

El Método Simplex

Fernando Lozano

Universidad de los Andes

13 de febrero de 2014



Estrategia

- Idea:

Estrategia

- Idea: Desplazarse de una esquina a otra a lo largo de los bordes del conjunto factible.

Estrategia

- Idea: Desplazarse de una esquina a otra a lo largo de los bordes del conjunto factible.
- Moverse por un borde a lo largo del cual disminuya función objetivo.

Estrategia

- Idea: Desplazarse de una esquina a otra a lo largo de los bordes del conjunto factible.
- Moverse por un borde a lo largo del cual disminuya función objetivo.
- Eventualmente encontramos esquina que no se pueda mejorar.

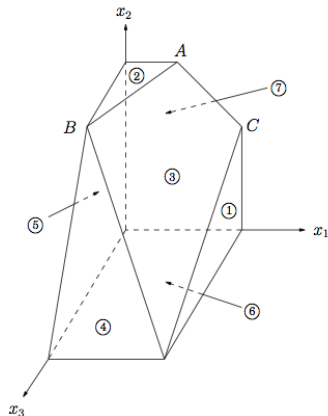
Estrategia

- Idea: Desplazarse de una esquina a otra a lo largo de los bordes del conjunto factible.
- Moverse por un borde a lo largo del cual disminuya función objetivo.
- Eventualmente encontramos esquina que no se pueda mejorar.
- Por ahora supondremos que ya conocemos una esquina del conjunto factible.

Estrategia

- Idea: Desplazarse de una esquina a otra a lo largo de los bordes del conjunto factible.
- Moverse por un borde a lo largo del cual disminuya función objetivo.
- Eventualmente encontramos esquina que no se pueda mejorar.
- Por ahora supondremos que ya conocemos una esquina del conjunto factible.
- Esquina: intersección de n planos (restricciones) diferentes.

Ejemplo (Dasgupta)



$$\max \quad x_1 + 6x_2 + 13x_3$$

$$x_1 \leq 200$$

$$x_2 \leq 300$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 400$$

$$x_2 + 3x_3 \leq 600$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

①

②

③

④

⑤

⑥

⑦

Ejemplo (Strang)

$$\text{mín} \quad 7x_3 - x_4 - 3x_5$$

sujeto a

$$x_1 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 8$$

$$x_2 + x_3 + 3x_5 = 9$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

Ejemplo (Strang)

$$\text{mín} \quad 7x_3 - x_4 - 3x_5$$

sujeto a

$$\textcolor{red}{x_1} + \quad \quad x_3 + \quad 6x_4 + \quad 2x_5 = 8$$

$$\textcolor{red}{x_2} + \quad x_3 + \quad \quad \quad 3x_5 = 9$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

SBF inicial: $\textcolor{red}{x_1} = 8, \textcolor{red}{x_2} = 9, x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Ejemplo (Strang)

$$\text{mín} \quad 7x_3 - x_4 - 3x_5$$

sujeto a

$$\textcolor{red}{x_1} + \quad \quad x_3 + \quad 6x_4 + \quad 2x_5 = 8$$

$$\textcolor{red}{x_2} + \quad x_3 + \quad \quad \quad 3x_5 = 9$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

SBF inicial: $\textcolor{red}{x_1} = 8, \textcolor{red}{x_2} = 9, x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Costo Inicial: 0

Ejemplo (Strang)

$$\begin{array}{ll}\text{mín} & 7x_3 - x_4 - 3x_5 \\ & \text{sujeto a} \\ \textcolor{red}{x_1} + & x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 8 \\ \textcolor{red}{x_2} + & x_3 + 3x_5 = 9 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0\end{array}$$

SBF inicial: $x_1 = 8, x_2 = 9, x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Costo Inicial: 0

Variable a introducir ?

Ejemplo (Strang)

$$\begin{array}{ll}\text{mín} & 7x_3 - x_4 - 3x_5 \\ & \text{sujeto a} \\ & x_1 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 8 \\ & x_2 + x_3 + 3x_5 = 9 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0\end{array}$$

SBF inicial: $x_1 = 8, x_2 = 9, x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Costo Inicial: 0

Variable a introducir ?

- x_3 ?

Ejemplo (Strang)

$$\begin{array}{ll}\text{mín} & 7x_3 - x_4 - 3x_5 \\ \text{sujeto a} & \\ \textcolor{red}{x_1} + & x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 8 \\ \textcolor{red}{x_2} + & x_3 + 3x_5 = 9 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0\end{array}$$

SBF inicial: $x_1 = 8, x_2 = 9, x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Costo Inicial: 0

Variable a introducir ?

• x_3 ? \times

Ejemplo (Strang)

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 7x_3 - x_4 - 3x_5 \\ \text{sujeto a} \quad & \\ x_1 + & x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 8 \\ x_2 + & x_3 + 3x_5 = 9 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

SBF inicial: $x_1 = 8, x_2 = 9, x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Costo Inicial: 0

Variable a introducir ?

- x_3 ? **✗**
- x_4 ?

Ejemplo (Strang)

$$\text{mín} \quad 7x_3 - x_4 - 3x_5$$

sujeto a

$$x_1 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 8$$

$$x_2 + x_3 + 3x_5 = 9$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

SBF inicial: $x_1 = 8, x_2 = 9, x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Costo Inicial: 0

Variable a introducir ?

- x_3 ? ✗
- x_4 ? ✓

Ejemplo (Strang)

$$\begin{array}{ll}\text{mín} & 7x_3 - x_4 - 3x_5 \\ & \text{sujeto a} \\ & x_1 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 8 \\ & x_2 + x_3 + 3x_5 = 9 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0\end{array}$$

SBF inicial: $x_1 = 8, x_2 = 9, x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Costo Inicial: 0

Variable a introducir ?

- x_3 ? ✗
- x_4 ? ✓
- x_5 ?

Ejemplo (Strang)

$$\begin{array}{ll}\text{mín} & 7x_3 - x_4 - 3x_5 \\ \text{sujeto a} & \\ \textcolor{red}{x_1} + & x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 8 \\ \textcolor{red}{x_2} + & x_3 + 3x_5 = 9 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0\end{array}$$

SBF inicial: $x_1 = 8, x_2 = 9, x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Costo Inicial: 0

Variable a introducir ?

- x_3 ? ✗
- x_4 ? ✓
- x_5 ? ✓✓

Ejemplo (Strang)

$$\begin{array}{ll}\text{mín} & 7x_3 - x_4 - 3x_5 \\ \text{sujeto a} & \\ \textcolor{red}{x_1} + & x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 8 \\ \textcolor{red}{x_2} + & x_3 + 3x_5 = 9 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0\end{array}$$

SBF inicial: $x_1 = 8, x_2 = 9, x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Costo Inicial: 0

Variable a introducir ?

- x_3 ? ✗
- x_4 ? ✓
- x_5 ? ✓✓

$$\text{mín} \quad 7x_3 - x_4 - 3x_5$$

sujeto a

$$x_1 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 8$$

$$x_2 + x_3 + 3x_5 = 9$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

$$\text{mín} \quad 7x_3 - x_4 - 3x_5$$

sujeto a

$$x_1 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 8$$

$$x_2 + x_3 + 3x_5 = 9$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

Cuál variable eliminar?

$$\text{mín} \quad 7x_3 - x_4 - 3x_5$$

sujeto a

$$x_1 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 8$$

$$x_2 + x_3 + 3x_5 = 9$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

Cuál variable eliminar?

