Universidad de los Andes
Departamento de Ingeniería Industrial
Probabilidad y Estadística I (IIND2106)
Profesor Coordinador: Mario Castillo
Profesores: Astrid Bernal, Carlos Castellanos, Fabio Lagos, María Alejandra López, Gonzalo Torres, Hernando Mutis.
Segundo semestre de 2015

Complementaria 9

Ejercicios sobre suma de variables aleatorias independientes y aplicación de TLC.

Punto 1

La fábrica de alimentos FriedFood está dedicada a la elaboración de alimentos y pasabocas empacados como patatas chips, crispetas y nuggets de pollo. En el último año el gerente ha tenido algunas quejas de clientes que reportan su preocupación por el alto contenido de ácidos grasos que se presentan en la tabla nutricional de los productos, por lo cual el director de FriedFood anunció que con el tiempo empleará un nuevo aceite, que disminuirá en forma sustancial la concentración de ácidos grasos, e incrementará la cantidad de grasas poliinsaturadas más benéficas.

En la transición del cambio de aceite para preparar los alimentos, algunos presentarán alto contenido de ácidos grasos debido al uso de aceite antiguo, mientras que en otros, el contenido de ácidos grasos será bajo, gracias al uso del nuevo aceite. Por esta razón, la empresa ha decidido devolver el dinero a los clientes que encuentren alto contenido de ácidos grasos en las tablas nutricionales de los productos. La compañía ha detectado que la probabilidad de que un paquete seleccionado al azar presente alto contenido de ácidos grasos es de 0.1.

En un supermercado se hace un pedido a la empresa FriedFood de 3500 paquetes de papas chips, 5000 paquetes de crispetas y 1500 paquetes de nuggets de pollo.

Con base en la información anterior, resuelva los siguientes literales:

a. Defina las variables aleatorias para cada tipo de alimento, especificando su distribución y sus parámetros.

P: Número de paquetes de papas chips catalogados con alto contenido de ácidos grasos de un total de 3500 paquetes.

$$P \sim \text{Binomial}\,(3500,\ 0.1)$$

C: Número de paquetes de crispetas catalogados con alto contenido de ácidos grasos de un total de 5000.

$$C \sim \text{Binomial}\,(5000,\ 0.1)$$

N: Número de paquetes de nuggets catalogados con alto contenido de ácidos grasos de un total de 1500.

$$N \sim \text{Binomial } (1500, 0.1)$$

b. De los 10000 paquetes, halle el número de paquetes que se esperaría encontrar con un alto contenido de ácidos grasos. (Utilice la función generatriz de momentos para conocer la distribución y los parámetros de la nueva variable aleatoria).

La variable aleatoria que representa el número total de paquetes con alto contenido de ácidos grasos es:

$$G = P + C + N$$

Se sabe que:

$$M_G(t) = M_P(t) * M_C(t) * M_N(t)$$

Para hallar la Función Generatriz de Momentos (FGM) de la distribución binomial:

$$M_X(t) = (q + pe^t)^n, donde\ p: probabilidad\ de\ exito\ y\ q = \ (1-p): probabilidad\ de\ fracaso$$

Para encontrar la FGM de cada variable:

P: Número de paquetes de papas chips catalogados con alto contenido de ácidos grasos de un total de 3500 paquetes.

$$M_P(t) = (q + pe^t)^{3500}$$

C: Número de paquetes de crispetas catalogados con alto contenido de ácidos grasos de un total de 5000.

$$M_C(t) = (q + pe^t)^{5000}$$

N: Número de paquetes de nuggets catalogados con alto contenido de ácidos grasos de un total de 1500.

$$M_N(t) = (q + pe^t)^{1500}$$

$$M_G(t) = (q + pe^t)^{3500} * (q + pe^t)^{5000} * (q + pe^t)^{1500} = (q + pe^t)^{3500+5000+1500}$$

$$= (q + pe^t)^{10000}$$

G: Número de paquetes con alto contenido de ácidos grasos de un total de 10000 paquetes.

