Universidad de los Andes
Departamento de Ingeniería Industrial
Probabilidad y Estadística I (IIND2106)
Profesor Coordinador: Mario Castillo
Profesores: Astrid Bernal, Carlos Castellanos, Fabio Lagos, María Alejandra López, Gonzalo Torres, Hernando Mutis.
Segundo semestre de 2015

Complementaria 7

Ejercicios sobre variables aleatorias conjuntas discretas, función de probabilidad conjunta y función de probabilidad acumulada conjunta. Probabilidad condicional e independencia de variables aleatorias.

Punto 1

Una empresa de seguros ofrece pólizas de automóvil y de hogar. Para cada tipo de póliza, se debe especificar un deducible. Para una póliza de automóvil, las opciones de esta cantidad son: $100, $200 y $400 (dólares), mientras que para la póliza de hogar, las opciones son: $100, $300 y $600 (dólares). Se definen las siguientes variables aleatorias:

X: valor del deducible en una póliza de automóvil.
Y: valor del deducible en una póliza de hogar.

La empresa sabe que los valores deducibles de automóvil y de hogar tienen la siguiente función de probabilidad conjunta:

$$g_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy & x = 100, 200, 400;\ y = 100, 300, 600 \\ 0 & dlc \end{cases}$$

a. Encuentre el valor de la constante c, para que la función de probabilidad conjunta este correctamente definida.

Para que la función de probabilidad este correctamente definida se debe cumplir que:

$$\sum_{R(X)} \sum_{R(Y)} g_{xy}(x_i, y_i) = 1$$
$$\sum_{R(X)} \sum_{R(Y)} c(x_i * y_i) = 1$$

$g_{xy}(x,y)$		Y		
		100	**300**	**600**
X	**100**	10000c	30000c	60000c
	200	20000c	60000c	120000c
	400	40000c	120000c	240000c

$$c[(100*100)+(100*300)+(100*600)+(200*100)+(200*300)+(200*600)+(400*100)+(400*300)+(400*600)]=1$$

$$c=1/700000$$

b. Encuentre las funciones de probabilidad marginal de las variables aleatorias X y Y.

Función de probabilidad marginal de la variable aleatoria X:

$$g_X(x_i)=\sum_{R(Y)} g_{XY}(x_i,y_j)$$

Al hallar **c** en el literal anterior, se obtiene:

$\mathbf{g_{xy}(x,y)}$		**Y**		
		100	**300**	**600**
X	**100**	1/70	3/70	6/70
	200	2/70	6/70	12/70
	400	4/70	12/70	24/70

Función de probabilidad marginal de X:

$$g_X(100)=\frac{1}{70}+\frac{3}{70}+\frac{6}{70}=\frac{10}{70}$$

$$g_X(200)=\frac{2}{70}+\frac{6}{70}+\frac{12}{70}=\frac{20}{70}$$

$$g_X(300)=\frac{4}{70}+\frac{12}{70}+\frac{24}{70}=\frac{40}{70}$$

$$g_X(x)=\begin{cases}10/70 & x=100\\ 20/70 & x=200\\ 40/70 & x=400\\ 0 & \text{dlc}\end{cases}$$

Función de probabilidad marginal de Y:

$$g_Y(y_i)=\sum_{R(X)} g_{XY}(x_j,y_i)$$

$$g_Y(100)=\frac{1}{70}+\frac{2}{70}+\frac{4}{70}=\frac{7}{70}$$

$$g_Y(300)=\frac{3}{70}+\frac{6}{70}+\frac{12}{70}=\frac{21}{70}$$

$$g_Y(600)=\frac{6}{70}+\frac{12}{70}+\frac{24}{70}=\frac{42}{70}$$

$$g_Y(y) = \begin{cases} 7/70 & y = 100 \\ 21/70 & y = 300 \\ 42/70 & y = 600 \\ 0 & \text{dlc} \end{cases}$$

c. Encuentre la función de probabilidad condicional de X dado Y.

