

# Elementos básicos de la teoría del interés

Magda Liliana Reyes Moreno  
Facultad de Matemáticas  
Fundación Universitaria Konrad Lorenz

Junio de 2005

# Índice general

<b>1. CONCEPTOS GENERALES</b>	<b>1</b>
1.1. Concepto de Interés . . . . .	1
1.2. Tasa de Interés . . . . .	2
<b>2. INTERÉS SIMPLE</b>	<b>3</b>
2.1. Fórmula del valor futuro . . . . .	3
2.2. Tiempo . . . . .	4
2.2.1. Clases de tiempo . . . . .	5
2.3. Interés simple exacto e interés simple ordinario . . . . .	7
2.3.1. Interés simple exacto . . . . .	7
2.3.2. Interés simple ordinario . . . . .	7
2.3.3. Diagrama de flujo o línea del tiempo . . . . .	9
2.4. Ecuación de Equivalencia o Ecuación de valor . . . . .	10
2.4.1. Componentes de una ecuación de equivalencia . . . . .	12
2.5. Descuento . . . . .	12
2.5.1. Clases de descuento: . . . . .	12
2.6. Pagos Parciales . . . . .	15
2.6.1. Métodos o reglas comerciales . . . . .	15
<b>3. INTERÉS COMPUESTO</b>	<b>19</b>
3.1. Fórmula de valor futuro . . . . .	19
3.2. Fórmula de valor presente . . . . .	20
3.3. Equivalencia entre tasas de interés . . . . .	20
3.3.1. Tasa periódica . . . . .	20
3.3.2. Tasa Nominal . . . . .	21
3.3.3. Tasa efectiva . . . . .	22
3.3.4. Tasa Continua . . . . .	25
3.3.5. Tasa Anticipada . . . . .	28
3.3.6. Equivalencia entre tasas efectivas y tasas anticipadas . . . . .	31

3.3.7. Tasas Múltiples:	32
3.4. DEVALUACIÓN	38
3.5. INFLACIÓN	39
3.6. SISTEMA DE VALOR CONSTANTE	41
3.7. DEPOSITO A TERMINO FIJO	41
<b>4. ANUALIDADES ORDINARIAS Y ANTICIPADAS</b>	<b>45</b>
4.1. Renta	45
4.1.1. Periodo de Renta	45
4.2. ANUALIDADES	45
4.2.1. Plazo de una anualidad	49
4.2.2. Valor Final ( $VF$ ) ó ( $VS$ )	49
4.2.3. Valor Presente ( $VP$ )	51
4.2.4. Anualidades Anticipadas	55
4.2.5. Anualidad ordinaria en valor presente	58
4.2.6. Anualidad anticipada en valor presente	58
4.3. AMORTIZACION	61
4.4. CAPITALIZACIÓN	62
<b>5. ANUALIDADES DIFERIDAS, PERPETUAS Y GENERALES</b>	<b>65</b>
5.1. Anualidades perpetuas	66
5.2. Anualidades generales	67
<b>6. GRADIENTES</b>	<b>70</b>
6.1. Gradiente aritmético	70
6.1.1. Fórmula del valor presente de un gradiente aritmético	72
6.1.2. Fórmula del valor final del gradiente aritmético	74
6.2. Amortización con cuota creciente	75
6.2.1. Gradiente aritmético infinito	77
6.3. Gradiente geométrico	78
6.3.1. Fórmula del valor presente del gradiente geométrico	79
6.3.2. Fórmula del valor final del gradiente geométrico	80
6.4. Gradiente geométrico infinito	84
<b>7. TERMINOS O DEFINICIONES IMPORTANTES</b>	<b>85</b>
7.1. Bolsa de Valores	85
7.1.1. Comisionista de la bolsa	85
<b>8. CONCLUSIONES</b>	<b>89</b>

# Índice de figuras

2.1. Diagrama tiempo . . . . .	4
2.2. Diagrama de flujo banco . . . . .	9
2.3. Diagrama de flujo prestamista . . . . .	10
2.4. Diagrama de flujo comprador . . . . .	10
2.5. Ubicación fecha focal . . . . .	11
2.6. Diagrama linea del tiempo . . . . .	16
2.7. Linea del tiempo . . . . .	18
3.1. . . . .	19
3.2. Grafica períodos de conversión y de referencia . . . . .	23
3.3. Diagrama de flujo . . . . .	38
3.4. inflación causa devaluación . . . . .	40
3.5. La devaluación puede ser buena para un expotador . . . . .	40
3.6. situaicón en dolar y en pesos . . . . .	43
4.1. grafica de una anualidad . . . . .	45
4.2. No representa anualidad . . . . .	46
4.3. representación de una anualidad vencida . . . . .	47
4.4. Representación de una anualidad anticipada . . . . .	47
4.5. No representa anualidad . . . . .	47
4.6. Ejemplo anualidad . . . . .	48
5.1. Diagrama anualidad diferida . . . . .	66
5.2. Diagrama anualidad general . . . . .	67
6.1. Diagrama gradiente aritmético de 6 pagos . . . . .	71
6.2. Diagrama gradiente aritmético creciente . . . . .	74

# Índice de cuadros

2.1. tabla de Días . . . . .	6
------------------------------	---

# INTRODUCCIÓN

Es indiscutible la necesidad que actualmente tenemos los profesionales, en las distintas ramas, de adquirir un conocimiento de los elementos básicos de la teoría del interés. Cualquier proyecto por pequeño que sea, dentro de su contenido debe incluir un estudio de viabilidad, fundamentado en la teoría del interés, actualmente llamada ingeniería financiera.

Todas las actividades financieras descansan en la costumbre de pagar un rédito por el uso del dinero prestado. La mayor parte de los ingresos de los bancos y compañías inversionistas se deriva de los intereses sobre préstamos o de retorno de utilidades por inversiones. En general todas las operaciones comerciales están relacionadas con los réditos sobre los capitales en juego en los cuales influye en gran parte el tiempo empleado. Toda persona que obtiene un préstamo queda obligada a pagar un rédito (renta de un capital) o interés, por el uso del dinero tomado en préstamo. Así mismo, desde tiempos muy antiguos se ha implantado la costumbre de cobrar intereses por adelantado sobre el valor de los pagares, calculándolos sobre el valor anotado en dichos documentos. Esto además de permitir al prestamista disponer de inmediato del dinero correspondiente a los intereses, le da un mayor rendimiento que la tasa señalada en la operación; a dicha operación se le llama descuento. De igual forma en las actividades comerciales, es frecuente la costumbre de utilizar obligaciones en las que se aceptan pagos parciales o abonos dentro del plazo de la obligación, en lugar de un solo pago en la fecha de su vencimiento.

Por lo anterior este proyecto tiene como principal objetivo adquirir los conocimientos básicos de la teoría del interés de una forma sencilla, por tal motivo en el primer capítulo se encontraran conceptos generales sobre el interés, en el segundo capítulo se analiza en detalle el interés simple. En los problemas de interés simple el capital que generan los intereses permanece constante todo el tiempo de duración del préstamo. Si en cada intervalo de tiempo convenido en una obligación se agregan los intereses al capital, formando un monto sobre el cual se calcularán los intereses en el siguiente intervalo o periodo de tiempo y, así, sucesivamente, se dice que los intereses se capitalizan y la operación financiera es a interés compuesto, este tipo de situación y los elementos que pueden intervenir se estudiaran en el capítulo tercero. En el capítulo cuarto se estudiaran las anualidades ordinarias y las anualidades anticipadas: en matemática financiera, la expresión anualidad se emplea para indicar el sistema de pago de sumas fijas, a intervalos iguales de tiempo; en los negocios, es frecuente que los pagos periódicos se efectúen al comienzo de cada período; tal es el caso de la renta de terrenos, edificios y oficinas, cuyo alquiler se paga

a principio del período y en la mayoría de los casos se utiliza un proceso financiero mediante el cual se extingue, gradualmente una deuda por intermedio de pagos periódicos al cual se le denomina amortización. En capítulo quinto se complementa el estudio de las anualidades ya que es frecuente que en algunas circunstancias obliguen que el primer periodo de pago comience en una fecha futura, hasta después de transcurrido un cierto tiempo desde el momento inicial o de convenio. En países con alto índice de inflación el uso de los gradientes es el modelo matemático que más se ajusta al proceso económico. Por último en el capítulo octavo, se encuentran algunos términos o definiciones importantes, utilizados en las finanzas donde lo estudiado anteriormente es una base fundamental para su aplicación.

# Capítulo 1

## CONCEPTOS GENERALES

El principio fundamental del sistema económico capitalista, o regla de oro del sistema, establece que:

<b>El dinero debe producir más dinero a través del tiempo</b>
---

Es mejor recibir \$100.000 hoy que dentro de un año ; el valor del dinero depende del punto en el tiempo donde se esté ubicado. Cuando se dice que \$100.000 de hoy son iguales a \$125.000 dentro

de un año, se está estableciendo una equivalencia financiera. Esta equivalencia es, hasta cierto punto, subjetiva. Los \$25.000 de diferencia es lo que se conoce como *intereses*. El concepto de equivalencia es la base para poder comprar, en términos monetarios, dos o más propuestas de inversión.

### 1.1. Concepto de Interés

Es la utilidad o ganancia que genera el capital. Por lo general, devenga sobre la base de un tanto por ciento del capital y en relación con el número de períodos de tiempo en que se disponga el capital. Se nota ( $I$ ).

La cantidad de dinero que se paga por el alquiler de \$100 o por el alquiler de \$1 en el primer caso se denomina tasa porcentual y en el segundo, tasa por uno. Por ejemplo si tengo que pagar \$3, de interés por un préstamo de \$100, entonces la tasa será del 3 por ciento que se escribe 3 % y si tengo que pagar 3 centavos por el préstamo de 1 la tasa será 0.03 por uno que también se puede escribir como 3 % desde que  $3\% = 3/100 = 0.03$  anual (sino hay especificación contraria).



## 1.2. Tasa de Interés

La tasa de interés devengada por la suma  $P$ , un período, está dada por la siguiente relación:

$$i = \frac{\text{Intereses en el período}}{\text{Suma inicial}} = \frac{I}{P}$$

Si el interés  $I$  ganado por el préstamo  $P$  de \$100 es \$25 tenemos que la tasa de interés es:  $i = \frac{25}{100} = 0,25$  en otros terminos la tasa de interés es del 25 %.

**Definición 1.1.**  $i =$  Tasa de interés en un período

Clases de interés:

Existen dos clases de interés simple y compuesto.

Interés simple. Cuando los interés no devengan más intereses; es decir no son capitalizables.

Interés compuesto. Cuando los intereses devengan más intereses; es decir, los intereses son capitalizables, se van acumulando al final de cada período, incrementando el valor del capital poseído.

Veamos la diferencia a través de la evolución de una inversión de 100 dólares, a una tasa de interés del 2 % mensual, durante 12 meses, considerada primero a interés simple y luego a interés compuesto, así:

Valor equivalente de la inversión		
	A interés simple	A interés compuesto
Hoy	100	100,00
En 1 mes	$100 + 100 \times 0,02 = 102$	$100,00 + 100,00 \times 0,02 = 102,00$
En 2 meses	$102 + 100 \times 0,02 = 104$	$102,00 + 102,00 \times 0,02 = 104,04$
En 3 meses	$104 + 100 \times 0,02 = 106$	$104,00 + 104,00 \times 0,02 = 106,12$
En 4 meses	$106 + 100 \times 0,02 = 108$	$106,12 + 106,12 \times 0,02 = 108,24$
En 5 meses	$108 + 100 \times 0,02 = 110$	$108,24 + 108,24 \times 0,02 = 110,41$
En 6 meses	$110 + 100 \times 0,02 = 112$	$110,41 + 110,41 \times 0,02 = 112,62$
En 7 meses	$112 + 100 \times 0,02 = 114$	$112,62 + 112,62 \times 0,02 = 114,87$
En 8 meses	$114 + 100 \times 0,02 = 116$	$114,87 + 114,87 \times 0,02 = 117,17$
En 9 meses	$116 + 100 \times 0,02 = 118$	$117,17 + 100,00 \times 0,02 = 119,51$
En 10 meses	$118 + 100 \times 0,02 = 120$	$119,51 + 119,51 \times 0,02 = 121,90$
En 11 meses	$120 + 100 \times 0,02 = 122$	$121,90 + 121,90 \times 0,02 = 124,34$
En 12 meses	$122 + 100 \times 0,02 = 124$	$124,34 + 124,34 \times 0,02 = 126,83$

El interés simple tiene un crecimiento aritmético mientras que el interés compuesto tiene un crecimiento geométrico.

## Capítulo 2

# INTERÉS SIMPLE

**Definición 2.1.** *El interés simple se caracteriza porque los intereses devengados en un período no devengan más intereses en el siguiente; es decir, los intereses no son capitalizables.*

### 2.1. Fórmula del valor futuro

Hoy se deposita una suma  $P$ , a una tasa de interés simple  $i$ . Se desea determinar cuando es equivalente, o cuál será su valor futuro, dentro de  $n$  períodos.

Al final de cada período, el valor acumulado es el siguiente:

Hoy:	$P$	
Dentro de 1 período:	$P + Pi$	$= P(1 + i)$
Dentro de 2 período:	$P(1 + i) + Pi$	$= P(1 + 2i)$
Dentro de 3 período:	$P(1 + 2i) + Pi$	$= P(1 + 3i)$
.		.
.		.
.		.
Dentro de $n$ períodos:		$= P(1 + ni)$

En conclusión el valor futuro  $F$ , en el caso de interés simple es:

$$F = P(1 + ni)$$

$F$  = Valor futuro

$P$  = Valor presente

$i$  = Tasa de interés por período, en tanto por uno.

$n$  = Número de períodos

Debe haber correspondencia entre el período de la tasa de interés y la unidad de tiempos del período. Así, la tasa de interés es anual, la unidad de tiempo de los períodos debe ser el año; si la tasa es mensual la unidad de tiempo de los períodos debe ser el mes.

**Ejemplo 2.1.** *Calcular el interés simple sobre \$750, al 4% anual, durante dos años. ¿Cuál es el valor futuro?.*

**Solución 2.1.**  $F = P(1 + ni)$  donde  $P = 750, n = 2, i = \frac{4}{100} = 0,04$ .

$$F = 750(1 + 2 \times 0,04)$$

$$F = \$810$$

$$\text{intereses} = \text{Valor futuro} - \text{Valor presente}$$

$$\text{Intereses} = F - P$$

$$\text{Intereses} = 810 - 750 = \$60 \text{ en dos años}$$

## 2.2. Tiempo

Es la duración del préstamo la cual puede ser dada en, años, semestres, trimestres, bimestres, meses, día entre otros, por lo cual consta de un inicio y un final, a su transcurso le llamamos períodos.

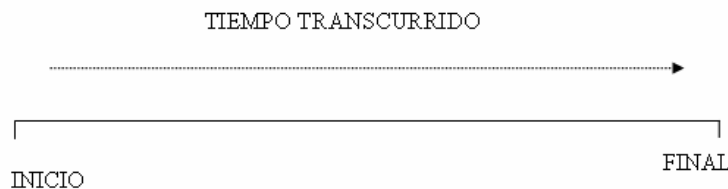


Figura 2.1: Diagrama tiempo

La tabla días nos será de gran ayuda, cuando necesitamos conocer, en forma exacta, los días que transcurren entre una fecha y otra. Esto ocurre en el interés bancario y en el interés racional. La elaboración de la tabla de días consiste en asignar a cada día del año un número en forma

consecutiva; esta asignación va desde el número 1, que corresponde al 1 de enero, hasta el número 365 que corresponde al 31 de diciembre (cuando el año sea bisiesto, habrá que agregar un día, a partir del primero de marzo, entonces, el 31 de diciembre sería el día 366). Es necesario aclarar, que por facilidad, utilizaremos la siguiente clave para identificar fechas: el primer número indicará los días del mes, por tanto varía entre 1 y 31; el segundo número, indicará el mes y podrá variar entre 1 y 12, y el tercer número señalará el año. La separación entre esos números se hará utilizando guiones. Por ejemplo el 13 de mayo de 1991 se podrá representar 13-05-91.

### 2.2.1. Clases de tiempo

Tiempo exacto y tiempo aproximado:

Cuando el número de períodos es en días, se puede medir en forma exacta o en forma aproximada. Tiempo exacto: se calcula sobre la base de un año igual a 365 días (366 en años bisiestos)

**Ejemplo 2.2.** *Determinar, en forma exacta, el tiempo transcurrido entre el 28 de enero y el 23 de octubre.*

**Solución 2.2.** *Para calcular este tiempo en forma exacta se emplea la tabla 2.1. donde aparecen numerados todos los días del año, así:*

Fecha	28 de enero	23 de octubre
Número	28	296

*Número exacto de días =  $296 - 28 = 268$  días*

*Nota: al número mayor de días le restamos el menor, teniendo en cuenta que no podemos tener días negativos en este caso.*

*Tiempo aproximado: se supone que un mes tiene 30 días.*

**Ejemplo 2.3.** *Determinar, en forma aproximada, el tiempo transcurrido entre el 28 de enero y el 23 de octubre.*

**Solución 2.3.** *Para calcular este tiempo debemos tener en cuenta que cuando se dice desde tal fecha debemos restar al mes de 30 días el número indicado, cuando se dice hasta tal fecha tomamos dicho número ya que pertenece al tiempo transcurrido, luego.*

*1. Hallemos el número de meses utilizados: de enero a octubre hay 10 meses.*

DIA MES												
mes	ene.	feb.	mar	abr.	may.	jun.	jul.	ago.	sep.	oct.	nov.	dic.
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	..	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	..	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	..	90	...	151	...	212	243	...	304	...	365

Cuadro 2.1: tabla de Días

2. Tomemos el primer mes y veamos cuantos días hemos utilizado de este mes, esto se hace con una resta partiendo del punto en que todos los meses tienen 30 días:  $30-28=2$ , quiere decir que de enero utilizamos 2 días.

3. Tomemos el último mes y como estamos diciendo que es hasta el 23, sabemos que se utilizaron 23 días de dicho mes.

Ahora vemos que hemos calculado el tiempo utilizado en el mes inicial y en el mes final, luego solo nos queda calcular el tiempo utilizados en los meses restantes los cuales constan de 30 días:  $10 \text{ (meses utilizados)} - 2 \text{ (meses calculados)} = 8$ , luego  $8 \text{ (meses)} \times 30 \text{ (días/meses)} = 240$ , por lo tanto  $2 + 23 + 240 = 265$

## 2.3. Interés simple exacto e interés simple ordinario

### 2.3.1. Interés simple exacto

Se calcula sobre la base de un año igual a 365 días (366 en años bisiestos).

### 2.3.2. Interés simple ordinario

Se calcula con la base de un año igual a 360 días. El uso del año de 360 días simplifica los cálculos, pero aumenta el interés cobrado por el acreedor.

**Ejemplo 2.4.** ¿Cuál es el valor futuro de \$2.000, al 36 % anual de interés simple, el 1 de abril al 27 de octubre?. Resolver el problema utilizando interés simple exacto y ordinario. Calcular el tiempo exacto y ordinario en cada caso.

**Solución 2.4.** Tiempo exacto en el cuadro 2.1 se tiene :

Fecha	abril 1	octubre 27
Número	91	300

Número exacto de días:  $300-91=209$

Tiempo aproximado:

	Meses	Días
27 de octubre	10	27
1 de abril	4	1
total	6	26

Luego,  $6 \times 30$  (días/mes)+26=206 días

Debemos tener en cuenta que el interés  $i$  debe ir sobre el número de días del año 365, teniendo en cuenta que el valor futuro lo vamos a calcular en días, si fuera en meses debemos dividir  $i$  entre el número de meses del año 12. Correspondencia entre períodos.

*Interés simple exacto*

*Con tiempo exacto:*

$$F = P(1 + ni)$$

$$F = 2,000(1 + 209 \times 0,36/365) = \$2,412,29$$

$$\text{Intereses} = 2.412,29 - 2.000 = \$412,29$$

*Con tiempo aproximado*

$$F = P(1 + ni)$$

$$F = 2,000(1 + 206 \times 0,36/365) = \$2,406,36$$

$$\text{Intereses} = 2.406,36 - 2.000 = \$406,36$$

*Interés simple ordinario*

*Con tiempo exacto:*

$$F = P(1 + ni)$$

$$F = 2,000(1 + 209 \times 0,36/360) = \$2,418$$

$$\text{Intereses} = 2.418 - 2.000 = \$418$$

*Con tiempo aproximado*

$$F = P(1 + ni)$$

$$F = 2,000(1 + 206 \times 0,36/360) = \$2,412$$

$$\text{Intereses} = 2.412 - 2.000 = \$412$$

Como puede observarse, la modalidad que causa mayor interés es la de interés simple ordinario con tiempo exacto, la cual es ampliamente utilizada en el sector financiero. A esa modalidad se le denomina Regla de Banqueros.

### 2.3.3. Diagrama de flujo o línea del tiempo

Para representar en forma gráfica las siguientes transacciones financieras, se emplean los diagramas de flujo de efectivo, o simplemente diagramas de flujo, para lo cual se tiene en cuenta que en toda transacción financiera hay dos partes, una que recibe y otra que entrega, un plazo o número de períodos y una tasa de interés.

