Programación Lineal

Fernando Lozano

Universidad de los Andes

15 de agosto de 2014

Problema de programación lineal

$$\begin{gathered}\text{mín} \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeto a} \\ g_i(\mathbf{x}) \le a_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ h_j(\mathbf{x}) = b_j, \quad j = 1, \ldots, q\end{gathered}$$

Problema de programación lineal

$$\begin{gathered}\text{mín} \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeto a} \\ g_i(\mathbf{x}) \leq a_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ h_j(\mathbf{x}) = b_j, \quad j = 1, \ldots, q\end{gathered}$$

donde:

- $f(\mathbf{x})$ es función lineal de $\mathbf{x}$.
- $g_i(\mathbf{x}), h_j(\mathbf{x})$ son funciones lineales de $\mathbf{x}$.

Ejemplo: El problema de transporte

- Transportar cierta mercancía de m orígenes a n destinos.

Ejemplo: El problema de transporte

- Transportar cierta mercancía de m orígenes a n destinos.
- Satisfacer requerimientos de demanda:

Ejemplo: El problema de transporte

- Transportar cierta mercancía de m orígenes a n destinos.
- Satisfacer requerimientos de demanda:
  - Origen i contiene una cantidad a_i
  - Destino j requiere una cantidad b_j

Ejemplo: El problema de transporte

- Transportar cierta mercancía de m orígenes a n destinos.
- Satisfacer requerimientos de demanda:
  - Origen i contiene una cantidad a_i
  - Destino j requiere una cantidad b_j
- Transportar mercancía de i a j cuesta c_{ij}.

Ejemplo: El problema de transporte

- Transportar cierta mercancía de m orígenes a n destinos.
- Satisfacer requerimientos de demanda:
  - Origen i contiene una cantidad a_i
  - Destino j requiere una cantidad b_j
- Transportar mercancía de i a j cuesta c_{ij}.
- Suponemos que el sistema es balanceado:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i$$

Problema de optimización

Problema de optimización

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

Problema de optimización

$$\text{mín} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{sujeto a}$$

Problema de optimización

$$\text{mín} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Problema de optimización

$$\text{mín} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Problema de optimización

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{sujeto a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

Ejemplo: El problema de asignación

Ejemplo: El problema de asignación

- Asignar n operarios a n tareas.

Ejemplo: El problema de asignación

- Asignar n operarios a n tareas.
- Si se asigna el operario i a la tarea j se incurre en un costo c_{ij}.

Ejemplo: El problema de asignación

- Asignar n operarios a n tareas.
- Si se asigna el operario i a la tarea j se incurre en un costo c_{ij}.
- Queremos encontrar la asignación de costo mínimo.

Problema de optimización

Problema de optimización

$$\text{mín} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

Problema de optimización

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \\ \text{sujeto a} & \end{aligned}$$

Problema de optimización

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Problema de optimización

$$\text{mín} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{sujeto a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Problema de optimización

$$\text{mín} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{sujeto a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

Ejemplo: Planeación de producción (Strang)

	KPG	Ganancia (US$)
Twingo	40	1000
Logan	34	2000
Megane	28	1100

Ejemplo: Planeación de producción (Strang)

	KPG	Ganancia (US$)
Twingo	40	1000
Logan	34	2000
Megane	28	1100

- Ley exige vehículo producido rinda en promedio por lo menos 36 KPG.

Ejemplo: Planeación de producción (Strang)

	KPG	Ganancia (US$)
Twingo	40	1000
Logan	34	2000
Megane	28	1100

- Ley exige vehículo producido rinda en promedio por lo menos 36 KPG.
- Planta puede ensamblar un Twingo en 1 minuto, un Logan en 2 minutos y un Megane en 3 minutos.

Ejemplo: Planeación de producción (Strang)

	KPG	Ganancia (US$)
Twingo	40	1000
Logan	34	2000
Megane	28	1100

- Ley exige vehículo producido rinda en promedio por lo menos 36 KPG.
- Planta puede ensamblar un Twingo en 1 minuto, un Logan en 2 minutos y un Megane en 3 minutos.
- Maximizar ganancia en un día de 8 horas.

- Variables: x_1, x_2, x_3.
- Problema de optimización.

