

TAREA 1

Normas para la presentación de la Tarea

- La tarea puede realizarse **en parejas** de cualquier sección.
- La presente tarea puede realizarla a computador o a mano. Debe tener en cuenta que la presentación del informe puede influir en la calificación final.
- El informe debe ser presentado en hojas blancas, numeradas, impresión por ambos lados y en la parte superior de cada hoja se debe especificar el nombre y código de cada estudiante.
- **La primera hoja de su tarea debe contener el formato que se presenta en la siguiente página.** Las tareas que no tengan este formato tendrán una penalización de cero punto cinco (0.5) sobre la nota final de la tarea.
- Será responsabilidad de los integrantes del grupo verificar el contenido de la tarea antes de la entrega. Luego de entregado el documento, no se recibirán adiciones por motivos de problemas de impresión en fórmulas o ecuaciones.
- Debe respetar el horario y el lugar de entrega de las tareas. **Las tareas entregadas después de este plazo no serán recibidas y su calificación será de cero (0).**
- **Por ningún motivo la tarea será recibida por correo electrónico.**
- El incumplimiento de alguna de las anteriores instrucciones tendrá un impacto negativo en la nota de la tarea.
- Cualquier sospecha de fraude será tratada de acuerdo con el reglamento de la Universidad.
- Si usted encuentra algún GAZAPO¹ en la solución correspondiente a esta tarea por favor comuníquelo a **ma.galvis138**. Si su observación es válida, se verá recompensado con un incremento del 5% en la nota de la tarea.

Forma de entrega

- El informe de la tarea debe ser entregado en los casilleros de Ingeniería Industrial, en el séptimo piso del ML, antes de la fecha límite de entrega. El casillero será habilitado el día anterior a la entrega de la tarea.
- Adicionalmente, el informe de la tarea junto a sus archivos de soporte deberán ser colgados en el link habilitado en SicuaPlus, antes de la fecha límite de entrega. Por lo tanto, si usted realizó su tarea a mano, debe escanear el documento y subirlo al link correspondiente.

Fecha de entrega

La fecha límite de entrega es el **miércoles 19 de agosto de 2015, antes de las 5:00 p.m.**

¹ Yerro que por inadvertencia deja escapar quien escribe o habla. (Definición según La Real Academia de la Lengua Española)

Integrante 1: _____ Código: _____ Sección: _____
 Integrante 2: _____ Código: _____ Sección: _____

Numeral		Puntaje
1	a)	/1
	b)	/3
	c)	/1
	d)	/2
	e)	/2
	f)	/2
	g)	/2
	h)	/2
	i)	/2
	j)	/2
	k)	/3
	l)	/3
2	a)	/15
3	a)	/2
	b)	/3
	c)	/3
	d)	/3
	e)	/2
	f)	/3
	g)	/4
4	a)	/5
	b)	/5
	c)	/3
	d)	/3
5	a)	/18
	b)	/8
	c)	/3
	d)	/3
6	a)	/5
	b)	/5
	c)	/4
	d)	/2
	e)	/3
	f)	/3
TOTAL		/130
NOTA		/5

Punto 1. Cálculo de probabilidades de eventos (Diagrama de Venn) – (25 puntos)

Petrocol es una multinacional dedicada a la producción de petróleo que opera en Colombia. El plan estratégico de la compañía contempla la inversión en exploración y explotación de nuevos yacimientos. En este plan existen dos alternativas de inversión que son atractivas económicamente para la junta directiva. La primera alternativa (**Alternativa A**) consiste en explorar y explotar las reservas de petróleo ubicadas en aguas profundas del caribe colombiano. La segunda alternativa (**Alternativa B**) consiste en explorar y explotar las reservas petroleras distribuidas en los municipios de Arauca y Casanare. Petrocol reconoce que, por restricciones presupuestarias, no cuenta con los recursos operativos (maquinaria y equipo) suficientes para implementar las dos alternativas de manera simultánea. Esto implica que se debe elegir cuál de las dos alternativas se implementará primero. Adicionalmente, la junta directiva está considerando varias alternativas de financiación para respaldar el proyecto que se elija. Estas alternativas de financiación son:

- 1) **Crédito Bancario:** obtener el 100% de los recursos económicos que requiere la alternativa a través de un crédito.
- 2) **Exceso de Caja:** financiar la totalidad del proyecto de contado, a partir del exceso de caja que se obtuvo el año anterior.
- 3) **Emisión de Acciones:** realizar una emisión de acciones para recaudar el capital necesario de la alternativa.

