

---

## TAREA 1

---

19 de agosto de 2015

Edgar Andrés Margffoy Tuay  
201412566  
Sección 9  
ea.margffoy10@uniandes.edu.co

Sergio Alberto Galindo León  
201413974  
Sección 1  
sa.galindo10@uniandes.edu.co

Numeral		Puntaje
1	a)	/1
	b)	/3
	c)	/1
	d)	/2
	e)	/2
	f)	/2
	g)	/2
	h)	/2
	i)	/2
	j)	/2
	k)	/3
	l)	/3
2	a)	/15
3	a)	/2
	b)	/3
	c)	/3
	d)	/3
	e)	/2
	f)	/3
	g)	/4
4	a)	/5
	b)	/5
	c)	/3
	d)	/3
5	a)	/18
	b)	/8
	c)	/3
	d)	/3
6	a)	/5
	b)	/5
	c)	/4
	d)	/2
	e)	/3
	f)	/3
TOTAL		/130
NOTA		/5

## 1. Cálculo de probabilidades de eventos (Diagrama de Venn)

$\Omega$	Espacio muestral
$A$	El accionista elige la alternativa A
$B$	El accionista elige la alternativa B
$(A \cup B)^c$	El accionista no elige alguna de las alternativas
$A_1$	El accionista elige la alternativa A y prefiere la opción de financiamiento 1
$A_2$	El accionista elige la alternativa A y prefiere la opción de financiamiento 2
$A_{12}$	El accionista elige la alternativa A y prefiere las opciones de financiamiento 1 y 2
$B_1$	El accionista elige la alternativa B y prefiere la opción de financiamiento 1
$B_2$	El accionista elige la alternativa B y prefiere la opción de financiamiento 2
$B_3$	El accionista elige la alternativa B y prefiere la opción de financiamiento 3
$B_{12}$	El accionista elige la alternativa B y prefiere las opciones de financiamiento 1 y 2
$B_{13}$	El accionista elige la alternativa B y prefiere las opciones de financiamiento 1 y 3
$B_{23}$	El accionista elige la alternativa B y prefiere las opciones de financiamiento 2 y 3
$B_{123}$	El accionista elige la alternativa B y prefiere las opciones de financiamiento 1, 2 y 3

Tabla 1: Eventos considerados a lo largo del presente ejercicio.

### 1.a. Eventos expuestos en la situación

A continuación, se definen los eventos descritos y expuestos en el enunciado de la situación actual. Sea  $\Omega$ , el espacio muestral de los eventos posibles; en el presente caso, la cardinalidad del espacio muestral,  $|\Omega|$  corresponde a 5000, el número total de individuos que respondieron a la encuesta realizada por parte de la compañía.

Posteriormente, es posible definir tres eventos,  $A$ ,  $B$  y  $(A \cup B)^c$ , de acuerdo a la alternativa de exploración y extracción petrolífera ( $A$  y  $B$ , respectivamente) preferida por parte de un accionista determinado. Si este se encuentra en desacuerdo con las alternativas presentadas previamente, es posible afirmar que su opinión se encuentra en  $(A \cup B)^c$ . Es necesario denotar que un accionista debe optar exclusivamente por una de las tres alternativas enumeradas. *i.e.*,  $A \cap B = \emptyset$ .

En el caso en el cual, un accionista propendiese por alguna de las alternativas  $A$  o  $B$ , este debe escoger una opción de financiación (1: Crédito Financiero, 2: Exceso de Caja y 3: Emisión de acciones, respectivamente), luego, es posible definir subconjuntos de  $A$  y  $B$  (1), basados en cada una de las elecciones de financiamiento posibles:

$$\sigma_i \subseteq \sigma \quad \forall i = 1, 2, 3; \quad \forall \sigma \in \{A, B\} \quad (1)$$

Por último, si un accionista se encuentra interesado en dos opciones de financiamiento, la notación a usar corresponde a  $\sigma_{ij}$ , dónde  $\sigma \in \{A, B\}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  y se cumple que  $i \neq j$ . Finalmente, se

