Dualidad en programación lineal

Fernando Lozano

Universidad de los Andes

3 de septiembre de 2014

Ejemplo (Dasgupta et. al.)

$$\begin{array}{llcll}
\text{máx} & x_1 & + & 6x_2 & \\
 & x_1 & & & \leq 200 \\
 & & & x_2 & \leq 300 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq 400 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq 0
\end{array}$$

Ejemplo (Dasgupta et. al.)

$$
\begin{array}{lcccl}
\text{máx} & x_1 & + & 6x_2 & \\
 & x_1 & & & \leq 200 \\
 & & & x_2 & \leq 300 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq 400 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

- Considere el punto factible $(x_1, x_2) = (100, 300)$ con ganancia 1900.

Ejemplo (Dasgupta et. al.)

$$
\begin{array}{lcccl}
\text{máx} & x_1 & + & 6x_2 & \\
 & x_1 & & & \leq 200 \\
 & & & x_2 & \leq 300 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq 400 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

- Considere el punto factible $(x_1, x_2) = (100, 300)$ con ganancia 1900.
- Optimo?

$$
\begin{array}{lcccl}
\text{máx} & x_1 & + & 6x_2 & \\
 & x_1 & & & \leq 200 \\
 & & & x_2 & \leq 300 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq 400 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccr}
\text{máx} & x_1 & + & 6x_2 & \\
\color{red}{1\times} & \color{red}{(x_1} & & & \color{red}{\leq 200)} \\
\color{red}{+6\times} & \color{red}{(} & & \color{red}{x_2} & \color{red}{\leq 300)} \\
& x_1 & + & x_2 & \leq 400 \\
& x_1, & & x_2 & \geq 0 \\
\hline
& \color{red}{x_1} & \color{red}{+} & \color{red}{6x_2} & \color{red}{\leq 2000}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccr}
\text{máx} & x_1 & + & 6x_2 & \\
1\times & (x_1 & & & \leq 200) \\
+6\times & (& & x_2 & \leq 300) \\
& x_1 & + & x_2 & \leq 400 \\
& x_1, & & x_2 & \geq 0 \\
\hline
& x_1 & + & 6x_2 & \leq 2000
\end{array}
$$

- Ganancia ≤ 2000

$$
\begin{array}{rcccl}
\text{máx} & x_1 & + & 6x_2 & \\
0\times & (x_1 & & & \leq 200) \\
+5\times & (& & x_2 & \leq 300) \\
+1\times & x_1 & + & x_2 & \leq 400 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq 0 \\
\hline
 & x_1 & + & 6x_2 & \leq 1900
\end{array}
$$

- Ganancia ≤ 2000

$$
\begin{array}{rcccr}
\text{máx} & x_1 & + & 6x_2 & \\
0\times & (x_1 & & & \leq 200) \\
+5\times & (& & x_2 & \leq 300) \\
+1\times & x_1 & + & x_2 & \leq 400 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq 0 \\
\hline
 & x_1 & + & 6x_2 & \leq 1900
\end{array}
$$

- Ganancia ≤ 2000
- Ganancia ≤ 1900

$$
\begin{array}{rcccl}
\text{máx} & x_1 & + & 6x_2 & \\
0\times & (x_1 & & & \leq 200) \\
+5\times & (& & x_2 & \leq 300) \\
+1\times & x_1 & + & x_2 & \leq 400 \\
& x_1, & & x_2 & \geq 0 \\
\hline
& x_1 & + & 6x_2 & \leq 1900
\end{array}
$$

- Ganancia ≤ 2000
- Ganancia ≤ 1900
- Sabemos que para $(x_1, x_2) = (100, 300)$, la ganancia es 1900

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{máx} & x_1 & + & 6x_2 & \\
0\times & (x_1 & & & \leq 200) \\
+5\times & (& & x_2 & \leq 300) \\
+1\times & x_1 & + & x_2 & \leq 400 \\
& x_1, & & x_2 & \geq 0 \\
\hline
& x_1 & + & 6x_2 & \leq 1900
\end{array}
$$

- Ganancia ≤ 2000
- Ganancia ≤ 1900
- Sabemos que para $(x_1, x_2) = (100, 300)$, la ganancia es 1900 $\Rightarrow$ óptimo

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{máx} & x_1 & + & 6x_2 & \\
0\times & (x_1 & & & \leq 200) \\
+5\times & (& & x_2 & \leq 300) \\
+1\times & x_1 & + & x_2 & \leq 400 \\
& x_1, & & x_2 & \geq 0 \\
\hline
& x_1 & + & 6x_2 & \leq 1900
\end{array}
$$

- Ganancia ≤ 2000
- Ganancia ≤ 1900
- Sabemos que para $(x_1, x_2) = (100, 300)$, la ganancia es 1900 $\Rightarrow$ óptimo
- De dónde salen los multiplicadores $(0, 5, 1)$?

- Multiplicadores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

- Multiplicadores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$
\begin{array}{rcccr}
\text{máx} & x_1 & + & 6x_2 & \\
\lambda_1 \times & (x_1 & & & \leq 200) \\
+\lambda_2 \times & (& & x_2 & \leq 300) \\
+\lambda_3 \times & (x_1 & + & x_2 & \leq 400) \\
 & x_1, & & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

- Multiplicadores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$
\begin{array}{lcccc}
\text{máx} & x_1 & + & 6x_2 & \\
\lambda_1 \times & (x_1 & & & \leq 200) \\
+\lambda_2 \times & (& & x_2 & \leq 300) \\
+\lambda_3 \times & (x_1 & + & x_2 & \leq 400) \\
 & x_1, & & x_2 & \geq 0 \\
\hline
(\lambda_1 + \lambda_3)x_1 & + & (\lambda_2 + \lambda_3)x_2 & \leq 200\lambda_1 + 300\lambda_2 + 400\lambda_3 &
\end{array}
$$

- Multiplicadores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$
\begin{array}{rccccl}
\text{máx} & x_1 & + & 6x_2 & & \\
\lambda_1 \times & (x_1 & & & \leq 200) \\
+\lambda_2 \times & (& & x_2 & \leq 300) \\
+\lambda_3 \times & (x_1 & + & x_2 & \leq 400) \\
 & x_1, & & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

$$
\overline{\quad (\lambda_1 + \lambda_3)x_1 \quad + \quad (\lambda_2 + \lambda_3)x_2 \quad \leq 200\lambda_1 + 300\lambda_2 + 400\lambda_3}
$$

- Qué condiciones deben cumplir $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$?

