Universidad de los Andes
Departamento de Ingeniería Industrial
Probabilidad y Estadística I (IIND2106)
Profesor Coordinador: Mario Castillo
Profesores: María Alejandra López, Astrid Bernal, Carlos Castellanos, Fabio Lagos, Gonzalo Torres, Hernando Mutis.
Segundo semestre de 2015

Complementaria 4

Ejercicios sobre variables aleatorias con distribuciones discretas de mayor aplicación. Bernoulli, Binomial, Poisson.

Punto 1

Una importante fábrica de jugos de naranja requiere cumplir con el requisito mínimo de vitamina C en los jugos que producen. Para esto, la fábrica ha contratado a un equipo de ingenieros que, mediante un sensor electrónico, determinarán si las naranjas de la granja A o la granja B cumplen con la cantidad mínima de vitamina C. De acuerdo con el análisis previo de los ingenieros, se sabe que la probabilidad de que una naranja seleccionada aleatoriamente no cumpla con el requisito de vitamina C es de 0.05 para la granja A y de 0.07 para la granja B.

a. Cuando la fábrica de jugos decide comprar los bultos de naranjas en la granja A. El método de inspección de cada uno, antes de la compra, se realiza seleccionando aleatoriamente 5 naranjas del bulto, y si se encuentra que por lo menos dos de las naranjas no cumplen con el requisito de vitamina C, entonces el bulto se rechaza. ¿Cuál es la probabilidad de que un bulto sea rechazado?

X: número de naranjas que no cumplen con el requisito de vitamina C, de una muestra de 5 naranjas seleccionadas aleatoriamente en un bulto.

$$X \rightarrow Binomial\ (p = 0.05;\ N = 5)$$

$$P(X \geq 2) = \sum_{x=1}^{5} \binom{5}{x} (0.05)^x (1 - 0.05)^5$$

$$P(X \geq 2) = 0.02$$

La probabilidad de que un bulto sea rechazado es de 0.02.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que una naranja analizada en la granja B no cumpla con el requisito de vitamina C?

Sea explícito con la definición de la variable aleatoria, su distribución y parámetros.

$$X: \begin{cases} 1 & no\ cumple\ el\ requisito \\ 0 & cumple\ el\ requisito \end{cases}$$

$$X \rightarrow Bernoulli(p\ =\ 0.07)$$

$$P(X\ =\ 1)\ =\ 0.07$$

c. El gerente de la fábrica decide que la revisión de los bultos de naranja se hará de manera diferente en la granja B. En este nuevo proceso se inspeccionarán consecutivamente las naranjas del bulto, y si se encuentran 4 naranjas que si cumplen con el requisito de vitamina C antes de encontrar la primera que no cumple, entonces no se rechaza el bulto. Determine la probabilidad con que no se rechace un bulto en la granja B.

X: número de naranjas inspeccionadas hasta encontrar la primera que no cumple con el requisito de vitamina C.

$$X \rightarrow Geométrica(\ p = 0.07)$$
$$g_X(x) = p * (1\ -\ p)^{x-1}$$
$$P(X\ =\ 5) =\ 0.07 * (1\ -\ 0.07)^4$$
$$P(X = 5) = 0.05$$

La probabilidad de que no se rechace un bulto de naranjas de la granja B es de 0.05.

d. Se sabe que los bultos de la granja A se caracterizan porque siempre tienen 100 naranjas. Durante una de las inspecciones de la fábrica, el representante de la granja A recordó que el bulto que está a punto de ser inspeccionado contenía 47 naranjas que no cumplen con el requisito de vitamina C. ¿Cuál es la probabilidad de que en la inspección que se realiza, se rechace el bulto?

$$X\ \rightarrow\ Hipergeométrica\ (x\ =\ 2;\ N = 100, n = 5, k = 47)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - \frac{\binom{47}{0}\binom{100-47}{5-0}}{\binom{100}{5}} - \frac{\binom{47}{1}\binom{100-47}{5-1}}{\binom{100}{5}}$$

$$P(X \geq 2) = 0.22$$

Punto 2

Una de las principales afecciones que sufre la planta de papa, es causada por el virus L*uteovirus*, o virus del enrollamiento de la papa, que genera enanismo e infección a las hojas.