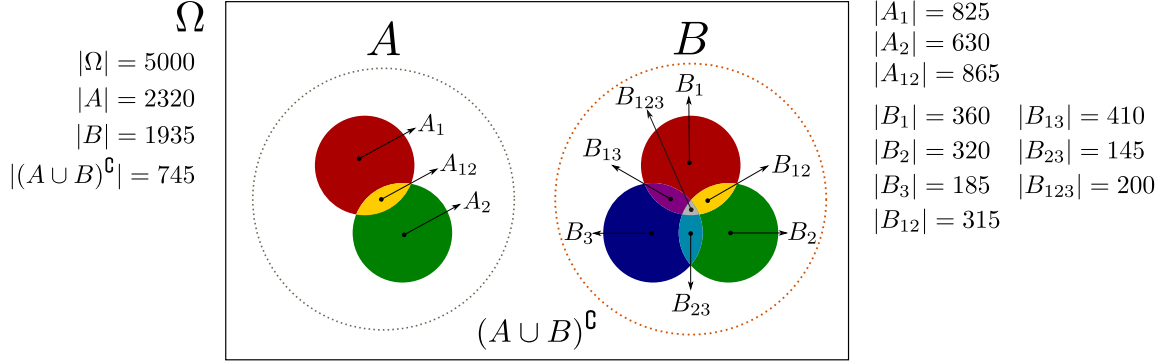


Figura 1: Diagrama de Venn que establece relaciones entre los diversos conjuntos previamente definidos

dice que un accionista se encuentra a favor de las tres opciones de financiamiento sí y solo sí, este pertenece al conjunto  $\sigma_{123}$ . A continuación, en la Tabla 1, se presentan los eventos a considerar:

### 1.b. Diagrama de Venn propuesto para la situación

Como es posible apreciar en el diagrama de Venn presentado en la Figura 1, el espacio muestral se encuentra conformado a partir de tres subconjuntos principales de este. En primer lugar, los accionistas que se encuentran de acuerdo con la alternativa A, corresponden a 2320 individuos. En segundo lugar, es posible establecer el número de accionistas que se encuentran de acuerdo con la alternativa B, el cual corresponde a 1935 individuos. Finalmente, el número de individuos que no se encuentran de acuerdo con la alternativa A, así como la alternativa B, corresponde a 745.

Debido a que los accionistas que se encuentran de acuerdo con la alternativa A, solo manifestaron su aprobación con respecto a las alternativas de financiamiento 1 y 2, solo es posible establecer tres subconjuntos de A:  $A_1$ ,  $A_{12}$  y  $A_2$ , cada uno con una cardinalidad de 825, 865 y 630 individuos, respectivamente.

Por último, con respecto a los accionistas que demostraron una preferencia por la alternativa B, es posible conformar seis subconjuntos posibles de elección de opción de financiamiento manifestadas por cada uno de los miembros del conjunto B:  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{13}$  y  $B_{23}$ . Es necesario denotar que la unión de cada uno de los subconjuntos previamente mencionados, corresponde al conjunto global que los contiene. Además, debido a la inexistencia de accionistas interesados en la alternativa A y B de forma simultánea, la intersección entre estos conjuntos es nula.

### 1.c. Relación entre la alternativa B y la opción 3

Se desea establecer si los eventos B y optar por la opción de financiamiento 3 son independientes. Para este fin, es necesario establecer si  $P(3|B) = P(3)$ . Como es posible apreciar en la ecuación (5), la probabilidad de que ocurra el evento 3 es menor a la probabilidad de que ocurra el evento 3 dado el evento B. Esto implica que si este evento ocurriese el espacio de muestreo para el evento 3 es reducido, y por lo tanto, los eventos 3 y B son dependientes.

$$P(3|B) = P(3) \quad (2)$$

$$P(3|B) = \frac{|B_3| + |B_{23}| + |B_{13}| + |B_{123}|}{|B|} \quad (3)$$

$$P(3) = \frac{|B_3| + |B_{23}| + |B_{13}| + |B_{123}|}{|\Omega|} \quad (4)$$

$$P(3) < P(3|B) \Rightarrow P(3|B) \neq P(3) \quad \nexists \quad (5)$$

#### 1.d. Independencia de los eventos $A$ y $B$

En primer lugar, debido a que los conjuntos  $A$  y  $B$  son disyuntos, la probabilidad de  $A \cap B$  es equivalente a cero. Además, debido a que la elección de una alternativa de exploración por parte de un accionista es exclusiva, no es posible realizar la elección de dos alternativa, esto implica que  $P(A|B) = 0$ . Conforme a la definición de independencia de eventos presentada en (4), se dice que si dos eventos son independientes, entonces, la probabilidad de la intersección de ambos eventos es distinta de cero. A continuación se presenta una prueba que establece que los eventos  $A$  y  $B$  son independientes:

(1)	$P(A \cap B) = 0$	Hipótesis
(2)	$P(A B) = 0$	Hipótesis
(3)	$P(A B) = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) \neq 0$	Definición Independencia
(4)	$P(A B) = P(A) \Rightarrow \text{False}$	Sustitución (1, 3)
(5)	$P(A B) \neq P(A)$	Negación derecha $\Rightarrow$ (4)
(6)	$P(A) = \frac{58}{125}$	Aritmética
(7)	$\text{True}$	Sustitución (1,6,5) $\square$