- Multiplicadores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\begin{array}{rcccl}
\text{máx} & x_1 & + & 6x_2 & \\
\lambda_1 \times & (x_1 & & & \leq 200) \\
+\lambda_2 \times & (& & x_2 & \leq 300) \\
+\lambda_3 \times & (x_1 & + & x_2 & \leq 400) \\
& x_1, & & x_2 & \geq 0
\end{array}$$

$$\overline{(\lambda_1 + \lambda_3)x_1 \quad + \quad (\lambda_2 + \lambda_3)x_2 \quad \leq 200\lambda_1 + 300\lambda_2 + 400\lambda_3}$$

- Qué condiciones deben cumplir $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$?

$$\left.\begin{array}{c}
\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \\
\lambda_1 + \lambda_3 \geq 1 \\
\lambda_2 + \lambda_3 \geq 6
\end{array}\right\}$$

- Multiplicadores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$
\begin{array}{lcccr}
\text{máx} & x_1 & + & 6x_2 & \\
\lambda_1 \times & (x_1 & & & \leq 200) \\
+\lambda_2 \times & (& & x_2 & \leq 300) \\
+\lambda_3 \times & (x_1 & + & x_2 & \leq 400) \\
& x_1, & & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

$$
\overline{\quad (\lambda_1 + \lambda_3)x_1 \quad + \quad (\lambda_2 + \lambda_3)x_2 \quad \leq 200\lambda_1 + 300\lambda_2 + 400\lambda_3 \quad}
$$

- Qué condiciones deben cumplir $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$?

$$
\left.\begin{array}{c}
\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \\
\lambda_1 + \lambda_3 \geq 1 \\
\lambda_2 + \lambda_3 \geq 6
\end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + 6x_2 \leq 200\lambda_1 + 300\lambda_2 + 400\lambda_3
$$

- Multiplicadores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$
\begin{array}{rccccl}
\text{máx} & x_1 & + & 6x_2 & & \\
\lambda_1 \times & (x_1 & & & \leq 200) \\
+\lambda_2 \times & (& & x_2 & \leq 300) \\
+\lambda_3 \times & (x_1 & + & x_2 & \leq 400) \\
 & x_1, & & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3)x_1 \quad + \quad (\lambda_2 + \lambda_3)x_2 \quad \leq 200\lambda_1 + 300\lambda_2 + 400\lambda_3$$

- Qué condiciones deben cumplir $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$?

$$
\left.\begin{array}{c}
\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \\
\lambda_1 + \lambda_3 \geq 1 \\
\lambda_2 + \lambda_3 \geq 6
\end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + 6x_2 \leq 200\lambda_1 + 300\lambda_2 + 400\lambda_3
$$

- Cuáles son los mejores valores de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$?

- Debemos escoger $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ que nos den la menor cota superior.

- Debemos escoger $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ que nos den la menor cota superior.
- Programa lineal!

- Debemos escoger $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ que nos den la menor cota superior.
- Programa lineal!

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & 200\lambda_1 + 300\lambda_2 + 400\lambda_3 \\
\text{sujeto a} \quad & \lambda_1 + \lambda_3 \geq 1 \\
& \lambda_2 + \lambda_3 \geq 6 \\
& \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Debemos escoger $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ que nos den la menor cota superior.
- Programa lineal!

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & 200\lambda_1 + 300\lambda_2 + 400\lambda_3 \\
\text{sujeto a} \quad & \lambda_1 + \lambda_3 \geq 1 \\
& \lambda_2 + \lambda_3 \geq 6 \\
& \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Este es el programa dual.

- Debemos escoger $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ que nos den la menor cota superior.
- Programa lineal!

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & 200\lambda_1 + 300\lambda_2 + 400\lambda_3 \\
\text{sujeto a} \quad & \lambda_1 + \lambda_3 \geq 1 \\
& \lambda_2 + \lambda_3 \geq 6 \\
& \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Este es el programa dual.
- Si encontramos valores de (x_1, x_2) y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ que sean factibles y para los que

$$x_1 + 6x_2 = 200\lambda_1 + 300\lambda_2 + 400\lambda_3$$

- Debemos escoger $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ que nos den la menor cota superior.
- Programa lineal!

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 200\lambda_1 + 300\lambda_2 + 400\lambda_3 \\ \text{sujeto a} \quad & \lambda_1 + \lambda_3 \geq 1 \\ & \lambda_2 + \lambda_3 \geq 6 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Este es el programa dual.
- Si encontramos valores de (x_1, x_2) y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ que sean factibles y para los que

$$x_1 + 6x_2 = 200\lambda_1 + 300\lambda_2 + 400\lambda_3$$

estos valores son óptimos para el primal y para el dual respectivamente.

Primal y Dual en Forma Canónica

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Primal y Dual en Forma Canónica

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{sujeto a} \quad & \\
& \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}
\qquad\qquad\qquad \max
$$

Primal y Dual en Forma Canónica

$$\min \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

sujeto a

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

$$\max \quad \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b}$$

Primal y Dual en Forma Canónica

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} \\ \text{sujeto a} \quad & \end{aligned}$$

Primal y Dual en Forma Canónica

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{sujeto a} \quad & \\
& \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} \\
\text{sujeto a} \quad & \\
& \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T
\end{aligned}
$$

Primal y Dual en Forma Canónica

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{b} \\ \text{sujeto a} \quad & \\ & \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo: Problema de la dieta

- Encontrar la dieta más económica que satisfaga ciertos requerimientos nutricionales.

  n :comidas.
  m :nutrientes.
  c_i :costo unitario de comida i.
  b_j :requerimiento diario de nutriente j.
  a_{ij}:unidades de nutriente j en comida i.
  x_i :unidades de comida i en la dieta.

- Problema de optimización:

$$\min_{x_1, x_2, \ldots, x_n} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\text{sujeto a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq b_j \quad j = 1, \ldots, m$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n.$$

- Problema de optimización:

$$\min_{x_1, x_2, \ldots, x_n} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\text{sujeto a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq b_j \quad j = 1, \ldots, m$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n.$$

- Podemos escribirlo como:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\text{sujeto a}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

Problema Dual

Problema Dual

- Compañia farmacéutica quiere vender píldoras nutrientes.

Problema Dual

- Compañia farmacéutica quiere vender píldoras nutrientes.
- Precio de píldora de nutriente i es λ_i

Problema Dual

- Compañia farmacéutica quiere vender píldoras nutrientes.
- Precio de píldora de nutriente i es λ_i ($\lambda_i \geq 0$).

Problema Dual

- Compañia farmacéutica quiere vender píldoras nutrientes.
- Precio de píldora de nutriente i es λ_i ($\lambda_i \geq 0$).
- Restricción:

Problema Dual

- Compañia farmacéutica quiere vender píldoras nutrientes.
- Precio de píldora de nutriente i es λ_i ($\lambda_i \geq 0$).
- Restricción: Comida artificial no debe costar más que el precio de la natural (en Carulla):

Problema Dual

- Compañia farmacéutica quiere vender píldoras nutrientes.
- Precio de píldora de nutriente i es λ_i ($\lambda_i \geq 0$).
- Restricción: Comida artificial no debe costar más que el precio de la natural (en Carulla):

$$\lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2} + \cdots + \lambda_m a_{im} \leq c_i \qquad 1 \leq i \leq n$$

Problema Dual

- Compañia farmacéutica quiere vender píldoras nutrientes.
- Precio de píldora de nutriente i es λ_i ($\lambda_i \geq 0$).
- Restricción: Comida artificial no debe costar más que el precio de la natural (en Carulla):

$$\lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2} + \cdots + \lambda_m a_{im} \leq c_i \qquad 1 \leq i \leq n$$

- Compañia quiere maximizar su ganancia, siendo competitiva con precios de comida natural.

- Problema de optimización:

$$\max_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m} \quad \sum_{j=1}^{m} b_j\lambda_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\lambda_j \leq c_i \quad i = 1,\ldots,n$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots,m.$$

- Problema de optimización:

$$\max_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m} \quad \sum_{j=1}^{m} b_j\lambda_j$$

$$\text{sujeto a}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\lambda_j \leq c_i \quad i = 1,\ldots,n$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots,m.$$

- Podemos escribirlo como:

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} \quad \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b}$$

$$\text{sujeto a}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$$

$$\boldsymbol{\lambda} \geq 0$$

Dual del Dual?

- Dual:

- Dual del dual

Dual del Dual?

- Dual:

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\lambda}} \quad & \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{b} \\ \text{sujeto a} \quad & \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{aligned}$$

- Dual del dual

Dual del Dual?