Con el fin de analizar las dos alternativas de inversión, la junta directiva realizó una encuesta a 5000 accionistas de la compañía, seleccionados de manera aleatoria. La junta directiva espera que la encuesta les permita evaluar las preferencias de los accionistas en cuanto al proyecto que se debería realizar y al método de financiación que considerarían apropiado.

Los resultados de la encuesta arrojaron la siguiente información:

- 2320 accionistas están de acuerdo con la inversión en la alternativa A.
- 745 accionistas no están de acuerdo con el plan estratégico de la junta directiva.
- 1690 accionistas están de acuerdo en invertir en la alternativa A y financiarla a partir de un crédito bancario. De esos 1690, hay 865 que también aceptarían utilizar el exceso de caja como forma de financiación.
- 185 accionistas están de acuerdo con invertir en la alternativa B y consideran que la opción 3 es el único método de financiación adecuado.
- De los accionistas que apoyan la alternativa B y que consideran apropiado utilizar el exceso de caja, hay 145 que también estarían dispuestos a aceptar una emisión de acciones, pero que no aceptarían solicitar un crédito bancario.
- 1285 accionistas están de acuerdo con invertir en la alternativa B y financiarla a partir de un crédito bancario. De estos 1285, 610 también estarían de acuerdo con una emisión de acciones; y de los 610, son 200 los accionistas que también estarían de acuerdo con utilizar el exceso de caja.
- De los 1285 accionistas que financiarían la alternativa B con un crédito bancario, hay 315 que estarían también de acuerdo con utilizar el exceso de caja pero no estarían de acuerdo con una emisión de acciones.
- De los accionistas que apoyan la alternativa A, ninguno de ellos considera que una emisión de acciones es un método viable de financiación.

Con base en la información anterior, de respuesta a los siguientes literales:

- a. **(1 punto)** Con base en la información anterior, mencione los eventos que se presentan en la situación expuesta.
- b. **(3 puntos)** Realice un diagrama de Venn que indique la cantidad de accionistas que pertenecen a cada evento.

Suponga que se selecciona un accionista al azar, calcule las siguientes probabilidades. **Sea explícito con el uso de la notación, tenga en cuenta los eventos, las uniones y las intersecciones.**

- c. **(1 punto)**Cuál es la relación entre los eventos, financiarse vía emisión de acciones e invertir en la alternativa B.
- d. **(2 puntos)** Si se tienen los eventos A y B relacionados con que un accionista esté de acuerdo en invertir en la alternativa A o B, ¿se podría afirmar que estos eventos son independientes? Justifique su respuesta.

Nota. Recuerde que, de acuerdo con el teorema de Bayes, la independencia de dos eventos está dada por:

$$P(A|B) = P(A) \rightarrow P(A \cap B) \neq 0$$

- e. **(2 puntos)** Calcule la probabilidad de que el accionista esté de acuerdo con invertir en la alternativa B.
- f. **(2 puntos)** Calcule la probabilidad de que el accionista esté de acuerdo con invertir en la alternativa A y en la alternativa B.
- g. **(2 puntos)** Calcule la probabilidad de que el accionista esté de acuerdo con financiarse vía préstamo bancario.
- h. **(2 puntos)** Calcule la probabilidad de que el accionista esté de acuerdo con invertir en la alternativa A y que tenga preferencias por obtener un crédito bancario y usar el exceso de caja como posibles métodos de financiación.
- i. **(2 puntos)** Calcule la probabilidad de que el accionista esté de acuerdo con financiarse únicamente con una emisión de acciones.
- j. **(2 puntos)** Calcule la probabilidad de que el accionista esté de acuerdo invertir en la alternativa B y tenga preferencias únicamente por dos de los tres métodos de financiación.
- k. **(3 puntos)** Si se sabe que el accionista prefiere la inversión en la alternativa B, ¿cuál es la probabilidad de que el accionista tenga preferencias únicamente por las opciones de financiación vía emisión de acciones y préstamo bancario?
- l. **(3 puntos)** Si se sabe que el accionista prefiere financiar el proyecto vía préstamo bancario, ¿cuál es la probabilidad de que el accionista esté de acuerdo en invertir en la alternativa A?