#### 1.e. Probabilidad de escoger la alternativa $B$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} \quad (6)$$

$$P(B) = \frac{1935}{5000} \quad (7)$$

$$P(B) \approx 0,387 \quad \square \quad (8)$$

#### 1.f. Probabilidad de escoger la alternativa $B$ y la alternativa $A$

$$P(A \cap B) = 0 \quad \square \quad (9)$$

#### 1.g. Probabilidad de elegir la opción de financiamiento 1

$$P(1) = \frac{|A_1| + |A_{12}| + |B_1| + |B_{12}| + |B_{13}| + |B_{123}|}{|\Omega|} \quad (10)$$

$$P(1) = \frac{119}{200} \quad (11)$$

$$P(1) = 0,595 \quad \square \quad (12)$$

**1.h. Probabilidad de escoger la alternativa  $A$  y las opciones de financiamiento 1 y 2**

$$P(A_{12}) = \frac{|A_{12}|}{|A|} \quad (13)$$

$$P(A_{12}) = \frac{865}{2320} \quad (14)$$

$$P(A_{12}) \approx 0,372 \quad \square \quad (15)$$

**1.i. Probabilidad de elegir exclusivamente la alternativa de financiación 3**

$$P(3) = \frac{|B_3|}{|\Omega|} \quad (16)$$

$$P(3) = \frac{39}{1250} \quad (17)$$

$$P(3) = 0,0312 \quad \square \quad (18)$$

**1.j. Probabilidad de escoger la alternativa  $B$  y preferir dos opciones de financiación**

$$P(B_{12} \cup B_{13} \cup B_{23}) = \frac{|B_{12}| + |B_{13}| + |B_{23}|}{|\Omega|} \quad (19)$$

$$P(B_{12} \cup B_{13} \cup B_{23}) = \frac{87}{500} \quad (20)$$

$$P(B_{12} \cup B_{13} \cup B_{23}) = 0,174 \quad \square \quad (21)$$

**1.k. Probabilidad de elegir las opciones de financiación 1 y 3 exclusivamente, si se conoce que la Alternativa  $B$  fue escogida**

$$P(B_{13}) = \frac{|B_{13}|}{|B|} \quad (22)$$

$$P(B_{13}) = \frac{82}{387} \quad (23)$$

$$P(B_{13}) = 0,211 \quad \square \quad (24)$$

**1.l. Probabilidad de escoger la alternativa  $A$ , si se conoce que la opción de financiación 1 fue elegida**

$$P(A|1) = \frac{P(1|A)P(A)}{P(1)} \quad (25)$$

$$P(A|1) = \frac{(P(A_1 \cup A_{12}))P(A_1 \cup A_{12} \cup A_2)}{P(1)} \quad (26)$$

$$P(A|1) \approx 0,247 \quad \square \quad (27)$$

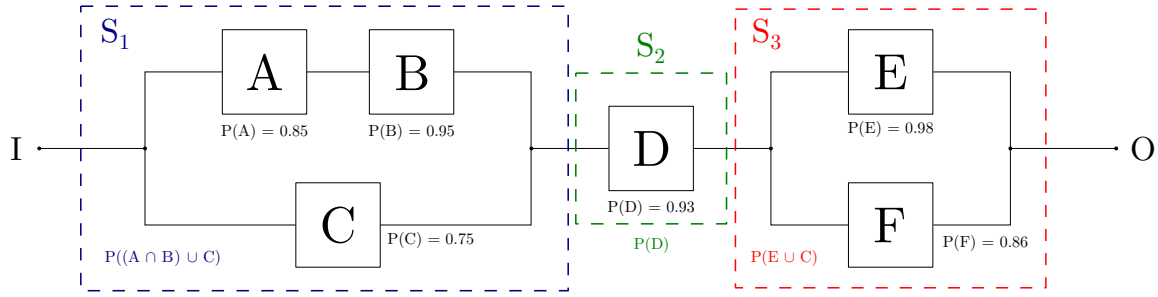


Figura 2: Diagrama lógico del circuito que establece relaciones entre los diversos componentes

## 2. Cálculo de probabilidades de eventos (Gráficas)

Debido a que los eventos son independientes, es posible afirmar que la probabilidad de ocurrencia de la intersección entre dos eventos, corresponde al producto de las probabilidades de ambos eventos, *i.e.*,  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ . Conforme a esta disposición, a continuación, es posible asignar un valor de probabilidad al evento  $W$  (??), el cual corresponde a la probabilidad de funcionamiento del circuito.

