

**1    [50 puntos]** Defina la sucesión de Fibonacci en la siguiente forma:

$F(0) = 1$   
 $F(1) = 1$   
 $F(i) = F(i-2) + F(i-1) \quad , \text{ para } i > 1$

**1a    [40 puntos]** Escriba un programa que calcule en la variable  $a$  la convolución de los primeros  $n+1$  números de la secuencia, de acuerdo con la siguiente especificación (describa paso a paso el proceso que siga para llegar a su solución):

```
[Ctx C:  n: nat ∧ n ≥ 1
  {Q : true}
  ?
  {inv P :  1 ≤ k ≤ n ∧ g = F(k-1) ∧ h = F(k)
           ∧ a = (+i | 0 ≤ i ≤ k : F(i)*F(k-i))
           ∧ b = (+i | 0 ≤ i < k : F(i)*F(k-1-i)) }
  {cota t: ? }
  do ? → ? od
  {R : a = (+i | 0 ≤ i ≤ n : F(i)*F(n-i)) }
]
```

AYUDA: Si  $P$  ES CIERTO, CUÁNTO VALE  $a+b$  ?

**1b    [10 puntos]** Estime el orden de la complejidad de su algoritmo, tomando como operación básica la asignación (simple o paralela) de variables.

---

**2    [50 puntos]** Dados dos números enteros  $a, n$ , considere el problema de decidir si el conjunto  
 $\{x, y: \text{ nat} \mid x \leq n \wedge y \leq n : x^2 + 2*y = a\}$   
es vacío.

**2a    [40 puntos]** Desarrolle un programa que resuelva el problema.

AYUDA:  $x^2 + 2*y$  es creciente en  $x$  y en  $y$ . Haga una búsqueda en silla con incertidumbre sobre una matriz adecuada.

**2b    [10 puntos]** Estime el orden de complejidad de su solución, en términos de  $n$ .

---

1 Defina la sucesión de Fibonacci en la siguiente forma:

$F(0) = 1$   
 $F(1) = 1$   
 $F(i) = F(i-2) + F(i-1)$  , para  $i > 1$

1a Escriba un programa que calcule en la variable a la convolución de los primeros  $n+1$  números de la secuencia, de acuerdo con la siguiente especificación (describa paso a paso el proceso que siga para llegar a su solución):

```
[Ctx C:  n: nat ∧ n ≥ 1
  {Q : true}
  k,g,h,a,b:= 1,1,1,2,1; [10/40]
  {inv P :  1 ≤ k ≤ n ∧ g = F(k-1) ∧ h = F(k)
            ∧ a = (+i | 0 ≤ i ≤ k : F(i)*F(k-i))
            ∧ b = (+i | 0 ≤ i < k : F(i)*F(k-1-i)) }
  {cota t: n-k} [ 5/40]
  do k ≠ n → [ 5/40]
    k,g,h,a,b:= k+1,h,g+h,a+b+g+h,a [20/40]
  od
  {R : a = (+i | 0 ≤ i ≤ n : F(i)*F(n-i)) }
]
```

AYUDA: Si P ES CIERTO, CUÁNTO VALE  $a+b$  ?

La ayuda sirve para saber con qué debe asignarse a. Para esto:

Hip: P

$$\begin{aligned}
 & a + b \\
 = & \\
 & (+i \mid 0 \leq i \leq k : F(i)*F(k-i)) + (+i \mid 0 \leq i < k : F(i)*F(k-1-i)) \\
 = & \\
 & (+i \mid 0 \leq i < k : F(i)*F(k-i)) + (+i \mid 0 \leq i < k : F(i)*F(k-1-i)) + F(k)*F(0) \\
 = & \\
 & (+i \mid 0 \leq i < k : F(i)*F(k-i) + F(i)*F(k-1-i)) + F(k)*F(0) \\
 = & \\
 & (+i \mid 0 \leq i < k : F(i)*(F(k-i) + F(k-1-i))) + F(k)*F(0) \\
 = & \\
 & (+i \mid 0 \leq i < k : F(i)*F(k+1-i)) + F(k) \\
 = & \\
 & (+i \mid 0 \leq i \leq k+1 : F(i)*F(k+1-i)) + F(k) - F(k+1)*F(0) - F(k)*F(1) \\
 = & \\
 & (+i \mid 0 \leq i \leq k+1 : F(i)*F(k+1-i)) - F(k+1) \\
 = & \\
 & (+i \mid 0 \leq i \leq k+1 : F(i)*F(k+1-i)) - (g + h)
 \end{aligned}$$

**Variante**

```
{Q}
k,a,b,g,h:= 1,2,1,1,1 ; [10/40]*
```

{Inv P}	
{cota t: n-k}	[ 5/40]*
do k≠n	[ 5/40]*
→ g,h := h,g+h ;	[ 8/40]*
a,b := b+a+h,a ;	[10/40]*
k := k+1	[ 2/40]*
od	

- 1b** Estime el orden de la complejidad de su algoritmo, tomando como operación básica la asignación (simple o paralela) de variables.