- Dual:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\lambda}} \quad & (-\mathbf{b})^T \boldsymbol{\lambda} \\ \text{sujeto a} \quad & \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{aligned}$$

- Dual del dual

Dual del Dual?

- Dual:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\lambda}} \quad & (-\mathbf{b})^T\boldsymbol{\lambda} \\ \text{sujeto a} \quad & (-\mathbf{A})^T\boldsymbol{\lambda} \geq -\mathbf{c} \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{aligned}$$

- Dual del dual

Dual del Dual?

- Dual:

$$\begin{array}{rl} \underset{\boldsymbol{\lambda}}{\text{mín}} & (-\mathbf{b})^T\boldsymbol{\lambda} \\ \text{sujeto a} & (-\mathbf{A})^T\boldsymbol{\lambda} \geq -\mathbf{c} \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{array}$$

- Dual del dual

Dual del Dual?

- Dual:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\lambda}} \quad & (-\mathbf{b})^T \boldsymbol{\lambda} \\ \text{sujeto a} \quad & (-\mathbf{A})^T \boldsymbol{\lambda} \geq -\mathbf{c} \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{aligned}$$

- Dual del dual

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{x}^T (-\mathbf{c}) \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{x}^T (-\mathbf{A})^T \leq -\mathbf{b}^T \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Dual del Dual?

- Dual:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\lambda}} \quad & (-\mathbf{b})^T \boldsymbol{\lambda} \\ \text{sujeto a} \quad & (-\mathbf{A})^T \boldsymbol{\lambda} \geq -\mathbf{c} \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{aligned}$$

- Dual del dual

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Dual del Dual?

- Dual:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\lambda}} \quad & (-\mathbf{b})^T \boldsymbol{\lambda} \\ \text{sujeto a} \quad & (-\mathbf{A})^T \boldsymbol{\lambda} \geq -\mathbf{c} \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{aligned}$$

- Dual del dual es el Primal!

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Problema dual y forma estándar de PL

- Forma estándar:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

- Dual:

Problema dual y forma estándar de PL

- Forma estándar:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & -\mathbf{A}\mathbf{x} \geq -\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- Dual:

Problema dual y forma estándar de PL

- Forma estándar:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{sujeto a} \quad & \left[\begin{array}{c}\mathbf{A} \\ \hline -\mathbf{A}\end{array}\right]\mathbf{x} \geq \left[\begin{array}{c}\mathbf{b} \\ \hline -\mathbf{b}\end{array}\right] \\
& \mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

- Dual:

Problema dual y forma estándar de PL

- Forma estándar:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \left[\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \hline -\mathbf{A} \end{array}\right] \mathbf{x} \geq \left[\begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \hline -\mathbf{b} \end{array}\right] \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- Dual:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \quad & \mathbf{u}^T \mathbf{b} - \mathbf{v}^T \mathbf{b} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{u}^T \mathbf{A} - \mathbf{v}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \\ & \mathbf{u}, \mathbf{v} \geq 0 \end{aligned}$$

Problema dual y forma estándar de PL

- Forma estándar:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \left[\frac{\mathbf{A}}{-\mathbf{A}}\right]\mathbf{x} \geq \left[\frac{\mathbf{b}}{-\mathbf{b}}\right] \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- Dual:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \quad & \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} \\ \text{sujeto a} \quad & \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \end{aligned}$$

$(\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{u} - \mathbf{v})$

Problema dual y forma estándar de PL

- Forma estándar:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- Dual:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \quad & \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} \\ \text{sujeto a} \quad & \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \end{aligned}$$

$(\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{u} - \mathbf{v})$ Variables libres en el dual!

Desigualdades Invertidas

- Primal:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- Dual:

Desigualdades Invertidas

- Primal:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & -\mathbf{A}\mathbf{x} \geq -\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- Dual:

Desigualdades Invertidas

- Primal:

$$
\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{sujeto a} \quad & -\mathbf{A}\mathbf{x} \geq -\mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

- Dual:

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\lambda}} \quad & \boldsymbol{\lambda}^T(-\mathbf{b}) \\
\text{sujeto a} \quad & \boldsymbol{\lambda}^T(-\mathbf{A}) \leq \mathbf{c}^T \\
& \boldsymbol{\lambda} \geq 0
\end{aligned}
$$

Desigualdades Invertidas

- Primal:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & -\mathbf{A}\mathbf{x} \geq -\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- Dual:

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\lambda}} \quad & (-\boldsymbol{\lambda}^T)\mathbf{b} \\ \text{sujeto a} \quad & (-\boldsymbol{\lambda}^T)\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{aligned}$$

Desigualdades Invertidas

- Primal:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- Dual: $(\mathbf{z} = -\boldsymbol{\lambda})$

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{z}} \quad & \mathbf{z}^T \mathbf{b} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{z}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \\ & \mathbf{z} \leq 0 \end{aligned}$$

Reglas de conversión entre Primal y Dual

	$\text{mín} \leftrightarrow \text{máx}$	
Variable	$\geq 0 \leftrightarrow \leq$ $\leq 0 \leftrightarrow \geq$ $\text{Libre} \leftrightarrow =$	Restricción
Restricción	$\geq \leftrightarrow \geq 0$ $\leq \leftrightarrow \leq 0$ $= \leftrightarrow \text{Libre}$	Variable

Ejemplo

- Primal:

$$\begin{array}{lllll}
\text{máx} & 8x_1 & +3x_2 & -2x_3 & \\
\text{sujeto a} & x_1 & -6x_2 & +x_3 & \geq 2 \\
 & 5x_1 & +7x_2 & -2x_3 & = -4 \\
 & x_1 \leq 0, \quad x_2 \geq 0 & & &
\end{array}$$

Ejemplo

- Primal:

$$\begin{array}{llllll} \text{máx} & 8x_1 & +3x_2 & -2x_3 & \\ \text{sujeto a} & x_1 & -6x_2 & +x_3 & \geq 2 \\ & 5x_1 & +7x_2 & -2x_3 & = -4 \end{array}$$

$$x_1 \leq 0, \quad x_2 \geq 0$$

- Dual:

$$\begin{array}{lllll} \text{mín} & 2\lambda_1 & -4\lambda_2 & \\ \text{sujeto a} & \lambda_1 & +5\lambda_2 & \leq 8 \\ & -6\lambda_1 & +7\lambda_2 & \geq 3 \\ & \lambda_1 & -2\lambda_2 & = -2 \end{array}$$

$$\lambda_1 \leq 0$$

Teorema de Dualidad de PL

Teorema de Dualidad de PL

Teorema

Si ya sea el primal o el dual tienen una solución óptima, también la tiene el otro, y sus valores son iguales. Si uno de los problemas es no acotado el otro no tiene soluciones factibles.

Teorema de Dualidad de PL

Teorema

Si ya sea el primal o el dual tienen una solución óptima, también la tiene el otro, y sus valores son iguales. Si uno de los problemas es no acotado el otro no tiene soluciones factibles.

- Si los dos problemas tienen vectores factibles, entonces tienen vectores óptimos.

Teorema de Dualidad de PL

Teorema

Si ya sea el primal o el dual tienen una solución óptima, también la tiene el otro, y sus valores son iguales. Si uno de los problemas es no acotado el otro no tiene soluciones factibles.

- Si los dos problemas tienen vectores factibles, entonces tienen vectores óptimos.
- Sea $\mathbf{x}^*$ el vector óptimo del primal y $\boldsymbol{\lambda}^*$ el vector óptimo del dual, entonces $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\boldsymbol{\lambda}^*$.

