Tarea 2. Cálculo de predicados

Sebastián Valencia Calderón
Universidad de los Andes

Marzo, 2013

Ejercicio 1. Exprese cada expresión en lenguaje natural usando la sintáxis de la lógica de primer orden. Suponga que el dominio es el conjunto de estudiantes de la clase. Considere los siguientes predicados

G(x):x tiene un gato.
P(x):x tiene un perro.
C(x):x tiene una chinchilla.

Para la siguiente solución, supongase que se representa el universo como **U**=$\Omega \backslash (x, y, z)$, donde Ω es el alfabeto del lenguaje natural, entonces, se tiene que el universo es un conjunto igual a Ω diferencia simétrica x, y y z; estas últimas variables serán las variables aleatorias o excluidas de **U**, por lo que se tiene $x, y, z = a \vee b \vee \ldots \vee w$. Es claro que no necesariamente se establece una diferencia estricta en las variables excluidas.

1. Sólamente un estudiante en la clase tiene un perro y una chinchilla.

$$H(x) = C(x) \wedge P(x)$$

$$H(y) = H(x)[x := y]$$

$$(\exists x, y \mid H(x) \wedge H(y) \Rightarrow x = y)$$

2. Hay estudiantes de la clase que no tiene ni un perro ni un gato.

$$(\exists x \mid \neg P(x) \wedge \neg G(x))$$

3. Hay estudiantes que no tiene perro ni gato pero si tienen chinchilla.

$$(\exists x \mid \neg P(x) \wedge \neg G(x) \wedge C(x))$$

4. Ningún estudiante tiene las tres mascotas.

$$\neg(\exists x \mid P(x) \wedge G(x) \wedge C(x))$$

5. Para cada uno de los tres tipos de animales hay un estudiante que lo tiene como mascota.

$$((\exists x \mid C(x)) \wedge (\exists y \mid P(y)) \wedge (\exists z \mid G(z)))$$

Ejercicio 2. Demuestre el siguiente teorema

$$(\forall x \mid R : Q \vee P) \wedge R[x := a] \wedge \neg Q[x := a] \Rightarrow P[x := a]$$

Demostración:

$$(\forall x \mid R : Q \vee P)$$

$$\equiv \langle \textbf{Se asume true y el antecedente de la implicación} \rangle$$

$$\neg(\neg(\forall x \mid R : Q \vee P))$$

$$\equiv \langle \textbf{Doble negación y asociatividad} \rangle$$

$$\neg(\exists x \mid R : \neg(Q \vee P))$$

$$\equiv \langle \textbf{De de Morgan generalizada 3} \rangle$$

$$\neg(\exists x \mid R : \neg Q \wedge \neg P))$$

$$\equiv \langle \textbf{De de Morgan sobre } \vee \rangle$$

$$\neg(\exists x \mid R \wedge \neg Q : \neg P))$$

$$\equiv \langle \textbf{Trading de } \exists \textbf{ 1} \rangle$$

$$(\forall x \mid R \wedge \neg Q : P)$$

$$\equiv \langle \textbf{De de Morgan generalizada 2} \rangle$$

$$(\forall x \mid R(x) \wedge \neg Q(x) : P(x))$$

$$\equiv \langle \textbf{Equivalencia semántica} \rangle$$

$$R(a) \wedge \neg Q(a) : P(a)$$

$$\equiv \langle \mathbf{a} \in \mathbf{x} \rangle$$

$$R(a) \wedge \neg Q(a) \Rightarrow P(a)$$

$$\equiv \langle \textbf{Equivalencia semántica} \rangle$$

$$(\forall x \mid R : Q \vee P) \wedge R(a) \wedge \neg Q(a) \Rightarrow P(a)$$

$$\equiv \langle \textbf{Hipótesis} \rangle$$

$$\Rightarrow P(a)$$

$$\equiv \langle \textbf{Modus ponens antecedente supuesto y paso anterior} \rangle$$

$$\Rightarrow P(a)$$

Ejercicio 3. Considere el siguiente enunciado:
Todos los republicanos que pertenecen al Tea party están en contra de un programa de amnistía para ilegales. Marco Rubio es republicano pero está a favor de un programa de amnistía para ilegales. Por lo tanto Marco Rubio no pertenece al Tea Party.

Suponga que el dominio son todos los políticos norte americanos.

1. Traduzca a la lógica de predicados
2. Es posible comcluir la última frase de las anteriores, muestre o refute.

Solución:

Sea **U**el universo del problema, y la codificación de predicados se muestra a continuación: **R(x)**para x es republicano, **TP(x)**para x es del tea party, **AAI(x)**para x apoya el programa de amnistía para ilegales.
Todos los republicanos que pertenecen al Tea party están en contra de un programa de amnistía para ilegales, se puede codificar correctamente como

$$(\forall x \in U \mid R(x) \wedge TP(x) : \neg AAI(x))$$

Por el primer Trading de la cuantificación universal, se tiene:

$$(\forall x \in U \mid R(x) : TP(x) \Rightarrow \neg AAI(x))$$

Por contrapositiva, se tiene:

$$(\forall x \in U \mid R(x) : AAI(x) \Rightarrow \neg TP(x))$$

Nuevamente por el primer Trading de la cuantificación universal, se tiene:

$$(\forall x \in U \mid R(x) \wedge AAI(x) : \neg TP(x))$$

Sea mr Marco Rubio, tal que $mr \in U$, luego es cierto por el predicado anterior que:

$$R(mr) \wedge AAI(mr) : \neg TP(mr)$$

La traducción al lenguaje natural da: Si Marco Rubio es republicano y está a favor de un programa de amnistía para ilegales, entonces, Marco Rubio no pertenece al tea party.