

Profesor Coordinador: Mario Castillo

Profesores: Astrid Bernal, Carlos Castellanos, Fabio Lagos, María Alejandra López, Gonzalo Torres, Hernando Mutis.

Segundo semestre de 2015

Complementaria 11
Propiedades de los estimadores.
Distribuciones muestrales y uso de tablas.

Punto 1

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población con distribución normal. Se cuenta con 3 estimadores para la media poblacional:

$$\widehat{\mu}_1 = \frac{2(X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n)}{n(n+1)}$$

$$\widehat{\mu}_2 = \frac{X_1 + 8X_3 + 4X_7 + 5X_{10}}{18}$$

$$\widehat{\mu}_3 = \frac{X_1 + X_5 + X_8 + X_{10}}{10}$$

Tenga en cuenta que el valor esperado y la varianza para una variable aleatoria con distribución normal son:

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu \\ \text{VAR}(X) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

- a. ¿Son insesgados los estimadores?
- b. Calcule la varianza de los estimadores.
- c. Calcule el error cuadrático medio de los estimadores.
- d. ¿Cuál estimador escogería? Justifique su respuesta.

Punto 2

En un proyecto espacial se ha descubierto que la variación de temperatura cada hora en una determinada zona del planeta Krypton se distribuye como una variable aleatoria X con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f_X(x, \omega) = \begin{cases} \frac{1}{\omega} e^{-\frac{1}{\omega}x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{d.l.c} \end{cases}$$

Para continuar con el proyecto, es necesario realizar una estimación apropiada del parámetro ω , si se toma una muestra de n variaciones de temperatura independientes. Para esto, desarrolle los siguientes literales:

- Encuentre el estimador de máxima verosimilitud del parámetro ω .
- Una vez definido el estimador para el parámetro ω , el equipo del proyecto espacial tiene dudas sobre la consistencia del mismo. Pruebe si el estimador encontrado en el literal anterior es consistente.
- Para las siguientes etapas del proyecto espacial es fundamental que el estimador del parámetro ω sea eficiente. Compruebe que el estimador con el que ha venido trabajando es eficiente.

Punto 3

- Determine la distribución de probabilidad de los siguientes estadísticos:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ para una población } X \text{ con distribución normal de media } \mu \text{ y varianza } \sigma^2$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \text{ para una población } X \text{ con distribución normal de media } \mu \text{ y varianza } \sigma^2$$

$$(n-1) \frac{S_X^2}{\sigma^2} + (m-1) \frac{S_Y^2}{\sigma^2} \text{ para dos poblaciones } X, Y \text{ con distribución normal de varianza } \sigma^2$$

$$\frac{S_X^2 \sigma_Y^2}{S_Y^2 \sigma_X^2} \text{ para dos poblaciones } X, Y \text{ con distribución normal de varianza } \sigma_X^2 \text{ y } \sigma_Y^2$$

- Complete la siguiente tabla con base en la información suministrada:

Distribución	Parámetro(s)	Valor de la VA	Probabilidad Acumulada hasta el valor de VA	Notación
T-Student	GL=25		0.95	

T-Student	GL=12	b=2.1788		
F-Snedecor		c=3.511	0.95	
F-Snedecor	15 GL en el numerador, 7 GL en el denominador		0.05	
Chi-cuadrado	Grados de libertad=19	e=21.689		
Chi-cuadrado	GL=70		0.975	
Chi-cuadrado	GL=70		0.025	
T-Student	GL=20		0.1	