Por tal motivo, para facilitar la comprensión de un problema, es conveniente representar el tiempo sobre una línea que se le denomina línea del tiempo o diagrama de flujo en la cual se ubican las fechas de las operaciones financieras y sus correspondientes valores.

Se acostumbra a representar con flecha que parte de la línea hacia abajo a los egresos, naturalmente que el dibujo que se construya para el prestamista será inverso al que se construya para el deudor.

Un diagrama de flujo es una recta metrizada, en la cual se representa el número de períodos, completando con rectas verticales ubicadas en diferentes puntos en el tiempo, las cuales representan las diferentes transacciones o flujos de efectivo. Arbitrariamente se puede acordar que las flechas hacia arriba representan ingresos y hacia abajo egresos. Siempre se debe indicar la tasa de interés pactada en la transacción financiera.

Hoy presta el banco \$100.000 a condición de recibir, dentro de 7 meses la suma de \$117.500.

El diagrama de flujo de efectivo, correspondiente al banco es el siguiente:

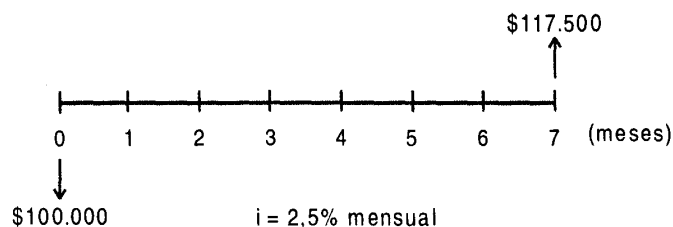


Figura 2.2: Diagrama de flujo banco

El diagrama de flujo de efectivo, correspondiente al prestamista, se ve en la figura [?]:

Se compra un televisor a plazos, cuyo costo es de 380 dólares. Se paga 130 dólares de cuota inicial y se adquiere un crédito de 250 dólares, para pagarlo en 10 cuotas mensuales, de 28 dólares, cada una.

El diagrama de flujo de efectivo para el comprador del televisor es el siguiente:



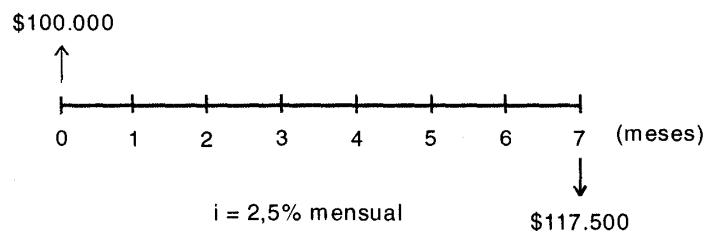


Figura 2.3: Diagrama de flujo prestamista

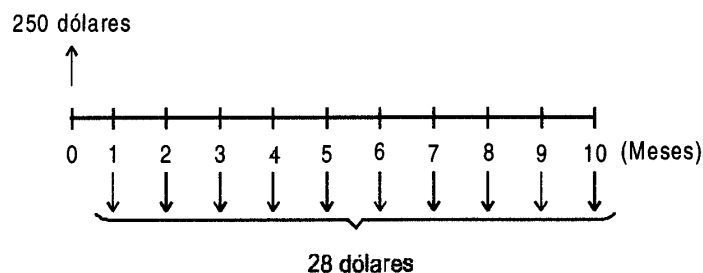


Figura 2.4: Diagrama de flujo comprador

## 2.4. Ecuación de Equivalencia o Ecuación de valor

Es una ecuación algebraica que permite establecer la igualdad financiera entre dos conjuntos de obligaciones financieras, teniendo siempre presente el valor del dinero en el tiempo.

Para establecer la ecuación de equivalencia en el tiempo es necesario seleccionar o acordar un punto en el tiempo, el cual se denomina fecha focal denotada por  $ff$ , indispensable para hacer efectiva una de las reglas básicas en la ingeniería financiera que dice:

Solo se pueden relacionar (sumar, restar, igualar o comparar) cantidades que estén en el mismo punto en el tiempo.

Germán Arboleda

La fecha focal ( $ff$ ) es la fecha en que hacemos la comparación de ingresos con egresos y se representa por una línea a trazos, la ubicación de la fecha focal puede ser escogida de común

acuerdo entre las partes pero principalmente es el acreedor (dueño del dinero) quien determina la posición de la flecha focal.

$$\sum (\text{Ingresos}) = \sum (\text{Egresos}) \text{ (en la } ff\text{)}$$

Naturalmente, el traslado de cualquier ingreso o de cualquier egreso en la flecha focal deberá hacerse, usando las fórmulas del monto o del valor presente una tasa de interés llamada de rendimiento, la cual es fijada de común acuerdo entre las partes.

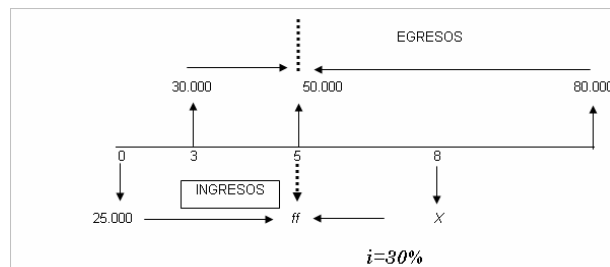


Figura 2.5: Ubicación fecha focal

En síntesis, la fecha focal es el punto acordado para establecer la ecuación de equivalencia. Todos los valores de las obligaciones, tanto actuales como propuestos, se llevan a dicho punto.

Cuando el valor está ubicado antes de la fecha focal, se requiere hallar  $F$  conociendo  $P$ , para lo cual se emplea la fórmula:

$$F = P(1 + ni)$$

Cuando el valor está ubicado después de la fecha focal, se requiere hallar  $P$  conociendo  $F$ , para lo cual se emplea la fórmula:

$$P = F/(1 + ni)$$

En todos los casos,  $n$  es el número de períodos entre el punto 0 fecha focal y la fecha de vencimiento de cada obligación.

### 2.4.1. Componentes de una ecuación de equivalencia

Los componentes de una ecuación de equivalencia son los ingresos, los egresos, la fecha focal, el número de períodos y la tasa de interés. Todos estos componentes se pueden indicar en el diagrama de flujo. Por lo general, uno de ellos es la incógnita del problema que se quiere solucionar.

## 2.5. Descuento

**Definición 2.2.** *Descuento: El tenedor de un efecto comercial, necesitado de activo líquido, puede solicitar el descuento de aquel por un banco, el cual le abona su importe menos cierta cantidad, en concepto de interés y gastos diversos.*

### 2.5.1. Clases de descuento:

El descuento puede ser de dos clases: descuento simple a una tasa de interés, denominado descuento racional,  $Dr$ , y descuento simple a una tasa de descuento, llamado también descuento bancario,  $Db$ .

1. Descuento simple a una tasa de interés ( $Dr$ )

No se utiliza en la práctica porque da un menor valor. Su característica primordial es que el descuento se efectúa sobre el valor presente del documento en cuestión; es decir, el valor estimado del documento en la fecha de la operación de descuento.

2. Descuento simple a una tasa de descuento ( $Db$ )

Este es el tipo de descuento que se efectúa sobre el valor futuro del documento en cuestión; es decir, el valor del documento en su fecha de vencimiento. Esto hace que el  $Db$  sea siempre mayor que el  $Dr$ .

La costumbre, en el sistema financiero, ha establecido, además del descuento, una comisión por toda operación de descuento de un documento.

Una operación de descuento puede ser: se tiene una carta de crédito por 3.000 dólares, con vencimiento en cuatro meses; es decir, a los cuatro meses se entrega la carta y se reciben 3.000 dólares. Si existe alguna urgencia por efectivo, se visita una entidad o persona especializada en el descuento de documentos, la cual ofrecerá por la carta de crédito una suma inferior a 3.000 dólares. La diferencia con 3.000 dólares es el descuento más la comisión.

La tasa de descuento más utilizada, en muchos países latinoamericanos, en los últimos años, está cercana al 3 % mensual.

3. Descuento racional

Si se aplica el descuento racional, el valor del documento descontado, en la fecha de la operación de descuento, no es más que el valor presente,  $P$ , en dicha fecha, del valor  $F$  que el documento tiene en su fecha de vencimiento. Es decir:

Valor del documento descontado :

$$P = \frac{F}{1 + ni}$$

Valor del descuento racional,  $Dr = Pni$  ( $i$  = tasa de interés)

Al aplicar lo anterior, al caso de la carta de crédito, se obtiene :

✿ Valor del documento descontado:

$$P = 3,000 / (1 + 0,03) = 2,678,57 \text{ dólares}$$

✿ Descuento racional:

$$Dr = Pni = \$2,678,57 \times 0,03 = 321,43 \text{ dólares}$$

Vale la pena notar que  $Dr = F - P = 3,000 - 2,678,57 = 321,43 \text{ dólares}$

4. Descuento bancario

El valor del descuento bancario,  $Db$ , se calcula en forma directa sobre el valor del documento en su fecha de vencimiento. Es decir:  $Db = Fdn$ ; ( $d$  = tasa de descuento)

✿ El valor del documento descontado es:

$$P = F - Fdn$$

$$P = F(1 - dn)$$

Al aplicar lo anterior, al caso de la carta de crédito, se obtiene:

✿ Descuento bancario:

$$Db = Fdn = 3,000 \times 0,03 \times 4 = 360 \text{ dólares}$$

$$P = F(1 - dn) = 3,000(1 - 0,03 \times 4) = 2,640 \text{ dólares}$$

✿ El valor del documento descontado se puede calcular como:

$$P = F - Db = 3,000 - 360 = 2,640 \text{ dólares}$$

En conclusión como podemos observar en los valores obtenidos el descuento bancario es mayor que el descuento racional.

**Ejemplo 2.5.** Se tiene un certificado de depósito a término, por un valor de \$4.000.000, el cual vence en 5 meses. Se requiere descontar en la Financiera Palmira, la cual cobra una comisión de 2,5 % y aplica una tasa de descuento de 2 % mensual. ¿Cuál es el valor presente que se recibe y cuál la tasa efectiva de descuento? Resolver el mismo caso aplicando descuento racional, Dr.

**Solución 2.5.**      ✿ Descuento bancario:

$$\begin{aligned} \text{Comisin} &= \$4,000,000 \times 0,025 = \$100,000 \\ \text{Db} = \text{Fdn} &= \$4,000,000 \times 0,02 \times 5 = \$400,000 \end{aligned}$$

✿ Descuento efectivo:

<i>Comisin</i>	\$100,000
<i>Descuentobancario</i>	\$400,000
	-----
	\$500,000

$$\text{Hoy entregan, } P = \$4.000.000 - 500.000 = \$3.500.000$$

✿ Tasa efectiva de descuento:

$$\text{Db} = \text{Fdn}.$$

$$\text{En este caso, } \text{Db} = \$500,000 \text{ es el descuento efectivo.}$$

$$500,000 = 4,000,000 \times d \times 5$$

$$500,000 = 20,000,000 \times d$$

$$d = 500,000 / 20,000,000 = 0,025$$

✿ Tasa de descuento efectivo:

$$d = 2,5 \% \text{ mensual Descuento racional}$$

$$F = P(1 + ni)$$

$$P = F / (1 + ni)$$

$$P = \$4,000,000 / (1 + 5 \times 0,02) = \$3,636,363,63$$

$$\text{Comisin} = \$3,636,363,63 \times 0,025 = \$90,909$$

$$\text{Dr} = Pni = \$3,636,363,63 \times 5 \times 0,02 = \$363,636,36$$

✿ Descuento efectivo:

<i>Comisin</i>	\$90,909,00
<i>Descuentoracional</i>	\$363,636,36
	-----
	\$454,545,36

Valor presente:

$$P = F - Dr = \$4.000.000 - 454.545,36 = \$3.545.454,64$$

✿ Tasa efectiva de descuento:

$$Dr = Pni.$$

En este caso,

$$Dr = \$454,545,36 \text{ es el descuento efectivo.}$$

$$454,545,36 = 3,636,363,64 \times 5 \times i$$

$$i = 454,545,36 / 18,181,818,2 = 0,0249$$

$$i = 2,5\% \text{ mensual}$$

## 2.6. Pagos Parciales

**Definición 2.3.** Los pagos parciales son los pagos que se hacen en el transcurso del plazo que tiene una obligación. Para calcular el valor del último pago parcial, que se debe efectuar en la fecha de vencimiento de la obligación, se utilizan dos reglas: la regla comercial y la regla de los Estados Unidos.

### 2.6.1. Métodos o reglas comerciales

#### 1. Regla comercial

Con esta regla, el interés se calcula sobre la deuda original y sobre cada pago parcial a la fecha de vencimiento. La cantidad por liquidar en la fecha de vencimiento es la diferencia entre el monto de la deuda y la suma de los pagos parciales. Esta clase de problema se resuelve con la ayuda de una ecuación de equivalencia, a interés simple, que tenga la fecha de vencimiento como fecha focal.

#### 2. Regla de los Estados Unidos

Con esta regla, el interés se calcula sobre el saldo no pagado (o saldo insoluto) de la deuda, cada vez que se efectúa un pago parcial. Si el pago parcial es mayor o igual que los intereses calculados se resta del valor total de la deuda. Si el pago parcial menor que los intereses no se tiene en consideración y se agregará al siguiente pago parcial.

**Ejemplo 2.6.** Calcular el valor del último pago parcial en la fecha de vencimiento de una obligación de 150,000, contratada al 2,5 mensual, con un plazo de un año y medio, sabiendo que se efectúan los siguientes pagos parciales:

- A los 4 meses 25.000
- A los 6 meses 1.200
- A los 10 meses 12.000
- A los 11 meses 48.000

Recordemos que un año y medio, corresponde a 18 meses.

Resolver el problema aplicando las dos reglas. Solución:

**Solución 2.6. Regla comercial:**

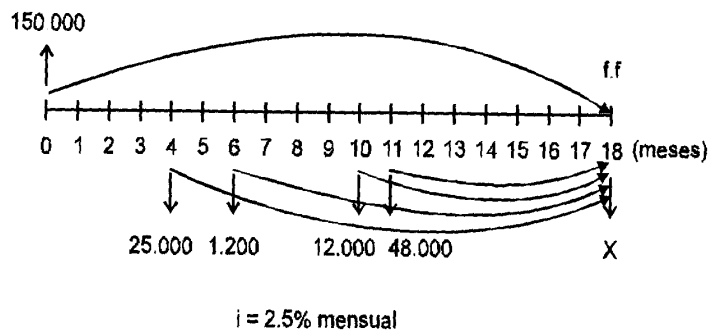


Figura 2.6: Diagrama línea del tiempo

Al plantearla ecuación de equivalencia, con fecha focal la de vencimiento:

$$150,000(1 + 0,025 \times 18) = 25,000(1 + 0,025 \times 14) + 1,200(1 + 0,025 \times 12) + 12,000(1 + 0,025 \times 8) + 48,000(1 + 0,025 \times 7) + X$$

$$217,500 = 33,750 + 1,560 + 14,400 + 56,400 + X$$

$$217,500 - 106,110 = X$$

$$X = \$111,390$$

**Regla de los Estados Unidos:**

Valor inicial de la obligación	150,000, 00
Intereses del punto 4 al 10 :	
$150,000 \times 4 \times 0,025 = 15,000$	+15,000, 00
Valor de la obligación al final del mes 4	165,000, 00
Primer pago parcial	-25,000, 00
Saldo insoluto	140,000, 00
Intereses del punto 4 al 6 : $140,000 \times 2 \times 0,025 = 7,000$	

Basados en la definición no se considera el pago parcial de 1.200, por ser menor que los intereses, 7.000. Este pago se suma al siguiente pago parcial que ocurre al final del mes 10. Intereses del punto 4 al 10:  $140.000 \times 6 \times 0,025 = 21.000$   
Tampoco se tiene en cuenta el pago parcial al final del mes 10, porque los intereses \$21.000, son más altos que el pago parcial,  $\$1.200 + 12.000 = \$13.200$

Intereses del punto 4 al 11 :	
$140,000 \times 7 \times 0,025 = 24,500$	+24,500, 00
Valor de la obligación al final del mes	164,500, 00
Cuarto pago parcial (\$1,200 + \$12,000 + \$48,000)	-61,200, 00
Saldo insoluto	103,300, 00
Intereses del punto 11 al 18 :	
$103,300 \times 7 \times 0,025 = 18,077, 50$	+18,077, 00
Último pago, en la fecha de vencimiento	\$121,377, 50

En conclusión la regla de los Estados Unidos produce más intereses que la regla comercial.

**Definición 2.4.** Es muy frecuente encontrar una o varias obligaciones, que van a ser canceladas mediante uno o varios pagos, operación que se le denomina refinanciación de deudas; pero, debido a que el poder adquisitivo del dinero cambia con el tiempo, la solución de este problema no es tan elemental y, por ello, se hace necesario el uso de las llamadas ecuaciones de valor, que son igualdades de valores ubicados en una sola fecha, denominada fecha focal.

**Ejemplo 2.7.** Debe cancelarse un pagaré por \$300.000, en 3 meses: otro, por \$500.000, con vencimiento en 5 meses y un tercero por \$800.000 con un vencimiento de un año. Si se ofrece pagar hoy \$250.000 y el resto en 8 meses. ¿Cuál debe ser el valor del pago, para que las deudas queden canceladas? Suponga un interés del 30 % y la ff en 5 meses.



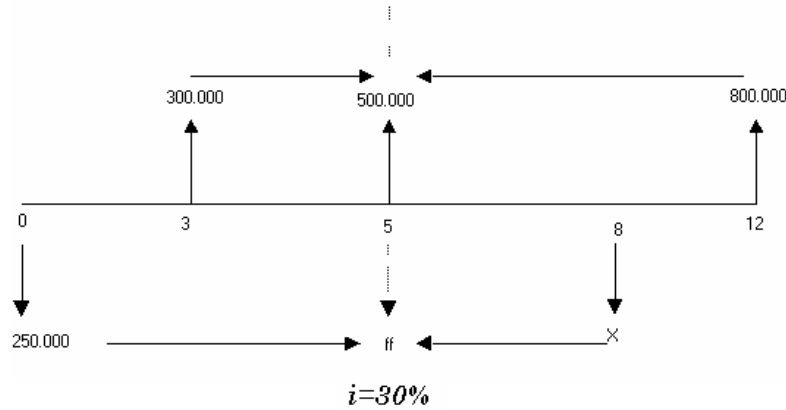


Figura 2.7: Línea del tiempo

**Solución 2.7.** El 0 representa el día de hoy; los demás números en la línea del tiempo representan las demás fechas de los vencimientos de las deudas o de los pagos.

Para el planteamiento de la ecuación de valor, debemos trasladar todas las deudas y pagos a la fecha focal usando la tasa del 30 %.

El pagaré de \$300.000 debe ubicarse en el mes 5, es decir, que sino se paga en el mes 3 sino en el mes 5, ¿cuál hubiese sido su valor? Por tanto este pagaré se convertirá en  $300.000(1+0.3+2/12)$ .

El segundo pagaré está sobre la fecha focal, consecuencia, no debe sufrir ningún cambio; pero el tercer pagaré deberá trasladarse desde el mes 12 hasta el mes 5, es decir, que si no pagará en el mes 12, sino en el mes 5, ¿cuál hubiese sido su valor?

Por lo tanto este pagaré se convertirá en:

$$P = \frac{F}{(1 + in)} = \frac{800,000}{1 + 0,3 \times \frac{7}{12}}$$

Si aplicamos el principio fundamental tenemos:

$$300,000(1 + 0,3 \times \frac{2}{12}) + 500,000 + \frac{800,000}{1 + 0,3 \times \frac{7}{12}} = 250,000(1 + 0,3 \times \frac{5}{12}) + \frac{X}{1 + 0,3 \times \frac{3}{12}}$$

Entonces despejamos y se obtiene

$$X = \$1300,569,61$$

## Capítulo 3

# INTERÉS COMPUESTO

**Definición 3.1.** *El interés compuesto se caracteriza porque los intereses devengados en un período devengan intereses en el período siguiente; es decir, los intereses son capitalizables.*

*La diferencia fundamental entre el interés simple y el interés compuesto estriba en que, en el primero, el capital permanece constante durante todo el tiempo de la inversión; en cambio, en segundo, el capital cambia al final de cada periodo, debido a que los intereses se adicionan al capital para formar un nuevo capital denominado monto y sobre el monto volver a calcular el interés.*

### 3.1. Fórmula de valor futuro

Hoy se deposita una suma  $P$ , a una tasa de interés compuesto  $i$ . Se desea determinar a cuánto es equivalente, o cuál será su valor futuro,  $F$ , dentro de  $n$  períodos.