Punto 2. Cálculo de probabilidades de eventos (Gráficas) – (15 puntos)

Se dispone de un sistema eléctrico que está conformado por 6 componentes, tal como se ilustra en la Figura 1. Este sistema funciona si es posible enviar corriente desde la entrada del sistema hasta su salida. La probabilidad de que cada uno de los componentes funcione apropiadamente es independiente de los demás componentes, y su valor se presenta en la figura que se muestra a continuación, entre paréntesis.

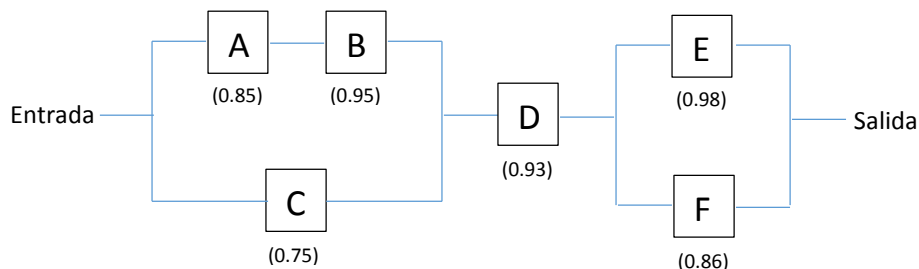


Figura 1. Sistema eléctrico

Tenga en cuenta que un sistema en serie funciona si todos sus componentes funcionan; y que un sistema en paralelo funciona si por lo menos uno de los componentes, o serie de componentes, funciona. Con base en la información anterior, responda la pregunta enunciada en el literal a.

Ayuda: para facilitar la solución de este problema, el sistema se puede dividir en tres subsistemas como se muestra en la Figura 2. Para que la corriente logre llegar a la salida, debe ocurrir que los tres subsistemas funcionen al mismo tiempo, porque los subsistemas forman un sistema en serie. A modo de ejemplo, la probabilidad de que el segundo subsistema funcione es igual a la probabilidad de que el componente D funcione ($P(S_2 \text{ Funcione}) = P(D) = 0.93$).

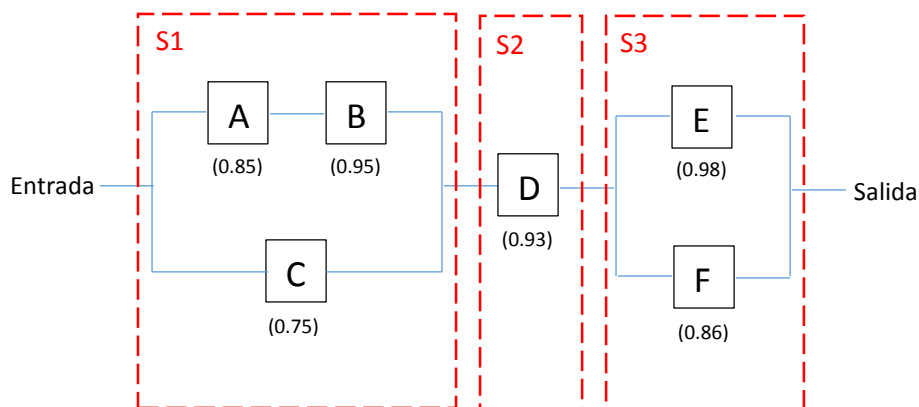


Figura 2. Sistema eléctrico dividido en subsistemas

- a. (15 puntos) Calcule la probabilidad de que el sistema eléctrico funcione. Sea explícito con el uso de fórmulas, eventos, uniones e intersecciones.

Punto 3. Técnicas de Conteo – (20 puntos)

El próximo torneo de fútbol al que fue invitada la Universidad de los Andes se llevará a cabo en el mes de octubre, y en él competirán 8 equipos. Para este torneo, la Universidad de los Andes contará con la presencia de sus mejores cuatro equipos, pertenecientes a las facultades de Ingeniería, Administración, Derecho y Matemáticas. Los restantes cuatro equipos, provenientes de otras universidades, pertenecen a las facultades de Ingeniería, Comunicación, Psicología y Diseño.

Los organizadores del torneo aún no han informado cuál es el sistema de eliminación, sin embargo, usted supone que se implementará un sistema de puntos en el que todos juegan contra todos.

