Sebastián Valencia Calderón 201111578
Edgar Daniel Gómez 201317343

1. VA Discretas y Continuas de Mayor Aplicación

(a) Según estándares FIFA, un balón oficial debe de tener una presión de aire entre 8.5 y 15.6 psi. Si la empresa Tygol establece que una válvula es defectuosa si no logra mantener dicho estándar de presión, calcule la probabilidad de que una válvula fabricada por el proveedor sea defectuosa.

Sea X la variable aleatoria que representa la presión de aire de un balón luego de 24 horas de fabricado. Por información recolectada y expuesta en el enunciado, se sabe que $X \sim Tri(8{,}05,\ 9{,}17,\ 17{,}09)$. Se sabe que un balón posee los estándares considerados como óptimos para un encuentro deportivo sí y sólo sí, la presión de aire de este está entre 8,5 y 15,6 psi. La probabilidad de que un balón tomado aletoriamente de la muestra modelada por la variable X, sea óptimo para un encuentro deportivo es: $\mathbb{P}(8{,}5 < X < 15{,}6)$. La variable y la región correspondiente a la presión de un balón óptimo, se muestran a continuación:

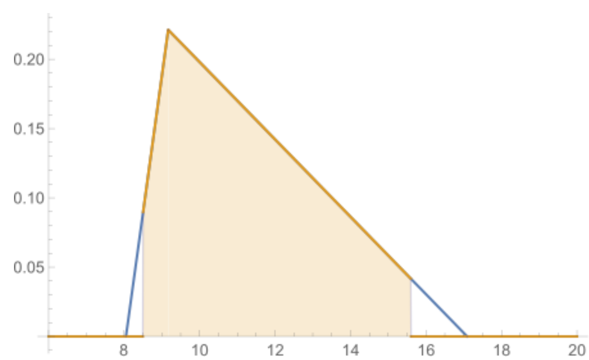

Figura 1: Función de probabilidad normal, horas contra probabilidad

$$\mathbb{P}(8{,}5 < X < 15{,}6) = \mathbb{P}(X < 15{,}6) - \mathbb{P}(X < 8{,}5)$$

La distribución acumulada de una variable aleatoria $X \sim Tri(a,\ c,\ b)$ es:

$$\mathbb{P}(X < x) = \begin{cases} \frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} & a < x < c \\ 1 - \frac{(x-b)^2}{(b-a)(b-c)} & c \leq x < b \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X < 15{,}6) - \mathbb{P}(X < 8{,}5) = 0{,}9689 - 0{,}0200 = 0{,}948991$$

La probabilidad de que un balón esté en óptimas condiciones según su aire almacenado es: 0,948991.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que se decida iniciar la producción de los nuevos balones en la Etapa 1, sin pasar a la Etapa 2?

Los eventos de interés en el experimento enunciado, se resumen a continuación como variable aleatorias. Sea E_1 la variable aleatoria que representa la etapa 1 del proceso de selección, y sea E_2 la variable que representa el proceso de la segunda y última etapa.

$$\text{Etapa1}(X) = \begin{cases} \text{Inicia} & X \leq 2 \\ \text{Etapa2} & 2 < X < 6 \\ \text{Postpone} & X \geq 6 \end{cases}$$

$$\text{Etapa2}(X) = \begin{cases} \text{Inicia} & E_1 + X \leq 6 \\ \text{Postpone} & E_1 + X > 6 \end{cases}$$

Etapa 1: se toma una muestra aleatoria de 50 balones. Si se encuentra un máximo de 2 balones que presenten fallas en las válvulas, se decide iniciar la producción sin pasar a la Etapa 2; si se encuentran al menos 6 balones que presenten fallas en las válvulas, se pospone la producción; de lo contrario, se realiza la Etapa 2 de control de calidad.