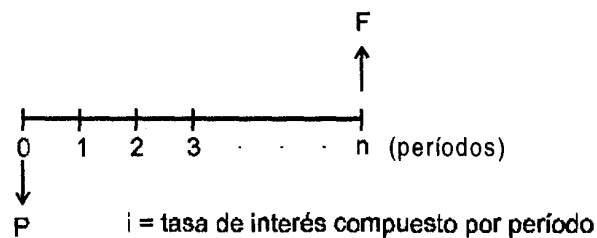


Figura 3.1:

La suma que se tendrá acumulada al final de cada período es:

Período	Capital inicial	Interés	Capital final
1	$P$	$Pi$	$F_1 = P + Pi = P(1 + i)$
2	$P(1 + i)$	$P(1 + i)i$	$F_2 = P(1 + i) + P(1 + i)i = P(1 + i)^2$
3	$P(1 + i)^2$	$P(1 + i)^2 i$	$F_3 = P(1 + i)^2 + P(1 + i)^2 i = P(1 + i)^3$
4	$P(1 + i)^3$	$P(1 + i)^3 i$	$F_4 = P(1 + i)^3 + P(1 + i)^3 i = P(1 + i)^4$
...	...	...	...
$n$	$P(1 + i)^{n-1}$	$P(1 + i)^{n-1} i$	$F_n = P(1 + i)^n$

Es decir:

$$F = P(1 + i)^n$$

La fórmula para el valor futuro de una suma  $P$ , a interés compuesto se puede escribir:

$$F = P(F/P, i, n)$$

## 3.2. Fórmula de valor presente

$$\begin{aligned}
 F &= P(1 + i)^n \\
 P &= \frac{F}{(1 + i)^n} = F(1 + i)^{-n} \quad \text{luego,} \\
 P &= F(1 + i)^{-n}
 \end{aligned}$$

La fórmula para el valor presente de una suma  $F$ , a interés compuesto se puede escribir:

$$P = F(P/F, i, n) \quad (3.1)$$

## 3.3. Equivalencia entre tasas de interés

### 3.3.1. Tasa periódica

Es la tasa efectiva que se devenga en un período de conversión o de pago de intereses. La tasa periódica es la que siempre se considera en la solución de problemas financieros. Se nota  $(i)$ .

$i = 2\%$  mensual;  $i = 32\%$  anual;  $i_a = 9\%$  trimestre anticipado

### 3.3.2. Tasa Nominal

Hace mención a dos períodos: aun período que se toma como referencia y aun período de pago de intereses o capitalización.

No es una tasa efectiva. la tasa nominal se nota ( $r$ ).

¡Se debe ser supremamente cuidadoso cuando la información no es una tasa nominal!

La relación entre la tasa nominal y la tasa periódica está dada por la siguiente expresión:

$i$  = tasa periódica

$m$  = número de períodos de la conversión o de capitalización en el período de referencia.

$$i = \frac{r}{m}$$

**Ejemplo 3.1.**  $r = 32\%$  anual, convertible semestralmente

**Solución 3.1.** Anual es el período de referencia.

Semestral es el período de conversión o de pago de intereses o de capitalización. La tasa efectiva semestral es:

$$i = \frac{r}{m} = \frac{32\%}{2} = 16\% \text{ semestral}$$

**Ejemplo 3.2.**  $r = 42\%$  en año y medio, convertible trimestralmente

**Solución 3.2.**  $r = \frac{42\%}{6} = 7\%$  trimestral

**Ejemplo 3.3.**  $r = 32\%$  anual, convertible diariamente

**Solución 3.3.**  $i = \frac{32\%}{365} = 0,087\%$  diario

**Ejemplo 3.4.** ¿A qué tasa semestral, convertible mensualmente, es equivalente el 2% mensual?

**Solución 3.4.** En este caso se conoce la tasa periódica y se desea conocer una tasa nominal.

$$r = im = 2\% \times 6 = 12\% \text{ semestral, convertible mensualmente.}$$

### 3.3.3. Tasa efectiva

Algunas veces se desea conocer la tasa de interés que realmente se devenga en un período de referencia dado. Dicha tasa se denomina tasa efectiva y se nota ( $E$ ). Así, por ejemplo, se tiene la tasa nominal  $r = 32\%$  anual, convertible semestralmente. De esta información, de inmediato se obtiene:

$$i = \frac{32\%}{2} = 16\% \text{ semestral.}$$

**Ejemplo 3.5.** Si  $r = 24\%$  anual, convertible mensualmente, la tasa efectiva mensual es:

**Solución 3.5.**  $i = \frac{24\%}{12} = 2\%$  mensual

En forma efectiva, cada semestre se paga  $16\%$ . en forma efectiva, ¿cuánto se paga anualmente?

El conocimiento de la relación entre la tasa periódica y la tasa efectiva permite dar respuesta a la pregunta planteada. Para el efecto, se consideran dos situaciones:

1. Se invierten  $P$  unidades monetarias, durante  $m$  períodos de conversión. a la tasa periódica  $i$ .
2. Se invierten  $P$  unidades monetarias, durante un período de conversión, equivalente a los  $m$  períodos de la anterior situación, y a la tasa de interés  $E$ .

¿Cuál debe ser la relación entre las tasas de interés  $i$  y  $E$  para que el valor futuro sea igual en ambas situaciones?

Los diagramas de flujo, correspondientes a cada una de las dos situaciones anteriores, son:

Al comparara (1) y (2):

$$\begin{aligned} P(1+i)^m &= P(1+E) \\ (1+i)^m &= 1+E \end{aligned}$$

$i$  corresponde al período más pequeño.  $E$  corresponde al periodo más grande. Tanto  $i$  como  $E$  son tasas efectivas vencidas. La expresión  $(1+i)^m = 1+E$  relaciona tasas efectivas vencidas.

**Ejemplo 3.6.** ¿Aque tasa efectiva anual es equivalente el  $32\%$  anual, convertible semestralmente?

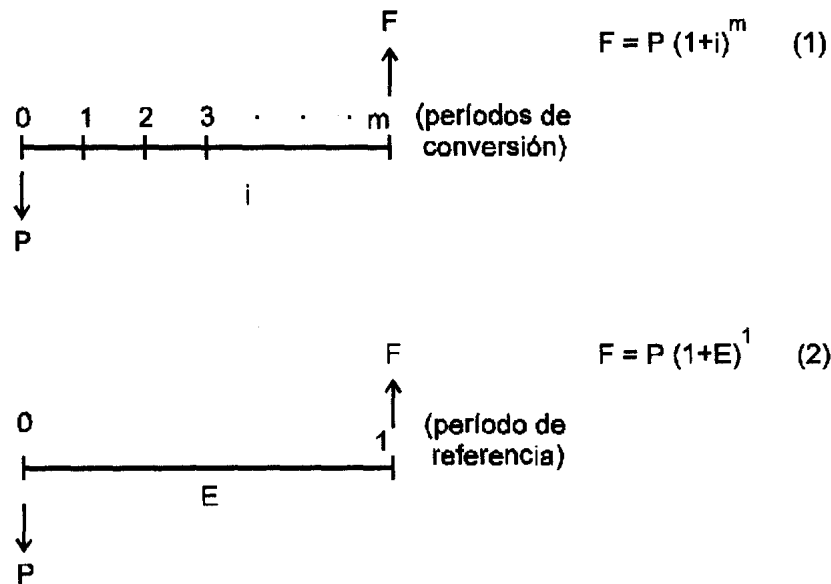


Figura 3.2: Grafica períodos de conversión y de referencia

**Solución 3.6.** La información suministrada es una tasa nominal, a partir de la cual se puede conocer la tasa periódica semestral.

$$i = \frac{32\%}{2} = 16\% \text{ semestral.}$$

Para hallar la tasa efectiva anual, se debe utilizar la fórmula:

$$(1 + i)^m = 1 + E$$

$$(1 + 0,16)^2 = (1 + E)$$

$$(1 + E) = 1,3456$$

$$E = 0,3456 = 34,54\% \text{ anual.}$$

**Ejemplo 3.7.** ¿A qué tasa efectiva anual es equivalente el 2% mensual?

**Solución 3.7.** En este caso se debe utilizar la fórmula  $1 + E = (1 + i)^m$ , en la cual se conoce la

tada efectiva del período de menor duración:

$$\begin{aligned}
 i &= 2\% && \text{mensual} \\
 (1 + 0,02)^{12} &= 1 + E \\
 E &= 1,2682 - 1 \\
 E &= 0,2682 \\
 E &= 26,82 && \text{anual}.
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.8.** ¿A qué tasa mensual es equivalente 32 % anual?

**Solución 3.8.** En este caso se conoce la tasa efectiva correspondiente al período de mayor duración:

$$\begin{aligned}
 1 + E &= (1 + i)^m \\
 E &= 32\% && \text{anual} \\
 1 + 0,32 &= (1 + i)^{12} \\
 1,32 &= (1 + i)^{12} \\
 (1 + i)^{1/12} &= 1 + i \\
 1 + i &= 1,0234057 \\
 i &= 0,0234057 \\
 i &= 2,34\% && \text{mensual}
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.9.** ¿A qué tasa anual, convertible semestral, es equivalente el 36 % anual, convertible mensualmente?

**Solución 3.9.** La solución del problema se planifica como sigue:

1. A partir de la tasa nominal anual, convertible mensualmente, se obtiene la tasa periódica mensual

$$i = \frac{36\%}{12} = 3\% \text{ mensual}$$

2. Con la tasa mensual se obtiene la tasa semestral, mediante uso de la fórmula:

$$\begin{aligned}
1 + E &= (1 + i)^m \\
1 + E &= (1 + i)^m; \\
1 + E &= (1 + 0,03)^6 \\
1 + E &= 1,194523 \\
E &= 0,1940523 \\
E &= 19,41 \% \quad \text{semestral}
\end{aligned}$$

3. Después de conocer la tasa semestral se obtiene la tasa nominal anual, convertible semestralmente, aplicando:

$$r = im$$

$$r = 19,41 \% \times 2 = 38,82 \% \text{ anual, convertible semestralmente.}$$

### 3.3.4. Tasa Continua

Se pretende hallar la tasa efectiva equivalente a una tasa nominal con capitalización continua. Se pueden tener los siguientes casos de tasas nominales, para cada uno de los cuales se indica el valor de  $m$ :

$r = 36 \% \text{ anual, convertible anualmente :}$	$m = 1$
$r = 36 \% \text{ anual, convertible semestralmente :}$	$m = 2$
$r = 36 \% \text{ anual, convertible bimestralmente :}$	$m = 6$
$r = 36 \% \text{ anual, convertible mensualmente :}$	$m = 12$
$r = 36 \% \text{ anual, convertible diariamente :}$	$m = 365$
$r = 36 \% \text{ anual, convertible cada hora :}$	$m = 8,760$
$r = 36 \% \text{ anual, convertible cada minuto :}$	$m = 525,600$
$r = 36 \% \text{ anual, convertible en forma continua :}$	$m \rightarrow \infty$
$O \text{ sea que en el caso de inters continuo :}$	$m \rightarrow \infty$

Lo que se desea conocer es la tasa efectiva anual anual equivalente al 36 % anual, convertible en forma continua.

En términos generales:  $(1 + E) = (1 + i)^m$



Pero  $i = \frac{r}{m}$ . Por lo tanto:  $(1 + E) = (1 + \frac{r}{m})^m$   
 Si el interés es continuo  $m \rightarrow \infty$

$$(1 + E) = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{r}{m})^m$$

$1 + E = e^r$   $e$  es la base de los logaritmos naturales o neperianos, igual a 2,718281828...

$$E = e^r - 1$$

NOTA

Si  $r$  es diaria, convertible en forma continua,  $E$  es la tasa efectiva diaria.

Si  $r$  es mensual, convertible en forma continua,  $E$  es la tasa efectiva mensual.

Si  $r$  es anual, convertible en forma continua,  $E$  es la tasa efectiva anual.

**Ejemplo 3.10.** *¿A qué tasa efectiva anual es equivalente el 36 % anual, convertible en forma continua?*

**Solución 3.10.**  $E = e^r - 1$ ;  $E = e^{0,36} - 1$

**Ejemplo 3.11.** *¿A qué tasa anual, convertible trimestralmente, es equivalente el 3 % mensual, convertible en forma continua?*

**Solución 3.11.** *La solución del problema se planifica como sigue:*

1. Con la tasa nominal mensual, convertible en forma continua, se obtiene la tasa efectiva anual, mediante aplicación de la fórmula

$$E = e^r - 1$$

$$E = e^r - 1$$

$$E = e^{0,03} - 1$$

$$E = 1,0304545 - 1$$

$$E = 0,03045$$

$$E = 3,05 \% \quad \text{mensual(tasaeffective)}$$

2. Con la tasa mensual, y mediante empleo de la fórmula  $1 + E = (1 + i)^m$ , obtiene la tasa trimestral.

$$\begin{aligned}1 + E &= (1 + i)^m \\1 + E &= (1 + 0,0305)^3 \\E &= 1,094319 - 1 \\E &= 0,094319 \\E &= 9,43\% \quad \text{trimestral}\end{aligned}$$

3. Después de conocer la tasa trimestral se obtiene la tasa nominal anual, convertible trimestralmente, aplicando:

$$r = im$$

$$r = 9,43\% \times 4 = 37,72\% \text{ anual, convertible trimestralmente.}$$

**Ejemplo 3.12.** ¿A qué tasa mensual, convertible en forma continua, es equivalente el 18 % semestral?

**Solución 3.12.** 1. Con la tasa semestral se obtiene la tasa mensual, mediante el uso de la fórmula:

$$\begin{aligned}1 + E &= (1 + i)^m \\(1 + 0,18) &= (1 + i)^6 \\1,18 &= (1 + i)^6 \\(1,18)^{\frac{1}{6}} &= 1 + i; \\(1,18)^{\frac{1}{6}} - 1 &= i \\1,02796 - 1 &= i; \\\%0,02796 &= i \\i &= 2,79\% = 2,8\% \quad \text{mensual.}\end{aligned}$$

2. Después de conocer la tasa mensual se obtiene la tasa mensual, convertible en forma continua, mediante el empleo de la fórmula  $E = e^r - 1$ , en la cual se conoce  $E$  (tasa efectiva mensual).

$$\begin{aligned}
E &= e^r - 1 \\
0,028 &= e^r - 1 \\
e^r &= 1,028 \\
r &= \ln 1,028 \\
r &= 0,02761 \\
r &= 2,76\% \quad \text{mensual, convertible en forma continua}
\end{aligned}$$

El valor futuro,  $F$ , de una suma  $P$ , invertida a una tasa nominal continua,  $r$ , durante  $n$  períodos, es:

$$F = Pe^{rn}$$

Lo anterior quiere decir que si hoy se invierte un millón de dólares, al 12% semestral, convertible en forma continua, dentro de 5 años se tendrá acumulados:

$$\begin{aligned}
n &= 2 \times 5 = 10, \text{ un año tiene dos semestres.} \\
F &= 1,000,000e^{0,12 \times 10} = 3,320,000 \text{ dólares.}
\end{aligned}$$

### 3.3.5. Tasa Anticipada

La fórmula del interés implica una tasa  $i$  ordinaria; es decir que el pago de intereses se hace al final de cada período. Hay ocasiones en que los intereses se pagan anticipadamente, o sea al principio del período; en este caso se calculan sobre el valor final del documento; entonces, la tasa se representa por  $i_a$  pero debemos tener en cuenta que, en casi todas las fórmulas de la matemática financiera, se utiliza  $i$ . Cuando la información que tengamos de la tasa sea  $i_a$  y no  $i$ , en la mayoría de los casos lo primero que debemos hacer es convertirla a  $i$ , de acuerdo a la siguiente fórmula:

La tasa de interés  $i$  viene siendo igual al interés ganado  $I$ , sobre el capital invertido  $P$ , esto es:  $i = \frac{I}{P}$ ,

Cuando se cobra anticipado el interés se tiene que

$$I = Fi_a$$

y también sabemos que  $P = F - I$ , entonces:

$$i = \frac{I}{P} = \frac{Fi_a}{F - Fi_a} = \frac{Fi_a}{F(1 - i_a)} = \frac{i_a}{1 - i_a};$$

Por tanto:

Para determinar la tasa periódica vencida,  $i$ , equivalente a la tasa anticipada,  $i_a$ , se aplica la fórmula de interés compuesto, para lo cual se adopta como fecha focal al final del período:

$$\begin{aligned} P &= P(1 - i_a)(1 + i)^1 \\ (1 - i_a)(1 + i) &= 1 \\ 1 + i &= \frac{1}{1 - i_a} \\ i &= \frac{1}{1 - i_a} - 1 \\ i &= \frac{1 - 1 + i_a}{1 - i_a} \end{aligned}$$

luego,  $i = \frac{i_a}{1 - i_a}$  es la tasa periódica vencida en función de la tasa periódica anticipada.

$$i = \frac{i_a}{1 - i_a}$$

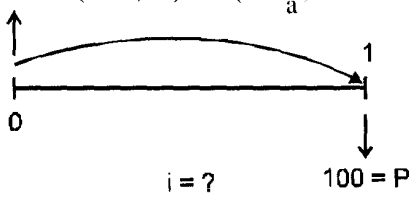
A veces, es necesario cambiar de una tasa  $i$ , a una tasa  $i_a$ , en consecuencia si despejamos a  $i_a$ , de la fórmula anterior tenemos:

$$i_a = \frac{i}{1 + i}$$

La tasa de interés anticipada es aquella que se aplica al principio del período de capitalización. Dicha tasa siempre es un poco menor que  $i$ , esto se puede observar en con la forma en que están planteadas las ecuaciones para  $i$  y  $i_a$ .

**Ejemplo 3.13.** *La forma como opera la tasa anticipada es la siguiente:*

*Si se prestan \$100 ( $P$  dólares, en forma general) al 3 % mensual anticipado ( $i_a$ , en forma general), hoy se reciben \$100 ( $P$  dólares) menos los intereses; es decir,  $\$100 - 100(0,03)$ . (O sea,  $P - Pi_a$ , en forma general). Dentro de un período, para cancelar el préstamo, se deben pagar \$100 ( $P$  dólares).*

$$100 - 100(0,03) = 100(1 - 0,03) = P(1 - i_a)$$


**Solución 3.13.** El diagrama de flujo de esta operación es:

**Ejemplo 3.14.** ¿A qué tasa efectiva anual es equivalente el 36 % anual, trimestre anticipado?

**Solución 3.14.** La solución del problema se planifica como sigue:

1. A partir de la tasa nominal anual, trimestre anticipado, se obtiene la tasa trimestral anticipada, empleando:

$$i_a = \frac{r}{m}$$

$$i_a = \frac{36\%}{4} = 9\% \text{ trimestre anticipado.}$$

2. Conocida la tasa trimestral anticipada, se obtiene la tasa trimestral vencida, mediante el uso de la expresión:

$$i = \frac{i_a}{1 - i_a}$$

$$i = 0,09(1 - 0,09) = 0,0989 = 9,89\% \text{ trimestre vencido}$$

3. Con la tasa trimestral se obtiene la tasa anual, mediante el uso de la fórmula  $1 + E = (1 + i)^m$ , en la cual se conoce  $i$  (tasa trimestral).

$$1 + E = (1 + i)^m$$

$$(1 + E) = (1 + 0,0989)^4$$

$$E = 1,4582 - 1$$

$$E = 0,4582 = 45,82\% \quad \text{anual}$$

Un desarrollo algebraico, similar al ejecutado anteriormente, permite obtener la expresión de la tasa periódica anticipada en función de la tasa periódica vencida, la cual es:

$$i_a = \frac{i}{1+i} \quad \text{Tasa periódica anticipada en función de la tasa periódica vencida.}$$

### 3.3.6. Equivalencia entre tasas efectivas y tasas anticipadas

Se sabe que:

$$1 + E = (1 + i)^m$$

pero  $i = \frac{i_a}{1 - i_a}$ , por lo tanto:

$$\begin{aligned} 1 + E &= \left[ 1 + \frac{i_a}{1 - i_a} \right]^m \\ 1 + E &= \left[ \frac{1 - i_a + i_a}{1 - i_a} \right]^m \\ 1 + E &= \left[ \frac{1}{1 - i_a} \right]^m \quad \text{Osea,} \\ 1 + E &= (1 - i_a)^{-m} \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.15.** ¿A qué tasa efectiva es equivalente el 36 % anual, trimestre anticipado?

**Solución 3.15.**  $i_a = 36\%/4 = 9\%$  trimestre anticipado:

$$\begin{aligned} 1 + E &= (1 - i_a)^{-m} \\ 1 + E &= (1 - 0,09)^{-4} \\ E &= 0,4583 = 45,83\% \quad \text{anual.} \end{aligned}$$

Relación de equivalencia entre dos tasas efectivas:

Se acaba de obtener que:

$$\begin{aligned} 1 + E &= (1 - i_a)^{-m}. \text{Es decir :} \\ E &= (1 - i_a)^{-m} - 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Si  $E$  es la tasa efectiva vencida en un período de referencia, su tasa efectiva anticipada,  $E_a$ , equivalente en el mismo período, está dada por:

$$E_a = \frac{E}{1 + E} \tag{2}$$

Al reemplazar (1) en (2) se tiene:

$$E_a = \frac{(1 - i_a)^{-m} - 1}{(1 - i_a)^{-m}} = 1 - \frac{1}{(1 - i_a)^{-m}}$$

$$1 - E_a = (1 - i_a)^m$$

$i_a$  corresponde al período más pequeño

$E_a$  corresponde al período más grande

Tanto  $i_a$  como  $E_a$  son tasas efectivas anticipadas.

**Ejemplo 3.16.** *¿A qué tasa anual anticipada es equivalente el 9 % trimestral anticipado?*

**Solución 3.16.**

$$1 - E_a = (1 - i_a)^m$$

$$1 - E_a = (1 - 0,09)^4$$

$$E_a = 0,3143 = 31,43\% \quad \text{anual anticipada}$$

### 3.3.7. Tasas Múltiples:

Existen situaciones en las cuales al mismo tiempo operan dos o más tasas de interés. El efecto total de dichas tasas, denominadas tasas múltiples, es lo que se pretende analizar a continuación.