Conteste las siguientes preguntas bajo el supuesto de que es un torneo en el que todos juegan contra todos.

- a. **(2 puntos)** ¿Cuántos resultados posibles se pueden dar en términos de los puestos obtenidos por cada equipo?
- b. **(3 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que el primer y el segundo puesto sean ocupados por equipos de los Andes?
- c. **(3 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que los tres primeros lugares sean ocupados por equipos de las facultades de Comunicación, Derecho y Administración (sin importar el orden)?
- d. **(3 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que el primer lugar sea ocupado por un equipo de Ingeniería, el segundo por el de Matemáticas y el tercero por el de Diseño?

Su otro supuesto sobre el sistema de eliminación consiste en que se organizarán dos grupos de cuatro equipos, y se realizará una ronda final entre los ganadores de cada uno de los grupos. Bajo este supuesto, de respuesta a las siguientes preguntas.

- e. **(2 puntos)** ¿De cuántas formas distintas se podrían organizar los 8 equipos en dos grupos?
- f. **(3 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que en un mismo grupo quede únicamente un equipo de Ingeniería y el equipo de Diseño?
- g. **(4 puntos)** Si se supone que los cuatro equipos representantes de la Universidad de los Andes quedan en el mismo grupo ¿Cuál es la probabilidad de que los equipos de las facultades de Ingeniería queden de primeros en cada grupo?

Punto 4. Teorema de Bayes y Árboles de Probabilidad – (16 puntos)

Luego del impresionante duelo que se vio entre el ciclista británico Chris Froome y el colombiano Nairo Quintana en el Tour de Francia 2015, ambos podrían volver a enfrentarse el próximo 22 de agosto en la 70ª edición de la *Vuelta Ciclista a España*. Conocedores del trazado han analizado que, de las 21 etapas que conforman los 3,374.4 kilómetros de la Vuelta, hay 3 en especial que se podrían considerar decisivas para coronarse en Madrid. Según datos históricos, el ganador de la Vuelta únicamente ha necesitado acumular dos victorias en cualquiera de las siguientes tres etapas para sacar suficiente ventaja sobre el segundo:

Etapa 11: Andorra – Els Cortals d'Encamp. 138 km. Considerada como la etapa más dura de la historia del evento, cuenta con seis puertos de montaña en 138 km que suman 5,230 metros de desnivel acumulado.

Etapa 16: Lluarca – Ermita del Alba. 184 km. Esta etapa consta de siete puertos, quizá no de la dificultad de los dispuestos en la 11ª, pero con dos semanas encima de carrera el cansancio empieza a influir. A su vez, la trazada presenta curvas en herradura, muros de más del 20% durante más de 2000 metros.

Etapa 20: San Lorenzo de El Escorial – Cercedilla. 181 km. Esta será la etapa de cierre de la vuelta con puertos ya bastante conocidos como Navacerrada, Cotos o La Morcuera pero sin final en alto. Este será el terreno definitivo para que, después de tres semanas de actividad, se definan los primeros puestos de la vuelta.

Según estimaciones realizadas por expertos, la probabilidad de que Nairo gané en la 11ª Etapa de la Vuelta es de 0.65; y, suponiendo que Nairo ganó dicha etapa, la probabilidad de que también gane la 16ª es de 0.7. Por otro lado, si Froome gana la 11ª Etapa, la probabilidad de que gane la 16ª sería de 0.5.

Los analistas estiman que si alguno de los dos gana las etapas 11 y 16, se proclamará como el ganador de la vuelta a España, sin importar el resultado de la 20ª Etapa. Pero, en caso de que no se defina el título en las etapas 11 y 16, el ganador se definirá en la 20ª Etapa, antes de llegar a Madrid, para la cual los dos ciclistas tienen igual probabilidad de ganarla. Asumiendo que cada etapa es independiente de las otras y que únicamente Nairo y Froome las podrían ganar, responda las siguientes preguntas. **Sea explícito con el uso de la notación, tenga en cuenta los eventos, las uniones y las intersecciones.**

Nota: para resolver este punto, se definen los siguientes eventos:

- N_1 : Nairo gana la vuelta a España.
- N_1 : Nairo gana la 11ª etapa.
- N_2 : Nairo gana la 16ª etapa.
- N_3 : Nairo gana la 20ª etapa.

