Serie de Gradiente (Geométrico y Aritmético) y su Relación con el Presente.

Ciertos proyectos de inversión generan flujos de efectivo que crecen o disminuyen una cierta *cantidad* constante cada período. Por ejemplo, los gastos de mantenimiento de un cierto equipo se pueden incrementar una cierta cantidad constante cada período. También, es posible que ciertos proyectos generen flujos que se incrementen un cierto *porcentaje* constante por cada período. Este último caso se comprende fácilmente cuando se supone que los flujos por el efecto de la inflación crecen un cierto porcentaje constante por período.

A esta razón de crecimiento constante (cantidad o porcentaje) en ingeniería económica se le conoce con el nombre de *"Gradiente"*.

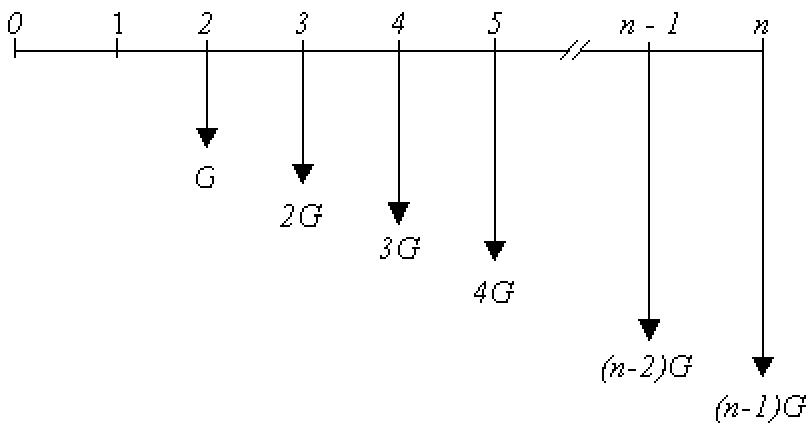
Gradiente Aritmético:

Un gradiente aritmético ***(G)*** o uniforme es una serie de flujos de caja que aumenta o disminuye de manera uniforme. Es decir que el flujo de caja, ya sea ingreso o desembolso, cambia en la misma cantidad cada año. La cantidad de aumento o disminución es el *gradiente*.

Al desarrollar una formula que se pueda utilizar para gradientes aritméticos o uniformes es conveniente suponer que el primer flujo de la serie se encuentra al final del período 1 y no involucra un gradiente, sino un *pago base*.

G = Cambio uniforme aritmético en la magnitud de las entradas o en los ingresos o desembolsos para un período de tiempo.

El valor de *G* puede ser positivo o negativo. Si ignoramos el pago base, podríamos construir un diagrama generalizado de flujo de caja de gradiente creciente uniforme como se muestra en la siguiente figura.



Serie de gradiente uniforme ignorando la cantidad base.

Determinación del presente de la serie gradiente uniforme (aritmético):

(1) (1) $$P = G\left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1+i)^3} + \frac{3}{(1+i)^4} + \frac{4}{(1+i)^5} + \ldots + \frac{(n-2)}{(1+i)^{n-1}} + \frac{(n-1)}{(1+i)^n}\right]$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por *(1+i)*, resulta:

(2) (2) $$P(1+i) = G\left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{2}{(1+i)^2} + \frac{3}{(1+i)^3} + \frac{4}{(1+i)^4} + \ldots + \frac{(n-2)}{(1+i)^{n-2}} + \frac{(n-1)}{(1+i)^{n-1}}\right]$$

Restando la ecuación (2) menos (1):

$$P(1+i) - P = G\left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{(2-1)}{(1+i)^2} + \frac{(3-2)}{(1+i)^3} + \frac{(4-3)}{(1+i)^4} + \ldots + \frac{(n-1)-(n-2)}{(1+i)^{n-1}} - \frac{(n-1)}{(1+i)^n}\right]$$

Despejando:

$$P + Pi - P = G\left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1-n}{(1+i)^n}\right]$$

$$P = \frac{G}{i}\left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

La expresión entre llaves es el valor presente de una serie uniformes de *1* a *n* años.

$$P = \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

Factorizando, se determina la formula para obtener el valor presente equivalente de un gradiente aritmético conocido, como:

$$P = G\left[\frac{1}{i}\right]\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]\left[\frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

Como $P = F / (1+i)^n$:

$$\frac{F}{(1+i)^n} = G\left[\frac{1}{i}\right]\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]\left[\frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

Al despejar F, pasando $(1+i)^n$ al otro lado de la ecuación, se determina la formula para obtener el valor futuro equivalente de un gradiente aritmético conocido, como:

$$F = G\left[\frac{1}{i}\right]\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

Como $F = A\left[\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$:

$$A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = G\left[\frac{1}{i}\right]\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

$$A = G\left[\frac{1}{i}\right]\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Desarrollando:

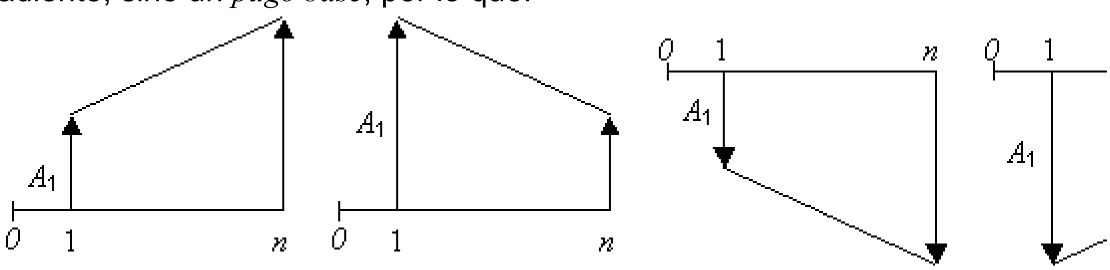
$$A = G\left[\frac{1}{i}\right]\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\left(\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right) - n\left(\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right)\right]$$

$$A = G\left[\frac{1}{i}\right]\left[1 - \frac{ni}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Por lo que una anualidad A dado un gradiente G, es:

$$A = G\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

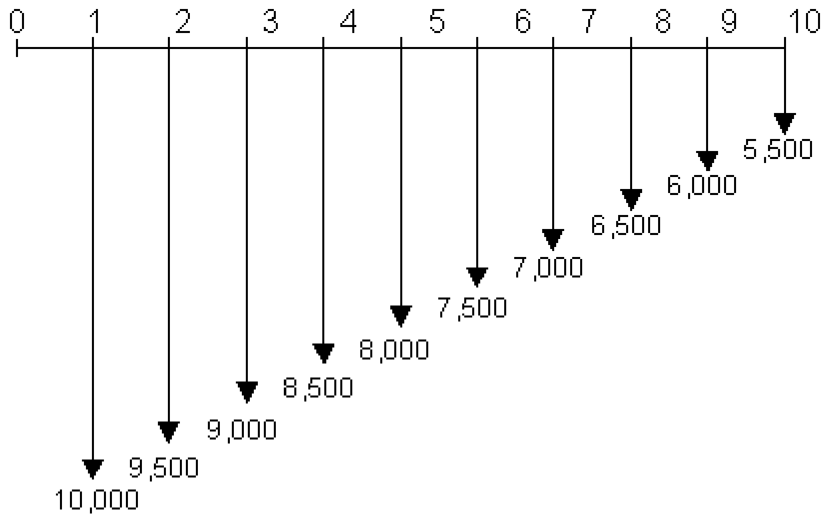
Al momento de determinar el valor presente equivalente o valor anual equivalente de una serie de flujos con gradiente uniforme (aritmético), recordar que el primer flujo de la serie se encuentra al final del período y no involucra un gradiente, sino un *pago base*; por lo que:



$P = P_A + P_G$	$P = P_A - P_G$	$P = -P_A - P_G$	$P = -P_A + P_G$
$A = A_1 + A_G$	$A = A_1 - A_G$	$A = -A_1 - A_G$	$A = -A_1 + A_G$

Problema 1(Coss Bu)

Una persona deposita en una cuenta de ahorros una cantidad anual que va disminuyendo a una cantidad constante de $ 500 por año. La magnitud del primer depósito que se hace es de $ 10,000 y el último de $ 5,500. Si en la cuenta de ahorros se gana un 15% anual ¿de qué magnitud debe ser un deposito anual constante durante el mismo tiempo para que el monto acumulado sea el mismo?