Las tasas múltiples se presentan con los préstamos en moneda extranjera y en UVRs (Unidades de Valor Real) o UPACs (Unidades de Poder Adquisitivo Constante). Los últimos, muy utilizados en los sistemas de financiación de vivienda.

Préstamo en moneda extranjera:

**Ejemplo 3.17.** *Se efectúa un préstamo de 100 dólares, sobre el cual cobra un banco norteamericano el 6 % anual. Este préstamo, en México, se convierte en pesos. Si dentro de un año se desea cancelar el préstamo, es necesario cambiar pesos por dólares. En resumen, la situación es*

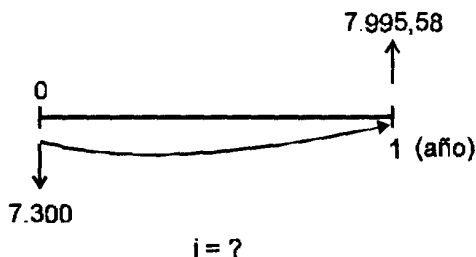
*la siguiente (préstamo en moneda extranjera):*

	Hoy	Dentro de un año
Valor del préstamo en US\$	100	106
Tasa de cambio (\$/US\$)	73	75,43
Valor del préstamo en pesos	7.300	7.995,58

¿Qué tasa efectiva se está cobrando sobre el préstamo?

**Solución 3.17.** Hay dos procedimientos para calcularla:

*Procedimiento 1:* Hoy se prestan \$7.300 y se pagan \$7.995,58 dentro de un año. El correspondiente diagrama de flujo es:



Al tomar como fecha focal el punto final, se establece la siguiente ecuación de equivalencia:

$$\begin{aligned}
 7,995,58 &= 7,300F = P(1+i)^n \\
 1,0952849 &= F = P(1+i)^n \\
 (1+i)^1 &= 1,0952849 \\
 i &= 0,0952849 = 9,53\% \quad \text{anual.}
 \end{aligned}$$

*Procedimiento 2:* Hay dos tipos de tasas operando en el préstamo:

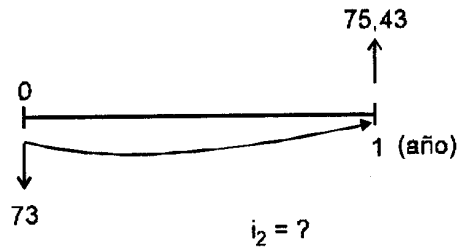
1.  $i_1 = 6\%$  anual, sobre el préstamo en US\$

2. La variación en la tasa de cambio,  $i_2$ , la cual se mide con la tasa de devaluación.

El correspondiente diagrama de flujo es:

$i_2 = \text{Variación de la realción de cambio} = \text{tasa de devaluación}$





Conociendo dos tasas de cambio en el tiempo y el número de períodos entre ellas, se puede determinar la tasa de devaluación. Con la información del diagrama, y tomando como fecha focal el final de año, se establece la siguiente ecuación de equivalencia:

$$\begin{aligned}
 75,43 &= 73F = P(1 + i_2)^n \\
 1,03328 &= (1 + i_2) \\
 i_2 &= 0,03328 = 3,33\% \quad \text{anual}
 \end{aligned}$$

En conclusión, sobre el préstamo actúan dos tasas de interés:

$i_1 = 6\%$  anual, sobre el préstamo en dólares

$i_2 = 3,33\%$  anual, tasa de devaluación

Conociendo esas dos tasas, se puede calcular la tasa efectiva, mediante la fórmula que se determinará más adelante.

*Préstamo en UVRs o en UPACs*

**Ejemplo 3.18.** Se prestan 100 UVRs, pagaderas en un año, sobre las cuales la entidad financiera carga el 7% anual.

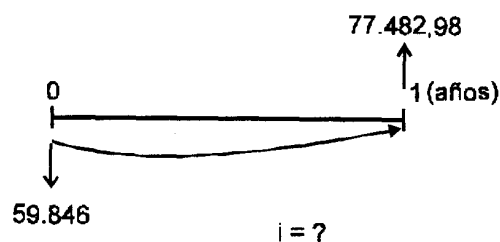
La situación hoy en el momento de calcular el préstamo es:

	Hoy	Dentro de un año
Valor del préstamo en UVRs	100	107
Tasa de cambio	1 UVR=\$598,46	1 UVR=\$724,14
Valor del préstamo en pesos	59.846,00	77.482,98

¿Qué tasa efectiva se está cargando sobre el préstamo?

**Solución 3.18.** Hay dos procedimientos para calcularla:

Procedimiento 1: Se prestan \$59,846 y se pagan \$77.482,98 dentro de un año. El correspondiente diagrama de flujo es:



Al tomar como fecha focal el punto final, se establece la siguiente ecuación de equivalencia:

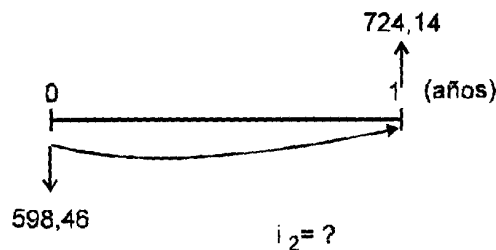
$$77,482,98 = 59,846F = P(1 + i)^n; n = 11,2947 = (F/P, i, 1)$$

$$1 + i = 1,2947$$

$$i = 0,2947 = 29,47\% \text{ anual}$$

Procedimiento 2: determinando las diferentes tasas de interés que actúan sobre el préstamo. Se definen dos:

1.  $i_1 = 7\%$  anual, sobre el préstamo en UVRs
2. Hay una variación en el valor de la UVR,  $i_2$ , (aproximadamente igual a la inflación), correspondiente a la corrección monetaria. Conociendo dos valores de la UVR en el tiempo y en el número de períodos (tiempo) entre ellos, se encuentra la tasa aproximada de la inflación o corrección monetaria. Para el ejemplo, se tiene el siguiente diagrama de flujo:



Al tomar como fecha focal el punto 1, se establece la siguiente ecuación de equivalencia:

$$724,14 = 598,46F = P(1 + i_2)^n; n = 1$$

$$1,21 = (1 + i_2)^1$$

$$i_2 = 0,21 = 21\% \quad \text{anual}$$

En resumen, sobre el préstamo hay dos tasas de interés:

$i_1 = 7\%$  anual, sobre el préstamo en UVRs

$i_2 = 21\%$  anual, tasa de corrección monetaria (aproximadamente igual a la tasa de inflación)

### Fórmulas de tasas múltiples

La tasa efectiva se determinará mediante la aplicación de la fórmula que se deduce en seguida:

En forma general el problema de las tasas múltiples se puede analizar diciendo que hoy se reciben  $P$  pesos y dentro de un período se deben pagar  $F$  pesos, si el deseo es cancelar el préstamo. La tasa de interés involucrada en dicha operación es la tasa efectiva,  $i$ , que se cobra periódicamente sobre el préstamo.

$$P(1 + i) = P(1 + i_1)(1 + i_2).$$

Al simplificar,  $1 + i = (1 + i_1)(1 + i_2)$  (Fórmula de tasas múltiples)

Al despejar  $i$ :

$$i = (1 + i_1)(1 + i_2) - 1$$

Más adelante veremos la fórmula general para tasas múltiples.

**Ejemplo 3.19.** En el caso del préstamo en UVRs, se tiene:

**Solución 3.19.**

$$i_1 = 7\% \quad \text{anual}$$

$$i_2 = 21\% \quad \text{anual}$$

$$i = (1 + 0,07)(1 + 0,21) - 1$$

$$i = 0,2947 = 29,47\% \quad \text{anual}$$

En el caso del préstamo de  $n$  dólares, se tiene:

$$\begin{aligned}
i_1 &= 6\% \quad \text{anual} \\
i_2 &= 3,33\% \quad \text{anual} \\
i &= (1 + 0,06)(1 + 0,033) - 1 \\
i &= 0,09498 = 9,5\% \quad \text{anual}.
\end{aligned}$$

**Ejemplo 3.20.** Con la siguiente información, determinar la tasa de interés efectiva cobrada sobre un préstamo en dólares, efectuado por una compañía chilena:

1. Tasa de interés cobrada por el banco de New York: 15 % anual, trimestre anticipado.
2. Valor del dólar en el día del préstamo: 1 dólar=\$71,23
3. Valor del dólar en el día del pago del préstamo, 125 días después: 1 dólar=\$74,50.

**Solución 3.20.** Para determinar la tasa de interés efectiva, se aplica la siguiente expresión:

$$i = (1 + i_1)(1 + i_2) - 1 \quad (1)$$

$i_1$  = tasa efectiva cobrada por el banco en New York  $i_2$  = tasa de devaluación del peso chileno

Determinación de  $i_1$   $r = 15\%$  anual trimestre, anticipado. Con esta información se obtiene la tasa trimestral anticipada:

$$i_a = \frac{r}{m} = \frac{15\%}{4} = 3,75\% \text{ trimestre anticipado}$$

La tasa trimestral vencida  $= \frac{i_a}{1-i_a}$  es  $i_1$ . Por lo tanto,

$$i_1 = \frac{0,0375}{1-0,0375} = 0,03896 \quad i_1 = 3,896\% \text{ trimestral} \quad (2)$$

Determinación de  $i_2$

La variación en el valor del dólar permite plantear el siguiente diagrama de flujo:

$i_2$  es la tasa efectiva de devaluación diaria.

Ecuación de equivalencia, con fecha focal en el punto 125.

$$\begin{aligned}
74,50 &= 71,23(F/P, i_2, 125) \\
(F/P, i_2, 125) &= (1 + i_2)^{125} = 1,045907623 \\
1 + i_2 &= 1,000359145 \\
i_2 &= 0,000359\% \quad \text{diaria (tasa de devaluación diaria)}
\end{aligned}$$

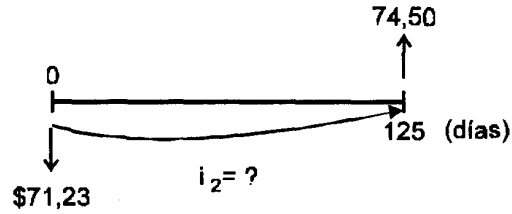


Figura 3.3: Diagrama de flujo

Como la tasa  $i_1$  es trimestral,  $i_2$  también debe serlo. Esto implica que es necesario encontrar la tasa efectiva trimestral equivalente a 0,0359 % diaria, para lo cual se hace uso de la fórmula:

$$1 + E = (1 + i)^m, \text{ donde se conoce } i = 0,0359 \% \text{ diaria. } m = 90: 1 + E = (1 + 0,000359)^{90}$$

$$E = 0,0328 \quad E = i_2 = 3,28 \% \text{ trimestral (tasa de devaluación trimestral)} \quad (3) \text{ Al reemplazar}$$

$$(2) \text{ y } (3) \text{ en } (1): i = (1 + 0,03896)(i + 0,0328) - 1 \quad i = 0,07304 \quad i = 7,30 \% \text{ trimestral}$$

Observaciones:

La fórmula de tasas múltiples se puede extender a tres o más tasas de interés, así:

$$1 + i = (1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \dots (1 + i_n)$$

### 3.4. DEVALUACIÓN

La pérdida de valor de la moneda frente a otra moneda se denomina devaluación, por ejemplo habrá devaluación si inicialmente hay que pagar \$2300 por US\$1 y después de un año hay que pagar \$2450 por el mismo dólar, en este caso se dice que la devaluación del año con respecto al dólar fue:

$$\frac{\text{variación del precio}}{\text{precio inicial}} = \frac{2450 - 2300}{2300} = 0,07 = 7 \%$$

Lo contrario de la devaluación es la revaluación que significa que habrá que pagar menos pesos por el mismo dólar, por ejemplo si al principio del año hay que pagar \$2300 por un dólar y al final del año hay que pagar \$2250 por el mismo dólar entonces la revaluación con respecto al dolar será:

$$\frac{\text{variación del precio}}{\text{precio inicial}} = \frac{2450 - 2300}{2300} = -0,07 = -7 \%$$

### 3.5. INFLACIÓN

El proceso económico en el cual se presenta un aumento general de precios se denomina inflación, por ejemplo, hay inflación cuando se sube el precio de los combustibles, se sube el precio del transporte y se aumenta el salario mínimo, etc. En general la inflación es un fenómeno interno de un país.

Aunque la inflación y la devaluación son fenómenos económicos diferentes sí tienen relación entre ellos dado que el uno tiene influencia sobre el otro por, ejemplo si en un país se presenta una fuerte devaluación del peso significa que habrá que pagar más pesos por el mismo dólar y las importaciones de bienes y servicios, tendrán un precio interno mayor y por lo tanto causan inflación.

Ahora veamos como la inflación puede ser la causa de una devaluación. Supongamos que actualmente un industrial fabrica un artículo en Colombia a un costo de \$2300 y que el cambio actual del dólar es US\$1=\$2300 entonces ese artículo podrá ser vendido en Estados Unidos de América a un precio de US\$1, si en Colombia se llega a presentar una inflación de un 22 % anual (por simplicidad supondremos que el índice de precios al producto es igual al índice de inflación) y si no hubiese la devaluación entonces el precio en dólares también se incrementaría en un 22 % y el costo al final de este mismo artículo sería de  $2300(1+0.22)=\$2806$  que en dólares equivaldría a US\$1.22 tal como se puede apreciar en el siguiente cuadro: Lo anterior no es bueno para una

industria que exporte sus productos a los Estados Unidos puesto que allá no habrán subido los artículos en un 22 % sino en el equivalente a la inflación de allá que puede ser de un 3 % lo cual implica que artículos similares se estarán vendiendo en un US\$1.03 y el industrial a fin de no perder los mercados tendrá que rebajar el precio de sus artículos lo cual lo podrá hacer siendo más eficiente en la producción y/o reduciendo su margen de utilidad. Sin embargo, si se produce una devaluación se salvarán sus exportaciones porque recibirá más pesos por el mismo dólar que exporte sin aumentar los precios en el exterior. Esto significa que sus productos recuperarán su competitividad internacional.

Ahora supongamos que en Colombia se presentará una devaluación del 18.45 % esto significa que el industrial recibirá un 18.45 % mas pesos por cada dólar exporte y el cambio al final del año será  $2300(1+0.1845)=\$2724.35$ .

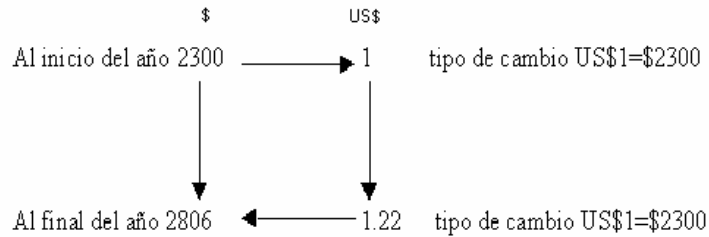


Figura 3.4: inflación causa devaluación

Si el industrial vende sus artículos a US\$1.03 entonces recibirá  $1.03 \times 2724.35 = \$2806.08$  aproximado a \$2807 que es la cantidad necesaria que debe recibir en pesos sin que halla habido necesidad de subir el precio de sus productos en el exterior más allá de la inflación que se presentó en aquel país, lo cuál se puede apreciar en el siguiente cuadro: Lo anterior nos muestra que la devaluación

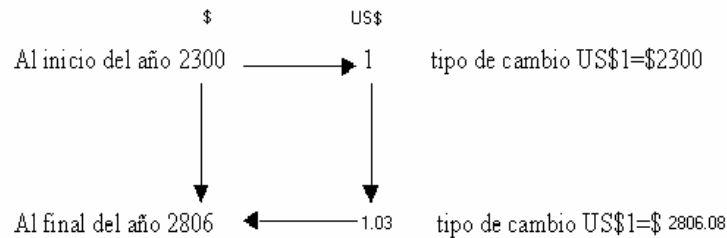


Figura 3.5: La devaluación puede ser buena para un expotador

puede ser buena para el exportador puede ser mala para un importador porque los productos importados saldrán más costosos.

Cuando en un país la devaluación es baja y se prevé que va a permanecer así durante un tiempo, el sector privado puede pensar en solicitar préstamos en el exterior, por ejemplo en Estados Unidos, y pagarlo en dólares (con el objeto de adquirir materia prima o maquinaria) porque la tasa de interés en dólares pueden ser del orden del 12 % y habría que adicionarle la devaluación, pero si la devaluación es alta probablemente el resultado final puede ser superior a la tasa de interés que le cubren por un préstamo en la moneda de su propio país.

### 3.6. SISTEMA DE VALOR CONSTANTE

En algunos países, debido a la inflación y la devaluación (puesto que la inflación causa devaluación y viceversa) el dinero va perdiendo la capacidad de compra. De este modo se desestimula el ahorro, se favorece a los deudores, quienes devuelven el dinero con una capacidad de compra inferior, lo cual hace que los prestamistas presionen la subida del interés como compensación. A fin de evitar estos inconvenientes, al menos en forma parcial, se ha experimentado, en algunos países, el sistema de valor constante, que consiste en reconocerle a los dineros invertidos un interés llamado interés de corrección monetaria. El índice de corrección monetaria se representa por  $i_c$ ; teóricamente es una tasa de interés a la cual debe colocarse un dinero, de tal forma que lo que hoy pueda hacerse con  $\$X$ , pueda hacerse con el monto de ese dinero, en un futuro, esto equivale a una tasa de inflación.

El UVR es un sistema que trabaja en valor constante, en Colombia.

**Ejemplo 3.21.** *Supongamos que el índice de corrección monetaria es del 21 % efectivo anual:*

1. *¿cuál será el índice diario de corrección monetaria?*
2. *Si se invierten hoy \$1.000, ¿cuál será su valor al cabo de 20 días?*

**Solución 3.21.** 1. *Para calcular el índice diario de corrección monetaria haremos uso del concepto de tasas equivalentes.*

$$(1 + 0,21)^1 = (1 + i_c)^{365}$$

de donde  $i_c = 0,000522384 \% \text{ efectivo diario.}$

2. *El monto en 20 días será:*

$$1,000(1 + 0,000522384)^{20} = \$1,010,50$$

### 3.7. DEPOSITO A TERMINO FIJO

Las entidades financieras tales como bancos y corporaciones financieras, con el objeto de captar dinero del público, emiten unos títulos valores, denominados depósitos a término fijo en los cuales se paga un interés al inversionista cuya tasa se denomina tasa de captación. Los dineros así recolectados son vueltos a prestar a una tasa más alta denominada tasa de colocación, obteniendo de esta forma utilidades cuya tasa se denomina margen de intermediación.

Como norma general los depósitos a término fijo no deben ser emitidos a plazos mayores de un año, debido a la incertidumbre en la tasa de interés pues si la tasa de colocación llega a bajar, el



margen de intermediación se reduce y puede llegar a no ser rentable para la entidad financiera, cuando el depósito a término fijo se constituye a un plazo mayor de un año es costumbre de las entidades financieras pagar una tasa inferior a la vigente en el mercado, o al menos pagar una tasa de captación que varíe de acuerdo a las condiciones del mercado y en este caso se dice que paga una tasa de captación atada a la DTF.

Para calcular el valor final a un depósito a término fijo antes de impuestos basta aplicar la fórmula de interés compuesto.

El depósito a término fijo también puede ser efectuado en una moneda extranjera en cuyo caso se gana la tasa de interés que estipule el documento más la devaluación o menos la revaluación que se haya presentado durante la vigencia del documento.

**Ejemplo 3.22.** *Un inversionista residente en un país cuya moneda es el peso, tiene un capital de \$900.000 y desea hacer una inversión durante 2 años en una moneda extranjera (en dólares de los Estados Unidos) que le garantiza una tasa del 12% efectivo anual, el cambio actual es de US\$1 = \$2300. Se estima que la tasa de devaluación de la moneda local frente a la moneda extranjera va a ser del 6% en el primer año y del 10% en el segundo año, calcular la rentabilidad que producirá la inversión.*

**Solución 3.22.** *Hacemos un cuadro del problema poniendo a un lado la situación en dólares y en otro lado la situación pesos.*

*Las condiciones iniciales quedan así:*

<i>Inversión inicial en pesos</i>	\$900,000
<i>Cambio</i>	US\$1 = 2300
<i>Inversión inicial en dólares</i>	$900,000/2300 = US\$391,304$

*Las condiciones finales serán:*

$$\text{Monto en dólares al final de 2 años:} \quad 391,304(1 + 0,12)^2 = US\$490,85$$

*Valor de un dólar después de 2 años:*

al final del primer año  $2300 \times 1,06 = 2438$

al final del segundo año  $2438 \times 1,1 = 2681,8$

si al final de 2 años tiene US\$490,85 que convertidos en pesos a razón de \$2681,8 por cada dólar darán:

$$490,85 \times 2681,8 = \$1,316,367,36.$$

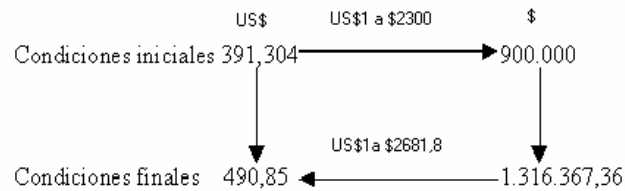


Figura 3.6: situaicón en dolar y en pesos

Tomando las condiciones iniciales y las condiciones finales del cuadro anterior podemos obtener las rentabilidades tanto en pesos como en dólares, pero como la persona reside en el país cuya moneda es el peso la rentabilidad que le interesa calcular es la que corresponde a pesos debido a que él gasta pesos y gana pesos, entonces su rentabilidad se puede calcular usando la fórmula de interés compuesto así :

$$1,316,367,36 = 900,000 \times (1 + i)^2$$

$$\sqrt[2]{\frac{1,316,667,36}{900,000,00}} = 1 + i$$

$$1,2093926 - 1 = i$$

entonces  $i = 20,94\%$  anual efectivo.

