Conceptos de Algebra Lineal

Fernando Lozano

Universidad de los Andes

30 de julio de 2014

Sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$: m ecuaciones, n incógnitas.

Sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$: m ecuaciones, n incógnitas.
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$: m ecuaciones, n incógnitas.
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$

Visto desde las filas

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Visto desde las filas

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \mathbf{x} \\ \mathbf{c}_2^T \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^T \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Visto desde las filas

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \mathbf{x} \\ \mathbf{c}_2^T \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^T \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{c}_i \mathbf{x} = b_i$:

Visto desde las filas

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T\mathbf{x} \\ \mathbf{c}_2^T\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^T\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{c}_i\mathbf{x} = b_i$: Ecuación de hiperplano (n dimensiones).

Visto desde las filas

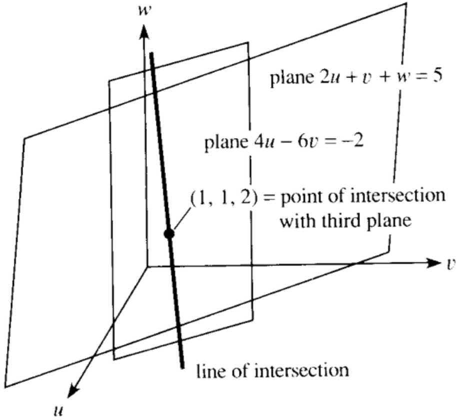
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T\mathbf{x} \\ \mathbf{c}_2^T\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^T\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{c}_i\mathbf{x} = b_i$: Ecuación de hiperplano (n dimensiones).
- Intersección de m hiperplanos.

$$
\begin{aligned}
2u + v + w &= 5 \\
4u - 6v &= -2 \\
-2u + 7v + 2w &= 9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2u + v + w &= 5 \\
4u - 6v &= -2 \\
-2u + 7v + 2w &= 9
\end{aligned}
$$



Visto desde las columnas

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Visto desde las columnas

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Visto desde las columnas

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

Visto desde las columnas

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

- $\mathbf{b}$ combinación lineal de $\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_n$

Visto desde las columnas

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

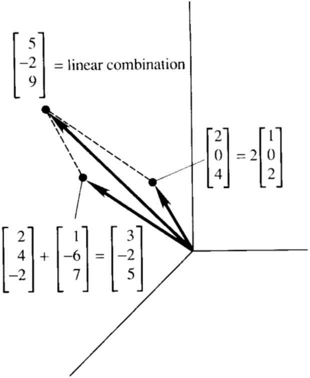
$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

- $\mathbf{b}$ combinación lineal de $\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_n$
- $\mathbf{b} \in \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_n\}$?

$$u\begin{bmatrix}2\\4\\-2\end{bmatrix}+v\begin{bmatrix}1\\-6\\7\end{bmatrix}+w\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-2\\9\end{bmatrix}$$

$$u\begin{bmatrix}2\\4\\-2\end{bmatrix}+v\begin{bmatrix}1\\-6\\7\end{bmatrix}+w\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-2\\9\end{bmatrix}$$



Soluciones?

Soluciones?

1. $m = n$:

Soluciones?

1. $m = n$:
   - Si $\mathbf{A}$ es de rango completo:

Soluciones?

1. $m = n$:
   - Si $\mathbf{A}$ es de rango completo: solución única para cualquier $\mathbf{b}$.

Soluciones?

1. $m = n$:
   - Si $\mathbf{A}$ es de rango completo: solución única para cualquier $\mathbf{b}$.
   - Si $\mathbf{A}$ no es de rango completo:

Soluciones?

1. $m = n$:
   - Si $\mathbf{A}$ es de rango completo: solución única para cualquier $\mathbf{b}$.
   - Si $\mathbf{A}$ no es de rango completo: depende de $\mathbf{b}$:

Soluciones?

1. $m = n$:
   - Si $\mathbf{A}$ es de rango completo: solución única para cualquier $\mathbf{b}$.
   - Si $\mathbf{A}$ no es de rango completo: depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.

Soluciones?

1. $m = n$:
   - Si $\mathbf{A}$ es de rango completo: solución única para cualquier $\mathbf{b}$.
   - Si $\mathbf{A}$ no es de rango completo: depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.
     - Infinitas soluciones.

Soluciones?

1. $m = n$:
   - Si $\mathbf{A}$ es de rango completo: solución única para cualquier $\mathbf{b}$.
   - Si $\mathbf{A}$ no es de rango completo: depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.
     - Infinitas soluciones.

Soluciones?

1. $m = n$:
   - Si $\mathbf{A}$ es de rango completo: solución única para cualquier $\mathbf{b}$.
   - Si $\mathbf{A}$ no es de rango completo: depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.
     - Infinitas soluciones.
2. $m < n$

Soluciones?