Ante esta afección, un grupo de científicos está investigando la efectividad del gen XVY como método para disminuir la presencia del virus. Los científicos han determinado, que el gen tiene una probabilidad de 0.15 de no ser efectivo ante la presencia del virus en las hojas de las plantas de papa.

Con el propósito de determinar si el gen se puede producir a gran escala, y con fines comerciales, el grupo de científicos desarrollará los siguientes controles de calidad sobre la eficacia del gen.

a. Si se estableció una muestra de 15 plantas de papa tratadas con el gen, determine la probabilidad de que la sexta planta tratada con el gen XVY, presente el virus *Luteovirus* al ser analizada.
Sea explícito con la definición de la variable aleatoria, su distribución y parámetros.

$$\text{Sea } X\text{:} \begin{cases} 1 & si\ la\ planta\ presenta\ el\ virus \\ 0 & si\ la\ planta\ no\ presenta\ el\ virus \end{cases}$$

$$X \to Bernoulli(p\ =\ 0.15)$$

$$P(X\ =\ 1)\ =\ 0.15$$

b. Los científicos acuerdan que no tomarán más muestras si, durante el análisis, encuentran la primera planta con el virus antes de revisar 6 plantas que no presenten el virus con una probabilidad superior a 0.60. Determine si los científicos deben preparar más muestras.

X: número de plantas analizadas hasta encontrar la primera planta con el virus.

$$X \to Geométrica(\ p = 0.15)$$
$$g_X(x) = p * (1\ -\ p)^{x-1}$$
$$P(X \leq\ 7) = \sum_{x=1}^{7}\ 0.15 * (1\ -\ 0.15)^{x}$$
$$P(X \leq 7) = 0.68$$

Los científicos no deben preparar más muestras.

c. Otro criterio para determinar si es necesario preparar más muestras corresponde con el número esperado de plantas que deben revisar hasta encontrar 3 plantas con el virus. Calcule el valor esperado que los científicos requieren.

X: número de plantas analizadas hasta encontrar la tercera que presenta el virus

$$X \rightarrow Binomial\ Negativa\ (p = 0.15;\ k = 3)$$
$$E[X] = \frac{k}{p} = \frac{3}{0.15} = 20$$

Se espera que deban revisar 20 plantas hasta encontrar la 3ra con el virus.

d. Calcule la probabilidad de que en una muestra de 20 plantas, se encuentren 3 o más plantas con el virus.

X: número de plantas que presentan el virus en una muestra de tamaño 20.

$$X \rightarrow Binomial\ (p = 0.15;\ N = 20)$$

$$P(X \geq 3) = \sum_{x=3}^{20} \binom{20}{x} (0.15)^x (1 - 0.15)^{20-x}$$
$$P(X \geq 3) = 0.60$$

e. Los científicos determinaron que si el número de plantas que se espera que presenten el virus en la muestra de 20 es menor o igual a 3, utilizarán el gen con fines comerciales. Determine si los científicos usarán el gen XVY con fines comerciales.

X: número de plantas que presentan el virus en una muestra de tamaño 20.

$$X \rightarrow Binomial\ (p = 0.15;\ N = 20)$$
$$E[X] = np = 20 * 0.15 = 3$$

Los científicos iniciarán la producción del gen a gran escala, y con fines comerciales.

Punto 3

El número de usuarios que entran a una de las principales atracciones de un parque de diversiones se puede modelar como una variable aleatoria de Poisson. En esta atracción, la tasa promedio de llegada de usuarios en el horario de 8:00 a.m. a 1:00 p.m. es de 40 por hora, y en el horario de 1:00 p.m. a 4:00 p.m. es de 15 por hora. Para el jefe de mantenimiento es de interés dar respuesta a las siguientes preguntas, que le ayudarán a determinar el horario del mantenimiento de esa atracción, tiempo durante el cual se debe cerrar la misma.

a. Determine el número esperado de usuarios que ingresan a la atracción durante todo el día, esto es de 8:00 a.m. a 4:00 p.m.