**Ejemplo 3.23.** Si un inversionista no quiere desaparecer del mercado financiero, su tasa individual de interés debe cubrir la tasa de inflación y una tasa de interés real

**Solución 3.23.** Si la inflación es del 12 % anual y, hoy, se tienen 1.000 dólares, entonces, con una tasa de interés del 18 % anual se tendrán 1.180 dólares, dentro de un año; es decir, se obtendrá un interés de 180 dólares, de los cuales sólo 53,57 dólares constituyen una ganancia real, ya que los 126,43 dólares restantes contrarrestan el efecto de la inflación, tal como se puede demostrar después de estudiar tasas múltiples, donde se establece:

$$1 + i_{\text{mercado}} = (1 + i_{\text{inflación}})(1 + i_{\text{real}})$$

$$i_{\text{mercado}} = 18 \% \text{ anual}$$

$$i_{\text{inflación}} = 12 \% \text{ anual}$$

La  $i_{\text{real}}$  es:

$$1 + 0,18 = (1 + 0,12)(1 + i_{\text{real}})$$

$$i_{\text{real}} = 5,357 \% \text{ anual}$$

*tasa de interés del mercado*

Es un promedio de las tasas de interés individuales. En algunos países de Latinoamérica la tasa de interés varía entre el 1 % y el 2 % mensual. Los gobernantes buscan la disminución de la tasa de interés del mercado, con miras a incrementar la inversión.

## Capítulo 4

# ANUALIDADES ORDINARIAS Y ANTICIPADAS

Una anualidad es una serie de pagos:

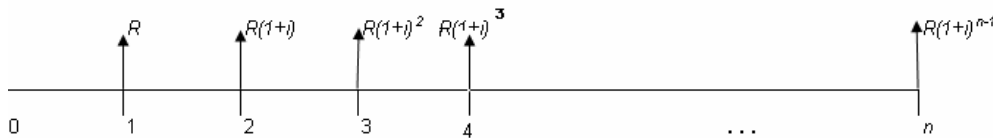


Figura 4.1: grafica de una anualidad

### 4.1. Renta

Es el pago periódico de igual valor que corresponde a los  $R$  del ejemplo anterior. A la renta también se le conoce como; cuota, depósito, retiro o pago, según sea el caso.

#### 4.1.1. Periodo de Renta

Es el tiempo que transcurre entre dos pagos periódicos consecutivos.

### 4.2. ANUALIDADES

Una anualidad es una serie de pagos que cumple con las siguientes condiciones:

1. Todos los pagos son de igual valor
2. Todos los pagos se hacen a iguales intervalos de tiempo
3. A todos los pagos se les aplica la misma tasa de interés
4. El número de pagos es igual al número de períodos

Por ejemplo, la primera condición es indispensable para poder factorizar como se hizo cuando se plantearon las ecuaciones de valor del ejemplo.

La segunda condición establece que los pagos deben hacerse a iguales intervalos de tiempo, esto es necesario para que los exponentes sean ascendentes o descendentes tal como se ve en las ecuaciones del ejemplo anterior. Esta condición se cumple aún si los pagos son trimestrales, semestrales o anuales, sin embargo a la serie se le sigue denominando anualidad.

La tercera condición establece que todos los pagos deben ser llevados a valor presente o a valor final, según es el caso, a la misma tasa de interés. Esto nos garantiza que todos los términos dentro del paréntesis angular tienen la misma base, por lo tanto, la serie que está dentro del paréntesis angular forma una progresión geométrica.

La cuarta condición establece que el número de pagos debe ser igual al número de períodos.

Por tanto la serie que se muestra en la siguiente gráfica no representa una anualidad porque tiene tres pagos y solo hay dos períodos.

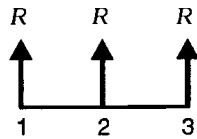


Figura 4.2: No representa anualidad

Para que la gráfica anterior represente una anualidad bien conformada es necesario agregarla un período que bien puede quedar al principio o al final. En primer caso se tendrá:

La anualidad así conformada recibe el nombre de Anualidad Ordinaria o Anualidad Vencida que viene a ser aquella en que los pagos se efectúan al final del período por ejemplo el pago de los sueldos de un empleado (primero viene el período de trabajo y después viene el pago)

En el segundo caso se tendrá:

La anualidad así conformada recibe el nombre de Anualidad Anticipada porque los pagos se efectúan al principio del período por ejemplo el pago mensual del arriendo de una casa (primero paga y después tiene derecho a ocupar la casa durante el mes pagó).

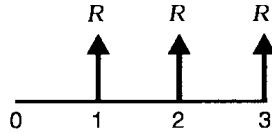


Figura 4.3: representación de una anualidad vencida

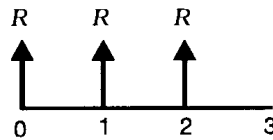


Figura 4.4: Representación de una anualidad anticipada

El siguiente dibujo representa una anualidad porque hay tres pagos y cuatro períodos.

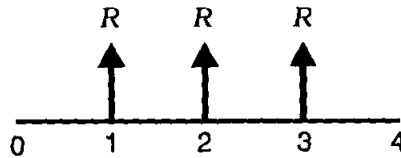


Figura 4.5: No representa anualidad

Claramente puede observarse que cuando se inicia el dibujo con pago y se termina con un pago, como ocurre en la gráfica 4.2, no hay una anualidad bien conformada y cuando el dibujo inicia con un período y termina con un período, como en el caso de la gráfica 4.5, tan poco hay una anualidad bien conformada. Las gráficas 4.3 y 4.4 si representan anualidades bien conformadas y tienen una característica en común, que su inicio y su fin son diferentes, en la gráfica 2 se inicia con período y se termina con pago y en la gráfica 3 se inicia con un período y se termina con un pago.

En conclusión para que una anualidad este bien conformada su inicio y su fin deben ser diferentes.

**Ejemplo 4.1.** Una persona compra un terreno cuyo valor, al contado, es de \$2.000.000. Si le dan la facilidad para pagarlo en cuatro cuotas trimestrales de  $\$Rc/u$ , que se efectuarán al final

de cada trimestre y, además se le cargaría un interés del 40 % CT, hallar el valor de la cuota trimestral de amortización.

**Solución 4.1.** Primero construimos un dibujo que muestre las flechas, el valor de la deuda y el valor de los pagos (esto también se conoce con el nombre de flujo de caja). Puesto que la tasa tiene efectividad trimestral y los pagos son trimestrales usaremos el trimestre como período.

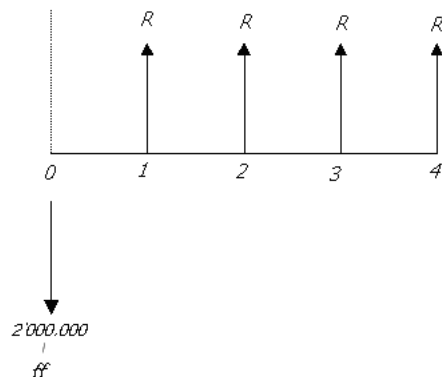


Figura 4.6: Ejemplo anualidad

Si planteamos la ecuación de valor poniendo la fecha focal en cero nos quedaría la ecuación así.

$$2,000,000 = R(1 + 0,1)^{-1} + R(1 + 0,1)^{-2} + R(1 + 0,1)^{-3} + R(1 + 0,1)^{-4}$$

Factorizando  $R$  se tendrá:

$$\begin{aligned} 2,000,000 &= R[(1,1)^{-1} + (1,1)^{-2} + (1,1)^{-3} + (1,1)^{-4}] \\ 2,000,000 &= R[3,169865] \\ R &= \$630,941,61 \end{aligned}$$

Si hubiésemos planteado la ecuación de valor con la flecha focal al final habría quedado así:

$$2,000,000(1,1)^4 = R(1,1)^0 + R(1,1)^1 + R(1,1)^2 + R(1,1)^3$$

Factorizando se tiene:

$$\begin{aligned} 2,000,000(1,1)^4 &= R[(1,1)^0 + (1,1)^1 + (1,1)^2 + (1,1)^3] \\ 2,928,200 &= R[44,641] \\ R &= \$630,941,61 \end{aligned}$$

Se observa a primera vista que la ecuación tiene una presentación muy distinta pero el resultado final es el mismo.

El problema no presentó dificultad para resolverlo; pero, si el número de pagos hubiese aumentado considerablemente, la solución no hubiese sido tan sencilla, como el caso de pagar una deuda mediante pagos mensuales, durante 20 años. La solución de este problema a dado origen a un modelo matemático llamado anualidad.

#### 4.2.1. Plazo de una anualidad

El tiempo que transcurre entre el inicio del primer período y el final del último período se denomina el plazo de una anualidad y se representa por  $n$ .

Una anualidad tiene dos valores el valor final y el valor presente en el primer caso, todos los pagos son trasladados al final de la anualidad y en el segundo caso todos los pagos son trasladados al principio de la anualidad.

#### 4.2.2. Valor Final ( $VF$ ) ó ( $VS$ )

Hagamos los cálculos para hallar el valor final de una anualidad ordinaria. El valor final puede ser representado de dos maneras:

La primera usando la notación tradicional:

$$(F/A, n, i\%)$$

donde  $S$  significa valor final,  $A$  significa que se trata de una anualidad,  $n$  indica el número de pagos de la anualidad y la  $i\%$  significa la tasa a la cual todos los pagos son trasladados al valor final.

La segunda forma de representación es con la notación actuarial:

$$S\bar{n}|i = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

donde la  $n$  (cantidad que se escribe dentro del ángulo) indica el número de pagos y la  $i$  indica la tasa a la cual serán llevados todos los pagos a valor final.

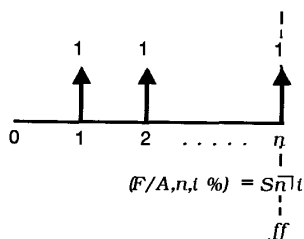
Debido a que la notación actuarial es más condensada se utilizará esta forma.

Ahora procedamos a calcular el valor final de una anualidad. No se pierde generalidad si suponemos que la renta es de \$1, pues como se puede apreciar ( factoricemos  $R$ ).

$$2,000,000 = R [(1, 1)^{-1} + (1, 1)^{-2} + (1, 1)^{-3} + (1, 1)^{-4}]$$



Lo que está dentro del paréntesis angular es el valor presente de \$1 en un período, seguido del valor presente de \$1 en 2 períodos y así sucesivamente hasta llegar al valor presente en 4 períodos. En forma general se tendrá:



Para plantear la ecuación del valor con fecha focal en  $n$  trasladamos cada uno de los pagos de \$1 a valor final usando la ecuación del interés compuesto a cada pago, pero en cada paso. El pago que está en 1 se traslada por  $n - 1$  períodos, el que está en 2 se traslada por  $n - 2$  períodos y así sucesivamente hasta llegar al pago que está en  $n$  el cual no se traslada por estar en la fecha focal entonces:

$$S\bar{n}|i = 1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{n-1} \quad [1]$$

Si la ecuación [1] la multiplicamos por  $(1 + i)$  obtenemos la ecuación [2] entonces:

$$S\bar{n}|i(1 + i) = (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^n \quad [2]$$

Sustrayendo la ecuación [1] de la ecuación [2], tenemos la ecuación [3]:

$$S\bar{n}|i(1 + i) = (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^n \quad [2]$$

$$S\bar{n}|i = 1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{n-1} \quad [1]$$

$$S\bar{n}|i(1 + i) - S\bar{n}|i = (1 + i)^n - 1 \quad [3]$$

factorizando  $S\bar{n}|i$  se tiene la ecuación [4]

$$S\bar{n}|i(i) = (1 + i)^n - 1$$

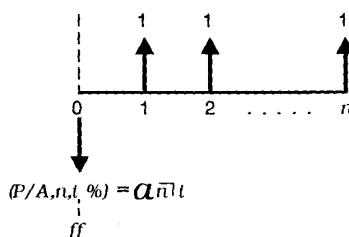
finalmente despejando  $S\bar{n}|i$  se tiene la ecuación [5]

$$(S/A, n, i \%) = S\bar{n}|i = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

### 4.2.3. Valor Presente (VP)

El caso del valor presente lo representamos por  $a\bar{n}|i$  en la notación actuarial y por  $(P/A, n, i\%)$  en la notación tradicional y significará el valor presente de una anualidad de  $n$  pagos puesto en valor presente a la tasa  $i\%$ .

La fórmula se obtiene al plantear la ecuación de valor con fecha focal al principio y trasladando todos los pagos a valor presente a la tasa  $i$  (nuevamente, no se pierde generalidad si se supone que todos los pagos son de \$1)



$$(P/A, n, i\%) = a\bar{n}|i = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-n}$$

Para simplificar esta ecuación podría seguirse un procedimiento similar al, realizado para el valor final; sin embargo el camino más corto consiste en actualizar el valor final

$$a\bar{n}|i = S\bar{n}|i(1+i)^{-n}$$

Si reemplazamos  $S\bar{n}|i$  por su equivalente  $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ , se tiene:

$$a\bar{n}|i = \frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i)^{-n} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

de donde se concluye que

$$(P/A, n, i\%) = a\bar{n}|i = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Las fórmulas anteriores fueron deducidas para una renta de \$1 pero si la renta hubiese sido de \$R, el valor final  $VS$  o el valor presente  $VP$  hubiese sido  $R$  veces mayor. Por tanto podemos escribir:

$$VS = RS\bar{n}|i = R \left( \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right)$$

y también

$$VP = Ra\bar{n}|i = R \left( \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right)$$

**Ejemplo 4.2.** *Un documento estipula pagos trimestrales de \$80.000, durante 6 años. Si este documento se cancela con un solo pago de:*

(a)

1. \$A al principio o
2. S al final, con una tasa del 32%CT.

**Solución 4.2.** *El número de pagos es  $n = 4 \times 6 = 24$ ,  $R = \$80,000$*

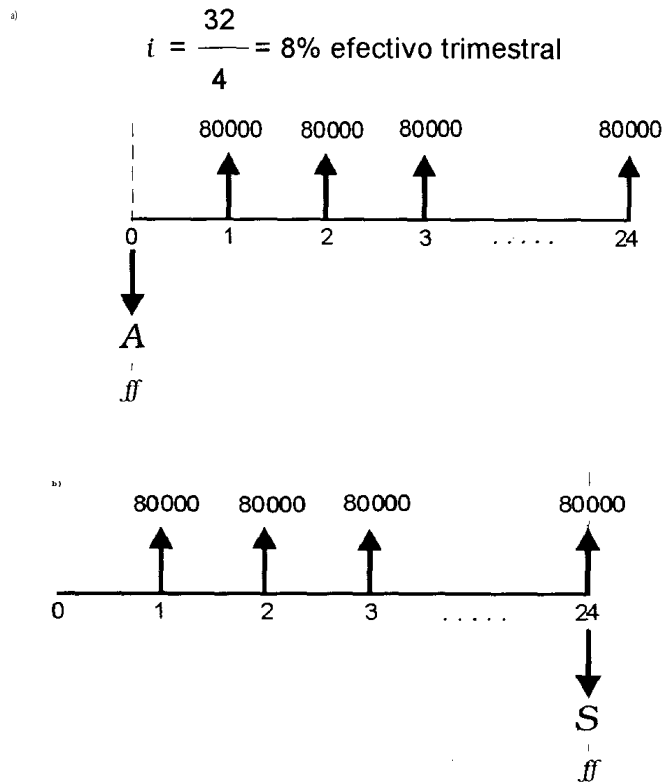
$i = \frac{32}{4} = 8\%$  efectivo trimestral

$$VP = A = R \left( \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right) = Ra\bar{n}|i$$

$$VF = S = R \left( \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right) = RS\bar{n}|i$$

$$A = 80,000 \frac{1 - (1+0,08)^{-24}}{0,08} = \$842,301$$

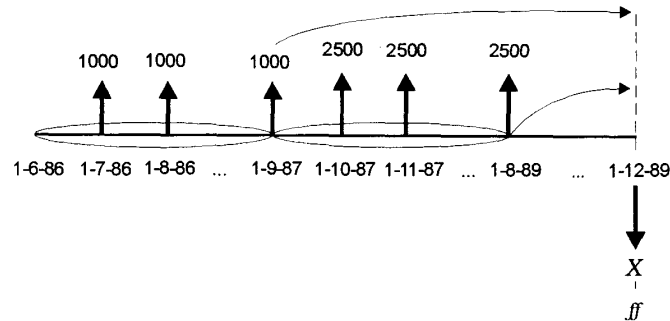
$$S = 80,000 \frac{(1+0,08)^{24} - 1}{0,08} = \$5,341,181$$



**Ejemplo 4.3.** Una persona empieza el día 1 de julio de 1986 a hacer depósitos de \$1.000 mensualmente el día primero de cada mes. Estos depósitos son efectuados en una entidad financiera que le paga el 24 % CM; pero, a partir del 1 de octubre de 1987, decidió que de ahí en adelante, sus depósitos serían de \$2.500. El último depósito lo hizo el primero de agosto de 1989. Si el primero de diciembre de 1989 decide cancelar la cuenta. ¿Cuál será el monto a sus ahorros?.

**Solución 4.3.** Observemos que hay 2 anualidades: la de renta de \$1.000 y la de renta de \$2.500. La primera anualidad empieza el 1-6-86(primeros de junio de 1986) y termina el 1-9-87 y la segunda anualidad empieza el 1-9-87 y termina el 1-8-89. de esta forma la primera anualidad tendrá 15 períodos y su valor final debe ser trasladado por 27 períodos para llevarlo a la fecha focal (desde el 1-9-87 hasta el 1-12-89). La segunda anualidad tendrá 23 períodos y su valor final lo debemos trasladar por 4 períodos y así la ecuación de valor será:

$$VS = R \left( \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right) = RS\bar{n}|i$$



$$1,000 \left( \frac{(1+0,02)^{15}-1}{0,02} \right) (1+0,02)^{27} + 2,500 \left( \frac{(1+0,02)^{23}-1}{0,02} \right) (1+0,02)^4 = X$$

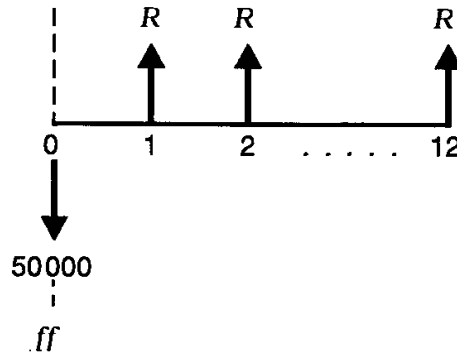
$$1,000S\overline{15}|2\%(1,02)^{27} + 2,500S\overline{23}|2\%(1,02)^4 = X$$

de donde se obtiene que:  $X = \$107,574,69$

**Ejemplo 4.4.** Una deuda de \$50.000 se va a cancelar mediante 12 pagos uniformes de \$R. Con una tasa de 2 % efectivo para el período, hallar, el valor de la cuota R situado:

a. la fecha focal el día de hoy

b. poniendo la fecha focal en 12 meses



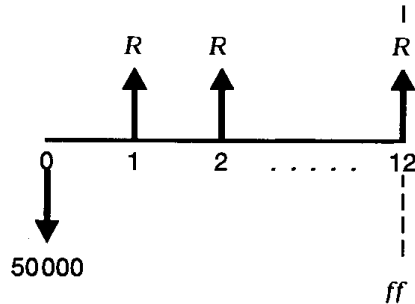
**Solución 4.4.** En este caso se usa  $a\overline{n}|i$  porque todo el flujo de caja debe ser puesto al principio que es donde está la fecha focal y la ecuación de valor quedará así:

$$VP = R \left( \frac{1-(1-i)^{-n}}{i} \right) = Ra\bar{n}|i$$

$$50,000 = R \left( \frac{1-(1-0,02)^{-12}}{0,02} \right)$$

$$50,000 = Ra\bar{12}|2\% \text{ de donde } R = \$4,727,98$$

En este caso puede usarse  $S\bar{n}|i$  porque todo el flujo de caja debe ser puesto en el punto 12 que



es donde está la fecha focal, pero la deuda de los \$50.000 sigue en 0 lo cual implica que deberá ser trasladada a valor final junto con todos pagos, entonces la ecuación quedará así:

$$50,000(1 + 0,02)^{12} = R \left( \frac{(1+0,02)^{12}-1}{0,02} \right)$$

$$50,000(1,02)^{12} = RS\bar{12}|2\% \text{ y vuelve a dar } R = \$4,727,98$$

#### 4.2.4. Anualidades Anticipadas

Como ya se dijo una anualidad anticipada es aquella en que los pagos se hacen al principio del período. El valor presente y el valor final se representarán respectivamente por:

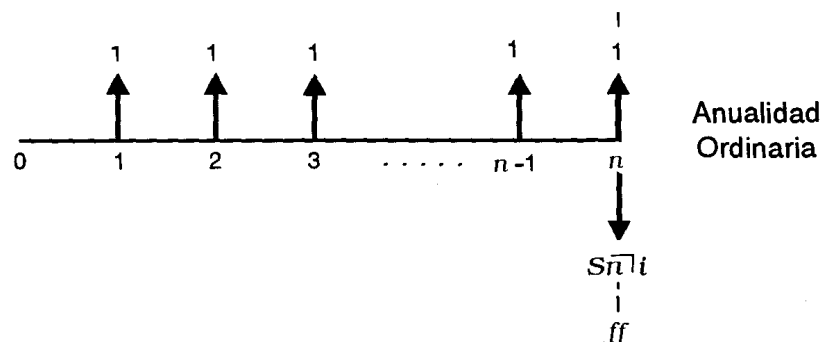
$$\ddot{a}\bar{n}|i = (P/\ddot{A}, n, i\%) \text{ y } \ddot{S}\bar{n}|i = (F/\ddot{A}, n, i\%)$$

Los dos puntos o diéresis indican que es anticipado.