1. $m = n$:
   - Si $\mathbf{A}$ es de rango completo: solución única para cualquier $\mathbf{b}$.
   - Si $\mathbf{A}$ no es de rango completo: depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.
     - Infinitas soluciones.
2. $m < n$
   - Depende de $\mathbf{b}$:

Soluciones?

1. $m = n$:
   - Si $\mathbf{A}$ es de rango completo: solución única para cualquier $\mathbf{b}$.
   - Si $\mathbf{A}$ no es de rango completo: depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.
     - Infinitas soluciones.
2. $m < n$
   - Depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.

Soluciones?

1. $m = n$:
   - Si $\mathbf{A}$ es de rango completo: solución única para cualquier $\mathbf{b}$.
   - Si $\mathbf{A}$ no es de rango completo: depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.
     - Infinitas soluciones.
2. $m < n$
   - Depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.
     - Si hay una solución, existen infinitas soluciones.

Soluciones?

1. $m = n$:
   - Si $\mathbf{A}$ es de rango completo: solución única para cualquier $\mathbf{b}$.
   - Si $\mathbf{A}$ no es de rango completo: depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.
     - Infinitas soluciones.
2. $m < n$
   - Depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.
     - Si hay una solución, existen infinitas soluciones.
   - Si $\mathbf{b} = 0$, existe solución no trivial.

Soluciones?

1. $m = n$:
   - Si $\mathbf{A}$ es de rango completo: solución única para cualquier $\mathbf{b}$.
   - Si $\mathbf{A}$ no es de rango completo: depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.
     - Infinitas soluciones.
2. $m < n$
   - Depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.
     - Si hay una solución, existen infinitas soluciones.
   - Si $\mathbf{b} = 0$, existe solución no trivial.
3. $m > n$
   - Depende de $\mathbf{b}$:

Soluciones?

1. $m = n$:
   - Si $\mathbf{A}$ es de rango completo: solución única para cualquier $\mathbf{b}$.
   - Si $\mathbf{A}$ no es de rango completo: depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.
     - Infinitas soluciones.
2. $m < n$
   - Depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.
     - Si hay una solución, existen infinitas soluciones.
   - Si $\mathbf{b} = 0$, existe solución no trivial.
3. $m > n$
   - Depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.

Soluciones?

1. $m = n$:
   - Si $\mathbf{A}$ es de rango completo: solución única para cualquier $\mathbf{b}$.
   - Si $\mathbf{A}$ no es de rango completo: depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.
     - Infinitas soluciones.
2. $m < n$
   - Depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.
     - Si hay una solución, existen infinitas soluciones.
   - Si $\mathbf{b} = 0$, existe solución no trivial.
3. $m > n$
   - Depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.
     - Existe una solución única.

Soluciones?

1. $m = n$:
   - Si $\mathbf{A}$ es de rango completo: solución única para cualquier $\mathbf{b}$.
   - Si $\mathbf{A}$ no es de rango completo: depende de $\mathbf{b}$:
     - ★ No hay solución.
     - ★ Infinitas soluciones.
2. $m < n$
   - Depende de $\mathbf{b}$:
     - ★ No hay solución.
     - ★ Si hay una solución, existen infinitas soluciones.
   - Si $\mathbf{b} = 0$, existe solución no trivial.
3. $m > n$
   - Depende de $\mathbf{b}$:
     - ★ No hay solución.
     - ★ Existe una solución única.
     - ★ Existen infinitas soluciones.

Soluciones?

1. $m = n$:
   - Si $\mathbf{A}$ es de rango completo: solución única para cualquier $\mathbf{b}$.
   - Si $\mathbf{A}$ no es de rango completo: depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.
     - Infinitas soluciones.
2. $m < n$
   - Depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.
     - Si hay una solución, existen infinitas soluciones.
   - Si $\mathbf{b} = 0$, existe solución no trivial.
3. $m > n$
   - Depende de $\mathbf{b}$:
     - No hay solución.
     - Existe una solución única.
     - Existen infinitas soluciones.

Caso $m \leq n$, $\mathbf{A}$ de rango completo

Caso $m \leq n$, $\mathbf{A}$ de rango completo

- n variables

Caso $m \leq n$, $\mathbf{A}$ de rango completo

- n variables $\begin{cases} n-m & \text{variables libres} \\ m & \text{variables básicas} \end{cases}$

Caso $m \leq n$, $\mathbf{A}$ de rango completo

- n variables $\begin{cases} n - m & \text{variables libres} \\ m & \text{variables básicas} \end{cases}$
- Escogemos m columnas linealmente independientes de $\mathbf{A}$:

Caso $m \leq n$, $\mathbf{A}$ de rango completo

- n variables $\begin{cases} n-m & \text{variables libres} \\ m & \text{variables básicas} \end{cases}$
- Escogemos m columnas linealmente independientes de $\mathbf{A}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m & \mathbf{a}_{m+1} & \mathbf{a}_{m+2} & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Caso $m \leq n$, $\mathbf{A}$ de rango completo

- n variables $\begin{cases} n-m & \text{variables libres} \\ m & \text{variables básicas} \end{cases}$
- Escogemos m columnas linealmente independientes de $\mathbf{A}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m & \mathbf{a}_{m+1} & \mathbf{a}_{m+2} & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Vectores y Valores Propios

Definición

Sea $\mathbf{A}$ *una matriz* $n \times n$*. Se dice que* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ *es un vector propio de* $\mathbf{A}$ *si existe* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tal que*

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

Vectores y Valores Propios

Definición

Sea $\mathbf{A}$ *una matriz* $n \times n$*. Se dice que* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ *es un vector propio de* $\mathbf{A}$ *si existe* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tal que*

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

Podemos escribir:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Vectores y Valores Propios

Definición

Sea $\mathbf{A}$ *una matriz* $n \times n$. *Se dice que* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ *es un vector propio de* $\mathbf{A}$ *si existe* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tal que*

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

Podemos escribir:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

es decir:

Vectores y Valores Propios

Definición

Sea $\mathbf{A}$ *una matriz* $n \times n$. *Se dice que* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ *es un vector propio de* $\mathbf{A}$ *si existe* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tal que*

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

Podemos escribir:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

es decir:

- El vector $\mathbf{u}$ está en el espacio nulo de la matriz $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$.

Vectores y Valores Propios

Definición

Sea $\mathbf{A}$ *una matriz* $n \times n$. *Se dice que* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ *es un vector propio de* $\mathbf{A}$ *si existe* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tal que*

$$\mathbf{Au} = \lambda \mathbf{u}$$

Podemos escribir:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

es decir:

- El vector $\mathbf{u}$ está en el espacio nulo de la matriz $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$.
- El número λ se escoge de manera que $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ tenga espacio nulo.

Receta

Receta

1. Calcule el determinante de $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$. (polinomio de grado n)

Receta

1. Calcule el determinante de $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$. (polinomio de grado n)
2. Halle las raíces de este polinomio: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Receta

1. Calcule el determinante de $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$. (polinomio de grado n)
2. Halle las raíces de este polinomio: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
3. Para cada λ_i solucione

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$$

Receta

1. Calcule el determinante de $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$. (polinomio de grado n)
2. Halle las raíces de este polinomio: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
3. Para cada λ_i solucione

$$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$$

(dado que $\det(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}) = 0$ existen soluciones no triviales).

Algunas Propiedades

- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n =$

Algunas Propiedades

- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

Algunas Propiedades

- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
- $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_n =$

Algunas Propiedades

- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
- $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_n = \det(\mathbf{A})$

Algunas Propiedades

- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
- $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_n = \det(\mathbf{A})$
- Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k$ corresponden a valores propios diferentes entonces $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k$ son

Algunas Propiedades

- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
- $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_n = \det(\mathbf{A})$
- Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k$ corresponden a valores propios diferentes entonces $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k$ son linealmente independientes.

Algunas Propiedades

- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
- $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_n = \det(\mathbf{A})$
- Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k$ corresponden a valores propios diferentes entonces $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k$ son linealmente independientes.
- Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n$ son linealmente independientes y $\mathbf{S} = [\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\ldots|\mathbf{u}_n]$

Algunas Propiedades

- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
- $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_n = \det(\mathbf{A})$
- Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k$ corresponden a valores propios diferentes entonces $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k$ son linealmente independientes.
- Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n$ son linealmente independientes y $\mathbf{S} = [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \ldots | \mathbf{u}_n]$ entonces

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Algunas Propiedades

- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
- $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_n = \det(\mathbf{A})$
- Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k$ corresponden a valores propios diferentes entonces $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k$ son linealmente independientes.
- Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n$ son linealmente independientes y $\mathbf{S} = [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \ldots | \mathbf{u}_n]$ entonces

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda}$$

Algunas Propiedades

- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
- $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_n = \det(\mathbf{A})$
- Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k$ corresponden a valores propios diferentes entonces $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k$ son linealmente independientes.
- Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n$ son linealmente independientes y $\mathbf{S} = [\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\ldots|\mathbf{u}_n]$ entonces

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda}$$

y

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$$

Matriz simétrica real ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$)

Matriz simétrica real ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$)

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots . \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Matriz simétrica real ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$)

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots .\lambda_n \in \mathbb{R}$.
- Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots .\lambda_n$ son diferentes $\Rightarrow$

Matriz simétrica real ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$)

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots .\lambda_n \in \mathbb{R}$.
- Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots .\lambda_n$ son diferentes $\Rightarrow$ vectores propios $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ se pueden escoger ortonormales

Matriz simétrica real ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$)

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots . \lambda_n \in \mathbb{R}$.
- Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots . \lambda_n$ son diferentes $\Rightarrow$ vectores propios $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ se pueden escoger ortonormales $\Rightarrow$base ortonormal!.