- $x_5 \rightarrow 4$

$$\text{mín} \quad 7x_3 - x_4 - 3x_5$$

sujeto a

$$x_1 + \quad \quad x_3 + \quad 6x_4 + \quad 2x_5 = 8$$

$$x_2 + \quad x_3 + \quad \quad \quad 3x_5 = 9$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

Cuál variable eliminar?

- $x_5 \rightarrow 4 \Rightarrow x_1 \rightarrow 0$

$$\text{mín} \quad 7x_3 - x_4 - 3x_5$$

sujeto a

$$x_1 + \quad \quad x_3 + \quad 6x_4 + \quad 2x_5 = 8$$

$$x_2 + \quad x_3 + \quad \quad 3x_5 = 9$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

Cuál variable eliminar?

- $x_5 \rightarrow 4 \Rightarrow x_1 \rightarrow 0$
- $x_5 \rightarrow 3$

$$\text{mín} \quad 7x_3 - x_4 - 3x_5$$

sujeto a

$$x_1 + \quad \quad x_3 + \quad 6x_4 + \quad 2x_5 = 8$$

$$x_2 + \quad x_3 + \quad \quad 3x_5 = 9$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

Cuál variable eliminar?

- $x_5 \rightarrow 4 \Rightarrow x_1 \rightarrow 0$
- $x_5 \rightarrow 3 \Rightarrow x_2 \rightarrow 0$

$$\text{mín} \quad 7x_3 - x_4 - 3x_5$$

sujeto a

$$x_1 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 8$$

$$x_2 + x_3 + 3x_5 = 9$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

Cuál variable eliminar?

- $x_5 \rightarrow 4 \Rightarrow x_1 \rightarrow 0$
- $x_5 \rightarrow 3 \Rightarrow x_2 \rightarrow 0$ ✓

$$\text{mín} \quad 7x_3 - x_4 - 3x_5$$

sujeto a

$$x_1 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 8$$

$$x_2 + x_3 + 3x_5 = 9$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

Cuál variable eliminar?

- $x_5 \rightarrow 4 \Rightarrow x_1 \rightarrow 0$
- $x_5 \rightarrow 3 \Rightarrow x_2 \rightarrow 0$ ✓
- Comparamos $\frac{8}{2}$ y $\frac{9}{3}$

$$\begin{array}{ll}
\text{mín} & 7x_3 - x_4 - 3x_5 \\
& \text{sujeto a} \\
& x_1 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 8 \\
& x_2 + x_3 + 3x_5 = 9 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{array}$$

Cuál variable eliminar?

- $x_5 \rightarrow 4 \Rightarrow x_1 \rightarrow 0$
- $x_5 \rightarrow 3 \Rightarrow x_2 \rightarrow 0$ ✓
- Comparamos $\frac{8}{2}$ y $\frac{9}{3}$
- Sólo coeficientes positivos.

$$\begin{array}{ll}
\text{mín} & 7x_3 - x_4 - 3x_5 \\
& \text{sujeto a} \\
& x_1 + \quad \quad x_3 + \quad 6x_4 + \quad 2x_5 = 8 \\
& x_2 + \quad x_3 + \quad \quad \quad 3x_5 = 9 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{array}$$

Cuál variable eliminar?

- $x_5 \rightarrow 4 \Rightarrow x_1 \rightarrow 0$
- $x_5 \rightarrow 3 \Rightarrow x_2 \rightarrow 0$ ✓
- Comparamos $\frac{8}{2}$ y $\frac{9}{3}$
- Sólo coeficientes positivos.
- Si todos fueran negativos \Rightarrow costo $\rightarrow -\infty$

$$\begin{array}{ll}
\text{mín} & 7x_3 - x_4 - 3x_5 \\
& \text{sujeto a} \\
& x_1 + \quad \quad x_3 + \quad 6x_4 + \quad 2x_5 = 8 \\
& x_2 + \quad x_3 + \quad \quad \quad 3x_5 = 9 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{array}$$

Cuál variable eliminar?

- $x_5 \rightarrow 4 \Rightarrow x_1 \rightarrow 0$
- $x_5 \rightarrow 3 \Rightarrow x_2 \rightarrow 0$ ✓
- Comparamos $\frac{8}{2}$ y $\frac{9}{3}$
- Sólo coeficientes positivos.
- Si todos fueran negativos \Rightarrow costo $\rightarrow -\infty$
- Nueva SBF:

$$\begin{array}{ll}
\text{mín} & 7x_3 - x_4 - 3x_5 \\
& \text{sujeto a} \\
& x_1 + \quad \quad x_3 + \quad 6x_4 + \quad 2x_5 = 8 \\
& x_2 + \quad x_3 + \quad \quad \quad 3x_5 = 9 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{array}$$

Cuál variable eliminar?

- $x_5 \rightarrow 4 \Rightarrow x_1 \rightarrow 0$
- $x_5 \rightarrow 3 \Rightarrow x_2 \rightarrow 0$ ✓
- Comparamos $\frac{8}{2}$ y $\frac{9}{3}$
- Sólo coeficientes positivos.
- Si todos fueran negativos \Rightarrow costo $\rightarrow -\infty$
- Nueva SBF: $x_5 = 3, x_1 = 2, x_2 = x_3 = x_4 = 0$

$$\begin{array}{ll}
\text{mín} & 7x_3 - x_4 - 3x_5 \\
& \text{sujeto a} \\
& x_1 + \quad \quad x_3 + \quad 6x_4 + \quad 2x_5 = 8 \\
& x_2 + \quad x_3 + \quad \quad \quad 3x_5 = 9 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{array}$$

Cuál variable eliminar?

- $x_5 \rightarrow 4 \Rightarrow x_1 \rightarrow 0$
- $x_5 \rightarrow 3 \Rightarrow x_2 \rightarrow 0$ ✓
- Comparamos $\frac{8}{2}$ y $\frac{9}{3}$
- Sólo coeficientes positivos.
- Si todos fueran negativos \Rightarrow costo $\rightarrow -\infty$
- Nueva SBF: $x_5 = 3, x_1 = 2, x_2 = x_3 = x_4 = 0$
- Costo se redujo a -9 .

$$\begin{array}{ll}
 \text{mín} & 7x_3 - x_4 - 3x_5 \\
 & \text{sujeto a} \\
 & x_1 + \quad \quad x_3 + \quad 6x_4 + \quad 2x_5 = 8 \\
 & x_2 + \quad x_3 + \quad \quad \quad 3x_5 = 9 \\
 & x_1, \dots, x_5 \geq 0
 \end{array}$$

$$\text{mín} \quad 7x_3 - x_4 - 3x_5$$

sujeto a

$$x_1 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 8$$

$$x_2 + x_3 + 3x_5 = 9$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

- Ponerlo en la forma conveniente.

$$\begin{aligned}
& \text{mín} && 7x_3 - x_4 - 3x_5 \\
& && \text{sujeto a} \\
& x_1 + && x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 8 \\
& x_2 + && x_3 + 3x_5 = 9 \\
& && x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

- Ponerlo en la forma conveniente.
 - ① Variables básicas en una sola restricción con coeficiente 1.

$$\begin{aligned}
& \text{mín} && 7x_3 - x_4 - 3x_5 \\
& && \text{sujeto a} \\
& x_1 + && x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 8 \\
& x_2 + && x_3 + 3x_5 = 9 \\
& && x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