Etapa 2: se toma una segunda muestra aleatoria de 100 balones. Si el número de balones que presentan fallas de esta segunda muestra más el número de balones defectuosos de la primera muestra aleatoria no superan las 6 unidades, se da inicio a la producción. De lo contrario, se decide posponer la producción hasta llegar a un acuerdo de garantía con el proveedor de las válvulas.

$$E_1 \sim Bin(p = 1 - 0{,}948991;\ N = 50)$$
$$E_1 \sim Bin(p = 0{,}051009;\ N = 50)$$

La producción inicia sin pasar por la etapa dos sí y sólo si $E_1 \leq 2$.

$$\mathbb{P}(E_1 = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$\mathbb{P}(E_1 \leq k) = \sum_{i=\text{mín}\,\{\mathbb{R}[E_1]\}}^{k} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i}$$

$$\mathbb{P}(E_1 \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i}$$

$$= \binom{N}{0} p^0 (1-p)^{N-0} + \binom{N}{1} p^1 (1-p)^{N-1} + \binom{N}{2} p^2 (1-p)^{N-2}$$

$$= \binom{50}{0} (1-p)^{50} + \binom{50}{1} p(1-p)^{49} + \binom{50}{2} p^2 (1-p)^{48} = 0{,}527287$$

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que se deba posponer la producción en la Etapa 1, sin pasar a la Etapa 2?

De acuerdo a la explicación, convención y deducción del literal inmediatamente anterior, se pide por la probabilidad:

$$\mathbb{P}(X \geq 6) = 1 - \mathbb{P}(X < 6) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 5)$$

$$= 1 - \left[\sum_{i=0}^{5} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} \right] = 1 - 0{,}95899 = 0{,}0410086$$

(d) Si luego de la primera etapa se sabe que es necesario realizar la Etapa 2 de control de calidad, ¿cuál es la probabilidad de que se acepte la producción bajo los criterios de esta etapa?

De manera análoga, $E_2 \sim Bin(p = 0{,}051009;\ N = 100)$. Para que esto ocurra, debe suceder que una vez aceptado el lote en la etapa 1, este sea aceptado en la segunda etapa, para esto, es necesario considerar la desigualdad que implica esto ($E_1 + E_2 \leq 6$), lo cual sólo ocurre si en la etapa uno, E_1 tomó alguno de los valores en $\{3,\ 4,\ 5\}$. Para numerar los posibles resultados o más bien la combinación de resultados se hace uso del siguiente diagráma:

$$E_1 = 3 \Rightarrow E_2 \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

$$E_1 = 4 \Rightarrow E_2 \in \{0,\ 1,\ 2\}$$
$$E_1 = 5 \Rightarrow E_2 \in \{0,\ 1\}$$

La probabilidad de cada una de las intersecciones ($E_1 = 3 \wedge E_2 \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, $E_1 = 4 \wedge E_2 \in \{0,\ 1,\ 2\}$, $E_1 = 5 \wedge E_2 \in \{0,\ 1\}$) es:

$$A = \sum_{i\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}} \left[\left(\binom{50}{3}p^3(1-p)^{47}\right) \times \left(\binom{100}{i}p^i(1-p)^{100-i}\right)\right]$$
$$B = \sum_{i\in\{0,\ 1,\ 2\}} \left[\left(\binom{50}{4}p^4(1-p)^{46}\right) \times \left(\binom{100}{i}p^i(1-p)^{100-i}\right)\right]$$
$$C = \sum_{i\in\{0,\ 1\}} \left[\left(\binom{50}{5}p^5(1-p)^{45}\right) \times \left(\binom{100}{i}p^i(1-p)^{100-i}\right)\right]$$

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) =$$
$$\sum_{i=0}^{3}\mathbb{P}(E_1 = 3 \wedge E_2 = i) + \sum_{i=0}^{2}\mathbb{P}(E_1 = 4 \wedge E_2 = i) +$$
$$\sum_{i=0}^{1}\mathbb{P}(E_1 = 4 \wedge E_2 = i) = A + B + C$$
$$0{,}054134 + 0{,}0154391 + 0{,}00235399 = 0{,}0719271 \Rightarrow$$
$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = 0{,}0719271$$

(e) El gerente del área de control de calidad ha decidido recolectar una muestra aleatoria de 5 balones que presenten fallas en las válvulas, para inspeccionar los aspectos específicos que ocasionan las fallas. Si el gerente inspecciona uno a uno los balones que salen de la línea de producción, ¿cuál es la probabilidad de que deban inspeccionar 80 balones hasta completar la muestra requerida?