$$P(W) = P(S_1 \cap S_2 \cap S_3)$$

$$P(W) = P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_3)$$

$$P(W) = P((A \cap B) \cup C) \cdot P(D) \cdot P(E \cup F)$$

$$P(W) = (P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap B \cap C)) \cdot P(D) \cdot (P(E) + P(F) - P(E \cap F))$$

$$P(W) = (P(A) \cdot P(B) + P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)) \cdot P(D) \cdot (P(E) + P(F) - P(E \cap F)) \quad \square$$

$$P(W) \approx \boxed{0,882}$$

## 3. Técnicas de Conteo

### 3.a. Número de resultados posibles en términos de la tabla de posiciones

- $N$  : Número de posibles resultados en términos de la tabla de posiciones

$$N = 8P8$$

$$N = \frac{8!}{(8-8)!}$$

$$N = 8! \quad \square$$

**3.b. Probabilidad de que dos equipos pertenecientes a la Universidad de los Andes ocupen las dos primeras posiciones**

- $2A$  : 2 Equipos que pertenecen a la Universidad de los Andes ocupan las dos primeras posiciones.

$$\begin{aligned}P(2A) &= \frac{2! \cdot 6!}{8!} \\P(2A) &= \frac{1}{28} \\P(2A) &\approx 0,0357 \quad \square\end{aligned}$$

**3.c. Probabilidad de que los equipos de Comunicación, Derecho y Administración ocupen las tres primeras posiciones (Sin importar el orden)**

- $CDA$  : Los equipos de Comunicación, Derecho y Administración ocupen las tres primeras posiciones.

$$\begin{aligned}P(CDA) &= \frac{3! \cdot 5!}{8!} \\P(CDA) &= \frac{1}{56} \\P(CDA) &\approx 0,0178 \quad \square\end{aligned}$$

**3.d. Probabilidad de que las tres primeras posiciones sean ocupadas por los equipos de Ingeniería, Matemáticas y Diseño (Respectivamente)**

- $IMD$  : Los equipos de Ingeniería, Matemáticas y Diseño ocupan las tres posiciones de la tabla de posiciones (En orden).

$$\begin{aligned}P(IMD) &= \frac{2! \cdot 5!}{8!} \\P(IMD) &= \frac{1}{168} \\P(IMD) &\approx 5.95 \times 10^{-3} \quad \square\end{aligned}$$

**3.e. Número de formas posibles de ordenar ocho equipos en dos grupos que contienen cuatro elementos cada uno**

- $C$  : Número de formas posibles de ordenar ocho equipos en dos grupos que contienen cuatro elementos cada uno

$$\begin{aligned}C &= \binom{8}{4} \\C &= \frac{8!}{4! \cdot 4!} \\C &= 70 \quad \square\end{aligned}$$



**3.f. Probabilidad de que en un mismo grupo quede únicamente un equipo de Ingeniería y el equipo de Diseño**

- $ID$  : En un mismo grupo queda únicamente un equipo de Ingeniería y el equipo de Diseño.

$$P(ID) = \frac{\binom{2}{1} \binom{1}{1} \binom{5}{2} \binom{3}{3}}{\binom{8}{4}}$$

$$P(ID) = \frac{2}{7}$$

$$P(ID) \approx 0,285 \quad \square$$

**3.g. Probabilidad de que los equipos de las facultades de Ingeniería queden de primeros en cada grupo**

- $I$  : La final del torneo se disputa entre dos equipos de Ingeniería.
- $I_1$  : El ganador del equipo 1, es un equipo de Ingeniería.
- $I_2$  : El ganador del equipo 2, es un equipo de Ingeniería.

$$P(I) = P(I_1) \cdot P(I_2)$$

$$P(I_1) = \frac{3!}{4!}$$

$$P(I_1) = \frac{1}{4}$$

$$P(I_2) = P(I_1)$$

$$\Rightarrow P(I) = \frac{1}{16}$$

**4. Teorema de Bayes y Árboles de Probabilidad**

**4.a. Árbol de probabilidad**

Ver Figura 3

**4.b. Probabilidad de que Nairo Quintana/Chris Froome gane la Vuelta a España**

$$P(N) = P(N_1) \cdot (P(N_2|N_1) + P(N_2^c|N_1) \cdot P(N_3)) + P(N_1^c) \cdot P(N_2|N_1^c) \cdot P(N_3)$$