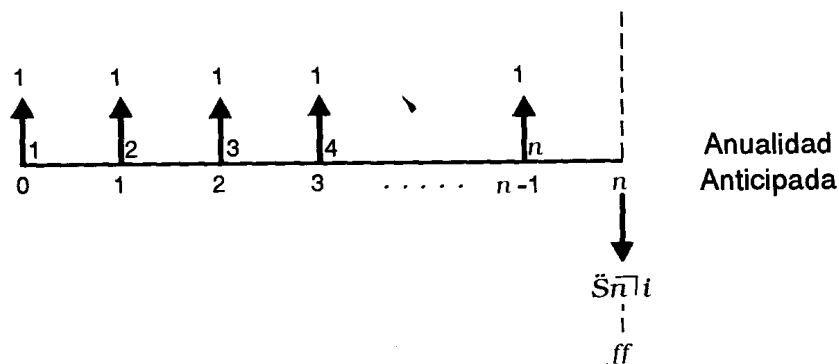
Existen relaciones entre las anualidades ordinarias y las anualidades anticipadas, las cuales podrán ser deducidas del análisis de las siguientes gráficas:

a. Para facilitar el planteamiento de la ecuación de valor comenzamos con el pago que está en  $n$ , siguiendo con el que está en  $n - 1$  y así sucesivamente hasta llegar al pago situado en 1, entonces para valor final con anualidad ordinaria la ecuación de valor quedará así:

$$S\overline{n}|i = 1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^n$$



Para anualidad anticipada en valor final, la gráfica de flujo de caja quedará así:



Observese que en este caso hemos usado una doble numeración la que está encima de la línea de tiempo indica el número del pago, mientras que la que se encuentra debajo de la línea de tiempo

señala los períodos y así en el período 0 que es el comienzo del primer período se está haciendo el pago número 1, en período uno que es el final del primer período pero a su vez es comienzo del segundo período y por eso se realiza el segundo pago y así sucesivamente hasta que lleguemos al punto  $n - 1$  pero también es el comienzo del período  $n$  y por tanto ahí debe estar el pago  $n$  y su ecuación de valor será:

$$S\bar{n}|i = (1+i)^1 + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n$$

La diferencia entre las dos anualidades estriba en que la serie de la anualidad ordinaria empieza con 1 con  $(1+i)^{n-1}$ , en cambio, la serie de la anualidad anticipada comienza con  $(1+i)$  y termina con  $(1+i)^n$ . Si a la serie anticipada se le agrega un 1 y se le resta al final y, si además, le introducimos el paréntesis angular, el resultado no se altera.

$$\ddot{S}\bar{n}|i = [1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 \dots + (1+i)^{n-1}] + (1+i)^n - 1$$

Obsérvese que la parte que está dentro del paréntesis es igual a la serie ordinaria, por tanto, se puede decir que:

$$\ddot{S}\bar{n}|i = S\bar{n}|i + (1+i)^n - 1$$

Si se reemplaza  $S\bar{n}|i$  por su equivalente  $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$  se tendrá:

$$\ddot{S}\bar{n}|i = \frac{(1+i)^n - 1}{i} + (1+i)^n - 1$$

reduciendo a un común denominador el miembro de la derecha se tendrá:

$$\ddot{S}\bar{n}|i = \frac{(1+i)^n - 1}{i} + i \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

si se factoriza  $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$  se tendrá:

$$\ddot{S}\bar{n}|i = \frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i) \text{ pero como } \frac{(1+i)^n - 1}{i} = S\bar{n}|i$$

entonces se tiene

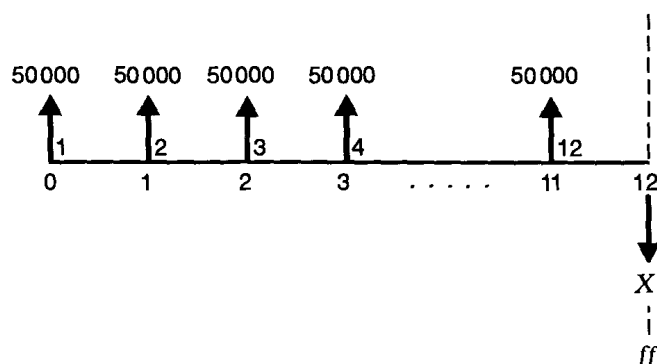
$$\ddot{S}\bar{n}|i = S\bar{n}|i (1+i)$$

que es equivalente a

$$(F/\ddot{A}, n, i\%) = (F/A, n, i\%)(1+i)$$



**Ejemplo 4.5.** Una persona arrienda una casa en \$50.000 pagaderos por mes anticipado, si tan pronto como recibe cada arriendo, lo invierte en un fondo que le paga el 2% efectivo mensual. ¿Cuál será el monto de sus ahorros al final de un año?



**Solución 4.5.** Obsérvese que de todos modos hay 12 períodos y 12 pagos. El valor final de esta anualidad está en el punto 12 (porque si comienza con pago debe terminar con período) y la ecuación será:

$$X = 50,000\ddot{S}_{\overline{12}|2\%} = 50,000S_{\overline{12}|2\%}(1,02) = \$684,016,58$$

#### 4.2.5. Anualidad ordinaria en valor presente

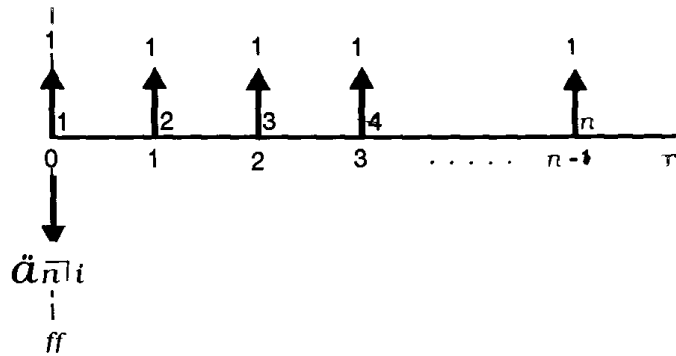
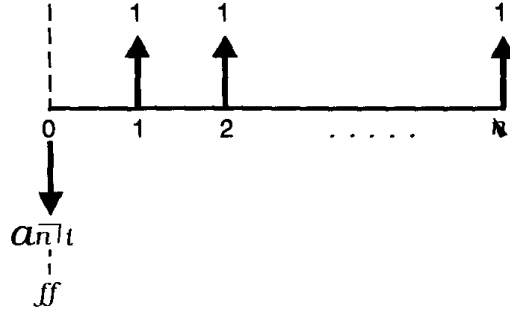
La ecuación de valor se comienza a plantear con el pago que está en 1 terminando con el pago que está en  $n$ .

$$(P/A, n, i\%) = a\overline{n}|i = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}$$

#### 4.2.6. Anualidad anticipada en valor presente

La diferencia entre las dos series estriba en que la ordinaria empieza con 1 y termina con  $(1+i)^{-n}$  y la anticipada comienza con 1 termina con

$$(1+i)^{-(n-1)}$$



luego la correspondiente ecuación de valor es:

$$(P/\ddot{A}, n, i\%) = \ddot{a}\bar{n}|i = 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-(n-1)}$$

Si a la serie de la anualidad anticipada se le agrega  $(1+i)^{-n}$  y le restamos esa misma cantidad y además le introducimos un paréntesis angular, el resultado no se altera entonces:

$$\ddot{a}\bar{n}|i = 1 + \left[ (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n} \right] - (1+i)^{-n}$$

ahora se puede observar que la serie que está dentro del paréntesis angular corresponde a la serie ordinaria, por tanto podemos decir que:

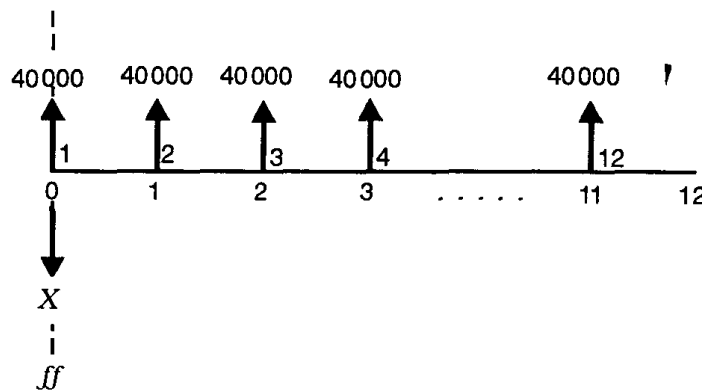
$$\ddot{a}\bar{n}|i = 1 + a\bar{n}|i - (1+i)^{-n}$$

si los últimos términos de la ecuación anterior se encierran en un paréntesis angular y se multiplican y dividiendo por  $i$ , no se altera la igualdad, por tanto se tiene:

$$\ddot{a}\bar{n}|i = a\bar{n}|i + \frac{i[1 - (1+i)^{-n}]}{i} = a\bar{n}|i + ia\bar{n}|i$$

factorizando  $a\bar{n}|i$  se tiene la fórmula final  $\ddot{a}\bar{n}|i = a\bar{n}|i(1+i)$

**Ejemplo 4.6.** El contrato de arriendo de una casa estipula pagos mensuales de \$40.000, al principio de cada mes, durante un año. Si suponemos un interés del 30 % CM. ¿Cuál será el valor del pago único que, hecho al principio del contrato, lo cancelaría en su totalidad?



**Solución 4.6.**  $i = \frac{30\%}{12} = 2,5\%$

$$X = R \left( \frac{1 - (1 + 0,025)^{-12}}{0,025} \right) (1 + 0,025); \text{ donde } R = 40,000$$

$$X = 40,000 \ddot{a}\bar{12}|2,5\% = 40,000 a\bar{12}|2,5\% (1 + 0,025)$$

$$X = \$420,568,35$$

### 4.3. AMORTIZACION

La amortización consiste en pagar una deuda, mediante una serie de pagos; el comportamiento de la deuda y los intereses se pueden mostrar en una tabla denominada tabla de amortización.

Una tabla de amortización debe tener como mínimo, cinco columnas: la primera muestra el número del período, la segunda nos muestra el saldo de la deuda, es decir, el capital insoluto a medida que van pasando los períodos, la tercera nos muestra los intereses que se van causando período a período, la cuarta columna nos muestra la cuota o cantidad que se paga en cada período y la quinta columna nos muestra la porción de la cuota que se usa para disminuir la deuda, es decir, la cantidad que se amortiza, también se le denomina abono a capital.

**Ejemplo 4.7.** *Un préstamo de \$ 4.000 se va a amortizar por medio de 8 pagos mensuales iguales. Hallar el valor del pago mensual si la tasa de interés es del 34 % capitalizable mensualmente, y elaborar una tabla de amortización.*

**Solución 4.7.**  $a\bar{n}|i = 1 - \frac{(1+i)^{-n}}{i}$  ;  $P = Ra\bar{n}|i$  luego  $R = \frac{P}{a\bar{n}|i}$

$$VP = R \left( \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right)$$

Reemplazamos  $VP = 4,000$

$$R = \frac{4,000}{\left[ \frac{1 - \left(1 + \frac{0,34}{12}\right)^{-8}}{\frac{0,34}{12}} \right]} = 565,83$$

Se necesitan 8 pagos mensuales de \$ 565,83 cada uno con el fin de amortizar la deuda de \$ 4.000.

Período	$R$ Abono	$Ri$ Interés	$R - Ri$ Amortización	$P - (R - Ri)$ Saldo insoluto
				$P = 4,000$
1	565,83	113,33	452,50	3.547,50
2	565,83	100,51	465,32	3.082,19
3	565,83	87,33	478,50	2.603,68
4	565,83	73,77	492,06	2.111,63
5	565,83	59,83	506,00	1.605,62
6	565,83	45,49	520,34	1.085,29
7	565,83	30,75	535,08	550,21
8	565,83	15,59	550,21	0,00
	4526,64	526,61	4.000	

Donde Abono= $R$ , Interés= $Ri$ , Amortización= $R - Ri$  y Saldo insoluto= $P - (R - Ri)$ .

*Comentarios en relación a la construcción de la tabla :*

1. *Los intereses se calcularon multiplicando el saldo insoluto por la tasa por periodo .*

$$I = (1)(0,34/12)(4,000) = \$113,33$$

$$I = (1)(0,34/12)(3,547,70) = \$100,51$$

$$I = (1)(0,34/12)(3,082,59) = \$87,33$$

2. *La amortización al capital se calculó restando el interés al abono.*

$$\text{Amortización fin del periodo 1} = 585,63 - 113,33 = \$ 452,30$$

$$\text{Amortización fin del periodo 2} = 585,63 - 100,52 = \$ 465,11$$

$$\text{Amortización fin del periodo 3} = 585,63 - 87,34 = \$ 478,29$$

3. *El saldo insoluto se puede calcular como sigue :*

$$VP = 565,83 \left[ \frac{1 - \left(1 + \frac{0,34}{12}\right)^{-4}}{\frac{0,34}{12}} \right] = 2,111,64$$

*Periodo 4*

$$VP = 565,83 \left[ \frac{1 - \left(1 + \frac{0,34}{12}\right)^{-3}}{\frac{0,34}{12}} \right] = 1,605,62$$

*Periodo 5*

$$VP = 565,83 \left[ \frac{1 - \left(1 + \frac{0,34}{12}\right)^{-2}}{\frac{0,34}{12}} \right] = 1,085,31$$

*Periodo 6*

*Cada una de las cantidades del saldo insoluto representa el valor actual de los pagos mensuales por realizar.*

## 4.4. CAPITALIZACIÓN

La palabra capitalización tiene otros significados afines, en este caso por capitalización entenderemos el reunir un capital mediante depósitos periódicos.

Una tabla de capitalización nos muestra , período a período, la forma como se va reuniendo un capital, su conformación es similar a la de amortización y básicamente debe tener 5 columnas

que en su orden las denominaremos: período, capital reunido o monto, intereses, depósito o cuota y la última columna que se denomina capitalización o incremento por período.

**Ejemplo 4.8.** Antonio compra de una casa valuada en \$ 230.000 y paga \$ 15.000 de enganche. Antonio obtiene un préstamo hipotecario a 20 años por el saldo. Si se cobra un interés del 29 % capitalizable cada mes, ¿cuál sería el valor del pago mensual? Elabórese una tabla de amortización para los primeros 10 meses.

**Solución 4.8.**  $R = 230,00 - 15,000 = 215,000$

$$VP = R \left( \frac{1 - (1 - i)^{-n}}{i} \right)$$

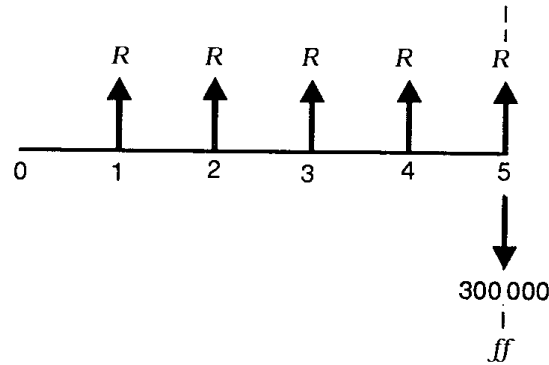
$$VP = 215,000 \left[ \frac{1 - \left( 1 + \frac{0,29}{12} \right)^{-240}}{\frac{0,29}{12}} \right] = \$5,212,74$$

Período	Abono	Interés	Amortización	Saldo Insoluto
				215.000
1	5.212,74	5.195,83	16,91	214.983,09
2	5.212,74	5.195,42	17,32	214.965,78
3	5.212,74	5.195,01	17,73	214.948,04
4	5.212,74	5.194,58	18,16	214.929,88
5	5.212,74	5.194,14	18,60	214.911,28
6	5.212,74	5.193,69	19,05	214.892,23
7	5.212,74	5.193,23	19,51	214.872,72
8	5.212,74	5.192,76	19,98	214.852,74
9	5.212,74	5.192,27	20,47	214.832,27
10	5.212,74	5.191,78	20,96	214.811,31

**Ejemplo 4.9.** Elaborar una tabla para capitalizar la suma de \$300.000 en 15 meses, haciendo depósitos trimestrales iguales en un fondo que paga el 32 % CT.

**Solución 4.9.** Elaboremos la grafica, colocando el capital que se desea reunir al final. En toda capitalización para que la ecuación de valor resulte lo más sencilla posible, es aconsejable colocar la fecha focal al final

Ahora se plantea la ecuación de valor y se calcula la cuota.



$300,000 = R\overline{S5}|8\%$  de donde se obtiene que  $R = \$51,136,94$

En este caso no tiene objeto que empecemos la tabla con el período cero, porque según la gráfica, no hay ninguna cantidad en cero y tampoco hay intereses, así que comenzaremos la tabla en el período 1.

Período	Acumulado	Intereses	Depósito	Incremento
1	51.136,94	0,00	51.136,94	51.136,94
2	106.364,84	4.090,96	51.136,94	55.227,90
3	166.010,97	8.509,19	51.136,94	59.646,13
4	230.428,79	13.280,88	51.136,94	64.417,82
5	300.000,00	18.434,27	51.136,94	69.571,21

El análisis de las cantidades correspondientes a los períodos 1 y 2 es el siguiente: al final del primer período se hace un depósito de \$51.136,94. Intereses no hay puesto que estos se calculan sobre el capital acumulado al final del período inmediatamente anterior y en ese momento es cero. El incremento es la variación total que sufre el fondo, por concepto de intereses más depósito y como dijimos que en el primer período no había intereses entonces el incremento será igual al depósito o sea \$51.136,94. Para el segundo período calculamos los intereses aplicando la tasa al capital acumulado en el período anterior esto es:  $0,08 \times 51.136,94 = \$4.090,96$ , el incremento es igual a intereses más depósito, esto es:  $4.090,96 + 51.136,94 = \$55.227,90$ . El acumulado es igual al acumulado anterior más el incremento esto es:  $51.136,94 + 55.227,90 = \$106.364,84$ . El resto de la tabla continua en forma similar.

## Capítulo 5

# ANUALIDADES DIFERIDAS, PERPETUAS Y GENERALES

Las anualidades vistas en capítulo anterior eran inmediatas porque con el primer pago se encontraba el primer período, pero puede ser que el primer pago se encuentre después de haber pasado cierta cantidad de períodos, en este caso se denomina anualidad diferida, tal como se puede apreciar en el ejemplo:

**Ejemplo 5.1.** *Un industrial vende toda su producción y si pudiera producir más vendería más, por tal motivo le ha solicitado al banco de donde él es cliente que le preste \$8.000.000 para ser cancelado en 20 pagos trimestrales de \$Rc/u, pero también solicita que le permitan efectuar el primer pago exactamente al año de que se le conceda el préstamo, ésta solicitud la hace debido a que con el dinero del préstamo va a comprar en el exterior la maquinaria necesaria para hacer las ampliaciones en su fábrica lo cual requiere del tiempo necesario para la importación, nacionalización, transporte, período de montaje y pruebas hasta dejarla a punto para la producción. Calcular \$R con una tasa del 36 % CT.*

**Solución 5.1.** *Observe que el primer pago está en el período 4, que corresponde al final del primer año. La anualidad debe comenzar en el punto 3 y terminar en el punto 23, además su valor presente deberá trasladarse al punto 0 donde hemos puesto la fecha focal. (la doble numeración no siempre es necesaria, se ha puesto par dar mayor claridad en el ejemplo) La ecuación de valor será:*

$$VP = R \left( \frac{1 - (1 + 0,09)^{-20}}{0,09} \right) (1 + 0,09)^{-3}$$



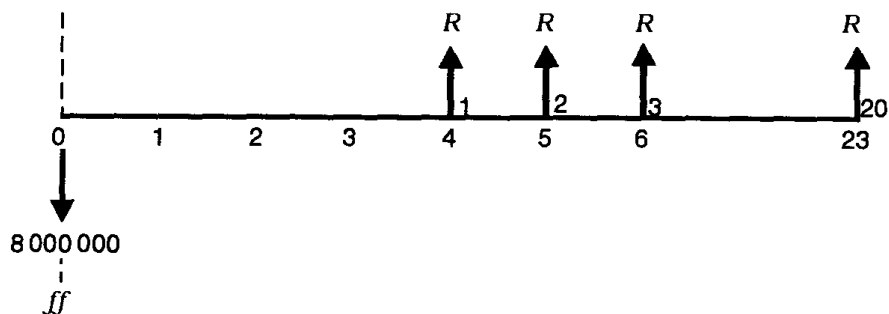


Figura 5.1: Diagrama anualidad diferida

$$8,000,000 = R \frac{1-(1,09)^{-20}}{0,09} (1,09)^{-3}$$

de donde  $R = \$1,134,926,90$

## 5.1. Anualidades perpetuas

una anualidad que tiene infinito número de pagos, se denomina anualidad infinita o perpetua, en realidad, las anualidades infinitas no existen, por que en este mundo todo tiene fin, pero, supondremos que una anualidad es infinita cuando el número de pagos es muy grande o cuando no se sabe cuántos pagos son, pero se sospecha que son muchos.

