Sebastián Valencia Calderón 201111578
Edgar Daniel Gómez 201317343

Punto 1

(a) **(8 puntos)** Para las siguientes situaciones indique qué preferiría. Justifique su respuesta de manera teórica.

(I) Prestar dinero a una tasa de interés simple del $X\,\%$, o a una tasa de interé compuesto del $X\,\%$.

(II) Pedir dinero a una tasa de interés $X\,\%$ NA/SV, o a una tasa de $X\,\%$ NA/TV.

(III) Pedir un préstamo en el que le cobran una tasa de interés de $X\,\%$ NA/MV, o a una tasa de $X\,\%$ NA/MA.

(IV) Prestar dinero a una tasa de interés $X\,\%$ NA/AV, o a una tasa de $X\,\%$ EA.

(b) **(3 puntos)** Fernando Macías es un desarrollador de software que recientemente ha alcanzado alto prestigio en el mercado por lo que dos empresas del sector le han ofrecido irse a trabajar con ellos. Actualmente Fernando gana \$4.459.000 pesos y la empresa A ofrece pagarle \$5.200.000 pesos en caso que decida trabajar con ellos. Análogamente, la empresa B ofrece pagarle \$4.200.000 pesos. ¿Cuál es el costo de oportunidad de Fernando Macías si acepta la oferta A? ¿Si acepta la oferta B?¿Si decide quedarse?

(c) **(3 puntos)** Para completar el pago de la matrícula universitaria, a Carlos le hace falta \$1.000.000 pesos. Él sabe que dentro de 3 meses tendrá \$2.000.000 pesos. Sin embargo, para poder iniciar las clases él debe efectuar el pago de la matrícula hoy. Carlos tiene dos opciones, la primera pedir prestado un millón de pesos en la Olla S.A. (prestamistas gota a gota) cerca a su casa quienes le cobran un interés compuesto de $5\,\%$ mensual. La segunda opción es financiar con la universidad quien le cobra un interés simple de $5\,\%$ mensual. Para cualquiera de las dos opciones, Carlos deberá pagar al támino de los tres meses el capital más los intereses respectivos. ¿Cuál de las dos alternativas debería seleccionar Carlos de tal forma que pague lo menos posible por concepto de interés?

(d) **(3 puntos)** Un amigo de la universidad le está ofreciendo una oportunidad de negocio. Él le propone una rentabilidad del $4{,}5\,\%$ capitalización continua anual por el dinero que usted le entregue. ¿Cúal sería su rendimiento efectivo en téminos porcentuales sobre una inversión de \$1.000.000 pesos por un periodo de 3 años? Bajo las mismas condiciones, ¿Cúal sería su rendimiento efectivo en términos porcentuales sobre una inversión de \$67.760.000 pesos por un periodo de 3 años?, y ¿Cúal de las dos alternativas genera un mayor rendimiento efectivo en términos porcentuales?

(e) **(2 puntos)** La familia Zeeman solicitó un préstamo por un valor de $\$X$ a la cooperativa Cooperando. La entidad prestadora le ofrecío a la familia una tasa de interés de $i\,\%$ SV, con un plazo de 4 semestres para amortizar el total de la deuda por medio de una cuota uniforme semestral, cada una por un monto \$Y.

(I) ¿Qué pasaría con la cuota uniforme semestral que debe pagar la familia Zeeman si la tasa de interés se redujera a la mitad de su valor? ¿Es mayor, menor o igual a la mitad de la cuota original?

(II) ¿Qué pasaría con la cuota uniforme semestral que debe pagar Familia Zeeman (con respecto al pago semestral inicial de $\$Y$) si la tasa de interés cambia de $i\,\%$ SV a $i\,\%$ NA/SV? ¿El nuevo pago uniforme semestral sería mayor o menor al inicialmente contemplado?

(f) **(5 puntos)** Keyla Chiapana quiere comprar un televisor de 32", cuyo precio hoy es \$1.375.987 pesos, por lo que va al amacén de cadena 'Success S.A' y allí tiene las siguientes formas de pago:

(1) Comprar el televisor de contado.

(2) Comprar el televisor a 40 cuotas mensuales de \$35.000 pesos.

(3) Comprar el televisor dando una cuota inicial de \$500.000 pesos y pagar el resto a 40 cuotas mensuales de \$22.000 pesos.