- Variables: x_1, x_2, x_3.
- Problema de optimización.

$$\text{máx} \quad 1000x_1 + 2000x_2 + 1100x_3$$

- Variables: x_1, x_2, x_3.
- Problema de optimización.

$$\text{máx} \quad 1000x_1 + 2000x_2 + 1100x_3$$
$$\text{sujeto a}$$

- Variables: x_1, x_2, x_3.
- Problema de optimización.

$$\begin{gathered} \text{máx} \quad 1000x_1 + 2000x_2 + 1100x_3 \\ \text{sujeto a} \\ 40x_1 + 34x_2 + 28x_3 \geq 36(x_1 + x_2 + x_3) \end{gathered}$$

- Variables: x_1, x_2, x_3.
- Problema de optimización.

$$
\begin{gathered}
\text{máx} \quad 1000x_1 + 2000x_2 + 1100x_3 \\
\text{sujeto a} \\
40x_1 + 34x_2 + 28x_3 \geq 36(x_1 + x_2 + x_3) \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 480
\end{gathered}
$$

- Variables: x_1, x_2, x_3.
- Problema de optimización.

$$\begin{gathered} \text{máx} \quad 1000x_1 + 2000x_2 + 1100x_3 \\ \text{sujeto a} \\ 40x_1 + 34x_2 + 28x_3 \geq 36(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 480 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{gathered}$$

Ejemplo: Problema de la dieta

- Encontrar la dieta más económica que satisfaga ciertos requerimientos nutricionales.

Ejemplo: Problema de la dieta

- Encontrar la dieta más económica que satisfaga ciertos requerimientos nutricionales.

  n :comidas.

  m :nutrientes.

  c_i :costo unitario de comida i.

  b_j :requerimiento diario de nutriente j.

  a_{ij}:unidades de nutriente j en comida i.

  x_i :unidades de comida i en la dieta.

- Problema de optimización:

- Problema de optimización:

$$\min_{x_1, x_2, \ldots, x_n} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

- Problema de optimización:

$$\min_{x_1,x_2,\ldots,x_n} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\text{sujeto a}$$

- Problema de optimización:

$$\min_{x_1,x_2,\ldots,x_n} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\text{sujeto a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq b_j \quad j = 1, \ldots, m$$

- Problema de optimización:

$$\min_{x_1, x_2, \ldots, x_n} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq b_j \quad j = 1, \ldots, m$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n.$$

- Problema de optimización:

$$\min_{x_1, x_2, \ldots, x_n} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\text{sujeto a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq b_j \quad j = 1, \ldots, m$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n.$$

- Podemos escribirlo como:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\text{sujeto a}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

Programa Lineal en Forma Estándar

- Forma estándar:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

donde $\mathbf{x}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{A}$ es matriz $m \times n$, $\mathbf{b} \geq 0$.

Programa Lineal en Forma Estándar

- Forma estándar:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$\text{sujeto a}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

  donde $\mathbf{x}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{A}$ es matriz $m \times n$, $\mathbf{b} \geq 0$.
- por qué?

Programa Lineal en Forma Estándar

- Forma estándar:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$\text{sujeto a}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

  donde $\mathbf{x}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{A}$ es matriz $m \times n$, $\mathbf{b} \geq 0$.

- por qué? Simplex!

Convirtiendo a forma Estándar

- Restricciones con $\leq$:

Convirtiendo a forma Estándar

- Restricciones con $\leq$:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$\text{sujeto a}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

Convirtiendo a forma Estándar

- Restricciones con $\leq$:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} & \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq 0 \end{aligned}$$

- Por cada restricción añadir una variable de slack

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

Convirtiendo a forma Estándar

- Restricciones con $\leq$:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$
$$\text{sujeto a}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

- Por cada restricción añadir una variable de slack

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$
$$\downarrow$$

Convirtiendo a forma Estándar

- Restricciones con $\leq$:

$$\begin{gathered}\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0\end{gathered}$$

- Por cada restricción añadir una variable de slack

$$\begin{gathered}a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \\ \downarrow \\ (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) + y_i = b_i\end{gathered}$$

Convirtiendo a forma Estándar

- Restricciones con $\leq$:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$
$$\text{sujeto a}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

- Por cada restricción añadir una variable de slack

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$
$$\downarrow$$
$$(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) + y_i = b_i$$
$$y_i \geq 0$$

En forma matricial resulta:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$\text{sujeto a}$$

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}]\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq 0$$