En este literal, se quiere saber cuál es la probabilidad de que el número de balones revisados para completar una colección de cinco balones defectuosos sea 80. La descripción de el experimento, coincide con un modela ajo una variable aleatoria binomial negativa. X: Número de balones revisados para completar una colección de cinco balones no óptimos. Por la descripción de la variable aleatoria, $X \sim Bin^*(p = 0{,}051009;\ k = 5)$.

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}$$

$$\mathbb{P}(X = 80) = \binom{80-1}{5-1} p^5 (1-p)^{80-5} = \binom{79}{4} p^5 (1-p)^{75} = 0{,}010226$$

(f) Calcule la probabilidad de que el décimo y el onceavo balón que inspecciona el gerente sean los dos primeros balones que presenten fallas.

Sea X el número de balones que fallan. Entonces, $x = \{10, 11\}\,;\ k = \{1, 2\}\,;\ p = 0{,}051009$. La pobabilidad de que el décimo balón inspeccionado sea el primero en presentar fallas es $Bin^*(10,\ 1,\ 0{,}051009)$. La probabilidad de que el onceavo balón inspeccionado sea el segundo en presentar fallas es $Bin^*(11,\ 2,\ 0{,}051009)$. Dada la independencia de caa inspección, la pobabilidad de que el décimo sea el primero en poseer fallas y el onceavo el segundo en oseer fallas es:

$$Bin^*(10,\ 1,\ 0{,}051009) \times Bin^*(11,\ 2,\ 0{,}051009)$$

$$\binom{10-1}{1-1} 0{,}051009^1 (1-0{,}051009)^{10-1} \times \binom{11-1}{2-1} 0{,}051009^2 (1-0{,}051009)^{11-2}$$

$$\binom{9}{0} 0{,}051009 (1-0{,}051009)^9 \times \binom{10}{1} 0{,}051009^2 (1-0{,}051009)^9$$

$$0{,}0318424 \times 0{,}0162425 = 0{,}0005172$$

(g) Bajo el contexto del literal e) ¿cuál es el número esperado de balones que no presentan fallas en las válvulas, que el gerente esperaría encontrar antes de completar su muestra de 5 balones defectuosos?

El valor esperado de la distribución del literal e) pero con la probabilidad de encontrar balones sin defectos. Es decir, dada la distribución $X \sim Bin^*(p = 1-0{,}051009;\ k = 5)$. Este valor, corresponde El valor esperado de ésta distribución es:

$$\mu = \frac{k(1-p)}{p} =$$

(h) Se envían 100 balones al proveedor de válvulas para que realice otras pruebas relacionadas al desgaste de las mismas. Se sabe de antemano que entre los balones enviados hay 30 que presentan fallas. Calcule la probabilidad de que, si el proveedor toma una muestra aleatoria de 20 de estos 100 balones, encuentre a lo sumo 6 que presenten fallas.

En total, se seleccionan 20 balones de 100, las formas de hacer esto, es $\binom{100}{20}$. De la selección que se quiere hacer, x balones de los 20, deben presentar fallas, es decir, deben pertenecer a los 30 en total que presentan fallas; mientras que los $20-x$ restantes, deben ser seleccionados de los 70 totales que no presentan fallas. Se quiere la unión de los eventos mutuamente excluyentes que corresponden a $x \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. La probabilidad para cada x es:

$$\frac{\binom{30}{x} \times \binom{70}{20-x}}{\binom{100}{20}}$$

Para todos los x:

$$\sum_{i=0}^{6} \left[\frac{\binom{30}{i} \times \binom{70}{20-i}}{\binom{100}{20}} \right] = \frac{8435940105002}{13715194896249} = 0{,}61508$$

2. Proceso de Poisson y Distribución Exponencial

Dado que el tiempo de llegada entre dos paciente se distribuye de manera exponencial, es posible definir dos tasa, una para horas pico y otro para horas valle, que esta definidas como:

$$t \in [5am - 1pm] \Rightarrow \lambda_{5am-1pm}\ ;\ t = \frac{1}{20} = 0{,}05\ \frac{pacientes}{minuto}$$
$$t \in [1apm - 4am] \Rightarrow \lambda_{1apm-4am}\ ;\ t = \frac{1}{45} = 0{,}022\ \frac{pacientes}{minuto}$$

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que en la hora pico de urgencias lleguen a lo sumo 20 pacientes?