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 100|\mathrm{Y} = 100) = \frac{P(X = 100 \cap Y = 100)}{P(Y = 100)} = \frac{1}{7}$$

$$P(\mathrm{X} = 200|\mathrm{Y} = 100) = \frac{P(X = 200 \cap Y = 100)}{P(Y = 100)} = \frac{2}{7}$$

$$P(\mathrm{X} = 400|\mathrm{Y} = 100) = \frac{P(X = 400 \cap Y = 100)}{P(Y = 100)} = \frac{4}{7}$$

$$P(\mathrm{X} = 100|\mathrm{Y} = 300) = \frac{P(X = 100 \cap Y = 300)}{P(Y = 300)} = \frac{3}{21}$$

$$P(\mathrm{X} = 200|\mathrm{Y} = 300) = \frac{P(X = 200 \cap Y = 300)}{P(Y = 300)} = \frac{6}{21}$$

$$P(\mathrm{X} = 400|\mathrm{Y} = 300) = \frac{P(X = 400 \cap Y = 300)}{P(Y = 300)} = \frac{12}{21}$$

$$P(\mathrm{X} = 100|\mathrm{Y} = 600) = \frac{P(X = 100 \cap Y = 600)}{P(Y = 600)} = \frac{6}{42}$$

$$P(\mathrm{X} = 200|\mathrm{Y} = 600) = \frac{P(X = 200 \cap Y = 600)}{P(Y = 600)} = \frac{12}{42}$$

$$P(\mathrm{X} = 400|\mathrm{Y} = 600) = \frac{P(X = 400 \cap Y = 600)}{P(Y = 600)} = \frac{24}{42}$$

$g_{x\|y}(x; y)$		Y		
		100	**300**	**600**
X	**100**	1/7	3/21	6/42
	200	2/7	6/21	12/42
	400	4/7	12/21	24/42

d. Encuentre el valor esperado del deducible de la póliza de automóvil, dado que el valor deducible de la póliza de hogar es igual a $100.

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}|\mathrm{Y} = 100) = \sum g_{(\mathrm{X}|\mathrm{Y}=100)} * \mathrm{X}$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}|\mathrm{Y} = 100) = \left(\frac{1}{7}\right) * 100 + \left(\frac{2}{7}\right) * 200 + \left(\frac{4}{7}\right) * 400 = 300$$

e. ¿Son las variables aleatorias X y Y independientes?

Para que sean independientes se debe cumplir la condición de:

$$g_{XY}(x, y) = g_X(x) * g_Y(y)$$

$$P(X = 100, Y = 100) = P(X = 100) * P(Y = 100)?$$

$$\rightarrow \frac{1}{70} = \left(\frac{10}{70}\right) * \left(\frac{7}{70}\right) \rightarrow \frac{1}{70} = \frac{1}{70} \text{ (Son independientes)}$$

$$P(X = 400, Y = 300) = P(X = 400) * P(Y = 300)?$$

$$\rightarrow \frac{12}{70} = \left(\frac{40}{70}\right) * \left(\frac{21}{70}\right) \rightarrow \frac{12}{70} = \frac{12}{70} \text{ (Son independientes)}$$

Se realiza para cada combinación y se demuestra que en cada caso se cumple la condición de independencia, por lo tanto X y Y son variables independientes.

f. Calcule el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria X.

En general, el valor esperado de una variable aleatoria discreta X está dado por:

$$E(X) = \sum_{R(X)} g_X(x_i) * x_i = 100 * \left(\frac{10}{70}\right) + 200 * \left(\frac{20}{70}\right) + 400 * \left(\frac{40}{70}\right) = 300$$

$$Var(X) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$E(X^2) = \sum_{R(X)} g_X(x_i) * x_i^2 = 100^2 * \left(\frac{10}{70}\right) + 200^2 * \left(\frac{20}{70}\right) + 400^2 * \left(\frac{40}{70}\right) = 104285.71$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 104285.71 - 300^2 = 14285.71$$

g. Calcule la covarianza de XY.

$$Cov(XY) = E(XY) - E(X) * E(Y)$$

$$E(Y) = \sum_{R(Y)} g_Y(y_i) * y_i = 100 * \left(\frac{7}{70}\right) + 300 * \left(\frac{21}{70}\right) + 600 * \left(\frac{42}{70}\right) = 460$$

$$E(XY) = E(X) * E(Y)$$

$$Cov(XY) = 460 * 300 - 460 * 300 = 0$$

Como X y Y son independientes, la covarianza es igual a cero.

h. La compañía de seguros decide que si un cliente invierte en ambas pólizas al tiempo, recibirá una bonificación al final del año, la cual es redimible en almacenes de cadena. La función que representa la bonificación está dada por:

$$Bonificación = 1.2X + 1.3Y$$

Encuentre el valor esperado de la bonificación.

