Sebastián Valencia Calderón 201111578
Edgar Daniel Gómez 201317343

1. VA Discretas y Continuas de Mayor Aplicación

(a) Según estándares FIFA, un balón oficial debe de tener una presión de aire entre 8.5 y 15.6 psi. Si la empresa Tygol establece que una válvula es defectuosa si no logra mantener dicho estándar de presión, calcule la probabilidad de que una válvula fabricada por el proveedor sea defectuosa.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que se decida iniciar la producción de los nuevos balones en la Etapa 1, sin pasar a la Etapa 2?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que se deba posponer la producción en la Etapa 1, sin pasar a la Etapa 2?

(d) Si luego de la primera etapa se sabe que es necesario realizar la Etapa 2 de control de calidad, ¿cuál es la probabilidad de que se acepte la producción bajo los criterios de esta etapa?

(e) El gerente del área de control de calidad ha decidido recolectar una muestra aleatoria de 5 balones que presenten fallas en las válvulas, para inspeccionar los aspectos específicos que ocasionan las fallas. Si el gerente inspecciona uno a uno los balones que salen de la línea de producción, ¿cuál es la probabilidad de que deban inspeccionar 80 balones hasta completar la muestra requerida?

(f) Calcule la probabilidad de que el décimo y el onceavo balón que inspecciona el gerente sean los dos primeros balones que presenten fallas.

(g) Bajo el contexto del literal e) ¿cuál es el número esperado de balones que no presentan fallas en las válvulas, que el gerente esperaría encontrar antes de completar su muestra de 5 balones defectuosos?

(h) Se envían 100 balones al proveedor de válvulas para que realice otras pruebas relacionadas al desgaste de las mismas. Se sabe de antemano que entre los balones enviados hay 30 que presentan fallas. Calcule la probabilidad de que, si el proveedor toma una muestra aleatoria de 20 de estos 100 balones, encuentre a lo sumo 6 que presenten fallas.

2. Proceso de Poisson y Distribución Exponencial

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que en la hora pico de urgencias lleguen a lo sumo 20 pacientes?

(b) ¿Cuál es el valor esperado y la varianza del número de pacientes que son atendidos durante la hora pico en urgencias?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente 15 pacientes entre las 7:00 a.m. y las 10:00 a.m.?

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen por lo menos 6 pacientes entre las 12:00 a.m. y las 5:00 a.m.?

(e) Si entre las 4:00 a.m. y las 10:00 a.m. llegaron 25 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que entre las 10:00 a.m. y las 12:00 p.m. lleguen menos de 3 pacientes? Por otro lado ¿cuál es la probabilidad de que lleguen 28 pacientes entre las 4:00 a.m. y las 11:00 a.m.?

(f) Si se sabe que llegaron 30 pacientes entre las 10:00 p.m. y las 4:00 a.m., ¿cuál es la probabilidad de que 20 pacientes hayan llegado entre la 1:30 a.m. y las 3:15 a.m.?

(g) Si a las 5:15 a.m. llega el primer paciente de la hora pico a urgencias ¿cuál es la probabilidad de que el próxima paciente en llegar se demoré más de media hora?

(h) Si a las 12:30 p.m. llega un paciente ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo que se demora el siguiente paciente en llegar al centro de urgencias esté entre 15 y 30 minutos?

(i) Si a las 12:00 p.m. han llegado 5 pacientes ¿cuál es la probabilidad de que el próximo paciente llegue exactamente en 20 minutos?

(j) Si a las 8:00 p.m. se sabe que el último paciente llegó hace media hora, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo de llegada del siguiente paciente a urgencias sea mayor a una hora?

3. Distribución Normal

(a) Si se aborda un bus híbrido o del SITP al azar durante hora pico ¿cuál es la probabilidad de que en un día seleccionado al azar el tiempo de trayecto sea mayor a 1.5 horas?