$$P(N) = \frac{16}{25}$$

$$P(N) = 0,64 \quad \square$$

$$\Rightarrow P(N^c) = 1 - P(N)$$

$$P(N^c) = 0,36 \quad \square$$

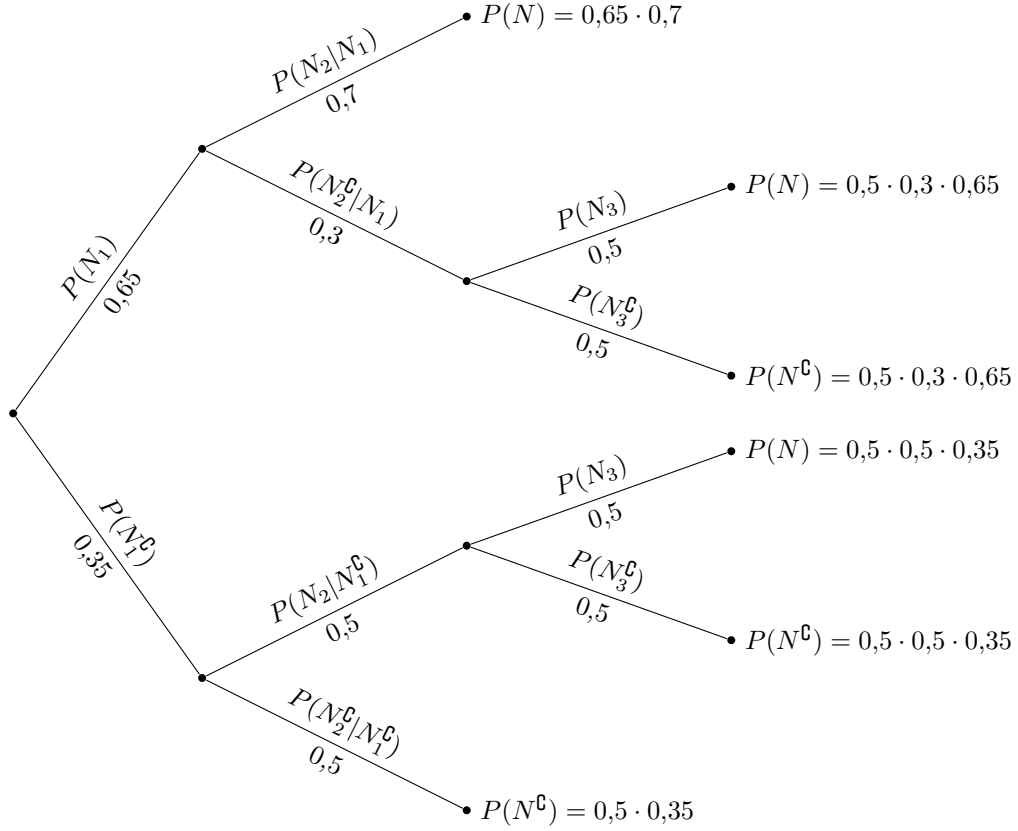


Figura 3: Árbol de probabilidades que describe y modela la situación presentada

#### 4.c. Probabilidad de ganar la Vuelta España tras ganar dos validas consecutivas

- $2G$  : Probabilidad de ganar la Vuelta España tras ganar dos validas consecutivas

$$P(2G) = P(N_1) \cdot P(N_2|N_1) + P(N_1^c) \cdot P(N_2^c|N_1^c)$$

$$P(2G) = 0,63 \quad \square$$

- 4.d. Probabilidad de que Chris Froome gane la etapa número 11, dado que ganó la etapa 16