Convirtiendo a forma Estándar

- Restricciones con $\geq$:

Convirtiendo a forma Estándar

- Restricciones con $\geq$:

$$\begin{gathered}\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \\ \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0\end{gathered}$$

Convirtiendo a forma Estándar

- Restricciones con $\geq$:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\text{sujeto a}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

- Por cada restricción añadir una variable de surplus

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$$

$$\downarrow$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - y_i = b_i$$

$$y_i \geq 0$$

En forma matricial resulta:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$\text{sujeto a}$$
$$[\mathbf{A}| - \mathbf{I}]\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq 0$$

Variables libres

Variables libres

Variables libres

1. - x_i libre.

Variables libres

1.
   - x_i libre.
   - Reeemplace x_i por $x_i = u_i - v_i$ con $u_i, v_i \geq 0$.

Variables libres

1.
    - x_i libre.
    - Reeemplace x_i por $x_i = u_i - v_i$ con $u_i, v_i \geq 0$.
    - Añade una variable extra por cada variable libre.

Variables libres

1.
   - x_i libre.
   - Reeemplace x_i por $x_i = u_i - v_i$ con $u_i, v_i \geq 0$.
   - Añade una variable extra por cada variable libre.

Variables libres

1.
   - x_i libre.
   - Reeemplace x_i por $x_i = u_i - v_i$ con $u_i, v_i \geq 0$.
   - Añade una variable extra por cada variable libre.
2.
   - x_i libre.

Variables libres

1.
   - x_i libre.
   - Reeemplace x_i por $x_i = u_i - v_i$ con $u_i, v_i \geq 0$.
   - Añade una variable extra por cada variable libre.
2.
   - x_i libre.
   - Resolver x_i en una restricción en términos de las demás variables:

$$x_1 = \frac{1}{a_{i1}}(b_i - (a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n))$$

Variables libres

1.
   - x_i libre.
   - Reeemplace x_i por $x_i = u_i - v_i$ con $u_i, v_i \geq 0$.
   - Añade una variable extra por cada variable libre.
2.
   - x_i libre.
   - Resolver x_i en una restricción en términos de las demás variables:

$$x_1 = \frac{1}{a_{i1}}(b_i - (a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n))$$

   - Reemplazar en otras restricciones y función objetivo.

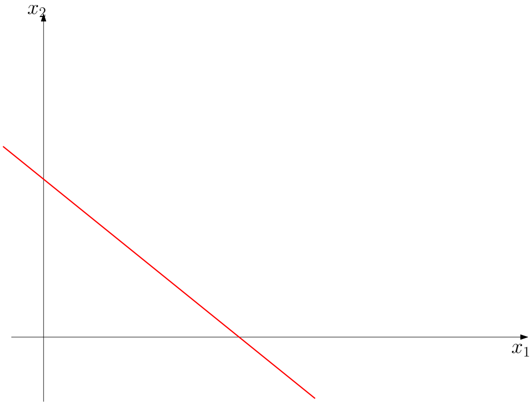
Variables libres

1.
   - x_i libre.
   - Reeemplace x_i por $x_i = u_i - v_i$ con $u_i, v_i \geq 0$.
   - Añade una variable extra por cada variable libre.
2.
   - x_i libre.
   - Resolver x_i en una restricción en términos de las demás variables:

$$x_1 = \frac{1}{a_{i1}}(b_i - (a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n))$$

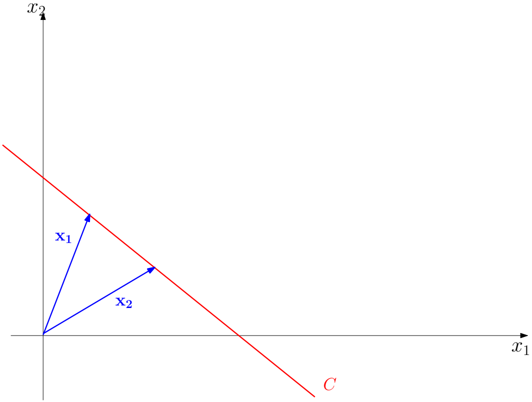
   - Reemplazar en otras restricciones y función objetivo.
   - Reduce 1 restricccióny 1 variable.