Matriz simétrica real ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$)

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots .\lambda_n \in \mathbb{R}$.
- Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots .\lambda_n$ son diferentes $\Rightarrow$ vectores propios $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ se pueden escoger ortonormales $\Rightarrow$base ortonormal!.
- En este caso $\mathbf{S}^{-1} =$

Matriz simétrica real ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$)

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots .\lambda_n \in \mathbb{R}$.
- Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots .\lambda_n$ son diferentes $\Rightarrow$ vectores propios $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ se pueden escoger ortonormales $\Rightarrow$base ortonormal!.
- En este caso $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$,

Matriz simétrica real ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$)

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots .\lambda_n \in \mathbb{R}$.
- Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots .\lambda_n$ son diferentes $\Rightarrow$ vectores propios $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ se pueden escoger ortonormales $\Rightarrow$base ortonormal!.
- En este caso $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$, y podemos diagonalizar:

Matriz simétrica real ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$)

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots .\lambda_n \in \mathbb{R}$.
- Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots .\lambda_n$ son diferentes $\Rightarrow$ vectores propios $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ se pueden escoger ortonormales $\Rightarrow$base ortonormal!.
- En este caso $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$, y podemos diagonalizar:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^T =$$

Matriz simétrica real ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$)

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots . \lambda_n \in \mathbb{R}$.
- Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots . \lambda_n$ son diferentes $\Rightarrow$ vectores propios $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ se pueden escoger ortonormales $\Rightarrow$base ortonormal!.
- En este caso $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$, y podemos diagonalizar:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^T = \lambda_1\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + \lambda_2\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T + \cdots + \lambda_n\mathbf{u}_n\mathbf{u}_n^T$$

Matriz simétrica real ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$)

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots .\lambda_n \in \mathbb{R}$.
- Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots .\lambda_n$ son diferentes $\Rightarrow$ vectores propios $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ se pueden escoger ortonormales $\Rightarrow$base ortonormal!.
- En este caso $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$, y podemos diagonalizar:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^T = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T$$

- Podemos representar vectores como combinación lineal de vectores propios.

$$\mathbf{e} = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j$$

Matriz simétrica real ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$)

- $\lambda_1, \lambda_2, \dots . \lambda_n \in \mathbb{R}$.
- Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots . \lambda_n$ son diferentes $\Rightarrow$ vectores propios $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ se pueden escoger ortonormales $\Rightarrow$base ortonormal!.
- En este caso $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$, y podemos diagonalizar:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^T = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T$$

- Podemos representar vectores como combinación lineal de vectores propios.

$$\mathbf{e} = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j \quad \text{donde} \quad a_j =$$

Matriz simétrica real ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$)

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots .\lambda_n \in \mathbb{R}$.
- Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots .\lambda_n$ son diferentes $\Rightarrow$ vectores propios $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ se pueden escoger ortonormales $\Rightarrow$base ortonormal!.
- En este caso $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$, y podemos diagonalizar:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^T = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T$$

- Podemos representar vectores como combinación lineal de vectores propios.

$$\mathbf{e} = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j \quad \text{donde} \quad a_j = \langle \mathbf{e}, \mathbf{u}_j \rangle$$

- Podemos expresar el tamaño del vector en términos de los a_j:

- Podemos expresar el tamaño del vector en términos de los a_j:

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle$$

- Podemos expresar el tamaño del vector en términos de los a_j:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}\|^2 &= \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j, \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i \right\rangle\end{aligned}$$

- Podemos expresar el tamaño del vector en términos de los a_j:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{e}\|^2 &= \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j, \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i \right\rangle \\
&= \sum_{i,j} a_i a_j \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle
\end{aligned}$$

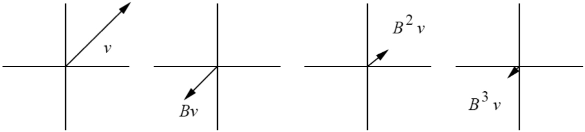
- Podemos expresar el tamaño del vector en términos de los a_j:

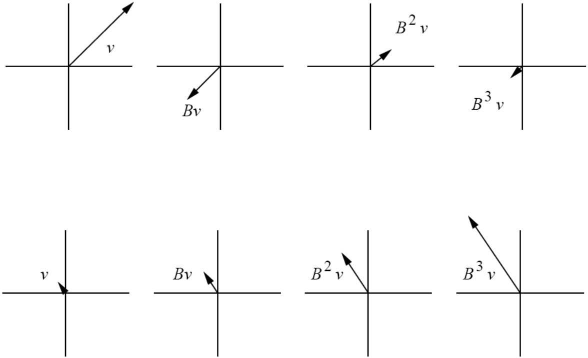
$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{e}\|^2 &= \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j, \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i \right\rangle \\
&= \sum_{i,j} a_i a_j \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle \\
&= \sum_{j} a_j^2
\end{aligned}
$$