$G = 500$
$A_1 = 10{,}000$
$i = 15\%$
$n = 10$
$A = -A_1 + A_G$

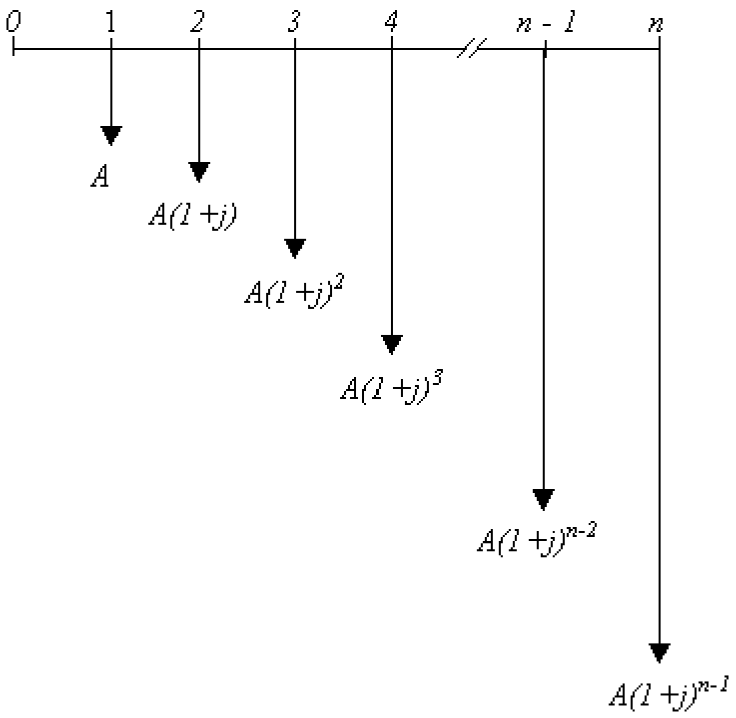
$$A = A_1 + G\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$A = -10{,}000 + 500\left[\frac{1}{.15} - \frac{10}{(1+.15)^{10} - 1}\right] = -10{,}000 + 1691.6$$

$$A = -\ 8{,}308.40$$

GRADIENTES GEOMÉTRICOS.

Algunas veces los flujos de caja cambian en porcentajes constantes en períodos consecutivos de pago, en vez de aumentos constantes de dinero. Este tipo de flujo de caja, es llamado serie de flujos de tipo gradiente geométrico o series en escalera. A los porcentajes constantes es a lo que se le conoce como *gradiente geométrico*, esto se muestra en la siguiente figura, donde A representa la cantidad de dinero en el año 1 y j representa al incremento porcentual.



$$P = \frac{A}{(1+i)} + \frac{A(1+j)}{(1+i)^2} + \frac{A(1+j)^2}{(1+i)^3} + \frac{A(1+j)^3}{(1+i)^4} + \ldots + \frac{A(1+j)^{n-2}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{A(1+j)^{n-1}}{(1+i)^n}$$

$$P = A\left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{(1+j)}{(1+i)^2} + \frac{(1+j)^2}{(1+i)^3} + \frac{(1+j)^3}{(1+i)^4} + \ldots + \frac{(1+j)^{n-2}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{(1+j)^{n-1}}{(1+i)^n}\right]$$
(1) (1)

Multiplicar ambos lados de la ecuación por $\left(\frac{1+j}{1+i}\right)$:

(2) (2)
$$P\left(\frac{1+j}{1+i}\right) = A\left[\frac{1+j}{(1+i)^2} + \frac{(1+j)^2}{(1+i)^3} + \frac{(1+j)^3}{(1+i)^4} + \frac{(1+j)^4}{(1+i)^5} + \ldots + \frac{(1+j)^{n-1}}{(1+i)^n} + \frac{(1+j)^n}{(1+i)^{n+1}}\right]$$

Restándole a la ecuación (1) la (2):

$$P - P\left(\frac{1+j}{1+i}\right) = A\left[\frac{1}{(1+i)} - \frac{(1+j)^n}{(1+i)^{n+1}}\right]$$ Multiplicar por *(1+i)* ambos lados de la ecuación

$$P + Pi - P(1+j) = A\left[1 - \frac{(1+j)^n}{(1+i)^n}\right]$$

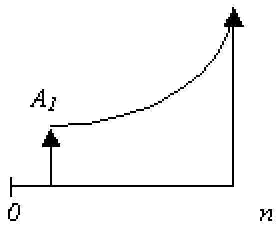
$$P + Pi - P - Pj = A\left[1 - \frac{(1+j)^n}{(1+i)^n}\right] \quad = \quad P(i-j) = A\left[1 - \frac{(1+j)^n}{(1+i)^n}\right]$$

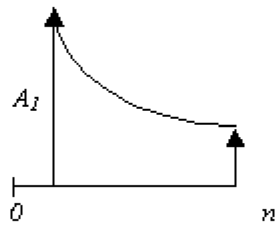
Despejando se determina la fórmula para obtener el valor presente equivalente de una serie de flujos tipo gradiente geométrico conocido, como:

$$P = A\left[\frac{1-\dfrac{(1+j)^n}{(1+i)^n}}{i-j}\right] \qquad \text{Sí: } j \neq i$$

$$P = \frac{An}{1+j} \qquad \text{Sí: } j = i$$

Al momento de determinar el valor presente equivalente o valor anual equivalente de una serie de flujos con gradiente geométrico, recordar que el primer flujo de la serie se encuentra al final del período y no involucra un gradiente, sino un *pago base*; por lo que:





$$P = A\left[\frac{1-\dfrac{(1+j)^n}{(1+i)^n}}{i-j}\right]$$

$$P = A\left[\frac{1-\dfrac{(1-j)^n}{(1+i)^n}}{i+j}\right]$$