

Profesor Coordinador: Mario Castillo

Profesores: Astrid Bernal, Carlos Castellanos, Fabio Lagos, María Alejandra López, Gonzalo Torres, Hernando Mutis.

Segundo semestre de 2015

Complementaria 8

Ejercicios sobre variables aleatorias conjuntas continuas, función de densidad conjunta y función de probabilidad acumulada conjunta. Funciones condicionales. Ejercicios sobre valor esperado, covarianza, correlación.

Punto 1

Una compañía vende paquetes de frutos secos mixtos que contienen almendras, maní y pistachos. Suponga que el peso neto de cada paquete es exactamente de una libra, pero la contribución en peso de cada tipo de fruto es aleatoria. De esta manera, un modelo de probabilidad conjunta que represente la contribución del peso de almendras y de pistachos al paquete de frutos secos, indica la contribución del maní. Se define X como la variable aleatoria que representa el peso de las almendras en un paquete seleccionado al azar y se define Y como la variable aleatoria que representa el peso de los pistachos en un paquete seleccionado al azar. A continuación se presenta la función de distribución de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X y Y :

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} kx & 0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{dlc} \end{cases}$$

- Encuentre el valor de k para que la función de densidad de probabilidad conjunta esté correctamente definida.
- Grafique la región donde se encuentra definida la función de densidad de probabilidad conjunta.
- Encuentre las funciones de densidad de probabilidad marginal de las variables aleatorias X y Y .
- ¿Las variables X y Y son independientes?
- ¿Cuál es la probabilidad de que una bolsa contenga menos de 0.5 lb de maní y menos de 0.3 lb de almendras?

- f. Si se sabe que en una bolsa de snacks mixtos hay 0.2 libras de almendras, ¿cuál es la probabilidad de que en el paquete se encuentren entre 0.3 y 0.6 libras de pistachos?
- g. Si se sabe que en una bolsa de snacks contiene 0.2 libras de almendras, ¿qué cantidad de pistachos se espera encontrar en la bolsa?
- h. Halle el coeficiente de correlación de las variables aleatorias X y Y, e interprete el resultado.

Punto 2

Una fábrica de pisos y paredes cerámicos para construcción estima que el peso de su producto (en toneladas) que transporta desde la fábrica hasta el cliente se puede modelar como una variable aleatoria con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f_Y(y) = \frac{1}{10} \quad 0 \leq y \leq 10$$

En cada viaje, el tiempo (en horas) de recorrido hasta la obra se puede modelar como una variable aleatoria X, la cual se encuentra uniformemente distribuida entre cero y una quinta parte de la cantidad del peso del producto.

- a. Halle la función de densidad de probabilidad conjunta de X y Y.
- b. Grafique la región donde se encuentra definida la función de densidad de probabilidad conjunta.
- c. Verifique que la función de densidad de probabilidad conjunta está correctamente definida.
- d. Halle la función de probabilidad marginal de X.
- e. ¿Son Las variables X y Y independientes entre sí?