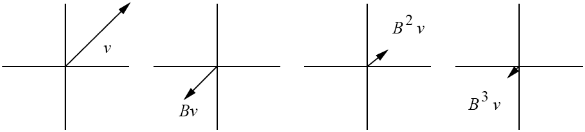
- Podemos expresar el tamaño del vector en términos de los a_j:

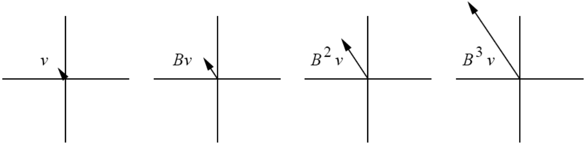
$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}\|^2 &= \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j, \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i \right\rangle \\ &= \sum_{i,j} a_i a_j \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle \\ &= \sum_j a_j^2\end{aligned}$$

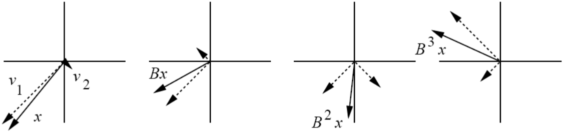
- Pitágoras!


v
Bv
B 2 v
B 3 v


v
Bv
B 2 v
B 3 v
v
Bv
B 2 v
B 3 v


v
Bv
B 2 v
B 3 v


v
Bv
B 2 v
B 3 v


v 1
v 2
x
Bx
B 2 x
B 3 x

Norma (espectral) de una matriz $\mathbf{Q}$

- Máxima "ganancia":

$$\|\mathbf{Q}\| = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

Norma (espectral) de una matriz $\mathbf{Q}$

- Máxima "ganancia":

$$\|\mathbf{Q}\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\sqrt{\mathbf{x}^T(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x}\|}$$

Norma (espectral) de una matriz $\mathbf{Q}$

- Máxima "ganancia":

$$\|\mathbf{Q}\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\sqrt{\mathbf{x}^T(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x}\|}$$

- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ valores propios, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores propios de $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$,

Norma (espectral) de una matriz $\mathbf{Q}$

- Máxima "ganancia":

$$\|\mathbf{Q}\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\sqrt{\mathbf{x}^T(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x}\|}$$

- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ valores propios, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores propios de $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$, $\mathbf{x} = \sum_j a_j \mathbf{v}_j$:

Norma (espectral) de una matriz $\mathbf{Q}$

- Máxima "ganancia":

$$\|\mathbf{Q}\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\sqrt{\mathbf{x}^T(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x}\|}$$

- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ valores propios, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores propios de $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$, $\mathbf{x} = \sum_j a_j \mathbf{v}_j$:

$$\frac{\langle \mathbf{x}, (\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2}$$

Norma (espectral) de una matriz $\mathbf{Q}$

- Máxima "ganancia":

$$\|\mathbf{Q}\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\sqrt{\mathbf{x}^T(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x}\|}$$

- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ valores propios, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores propios de $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$, $\mathbf{x} = \sum_j a_j \mathbf{v}_j$:

$$\frac{\langle \mathbf{x}, (\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{\sum_j a_j^2 \lambda_j}{\sum_j a_j^2}$$

Norma (espectral) de una matriz $\mathbf{Q}$

- Máxima "ganancia":

$$\|\mathbf{Q}\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\sqrt{\mathbf{x}^T(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x}\|}$$

- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ valores propios, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores propios de $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$, $\mathbf{x} = \sum_j a_j \mathbf{v}_j$:

$$\frac{\langle \mathbf{x}, (\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{x}\rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{\sum_j a_j^2 \lambda_j}{\sum_j a_j^2} \leq \lambda_1$$

Norma (espectral) de una matriz $\mathbf{Q}$

- Máxima "ganancia":

$$\|\mathbf{Q}\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\sqrt{\mathbf{x}^T(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x}\|}$$

- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ valores propios, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores propios de $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$, $\mathbf{x} = \sum_j a_j \mathbf{v}_j$:

$$\frac{\langle \mathbf{x}, (\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{\sum_j a_j^2 \lambda_j}{\sum_j a_j^2} \leq \lambda_1$$

- Si $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$,

$$\frac{\langle \mathbf{v}_1, (\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|} =$$

Norma (espectral) de una matriz $\mathbf{Q}$

- Máxima "ganancia":

$$\|\mathbf{Q}\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Qx}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\sqrt{\mathbf{x}^T(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x}\|}$$

- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ valores propios, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores propios de $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$, $\mathbf{x} = \sum_j a_j \mathbf{v}_j$:

$$\frac{\langle \mathbf{x}, (\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{\sum_j a_j^2 \lambda_j}{\sum_j a_j^2} \leq \lambda_1$$

- Si $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$,

$$\frac{\langle \mathbf{v}_1, (\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|} = \lambda_1$$

Norma (espectral) de una matriz $\mathbf{Q}$

- Máxima “ganancia”:

$$\|\mathbf{Q}\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\sqrt{\mathbf{x}^T(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x}\|}$$

- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ valores propios, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores propios de $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$, $\mathbf{x} = \sum_j a_j \mathbf{v}_j$:

$$\frac{\langle \mathbf{x}, (\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{\sum_j a_j^2 \lambda_j}{\sum_j a_j^2} \leq \lambda_1$$

- Si $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$,

$$\frac{\langle \mathbf{v}_1, (\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|} = \lambda_1 \Rightarrow \|\mathbf{Q}\|^2 = \lambda_1$$

Matrices positivas definidas

Definición

Una matriz $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *es positiva definida (denotado* $\mathbf{Q} > 0$*), si* $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} > 0$$

Matrices positivas definidas

Definición

Una matriz $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *es positiva definida (denotado* $\mathbf{Q} > 0$*), si* $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$*:*

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} > 0$$

Tests:

Matrices positivas definidas

Definición

Una matriz $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *es positiva definida (denotado* $\mathbf{Q} > 0$*), si* $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$*:*

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} > 0$$

Tests:

- Todos los valores propios λ_i de $\mathbf{Q}$ satisfacen $\lambda_i > 0$.

Matrices positivas definidas

Definición

Una matriz $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es positiva definida (denotado* $\mathbf{Q} > 0$*), si* $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$*:*

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} > 0$$

Tests:

- Todos los valores propios λ_i de $\mathbf{Q}$ satisfacen $\lambda_i > 0$.
- Todos los pivotes d_i de $\mathbf{Q}$ (sin intercambio de filas) satisfacen $d_i > 0$.

Matrices positivas definidas

Definición

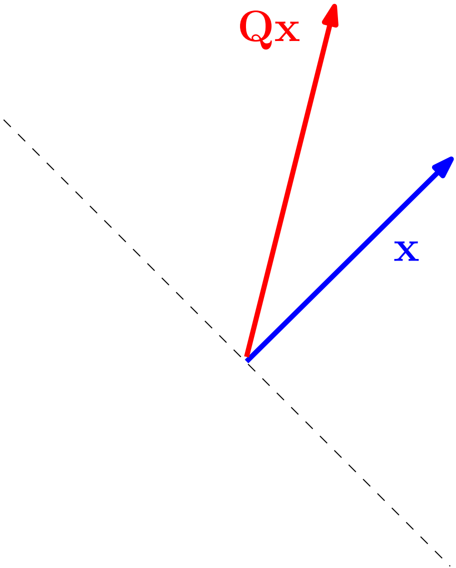
Una matriz $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es* *positiva definida* *(denotado* $\mathbf{Q} > 0$*), si* $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$*:*

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} > 0$$

Tests:

- Todos los valores propios λ_i de $\mathbf{Q}$ satisfacen $\lambda_i > 0$.
- Todos los pivotes d_i de $\mathbf{Q}$ (sin intercambio de filas) satisfacen $d_i > 0$.
- Todas las submatrices superior izquierdas $\mathbf{Q}_k$ tienen determinantes positivos.

Interpretación 1



Interpretación 2

- Sea $\mathbf{Q} > 0$ y $\mathbf{S}$ la matriz cuyas columnas son los vectores propios de $\mathbf{Q}$,
$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^T$$
con $\lambda_i > 0$.

Interpretación 2

- Sea $\mathbf{Q} > 0$ y $\mathbf{S}$ la matriz cuyas columnas son los vectores propios de $\mathbf{Q}$,
$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^T$$
con $\lambda_i > 0$.
- Cambio de variable $\mathbf{y} = \mathbf{S}^T\mathbf{x}$.