$$P(N_1^G | N_2^G) = \frac{P(N_2^G | N_1^G) \cdot P(N_1^G)}{P(N_2^G)}$$

$$P(N_2^G) = P(N_1) \cdot P(N_2^G | N_1) + P(N_1^G) \cdot P(N_2^G | N_1^G)$$

$$P(N_2^G) = 0,37$$

$$\Rightarrow P(N_1^G | N_2^G) = 0,283 \quad \square$$

## 5. Variables Aleatorias Discretas

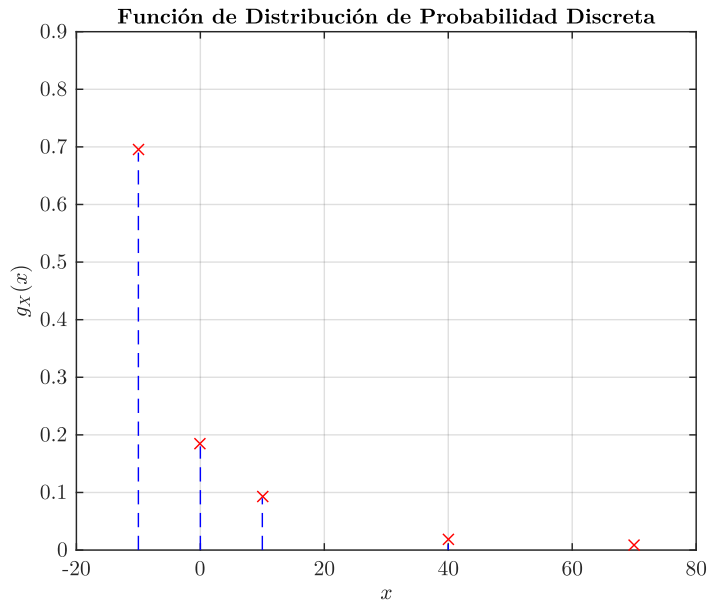


Figura 4: Gráfica de la función de probabilidad discreta,  $g_X(x)$

**5.a. Función de probabilidad discreta**

$$\mathbb{R}(x) = \{-10, 0, 10, 40, 70\}$$

$$g_X(x) = P(x) = \begin{cases} 25/36 & x = -10 \\ 5/27 & x = 0 \\ 5/54 & x = 10 \\ 1/54 & x = 40 \\ 1/108 & x = 70 \\ 0 & \text{d.l.c} \end{cases}$$

$$\boxed{\sum_{x \in \mathbb{R}(x)} g_X(x) = 1} \quad \square$$

**5.a.1. Gráfica  $g_X(x)$**

Ver Figura 4.

**5.b. Función de probabilidad acumulada**

$$G_X(x) = P(x \leq X) = \begin{cases} 0 & -10 < x \\ 25/36 & -10 \leq x < 0 \\ 95/108 & 0 \leq x < 10 \\ 35/36 & 10 \leq x < 40 \\ 107/108 & 40 \leq x < 70 \\ 1 & x \geq 70 \end{cases}$$

**5.b.1. Gráfica  $G_X(x)$**

Ver Figura 5.

**5.c. Valor esperado y desviación estándar**

**5.c.1. Valor esperado**

$$\mathbb{E}[x] = \sum_{x \in \mathbb{R}(x)} x_i \cdot g_X(x) \quad (28)$$

$$\mathbb{E}[x] = -\frac{125}{27} \quad (29)$$

$$\mathbb{E}[x] \approx -4,6629 \quad (30)$$

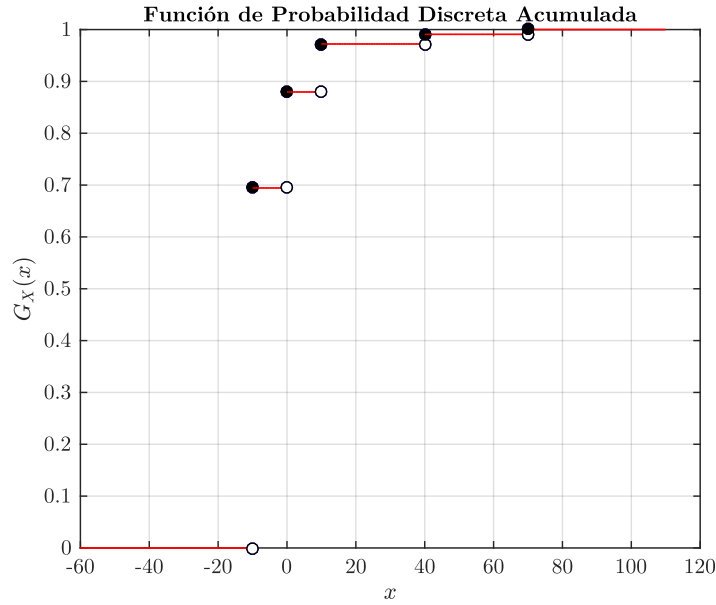


Figura 5: Gráfica de la función de probabilidad acumulada discreta,  $G_X(x)$

### 5.c.2. Desviación estándar

$$\text{Var}[x] = \mathbb{E}[x^2] - (\mathbb{E}[x])^2 \quad (31)$$

$$(32)$$

$$\mathbb{E}[x^2] = \sum_{x \in \mathbb{R}(x)} x_i^2 \cdot g_X(x) \quad (33)$$

$$\mathbb{E}[x^2] = \frac{4150}{27} \quad (34)$$

$$(\mathbb{E}[x])^2 = \frac{15625}{729} \quad (35)$$

$$(36)$$

$$\Rightarrow \text{Var}[x] \approx 132,27 \quad (37)$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}[x]} \quad (38)$$

$$\sigma \approx 11,50 \quad (39)$$

Conforme al valor esperado obtenido en (30), es posible afirmar que un jugador en promedio tiende a perder cuatro dólares por cada ronda jugada. Esto implica que el juego resulta comportarse de forma lucrativa para el ente/persona que se encuentre encargada de recaudar el dinero apostado por parte de los jugadores, y en general, reduce la probabilidad de que el jugador pueda obtener alguna ganancia al apostar.