Este tipo de anualidades se presenta, cuando se coloca un capital y únicamente se retiran los intereses.

Al deducir la fórmula de una anualidad infinita debe tenerse en cuenta que solo existe el valor presente, porque el valor final de una anualidad infinita sería infinito.

$$VP = \lim_{n \rightarrow \infty} R \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \lim_{n \rightarrow \infty} R \frac{1-0}{i} = \frac{R}{i}$$

$$VP = \frac{R}{i}$$

**Ejemplo 5.2.** Hallar el valor presente de una renta perpetua de \$10.000 mensuales, suponiendo interés del 33% CM.

**Solución 5.2.**  $VP = \frac{R}{i} = \frac{10,000}{0,0275} = \$363,636,36$

## 5.2. Anualidades generales

Las anualidades vistas hasta el momento son aquellas en que el período de interés coincide con el período de pago. Todas ellas se denominan anualidades simples. Por ejemplo: una serie de pagos mensuales con una tasa efectiva mensual es una anualidad simple, también lo sería una serie de pagos trimestrales con una tasa efectiva trimestral, pero el caso de una anualidad general es cuando el período de pago no coincide con el período de interés, por ejemplo: si tenemos una serie de pagos mensuales con una tasa efectiva anual o una serie de pagos trimestrales con una tasa efectiva trimestral.

Una anualidad general puede ser reducida a una anualidad simple, si hacemos que los períodos de tiempo y los períodos de intereses coincidan, hay dos formas como podemos realizarlo:

La primera forma consiste en calcular pagos equivalentes que deben hacerse en concordancia con los períodos de interés. Dicho en otras palabras, consiste en encontrar el valor de los pagos que, hechos al final de cada período de interés, sean equivalentes al pago único que se hace al final de un período de pago.

La segunda forma consiste en modificar la tasa, haciendo uso del concepto de tasas equivalentes, para hacer que coincidan los períodos de interés y de pago.

**Ejemplo 5.3.** Hallar el monto  $S$  de 30 pagos trimestrales de \$25.000 suponiendo una tasa de 24 % CM .

**Solución 5.3.** La situación planteada en el problema es:

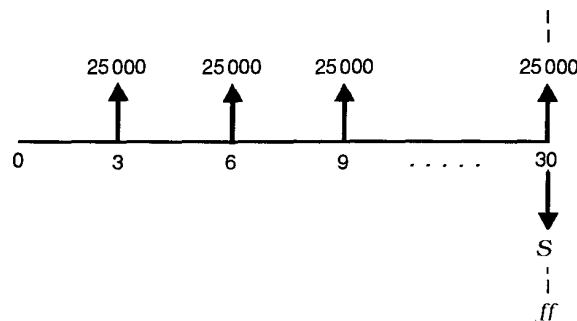
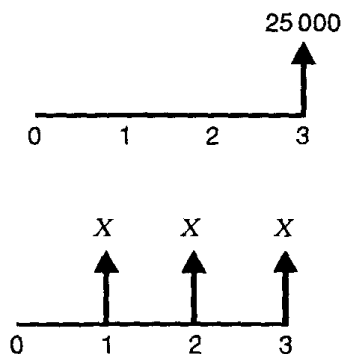


Figura 5.2: Diagrama anualidad general

Para poner a aplicar el símbolo  $S\overline{n}|i$  tiene que haber coincidencia entre el período de pago y el período de interés y para llegar a esta coincidencia cambiaremos los pagos de trimestrales a mensuales, entonces un pago de \$25.000 deberá ser reemplazado por tres pagos mensuales de \$X que se calcularían así:



como el valor final de las gráficas debe ser igual, entonces:

$$25,000 \frac{(1+0,02)^3-1}{0,02} = X$$

de donde se obtiene que :  $X = \$8,168,87$

Esto significa que cada pago de \$25.000 podrá ser reemplazado por tres pagos mensuales de \$8.168,87 de esta manera resultaran 90 pagos y la línea de tiempo que hemos dibujado inicialmente podrá ser reemplazada por:

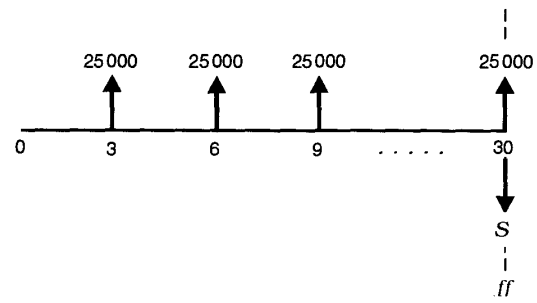
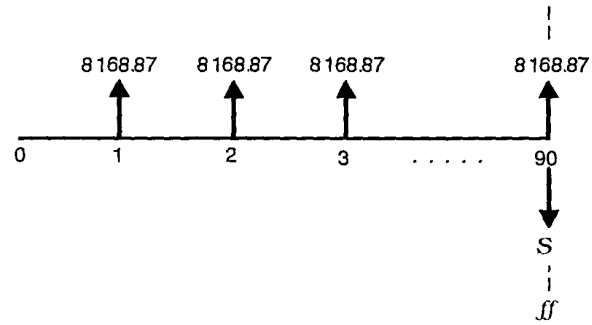
$$S = 8,168,87 \frac{(1,02)^{90}-1}{0,02} = \$2,018,990$$

**Ejemplo 5.4.** Resolvamos el ejercicio anterior modificando la tasa.

**Solución 5.4.** Buscamos una tasa efectiva trimestral equivalente al 24 % CM.

$$(1 + 0,02)^{12} = (1 + i)^4$$

$$i = 6,1208\% \text{ efectivo trimestral}$$



entonces:

$$S = 25,000 \frac{(1,061208)^{30} - 1}{0,061208} = \$2,018,990$$

## Capítulo 6

# GRADIENTES

Debido a la inflación se observa que casi todos los renglones de la economía van aumentando de precios, por esta razón es necesario elaborar modelos matemáticos que ajustándose a los índices de inflación puedan compensar los efectos erosionantes en el dinero, a través del tiempo, entre los modelos matemáticos que puedan suplir esta necesidad están los gradientes.

Un gradiente es una serie de pagos que cumple con las siguientes condiciones:

1. Todos los pagos cumplen con una ley de formación.
2. Los pagos se efectúan a iguales intervalos de tiempos.
3. Todos los pagos se trasladan al principio o al final a la misma tasa de interés.
4. El número de pagos es igual número de periodos.

La ley de formación de la que habla la primera condición, puede ser de varias clases, sin embargo, las más utilizadas son: la que corresponde al gradiente lineal o aritmético y la que corresponde al gradiente geométrico.

Las anualidades, vienen a ser un caso particular de los gradientes, en el cual, el crecimiento es cero, lo que hace que todos los pagos sean de igual valor, por tal motivo el manejo de los gradientes es similar al de las anualidades.

Las otras leyes son las mismas de las anualidades.

### 6.1. Gradiente aritmético

En el gradiente aritmético cada pago es igual al anterior, más una constante  $L$ ; si esta constante es positiva, el gradiente será creciente; si la constante es negativa el gradiente será decreciente, si  $L = 0$  todos los pagos son iguales y la serie se convierte en una anualidad.

Como en un gradiente todos los pagos son de diferente valor, será necesario distinguir un pago de otro y por esto al primer pago lo representaremos por  $R_1$ ; el segundo pago por  $R_2$  y así sucesivamente, el último pago los representaremos por  $R_n$

De acuerdo a la definición de gradiente lineal se tendrá:

$$R_2 = R_1 + L$$

$$R_3 = R_2 + L = R_1 + 2L$$

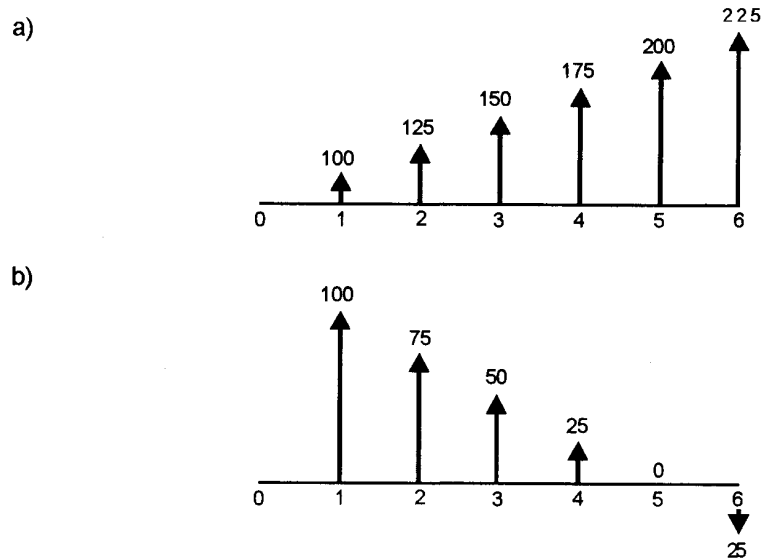
$$R_4 = R_3 + L = R_1 + 3L$$

$$R_n = R_{n-1} + L = R_1 + (n - 1)L$$

De lo anterior se deduce que la fórmula del último término será:

$$R_n = R_1 + (n - 1)L$$

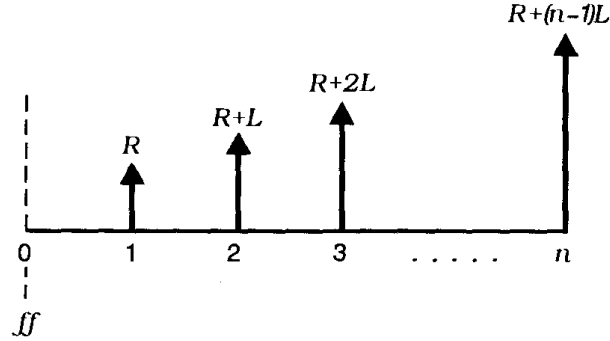
**Ejemplo 6.1.** Hacer la gráfica del gradiente aritmético de 6 pagos con primera cuota de \$100 y a) crecimiento de \$25 y b) decrecimiento en \$25



**Solución 6.1.**

Figura 6.1: Diagrama gradiente aritmético de 6 pagos

Obsérvese en la figura b) que, en el periodo 5, el pago es cero y que, en el periodo 6, el valor del pago viene a ser -\$25, lo cual se representa colocándolo como positivo pero al otro lado de la línea de tiempo.



### 6.1.1. Fórmula del valor presente de un gradiente aritmético

En igual forma como se hizo con las anualidades, planteamos la ecuación de valor, trasladando cada uno de los pagos a la fecha focal, usando la tasa efectiva  $i$ ; entonces:

$$VP = R(1+i)^{-1} + (R+L)(1+i)^{-2} + (R+2L)(1+i)^{-3} + \dots + [R+(n-1)L](1+i)^{-n}$$

Si eliminamos los paréntesis donde se encuentra  $R$  y escribimos primero los términos que contienen  $R$  y, después, los términos que contienen  $L$ , tenemos:

$$VP = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + \dots + R(1+i)^{-n} + L(1+i)^{-2} + 2L(1+i)^{-3} + \dots + (n-1)L(1+i)^{-n}$$

Se observa que los términos que contienen  $R$  son los mismos de la ecuación de valor de una anualidad ordinaria en el valor presente, y además, factorizamos la  $L$  de los términos restantes se tiene:

$$VP = Ra\bar{n}|i + L[(1+i)^{-2} + 2(1+i)^{-3} + 3(1+i)^{-4} + \dots + (n-1)(1+i)^{-n}] \quad (\times)$$

Supongamos que  $W$  es igual a la serie que está dentro del paréntesis angular; en consecuencia:

$$W = (1+i)^{-2} + 2(1+i)^{-3} + 3(1+i)^{-4} + \dots + (n-1)(1+i)^{-n}$$

Si multiplicamos la ecuación anterior por  $(1+i)$  tenemos:

$$W(1+i) = (1+i)^{-1} + 2(1+i)^{-2} + 3(1+i)^{-3} + \dots + (n-1)(1+i)^{-(n+1)}$$

Si sustraemos  $W(1+i) - W$  resulta:

$$W(1+i) - W = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-(n+1)} - (n-1)(1+i)^{-n}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} W &= (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-(n+1)} + (1+i)^{-n} - n(1+i)^{-n} \\ Wi &= a\bar{n}|i - n(1+i)^{-n} \\ W &= \frac{1}{i} [a\bar{n}|i - n(1+i)^{-n}] \end{aligned}$$

Si reemplazamos  $W$  en (  $\times$  ) tenemos:

$$VP = Ra\bar{n}|i + \frac{L}{i} [a\bar{n}|i - n(1+i)^{-n}]$$

En la fórmula anterior figura  $R$  sin indicar cual de todas las cuotas es pero, en la deducción de la fórmula hemos trabajado con base en que  $R$  es el primer pago. En consecuencia cuando en cualquier fórmula aparezca  $R$  sin indicar cual es, deberá asumirse que se trata de la primera cuota.

**Ejemplo 6.2.** Hallar el valor presente con interés al 5 % de la siguiente serie.

**Solución 6.2.** a. El gradiente tiene un crecimiento de \$200; entonces  $L = 200$

b. El primer pago es \$800; entonces  $R = 800$  c. El número de pagos es 6; entonces  $n = 6$

reemplazando la fórmula se tiene:

$$VP = 800a\bar{6}|5\% + \frac{200}{0,05} [a\bar{6}|5\% - 6(1+0,05)^{-6}] = \$6,454,15$$

**Ejemplo 6.3.** Hallar el valor presente de la siguiente serie con tasa del 5 %



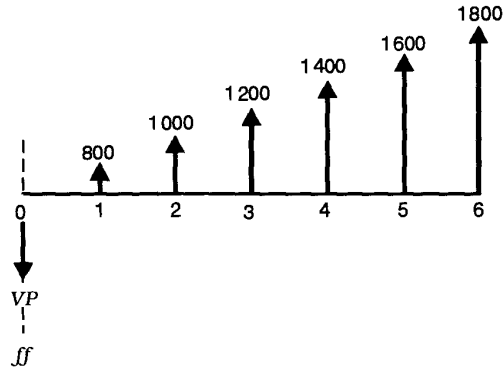
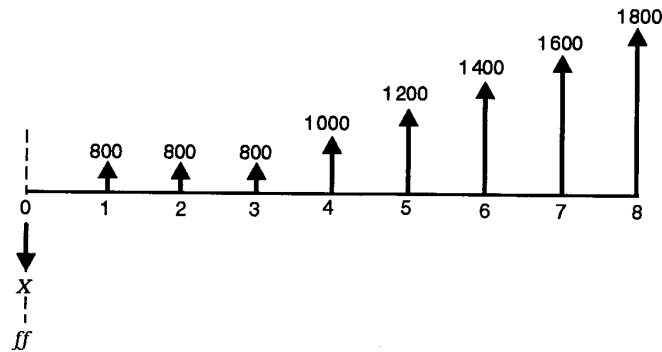


Figura 6.2: Diagrama gradiente aritmético creciente



**Solución 6.3.** *primera forma: podemos considerar que el gradiente se inicia en el período 2; entonces su primer pago será de \$800 (el que está en 3); los pagos de \$800 ubicados en 1 y 2 forman una anualidad:*

$$X = \text{Anualidad de 2 pagos} \cdot 800a_{\overline{2}|5\%} + \left\{ 800a_{\overline{6}|5\%} + \frac{200}{0,05} [a_{\overline{6}|5\%} - 6(1 + 0,05)^{-6}] \right\} \cdot (1 + 0,05)^{-2}$$

Valor presente del gradiente en el punto 2 = \$6.454 Para ubicar en la ff

$$X = \$7,342$$

### 6.1.2. Fórmula del valor final del gradiente aritmético

Para hallar el valor final, basta tomar el valor presente y multiplicarlo por  $(1 + i)^n$ , así:

$$VS = VP(1+i)^n$$

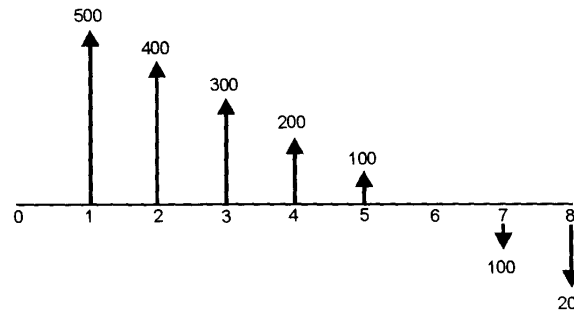
Haciendo las operaciones respectivas y simplificando se concluye que:

$$VS = RS\bar{n}|i + \frac{L}{i} [S\bar{n}|i - n]$$

Observación: nuevamente hacemos énfasis en que  $R$  representa a la primera cuota del gradiente.

**Ejemplo 6.4.** Hallar el monto de la siguiente gráfica; suponga una tasa del 15 %

Observación: los 2 últimos valores son negativos



**Solución 6.4.**  $n = 8$ ,  $L = -100$ ,  $R = 500$

$$VS = 500S\bar{8}|15\% + \frac{-100}{0,15} [S\bar{8}|15\% - 8] = \$3,045,53$$

## 6.2. Amortización con cuota creciente

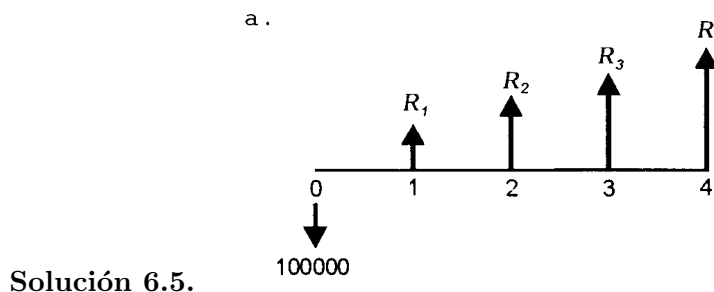
Debido a las altas tasas de inflación, en muchos países se ha impuesto la moda de utilizar una cuota creciente en los sistemas de amortización, lo que ha impulsado el desarrollo y nuevas técnicas.

Actualmente, los sistemas de amortización más utilizados son los que usan una cuota creciente.

**Ejemplo 6.5.** Amortizar la suma de \$100.000, en 4 pagos, suponiendo una tasa del 8 % y;

a. crecimiento lineal de la cuota de \$12.000

b. decrecimiento lineal de la cuota de \$12.000



$$100,000 = Ra\bar{4}|8\% + \frac{12,000}{0,08} [a\bar{4}|8\% - 4(1 + 0,08)^{-4}]$$

de donde se obtiene que  $R_1 = \$13,344,56$

Las demás cuotas se pueden calcular con la fórmula del último termino del gradiente lineal aritmético

$$R_n = R_1 + (n - 1)L$$

$$R_2 = 13,344,56 + 12,000 = 25,344,56$$

$$R_3 = 13,344,56 + 2 \times 12,000 = 37,344,56$$

$$R_4 = 13,344,56 + 3 \times 12,000 = 49,344,56$$

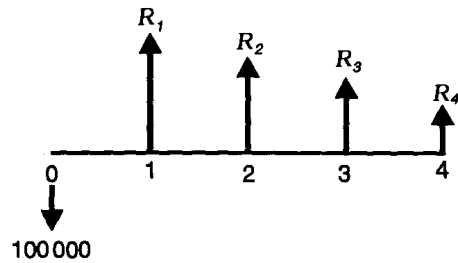
Con los datos anteriores podemos elaborar la tabla de la misma forma como se trabaja con anualidades.

Período	Saldo deuda	Intereses	Pago	Amortización
0	100.000,00			
1	94.655,44	8.000,00	13.344,56	5.344,56
2	76.883,31	7.572,43	25.344,56	17.772,13
3	45.689,41	6.150,66	37.344,56	31.193,90
4	0,00	3.655,15	49.344,56	45.689,41

$$100,000 = Ra\bar{4}|8\% + \frac{-12,000}{0,08} [a\bar{4}|8\% - 4(1 + 0,08)^{-4}]$$

de donde se tiene que  $R_1 = \$47,039,60$

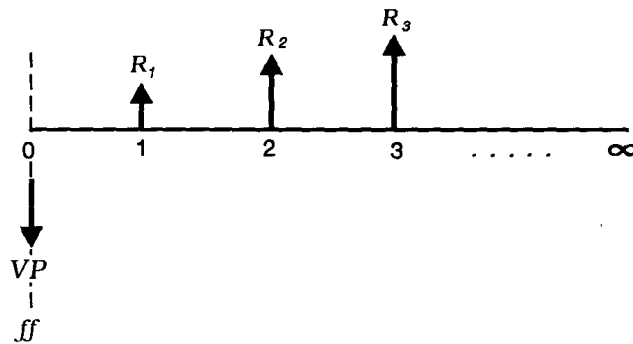
b)



Período	Saldo deuda	Intereses	Pago	Amortización
0	100.000,00			
1	60.960,40	8.000,00	47.039,60	39.039,60
2	30.797,63	4.876,83	35.039,60	30.162,77
3	10.221,84	2.463,81	23.039,60	20.575,79
4	0,00	817,76	11.039,60	10.221,84

### 6.2.1. Gradiente aritmético infinito

Igual que en las anualidades solo tiene sentido el valor presente de un gradiente infinito. Su principal aplicación es el calculo del costo del capital.