$O(n)$ . La cota rebaja en 1 en cada iteración. Y empieza en  $n-1$ . [10/40]

- 2** Dados dos números enteros  $a, n$ , considere el problema de decidir si el conjunto

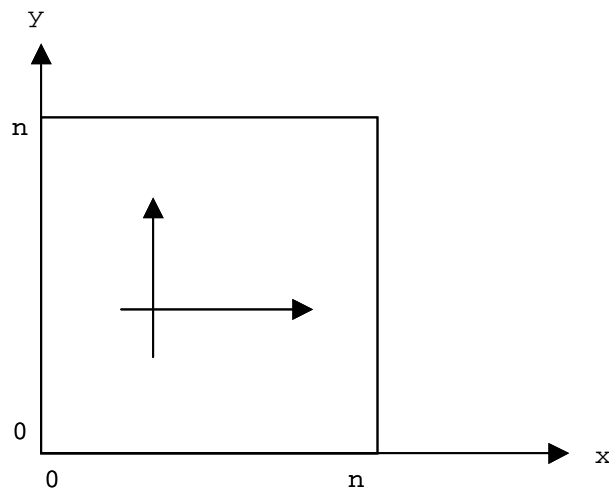
$$A(a, n) = \{x, y: \text{nat} \mid x \leq n \wedge y \leq n : x^2 + 2 \cdot y = a\}$$

es vacío.

- 2a** Desarrolle un programa que resuelva el problema.

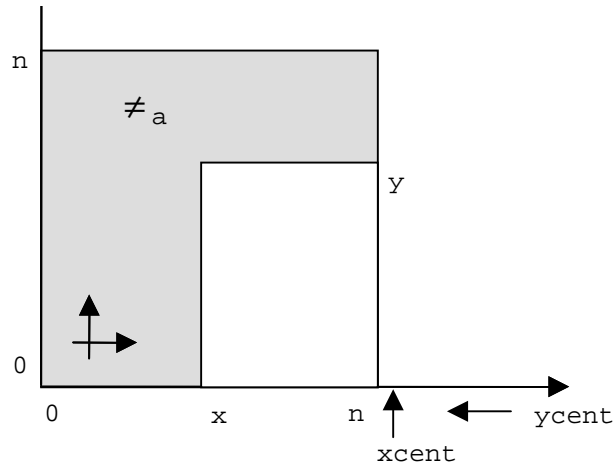
AYUDA:  $x^2 + 2 \cdot y$  es creciente en  $x$  y en  $y$ . Haga una búsqueda en silla con incertidumbre sobre una matriz adecuada.

El dominio de interés para encontrar una pareja  $(x, y)$  tal que  $x^2 + 2 \cdot y = a$  es



En realidad, hay un caso especial correspondiente al hecho de que  $n$  sea negativo. En este caso,  $A(a, n)$  es trivialmente vacío.

La idea del siguiente algoritmo es desarrollar una búsqueda en silla con incertidumbre para el caso en el que  $n$  no es negativo. El invariante  $P$  que se menciona es de la forma (obsérvese que se requieren dos centinelas, uno para columnas y otro para filas, ya que unas u otras pueden terminarse sin que se haya encontrado el valor buscado):



```

[Ctx C: a,n: int
{Q: true}
if n<0 → vacio:= true
[] n≥0 → x,y,xcent,ycent:= 0,n,n+1,-1;
    {Inv P: 0≤x=xcent≤n+1 ∧ -1≤ycent=y≤n
      ∧ (∀i,j| i<x ∨ j>y : i2+2*j≠a)
      ∧ ((xcent=n ∨ ycent=-1) cor x2+2*y = a)
      ∧ f = x2+2*y }
    {cota t: xcent-x+y-ycent} //No de filas y col. de incertidumbre
do xcent≠n ∨ ycent≠-1 → if x2+2*y < a → x:= x+1
                        [] x2+2*y = a → xcent,ycent:= x,y
                        [] x2+2*y > a → y:= y-1
                        fi
od;
    {R1: 0≤x=xcent≤n+1 ∧ -1≤ycent=y≤n
      ∧ (∀i,j| i<x ∨ j>y : i2+2*j≠a)
      ∧ ((xcent=n ∨ ycent=-1) cor x2+2*y = a)}
    vacio := (xcent=n ∨ ycent=-1)
fi
    {R: vacio ≡ A(a,n) = ∅}
]

```

Caso $n < 0$	:	[+5/40]
Especificación $Q, R1$	:	[ 8/40]
$R1, \text{ vacio} := (xcent=n \vee ycent=-1)$ :		[ 8/40]
$P$	:	[ 8/40]
Inicialización	:	[ 8/40]
Ciclo	:	[ 8/40]

Variante (mejorada!):

*Usar f (cálculo incremental de la función) :*      **[+8/40]**

```

[Ctx C: a,n: int
{Q: true}
if n<0 → vacio:= true
[] n≥0 → x,y,xcent,ycent,f:= 0,n,n+1,-1,2*n;
    {Inv P: 0≤x=xcent≤n+1 ∧ -1≤ycent=y≤n
        ∧ (∀i,j | i<x ∨ j>y : i2+2*j≠a)
        ∧ ((xcent=n ∨ ycent=-1) cor x2+2*y = a)
        ∧ f = x2+2*y }
    {cota t: xcent-x+y-ycent} //No de filas y col. de incertidumbre
do xcent≠n ∨ ycent≠-1 → if f < a → x,f:= x+1,f+2*x+1
    [] f = a → xcent,ycent:= x,y
    [] f > a → y,f:= y-1,f-2
    fi
od;
    {R1: 0≤x=xcent≤n+1 ∧ -1≤ycent=y≤n
        ∧ (∀i,j | i<x ∨ j>y : i2+2*j≠a)
        ∧ ((xcent=n ∨ ycent=-1) cor x2+2*y = a)}
    vacio := (xcent=n ∨ ycent=-1)
fi
{R: vacio ≡ A(a,n) = ∅}
]

```

**2b** Estime el orden de complejidad de su solución, en términos de  $n$ .

```
T(n) = O(n + n)    // Eliminar, en el peor caso, todas las filas y columnas,
                    // una cada vez
    = O(n)                                                  [10/40]
```