Además, es necesario denotar que la probabilidad de obtener una ganancia neta mayor a 0, es casi cercana a cero, en la medida que la media y los valores centrales se encuentran concentrados en torno a valores de ganancia negativos. Es posible evidenciar este comportamiento de la función al considerar la desviación estándar (39) ( $\sigma$ ) como una medida de dispersión de la información de la función con respecto a la media; en el presente caso, debido a que el valor de la desviación estándar posee una magnitud alta, es posible afirmar que los valores se encuentran alejados de la media.

#### 5.d. Acerca de generar lucro por parte de los jugadores

Debido a que el valor esperado se encuentra en la región de pérdidas de dinero netas, todo jugador que apueste durante una partida del presente juego, tiene una mayor probabilidad de perder dinero, y por lo tanto, la probabilidad de obtener lucro y ganancia resulta ser reducida.

### 6. Variables Aleatorias Continuas

#### 6.a. Definición Función de densidad de Probabilidad

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ k & 1 \leq x < 4/3 \\ -3x/2 + 3 & 4/3 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{d.l.c} \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}(x)} f_X(x) = 1 \quad (40)$$

$$\int_{x=0}^1 x^2 dx + \int_{x=1}^{4/3} k dx + \int_{x=4/3}^2 \left(-\frac{3}{2}x + 3\right) dx = 1$$

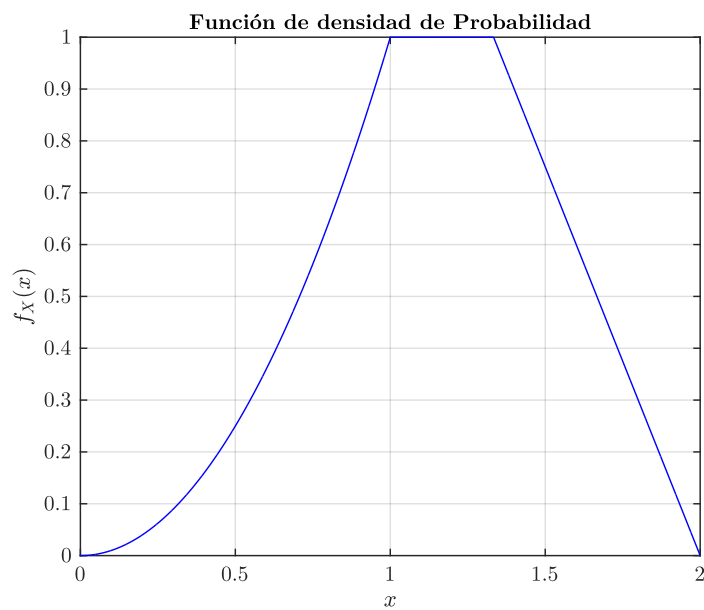
$$\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^1 + \left(kx\right)\Big|_{x=1}^{4/3} + \left(-\frac{3x^2}{4} + 3x\right)\Big|_{x=4/3}^2 = 1$$

$$k = 1 \quad \square$$

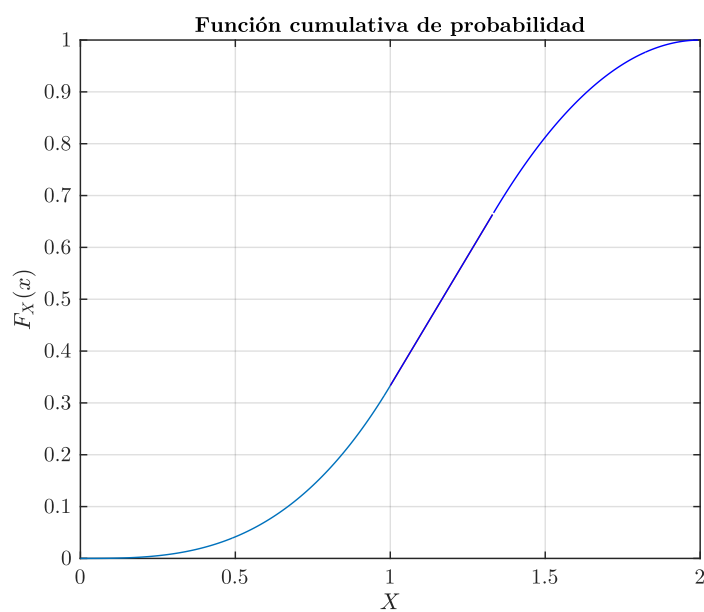
$$f_X(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 4/3 \\ -3x/2 + 3 & 4/3 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{d.l.c} \end{cases}$$