Restricción Lineal



$$C = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b \right\}$$

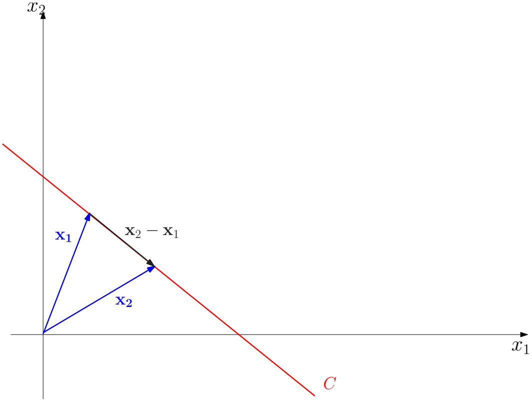
Restricción Lineal



$$C = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b \right\}$$

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$$

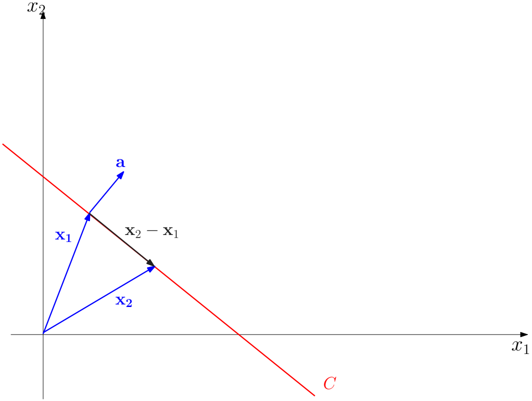
Restricción Lineal



$$C = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b \right\}$$

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C \Rightarrow \mathbf{a}^T (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = 0$$

Restricción Lineal



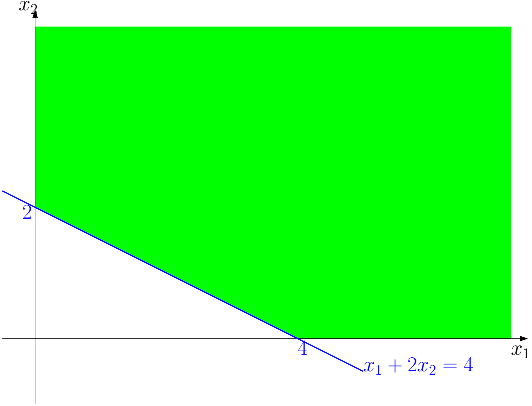
$$C = \left\{\mathbf{x} : \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b\right\}$$

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C \Rightarrow \mathbf{a}^T(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = 0$$

Región Factible

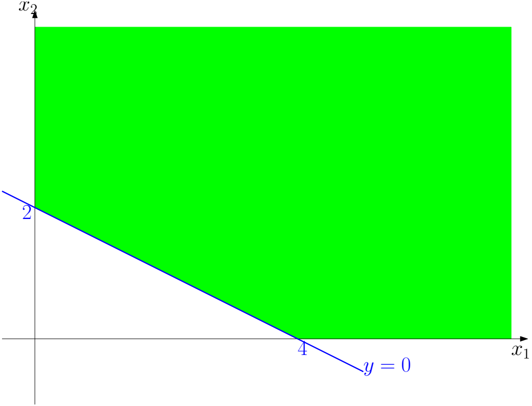
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Región Factible



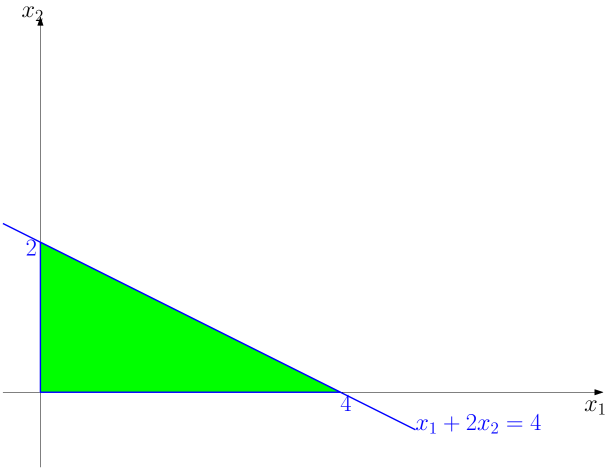
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 4$$