$$E(Bonificación) = E(1.2\,\mathrm{X} + 1.3\mathrm{Y}) = 1.2\,\mathrm{E(X)} + 1.3\,\mathrm{E(Y)}$$

$$\mathrm{E(X)} = 100\left(\frac{10}{70}\right) + 200\left(\frac{20}{70}\right) + 400\left(\frac{40}{70}\right) = 300$$

$$\mathrm{E(Y)} = 100\left(\frac{7}{70}\right) + 300\left(\frac{21}{70}\right) + 600\left(\frac{42}{70}\right) = 460$$

$$\mathrm{E}(1.2\,\mathrm{X} + 1.3\mathrm{Y}) = 1.2\,(300) + 1.3\,(460) = 958$$

Punto 2

Un dado de seis caras se lanza 2 veces. La variable aleatoria X representa la suma de los valores obtenidos en ambos lanzamientos. La variable aleatoria Y representa el máximo valor obtenido en los 2 lanzamientos.

a. Defina el experimento aleatorio, el espacio muestral y el rango de las variables aleatorias X y Y.

- Experimento aleatorio: Lanzar un dado dos veces.
- Espacio muestral: son todos los posibles resultados del experimento:
  S={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}
- Rango de X: {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}
- Rango de Y: {1,2,3,4,5,6}

A continuación se muestra la tabla de la función de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X y Y:

		Y					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
X	**2**	1/36	0	0	0	0	0
	3	0	1/18	0	0	0	0
	4	0	1/36	1/18	0	0	0
	5	0	0	1/18	1/18	0	0
	6	0	0	1/36	1/18	1/18	0
	7	0	0	0	1/18	1/18	1/18
	8	0	0	0	1/36	1/18	1/18
	9	0	0	0	0	1/18	1/18
	10	0	0	0	0	1/36	1/18
	11	0	0	0	0	0	1/18
	12	0	0	0	0	0	1/36

A manera de ejemplo la tabla presenta los valores de las probabilidades cuando $X = 4$ y cuando $X = 8$. Para el primer caso se sabe que ambos dados sumarán 4 si ambos caen en el número 2 (lo cual ocurre con probabilidad de 1/36), ó si uno de los dos cae en el número 3, y el otro en el número 1 (lo cual ocurre con probabilidad de 2/36). Para el primer caso el máximo valor obtenido en ambos lanzamientos es 2, y en el segundo caso será el número 3, por lo que $P(X = 4, Y = 2) = 1/36$ y $P(X = 4, Y = 3) = 2/36$.

b. Encuentre las funciones marginales de X y Y.

$$g_X(x) = \begin{cases} 1/36 & x = 2 \\ 1/18 & x = 3 \\ 1/12 & x = 4 \\ 1/12 & x = 5, \\ 1/9 & x = 6 \\ 5/36 & x = 7 \\ 1/6 & x = 8 \\ 5/36 & x = 9 \\ 1/9 & x = 10 \\ 1/18 & x = 11 \\ 1/36 & x = 12 \\ 0 & \text{dlc} \end{cases}$$

$$g_Y(Y) = \begin{cases} 1/36 & x = 1 \\ 1/12 & x = 2 \\ 5/36 & x = 3 \\ 7/36 & x = 4 \\ 1/4 & x = 5 \\ 11/36 & x = 6 \\ 0 & dlc \end{cases}$$

		Y						$g_X(x)$
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
	2	1/36	0	0	0	0	0	**1/36**
	3	0	1/18	0	0	0	0	**1/18**
	4	0	1/36	1/18	0	0	0	**1/12**
	5	0	0	1/18	1/18	0	0	**1/9**
	6	0	0	1/36	1/18	1/18	0	**5/36**
X	**7**	0	0	0	1/18	1/18	1/18	**1/6**
	8	0	0	0	1/36	1/18	1/18	**5/36**
	9	0	0	0	0	1/18	1/18	**1/9**
	10	0	0	0	0	1/36	1/18	**1/12**
	11	0	0	0	0	0	1/18	**1/18**
	12	0	0	0	0	0	1/36	**1/36**
$g_Y(y)$		**1/36**	**1/12**	**5/36**	**7/36**	**1/4**	**11/36**	**1**

c. Encuentre la probabilidad de que los dos lanzamientos del dado sumen al menos 8.