$$\text{G} \sim \text{Binomial } (10000, 0.1)$$

El valor esperado para la variable aleatoria con distribución binomial es:

$$E[G] = np = 10000 * 0.1 = 1000$$

Se espera que en la compra realizada por el supermercado, en promedio 1000 de los 10000 paquetes tengan alto contenido de ácido graso debido al uso de aceite antiguo en su elaboración.

c. Los productos de FriedFood llegan al supermercado empacados en cajas de 48 unidades. Si de una caja se toma una muestra aleatoria de 30 cajas diferentes de Nuggets de pollo, ¿cuál es la probabilidad de que el promedio de cajas de Nuggets con alto contenido de ácidos grasos sea menor a 5?

X= Número de paquetes de nuggets catalogados como con alto contenido de ácidos grasos en una caja.

N: número de paquetes en una caja

p: Probabilidad de éxito

$$X \sim Binomial(N = 48, p = 0.1)$$

$$E(X) = N * p = 48 * 0.1 = 4.8$$

$$Var(X) = N * p * (1 - p) = 48 * 0.1 * 0.9 = 4.32$$

Por el Teorema del Limite Central, dado que se tiene una muestra lo suficientemente grande se sabe que el promedio de paquetes de Nuggets con alto contenido de ácidos grasos se distribuye normal con los siguientes parámetros:

$$\bar{X}: Número\ de\ paquetes\ promedio\ con\ alto\ contenido\ de\ ácidos\ grasos\ en\ 30\ cajas$$

$$Por\ TLC: \bar{X} \sim Normal\left(4.8, \frac{4.32}{30}\right)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} X_i \sim N\left(4.8, \frac{4.32}{30} = 0.144\right)$$

$$P(\bar{X} < 5) = \phi\left(\frac{5 - 4.8}{\sqrt{0.144}}\right) = \phi(0.527) = 0.698$$

d. Según datos de Friedfood, los paquetes de papas chips tienen un peso medio de 45 grs y desviación estándar de 4 grs, mientras que los paquetes de crispetas presentan un peso medio de 30 grs con una desviación estándar de 3 grs. Los paquetes de papas chips y crispetas se empacan mezclados en cajas de 98 unidades, es decir en cada caja hay 48 paquetes de papas y 48 de crispetas, y cada caja tiene un peso medio de 200 grs con una desviación estándar de 15 gr. Si las cajas se deben transportar en vehículos que no pueden superar los 800 Kg con una probabilidad de 0.95. ¿cuál es el máximo número de cajas que pueden cargarse en cada vehículo?
Suponga que todas las poblaciones siguen una distribución normal y son independientes entre sí.

Se tienen tres distribuciones diferentes:

$$X_{pesopapaschip} \sim N(45{,}4^2)$$
$$X_{pesocrispetas} \sim N(30{,}3^2)$$
$$X_{pesocaja} \sim N(200{,}15^2)$$

El máximo número de cajas que pueden cargarse, tiene que ser el peso de la caja que va a ser siempre el mismo, se sabe que en cada caja deben ir 48 paquetes de papas chips y 48 de crispetas

$$X_{peso\ papaschip} \sim N(2160{,}768)$$
$$X_{peso\ crispetas} \sim N(1440{,}432)$$

Teniendo en cuenta el peso de la caja, para una caja de 96 paquetes, calculamos un nuevo promedio para una caja:

$$X_{peso\ papaschip+crispetas+pesocaja} \sim N(3800{,}1425)$$

Con la nueva variable y parámetros se puede calcular la probabilidad de que la carga no sea mayor a 800 Kg o 800000 gramos:

$$P(Z < 800kg) = 0.95$$

Si se sabe que la probabilidad es del 95%, en la tabla o en Excel se despeja Z para 0.95, lo cual es 1.64:

$$\left(\frac{800000 - (3800 * número\ de\ cajas)}{\sqrt{1425 * número\ de\ cajas}}\right) = 1.64$$

Finalmente despejamos el número de cajas:

Número de cajas=210

Punto 2

Un grupo de estudiantes está interesado en saber el tiempo de duración de los bombillos en los laboratorios con el fin de estimar los tiempos de uso y montos de compra adecuados, así como para evaluar la necesidad de contratar un tercero para la disposición final de los bombillos una vez estos fallen. Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo de duración de los bombillos; la cual se distribuye normal con media 800 horas y desviación estándar de 40 horas.

a. Si se selecciona un bombillo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que este bombillo tenga más de 750 horas de funcionamiento?

$$X \sim N(800{,}40^2)$$

$$P(X > 750) = 1 - P(X < 750) = 1 - P\left(Z < \frac{750 - 800}{40}\right) = P(Z < 1.25) = 0.894$$

b. Si en un laboratorio de química de la universidad hay 35 bombillos, ¿cuál es la probabilidad de que el promedio de funcionamiento de los bombillos este entre 780 y 790 horas?

$$\overline{X_1} = \frac{\sum X_i}{n}$$

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}E\left(\sum X_i\right) = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}Var\left(\sum X_i\right) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\overline{X_1} \sim N(800, \frac{40^2}{35}) \sim N(800{,}45.71)$$

$$P(780 < \bar{X} < 790) = P\left(\frac{780-800}{\sqrt{45.71}} < Z < \frac{790-800}{\sqrt{45.71}}\right) = P(-2.958 < Z < -1.478)$$

$$= \left((1-0.9292)-(1-0.9984)\right) = 0.069$$

c. Suponga que en el laboratorio de calidad del aire de la universidad hay 35 bombillos, el tiempo de duración de un bombillo se comporta como una distribución uniforme, con un valor mínimo de 700 horas y un valor máximo de 750 horas ¿cuál es la probabilidad de que la diferencia entre los promedios de funcionamiento de los bombillos de cada laboratorio sea menor a 80 horas?

Sabemos que el promedio del laboratorio de química se comporta como $N(800{,}45.71)$, por lo que debemos calcular el promedio para el laboratorio de calidad del aire:

$$X_2 \sim U(700{,}750)$$

$$\mu = \frac{700+750}{2} = 725$$

$$\sigma^2 = \frac{(750-700)^2}{12} = 208.3$$

Por TLC, la resta de los promedios se comportará también como una normal, con los siguientes parámetros:

$$\overline{X_2} \sim N(725, \frac{208.3}{35} = 5.95)$$

$$\overline{X_1} - \overline{X_2} \sim N(800-725 = 75{,}45.71+5.95 = 51.66) \sim N(75{,}51.66)$$

La probabilidad es:

$$P(|\overline{X_1} - \overline{X_2}| < 80) = P(-80 < \overline{X_1} - \overline{X_2} < 80)$$

$$P(\overline{X_1} - \overline{X_2} < 80) - P(\overline{X_1} - \overline{X_2} < -80)$$

$$= P\left(Z < \frac{80 - 75}{\sqrt{51.66}}\right) - P\left(Z < \frac{-80 - 75}{\sqrt{51.66}}\right)$$

$$= P(Z < 0.69) - P(Z < -17.5) = 0.754 - 0 = 0.754$$

d. En el laboratorio de física los bombillos son más duraderos, y la cantidad de horas de duración de los bombillos está dada por $X_3 = 2X$, determine la probabilidad de que la cantidad promedio de horas de duración sea mayor a 1610 horas, si en el laboratorio tienen 60 bombillos.

$$X_3 = 2X$$
$$X \sim N(800, 40^2)$$

$$X_3 \sim N(2 * 800, 2^2 * 40^2)$$

$$X_3 \sim N(1600, 6400)$$

$$\overline{X_3} \sim N(1600, \frac{6400}{60}) \sim N(1600, 106.6)$$

$$P(\overline{X_3} > 1610) = P\left(Z > \frac{1610 - 1600}{\sqrt{106.6}}\right) = P(Z > 0.968) = 1 - P(Z < 0.968) = 0.5$$