- Ponerlo en la forma conveniente.
 - 1 Variables básicas en una sola restricción con coeficiente 1.
 - 2 Costo sin variables básicas.

$$\begin{array}{ll}
\text{mín} & 7x_3 - x_4 - 3x_5 \\
& \text{sujeto a} \\
& x_1 + \quad \quad x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 8 \\
& x_2 + \quad x_3 + \quad \quad 3x_5 = 9 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{array}$$

- Ponerlo en la forma conveniente.
 - 1 Variables básicas en una sola restricción con coeficiente 1.
 - 2 Costo sin variables básicas.
- Pivotear!

$$\begin{array}{ll}
\text{mín} & 7x_3 - x_4 - 3x_5 \\
& \text{sujeto a} \\
& x_1 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 8 \\
& \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 = 3 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{array}$$

- Ponerlo en la forma conveniente.
 - 1 Variables **básicas** en **una sola restricción** con coeficiente **1**.
 - 2 Costo sin variables básicas.
- **Pivotear!**

$$\begin{aligned}
& \text{mín} && 7x_3 - x_4 - 3x_5 \\
& && \text{sujeto a} \\
& x_1 - \frac{2x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + 6x_4 &= 2 \\
& \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 &= 3 \\
& && x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

- Ponerlo en la forma conveniente.
 - 1 Variables básicas en una sola restricción con coeficiente 1.
 - 2 Costo sin variables básicas.
- Pivotear!

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & 7x_3 - x_4 - (9 - x_2 - x_3) \\
 \text{sujeto a} \quad & \\
 x_1 - \frac{2x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + 6x_4 &= 2 \\
 \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 &= 3 \\
 x_1, \dots, x_5 &\geq 0
 \end{aligned}$$

- Ponerlo en la forma conveniente.
 - 1 Variables básicas en una sola restricción con coeficiente 1.
 - 2 Costo sin variables básicas.
- Pivotear!

$$\text{mín} \quad x_2 + 8x_3 - x_4 - 9$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{2x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + 6x_4 &= 2 \\ \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

- Ponerlo en la forma conveniente.
 - 1 Variables **básicas** en **una sola restricción** con coeficiente **1**.
 - 2 Costo sin variables básicas.
- **Pivotear!**

$$\text{mín} \quad x_2 + 8x_3 - x_4 - 9$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{2x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + 6x_4 &= 2 \\ \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

Siguiente paso:

$$\text{mín} \quad x_2 + 8x_3 - x_4 - 9$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{2x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + 6x_4 &= 2 \\ \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

Siguiente paso:

- Variable entrante:

$$\begin{array}{ll}
 \text{mín} & x_2 + 8x_3 - x_4 - 9 \\
 & \text{sujeto a} \\
 x_1 - \frac{2x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + 6x_4 & = 2 \\
 \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 & = 3 \\
 x_1, \dots, x_5 & \geq 0
 \end{array}$$

Siguiente paso:

- Variable entrante: x_4

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & x_2 + 8x_3 - x_4 - 9 \\
 \text{sujeto a} \quad & \\
 x_1 - \frac{2x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + 6x_4 &= 2 \\
 \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 &= 3 \\
 x_1, \dots, x_5 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Siguiente paso:

- Variable entrante: x_4
- Variable saliente:

$$\begin{array}{ll}
\text{mín} & x_2 + 8x_3 - x_4 - 9 \\
& \text{sujeto a} \\
& x_1 - \frac{2x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + 6x_4 = 2 \\
& \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 = 3 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{array}$$

Siguiente paso:

- Variable entrante: x_4
- Variable saliente: x_1

$$\begin{aligned}
& \text{mín} && x_2 + 8x_3 - x_4 - 9 \\
& \text{sujeto a} \\
& x_1 - \frac{2x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + 6x_4 &= 2 \\
& \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 &= 3 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

Siguiente paso:

- Variable entrante: x_4
- Variable saliente: x_1
- Nueva SBF:

$$\begin{aligned}
& \text{mín} && x_2 + 8x_3 - x_4 - 9 \\
& \text{sujeto a} \\
& x_1 - \frac{2x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + 6x_4 &= 2 \\
& \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 &= 3 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

Siguiente paso:

- Variable entrante: x_4
- Variable saliente: x_1
- Nueva SBF:

$$x_4 =$$

$$\begin{aligned}
& \text{mín} && x_2 + 8x_3 - x_4 - 9 \\
& \text{sujeto a} \\
& x_1 - \frac{2x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + 6x_4 &= 2 \\
& \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 &= 3 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

Siguiente paso:

- Variable entrante: x_4
- Variable saliente: x_1
- Nueva SBF:

$$x_4 = \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & x_2 + 8x_3 - x_4 - 9 \\
 \text{sujeto a} \quad & \\
 x_1 - \frac{2x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + 6x_4 &= 2 \\
 \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 &= 3 \\
 x_1, \dots, x_5 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Siguiente paso:

- Variable entrante: x_4
- Variable saliente: x_1
- Nueva SBF:

$$x_4 = \frac{1}{3}, x_5 = 3,$$

$$\begin{aligned}
& \text{mín} && x_2 + 8x_3 - x_4 - 9 \\
& \text{sujeto a} \\
& x_1 - \frac{2x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_4 &= 2 \\
& \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 &= 3 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

Siguiente paso:

- Variable entrante: x_4
- Variable saliente: x_1
- Nueva SBF:

$$x_4 = \frac{1}{3}, x_5 = 3, x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$$\begin{aligned}
& \text{mín} && x_2 + 8x_3 - x_4 - 9 \\
& \text{sujeto a} \\
& x_1 - \frac{2x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + 6x_4 &= 2 \\
& \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 &= 3 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

Siguiente paso:

- Variable entrante: x_4
- Variable saliente: x_1
- Nueva SBF:

$$x_4 = \frac{1}{3}, x_5 = 3, x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

- Nuevo costo es

$$\begin{aligned}
& \text{mín} && x_2 + 8x_3 - x_4 - 9 \\
& \text{sujeto a} \\
& x_1 - \frac{2x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + 6x_4 &= 2 \\
& \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 &= 3 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

Siguiente paso:

- Variable entrante: x_4
- Variable saliente: x_1
- Nueva SBF:

$$x_4 = \frac{1}{3}, x_5 = 3, x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

- Nuevo costo es $-\frac{28}{3}$.

$$\text{mín} \quad x_2 + 8x_3 - x_4 - 9$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{2x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + 6x_4 &= 2 \\ \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

$$\text{mín} \quad x_2 + 8x_3 - x_4 - 9$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{2x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + 6x_4 &= 2 \\ \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

- Pivotear!

$$\text{mín} \quad x_2 + 8x_3 - x_4 - 9$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{6} - \frac{x_2}{9} + \frac{x_3}{18} + x_4 &= \frac{1}{3} \\ \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

- Pivotear!

$$\text{mín} \quad x_2 + 8x_3 - \left(\frac{1}{3} - \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{9} - \frac{x_3}{18} \right) - 9$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{6} - \frac{x_2}{9} + \frac{x_3}{18} + x_4 &= \frac{1}{3} \\ \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

- Pivotear!

$$\text{mín} \quad \frac{1}{6}x_1 + \frac{8}{9}x_2 + \frac{143}{18}x_3 - \frac{28}{3}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{6} - \frac{x_2}{9} + \frac{x_3}{18} + x_4 &= \frac{1}{3} \\ \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

- Pivotear!

$$\text{mín} \quad \frac{1}{6}x_1 + \frac{8}{9}x_2 + \frac{143}{18}x_3 - \frac{28}{3}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{6} - \frac{x_2}{9} + \frac{x_3}{18} + x_4 &= \frac{1}{3} \\ \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

- Pivotear!
- Solución óptima!

