0}$. Demostrar que en un máximo o un mínimo local de $\| \vec{r}(t) \|$ el vector $\vec{r}\,'(t)$ es perpendicular a $\vec{r}(t)$.

2. Part 2: 4.1 - 4.6

2.1. Considere el campo escalar

$$f(x, y, z) = xy + yz + xy.$$

(a) Encuentre el dominio.
(b) Encuentre la dirección de más rápido crecimiento en el punto $P(1, 1, 1)$.

2.2. Considere el campo escalar, $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

(a) Encuentre los dominios.
(b) Encuentre la dirección de más rápido crecimiento en el punto $P(1, 1, 1)$.

2.3. Sea $\vec{r} = (x, y, z)$ y $r = \|\vec{r}\|$. Demuestre que,

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

2.4. Sea $A(-1,0)$, y $B(1,0)$ dos puntos en el plano xy. Considere r_1 la distancia de un punto $M(x,y)$ a A y r_2 la distancia de M a B y potencial electrostático $V = K \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$, con K constante, un campo escalar definido para todo $(x,y) \neq A$, $(x,y) \neq B$.

(a) Halle r_1, y r_2 en términos de x e y.
(b) Halle $\nabla V(x,y)$
(c) Considere el cuadrado con vértices $C(1,1)$, $D(-1,1)$, $E(-1,-1)$, y $F(1,-1)$. Halle el potencial electrostático en los vértices del cuadrado, los puntos medios de los lados y en el centro del cuadrado (son 9 puntos en total). Si en algún punto no está definido, explique porqué no lo está.
(d) Halle el gradiente ∇V en los vértices del cuadrado, los puntos medios de los lados y en el centro del cuadrado (son 9 puntos en total). Dibuje los anteriores vectores en el plano xy. Si en algún punto no está definido, explique porqué no lo está.
(e) Encuentre las curvas de nivel para los valores $-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4$ y dibújelas.

Nota de interés: A V se le conoce como el potencial electrostático debido a dos filamentos infinitos de densidades λ, y $-\lambda$ paralelos al eje z que pasan por A y B. La constante $K = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}$. Para los cálculos de este ejercicio considere $K = 1$.

2.5. Sea G el subconjunto del plano dado por

$$G = \{(x,y) : x^4 + y^4 = 1\}$$

(1) Verifique que el punto $(1,0)$ pertenece a G.
(2) Escriba el enunciado del Teorema de la funcion implícita para una función escalar diferenciable $F(x,y)$ en $\mathbb{R}^2$
(3) Utilice el Teorema de la función implícita para demostrar que existe una función $h(y)$ definida cerca de $y=0$ que cumple: $h(0)=1$ y la gráfica $\Gamma = \{(x,y) \mid x = h(y)\}$ coincide con G en algun disco alrededor de $(1,0)$.
(4) Calcule $h'(0)$, $h''(0)$, $h'''(0)$.
(5) Escriba la aproximación de Taylor de $h(y)$ de orden tres alrededor de $y=0$.

2.6. Resuelva los siguientes problemas usando diferenciación implícita.

(1) Asuma que y es una función diferenciable de x y que $e^{xy} = e^{4x} - e^{5y}$. Encuentre una expresión para $y'(x)$ en términos de x y y.
(2) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación $(x^2+y^2)^3 = 8x^2y^2$ en el punto $(-1,1)$.

2.7. Identificar y dibujar las curvas de nivel de la superficie definida implicitamente por las siguientes ecuaciones

(1) $2x - 3y + z^2 = 1$
(2) $4z + 2y^2 - x = 0$
(3) $y^2 = 2x^2 + z$
(4) $x^2 - 4z - y = 2$
(5) $x - 4z - y^2 = 2$

2.8.

(1) Calcule la ecuacion de la superficie que se obtiene al rotar alrededor del eje z el circulo de radio r centrado en el punto $(0, R, 0)$ que esta en el plano yz:

$$(y - R)^2 + z^2 = r^2.$$

Esta superficie se conoce como el toro 2-dimensional.

(2) Calcule la ecuacion del plano tangente al toro 2-dimensional en un en punto arbitrario (x_0, y_0, z_0).

2.9.

(1) Calcule la ecuacion de la superficie que se obtiene al rotar alrededor del eje x la curva dada por

$$y = \cosh(x)$$

Esta superficie se conoce como la catenoide.

(2) Calcule la ecuacion del plano tangente a la catenoide en un en punto arbitrario (x_0, y_0, z_0).

2.10.

(1) (a) Calcule la ecuacion de la superficie que se obtiene al rotar alrededor del eje z el circulo de radio r centrado en el origen $(0, 0, 0)$ que esta en el plano yz:

$$y^2 + z^2 = r^2.$$

(b) Identificar la superficie y calcular el plano tangente a esta superficie en un en punto arbitrario (x_0, y_0, z_0).

(2) (a) Calcule la ecuacion de la superficie que se obtiene al rotar alrededor del eje z la hiperbola que esta en el plano yz:

$$z^2 - y^2 = 1.$$

(b) Identificar la superficie y calcular el plano tangente a esta superficie en un en punto arbitrario (x_0, y_0, z_0).

(3) (a) Calcule la ecuacion de la superficie que se obtiene al rotar alrededor del eje y la recta que esta en el plano yz:

$$z = y.$$

(b) Identificar la superficie y calcular el plano tangente a esta superficie en un en punto arbitrario (x_0, y_0, z_0).