Sea X la variable aleatoria que representa la demora de un bus híbrido en horas pico sobre las calles 34 y 100. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(1{,}25, 0{,}2^2)$. La gráfica de la distribución normal del enunciado, se muestra acontinuación:

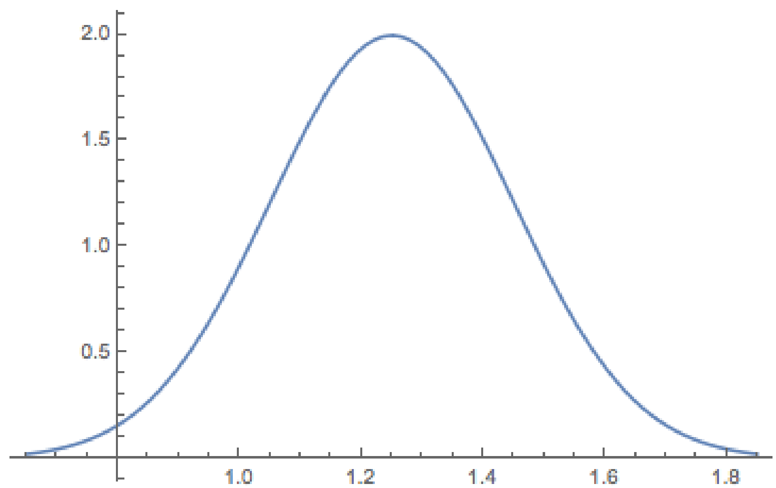

Figura 1: Función de probabilidad normal, horas contra probabilidad

Si se quiere saber la probabilidad de que un viaje en un bus cuya ruta se comporte de acuerdo a la descripción, se quiere saber $\mathbb{P}(X > 1{,}5)$. Lo cual, por propiedades básicas de la teoría de la probabilidad es igual a $1 - \mathbb{P}(X < 1{,}5)$ para variables aleatorias continuas. Para hallar esto, se estandariza la variable aleatoria X, de tal forma:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$1 - \mathbb{P}(X < 1{,}5) = 1 - \mathbb{P}\left(Z < \frac{1{,}5 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z < \frac{1{,}5 - 1{,}25}{0{,}2}\right)$$

$$1 - \mathbb{P}(X < 1{,}5) = 1 - \mathbb{P}\left(Z < 1{,}25\right) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}10565$$

La probabilidad que se halló, estaba acumulada en:

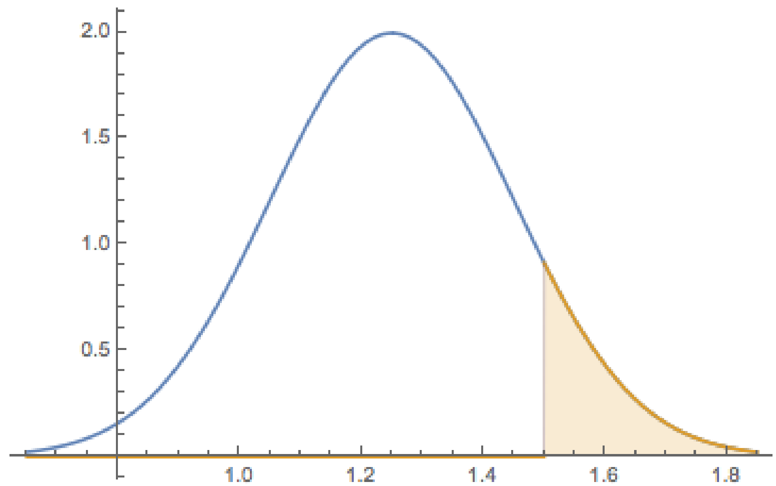

Figura 2: Función de probabilidad normal, horas contra probabilidad.

(b) Bibiana va tarde a su trabajo y le indicará a su jefe el tiempo máximo que se tardará en llegar a la oficina. Ella quiere indicarle un tiempo que, con una probabilidad de 0.9, no exceda el tiempo de recorrido del SITP que acaba de abordar.