(I) Para dar solución a la pregunta en cuestión, se plantea como variable aleatoria discreta, el número de pacientes que llegan en un determinado intervalo de tiempo, es decir:

V.A: número de pacientes que llegan en un intervalo de tiempo.

(II) Para encontrar la probabilidad de un evento dada la variable aleatoria, es necesario definir la función de probabilidad por medio de una distribución de Poisson $p(x,\ \lambda t)$, donde los parámetros $x,\ \lambda t$ son el número de personas que llegan y la tasa de llegada, respectivamente. La distribución que definida de la siguiente manera:

$$p(x,\ \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!};\ x \leq 20 \wedge \lambda = \frac{1}{20} = 0{,}05\ \frac{pacientes}{minuto}$$

(III) La probabilidad de que lleguen a lo sumo 20 pacientes está dada por la suma de las probabilidades de que lleguen de 0 a 20 pacientes, dando como resultado la siguiente sumatoria:

$$\sum_{x=0}^{20}\left(\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}\right) = 0{,}2426$$

(b) ¿Cuál es el valor esperado y la varianza del número de pacientes que son atendidos durante la hora pico en urgencias?

$$\mu = \mathbb{E}(X) = (0{,}05)(8 \times 60) = 24\ \frac{pacientes}{hora}$$

$$\sigma^2 = \mathbb{V}(X) = 24$$

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente 15 pacientes entre las 7:00 a.m. y las 10:00 a.m.?

$$\mathbb{P}(X = 15) = \frac{e^{-0{,}05\times 3\times 60}(0{,}05 \times 3 \times 60)^{15}}{x!} = 0{,}01944$$

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen por lo menos 6 pacientes entre las 12:00 a.m. y las 5:00 a.m.?

Dado que la probabilidad de que X sea mayor a 6 resultaría en una sumatoria infinita cuya solución estaría dada por una integral impropia, plantearemos la probabilidad de manera que resulte en una sumatoria finita, como se muestra a continuación:

$$\mathbb{P}(X \geq 6) = 1 - \mathbb{P}(X < 6) = 1 - \left[\sum_{x=0}^{6}\left(\frac{e^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^x}{x!}\right)\right] = 0{,}49$$

(e) Si entre las 4:00 a.m. y las 10:00 a.m. llegaron 25 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que entre las 10:00 a.m. y las 12:00 p.m. lleguen menos de 3 pacientes? Por otro lado ¿cuál es la probabilidad de que lleguen 28 pacientes entre las 4:00 a.m. y las 11:00 a.m.?

(I) Dado que los eventos son independientes La probabilidad queda definida de la siguiente manera:

$$\mathbb{P}(X < 3) = \sum_{x=0}^{2}\left(\frac{e^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^x}{x!}\right) = 0{,}0619$$

(II) Si se sabe que de 4:00am a 10:00am llegaron 25 pacientes entonces queda encontrar la probabilidad de que entre las 10 y las 11:00am llegue 3 personas:

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{e^{-\lambda_1 60}(\lambda_1 60)^3}{3!} = 0{,}224$$

(f) Si se sabe que llegaron 30 pacientes entre las 10:00 p.m. y las 4:00 a.m., ¿cuál es la probabilidad de que 20 pacientes hayan llegado entre la 1:30 a.m. y las 3:15 a.m.?

Se trata de una probabilidad condicional dada por los eventos.

$$\mathbf{A}: \ X(10\ pm - 4\ am) = 30$$
$$\mathbf{B}: \ X(1:30\ am - 3:15\ am) = 20$$

La probabilidad solicitada es $\mathbb{P}(B|A)$, sin embargo como el intervalo de B esta contenido en A, los eventos no son independientes por lo que encontrar su intersección no es trivial. A pesar de esto, el problema puede ser definido a partir de intervalos independientes; intervalo "Y" de 10pm a 1:30am, intervalo "X" de 1:35am a 3:15am y el intervalo "Z" de 3:15am hasta las 4am. Dado que la probabilidad solicitada es que en el intervalo X lleguen 20 personas, es necesario encontrar la probabilidad de que la suma de los intervalos Y y Z sea 10. Este grupo de probabilidades queda definido como:

$$\mathbb{P}(X = 20) \times \sum_{u=0}^{10} [\mathbb{P}(X = u) \times \mathbb{P}(X = 10 - u)]$$
$$\frac{e^{-\lambda_2 105}(\lambda_2 105)^{20}}{20!} \times \sum_{u=0}^{10} \left[\left(\frac{e^{-\lambda_2 105}(\lambda_2 105)^{u}}{u!} \right) \times \frac{e^{-\lambda_2 15}(\lambda_2 15)^{10-u}}{(10-u)!} \right]$$

(g) Si a las 5:15 a.m. llega el primer paciente de la hora pico a urgencias ¿cuál es la probabilidad de que el próxima paciente en llegar se demoré más de media hora?