Teorema de Dualidad de PL

Teorema

Si ya sea el primal o el dual tienen una solución óptima, también la tiene el otro, y sus valores son iguales. Si uno de los problemas es no acotado el otro no tiene soluciones factibles.

- Si los dos problemas tienen vectores factibles, entonces tienen vectores óptimos.
- Sea $\mathbf{x}^*$ el vector óptimo del primal y $\boldsymbol{\lambda}^*$ el vector óptimo del dual, entonces $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\boldsymbol{\lambda}^*$.
- Noción de equilibrio.

Dualidad Débil

Lema

Si $\mathbf{x}$ *es factible para el primal y* $\boldsymbol{\lambda}$ *es factible para el dual entonces*

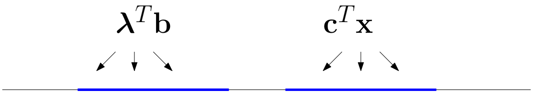
$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b}$$

Dualidad Débil

Lema

Si $\mathbf{x}$ *es factible para el primal y* $\boldsymbol{\lambda}$ *es factible para el dual entonces*

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b}$$

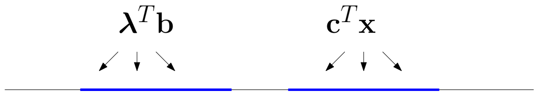


Dualidad Débil

Lema

Si $\mathbf{x}$ *es factible para el primal y* $\boldsymbol{\lambda}$ *es factible para el dual entonces*

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b}$$



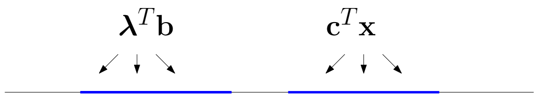
Demostración.

Dualidad Débil

Lema

Si $\mathbf{x}$ *es factible para el primal y* $\boldsymbol{\lambda}$ *es factible para el dual entonces*

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b}$$



Demostración.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \quad \mathbf{b} \qquad \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A} \quad \leq \mathbf{c}^T$$

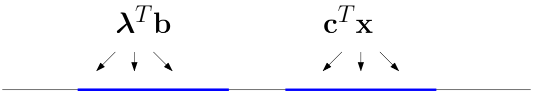
□

Dualidad Débil

Lema

Si $\mathbf{x}$ *es factible para el primal y* $\boldsymbol{\lambda}$ *es factible para el dual entonces*

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b}$$



Demostración.

$$\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} \qquad \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$\square$

Consecuencias de Dualidad Débil

Consecuencias de Dualidad Débil

- Si el dual es no acotado el primal

Consecuencias de Dualidad Débil

- Si el dual es no acotado el primal no tiene soluciones factibles.

Consecuencias de Dualidad Débil

- Si el dual es no acotado el primal no tiene soluciones factibles.
- Si el primal es no acotado el dual

Consecuencias de Dualidad Débil

- Si el dual es no acotado el primal no tiene soluciones factibles.
- Si el primal es no acotado el dual no tiene soluciones factibles.

Consecuencias de Dualidad Débil

- Si el dual es no acotado el primal no tiene soluciones factibles.
- Si el primal es no acotado el dual no tiene soluciones factibles.
- Los dos problemas no pueden ser no acotados.

Consecuencias de Dualidad Débil

- Si el dual es no acotado el primal no tiene soluciones factibles.
- Si el primal es no acotado el dual no tiene soluciones factibles.
- Los dos problemas no pueden ser no acotados.
- Si los vectores $\mathbf{x}$ y $\boldsymbol{\lambda}$ son factibles, y $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b}$, entonces

Consecuencias de Dualidad Débil

- Si el dual es no acotado el primal no tiene soluciones factibles.
- Si el primal es no acotado el dual no tiene soluciones factibles.
- Los dos problemas no pueden ser no acotados.
- Si los vectores $\mathbf{x}$ y $\boldsymbol{\lambda}$ son factibles, y $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b}$, entonces $\mathbf{x}$ y $\boldsymbol{\lambda}$ son óptimos.

Ejemplo (Strang)

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2x_1 + x_2 &\geq 6 \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 7 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 6\lambda_1 + 7\lambda_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 &\leq 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 &\leq 4 \\ \lambda_1 &\geq 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Solución: $x_1 = 3,\ x_2 = 0$ y $\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = 0$.

Ejemplo (Strang)

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2x_1 + x_2 &\geq 6 \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 7 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 6\lambda_1 + 7\lambda_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 &\leq 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 &\leq 4 \\ \lambda_1 &\geq 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Solución: $x_1 = 3,\ x_2 = 0$ y $\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = 0$.

Ejemplo (Strang)

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2x_1 + x_2 &= 6 \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 7 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 6\lambda_1 + 7\lambda_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 &\leq 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 &\leq 4 \\ \lambda_1 &> 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Solución: $x_1 = 3,\ x_2 = 0$ y $\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = 0$.

Ejemplo (Strang)

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2x_1 + x_2 &= 6 \\ {\color{red}5x_1 + 3x_2} & {\color{red}> 7} \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 6\lambda_1 + 7\lambda_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 &\leq 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 &\leq 4 \\ \lambda_1 &> 0 \\ {\color{red}\lambda_2} & {\color{red}= 0} \end{aligned}$$

- Solución: $x_1 = 3,\ x_2 = 0$ y $\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = 0$.

Ejemplo (Strang)

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & x_1 + 4x_2 \\
\text{sujeto a} & \\
2x_1 + x_2 &= 6 \\
5x_1 + 3x_2 &> 7 \\
x_1 &> 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & 6\lambda_1 + 7\lambda_2 \\
\text{sujeto a} & \\
2\lambda_1 + 5\lambda_2 &= 1 \\
\lambda_1 + 3\lambda_2 &\leq 4 \\
\lambda_1 &> 0 \\
\lambda_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

- Solución: $x_1 = 3,\ x_2 = 0$ y $\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = 0$.

Ejemplo (Strang)

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2x_1 + x_2 &= 6 \\ 5x_1 + 3x_2 &> 7 \\ x_1 &> 0 \\ \color{red}{x_2} &\color{red}{= 0} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \text{máx} \quad & 6\lambda_1 + 7\lambda_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 &= 1 \\ \color{red}{\lambda_1 + 3\lambda_2} &\color{red}{< 4} \\ \lambda_1 &> 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Solución: $x_1 = 3,\ x_2 = 0$ y $\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = 0$.

Ejemplo (Strang)

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2x_1 + x_2 &\geq 6 \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 7 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max \quad & 6\lambda_1 + 7\lambda_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 &\leq 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 &\leq 4 \\ \lambda_1 &\geq 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Solución: $x_1 = 3,\ x_2 = 0$ y $\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = 0$.
- Interpretación Económica: La dieta y los precios de vitaminas son óptimos si:

Ejemplo (Strang)

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2x_1 + x_2 &\geq 6 \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 7 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{máx} \quad & 6\lambda_1 + 7\lambda_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 &\leq 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 &\leq 4 \\ \lambda_1 &\geq 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Solución: $x_1 = 3,\ x_2 = 0$ y $\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = 0$.
- Interpretación Económica: La dieta y los precios de vitaminas son óptimos si:
    1. Carulla vende 0 de cualquier comida que vale más que su equivalente en píldoras.

Ejemplo (Strang)

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2x_1 + x_2 &\geq 6 \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 7 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 6\lambda_1 + 7\lambda_2 \\ \text{sujeto a} & \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 &\leq 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 &\leq 4 \\ \lambda_1 &\geq 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Solución: $x_1 = 3,\ x_2 = 0$ y $\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = 0$.
- Interpretación Económica: La dieta y los precios de vitaminas son óptimos si:
  1. Carulla vende 0 de cualquier comida que vale más que su equivalente en píldoras.
  2. La farmacéutica cobra 0 por una vitamina que está sobre suplementada en la dieta.

