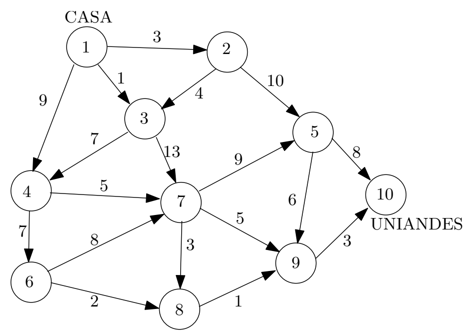
Optimización[1].

Examen Parcial #2
Nombre: 1 de mayo de 2008

---

1. Suponga que usted se encuentra en su casa y se le ha hecho tarde para ir a la Universidad a presentar su examen de optimización (probablemente usted ha querido aprovechar hasta el último segundo estudiando para este examen). Usted toma un taxi y debe indicarle al conductor la ruta que lo lleve en el menor tiempo posible a la Universidad. En la figura se muestran las rutas posibles como un grafo, en el cual se indica en cada arco tiempo en minutos que toma ir entre los dos puntos correspondientes. Formule este problema como un problema de flujo de costo mínimo. (Ayuda: Problema de la tarea 5!).



El problema se puede plantear como un problema de flujo de costo mínimo en el que $b_1 = 1$, $b_10 = -1$ y $b_i = 0$ para los demás vértices. Denotando por x_{i-j} el flujo entre el vértice i y el vértice j, y $i \to j$ subíndices i, j tal que hay un arco del vértice i al vértice j tenemos:

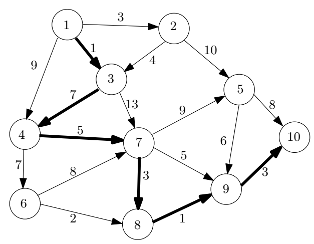
$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{i-j} \\
\text{sujeto a} \quad & x_{1-2} + x_{1-3} + x_{1-4} = 1 \\
& x_{8-10} + x_{3-10} = -1 \\
& \sum_{j\to i} x_{j-i} - \sum_{i\to j} x_{i-j} = 0, \quad i = 2,3,4,5,6,7,8,9. \\
& x_{i-j} \geq 0
\end{aligned}
$$

(note que la unimodularidad de la matriz de incidencia garantiza que en el óptimo $x_{i-j} = 0$ o 1).

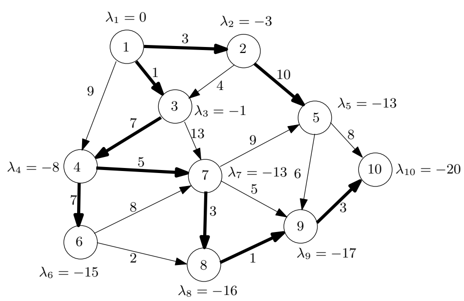
---

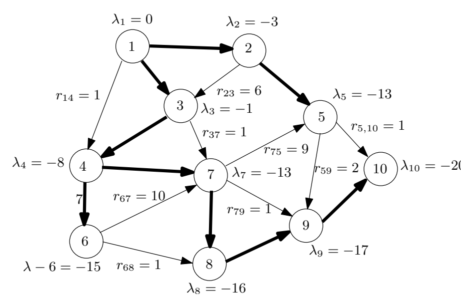
[1]El examen se debe elaborar individualmente. No se permite el uso de ningún material (libros,notas, etc) ni de calculadora. Usted debe justificar todas sus respuestas. Una respuesta que aparezca de la nada no tiene ningún valor.

2. Suponga que en el problema anterior el taxista sugiere la ruta mostrada en la figura con flechas más gruesas. **Utilice sus conocimientos en el método simplex y problemas de flujo de costo mínimo** para decir si esta ruta es óptima o no. Si la ruta no es óptima, encuentre una ruta que si lo sea. (Sugerencia: Complete en la figura un árbol expandiente. Note que la SBF resultante es degenerada).



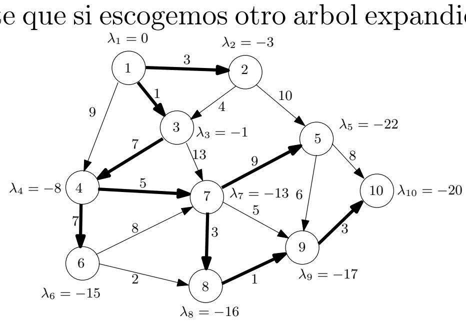
Completando un arbol expandiente, calculamos los multiplicadores simplex con $\lambda_i - \lambda_j = c_{ij}$ (con $\lambda_1 = 0$), y los costos reducidos $r_{ij} = c_{ij} - (\lambda_i - \lambda_j)$:

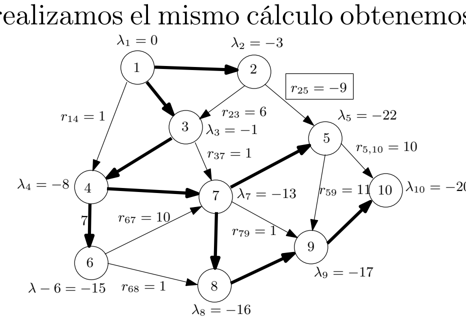




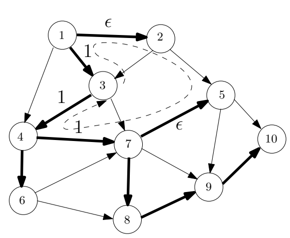
Tenemos $r_{ij} \geq 0$, luego la solución es óptima.

Note que si escogemos otro arbol expandiente y realizamos el mismo cálculo obtenemos:





Esta indicaría que la solución no es óptima. Sin embargo, note que la SBF es degenerada: los arcos en el árbol que no están en la ruta tiene flujo cero. Asignando un flujo ϵ a estos arcos, determinamos la variable a salir:



Lo cual resulta en el primer arbol expandiente, que sabemos que corresponde a una SBF óptima.

3. Considere la función $f(x_1, x_2) = \frac{a}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + bx_1x_2 + x_1 + x_2$. Grafique en el plano $a - b$ la región para la cual esta función tiene un único mínimo global.

$$\nabla f^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = a \pm b$$

f tiene un mínimo global si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, es decir $a > b$ y $a > -b$.