(I) Para dar solución a la pregunta en cuestión, se plantea como variable aleatoria continua, el tiempo de llegada entre pacientes.

$$\mathbf{VA}: \text{tiempo de llegada entre pacientes}$$

(II) Para encontrar la probabilidad de un evento dada la variable aleatoria, es necesario definir la función de probabilidad por medio de una distribución exponencial $f(X)$, donde el parámetro X es el tiempo. La distribución que definida de la siguiente manera:

$$f(X) = e^{-\lambda t}(\lambda t);\ x > 30 \wedge \lambda = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

(III) La probabilidad de que el próximo paciente llegue en media hora está dada por:

$$\mathbb{P}(X > 30) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 30) = 1 - \int_0^{30} e^{-\lambda t}(\lambda t)\ dt = 0{,}22$$

(h) Si a las 12:30 p.m. llega un paciente ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo que se demora el siguiente paciente en llegar al centro de urgencias esté entre 15 y 30 minutos?

$$\mathbb{P}(15 < X < 30) = \int_{15}^{30} e^{-\lambda t}(\lambda t)\ dt = 0{,}25$$

(i) Si a las 12:00 p.m. han llegado 5 pacientes ¿cuál es la probabilidad de que el próximo paciente llegue exactamente en 20 minutos?

$$\mathbb{P}(X = 0) = 0$$

(j) Si a las 8:00 p.m. se sabe que el último paciente llegó hace media hora, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo de llegada del siguiente paciente a urgencias sea mayor a una hora?

$$\mathbb{P}(X > 60) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 60) = 1 - \int_0^{60} e^{-\lambda t}(\lambda t)\ dt = 0{,}14$$

3. Distribución Normal

(a) Si se aborda un bus híbrido o del SITP al azar durante hora pico ¿cuál es la probabilidad de que en un día seleccionado al azar el tiempo de trayecto sea mayor a 1.5 horas?

Sea X la variable aleatoria que representa la demora de un bus híbrido en horas pico sobre las calles 34 y 100. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(1{,}25, 0{,}2^2)$. La gráfica de la distribución normal del enunciado, se muestra acontinuación:

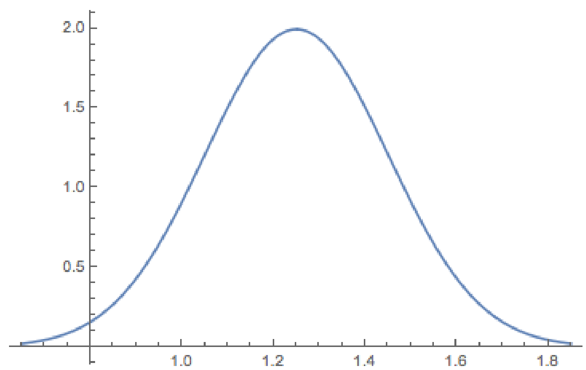

Figura 2: Función de probabilidad normal, horas contra probabilidad

Si se quiere saber la probabilidad de que un viaje en un bus cuya ruta se comporte de acuerdo a la descripción, se quiere saber $\mathbb{P}(X > 1{,}5)$. Lo cual, por propiedades básicas de la teoría de la probabilidad es igual a $1 - \mathbb{P}(X < 1{,}5)$ para variables aleatorias continuas. Para hallar esto, se estandariza la variable aleatoria X, de tal forma:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$1 - \mathbb{P}(X < 1{,}5) = 1 - \mathbb{P}\left(Z < \frac{1{,}5 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z < \frac{1{,}5 - 1{,}25}{0{,}2}\right)$$

$$1 - \mathbb{P}(X < 1{,}5) = 1 - \mathbb{P}\left(Z < 1{,}25\right) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}10565$$

La probabilidad que se halló, estaba acumulada en:

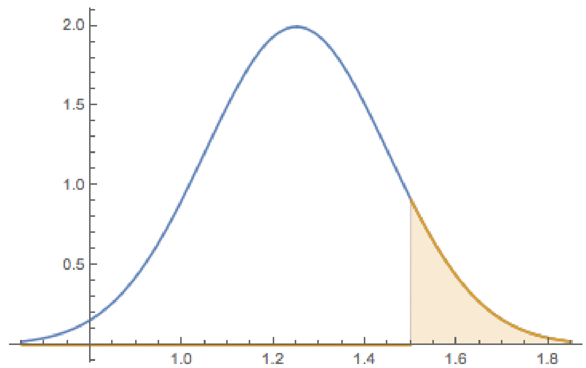

Figura 3: Función de probabilidad normal, horas contra probabilidad.

(b) Bibiana va tarde a su trabajo y le indicará a su jefe el tiempo máximo que se tardará en llegar a la oficina. Ella quiere indicarle un tiempo que, con una probabilidad de 0.9, no exceda el tiempo de recorrido del SITP que acaba de abordar.

Se quiere hallar un a tal que $\mathbb{P}(X < a) = 0{,}9$. Esto satisface la definición para que con ésta pobabilidad, el tiempo de demora de Bibiana no exceda a. Se estandariza este valor:

$$\mathbb{P}\left(Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(Z < \frac{a-1{,}25}{0{,}2}\right) = 0{,}9$$

El valor para cual la variable aleatoria $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, toma un valor tal que la probabilidad acumulda hasta tal valor sea 0,9 es, según la tabla de probabilidad acumulada de la Normal estándar es $z = 1{,}29$. Luego:

$$\frac{a-1{,}25}{0{,}2} = 1{,}29 \Rightarrow a = (1{,}29)(0{,}2) + 1{,}25 \Rightarrow a = 1{,}508$$

El tiempo que debe indicar Bibiana es de 1,508 horas.

(c) Calcule la probabilidad de que un bus seleccionado al azar tenga un tiempo de trayecto de exactamente una hora.

Dado que es una variable aleatoria continua, es imposible calcular la probabilidad puntual de un punto exacto del rango de la distribución, conceptualmente, y analíticamente, este tiende a cero.

$$\mathbb{P}\left(X = 1\right) = 0$$

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que en un trayecto seleccionado al azar haya tenido un tiempo de recorrido entre 45 minutos y 1 hora?

Se pregunta por la probabilidad de que el timepo transcurrido en un viaje de un bus de la muestra cuyo recorrido se modela haciendo uso de X esté entre 45 minutos y 1 hora exactamente. Es decir:

$$\mathbb{P}(45_{min} < X < 1_{hor}) = \mathbb{P}(0{,}75_{hor} < X < 1_{hor})$$

Por propiedades básicas de las distribuciones de probabilidad:

$$\mathbb{P}(0{,}75_{hor} < X < 1_{hor}) = \mathbb{P}(X < 1_{hor}) - \mathbb{P}(X < 0{,}75_{hor})$$

Estandarizando la variable $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(Z < \frac{1-\mu}{\sigma}\right) - \mathbb{P}\left(Z < \frac{0{,}75-\mu}{\sigma}\right) &= \\ \mathbb{P}\left(Z < \frac{1-1{,}25}{0{,}2}\right) - \mathbb{P}\left(Z < \frac{0{,}75-1{,}25}{0{,}2}\right) &= \\ \mathbb{P}\left(Z < -1{,}25\right) - \mathbb{P}\left(Z < -2{,}5\right) &= \\ \left[1 - \mathbb{P}\left(Z < 1{,}25\right)\right] - \left[1 - \mathbb{P}\left(Z < 2{,}5\right)\right] &= \\ -\mathbb{P}\left(Z < 1{,}25\right) + \mathbb{P}\left(Z < 2{,}5\right) = -0{,}8944 + 0{,}9928 & \\ = 0{,}0994401 & \end{aligned} \tag{1}$$

La probabilidad que se halló, estaba acumulada en:

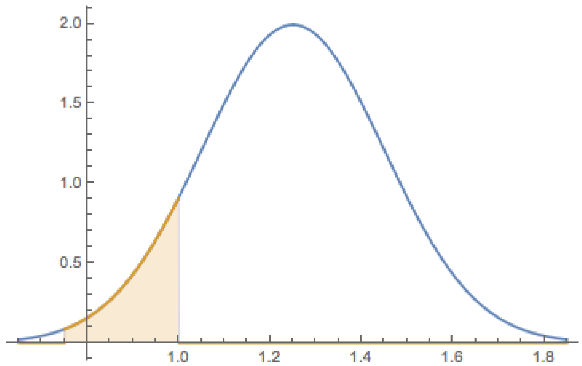

Figura 4: Gráfica de probabilidad de que se llege con un timepo entre 45 minutos y 1 hora.