Se quiere hallar un a tal que $\mathbb{P}(X < a) = 0{,}9$. Esto satisface la definición para que con ésta pobabilidad, el tiempo de demora de Bibiana no exceda a. Se estandariza este valor:

$$\mathbb{P}\left(Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(Z < \frac{a-1{,}25}{0{,}2}\right) = 0{,}9$$

El valor para cual la variable aleatoria $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, toma un valor tal que la probabilidad acumulda hasta tal valor sea 0,9 es, según la tabla de probabilidad acumulada de la Normal estándar es $z = 1{,}29$. Luego:

$$\frac{a-1{,}25}{0{,}2} = 1{,}29 \Rightarrow a = (1{,}29)(0{,}2) + 1{,}25 \Rightarrow a = 1{,}508$$

El tiempo que debe indicar Bibiana es de 1,508 horas.

(c) Calcule la probabilidad de que un bus seleccionado al azar tenga un tiempo de trayecto de exactamente una hora.

Dado que es una variable aleatoria continua, es imposible calcular la probabilidad puntual de un punto exacto del rango de la distribución, conceptualmente, y analíticamente, este tiende a cero.

$$\mathbb{P}\left(X = 1\right) = 0$$

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que en un trayecto seleccionado al azar haya tenido un tiempo de recorrido entre 45 minutos y 1 hora?

Se pregunta por la probabilidad de que el timepo transcurrido en un viaje de un bus de la muestra cuyo recorrido se modela haciendo uso de X esté entre 45 minutos y 1 hora exactamente. Es decir:

$$\mathbb{P}(45_{min} < X < 1_{hor}) = \mathbb{P}(0{,}75_{hor} < X < 1_{hor})$$

Por propiedades básicas de las distribuciones de probabilidad:

$$\mathbb{P}(0{,}75_{hor} < X < 1_{hor}) = \mathbb{P}(X < 1_{hor}) - \mathbb{P}(X < 0{,}75_{hor})$$

Estandarizando la variable $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(Z < \frac{1-\mu}{\sigma}\right) - \mathbb{P}\left(Z < \frac{0{,}75-\mu}{\sigma}\right) &= \\ \mathbb{P}\left(Z < \frac{1-1{,}25}{0{,}2}\right) - \mathbb{P}\left(Z < \frac{0{,}75-1{,}25}{0{,}2}\right) &= \\ \mathbb{P}\left(Z < -1{,}25\right) - \mathbb{P}\left(Z < -2{,}5\right) &= \\ \left[1 - \mathbb{P}\left(Z < 1{,}25\right)\right] - \left[1 - \mathbb{P}\left(Z < 2{,}5\right)\right] &= \\ -\mathbb{P}\left(Z < 1{,}25\right) + \mathbb{P}\left(Z < 2{,}5\right) &= -0{,}8944 + 0{,}9928 \\ &= 0{,}0994401 \end{aligned} \tag{1}$$

La probabilidad que se halló, estaba acumulada en:

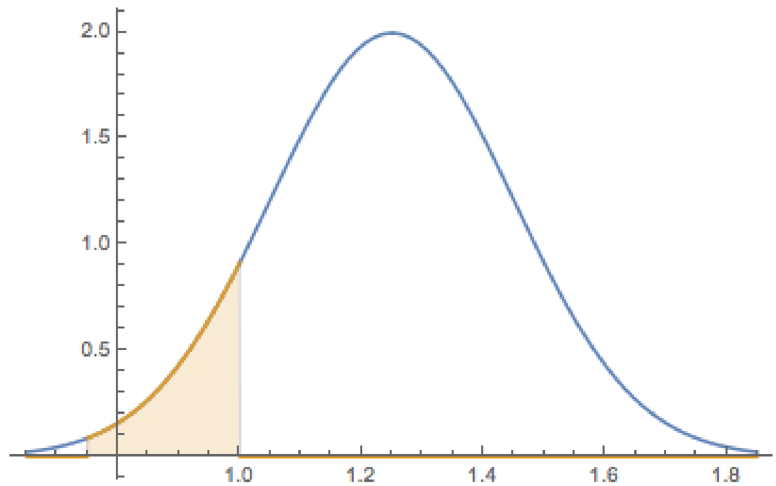

Figura 3: Gráfica de probabilidad de que se llege con un timepo entre 45 minutos y 1 hora.