X: número de personas que llegan a la atracción durante el intervalo de tiempo 8:00 a.m. a 4:00 p.m.

$$E[X] = \boldsymbol{\lambda t}$$

$$E[X] = \left(5\ horas * 40\,\frac{usuarios}{hora}\right) + \left(3\ horas * 15\,\frac{usuarios}{hora}\right) = 245\ personas$$

b. El encargado sabe que el tiempo que tarda el mantenimiento depende del estado de la atracción; en el mejor de los casos, el tiempo que se requiere cerrar la atracción es de 10 minutos. Si sucede el mejor escenario, y el mantenimiento se realiza entre las 2:00 y las 2:10 pm, determine la probabilidad de que en ese intervalo de tiempo no llegue ninguna persona. Determine la probabilidad de que lleguen más de 3 usuarios en ese mismo intervalo de tiempo.

X: número de personas que llegan a la atracción en el intervalo 2:00 - 2:10 p.m.

$$X \to Poisson\ (\lambda = 15)$$

$$P(X = 0) = \frac{\left(15 * {}^{10}\!/_{60}\right)^{0} e^{-15 * {}^{10}\!/_{60}}}{0!} = 0.08$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{x=0}^{3} \frac{\left(15 * {}^{10}\!/_{60}\right)^{x} e^{-15 * {}^{10}\!/_{60}}}{x!}$$

$$P(X > 3) = 1 - 0.54 = 0.46$$

c. Continuando con el escenario favorable, descrito en el literal anterior. Si el jefe decide realizar el mantenimiento en el horario de 12:55 a 1:05 pm, para aprovechar el cambio de turno del encargado de la atracción, determine la probabilidad de que lleguen 3 usuarios en ese intervalo de tiempo.

X: número de personas que llegan a la atracción en el intervalo 12:55 - 1:05 p.m.

$$X \to Poisson$$

$$\begin{aligned} P(X = 3) = {} & g_X\left(X = 3;\ \lambda_1 t = 40 * {}^{5}\!/_{60}\right) * g_X\left(X = 0;\ \lambda_2 t = 15 * {}^{5}\!/_{60}\right) + \\ & g_X\left(X = 2;\ \lambda_1 t = 40 * {}^{5}\!/_{60}\right) * g_X\left(X = 1;\ \lambda_2 t = 15 * {}^{5}\!/_{60}\right) + \\ & g_X\left(X = 1;\ \lambda_1 t = 40 * {}^{5}\!/_{60}\right) * g_X\left(X = 2;\ \lambda_2 t = 15 * {}^{5}\!/_{60}\right) + \\ & g_X\left(X = 0;\ \lambda_1 t = 40 * {}^{5}\!/_{60}\right) * g_X\left(X = 3;\ \lambda_2 t = 15 * {}^{5}\!/_{60}\right) \end{aligned}$$

$$P(X = 3) = 0.16$$

d. De acuerdo con el jefe de mantenimiento, en el peor de los casos, el tiempo que se tardaría el mantenimiento de la atracción es de 4 horas. Si se da ese escenario, la atracción se cerraría desde las 12:00 y hasta las 4:00 p.m. Encuentre una expresión que le permita encontrar la probabilidad de que lleguen más de 60 personas en ese intervalo de tiempo.

X: número de personas que llegan a la atracción en el intervalo 12:00 - 4:00 p.m.

$$X \rightarrow Poisson$$

$$P(X > 60) = 1 - P(X \leq 60)$$

$$P(X \leq 60) = \sum_{j=0}^{60} \sum_{i=0}^{j} g_X(X = i;\ \lambda_1 t = 40) * g_X(X = j - i;\ \lambda_2 t = 15 * 3)$$