Condiciones de holgura (slackness) complementaria

Condiciones de holgura (slackness) complementaria

Teorema

(Teorema de Equilibrio) Suponga que dos vectores factibles $\mathbf{x}$ *y* $\boldsymbol{\lambda}$ *satisfacen las condiciones de holgura complementaria:*

$$\begin{aligned} si \quad (\mathbf{A}\mathbf{x})_i > b_i \Rightarrow \lambda_i = 0 \\ si \quad (\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A})_j < c_j \Rightarrow x_j = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Entonces $\mathbf{x}$ *y* $\boldsymbol{\lambda}$ *son óptimos. Vectores óptimos deben satisfacer (1).*

Condiciones de holgura (slackness) complementaria

Teorema

(Teorema de Equilibrio) Suponga que dos vectores factibles $\mathbf{x}$ *y* $\boldsymbol{\lambda}$ *satisfacen las condiciones de holgura complementaria:*

$$\begin{aligned} si \quad (\mathbf{Ax})_i > b_i \Rightarrow \lambda_i = 0 \\ si \quad (\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A})_j < c_j \Rightarrow x_j = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Entonces $\mathbf{x}$ *y* $\boldsymbol{\lambda}$ *son óptimos. Vectores óptimos deben satisfacer (1).*

Demostración.

□

Condiciones de holgura (slackness) complementaria

Teorema

(Teorema de Equilibrio) Suponga que dos vectores factibles $\mathbf{x}$ *y* $\boldsymbol{\lambda}$ *satisfacen las condiciones de holgura complementaria:*

$$\begin{aligned} si \quad (\mathbf{A}\mathbf{x})_i > b_i \Rightarrow \lambda_i = 0 \\ si \quad (\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A})_j < c_j \Rightarrow x_j = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Entonces $\mathbf{x}$ *y* $\boldsymbol{\lambda}$ *son óptimos. Vectores óptimos deben satisfacer (1).*

Demostración.

$$\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A})\mathbf{x}$$

□

Condiciones de holgura (slackness) complementaria

Teorema

(Teorema de Equilibrio) Suponga que dos vectores factibles $\mathbf{x}$ *y* $\boldsymbol{\lambda}$ *satisfacen las condiciones de holgura complementaria:*

$$\begin{aligned} si \quad (\mathbf{Ax})_i > b_i \Rightarrow \lambda_i = 0 \\ si \quad (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A})_j < c_j \Rightarrow x_j = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Entonces $\mathbf{x}$ *y* $\boldsymbol{\lambda}$ *son óptimos. Vectores óptimos deben satisfacer (1).*

Demostración.

$$\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{b} \leq \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{Ax}) = (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A})\mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

□

Condiciones de holgura (slackness) complementaria

Teorema

(Teorema de Equilibrio) Suponga que dos vectores factibles $\mathbf{x}$ *y* $\boldsymbol{\lambda}$ *satisfacen las condiciones de holgura complementaria:*

$$\begin{aligned} si \quad (\mathbf{Ax})_i > b_i \Rightarrow \lambda_i = 0 \\ si \quad (\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A})_j < c_j \Rightarrow x_j = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Entonces $\mathbf{x}$ *y* $\boldsymbol{\lambda}$ *son óptimos. Vectores óptimos deben satisfacer (1).*

Demostración.

$$\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} \overset{?}{=} \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{Ax}) = (\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A})\mathbf{x} \overset{?}{=} \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

□

Condiciones de holgura (slackness) complementaria

Teorema

(Teorema de Equilibrio) Suponga que dos vectores factibles $\mathbf{x}$ *y* $\boldsymbol{\lambda}$ *satisfacen las condiciones de holgura complementaria:*

$$\begin{aligned} si \quad (\mathbf{A}\mathbf{x})_i > b_i \Rightarrow \lambda_i = 0 \\ si \quad (\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A})_j < c_j \Rightarrow x_j = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Entonces $\mathbf{x}$ *y* $\boldsymbol{\lambda}$ *son óptimos. Vectores óptimos deben satisfacer (1).*

Demostración.

$$\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} \overset{(\mathbf{A}\mathbf{x})_i > b_i \Rightarrow \lambda_i = 0}{\overset{\uparrow}{=}} \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A})\mathbf{x} \overset{(\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A})_j < c_j \Rightarrow x_j = 0}{\overset{\uparrow}{=}} \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

□

Demostración del Teorema de Dualidad de PL

- Dualidad débil: $\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Falta probar que es posible $\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$.

Demostración del Teorema de Dualidad de PL

- Dualidad débil: $\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Falta probar que es posible $\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$.
- Suponga que hallamos $\mathbf{x}^*$ usando el método Simplex.

Demostración del Teorema de Dualidad de PL

- Dualidad débil: $\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Falta probar que es posible $\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$.
- Suponga que hallamos $\mathbf{x}^*$ usando el método Simplex.
- Forma estándar ($\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$):

$$[\mathbf{A}| -\mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \geq 0$$

Demostración del Teorema de Dualidad de PL

- Dualidad débil: $\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} \le \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Falta probar que es posible $\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$.
- Suponga que hallamos $\mathbf{x}^*$ usando el método Simplex.
- Forma estándar $(\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})$:

$$[\mathbf{A}| - \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \ge 0$$

- Tableau:

Demostración del Teorema de Dualidad de PL

- Dualidad débil: $\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Falta probar que es posible $\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$.
- Suponga que hallamos $\mathbf{x}^*$ usando el método Simplex.
- Forma estándar ($\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$):

$$[\mathbf{A}| - \mathbf{I}]\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \geq 0$$

- Tableau:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{N} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array}\right]$$

Demostración del Teorema de Dualidad de PL

- Dualidad débil: $\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Falta probar que es posible $\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$.
- Suponga que hallamos $\mathbf{x}^*$ usando el método Simplex.
- Forma estándar ($\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$):

$$[\mathbf{A}| - \mathbf{I}]\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \geq 0$$

- Tableau:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array}\right]$$

Demostración del Teorema de Dualidad de PL

- Dualidad débil: $\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}$. Falta probar que es posible $\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$.
- Suponga que hallamos $\mathbf{x}^*$ usando el método Simplex.
- Forma estándar $(\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})$:

$$[\mathbf{A}| - \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \geq 0$$

- Tableau:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array}\right]$$

Demostración del Teorema de Dualidad de PL

- Dualidad débil: $\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Falta probar que es posible $\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$.
- Suponga que hallamos $\mathbf{x}^*$ usando el método Simplex.
- Forma estándar $(\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})$:

$$[\mathbf{A}| - \mathbf{I}]\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \geq 0$$

- Tableau:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & -\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array}\right]$$

- En este punto sabemos que $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \geq 0$ y el costo es $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Demostración del Teorema de Dualidad de PL

- Dualidad débil: $\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Falta probar que es posible $\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$.
- Suponga que hallamos $\mathbf{x}^*$ usando el método Simplex.
- Forma estándar $(\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})$:

$$[\mathbf{A}| - \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \geq 0$$

- Tableau:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & -\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array}\right]$$

- En este punto sabemos que $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \geq 0$ y el costo es $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

- Basta mostrar que $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ es factible en el dual.

- Basta mostrar que $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ es factible en el dual.

$$\boldsymbol{\lambda}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

.