En resumen

- 1 Mantenemos problema en forma conveniente.

En resumen

- ① Mantenemos problema en forma conveniente.
 - ▶ Variables básicas en una sola restriccion con coeficiente 1.

En resumen

- ① Mantenemos problema en forma conveniente.
 - ▶ Variables básicas en una sola restriccion con coeficiente 1.
 - ▶ Costo sin variables básicas.

En resumen

- 1 Mantenemos problema en forma conveniente.
 - ▶ Variables básicas en una sola restriccion con coeficiente 1.
 - ▶ Costo sin variables básicas.
- 2 Variable entrante:

En resumen

- ① Mantenemos problema en forma conveniente.
 - ▶ Variables **básicas** en **una sola restriccion** con coeficiente **1**.
 - ▶ Costo sin variables básicas.
- ② Variable **entrante**:
 - ▶ La determina el **Coeficiente más negativo** de variable **libre** en el **costo**.

En resumen

- ① Mantenemos problema en forma conveniente.
 - ▶ Variables **básicas** en **una sola restriccion** con coeficiente **1**.
 - ▶ Costo sin variables básicas.
- ② Variable **entrante**:
 - ▶ La determina el **Coeficiente más negativo** de variable **libre** en el **costo**.
 - ▶ Si todos los coeficientes en el costo son **positivos** estamos en **SBF óptima**.

En resumen

- ① Mantenemos problema en forma conveniente.
 - ▶ Variables **básicas** en **una sola restriccion** con coeficiente **1**.
 - ▶ Costo sin variables básicas.
- ② Variable **entrante**:
 - ▶ La determina el **Coeficiente más negativo** de variable **libre** en el **costo**.
 - ▶ Si todos los coeficientes en el costo son **positivos** estamos en **SBF óptima**.
- ③ Variable **saliente**:

En resumen

- ① Mantenemos problema en forma conveniente.
 - ▶ Variables **básicas** en **una sola restriccion** con coeficiente **1**.
 - ▶ Costo sin variables básicas.
- ② Variable **entrante**:
 - ▶ La determina el **Coeficiente más negativo** de variable **libre** en el **costo**.
 - ▶ Si todos los coeficientes en el costo son **positivos** estamos en **SBF óptima**.
- ③ Variable **saliente**:
 - ▶ La determina el menor valor de la razón $\frac{b_j}{a_{ji}}$ con a_{ji} **positivo**.

En resumen

- ① Mantenemos problema en forma conveniente.
 - ▶ Variables **básicas** en **una sola restriccion** con coeficiente **1**.
 - ▶ Costo sin variables básicas.
- ② Variable **entrante**:
 - ▶ La determina el **Coeficiente más negativo** de variable **libre** en el **costo**.
 - ▶ Si todos los coeficientes en el costo son **positivos** estamos en **SBF óptima**.
- ③ Variable **saliente**:
 - ▶ La determina el menor valor de la razón $\frac{b_j}{a_{ji}}$ con a_{ji} **positivo**.
 - ▶ Si no hay a_{ji} **positivo**, problema es no acotado.

En resumen

- ① Mantenemos problema en forma conveniente.
 - ▶ Variables **básicas** en **una sola restriccion** con coeficiente **1**.
 - ▶ Costo sin variables básicas.
- ② Variable **entrante**:
 - ▶ La determina el **Coeficiente más negativo** de variable **libre** en el **costo**.
 - ▶ Si todos los coeficientes en el costo son **positivos** estamos en **SBF óptima**.
- ③ Variable **saliente**:
 - ▶ La determina el menor valor de la razón $\frac{b_j}{a_{ji}}$ con a_{ji} **positivo**.
 - ▶ Si no hay a_{ji} **positivo**, problema es no acotado.

En resumen

- ➊ Mantenemos problema en forma conveniente.
 - ▶ Variables **básicas** en **una sola restricción** con coeficiente **1**.
 - ▶ Costo sin variables básicas.
- ➋ Variable **entrante**:
 - ▶ La determina el **Coefficiente más negativo** de variable **libre** en el **costo**.
 - ▶ Si todos los coeficientes en el costo son **positivos** estamos en **SBF óptima**.
- ➌ Variable **saliente**:
 - ▶ La determina el menor valor de la razón $\frac{b_j}{a_{ji}}$ con a_{ji} **positivo**.
 - ▶ Si no hay a_{ji} **positivo**, problema es no acotado.
- ➍ Qué sucede con **SBF degeneradas**?

El Tableau

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c} & 0 \end{array} \right]$$

El Tableau

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c} & 0 \end{array} \right]$$

- Variables básicas: $\mathbf{x}_B = [x_1; x_2; \dots; x_m]$,

El Tableau

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c} & 0 \end{array} \right]$$

- Variables básicas: $\mathbf{x}_B = [x_1; x_2; \dots; x_m]$, $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B; \mathbf{x}_N]$.

El Tableau

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c} & 0 \end{array} \right]$$

- Variables básicas: $\mathbf{x}_B = [x_1; x_2; \dots; x_m]$, $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B; \mathbf{x}_N]$.
- $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_B; \mathbf{c}_N]$

El Tableau

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c} & 0 \end{array} \right]$$

- Variables básicas: $\mathbf{x}_B = [x_1; x_2; \dots; x_m]$, $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B; \mathbf{x}_N]$.
- $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_B; \mathbf{c}_N] \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$.

El Tableau

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c} & 0 \end{array} \right]$$

- Variables básicas: $\mathbf{x}_B = [x_1; x_2; \dots; x_m]$, $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B; \mathbf{x}_N]$.
- $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_B; \mathbf{c}_N] \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$.
- $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots | \mathbf{a}_m]$

El Tableau

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c} & 0 \end{array} \right]$$

- Variables básicas: $\mathbf{x}_B = [x_1; x_2; \dots; x_m]$, $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B; \mathbf{x}_N]$.
- $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_B; \mathbf{c}_N] \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$.
- $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots | \mathbf{a}_m] \Rightarrow \mathbf{B} \mathbf{x}_B = \mathbf{b}$

El Tableau

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c} & 0 \end{array} \right]$$

- Variables básicas: $\mathbf{x}_B = [x_1; x_2; \dots; x_m]$, $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_B; \mathbf{x}_N]$.
- $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_B; \mathbf{c}_N] \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$.
- $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots | \mathbf{a}_m] \Rightarrow \mathbf{B} \mathbf{x}_B = \mathbf{b}$.

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{N} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{N} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array} \right]$$

Queremos:

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{N} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array} \right]$$

Queremos:

- 1 Reemplazar \mathbf{B} por \mathbf{I} .

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{N} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array} \right]$$

Queremos:

- ① Reemplazar \mathbf{B} por \mathbf{I} .
- ② Reemplazar \mathbf{c}_B por $\mathbf{0}$.