(e) Calcule el valor de la constante c que garantiza que, con probabilidad de 0.90, el tiempo de recorrido de un bus seleccionado al azar estará intervalo $[1{,}25 - c,\ 1{,}25 + c]$.

El valor pedido, es un c tal que para algún X, la probabilidad de que esté entre $1{,}25 - c$ y $1{,}25 + c$ sea $0{,}90$. Por principios básicos de probabilidad y de distribuciones de probabilidad:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(1{,}25 - c < X < 1{,}25 + c\right) = 0{,}9 \Rightarrow \\
\mathbb{P}\left(X < 1{,}25 + c\right) - \mathbb{P}\left(X < 1{,}25 - c\right) = 0{,}9 \Rightarrow \\
\text{Al estandarizar se obtiene:} \\
\mathbb{P}\left(Z < \frac{1{,}25 + c - \mu}{\sigma}\right) - \mathbb{P}\left(Z < \frac{1{,}25 - c - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}9 \Rightarrow \\
\mathbb{P}\left(Z < \frac{1{,}25 + c - 1{,}25}{0{,}2}\right) - \mathbb{P}\left(Z < \frac{1{,}25 - c - 1{,}25}{0{,}2}\right) = 0{,}9 \Rightarrow \\
\mathbb{P}\left(Z < \frac{c}{0{,}2}\right) - \mathbb{P}\left(Z < \frac{-c}{0{,}2}\right) = 0{,}9
\end{aligned} \tag{2}$$

Por propiedades de las distribuciones normales

$$\mathbb{P}\left(Z < \frac{c}{0{,}2}\right) - \left[1 - \mathbb{P}\left(Z < \frac{c}{0{,}2}\right) = 0{,}9\right]$$

$$\mathbb{P}\left(Z < \frac{c}{0{,}2}\right) - 1 + \mathbb{P}\left(Z < \frac{c}{0{,}2}\right) = 0{,}9$$

$$2\left(\mathbb{P}\left(Z < \frac{c}{0{,}2}\right)\right) - 1 = 0{,}9 \Rightarrow \mathbb{P}\left(Z < \frac{c}{0{,}2}\right) = \frac{1{,}9}{2} = 0{,}95$$

Según la tabla de distribución normal estándar, el primer valor z para el cual $\mathbb{P}\left(Z < z\right) = 0{,}9$ es 1,65. Luego, $\frac{c}{2} = 1{,}65 \Rightarrow c = 0{,}33$.

4. Función Generatriz de Momentos

(a) ¿Cuál es el número esperado de fallas en las máquinas durante un mes?

Como $\Psi_X(t) = e^{6\times\left(e^t-1\right)}$ es la función generatriz de momentos para la variable aleatoria que representa el número de fallas mensuales que tiene la máquina, y por la teoría se sabe que $\Psi_X^r(t=0) = \mathbb{E}(X^r)$; entonces el primer momento central equivale a $\mathbb{E}(X^1) = \mathbb{E}(X)$.

$$\Psi'_X(t) = 6 \times e^{6\times(-1+e^t)+t}$$
$$\Psi'_X(0) = 6 \times e^{6\times(-1+e^0)+0} = 6 \times e^{6\times(-1+1)} = 6 \times e^0 = 1$$

(b) ¿Cuál es la varianza del número de fallas en las máquinas durante un mes?