Interpretación 2

- Sea $\mathbf{Q} > 0$ y $\mathbf{S}$ la matriz cuyas columnas son los vectores propios de $\mathbf{Q}$,
$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^T$$
con $\lambda_i > 0$.
- Cambio de variable $\mathbf{y} = \mathbf{S}^T\mathbf{x}$.
- $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} = 1$ se simplifica a:

Interpretación 2

- Sea $\mathbf{Q} > 0$ y $\mathbf{S}$ la matriz cuyas columnas son los vectores propios de $\mathbf{Q}$,
$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^T$$
con $\lambda_i > 0$.
- Cambio de variable $\mathbf{y} = \mathbf{S}^T\mathbf{x}$.
- $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} = 1$ se simplifica a:
$$\mathbf{x}^T\mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^T\mathbf{x} = 1$$

Interpretación 2

- Sea $\mathbf{Q} > 0$ y $\mathbf{S}$ la matriz cuyas columnas son los vectores propios de $\mathbf{Q}$,
$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^T$$
con $\lambda_i > 0$.
- Cambio de variable $\mathbf{y} = \mathbf{S}^T\mathbf{x}$.
- $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} = 1$ se simplifica a:
$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^T\mathbf{x} &= 1 \\ \mathbf{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{y} &= 1 \end{aligned}$$

Interpretación 2

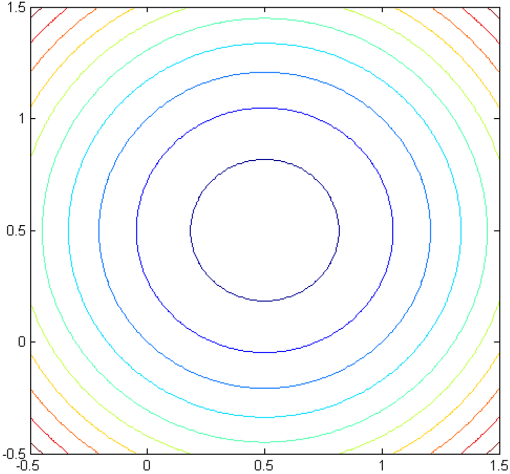
- Sea $\mathbf{Q} > 0$ y $\mathbf{S}$ la matriz cuyas columnas son los vectores propios de $\mathbf{Q}$,
$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^T$$
con $\lambda_i > 0$.
- Cambio de variable $\mathbf{y} = \mathbf{S}^T\mathbf{x}$.
- $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} = 1$ se simplifica a:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T\mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^T\mathbf{x} &= 1 \\
\mathbf{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{y} &= 1 \\
\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 &= 1
\end{aligned}$$

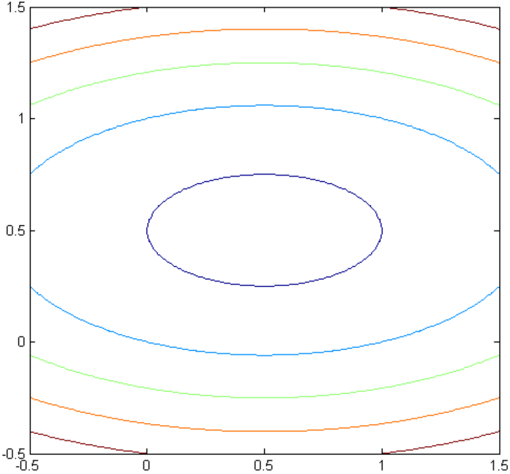
Interpretación 2

- Sea $\mathbf{Q} > 0$ y $\mathbf{S}$ la matriz cuyas columnas son los vectores propios de $\mathbf{Q}$,
$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^T$$
con $\lambda_i > 0$.
- Cambio de variable $\mathbf{y} = \mathbf{S}^T\mathbf{x}$.
- $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} = 1$ se simplifica a:
$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^T\mathbf{x} &= 1 \\ \mathbf{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{y} &= 1 \\ \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 &= 1 \end{aligned}$$
- Elipsoide con ejes con longitud $1/\sqrt{\lambda_1}, \ldots, 1/\sqrt{\lambda_n}$ desde el centro, que en el espacio original están en la dirección de los vectores propios.

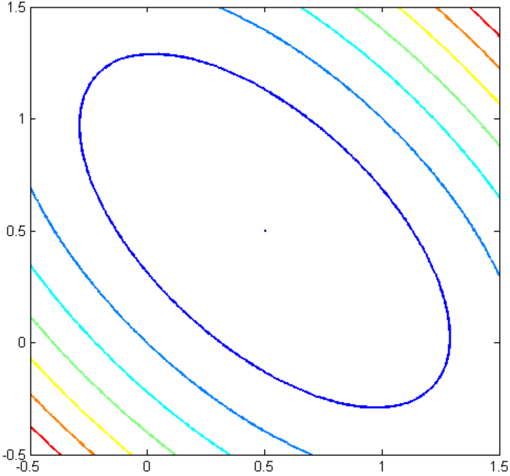
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1$$



$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 4$$



$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 4$$



Producto punto con respecto a $\mathbf{Q} > 0$

Definición

Sea $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *una matriz positiva definida. Para* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *definimos el producto punto:*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{y} \rangle$$

Producto punto con respecto a $\mathbf{Q} > 0$

Definición

Sea $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *una matriz positiva definida. Para* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *definimos el producto punto:*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{y}$$