(4) Comprar el televisor pidiendo el dinero prestado a un amigo, el cual quiere que se le regrese el dinero (que corresponde exactamente al valor del televisor el día de hoy) dentro de seis meses más una invitación a cenar (el día de la devolución del dinero) la cual tiene valor de \$102.599 pesos.

Teniendo en cuenta que el costo de oportunidad de Keyla es 2 % EA, ¿cúal alternativa debería escoger?

Punto 2

(a) **(3 puntos)** Calcule el sesgo para cada uno de los estimadores planteados. ¿Cuáles de estos estimadores son insesgados?

Para que los estimadores planteados sean insesgados, debe ser cierto que $\mathbb{E}(\hat{\mu}_{1,2,3}) = \mu$.

Para cada uno de los $\hat{\mu}_i \forall i \in 1, 2, 3$, se verifica la propiedad:

$$\hat{\mu}_1 \Rightarrow \mathbb{E}(\hat{\mu}_1) = \bar{X} = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \times \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \times (n \times \mu) = \mu$$

$$\hat{\mu}_2 \Rightarrow \mathbb{E}(\hat{\mu}_2) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{6} \times \sum_{i=1}^{3} iX_i\right) = \frac{1}{6} \times \sum_{i=1}^{3} iX_i$$

$$= \frac{\mu}{6} \times \sum_{i=1}^{3} i = \frac{\mu}{6} \times (1 + 2 + 3) = \frac{\mu}{6} \times 6 = \mu$$

$$\hat{\mu}_3 \Rightarrow \mathbb{E}(\hat{\mu}_3) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + X_6 + X_{10}}{4}\right) = \frac{1}{4} \times (\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_6) + \mathbb{E}(X_{10})) = \frac{3 \times \mu}{4}$$

Como se puede ver los dos primeros estimadores son insesgados, mientras que el último es sesgado. El sesgo de cada estimador, se muestra en las ultimas partes de las igualdades.

(b) **(3 puntos)** Calcule el error cuadrático medio de los tres estimadores.

$$\text{ECM}(\mu_{1,2,3}) = \text{Var}(\mu_{1,2,3})) + \text{Sesgo}^2(\mu_{1,2,3}))$$

$$\text{Var}(\mu_{1,2,3})) \Rightarrow$$

$$\text{Var}(\mu_1) = \text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \times \sum_{i=1}^{n} \text{Var}\,(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\Rightarrow \text{ECM}(\mu_1) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\text{Var}(\mu_2) = \text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{3} i \times X_i\right) = \frac{1}{36} \times \left(\sum_{i=1}^{3} i \times \text{Var}(X_i)\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{36} \times \left(\sum_{i=1}^{3} i^2 \right) = \frac{\sigma^2}{36} \times (9 + 4 + 1) = \frac{7}{18} \times \sigma^2$$

$$\Rightarrow \text{ECM}(\mu_2) = \frac{7}{18} \times \sigma^2$$

$$\text{Var}(\mu_3) = \text{Var}(\frac{X_1 + X_6 + X_{10}}{4}) = \frac{1}{16} \times \left(\sum_{i \in \{1,6,10\}} \text{Var}(X_i) \right) = \frac{3 \times \sigma^2}{16}$$

$$\Rightarrow \text{ECM}(\mu_3) = \frac{3 \times \sigma^2}{16} + \left(\frac{\mu}{4}\right)^2$$

(c) **(3 puntos)** Para cada uno de los estimadores, evalúe si es consistente o si no lo es.

Para cada uno de los $\hat{\mu}_i \forall i \in 1, 2, 3$, se verifican las propiedades:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mu_i) = \mu \wedge \lim_{n\to\infty} \text{Var}(\mu_i) = 0$$

Para μ_1 :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mu_i) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\bar{X}) \\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mu_i) &= \lim_{n\to\infty} \mu \\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mu_i) &= \mu \\ \lim_{n\to\infty} \text{Var}(\mu_1) &= \lim_{n\to\infty} \text{Var}(\bar{X}) \\ \lim_{n\to\infty} \text{Var}(\mu_1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} \\ \lim_{n\to\infty} \text{Var}(\mu_1) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Por la verificación de las propiedades, se sabe que μ_1 es consistente.

