Optimización[1]**.**

Examen Parcial #1

Nombre: 24 de septiembre de 2008

---

1. Considere la función $f(x_1, x_2) = \frac{a}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + bx_1x_2 + x_1 + x_2$

   a) Grafique en el plano $a - b$ la región para la cual esta función tiene un único mínimo global.

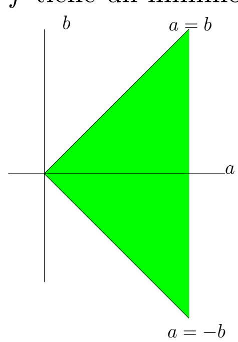
   b) Suponga que se utiliza steepest descent para minimizar esta función. Ordene de menor a mayor la tasa de convergencia (en el peor caso) de steepest descent en los siguientes casos:

   - $a > 0,\ b = 0$
   - $a = 2b,\ b > 0$
   - $a = 100b,\ b > 0$

   a)

$$\nabla f^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = a \pm b$$

   f tiene un mínimo global si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, es decir $a > b$ y $a > -b$.



   b)
   - $a > 0,\ b = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \kappa = 1$
   - $a = 2b,\ b > 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3b,\ \lambda_2 = b \Rightarrow \kappa = 3$
   - $a = 100b,\ b > 0 \Rightarrow \lambda_1 = 101b,\ \lambda_2 = 99b \Rightarrow \kappa = \frac{101}{99} \approx 1$

   Convergencia es más rápida para el caso $a > 0,\ b = 0$ (en un paso), sigue $a = 100b,\ b > 0$ y es más lenta para $a = 2b,\ b > 0$.

---

[1] Usted debe justificar todas sus respuestas. Una respuesta que aparezca de la nada no tiene ningún valor.

2. Considere la función $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - x_1 - x_2$. Comenzando en el punto $\mathbf{x}_0 = [1\ 0]$ calcule el $\mathbf{x}$ resultante de:

   a) Un paso del método de Newton.

   b) Dos pasos de gradiente conjugado.

   Podemos escribir $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x}$ con $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tenemos también $\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k) = \mathbf{Q}\mathbf{x}_k - \mathbf{b}$.

   a) $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{g}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{Q}\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}) = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}$,

   $$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

   Llegamos al mínimo en un paso.

   b) $\mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0 = -\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \alpha\mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} 1-\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$. Reemplazando en f tenemos:

   $$f(\mathbf{x}_1) = \alpha^2 - \alpha$$

   Derivando e igualando a cero tenemos $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$.

   Para el segundo paso, hallamos $\mathbf{d}_1$ $\mathbf{Q}$-ortogonal con $\mathbf{d}_0$, usando $-\mathbf{g}_1$.

   $$\mathbf{d}_1 = -\mathbf{g}_1 + \beta\mathbf{d}_0$$

   Para hallar β, realizamos producto interno de acuerdo a $\mathbf{Q}$ a ambos lados:

   $$\begin{aligned} \langle \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1 \rangle_{\mathbf{Q}} &= \langle \mathbf{d}_0, -\mathbf{g}_1 \rangle_{\mathbf{Q}} + \beta \langle \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_0 \rangle_{\mathbf{Q}} \\ 0 &= \langle \mathbf{d}_0, -\mathbf{g}_1 \rangle_{\mathbf{Q}} + \beta \langle \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_0 \rangle_{\mathbf{Q}} \\ \beta &= \frac{\langle \mathbf{d}_0, \mathbf{g}_1 \rangle_{\mathbf{Q}}}{\langle \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_0 \rangle_{\mathbf{Q}}} \end{aligned}$$

   Calculamos $\beta = \frac{1}{4}$ y $\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Tenemos

   $$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \alpha\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4} \\ \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}$$

   Reemplazando, tenemos $f(\mathbf{x}_2) = \frac{3}{16}\alpha^2 - \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{4}$. Derivando e igualando a cero obtenemos $\alpha = \frac{2}{3}$ y $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ que es el mínimo de la función.