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{N} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array} \right]$$

Queremos:

- ❶ Reemplazar \mathbf{B} por \mathbf{I} .
- ❷ Reemplazar \mathbf{c}_B por $\mathbf{0}$.
- ❶ Gauss-Jordan:

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{N} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array} \right]$$

Queremos:

- ① Reemplazar \mathbf{B} por \mathbf{I} .
- ② Reemplazar \mathbf{c}_B por $\mathbf{0}$.
- ① Gauss-Jordan: 🔔

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{N} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array} \right]$$

Queremos:

- ① Reemplazar \mathbf{B} por \mathbf{I} .
- ② Reemplazar \mathbf{c}_B por $\mathbf{0}$.
- ① Gauss-Jordan: 🔔

$$\mathbf{T}' = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{N} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array} \right]$$

Queremos:

- ① Reemplazar \mathbf{B} por \mathbf{I} .
- ② Reemplazar \mathbf{c}_B por $\mathbf{0}$.
- ① Gauss-Jordan: 🔔

$$\mathbf{T}' = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array} \right]$$

- ② Multiplicar primera fila por \mathbf{c}_B^T , restarla a la segunda:

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{N} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array} \right]$$

Queremos:

- ① Reemplazar \mathbf{B} por \mathbf{I} .
- ② Reemplazar \mathbf{c}_B por $\mathbf{0}$.
- ① Gauss-Jordan: 🔔

$$\mathbf{T}' = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array} \right]$$

- ② Multiplicar primera fila por \mathbf{c}_B^T , restarla a la segunda:

$$\mathbf{T}'' = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & -\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array} \right]$$

Interpretando el Tableau

$$\mathbf{T}'' = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline 0 & \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array} \right]$$

Interpretando el Tableau

$$\mathbf{T}'' = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array} \right]$$

- La ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \underbrace{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{x}_B}$$

Interpretando el Tableau

$$\mathbf{T}'' = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array} \right]$$

- La ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \underbrace{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{x}_B}$$

- El costo actual es:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})}_{\mathbf{r}} \mathbf{x}_N + \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Interpretando el Tableau

$$\mathbf{T}'' = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array} \right]$$

- La ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \underbrace{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{x}_B}$$

- El costo actual es:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})}_{\mathbf{r}} \mathbf{x}_N + \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Costos Reducidos

Costos Reducidos

- $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$: costos reducidos.

Costos Reducidos

- $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$: costos reducidos.
- Si $\mathbf{r} \geq 0$ el costo no se puede reducir (SBF actual es óptima).

Costos Reducidos

- $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$: costos reducidos.
- Si $\mathbf{r} \geq 0$ el costo no se puede reducir (SBF actual es óptima).
- Si $\mathbf{r} \not\geq 0$ cualquier componente negativo de \mathbf{r} corresponde a un borde a lo largo del cual el costo se reduce.

Costos Reducidos

- $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$: costos reducidos.
- Si $\mathbf{r} \geq 0$ el costo no se puede reducir (SBF actual es óptima).
- Si $\mathbf{r} \not\geq 0$ cualquier componente negativo de \mathbf{r} corresponde a un borde a lo largo del cual el costo se reduce.
- Usualmente se selecciona el componente r_i más negativo.

Costos Reducidos

- $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$: costos reducidos.
- Si $\mathbf{r} \geq 0$ el costo no se puede reducir (SBF actual es óptima).
- Si $\mathbf{r} \not\geq 0$ cualquier componente negativo de \mathbf{r} corresponde a un borde a lo largo del cual el costo se reduce.
- Usualmente se selecciona el componente r_i más negativo.
- Esto quiere decir que el componente i de \mathbf{x}_N se vuelve positivo.

Variable Saliente

- Variable entrante $x_i \rightarrow \alpha$

Variable Saliente

- Variable entrante $x_i \rightarrow \alpha$
- $\alpha = ?$

Variable Saliente

- Variable entrante $x_i \rightarrow \alpha$
- $\alpha = ?$
- $x_i \rightarrow \alpha \Rightarrow x_j \rightarrow 0$ si el coeficiente de x_j es positivo.

Variable Saliente

- Variable entrante $x_i \rightarrow \alpha$
- $\alpha = ?$
- $x_i \rightarrow \alpha \Rightarrow x_j \rightarrow 0$ si el coeficiente de x_j es positivo.

Variable saliente x_k es aquella que se vuelve cero primero:

Sea \mathbf{u} la i -ésima columna de \mathbf{N} (correspondiente a x_i), entonces su valor en la nueva SBF es:

$$\alpha = \min_{j: (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{u})_j > 0} \frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_j}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{u})_j} = \frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_k}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{u})_k}$$

Variable Saliente

- Variable entrante $x_i \rightarrow \alpha$
- $\alpha = ?$
- $x_i \rightarrow \alpha \Rightarrow x_j \rightarrow 0$ si el coeficiente de x_j es positivo.

Variable saliente x_k es aquella que se vuelve cero primero:

Sea \mathbf{u} la i -ésima columna de \mathbf{N} (correspondiente a x_i), entonces su valor en la nueva SBF es:

$$\alpha = \min_{j: (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{u})_j > 0} \frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_j}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{u})_j} = \frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_k}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{u})_k}$$

- Si $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{u} \leq 0$ el problema es no acotado, el costo mínimo es $-\infty$.

Simplex

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{N} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array} \right]$$

- 1 Tableau original.

Simplex

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array} \right]$$

- 1 Tableau original.
- 2 Gauss-Jordan.

Simplex

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array} \right]$$

- 1 Tableau original.
- 2 Gauss-Jordan.

Simplex

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{0} & [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_{n-m}] & -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \end{array} \right]$$

① Tableau original.

② Gauss-Jordan.

③ ▶ $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_{n-m}]$

Simplex

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \cdots | \mathbf{u}_{n-m}] & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{0} & [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_{n-m}] & -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array} \right]$$

① Tableau original.

② Gauss-Jordan.

- ③
- ▶ $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} = [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_{n-m}]$
 - ▶ $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} = [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \cdots | \mathbf{u}_{n-m}]$

Simplex

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \cdots | \mathbf{u}_i | \cdots | \mathbf{u}_{n-m}] \\ \hline \mathbf{0} & [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_i \ \dots \ r_{n-m}] \end{array} \middle| \begin{array}{c} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array} \right]$$

- ① Tableau original.
- ② Gauss-Jordan.
- ③
 - ▶ $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_{n-m}]$
 - ▶ $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} = [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \cdots | \mathbf{u}_{n-m}]$
- ④ Escoger columna \mathbf{u}_i correspondiente a r_i más negativo.

Simplex

$$\left[\begin{array}{c|c|c} [\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2 | \dots | \mathbf{e}_m] & [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \dots | \mathbf{u}_i \dots | \mathbf{u}_{n-m}] & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ \hline [0 \ 0 \ \dots \ 0] & [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_i \ \dots \ r_{n-m}] & -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \end{array} \right]$$

- ① Tableau original.
- ② Gauss-Jordan.
- ③
 - ▶ $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_{n-m}]$
 - ▶ $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} = [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \dots | \mathbf{u}_{n-m}]$
- ④ Escoger columna \mathbf{u}_i correspondiente a r_i más negativo.

Simplex

$$\left[\begin{array}{c|c|c} [\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2 | \dots | \mathbf{e}_k | \dots | \mathbf{e}_m] & [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \dots | \mathbf{u}_i | \dots | \mathbf{u}_{n-m}] & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ \hline [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 0] & [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_i \ \dots \ r_{n-m}] & -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \end{array} \right]$$

- ① Tableau original.
- ② Gauss-Jordan.
- ③
 - ▶ $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_{n-m}]$
 - ▶ $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} = [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \dots | \mathbf{u}_{n-m}]$
- ④ Escoger columna \mathbf{u}_i correspondiente a r_i más negativo.
- ⑤ Escoger columna a salir de la base.