Como $\Psi_X(t) = e^{6\times\left(e^t-1\right)}$ es la función generatriz de momentos para la variable aleatoria que representa el número de fallas mensuales que tiene la máquina, y por la teoría se sabe que $\Psi_X^r(t=0) = \mathbb{E}(X^r)$; entonces el segundo momento central equivale a $\mathbb{E}(X^2)$.

$$\Psi'_X(t) = 6 \times e^{6\times(-1+e^t)+t}$$
$$\Psi''_X(t) = 6 \times e^{6\times\left(e^t-1\right)+t} \times \left(6 \times e^t + 1\right)$$
$$\Psi''_X(0) = 6 \times e^{6\times\left(e^0-1\right)+0} \times \left(6 \times e^0 + 1\right) = 6 \times e^{6\times(1-1)+0} \times (6 \times 1 + 1)$$
$$\Psi''_X(0) = 6 \times e^0 \times 7 = 6 \times 7 = 42 = \mathbb{E}(X^2)$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \Psi''_X(0) - (\Psi'_X(0))^2$$
$$\mathbb{V}(X) = 42 - 6^{\text{”}} = 42 - 36 = 6$$

(c) Halle su función generatriz de momentos. Muestre todo el procedimiento.

Sea $f_Y(y) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, una función definida por la expresión $f_Y(y) = 1/20 \iff y \in (1,20) \subset \mathbb{R} \wedge f_Y(y) = 0 \iff y \notin (1,20) \subset \mathbb{R}$. Sea $g(t) = e^{t\times y}$, definida sobre $\mathbb{R}$ para todo intervalo de definición de la variable y. El producto funcional de ambas funciones, se define através de la variable y, por lo que las porciones donde y valfa cero sobre algun intervalo de por lo menos una de las funciones, entonces en el mismo intervalo, el producto funcional es cero. Acontinuación se ilustra el producto funcional de las funciones definidas en este párrafo sobre un intervalo de interés.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{20} & 0 < x < 20 \\ 0 & d.l.c \end{cases}$$

$$g(t) = e^{t \times y}$$

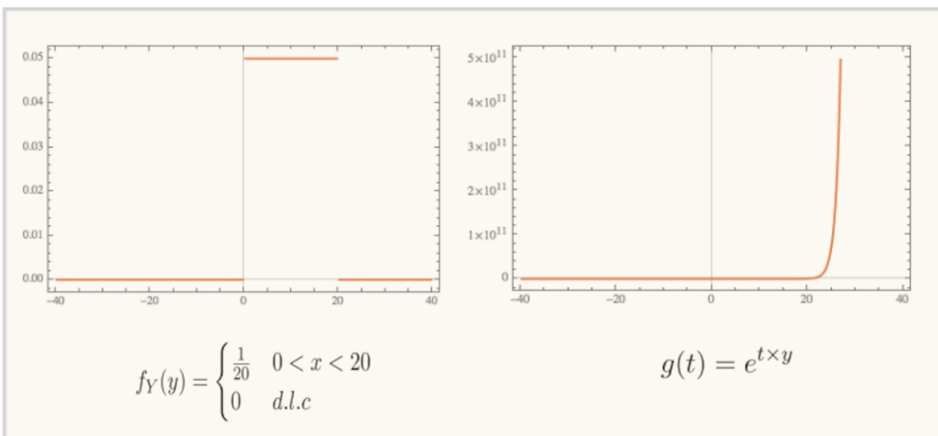

Figura 5: Función de distribución de probabilidad y función para la generación de momentos centrales de una distribución.

$$\Psi_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{y \times t} \times f_Y(y)\right)\, dy = \int_{\mathbb{R}[Y]} \left(e^{y \times t} \times f_Y(y)\right)\, dy$$

$$\Psi_Y(t) = \int_0^{20} \left(e^{y \times t} \times f_Y(y)\right)\, dy = \int_0^{20} \left(e^{y \times t} \times \frac{1}{20}\right)\, dy$$

$$\Psi_Y(t) = \frac{1}{20} \int_0^{20} e^{y \times t}\, dy = \frac{1}{20} \left[\frac{e^{t \times y}}{t} \Bigg|_{y=0}^{y=20} \right] = \frac{1}{20} \left[\frac{e^{20 \times t}}{t} - \frac{e^{0 \times t}}{t} \right]$$

$$\Psi_Y(t) = \frac{1}{20} \left[\frac{e^{20 \times t} - e^{0 \times t}}{t} \right] = \frac{1}{20} \left[\frac{e^{20t} - 1}{t} \right] = \frac{e^{20t} - 1}{20t}$$