Para μ_2 :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mu_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6}\right) \\
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mu_i) = \lim_{n\to\infty} \mu \\
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mu_i) = \mu \\
\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\mu_1) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6}\right) \\
\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\mu_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{7\times\sigma^2}{18} \\
\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\mu_1) = \frac{7\times\sigma^2}{18} \neq 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Por la verificación de las propiedades, se sabe que μ_2 no es consistente.

Para μ_3 :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mu_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + X_6 + X_{10}}{4}\right) \\
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mu_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{3\times\mu}{4} \\
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mu_i) = \frac{3\times\mu}{4} \neq \mu \\
\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\mu_1) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + X_6 + X_{10}}{4}\right) \\
\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\mu_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{7\times\sigma^2}{18} \\
\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\mu_1) = \frac{7\times\sigma^2}{18} \neq 0
\end{aligned} \tag{3}$$

Por la verificación de las propiedades, se sabe que μ_3 no es consistente.

(d) **(3 puntos)** De acuerdo a las conclusiones obtenidas en los literales anteriores, ¿cuál de los tres estimadores sería el más adecuado? Justifique su respuesta.

Es necesario un estimador insesgado y consistente, además, debe minimizar el error cuadrático medio. Considerando los anteriores resultados, el mejor estimador es $\hat{\mu}_1$.

Punto 3

(a) **(6 puntos)** Encuentre el estimador de máxima verosimilitud para dichos parámetros. Para esto siga los siguientes pasos:

(I) Plantee la función de verosimilitud:

$$
\begin{aligned}
L(x_1,\dots,x_p;\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sigma\times\sqrt{2\pi}}\exp -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \\
&= \left(\frac{1}{\sigma\times\sqrt{2\pi}}\right)^n \prod_{i=1}^{n}\left[\exp -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\sigma^n\times\sqrt{(2\pi)}^n}\times\exp -\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2
\end{aligned} \tag{4}
$$

(II) Halle el logaritmo natural de la función de verosimilitud.

$$
\begin{aligned}
ln(L(x_1,\dots,x_p;\mu,\sigma^2)) &= ln\left(\frac{1}{\sigma^n\times\sqrt{(2\pi)^n}}\times\exp -\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \\
&= \left(0 - ln(2\pi^{n/2})\right) + \left(0 - ln((\sigma^2)^{n/2})\right) + \left(-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \\
&= -\frac{n\times ln(2\pi)}{2} - \frac{n\times ln(\sigma^2)}{2} - \frac{1}{2}\times\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2
\end{aligned} \tag{5}
$$

(III) Derive el resultado anterior respecto al parámetro correspondiente.
Para μ :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right) &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu &= 0 \\
\mu &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}
\end{aligned} \tag{6}
$$

Para σ :

$$\begin{aligned} -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^n)^2} \times \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = 0 \\ \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{n} \end{aligned} \tag{7}$$

(IV) Iguale la derivada a cero para encontrar el estimador de máxima verosimilitud para cada parámetro. Para μ :

$$\frac{\partial ln(L(x_1, \ldots, x_p; \mu, \sigma^2))}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)$$

Para σ :

$$\frac{\partial ln(L(x_1, \ldots, x_p; \mu, \sigma^2))}{\partial \sigma} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^n)^2} \times \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

(b) **(4 puntos)** Determine si el estimador de máxima verosimilitud para el parámetro μ es eficiente.

Para determinar a eficiencia de un estimador, la varianza de los mismos debe ser igual a la cota de Rao-Cramer.

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \\ ln(L(x_1, \ldots, x_p; \mu, \sigma^2)) = -ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2 \\ \frac{\partial ln(L(x_1, \ldots, x_p; \mu, \sigma^2))}{\partial \mu} = \frac{x}{\sigma^2} - \frac{\mu}{\sigma} \\ \frac{\partial^2 ln(L(x_1, \ldots, x_p; \mu, \sigma^2))}{\partial \mu^2} = -\frac{1}{\sigma^2} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\bar{X}) \geq \left(-n \times \mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \times ln(L(x_1, \ldots, x_p; \mu, \sigma^2))}{\partial \sigma^2} \right] \right)^{-1} \\ \frac{\sigma^2}{n} \geq \left(-n \times \mathbb{E}\left[-\frac{1}{\sigma^2} \right] \right)^{-1} = \left(\frac{n}{\sigma^2} \right)^{-1} \Rightarrow \frac{\sigma^2}{n} \geq \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned} \tag{9}$$

Por la anterior deducción, el estimador para μ es eficiente.