Simplex

$$\left[\begin{array}{c|c|c} [\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2 | \dots | \mathbf{u}_i | \dots | \mathbf{e}_m] & [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \dots | \mathbf{e}_k | \dots | \mathbf{u}_{n-m}] & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ \hline [0 \ 0 \ \dots | r_i | \dots \ 0] & [r_1 \ r_2 \ \dots \ 0 \ \dots \ r_{n-m}] & -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \end{array} \right]$$

- ① Tableau original.
- ② Gauss-Jordan.
- ③
 - ▶ $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_{n-m}]$
 - ▶ $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} = [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \dots | \mathbf{u}_{n-m}]$
- ④ Escoger columna \mathbf{u}_i correspondiente a r_i más negativo.
- ⑤ Escoger columna a salir de la base.
- ⑥ Reemplazar.

Simplex

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B} & \mathbf{N} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array} \right]$$

- ① Tableau original.
- ② Gauss-Jordan.
- ③
 - ▶ $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_{n-m}]$
 - ▶ $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} = [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \dots | \mathbf{u}_{n-m}]$
- ④ Escoger columna \mathbf{u}_i correspondiente a r_i más negativo.
- ⑤ Escoger columna a salir de la base.
- ⑥ Reemplazar.
- ⑦ De nuevo.

Ejemplo

$$\begin{array}{ll}\text{mín} & -3x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{sujeto a} & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

Ejemplo

$$\begin{array}{ll}\text{mín} & -3x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{sujeto a} & 2x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + y_2 = 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + y_3 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0\end{array}$$

Ejemplo

$$\begin{array}{ll}\text{mín} & -3x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{sujeto a} & 2x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + y_2 = 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + y_3 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0\end{array}$$

- SBF inicial: $y_1 = 2, y_2 = 5, y_3 = 6, x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Ejemplo

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
2	1	1	1	0	0	2
1	2	3	0	1	0	5
2	2	1	0	0	1	6
<hr/>						
-3	-1	-3	0	0	0	0

Ejemplo

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
2	1	1	1	0	0	2
1	2	3	0	1	0	5
2	2	1	0	0	1	6
<hr/>						
-3	-1	-3	0	0	0	0

Ejemplo

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
2	1	1	1	0	0	2
1	2	3	0	1	0	5
2	2	1	0	0	1	6
<hr/>						
-3	-1	-3	0	0	0	0

Ejemplo

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
2	1	1	1	0	0	2
1	2	3	0	1	0	5
2	2	1	0	0	1	6
<hr/>						
-3	-1	-3	0	0	0	0

Ejemplo

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
2	1	1	1	0	0	2
1	2	3	0	1	0	5
2	2	1	0	0	1	6
<hr/>						
-3	-1	-3	0	0	0	0

Ejemplo

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
2	1	1	1	0	0	2
1	2	3	0	1	0	5
2	2	1	0	0	1	6
<hr/>						
-3	-1	-3	0	0	0	0

Ejemplo

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
2	1	1	1	0	0	2
1	2	3	0	1	0	5
2	2	1	0	0	1	6
<hr/>						
-3	-1	-3	0	0	0	0

Ejemplo

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
2	1	1	1	0	0	2
1	2	3	0	1	0	5
2	2	1	0	0	1	6
<hr/>						
-3	-1	-3	0	0	0	0

Ejemplo

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
2	1	1	1	0	0	2
1	2	3	0	1	0	5
2	2	1	0	0	1	6
<hr/>						
-3	-1	-3	0	0	0	0

Ejemplo

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
2	1	1	1	0	0	2
1	2	3	0	1	0	5
2	2	1	0	0	1	6
<hr/>						
-3	-1	-3	0	0	0	0

Ejemplo

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
2	1	1	1	0	0	2
1	2	3	0	1	0	5
2	2	1	0	0	1	6
<hr/>						
-3	-1	-3	0	0	0	0

Ejemplo

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
2	1	1	1	0	0	2
1	2	3	0	1	0	5
2	2	1	0	0	1	6
<hr/>						
-3	-1	-3	0	0	0	0

Ejemplo

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
2	1	1	1	0	0	2
-3	0	1	-2	1	0	1
-2	0	-1	-2	0	1	2
<hr/>						
-1	0	-2	1	0	0	2

Ejemplo

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
2	1	1	1	0	0	2
-3	0	1	-2	1	0	1
-2	0	-1	-2	0	1	2
<hr/>						
-1	0	-2	1	0	0	2

Ejemplo

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
2	1	1	1	0	0	2
-3	0	1	-2	1	0	1
-2	0	-1	-2	0	1	2
<hr/>						
-1	0	-2	1	0	0	2

Ejemplo

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
2	1	1	1	0	0	2
-3	0	1	-2	1	0	1
-2	0	-1	-2	0	1	2
<hr/>						
-1	0	-2	1	0	0	2

Ejemplo

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
5	1	0	3	-1	0	1
-3	0	1	-2	1	0	1
-5	0	0	-4	1	1	3
<hr/>						
-7	0	0	-3	2	0	4

Ejemplo

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
5	1	0	3	-1	0	1
-3	0	1	-2	1	0	1
-5	0	0	-4	1	1	3
<hr/>						
-7	0	0	-3	2	0	4

Ejemplo

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
5	1	0	3	-1	0	1
-3	0	1	-2	1	0	1
-5	0	0	-4	1	1	3
<hr/>						
-7	0	0	-3	2	0	4

Ejemplo

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
5	1	0	3	-1	0	1
-3	0	1	-2	1	0	1
-5	0	0	-4	1	1	3
<hr/>						
-7	0	0	-3	2	0	4

Ejemplo

$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{a_3}$	$\mathbf{a_4}$	$\mathbf{a_5}$	$\mathbf{a_6}$	\mathbf{b}
1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
0	$\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{8}{5}$
0	1	0	-1	0	1	4
<hr/>						
0	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{27}{5}$

Ejemplo

$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{a_3}$	$\mathbf{a_4}$	$\mathbf{a_5}$	$\mathbf{a_6}$	\mathbf{b}
1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
0	$\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{8}{5}$
0	1	0	-1	0	1	4
<hr/>						
0	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{27}{5}$

- Solución óptima:

Ejemplo

$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{a_3}$	$\mathbf{a_4}$	$\mathbf{a_5}$	$\mathbf{a_6}$	\mathbf{b}
1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
0	$\frac{3}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{8}{5}$
0	1	0	-1	0	1	4
<hr/>						
0	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{27}{5}$

- Solución óptima: $x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = 0, x_3 = \frac{8}{5}$

SBF inicial?

SBF inicial?

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

sujeto a

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

- Restricciones con Desigualdad.

SBF inicial?

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \\ [\mathbf{A}|\mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq 0 \end{aligned}$$

- Restricciones con Desigualdad.
- Variables de holgura dan **SBF** inicial.

SBF inicial?

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

sujeto a

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

- Forma estándar.

SBF inicial?

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y}} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{y} \\ \text{sujeto a} \quad & \\ \mathbf{Ax} + \mathbf{y} = & \mathbf{b} \\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq & 0 \end{aligned}$$

- Forma estándar.
- Problema auxiliar

SBF inicial?