(e) Calcule el valor de la constante c que garantiza que, con probabilidad de 0.90, el tiempo de recorrido de un bus seleccionado al azar estará intervalo $[1{,}25 - c,\ 1{,}25 + c]$.

El valor pedido, es un c tal que para algún X, la probabilidad de que esté entre $1{,}25 - c$ y $1{,}25 + c$ sea 0,90. Por principios básicos de probabilidad y de distribuciones de probabilidad:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(1{,}25 - c < X < 1{,}25 + c\right) = 0{,}9 \Rightarrow \\ \mathbb{P}\left(X < 1{,}25 + c\right) - \mathbb{P}\left(X < 1{,}25 - c\right) = 0{,}9 \Rightarrow \\ \text{Al estandarizar se obtiene:} \\ \mathbb{P}\left(Z < \frac{1{,}25 + c - \mu}{\sigma}\right) - \mathbb{P}\left(Z < \frac{1{,}25 - c - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}9 \Rightarrow \\ \mathbb{P}\left(Z < \frac{1{,}25 + c - 1{,}25}{0{,}2}\right) - \mathbb{P}\left(Z < \frac{1{,}25 - c - 1{,}25}{0{,}2}\right) = 0{,}9 \Rightarrow \\ \mathbb{P}\left(Z < \frac{c}{0{,}2}\right) - \mathbb{P}\left(Z < \frac{-c}{0{,}2}\right) = 0{,}9 \end{aligned} \tag{2}$$

Por propiedades de las distribuciones normales

$$\mathbb{P}\left(Z < \frac{c}{0{,}2}\right) - \left[1 - \mathbb{P}\left(Z < \frac{c}{0{,}2}\right) = 0{,}9\right]$$

$$\mathbb{P}\left(Z < \frac{c}{0{,}2}\right) - 1 + \mathbb{P}\left(Z < \frac{c}{0{,}2}\right) = 0{,}9$$

$$2\left(\mathbb{P}\left(Z < \frac{c}{0{,}2}\right)\right) - 1 = 0{,}9 \Rightarrow \mathbb{P}\left(Z < \frac{c}{0{,}2}\right) = \frac{1{,}9}{2} = 0{,}95$$

Según la tabla de distribución normal estándar, el primer valor z para el cual $\mathbb{P}\left(Z < z\right) = 0{,}9$ es 1,65. Luego, $\frac{c}{2} = 1{,}65 \Rightarrow c = 0{,}33$.

4. Función Generatriz de Momentos

(a) ¿Cuál es el número esperado de fallas en las máquinas durante un mes?

Como $\Psi_X(t) = e^{6\times\left(e^t-1\right)}$ es la función generatriz de momentos para la variable aleatoria que representa el número de fallas mensuales que tiene la máquina, y por la teoría se sabe que $\Psi^r_X(t=0) = \mathbb{E}(X^r)$; entonces el primer momento central equivale a $\mathbb{E}(X^1) = \mathbb{E}(X)$.

$$\Psi'_X(t) = 6 \times e^{6\times(-1+e^t)+t}$$
$$\Psi'_X(0) = 6 \times e^{6\times(-1+e^0)+0} = 6 \times e^{6\times(-1+1)} = 6 \times e^0 = 1$$

(b) ¿Cuál es la varianza del número de fallas en las máquinas durante un mes?