- Basta mostrar que $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ es factible en el dual.

$$\boldsymbol{\lambda}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{\lambda}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T \end{bmatrix}$$

.

- Basta mostrar que $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ es factible en el dual.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}^T \begin{bmatrix}\mathbf{A} & -\mathbf{I}\end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix}\mathbf{c}^T & \mathbf{0}\end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\lambda}^T \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{N}\end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix}\mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T\end{bmatrix} \\
\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{N}\end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix}\mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

.

- Basta mostrar que $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ es factible en el dual.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\lambda}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{N} \end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T \end{bmatrix} \\
\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{N} \end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

.

- Basta mostrar que $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ es factible en el dual.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\lambda}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{N} \end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T \end{bmatrix} \\
\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{N} \end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- $\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \leq \mathbf{c}_N^T$ es lo mismo que $\mathbf{r} \geq 0$.

- Basta mostrar que $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ es factible en el dual.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}^T \begin{bmatrix}\mathbf{A} & -\mathbf{I}\end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix}\mathbf{c}^T & \mathbf{0}\end{bmatrix}\\
\boldsymbol{\lambda}^T \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{N}\end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix}\mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T\end{bmatrix}\\
\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{N}\end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix}\mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix}\mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \leq \mathbf{c}_N^T$ es lo mismo que $\mathbf{r} \geq 0$.
- Luego $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ es factible.

Ejemplo

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
\text{máx} & 10x_1 & +24x_2 & +20x_3 & +20x_4 & +25x_5 & \\
\text{sujeto a} & x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +5x_5 & \leq 19 \\
& 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +x_5 & \leq 57 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

(a) Escriba el problema dual y verifique que $(\lambda_1,\ \lambda_2) = (4, 5)$ es una solución factible.

(b) **Usando información en la parte (a)** encuentre soluciones óptimas para el primal y el dual.

$$
\left.\begin{array}{lccl}
\text{mín} & 19\lambda_1 & +57\lambda_2 & \\
\text{sujeto a} & \lambda_1 & +2\lambda_2 & \geq 10 \\
 & \lambda_1 & +4\lambda_2 & \geq 24 \\
 & 2\lambda_1 & +3\lambda_2 & \geq 20 \\
 & 3\lambda_1 & +2\lambda_2 & \geq 20 \\
 & 5\lambda_1 & +\lambda_2 & \geq 25 \\
 & \lambda_1, & \lambda_2 & \geq 0
\end{array}\right\} \xrightarrow{(\lambda_1,\lambda_2)=(4,5)} \begin{array}{ll}
14 & > 10 \\
24 & = 24 \\
23 & > 20 \\
22 & > 20 \\
25 & = 25
\end{array}
$$

- Note que para $(\lambda_1,\ \lambda_2) = (4,5)$ únicamente la segunda y quinta restricciones son activas. Si suponemos que estamos en una solución óptima, esto implicaría $x_1 = x_3 = x_4 = 0$. Es esto posible? Chequeando, dicha solución debe cumplir:

$$\begin{array}{ccc} 24x_2 & +25x_5 & = 361 \\ x_2 & +5x_5 & = 19 \\ 4x_2 & +x_5 & = 57 \end{array}$$

- Note que para $(\lambda_1,\ \lambda_2) = (4, 5)$ únicamente la segunda y quinta restricciones son activas. Si suponemos que estamos en una solución óptima, esto implicaría $x_1 = x_3 = x_4 = 0$. Es esto posible? Chequeando, dicha solución debe cumplir:

$$\begin{array}{ccc} 24x_2 & +25x_5 & = 361 \\ x_2 & +5x_5 & = 19 \\ 4x_2 & +x_5 & = 57 \end{array}$$

  Note que la primera ecuación es combinación lineal de la segunda y la tercera. Si encontramos una solución a este sistema de ecuaciones (eliminando una de ellas) esta solución debe ser óptima para el primal (ya que sería una SBF cuyo valor objetivo es igual al valor objetivo del dual en (λ_1, λ_2)). Resolviendo:

- Note que para $(\lambda_1,\ \lambda_2) = (4,5)$ únicamente la segunda y quinta restricciones son activas. Si suponemos que estamos en una solución óptima, esto implicaría $x_1 = x_3 = x_4 = 0$. Es esto posible? Chequeando, dicha solución debe cumplir:

$$\begin{array}{ccc} 24x_2 & +25x_5 & = 361 \\ x_2 & +5x_5 & = 19 \\ 4x_2 & +x_5 & = 57 \end{array}$$

Note que la primera ecuación es combinación lineal de la segunda y la tercera. Si encontramos una solución a este sistema de ecuaciones (eliminando una de ellas) esta solución debe ser óptima para el primal (ya que sería una SBF cuyo valor objetivo es igual al valor objetivo del dual en (λ_1, λ_2)). Resolviendo:

$$\left.\begin{array}{ccc} x_2 & +5x_5 & = 19 \\ 4x_2 & +x_5 & = 57 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_2 = 14,\ x_5 = 1$$

- Note que para $(\lambda_1,\ \lambda_2) = (4, 5)$ únicamente la segunda y quinta restricciones son activas. Si suponemos que estamos en una solución óptima, esto implicaría $x_1 = x_3 = x_4 = 0$. Es esto posible? Chequeando, dicha solución debe cumplir:

$$\begin{array}{ccc} 24x_2 & +25x_5 & = 361 \\ x_2 & +5x_5 & = 19 \\ 4x_2 & +x_5 & = 57 \end{array}$$

Note que la primera ecuación es combinación lineal de la segunda y la tercera. Si encontramos una solución a este sistema de ecuaciones (eliminando una de ellas) esta solución debe ser óptima para el primal (ya que sería una SBF cuyo valor objetivo es igual al valor objetivo del dual en (λ_1, λ_2)). Resolviendo:

$$\left.\begin{array}{ccc} x_2 & +5x_5 & = 19 \\ 4x_2 & +x_5 & = 57 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_2 = 14,\ x_5 = 1$$

Luego $x_1 = 14,\ x_2 = 1,\ x_1 = x_3 = x_4 = 0$ es una solución óptima para el primal y $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 5$ es una solución óptima para el dual.

Multiplicadores Simplex

- En el óptimo $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ y

Multiplicadores Simplex

- En el óptimo $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ y $\boldsymbol{\lambda}^* = (\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1})^T$

Multiplicadores Simplex

- En el óptimo $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ y $\boldsymbol{\lambda}^* = (\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1})^T$
- En un paso del simplex (revisado) calculamos $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$

Multiplicadores Simplex

- En el óptimo $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ y $\boldsymbol{\lambda}^* = (\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1})^T$
- En un paso del simplex (revisado) calculamos $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ y los costos reducidos $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{N}$

Multiplicadores Simplex

- En el óptimo $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ y $\boldsymbol{\lambda}^* = (\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1})^T$
- En un paso del simplex (revisado) calculamos $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ y los costos reducidos $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{N}$
- $\boldsymbol{\lambda}$ son multiplicadores simplex.

Multiplicadores Simplex

- En el óptimo $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ y $\boldsymbol{\lambda}^* = (\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1})^T$
- En un paso del simplex (revisado) calculamos $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ y los costos reducidos $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{N}$
- $\boldsymbol{\lambda}$ son multiplicadores simplex.
- Note que $\boldsymbol{\lambda}$ no es óptimo para el dual a no ser que B sea la base optima del primal.

Interpretación Económica

- Para una base $\mathbf{B}$ tenemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Interpretación Económica

- Para una base **B** tenemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- Asociado a las columnas tenemos el vector de costos $\mathbf{c}_B^T = [c_1, c_2, \dots, c_m]$.