Punto 4

(a) **(4 puntos)** Calcule un intervalo de confianza del 95 % para la media del tiempo de procesamiento de cada uno de los tornos. Interprete cada uno de los intervalos de confianza. Interprete este resultado.

Es necesario obtener los valores para S_Y y H de manera que sea posible construir el intervalo de confianza.

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{X})}{n-1}} \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \times \sum x_i \Rightarrow$$

$$S_{XA} = 1{,}1 \wedge \bar{X}_A = 1{,}413 \wedge S_{XB} = 0{,}8 \wedge \bar{X}_B = 1{,}68$$
$$t_{(9{,}975)} = 2{,}086$$

El intervalo para el torno A es:

$$\left(1{,}413 - t_{(9{,}975)} \times \frac{S_{XA}}{\sqrt{21}} \leq 1{,}413 \leq 1{,}413 + t_{(9{,}975)} \times \frac{S_{XA}}{\sqrt{21}}\right)$$
$$(0{,}91 \leq 1{,}413 \leq 1{,}91)$$

El intervalo para el torno B es:

$$\left(1{,}68 - t_{(9{,}975)} \times \frac{S_{XB}}{\sqrt{21}} \leq 1{,}68 \leq 1{,}68 + t_{(9{,}975)} \times \frac{S_{XB}}{\sqrt{21}}\right)$$
$$(1{,}35 \leq 1{,}68 \leq 2{,}04)$$

(b) **(4 puntos)** Calcule un intervalo de confianza del 90 % para la varianza del tiempo de procesamiento de cada uno de los tornos. Interprete este resultado.

Dado que la confianza es del 90 %, se tienen los siguientes parámetros:

$$\alpha = 0{,}1 \Rightarrow \mathcal{X}_{(0{,}95)} = 31{,}41 \wedge \mathcal{X}_{(0{,}05)} = 10{,}85$$

El intervalo para el torno A es:

$$\left(\frac{(1{,}1)^2(20)}{(31{,}41)^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(1{,}1)^2(20)}{10{,}85}\right) \Rightarrow \left(0{,}77 \leq \sigma^2 \leq 2{,}23\right)$$

El intervalo para el torno B es:

$$\left(\frac{(0{,}8)^2(20)}{(31{,}41)^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(0{,}8)^2(20)}{10{,}85}\right) \Rightarrow \left(0{,}407 \leq \sigma^2 \leq 1{,}18\right)$$

(c) **(4 puntos)** Construya un intervalo de confianza del 90 % que le permita evaluar si las varianzas del tiempo de procesamiento de cada uno de los tornos son estadísticamente diferentes. ¿Qué puede concluir?

Para evaluar la diferencia estadística de la diferencia de dos varianzas, se debe construir un intervalo de confianza para su cociente. $\alpha = 0{,}1 \Rightarrow \mathcal{F}_{((\alpha/2)=0{,}05)} = 0{,}47 \wedge \mathcal{F}_{((1-\alpha/2)=0{,}95)} = 2{,}12$.

$$\left[0{,}65 \leq \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \leq 2{,}91\right]$$

Dado que uno no está en el intervalo, con un 95 % de confianza, las varianzas son distintas en el intervalo de confianza.

(d) **(4 puntos)** Teniendo en cuenta la conclusión obtenida en el literal anterior, construya un intervalo de confianza del 95 % para la diferencia de las medias de procesamiento de ambos tornos ($\mu_X - \mu_Y$). ¿Qué puede concluir?

$t_{(1-\alpha/2)=0{,}975} = 2{,}02$

$$1{,}68 - 1{,}413 - \sqrt{\frac{2}{21} \times \left[\frac{(0{,}8)^2(20) + (1{,}1)^2(20)}{21+21-2}\right]} \leq \mu_B - \mu_A$$

$$\mu_B - \mu_A \leq 1{,}68 - 1{,}413 + \sqrt{\frac{2}{21} \times \left[\frac{(0{,}8)^2(20) + (1{,}1)^2(20)}{21+21-2}\right]}$$

$$(-0{,}33 \leq \mu_B - \mu_A \leq 0{,}866)$$

Con confianza del 95 %, no es posible afirmar si un tiempo es ayor al otro.