Región Factible

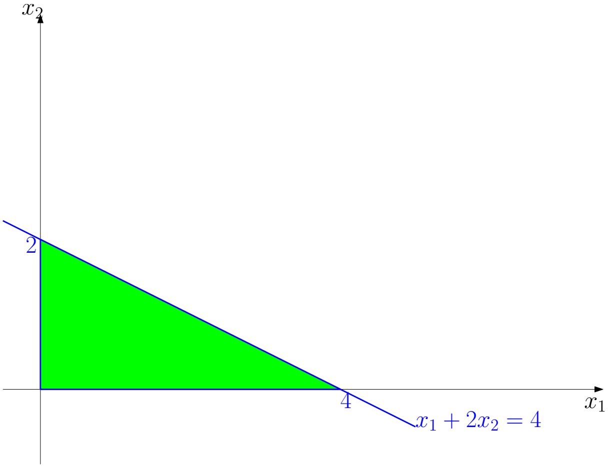


$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 4$$
$$y = x_1 + 2x_2 - 4$$

Región Factible

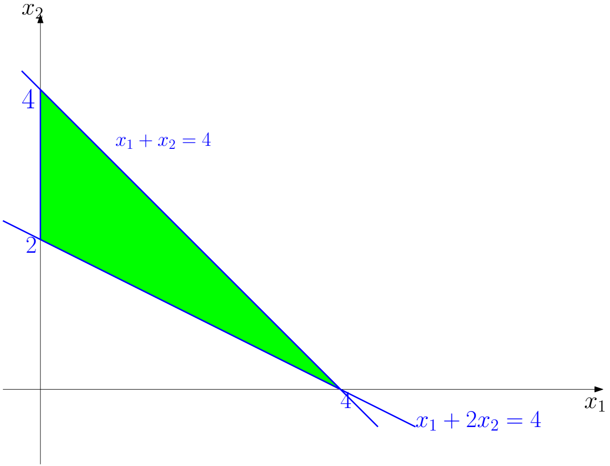


Región Factible

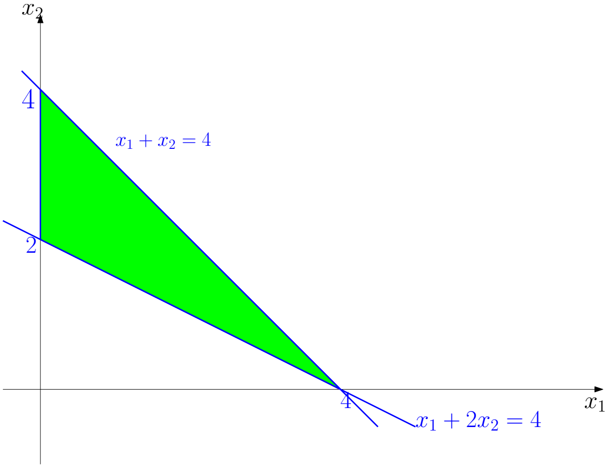


$$x_1 + 2x_2 \leq 4,\ x_1, x_2 \geq 0$$

Región Factible

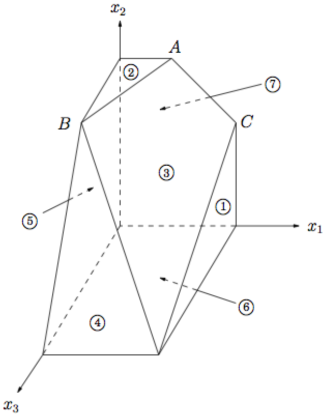


Región Factible



$$x_1 + 2x_2 \geq 4,\ x_1 + x_2 \leq 4,\ x_1, x_2 \geq 0$$

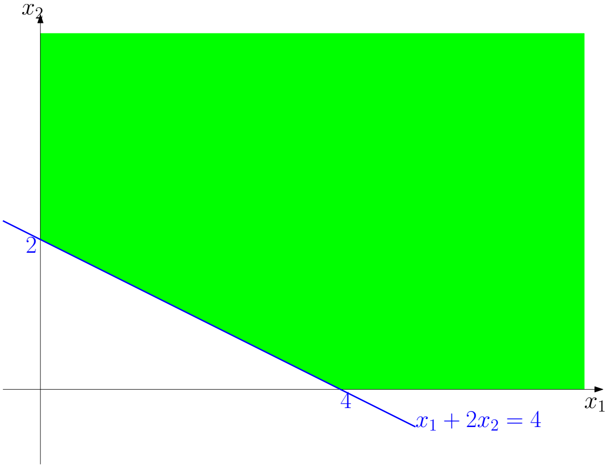
En más dimensiones



$$
\begin{array}{rlr}
\max & x_1 + 6x_2 + 13x_3 & \\
& x_1 \leq 200 & ① \\
& x_2 \leq 300 & ② \\
& x_1 + x_2 + x_3 \leq 400 & ③ \\
& x_2 + 3x_3 \leq 600 & ④ \\
& x_1 \geq 0 & ⑤ \\
& x_2 \geq 0 & ⑥ \\
& x_3 \geq 0 & ⑦
\end{array}
$$