Interpretación Económica

- Para una base **B** tenemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- Asociado a las columnas tenemos el vector de costos $\mathbf{c}_B^T = [c_1, c_2, \dots, c_m]$.
- Suponga que queremos calcular el costo de construir un vector arbitrario $\mathbf{v}^T = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ con las columnas de la base.

Interpretación Económica

- Para una base $\mathbf{B}$ tenemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_m \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- Asociado a las columnas tenemos el vector de costos $\mathbf{c}_B^T = [c_1, c_2, \ldots, c_m]$.
- Suponga que queremos calcular el costo de construir un vector arbitrario $\mathbf{v}^T = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ con las columnas de la base.

$$\mathbf{v} = d_1\mathbf{a}_1 + d_2\mathbf{a}_2 + \cdots + d_m\mathbf{a}_m$$

Interpretación Económica

- Para una base **B** tenemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- Asociado a las columnas tenemos el vector de costos $\mathbf{c}_B^T = [c_1, c_2, \dots, c_m]$.
- Suponga que queremos calcular el costo de construir un vector arbitrario $\mathbf{v}^T = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ con las columnas de la base.

$$\mathbf{v} = d_1\mathbf{a}_1 + d_2\mathbf{a}_2 + \cdots + d_m\mathbf{a}_m \quad \Rightarrow \text{costo} =$$

Interpretación Económica

- Para una base $\mathbf{B}$ tenemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- Asociado a las columnas tenemos el vector de costos $\mathbf{c}_B^T = [c_1, c_2, \dots, c_m]$.
- Suponga que queremos calcular el costo de construir un vector arbitrario $\mathbf{v}^T = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ con las columnas de la base.

$$\mathbf{v} = d_1\mathbf{a}_1 + d_2\mathbf{a}_2 + \cdots + d_m\mathbf{a}_m \quad \Rightarrow \text{costo} = d_1c_1 + d_2c_2 + \cdots + d_mc_m$$

Interpretación Económica

- Para una base **B** tenemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- Asociado a las columnas tenemos el vector de costos $\mathbf{c}_B^T = [c_1, c_2, \dots, c_m]$.
- Suponga que queremos calcular el costo de construir un vector arbitrario $\mathbf{v}^T = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ con las columnas de la base.

$$\mathbf{v} = d_1\mathbf{a}_1 + d_2\mathbf{a}_2 + \cdots + d_m\mathbf{a}_m \quad \Rightarrow \text{costo} = d_1c_1 + d_2c_2 + \cdots + d_mc_m$$

- Paso intermedio:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_m\mathbf{e}_m$$

donde $\mathbf{e}_i^T = [00\ldots 0\underset{\substack{\downarrow \\ i}}{1}0\ldots 0]$

- Paso intermedio:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_m\mathbf{e}_m$$

donde $\mathbf{e}_i^T = [00\ldots0\underset{\substack{\downarrow\\ i}}{1}0\ldots0]$

- Costo de $\mathbf{e}_i$:

- Paso intermedio:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_m\mathbf{e}_m$$

donde $\mathbf{e}_i^T = [00\ldots 0\underset{\substack{\downarrow \\ i}}{1}0\ldots 0]$

- Costo de $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{e}_i$$

- Paso intermedio:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_m\mathbf{e}_m$$

donde $\mathbf{e}_i^T = [00\ldots 0\underset{\substack{\downarrow\\ i}}{1}0\ldots 0]$

- Costo de $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{e}_i$$
$$\mathbf{z} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_i$$

- Paso intermedio:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_m\mathbf{e}_m$$

donde $\mathbf{e}_i^T = [00\ldots0\underset{\substack{\downarrow \\ i}}{1}0\ldots0]$

- Costo de $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{Bz} = \mathbf{e}_i$$
$$\mathbf{z} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_i$$

- $\mathbf{z}$ es la i-ésima columna de $\mathbf{B}^{-1}$,

- Paso intermedio:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_m\mathbf{e}_m$$

donde $\mathbf{e}_i^T = [00\ldots0\underset{\substack{\downarrow\\ i}}{1}0\ldots0]$

- Costo de $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{e}_i$$
$$\mathbf{z} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_i$$

- $\mathbf{z}$ es la i-ésima columna de $\mathbf{B}^{-1}$, costo de $\mathbf{e}_i$ es

- Paso intermedio:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_m\mathbf{e}_m$$

donde $\mathbf{e}_i^T = [00\ldots 0\underset{\substack{\downarrow \\ i}}{1}0\ldots 0]$

- Costo de $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{e}_i$$
$$\mathbf{z} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_i$$

- $\mathbf{z}$ es la i-ésima columna de $\mathbf{B}^{-1}$, costo de $\mathbf{e}_i$ es $\mathbf{c}_B^T\mathbf{z}$.

- Paso intermedio:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_m\mathbf{e}_m$$

donde $\mathbf{e}_i^T = [00\ldots0\underset{\substack{\downarrow\\ i}}{1}0\ldots0]$

- Costo de $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{e}_i$$
$$\mathbf{z} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_i$$

- $\mathbf{z}$ es la i-ésima columna de $\mathbf{B}^{-1}$, costo de $\mathbf{e}_i$ es $\mathbf{c}_B^T\mathbf{z}$.
- Comparando: $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$

- Paso intermedio:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_m\mathbf{e}_m$$

donde $\mathbf{e}_i^T = [00\ldots0\underset{\substack{\downarrow\\ i}}{1}0\ldots0]$

- Costo de $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{e}_i$$
$$\mathbf{z} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_i$$

- $\mathbf{z}$ es la i-ésima columna de $\mathbf{B}^{-1}$, costo de $\mathbf{e}_i$ es $\mathbf{c}_B^T\mathbf{z}$.
- Comparando: $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1} \Rightarrow$

- Paso intermedio:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_m\mathbf{e}_m$$

donde $\mathbf{e}_i^T = [00\ldots0\underset{\substack{\downarrow \\ i}}{1}0\ldots0]$

- Costo de $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{e}_i$$
$$\mathbf{z} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_i$$

- $\mathbf{z}$ es la i-ésima columna de $\mathbf{B}^{-1}$, costo de $\mathbf{e}_i$ es $\mathbf{c}_B^T\mathbf{z}$.
- Comparando: $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1} \Rightarrow \lambda_i$ es el costo de $\mathbf{e}_i$.

- Paso intermedio:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_m\mathbf{e}_m$$

donde $\mathbf{e}_i^T = [00\ldots0\underset{\substack{\downarrow\\ i}}{1}0\ldots0]$

- Costo de $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{e}_i$$
$$\mathbf{z} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_i$$

- $\mathbf{z}$ es la i-ésima columna de $\mathbf{B}^{-1}$, costo de $\mathbf{e}_i$ es $\mathbf{c}_B^T\mathbf{z}$.
- Comparando: $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1} \Rightarrow \lambda_i$ es el costo de $\mathbf{e}_i$.
- El costo sintético de $\mathbf{v}$ es

- Paso intermedio:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_m\mathbf{e}_m$$

donde $\mathbf{e}_i^T = [00\ldots 0\underset{\substack{\downarrow\\ i}}{1}0\ldots 0]$

- Costo de $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{e}_i$$
$$\mathbf{z} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_i$$

- $\mathbf{z}$ es la i-ésima columna de $\mathbf{B}^{-1}$, costo de $\mathbf{e}_i$ es $\mathbf{c}_B^T\mathbf{z}$.
- Comparando: $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1} \Rightarrow \lambda_i$ es el costo de $\mathbf{e}_i$.
- El costo sintético de $\mathbf{v}$ es $\lambda^T\mathbf{v}$.