Producto punto con respecto a $\mathbf{Q} > 0$

Definición

Sea $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *una matriz positiva definida. Para* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *definimos el producto punto:*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{y}$$

Chequeando propiedades:

Producto punto con respecto a $\mathbf{Q} > 0$

Definición

Sea $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *una matriz positiva definida. Para* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *definimos el producto punto:*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{y}$$

Chequeando propiedades:

- Simetría: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{Q}}$

Producto punto con respecto a $\mathbf{Q} > 0$

Definición

Sea $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *una matriz positiva definida. Para* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *definimos el producto punto:*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{y}$$

Chequeando propiedades:

- Simetría: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{Q}}$
- Linealidad:

Producto punto con respecto a $\mathbf{Q} > 0$

Definición

Sea $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *una matriz positiva definida. Para* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *definimos el producto punto:*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{y}$$

Chequeando propiedades:

- Simetría: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{Q}}$
- Linealidad:

$$\langle a\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}} = a \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}},$$

Producto punto con respecto a $\mathbf{Q} > 0$

Definición

Sea $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *una matriz positiva definida. Para* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *definimos el producto punto:*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{y}$$

Chequeando propiedades:

- Simetría: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{Q}}$
- Linealidad:

$$\langle a\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}} = a \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}}, \qquad \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{Q}} + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{Q}}$$

Producto punto con respecto a $\mathbf{Q} > 0$

Definición

Sea $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *una matriz positiva definida. Para* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *definimos el producto punto:*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{y}$$

Chequeando propiedades:

- Simetría: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{Q}}$
- Linealidad:

$$\langle a\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}} = a \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{Q}}, \qquad \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{Q}} + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{Q}}$$

- Positividad:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{Q}} \geq 0 \quad y \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{Q}} = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = 0$$

Norma con respecto a $\mathbf{Q}$

- $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}}^2 =$

Norma con respecto a $\mathbf{Q}$

- $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}}^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{Q}}$

Norma con respecto a $\mathbf{Q}$

- $\|\mathbf{x}\|^2_{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{Q}} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$.

Norma con respecto a $\mathbf{Q}$

- $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}}^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{Q}} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$.
- Si $\mathbf{Q}$ tiene valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ con vectores propios correspondientes $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$,

Norma con respecto a $\mathbf{Q}$

- $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}}^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{Q}} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$.
- Si $\mathbf{Q}$ tiene valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ con vectores propios correspondientes $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$,

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j$$

Norma con respecto a $\mathbf{Q}$

- $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}}^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{Q}} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$.
- Si $\mathbf{Q}$ tiene valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ con vectores propios correspondientes $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$,

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j \quad \text{donde} \quad a_j =$$

Norma con respecto a $\mathbf{Q}$

- $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}}^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{Q}} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$.
- Si $\mathbf{Q}$ tiene valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ con vectores propios correspondientes $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$,

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j \quad \text{donde} \quad a_j = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_j \rangle$$

y

Norma con respecto a $\mathbf{Q}$

- $\|\mathbf{x}\|^2_{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{Q}} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$.
- Si $\mathbf{Q}$ tiene valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ con vectores propios correspondientes $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$,

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j \quad \text{donde} \quad a_j = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_j \rangle$$

y

$$\|\mathbf{x}\|^2_{\mathbf{Q}} = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j, \mathbf{Q} \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i \right\rangle$$

Norma con respecto a $\mathbf{Q}$

- $\|\mathbf{x}\|^2_{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{Q}} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$.
- Si $\mathbf{Q}$ tiene valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ con vectores propios correspondientes $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$,

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j \quad \text{donde} \quad a_j = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_j \rangle$$

y

$$\|\mathbf{x}\|^2_{\mathbf{Q}} = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j, \mathbf{Q} \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j, \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i \mathbf{u}_i \right\rangle$$

Norma con respecto a $\mathbf{Q}$

- $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}}^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{Q}} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$.
- Si $\mathbf{Q}$ tiene valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ con vectores propios correspondientes $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$,

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j \quad \text{donde} \quad a_j = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_j \rangle$$

y

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}}^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j, \mathbf{Q} \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i \right\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j, \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i \mathbf{u}_i \right\rangle \\ &= \sum_{i,j} a_j a_i \lambda_i \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle \end{aligned}$$

Norma con respecto a $\mathbf{Q}$

- $\|\mathbf{x}\|^2_{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{Q}} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$.
- Si $\mathbf{Q}$ tiene valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ con vectores propios correspondientes $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$,

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j \quad \text{donde} \quad a_j = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_j \rangle$$

y

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|^2_{\mathbf{Q}} = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j, \mathbf{Q} \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i \right\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{u}_j, \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i \mathbf{u}_i \right\rangle \\ &= \sum_{i,j} a_j a_i \lambda_i \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \lambda_j \end{aligned}$$