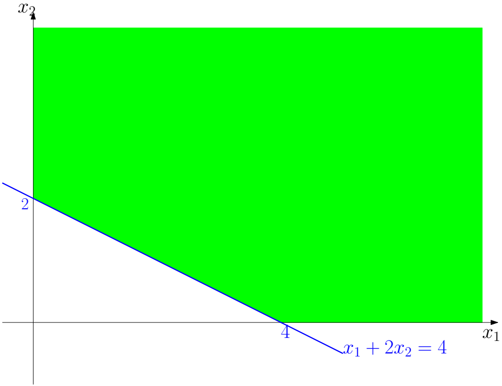
Región Factible y Función Objetivo

$$\min_{x_1,x_2} 2x_1 + 3x_2$$

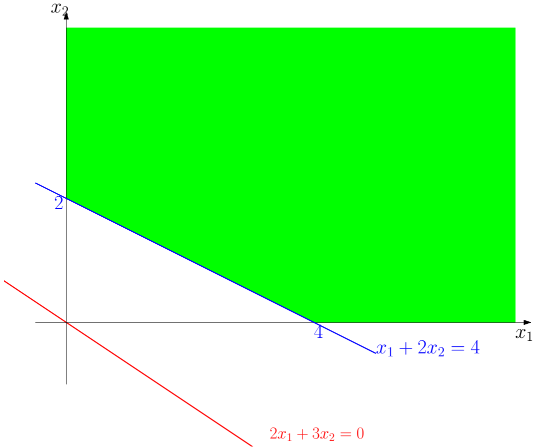


$$2x_1 + 3x_2 = k$$

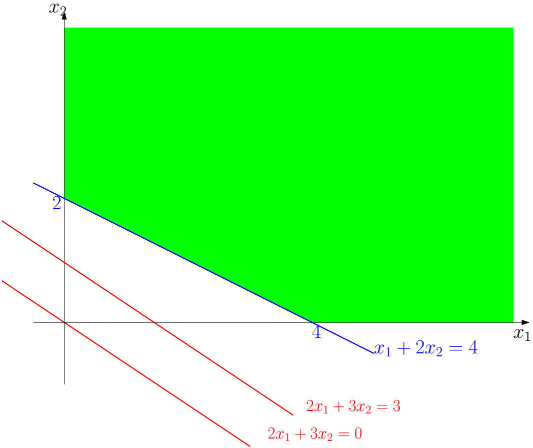
$$2x_1 + 3x_2 = k$$



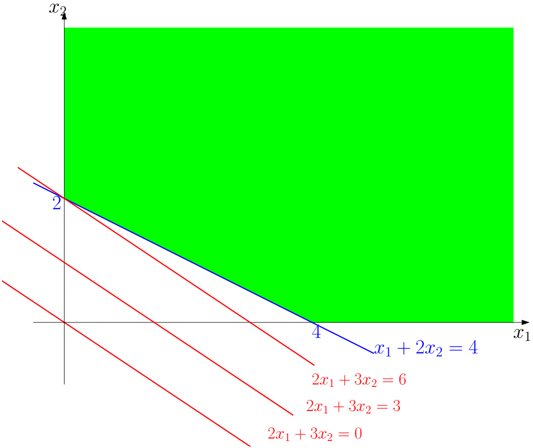
$$2x_1 + 3x_2 = k$$



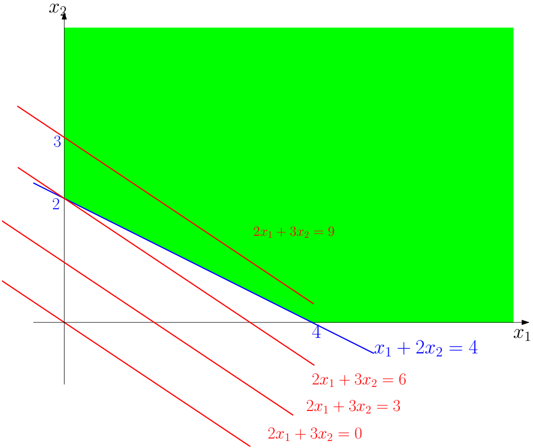
$$2x_1 + 3x_2 = k$$



$$2x_1 + 3x_2 = k$$

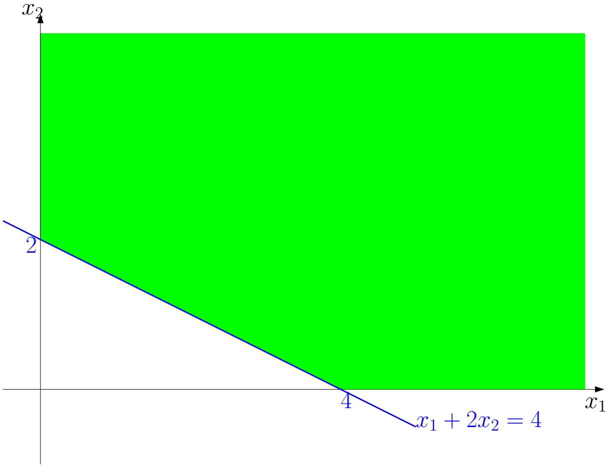


$$2x_1 + 3x_2 = k$$



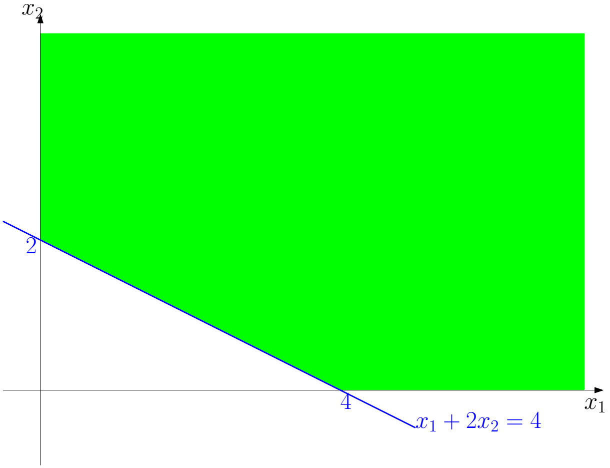
Región Factible y Función Objetivo

$$\min_{x_1, x_2} x_1 + 2x_2$$



Región Factible y Función Objetivo

$$\max_{x_1,x_2} 2x_1 + 3x_2$$



Condiciones para un PL bien planteado

1. Las filas de $\mathbf{A}$ son linealmente independientes.

Condiciones para un PL bien planteado

1. Las filas de $\mathbf{A}$ son linealmente independientes. De lo contrario:
    (a) 2 o más restricciones son redundantes (en cuyo caso podemos borrar una de ellas).

Condiciones para un PL bien planteado

1. Las filas de $\mathbf{A}$ son linealmente independientes. De lo contrario:
   (a) 2 o más restricciones son redundantes (en cuyo caso podemos borrar una de ellas).
   (b) 2 o más restricciones son inconsistentes:

Condiciones para un PL bien planteado

1. Las filas de $\mathbf{A}$ son linealmente independientes. De lo contrario:
   (a) 2 o más restricciones son redundantes (en cuyo caso podemos borrar una de ellas).
   (b) 2 o más restricciones son inconsistentes:no hay solución factible.

Condiciones para un PL bien planteado

1. Las filas de $\mathbf{A}$ son linealmente independientes. De lo contrario:
   (a) 2 o más restricciones son redundantes (en cuyo caso podemos borrar una de ellas).
   (b) 2 o más restricciones son inconsistentes:no hay solución factible.
2. $m < n$

Condiciones para un PL bien planteado

1. Las filas de $\mathbf{A}$ son linealmente independientes. De lo contrario:
   (a) 2 o más restricciones son redundantes (en cuyo caso podemos borrar una de ellas).
   (b) 2 o más restricciones son inconsistentes:no hay solución factible.
2. $m < n$
3. Función objetivo acotada.