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y}} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{y} \\ \text{sujeto a} \quad & \\ \mathbf{Ax} + \mathbf{y} = & \mathbf{b} \\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq & 0 \end{aligned}$$

- Forma estándar.
- Problema auxiliar
- Resolver usando simplex (ya tenemos SBF inicial!)

SBF inicial?

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y}} \quad & \mathbf{1}^T \mathbf{y} \\ \text{sujeto a} \quad & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = & \mathbf{b} \\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq & 0 \end{aligned}$$

- Forma estándar.
- Problema auxiliar
- Resolver usando simplex (ya tenemos SBF inicial!)
- Si el costo mínimo es 0, tenemos $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, y el \mathbf{x} resultante es SBF del problema original.

Ejemplo

Considere el programa lineal: $\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ sujeto a $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, donde

$$\mathbf{c}^T = [2 \quad 3 \quad 2 \quad 2], \quad \mathbf{b}^T = [3 \quad 5], \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ son las columnas de \mathbf{A} , y $\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6$ las columnas adicionales resultantes al añadir variables de holgura

Base	SBF?	SBF óptima?	Costo
$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]$			
$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3]$			
$[\mathbf{a}_4 \mathbf{a}_6]$			

Base	SBF?	SBF óptima?	Costo
$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]$			
$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3]$			
$[\mathbf{a}_4 \mathbf{a}_6]$			

Base	SBF?	SBF óptima?	Costo
$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]$			
$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3]$			
$[\mathbf{a}_4 \mathbf{a}_6]$			

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Base	SBF?	SBF óptima?	Costo
$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]$	NO	NO	X
$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3]$			
$[\mathbf{a}_4 \mathbf{a}_6]$			

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Base	SBF?	SBF óptima?	Costo
$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]$	NO	NO	X
$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3]$			
$[\mathbf{a}_4 \mathbf{a}_6]$			

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Base	SBF?	SBF óptima?	Costo
$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]$	NO	NO	X
$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3]$	SI	NO	6
$[\mathbf{a}_4 \mathbf{a}_6]$			

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Base	SBF?	SBF óptima?	Costo
$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]$	NO	NO	X
$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3]$	SI	NO	6
$[\mathbf{a}_4 \mathbf{a}_6]$			

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{es factible.}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} &= [2 \quad 3 \quad 2 \quad 0] - \left([2 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= [2 \quad 3 \quad 2 \quad 0] - [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= [2 \quad 3 \quad 2 \quad 0] - [1 \quad 2 \quad 1 \quad -1] = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \end{aligned}$$

Base	SBF?	SBF óptima?	Costo
$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]$	NO	NO	X
$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3]$	SI	NO	6
$[\mathbf{a}_4 \mathbf{a}_6]$	SI	SI	3

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{es factible.}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El Método Simplex Revisado

El Método Simplex Revisado

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array} \right]$$

- En cada paso del Simplex se calcula $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$

El Método Simplex Revisado

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}[\mathbf{n}_1 | \mathbf{n}_2 | \dots | \mathbf{n}_{n-m}] & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T & 0 \end{array} \right]$$

- En cada paso del Simplex se calcula $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$
- Puede verse como multiplicar cada columna de \mathbf{N} por \mathbf{B}^{-1}

El Método Simplex Revisado

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{n}_1 | \mathbf{B}^{-1}\mathbf{n}_2 | \dots | \mathbf{B}^{-1}\mathbf{n}_{n-m}] \\ \hline \mathbf{0} & [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_{n-m}] \end{array} \middle| \begin{array}{c} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array} \right]$$

- En cada paso del Simplex se calcula $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$
- Puede verse como multiplicar cada columna de \mathbf{N} por \mathbf{B}^{-1}
- Sólo escogemos una columna en cada paso.

El Método Simplex Revisado

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{n}_1 | \mathbf{B}^{-1}\mathbf{n}_2 | \dots \mathbf{B}^{-1}\mathbf{n}_i \dots | \mathbf{B}^{-1}\mathbf{n}_{n-m} \\ \hline \mathbf{0} & [r_1 \ r_2 \ \dots r_i \ \dots \ r_{n-m}] \end{array} \middle| \begin{array}{c} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array} \right]$$

- En cada paso del Simplex se calcula $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$
- Puede verse como multiplicar cada columna de \mathbf{N} por \mathbf{B}^{-1}
- Sólo escogemos una columna en cada paso.
- Muchas columnas de calculan pero no se usan.

El Método Simplex Revisado

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{n}_1 | \mathbf{B}^{-1}\mathbf{n}_2 | \dots \mathbf{B}^{-1}\mathbf{n}_i \dots | \mathbf{B}^{-1}\mathbf{n}_{n-m} \\ \hline \mathbf{0} & [r_1 \ r_2 \ \dots r_i \ \dots \ r_{n-m}] \end{array} \middle| \begin{array}{c} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array} \right]$$

- En cada paso del Simplex se calcula $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$
- Puede verse como multiplicar cada columna de \mathbf{N} por \mathbf{B}^{-1}
- Sólo escogemos una columna en cada paso.
- Muchas columnas de calculan pero no se usan.
- Crítico en problemas grandes.

El Método Simplex Revisado

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{n}_1 | \mathbf{B}^{-1}\mathbf{n}_2 | \dots \mathbf{B}^{-1}\mathbf{n}_i \dots | \mathbf{B}^{-1}\mathbf{n}_{n-m} \\ \hline \mathbf{0} & [r_1 \ r_2 \ \dots r_i \ \dots \ r_{n-m}] \end{array} \middle| \begin{array}{c} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array} \right]$$

- En cada paso del Simplex se calcula $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$
- Puede verse como multiplicar cada columna de \mathbf{N} por \mathbf{B}^{-1}
- Sólo escogemos una columna en cada paso.
- Muchas columnas de calculan pero no se usan.
- Crítico en problemas grandes.
- **Idea:** Mantener \mathbf{B}^{-1} actualizada, sólo calcular columnas que se requieren en cada paso.

El Método Simplex Revisado

Un paso del método Simplex

- ① Calcule el vector fila $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ y los costos reducidos $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{N}$.

El Método Simplex Revisado

Un paso del método Simplex

- ① Calcule el vector fila $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ y los costos reducidos $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{N}$.
- ② Si $\mathbf{r} \geq 0$ termine. solución actual es óptima.

El Método Simplex Revisado

Un paso del método Simplex

- ① Calcule el vector fila $\lambda^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ y los costos reducidos $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \lambda^T \mathbf{N}$.
- ② Si $\mathbf{r} \geq 0$ termine. solución actual es óptima. Si no, escoja la columna \mathbf{u} de \mathbf{N} correspondiente al r_i más negativo, para insertarla en la base.

El Método Simplex Revisado

Un paso del método Simplex

- ① Calcule el vector fila $\lambda^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ y los costos reducidos $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \lambda^T \mathbf{N}$.
- ② Si $\mathbf{r} \geq 0$ termine. solución actual es óptima. Si no, escoja la columna \mathbf{u} de \mathbf{N} correspondiente al r_i más negativo, para insertarla en la base.
- ③ Calcule $\mathbf{v} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}$.