- En el Simplex:

- En el Simplex:

$$\mathbf{r} = \mathbf{c}_N - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{N}$$

- En el Simplex:

$$\mathbf{r} = \mathbf{c}_N - \boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \cdots | \mathbf{u}_{n-m}]$$

- En el Simplex:

$$\underbrace{\mathbf{r}}_{\text{costos reducidos}} = \underbrace{\mathbf{c}_N}_{\text{costos verdaderos}} - \underbrace{\boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \cdots | \mathbf{u}_{n-m}]}_{\text{costos sintéticos}}$$

Ejemplo: Problema de la Dieta

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$\text{sujeto a}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

Ejemplo: Problema de la Dieta

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- Suponga que tenemos una dieta óptima $\mathbf{x}^*$ con solución dual $\boldsymbol{\lambda}^*$.

Ejemplo: Problema de la Dieta

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- Suponga que tenemos una dieta óptima $\mathbf{x}^*$ con solución dual $\boldsymbol{\lambda}^*$.
- Queremos introducir una nueva comida en la dieta:

Ejemplo: Problema de la Dieta

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$\text{sujeto a}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

- Suponga que tenemos una dieta óptima $\mathbf{x}^*$ con solución dual $\boldsymbol{\lambda}^*$.
- Queremos introducir una nueva comida en la dieta:

$$\mathbf{A}' = [\mathbf{A}|\mathbf{a}_{n+1}], \qquad c_{n+1}$$

Ejemplo: Problema de la Dieta

$$\begin{gathered}\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0\end{gathered}$$

- Suponga que tenemos una dieta óptima $\mathbf{x}^*$ con solución dual $\boldsymbol{\lambda}^*$.
- Queremos introducir una nueva comida en la dieta:

$$\mathbf{A}' = [\mathbf{A}|\mathbf{a}_{n+1}], \qquad c_{n+1}$$

- Qúe nos dice el cálculo $r_{n+1} = c_{n+1} - (\boldsymbol{\lambda}^*)^T\mathbf{a}_{n+1}$?

Sensitividad

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Sensitividad

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Suponga que conocemos la base óptima $\mathbf{B}$ y la solución óptima $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{0})$, $\mathbf{x}_B =$

Sensitividad

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Suponga que conocemos la base óptima $\mathbf{B}$ y la solución óptima $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{0})$, $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. La solución del dual es

Sensitividad

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Suponga que conocemos la base óptima $\mathbf{B}$ y la solución óptima $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{0})$, $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. La solución del dual es $\boldsymbol{\lambda}^T =$

Sensitividad

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Suponga que conocemos la base óptima $\mathbf{B}$ y la solución óptima $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{0})$, $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. La solución del dual es $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$.

Sensitividad

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
\text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

- Suponga que conocemos la base óptima $\mathbf{B}$ y la solución óptima $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{0})$, $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. La solución del dual es $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$.
- Suponga que $\mathbf{b}$ cambia por una pequeña cantidad $\Delta\mathbf{b}$, de forma que la base óptima no cambia.

Sensitividad

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Suponga que conocemos la base óptima $\mathbf{B}$ y la solución óptima $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{0})$, $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. La solución del dual es $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$.
- Suponga que $\mathbf{b}$ cambia por una pequeña cantidad $\Delta\mathbf{b}$, de forma que la base óptima no cambia.
- La nueva solución básica óptima es:

$$\mathbf{x} =$$

Sensitividad

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Suponga que conocemos la base óptima $\mathbf{B}$ y la solución óptima $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{0})$, $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. La solución del dual es $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$.
- Suponga que $\mathbf{b}$ cambia por una pequeña cantidad $\Delta\mathbf{b}$, de forma que la base óptima no cambia.
- La nueva solución básica óptima es:

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})$$

Sensitividad

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Suponga que conocemos la base óptima $\mathbf{B}$ y la solución óptima $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{0})$, $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. La solución del dual es $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$.
- Suponga que $\mathbf{b}$ cambia por una pequeña cantidad $\Delta\mathbf{b}$, de forma que la base óptima no cambia.
- La nueva solución básica óptima es:

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b}$$

Sensitividad

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

- Suponga que conocemos la base óptima $\mathbf{B}$ y la solución óptima $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{0})$, $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. La solución del dual es $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$.
- Suponga que $\mathbf{b}$ cambia por una pequeña cantidad $\Delta\mathbf{b}$, de forma que la base óptima no cambia.
- La nueva solución básica óptima es:

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b} = \mathbf{x}_B + \Delta\mathbf{x}_B$$

- El cambio en el costo es:

$$\Delta f =$$

- El cambio en el costo es:

$$\Delta f = \mathbf{c}_B^T \Delta \mathbf{x}_B$$

- El cambio en el costo es:

$$\Delta f = \mathbf{c}_B^T \Delta \mathbf{x}_B = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \Delta \mathbf{b}$$

- El cambio en el costo es:

$$\Delta f = \mathbf{c}_B^T \Delta \mathbf{x}_B = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \Delta \mathbf{b} = \boldsymbol{\lambda}^T \Delta \mathbf{b}$$

- El cambio en el costo es:

$$\Delta f = \mathbf{c}_B^T \Delta \mathbf{x}_B = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \Delta \mathbf{b} = \boldsymbol{\lambda}^T \Delta \mathbf{b}$$

- Es decir, λ_i nos dice cuánto cambia el costo, al cambiar b_i por $b_i + \Delta b_i$.

- El cambio en el costo es:

$$\Delta f = \mathbf{c}_B^T \Delta \mathbf{x}_B = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \Delta \mathbf{b} = \boldsymbol{\lambda}^T \Delta \mathbf{b}$$

- Es decir, λ_i nos dice cuánto cambia el costo, al cambiar b_i por $b_i + \Delta b_i$.
- $\boldsymbol{\lambda}$ son los precios sombra.

- El cambio en el costo es:

$$\Delta f = \mathbf{c}_B^T \Delta \mathbf{x}_B = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \Delta \mathbf{b} = \boldsymbol{\lambda}^T \Delta \mathbf{b}$$

- Es decir, λ_i nos dice cuánto cambia el costo, al cambiar b_i por $b_i + \Delta b_i$.
- $\boldsymbol{\lambda}$ son los precios sombra.

Ejemplo: Problema de la Dieta

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

sujeto a

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

Ejemplo: Problema de la Dieta

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$\text{sujeto a}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

- $\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}$ óptimos.

Ejemplo: Problema de la Dieta

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$\text{sujeto a}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

- $\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}$ óptimos.
- Suponga que incrementamos el requerimiento del nutriente j por Δb_j.

Ejemplo: Problema de la Dieta

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- $\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}$ óptimos.
- Suponga que incrementamos el requerimiento del nutriente j por Δb_j.
- Qué nos dice λ_j?

Ejemplo: Problema de la Dieta

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$\text{sujeto a}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

- $\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}$ óptimos.
- Suponga que incrementamos el requerimiento del nutriente j por Δb_j.
- Qué nos dice λ_j?
    1. En el caso $\lambda_j > 0$?

Ejemplo: Problema de la Dieta

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$\text{sujeto a}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

- $\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}$ óptimos.
- Suponga que incrementamos el requerimiento del nutriente j por Δb_j.
- Qué nos dice λ_j?
  1. En el caso $\lambda_j > 0$?
  2. En el caso $\lambda_j = 0$?