#### 6.b. Función distribución acumulada

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^3/3 & 0 \leq x < 1 \\ x - 2/3 & 1 \leq x < 4/3 \\ -3x^2/4 + 3x - 2 & 4/3 \leq x \leq 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$



*Figura 6:* Gráfica de la función de densidad de probabilidad,  $f_X(x)$



*Figura 7:* Gráfica de la función acumulativa de probabilidad,  $F_X(x)$

**6.c. Valor esperado y Desviación estándar**

$$\mathbb{E}[x] = \int_{x=0}^1 x^2 \cdot x \, dx + \int_{x=1}^{4/3} 1 \cdot x \, dx + \int_{x=4/3}^2 \left(-\frac{3x}{2} + 3\right) \cdot x \, dx$$

$$\mathbb{E}[x] = \frac{113}{108} \quad \square$$

$$\text{Var}[x] = \mathbb{E}[x^2] - (\mathbb{E}[x])^2$$

$$\mathbb{E}[x^2] = \int_{x=0}^1 x^2 \cdot x^2 \, dx + \int_{x=1}^{4/3} 1 \cdot x^2 \, dx + \int_{x=4/3}^2 \left(-\frac{3x}{2} + 3\right) \cdot x^2 \, dx$$

$$\mathbb{E}[x^2] = \frac{596}{405} \quad \square$$

$$\text{Var}[x] \approx 0,376$$

$$\sigma \approx 0,61 \quad \square$$

**6.d. Probabilidad de ser atendido en exactamente una hora**

$$P(x = 1) = 0 \quad \square$$

**6.e. Probabilidad de ser atendido entre 1.25 y 1.75 horas**

$$P(1,25 \leq x \leq 1,75) = F_X(1,75) - F_X(1,25)$$

$$P(1,25 \leq x \leq 1,75) \approx 0,369$$

**6.f. Probabilidad de esperar entre 1.25 y 1.75 horas, dado que más de una hora ya transcurrió**

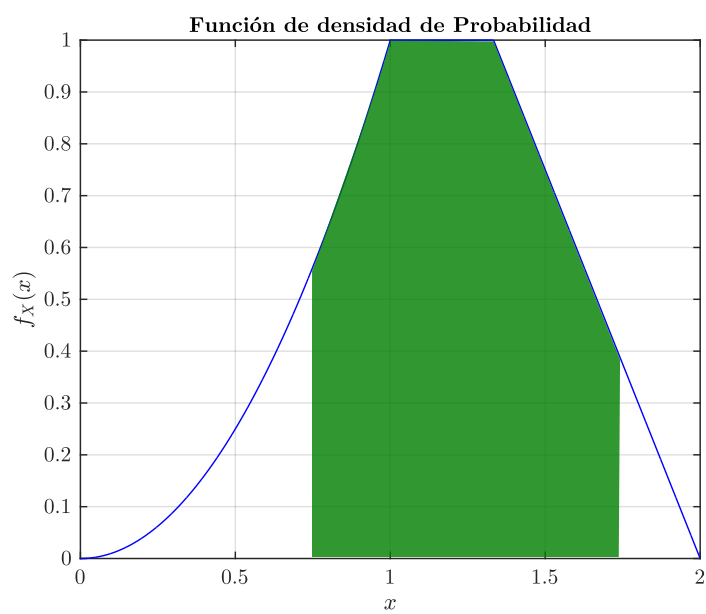
$$P(1,25 \leq x \leq 1,75 | x > 1) = \frac{P(1,25 \leq x \leq 1,75 \cap x > 1)}{P(x > 1)}$$

$$P(1,25 \leq x \leq 1,75 | x > 1) = \frac{P(1,25 \leq x \leq 1,75) \cdot P(x > 1)}{1 - P(x \leq 1)}$$

$$P(1,25 \leq x \leq 1,75 | x > 1) = P(1,25 \leq x \leq 1,75)$$

$$P(1,25 \leq x \leq 1,75 | x > 1) = 0,369 \quad \square$$





*Figura 8:* Descripción gráfica del intervalo descrito previamente