El Método Simplex Revisado

Un paso del método Simplex

- ① Calcule el vector fila $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ y los costos reducidos $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{N}$.
- ② Si $\mathbf{r} \geq 0$ termine. solución actual es óptima. Si no, escoja la columna \mathbf{u} de \mathbf{N} correspondiente al r_i más negativo, para insertarla en la base.
- ③ Calcule $\mathbf{v} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}$.
- ④

$$\alpha = \min_{j: (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{u})_j > 0} \frac{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})_j}{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{u})_j} = \frac{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})_k}{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{u})_k}$$

El Método Simplex Revisado

Un paso del método Simplex

- ① Calcule el vector fila $\lambda^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ y los costos reducidos $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \lambda^T \mathbf{N}$.
- ② Si $\mathbf{r} \geq 0$ termine. solución actual es óptima. Si no, escoja la columna \mathbf{u} de \mathbf{N} correspondiente al r_i más negativo, para insertarla en la base.
- ③ Calcule $\mathbf{v} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}$.
- ④

$$\alpha = \min_{j: (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{u})_j > 0} \frac{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})_j}{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{u})_j} = \frac{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})_k}{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{u})_k}$$

Reemplazar columna k de \mathbf{B} .

El Método Simplex Revisado

Un paso del método Simplex

- ① Calcule el vector fila $\lambda^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ y los costos reducidos $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \lambda^T \mathbf{N}$.
- ② Si $\mathbf{r} \geq 0$ termine. solución actual es óptima. Si no, escoja la columna \mathbf{u} de \mathbf{N} correspondiente al r_i más negativo, para insertarla en la base.
- ③ Calcule $\mathbf{v} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}$.

④

$$\alpha = \min_{j: (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{u})_j > 0} \frac{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})_j}{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{u})_j} = \frac{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})_k}{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{u})_k}$$

Reemplazar columna k de \mathbf{B} .

- ⑤ Actualice \mathbf{B}^{-1} y la solución $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$.

El Método Simplex Revisado

Un paso del método Simplex

- ① Calcule el vector fila $\lambda^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$ y los costos reducidos $\mathbf{r} = \mathbf{c}_N^T - \lambda^T \mathbf{N}$.
- ② Si $\mathbf{r} \geq 0$ termine. solución actual es óptima. Si no, escoja la columna \mathbf{u} de \mathbf{N} correspondiente al r_i más negativo, para insertarla en la base.
- ③ Calcule $\mathbf{v} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}$.
- ④

$$\alpha = \min_{j: (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{u})_j > 0} \frac{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})_j}{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{u})_j} = \frac{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b})_k}{(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{u})_k}$$

Reemplazar columna k de \mathbf{B} .

- ⑤ Actualice \mathbf{B}^{-1} y la solución $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$.

- Requerimos calcular $\lambda^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{v} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}$ y $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$.

Primer método

- Calcular explícitamente \mathbf{B}^{-1} en la primera SBF.

Primer método

- Calcular explícitamente \mathbf{B}^{-1} en la primera SBF.
- Al intercambiar \mathbf{e}_k por \mathbf{v} actualizamos \mathbf{B}^{-1} multiplicando por:

Primer método


- Calcular explícitamente \mathbf{B}^{-1} en la primera SBF.
- Al intercambiar \mathbf{e}_k por \mathbf{v} actualizamos \mathbf{B}^{-1} multiplicando por:

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & . & v_1 & . & . \\ . & . & \vdots & . & . \\ . & . & v_k & . & . \\ . & . & \vdots & . & . \\ . & . & v_m & . & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & . & -v_1/v_k & . & . \\ . & . & \vdots & . & . \\ . & . & 1/v_k & . & . \\ . & . & \vdots & . & . \\ . & . & -v_m/v_k & . & 1 \end{bmatrix}$$

Primer método

- Calcular explícitamente \mathbf{B}^{-1} en la primera SBF.
- Al intercambiar \mathbf{e}_k por \mathbf{v} actualizamos \mathbf{B}^{-1} multiplicando por:


$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & . & v_1 & . & . \\ . & . & \vdots & . & . \\ . & . & v_k & . & . \\ . & . & \vdots & . & . \\ . & . & v_m & . & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & . & -v_1/v_k & . & . \\ . & . & \vdots & . & . \\ . & . & 1/v_k & . & . \\ . & . & \vdots & . & . \\ . & . & -v_m/v_k & . & 1 \end{bmatrix}$$

- Se puede verificar  que \mathbf{BE} tiene $\mathbf{u} = \mathbf{Bv}$ en su columna k , luego $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$ es la nueva inversa.

Primer método

- Calcular explícitamente \mathbf{B}^{-1} en la primera SBF.
- Al intercambiar \mathbf{e}_k por \mathbf{v} actualizamos \mathbf{B}^{-1} multiplicando por:

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & . & v_1 & . & . \\ . & . & \vdots & . & . \\ . & . & v_k & . & . \\ . & . & \vdots & . & . \\ . & . & v_m & . & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & . & -v_1/v_k & . & . \\ . & . & \vdots & . & . \\ . & . & 1/v_k & . & . \\ . & . & \vdots & . & . \\ . & . & -v_m/v_k & . & 1 \end{bmatrix}$$

- Se puede verificar  que $\mathbf{B}\mathbf{E}$ tiene $\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{v}$ en su columna k , luego $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$ es la nueva inversa.
- Periódicamente se recalcula \mathbf{B}^{-1} . Criterio de error es $|\mathbf{B}\mathbf{x}_B - \mathbf{b}|$, donde $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ con el valor actual de \mathbf{B}^{-1} .

Segundo método

- Resolver $\lambda^T \mathbf{B} = \mathbf{c}_B^T$, $\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{u}$ y $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$.

Segundo método

- Resolver $\lambda^T \mathbf{B} = \mathbf{c}_B^T$, $\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{u}$ y $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$.
- Tres ecuaciones con el mismo coeficiente \mathbf{B} .

Segundo método

- Resolver $\lambda^T \mathbf{B} = \mathbf{c}_B^T$, $\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{u}$ y $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$.
- Tres ecuaciones con el mismo coeficiente \mathbf{B} .
- Utilizar factorización $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{U}$.

Segundo método

- Resolver $\lambda^T \mathbf{B} = \mathbf{c}_B^T$, $\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{u}$ y $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$.
- Tres ecuaciones con el mismo coeficiente \mathbf{B} .
- Utilizar factorización $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{U}$.
- Actualizar \mathbf{L} y \mathbf{U} .

Convergencia del método Simplex


Convergencia del método Simplex

- En la práctica $\sim \frac{3}{2}m$ iteraciones


Convergencia del método Simplex

- En la práctica $\sim \frac{3}{2}m$ iteraciones $\Rightarrow m^2n$ operaciones.


Convergencia del método Simplex

- En la práctica $\sim \frac{3}{2}m$ iteraciones $\Rightarrow m^2n$ operaciones. 


Convergencia del método Simplex

- En la práctica $\sim \frac{3}{2}m$ iteraciones $\Rightarrow m^2n$ operaciones. 
- Existen ejemplos en el que el simplex debe visitar todas las esquinas

Convergencia del método Simplex

- En la práctica $\sim \frac{3}{2}m$ iteraciones $\Rightarrow m^2n$ operaciones. 
- Existen ejemplos en el que el simplex debe visitar todas las esquinas (**tiempo exponencial!**).

Convergencia del método Simplex

- En la práctica $\sim \frac{3}{2}m$ iteraciones $\Rightarrow m^2n$ operaciones. 
- Existen ejemplos en el que el simplex debe visitar todas las esquinas (**tiempo exponencial!**).
- Métodos de punto interior (Karmarkar) corren en tiempo polinomial.