$$\mathrm{P(X \geq 8) = g_X(8) + g_X(9) + g_X(10) + g_X(11) + g_X(12)}$$

$$\mathrm{P(X \geq 8)} = \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{15}{36}$$

d. Encuentre la probabilidad de que $\mathrm{X = Y + 1}$, es decir la probabilidad de que el número 1 caiga en alguno de los 2 lanzamientos.

$$\mathrm{P(X = Y + 1) = P(X = 2, Y = 1) + P(X = 3, Y = 2) + P(X = 4, Y = 3) + P(X = 5, Y = 4)}$$
$$\mathrm{+ P(X = 6, Y = 5) + P(X = 7, Y = 6)}$$

$$\mathrm{P(X = Y + 1)} = \frac{11}{36}$$

e. Encuentre la función de probabilidad de X, dado que Y es igual a 4.

$$\mathrm{g_{X|Y=4}(x; y = 4)}$$

Para el caso de X igual a 5, si se sabe que Y es igual a 4:

$$P(\mathrm{X = 5|Y = 4}) = \frac{P(X = 5 \cap Y = 4)}{P(Y = 4)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{7}{36}} = \frac{2}{7}$$

De igual manera se hace para los demás valores que X toma:

$$g_{X|Y=4}(x;4) = \begin{cases} 0 & x = 2 \\ 0 & x = 3 \\ 0 & x = 4 \\ 2/7 & x = 5, \\ 2/7 & x = 6 \\ 2/7 & x = 7 \\ 1/7 & x = 8 \\ 0 & x = 9 \\ 0 & x = 10 \\ 0 & x = 11 \\ 0 & x = 12 \\ 0 & \text{dlc} \end{cases}$$

f. Si se sabe que en los dos lanzamientos el mayor número obtenido es el 4, calcule la probabilidad de que la suma de ambos lanzamientos sea a lo sumo igual a 6.

Si el mayor número obtenido es 4, la suma de ambos lanzamientos podrá ser únicamente igual a 5, 6, 7, u 8, si el otro dado es 1, 2, 3, ó 4 respectivamente. Teniendo en cuenta lo anterior se tiene que:

$$P(X \leq 6\ |Y = 4) = \ P(X = 5\ |Y = 4) + P(X = 6\ |Y = 4)$$

$$= \frac{g_{XY}(5{,}4)}{g_Y(4)} + \frac{g_{XY}(6{,}4)}{g_Y(4)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{7}{36}} + \frac{\frac{2}{36}}{\frac{7}{36}} = \frac{4}{7}$$

g. ¿Son independientes las variables X y Y?

Para que sean independientes se debe cumplir la condición de:

$$g_{XY}(x,y) = g_X(x) * g_Y(y)$$

$$P(X = 6, Y = 4) = \ P(X = 6) * P(Y = 4)?$$

$$\rightarrow \frac{1}{18} = \left(\frac{5}{36}\right) * \left(\frac{7}{36}\right) \rightarrow \frac{1}{18} \neq \frac{1}{37}\ \text{(No son independientes)}$$

Se realiza para una combinación y se demuestra que no se cumple la condición de independencia, por lo tanto X y Y no son variables independientes.

h. Halle la correlación entre las variables X y Y, interprete el resultado.

$$\rho_{xy} = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{var(x) * var(y)}}$$

Por medio de la tabla en Excel se pueden calcular los valores correspondientes a:

$$E(X) = 7$$

$$E(Y) = 4.47$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$Var(X) = 54.83 - 49 = 5.83$$
$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$
$$Var(Y) = 21.97 - 20 = 1.97$$
$$Cov(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
$$Cov(XY) = 34.22 - 7 * 4.47 = 2.93$$

$$\rho_{xy} = \frac{2.93}{\sqrt{5.83 * 1.97}} = 0.86$$

Podemos concluir que existe una relación lineal positiva muy fuerte entre las variables X y Y.

i. Se quiere hacer una apuesta en la cual cada participante pagará una cantidad C en dólares, cuya función está dada por: C= (X+1) (Y-2). Calcule el valor esperado de la cantidad que se debe pagar para entrar en dicha apuesta.

$$\mathrm{E(\ C\ )} = E(XY - 2X + Y - 2) = E(XY) - 2E(X) + E(Y) - 2$$

$$E(XY) - 2E(X) + E(Y) - 2 =$$

$$= 34.22 - 2(7) + (4.47) - 2 = 22.62$$