Parcial 1 - Optimización
Gerardo Andrés Riaño Briceño - 201112388

Problema 1

En principio, es clave identificar que la variable x_3 es libre es decir $x_3 \leq 0$ y $x_3 \geq 0$ y se encuentra dentro de la función de costo con coeficiente diferente de cero. Por lo cual, es necesario realizar modificaciones con variables auxiliares para que el programa lineal quede en la forma estándar y sea posible obtener la primera solución básica factible. Adicionalmente, como el tipo de restricciones es el mismo, de mayor o igual, al incluir variables de holgura se obtendrá la primera solución básica factible, sin necesidad de resolver un problema auxiliar de la forma $1^T y$.

Se hace un cambio de variables $x_3 = y_1 - y_2$ con $y_1, y_2 \geq 0$. De esta forma, se sigue cumpliendo que x_3 es libre dado que, $y_1 > y_2 \to x_3 \geq 0$ y $y_1 < y_2 \to x_3 \leq 0$
Ahora bien, se utilizan variables de surplus, dado que las desigualdades son de la forma $\geq$ y se obtiene el programa estándar de la forma:

$$\min_{x,y} 3x_1 + 4x_2 + 2(y_1 - y_2)$$

$$\begin{gathered} \text{sujeto a} \\ -4x_1 + 8x_2 + 2y_1 - 2y_2 - k_1 = 20 \\ 2x_1 - 4x_2 + y_1 - y_2 - k_2 = 12 \\ 2x_1 + 12x_2 + 4y_1 - 4y_2 - k_3 = 16 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, k_1, k_2, k_3 \geq 0 \end{gathered}$$

Con el programa lineal en la forma estándar se forma el Tableau que lo representa y se multiplican las restricciones de igualdad a ambos lados por -1 para obtener la identidad, i.e. la base del sistema lineal.

x_1	x_2	y_1	y_2	k_1	k_2	k_3	b
4	-8	-2	2	1	0	0	-20
-2	4	-1	1	0	1	0	-12
-2	-12	-4	4	0	0	1	-16
3	4	2	-2	0	0	0	0

Se tiene entonces que la primera solución básica factible del programa lineal es $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$, $k_1 = -20$, $k_2 = -12$ y $k_3 = -16$.

1b) La solución no es óptima, dado que el valor de uno de los costos reducidos es negativo r_4.

Problema 2

Problema primal:

$$\min_{x} 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 2x_5$$

$$\begin{gathered} \text{sujeto a} \\ 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -5 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 <= 2 \\ x1, x2, x3, x4, x5 >= 0 \end{gathered}$$

Se obtiene el programa dual con base en las reglas de conversin descritas en la tabla de Tucker.

Problema dual:

$$\max_{\lambda} -5\lambda_1 + 2\lambda_2$$

$$\begin{gathered} \text{sujeto a} \\ -\lambda_2 \leq 4 \\ 2 - \lambda_2 \leq 6 \\ -2 + \lambda_1 \leq 2 \\ -2 - \lambda_2 \leq 6 \\ 2 - \lambda_2 \leq 2 \\ \lambda_2 \geq 0 \end{gathered}$$

Ahora, se grafican las restricciones para el dual y se identifican gráficamente las soluciones bsicas factibles del PL. Con estas soluciones se evalúa la función de costo y se escogen los x_1 y x_2 que aseguran un valor óptimo para el dual.

λ_1	λ_2	$fcosto$
0	2	4
2	-2	-14
1	-4	-13
-1	-4	-3
-2	-2	6

La solución para el dual es $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

2b) En principio, se determinan las soluciones activas en el dual.

$$\begin{gathered} 2 \leq 4 \\ -2 \leq 6 \\ 2 \leq 2 \rightarrow \text{Solución activa} \\ 6 \leq 6 \rightarrow \text{Solución activa} \\ -6 \leq 2 \end{gathered}$$

Dado que las restricciones 3 y 4 son soluciones activas, por holgura complementaria $x_1, x_2 y x_5$ son iguales a cero y debe cumplirse que:

$$\begin{gathered} 2x_3 + 6x_4 = 6 \\ -2x_3 - 2x_4 = -5 \\ x_3 - x_4 = 2 \end{gathered}$$

La primera ecuación es combinación lineal de las otras dos, por lo cual se puede resolver el sistema de ecuaciones quitando una ecuación. Como solución se obtiene que $x_3 = 9/4$ y $x_4 = 1/4$.
Por lo tanto, la solución óptima para el primal es:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 9/4, x_4 = 1/4, x_5 = 0$$

y la solución óptima para el dual,

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -2$$

Problema 3

El problema de maximización es equivalente al de minimización de $-f(x)$.

$$\min_{E,M,S} -60E - 30M - 20S$$

$$\begin{gathered}\text{sujeto a}\\ 8E + 6M + S \leq 48\\ 4E + 2M + 1.5S \leq 20\\ 2E + 1.5M + 0.5S \leq 8\\ E, M, S \geq 0\end{gathered}$$

3b) Se utiliza el método Simplex revisado dado que facilita el cálculo de los multiplicadores Simplex. Se utilizan variables de holgura y_1, y_2, $y_3 \geq 0$ para poner el problema en la forma estándar.

E	M	S	y_1	y_2	y_3	b
8	6	1	1	0	0	48
4	2	1.5	0	1	0	20
2	1.5	0.5	0	0	1	8
-60	-30	-20	0	0	0	0

Los pasos del proceso del Simplex revisado se mostrarán siguiendo la forma de Tableau que se muestra a continuación.

B	Nb
C_b	C_n

Primera iteración, $r = [-60, -30, -20, 0]$

1	0	0	8	6	1	48
0	1	0	4	2	1.5	20
0	0	1	2	1.5	0.5	8
0	0	0	-60	-30	-20	0

Segunda iteración, $r = [30, 15, -5, 240]$

1	0	8	0	6	1	48
0	1	4	0	2	1.5	20
0	0	2	1	1.5	0.5	8
0	0	-60	0	-30	-20	0
0	0	0	-60	-30	-20	0

Tercera iteración, $r = [10, 5, 10, 280]$

1	1	8	0	6	0	48
0	1.5	4	0	2	1	20
0	0.5	2	1	1.5	0	8
0	-20	-60	0	-30	0	0

$$\begin{gathered}x_B = [24, 8, 2]\\ \lambda = c_B \cdot B^{-1}\\ \lambda = [0, -10, -10]\end{gathered}$$

3c) Es importante tener en cuenta que los multiplicadores simplex están relacionados con el costo sintético. Ahora bien, un costo razonable es aquel con el cual el costo reducido no sea menor a cero, i.e. con el cual no sea necesario gastar más de lo que se gasta con el óptimo. Se calculan el nuevo costo reducido:
$r = c_b - \lambda^T[1, 0.3, 0.5]$ $r = c_b - (-8)$
El costo de los bancos debe ser menor o igual a 8.