Como $\Psi_X(t) = e^{6\times\left(e^t-1\right)}$ es la función generatriz de momentos para la variable aleatoria que representa el número de fallas mensuales que tiene la máquina, y por la teoría se sabe que $\Psi^r_X(t=0) = \mathbb{E}(X^r)$; entonces el segundo momento central equivale a $\mathbb{E}(X^2)$.

$$\Psi'_X(t) = 6 \times e^{6\times(-1+e^t)+t}$$
$$\Psi''_X(t) = 6 \times e^{6\times\left(e^t-1\right)+t} \times \left(6 \times e^t + 1\right)$$
$$\Psi''_X(0) = 6 \times e^{6\times\left(e^0-1\right)+0} \times \left(6 \times e^0 + 1\right) = 6 \times e^{6\times(1-1)+0} \times (6 \times 1 + 1)$$
$$\Psi''_X(0) = 6 \times e^0 \times 7 = 6 \times 7 = 42 = \mathbb{E}(X^2)$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \Psi''_X(0) - (\Psi'_X(0))^2$$
$$\mathbb{V}(X) = 42 - 6^{"} = 42 - 36 = 6$$

(c) Halle su función generatriz de momentos. Muestre todo el procedimiento.

Sea $f_Y(y) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, una función definida por la expresión $f_Y(y) = 1/20 \iff y \in (1, 20) \subset \mathbb{R} \land f_Y(y) = 0 \iff y \notin (1, 20) \subset \mathbb{R}$. Sea $g(t) = e^{t\times y}$, definida sobre $\mathbb{R}$ para todo intervalo de definición de la variable y. El producto funcional de ambas funciones, se define através de la variable y, por lo que las porciones donde y valfa cero sobre algun intervalo de por lo menos una de las funciones, entonces en el mismo intervalo, el producto funcional es cero. Acontinuación se ilustra el producto funcional de las funciones definidas en este párrafo sobre un intervalo de interés.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{20} & 0 < x < 20 \\ 0 & d.l.c \end{cases}$$

$$g(t) = e^{t \times y}$$

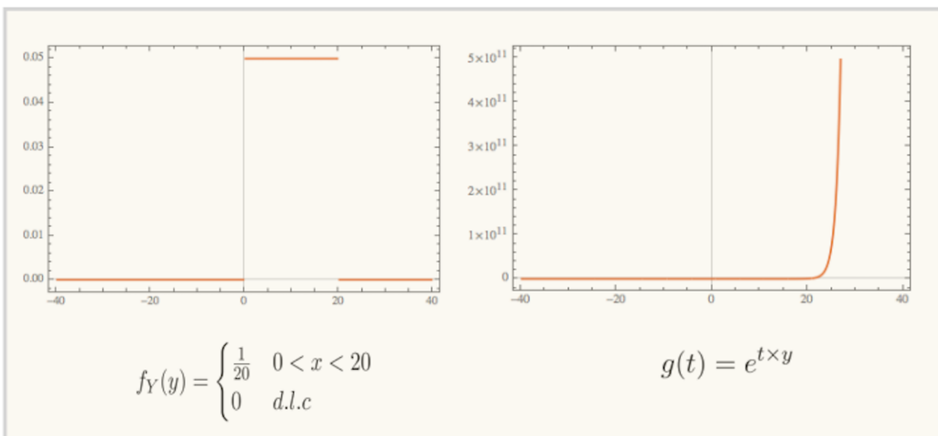

Figura 4: Función de distribución de probabilidad y función para la generación de momentos centrales de una distribución.

$$\Psi_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{y\times t} \times f_Y(y)\right)\, dy = \int_{\mathbb{R}[Y]} \left(e^{y\times t} \times f_Y(y)\right)\, dy$$

$$\Psi_Y(t) = \int_{0}^{20} \left(e^{y\times t} \times f_Y(y)\right)\, dy = \int_{0}^{20} \left(e^{y\times t} \times \frac{1}{20}\right)\, dy$$

$$\Psi_Y(t) = \frac{1}{20}\int_{0}^{20} e^{y\times t}\, dy = \frac{1}{20}\left[\frac{e^{t\times y}}{t}\Bigg|_{y=0}^{y=20}\right] = \frac{1}{20}\left[\frac{e^{20\times t}}{t} - \frac{e^{0\times t}}{t}\right]$$

$$\Psi_Y(t) = \frac{1}{20}\left[\frac{e^{20\times t} - e^{0\times t}}{t}\right] = \frac{1}{20}\left[\frac{e^{20t} - 1}{t}\right] = \frac{e^{20t} - 1}{20t}$$