- a. **(5 puntos)** Construya un árbol de probabilidad que represente la situación descrita.
- b. **(5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que Nairo Quintana gane la Vuelta a España? ¿Cuál es la probabilidad de que Chris Froome gane la Vuelta a España?
- c. **(3 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que el ganador de la Vuelta se haya coronado ganando las etapas 11ª y 16ª?
- d. **(3 puntos)** Si se sabe que Froome ganó la 16ª etapa, ¿cuál es la probabilidad de que haya ganado la 11ª?

Punto 5. Variables Aleatorias Discretas – (32 puntos)

Alberto y sus amigos han diseñado un juego de azar que consiste en lanzar 2 dados al tiempo y luego sacar una bola de una urna que contiene 3 bolas blancas, 3 rojas y 3 negras. La apuesta de este juego son 10 dólares, y cada participante debe elegir un número del 1 al 6 y un color entre blanco, rojo y negro. Las reglas del juego son las siguientes:

- Si no se obtiene el número elegido en ninguno de los dados, sin importar si se adivinó el color de la bola, el jugador pierde lo apostado.
- Si el número elegido sale en 1 de los 2 dados y no se saca la bola del color seleccionado, se recibe lo apostado y no se pierde dinero.
- Si el número elegido sale en 1 de los 2 dados y se saca la bola del color seleccionado, se recibe el doble de lo apostado.
- Si el número sale en los 2 dados y no se saca la bola del color seleccionado se recibe 5 veces lo apostado
- Si el número sale en los 2 dados y se saca la bola del color seleccionado se recibe 8 veces lo apostado.

Se define X como la variable aleatoria que representa la ganancia o pérdida neta del juego. Responda los siguientes literales:

- a. **(18 puntos)** Encuentre la Función de Probabilidad de la variable aleatoria X y gráfíquela.
- b. **(8 puntos)** Encuentre la Función de Distribución Acumulada de la variable aleatoria X y gráfíquela.
- c. **(3 puntos)** Calcule el valor esperado y la desviación estándar de la variable aleatoria X . Interprete sus resultados.
- d. **(3 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de generar ganancia en el juego? Interprete el resultado.

Punto 6. Variables Aleatorias Continuas – (22 puntos)

La nueva junta administrativa del Hospital Santa Concepción está interesada en desarrollar nuevas estrategias para implementar el próximo año, que permitan mejorar el nivel de servicio que se ofrece a sus pacientes. En la pasada reunión se decidió que el hospital requiere prestar más atención a los tiempos de espera de los pacientes ambulatorios. Como base para la toma de decisiones encaminadas a mejorar en este aspecto, la junta realizó un acuerdo con la Universidad de los Andes para que se realice una evaluación de las salas de espera en el hospital. Luego de casi seis meses de toma de tiempos y análisis estadístico, los investigadores de la universidad lograron caracterizar el tiempo, en horas, que un paciente ambulatorio debe esperar antes de ser atendido como una variable aleatoria X cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ k & 1 \leq x < \frac{4}{3} \\ -\frac{3}{2}x + 3 & \frac{4}{3} \leq x \leq 2 \\ 0 & d.l.c \end{cases}$$

Con base en la información anterior, responda las siguientes preguntas:

- a. **(5 puntos)** ¿Cuál es el valor de la constante k que garantiza que la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X esté correctamente definida? Realice la gráfica de la distribución de probabilidad.
- b. **(5 puntos)** Halle la función de distribución acumulada del tiempo de espera de un paciente ambulatorio en el hospital y gráfiquela.
- c. **(4 puntos)** ¿Cuánto tiempo se espera que un paciente ambulatorio del hospital debería esperar antes de ser atendido? ¿Cuánto sería la desviación estándar de dicho tiempo de espera?
- d. **(2 puntos)** Si se selecciona un paciente del hospital al azar, ¿cuál es la probabilidad de que este deba esperar exactamente una hora para ser atendido?
- e. **(3 puntos)** Calcule la probabilidad de que un paciente seleccionado al azar deba esperar entre 1.25 y 1.75 horas antes de ser atendido. Grafique la región correspondiente.
- f. **(3 puntos)** Si se sabe que el tiempo de espera será superior a 1 hora, Calcule la probabilidad de que un paciente seleccionado al azar deba esperar entre 1.25 y 1.75 horas antes de ser atendido.