El planteamiento de la ecuación de valor será:

$$VP = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ Ra\bar{n}|i + \frac{L}{i} [Ra\bar{n}|i - n(1+i)^{-n}] \right\} \quad [1]$$

$$VP = \lim_{n \rightarrow \infty} Ra\bar{n}|i + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L}{i} a\bar{n}|i - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L}{i} n(1+i)^{-n} \quad [2]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ra\bar{n}|i = \lim_{n \rightarrow \infty} R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = R \left( \frac{1}{i} \right) = \frac{R}{i} \quad [3]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L}{i} n(1+i)^{-n} = \frac{L}{i} \lim_{n \rightarrow \infty} a\bar{n}|i = \frac{L}{i} \left( \frac{1}{i} \right) = \frac{L}{i^2} \quad [4]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L}{i} n(1+i)^{-n} = \frac{L}{i} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1+i)^n}$$

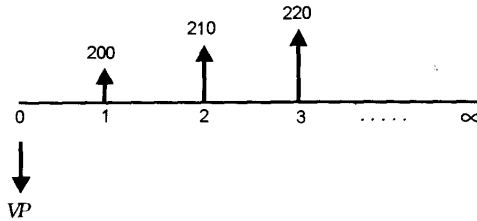
Aplicano la regla de L'opital, tenemos:

$$\frac{L}{i} n(1+i)^{-n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(+i)^{n-1}} = 0 \quad [5]$$

Reemplazando [3], [4], y [5] en [2], se tiene:

$$VP = \frac{R}{i} + \frac{L}{i^2}$$

**Ejemplo 6.6.** Calcular el valor presente de una serie infinita de pagos que crecen en \$10, si el primer pago vale \$200 y la tasa es del 3 %.



**Solución 6.6.**

$$VP = \frac{200}{0,03} + \frac{10}{(0,03)^2} = \$17,777,78$$

Esto significa que si colocamos \$17.777,78 al 3 % efectivo, podremos pagar \$200 al final del primer periodo, \$210 al final del segundo período, \$220 al final del tercer período y así sucesivamente.

### 6.3. Gradiente geométrico

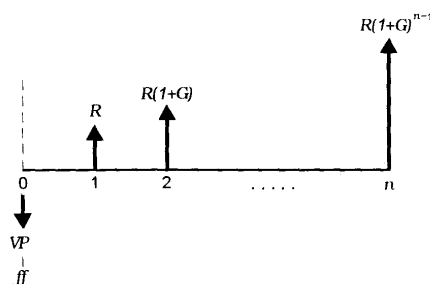
Un gradiente geométrico es una serie de pagos, en el cual cada pago es igual al anterior, multiplicado por una constante que representaremos por  $1 + G$ . Si  $G$  es positivo el gradiente será creciente, si

$G$  es negativo el gradiente será decreciente y, si  $G = 0$  el gradiente se convierte en una anualidad,

En un gradiente geométrico, el primer pago será:  $R_1$   
 el segundo pago  $R_2 = R_1(1 + G)$   
 el tercer pago  $R_3 = R_2(1 + G) = R_1(1 + G)^2$   
 el último pgo  $R_n = R_{n-1}(1 + G) = R_1(1 + G)^{n-1}$   
 $R_n = R_1(1 + G)^{n-1}$

### 6.3.1. Fórmula del valor presente del gradiente geométrico

#### Fórmula del valor presente del gradiente geométrico



El planteo de la ecuación de valor será:

$$VP = R(1 + i)^{-1} + R(1 + G)(1 + i)^{-2} + R(1 + G)^2(1 + i)^{-3} + \dots + R(1 + G)^{n-1}(1 + i)^{-n}$$

si multiplicamos la ecuación anterior, por  $(1 + G)(1 + i)^{-1}$ , tenemos:

$$VP(+G)(1 + i)^{-1} = R(1 + G)(1 + i)^{-2} + R(1 + G)^2(1 + i)^{-3} + R(1 + G)^3(1 + i)^{-4} + \dots + R(1 + G)^n(1 + i)^{-n-1}$$

Sustrayendo la primera ecuación de la segunda, tenemos:

$$VP(+G)(1 + i)^{-1} - VP = R(1 + G)^n(1 + i)^{-n-1} - R(1 + i)^{-1}$$

Factorizando, se tiene:

$$VP [(+G)(1 + i)^{-1} - 1] = R(1 + i)^{-1} [(1 + G)^n(1 + i)^{-n} - 1] = \frac{R[(1 + G)^n(1 + i)^{-n} - 1]}{(1 + i)}$$

$$VP = \frac{R[(1+G)^n(1+i)^{-n}-1]}{(1+i)[(1+G)(1+i)^{-1}-1]} = \frac{R[(1+G)^n(1+i)^{-n}-1]}{[(1+G)-(1+i)]}$$

y finalmente se llega a:

$$VP = \frac{R[(1+G)^n(1+i)^{-n}-1]}{G-i} \text{ si } G \neq i$$

Cuando  $G = i$ , se presenta una indeterminada, que puede ser removida usando la regla de

L'opital y derivando con respecto así:

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow G} \frac{R[(1+G)^n(1+i)^{-n}-1]}{G-i} &= \lim_{i \rightarrow G} R \frac{d/di[(1+G)^n(1+i)^{-n}-1]}{d/di(G-i)} = R \lim_{i \rightarrow G} \frac{-n(1+G)^n(1+i)^{-n-1}}{1} = \\ &= R [n(1+G)^n(1+i)^{-n-1}] = \frac{R(n)}{(1+i)} \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos concluir que:

$$VP = \begin{cases} \frac{R[(1+G)^n(1+i)^{-n}-1]}{G-i} & \text{si } G \neq i \\ \frac{R(n)}{(1+i)} & \text{si } G = i \end{cases}$$

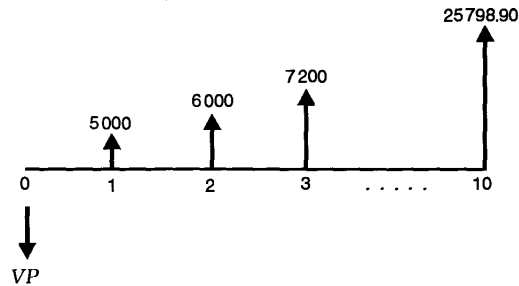
### 6.3.2. Fórmula del valor final del gradiente geométrico

Si deseamos calcular el valor final, basta multiplicar a  $VP$  por  $(1+i)^n$  y así tenemos:

$$VS = \frac{R[(1+G)^n(1+i)^{-n}-1]}{G-i} (1+i)^n = \frac{R[(1+G)^n-(1+i)^n]}{G-i} \text{ si } G \neq i \text{ También}$$

$$VS = \begin{cases} \frac{R[(1+G)^n-(1+i)^n]}{G-i} & \text{si } G \neq i \\ R(n)(1+i)^{n-1} & \text{si } G = i \end{cases}$$

**Ejemplo 6.7.** Hallar el valor presente de 10 pagos anuales, si el primer pago es de \$5.000 y cada pago subsiguiente crece un 20 %. Suponga una tasa de 20 %



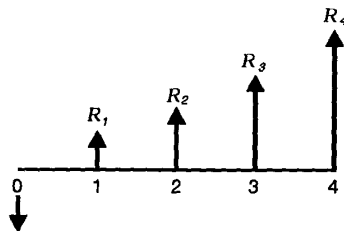
**Solución 6.7.** Como  $G = i = 20\%$  se tiene que  $VP = \frac{5000(10)}{(1+0,2)} = \$41,666,67$

**Ejemplo 6.8.** hallar el valor presente de 15 pagos que crecen un  $25\%$ , si el primer pago es de  $\$800$  y suponiendo una tasa del  $20\%$

**Solución 6.8.**  $VP = \frac{800[(1+0,25)^{15}(1+0,20)^{-15}-1]}{0,25-0,2} = \$13,516$

**Ejemplo 6.9.** Elaborar una tabla para amortizar la suma de  $\$100.000$  en 4 pagos, suponiendo una tasa efectiva del  $8\%$  y:

1. crecimiento geométrico de la cuota en  $10\%$
2. decrecimiento geométrico de la cuota en  $-10\%$



**Solución 6.9.**

$$a) 100,000 = \frac{R_1[(1+0,1)^4(1+0,08)^{-4}-1]}{0,1-0,08}$$

de donde



$$\begin{aligned}
R_1 &= \$26,261,47 \\
R_2 &= 26,261,47(1 + 0,1) = \$28,887,61 \\
R_3 &= 26,261,47(1 + 0,1)^2 = \$31,776,38 \\
R_4 &= 26,261,47(1 + 0,1)^3 = \$34,954,01
\end{aligned}$$

<i>Período</i>	<i>Saldo deuda</i>	<i>Intereses</i>	<i>Pago</i>	<i>Amortización</i>
0	100,000			
1	81,738,53	8,000,00	26,261,47	18,261,47
2	59,390,00	6,539,08	28,887,61	22,348,53
3	32,364,82	4,751,20	31,776,38	27,025,18
4	0,00	2,589,19	34,954,01	32,364,82

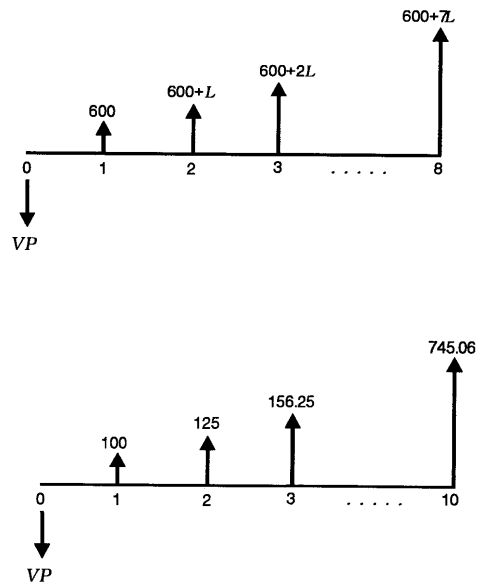
b)  $100,000 = \frac{R_1[(1+0,1)^4(1+0,08)^{-4}-1]}{-0,1-0,08}$

de donde

$$\begin{aligned}
R_1 &= \$34,762,02 \\
R_2 &= 34,762,02(1 - 0,1) = \$31,289,42 \\
R_3 &= 34,762,02(1 - 0,1)^2 = \$28,160,48 \\
R_4 &= 34,762,02(1 - 0,1)^3 = \$25,344,43
\end{aligned}$$

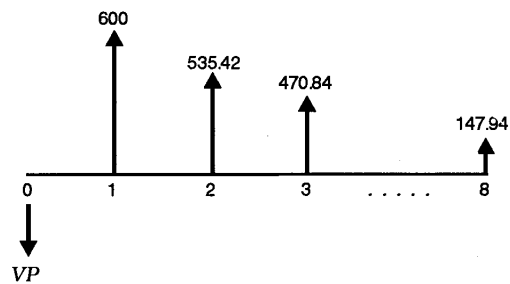
<i>Período</i>	<i>Saldo deuda</i>	<i>Intereses</i>	<i>Pago</i>	<i>Amortización</i>
0	100,000			
1	73,233,98	8,000,00	34,766,02	26,766,02
2	47,803,28	5,858,72	31,289,42	25,430,70
3	23,467,06	3,824,26	28,160,48	24,336,22
4	0,00	1,877,37	25,344,43	23,467,06

**Ejemplo 6.10.** ¿Cuánto debe crecer linealmente una serie de 8 pagos, efectuados al final del período y cuyo pago es de 600 para que, puesta en valor presente, sea equivalente a una serie de 10 pagos que crecen geométricamente en un 25 % y cuyo pago es de \$100?. Suponga una tasa del 3 % efectivo para el período.



**Solución 6.10.** Debemos igualar el valor de las dos series y despejar  $L$ .

$$600a\bar{s}|3\% + \frac{L}{0,03} [a\bar{s}|3\% - 8(1+0,03)^{-8}] = \frac{100[(1+0,25)^{10}(1+0,03)^{-10}-1]}{0,25-0,03}$$
  
 de donde se obtiene que  $L = -\$64,58$ , lo que significa que el gradiente es decreciente, como lo podemos ver en la siguiente gráfica:



## 6.4. Gradiente geométrico infinito

Una de las aplicaciones que tiene este tipo de gradiente está en el análisis sobre emisión de acciones. Sólo tiene sentido el análisis de valor presente.

$$VP = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R[(1+G)^n(1+i)^{-n}-1]}{G-i} = \frac{R}{G-i} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{1+G}{1+i} \right)^n - 1 \right]$$

Si  $G > i$  entonces la expresión  $\left( \frac{1+G}{1+i} \right)^n$  es mayor que 1 y la expresión no tendrá límite cuando  $n \rightarrow \infty$

Si  $G < i$  entonces la expresión  $\left( \frac{1+G}{1+i} \right)^n = 0$  porque el valor de la cantidad entre el paréntesis será menor de 1 de lo anterior se deduce:

$$VP = \frac{R}{G-i} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{1+G}{1+i} \right)^n - 1 \right] = \frac{R}{G-i} [0 - 1] = \frac{R}{G-i} = \frac{R}{i-G}$$

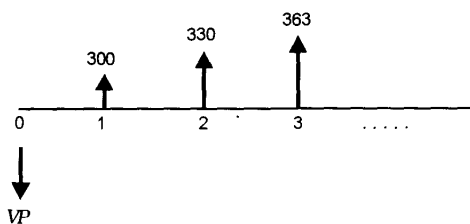
Cuando  $G = i$  la fórmula del valor presente es:

$$VP = \frac{R(n)}{1+i} \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(n)}{1+i} = \infty$$

Significa que no hay límite cuando  $G = i$ .

$$VP = \begin{cases} \frac{R}{i-G} & \text{si } G < i \\ \infty & \text{si } G \geq i \end{cases}$$

**Ejemplo 6.11.** Hallar el valor presente de una serie infinita de pagos que crecen un 10 %, si la tasa de interés es de 20 % y el primer pago es de \$300.



**Solución 6.11.** Significa que, si colocamos \$3.000 al 20 % podremos hacer infinito número de retiros crecientes, en un 10 %, con un primer retiro de un 10 %.

como  $G = 20\%$  se tiene que  $VP = \frac{5,000(10)}{(1+0,2)} = \$41,666,67$

## Capítulo 7

# TERMINOS O DEFINICIONES IMPORTANTES

### 7.1. Bolsa de Valores

Es una sociedad anónima vigilada por la Superintendencia de Valores y con mecanismos de autorregulación establecidos por la Cámara de bolsa. Su objetivo principal es el de fomentar el mercado abierto, organizado y controlado de títulos de valores entre los comisionistas de la bolsa, quienes actúan en representación de los propietarios de los títulos de valores.

#### 7.1.1. Comisionista de la bolsa

Es una persona que actúa como intermediario entre el vendedor y el comprador de un título de valor. Por tanto, el comisionista de la bolsa debe ser asesor financiero de su cliente.

Operaciones que realiza la bolsa de valores: La bolsa de valores realiza dos tipos de operaciones

1. De renta variable: son aquellas que se realizan con acciones. El rendimiento sólo se determina cuando se hace la venta.
2. De renta fija: El rendimiento se puede determinar al momento de su adquisición o cuando se negocia en la bolsa de valores. Entre estos títulos se tienen los siguientes:
  - Aceptaciones bancarias
  - CDT
  - Bonos
  - Certificados de reembolso tributario
  - Títulos de participación

- Títulos de apoyo cafetero
  - Títulos de devolución de impuestos
3. Acción: Es un título de valor que acredita los derechos que una persona natural o jurídica tiene sobre una sociedad anónima.
  4. Dividendo: Es una cuota de las ganancias líquidas obtenidas por la sociedad anónima y pagada periódicamente a cada uno de los propietarios de la sociedad, en proporción al número de acciones que posea. El valor del dividendo lo establece la asamblea general de accionistas.
  5. ADR: Es un certificado negociable el cual representa el valor de una acción ordinaria o preferencial de cualquier compañía no estadounidense.
  6. CERT: Es el certificado de reembolso tributario. Este documento es emitido por el Banco de la República y representa un subsidio que entrega la nación para incentivar algunas exportaciones menores. Sólo tiene efectos para pago de algunos impuestos.
  7. Emisor: Es la entidad autorizada por la ley para emitir papel moneda o títulos valores.
  8. Mercado Primario: Es aquél en el cual la negociación de un título se hace directamente con el emisor.
  9. Liquidez primaria: Se dice que un título tiene liquidez primaria cuando en ese momento se puede remitir ante el emisor.
  10. Mercado secundario: Es aquél en el cual la negociación de un título se hace con otras instituciones diferentes al emisor. Estas negociaciones se hacen generalmente en la bolsa de valores, la cual es prenda de garantía para la transparencia de dicha transacción.
  11. Mercado negro: Es aquél en el cual la negociación de un título se hace con instituciones o agentes por fuera de la bolsa de valores. En este mercado se corren todos los riesgos posibles.
  12. Liquidez secundaria: Generalmente todos los títulos tienen liquidez secundaria, es decir, se pueden negociar en la bolsa de valores antes de su vencimiento.
  13. Mercado firme: Es aquél en el cual hay más compradores que vendedores, lo cual trae como consecuencia lógica una alza en el precio de los títulos registrados en la bolsa de valores (ley de oferta y demanda).
  14. Mercado ofrecido: es el contrario del mercado firme. Por tanto, la tendencia de las cotizaciones es a la baja.

15. Operación de carrusel: Es la que tiene lugar cuando un grupo de inversionistas se comprometen a transferir entre ellos la posesión de un título de renta fija, en tal forma que el plazo total para el vencimiento del título coincida con la sumatoria de los periodos durante los cuales cada uno de los participantes en la operación tuvo en su poder el título.
16. Operación repo: En esta operación, quien compra el título se obliga a transferirlo nuevamente al vendedor inicial, en un plazo y condiciones previamente establecidas.
17. Operación swaps: Es la que tiene por objeto el de mejorar las condiciones de rentabilidad, plazo y valor futuro de los títulos que conforman un portafolio.
18. Adicional a las cartas de crédito, a raíz de la apertura económica, para el caso colombiano, se irán imponiendo otras modalidades de crédito. Serán formas de transferir ahorro externo hacia el país. Veamos algunas de ellas:

- Heading. o Cobertura

Un productor nacional debe estar cubierto en su exposición en moneda fuerte. Si debe dólares, debe estar seguro de contar con activos en dólares, o fácilmente valorizables con los cambios en la paridad del dólar. Debe contar, o bien con acreencias en dólares, por ser exportador, o poseer inventarios importados , cuyo precio sea fácilmente el-eable en caso de una fuerte devaluación.

- Swap

Esta palabra tiene una traducción parecida a çambalache.º çambio”. tiene muchos significados. El que mas nos interesa en finanzas es la posibilidad de conseguir créditos en moneda local al amparo de alguna garantía dada en el exterior. Un swap puro es aquel en que el empresario nacional le hace un deposito a un banco nacional en el extranjero, a través de su filial externa o de un corresponsal, y el banco nacional le corresponde con un crédito en moneda local.

Las dos operaciones pueden devengar intereses corrientes en cada mercado. El valor del Swap se ajusta de tiempo en tiempo con la devaluación. En esta operación pueden omitirse los bancos y efectuarse entre una compañía extranjera y una nacional. Otro tipo de Swap, no tan limpio, es aquel en el cual una compañía nacional da un banco extranjero una garantía nacional, por ejemplo un terreno, el banco extranjero le otorga un crédito en dólares, la compañía lo deja en deposito en el banco extranjero, o dispone de él en dólares, o consigue un crédito en pesos con el banco nacional, corresponsal del extranjero.

- Forwards

En Colombia Esta operación que tiene la connotación de (IR hacia adelante), consiste en protegerse de eventuales cambios en la paridad de la moneda en que se está endeudado, comprando posiciones que le permitan saber con certeza cuánto pagará

en el momento del vencimiento de la deuda. Por ej. si un importador está abriendo una carta de crédito en yenes, le conviene acudir al mercado de futuros y comprar su posición en yenes, versus dólares, para la fecha en que estima se utilizará la carta de crédito. Comprar la posición no significa adquirir los yenes de una vez, sino comprometerse a adquirirlos en un a fecha determinada.

## Capítulo 8

# CONCLUSIONES

La realización de este proyecto fue muy importante ya que no solo me introdujo en un campo tan interesante como es la Matemática Financiera y sus aplicaciones, sino también me sirvió para organizar mis actividades financieras y adquirir el conocimiento y manejo de Latex (programa en el que fue realizado) un programa indispensable para la elaboración de proyectos, artículos, libros entre otros documentos con una buena presentación. El manejo del dinero es una cuestión que

interesa o debería interesar a todo el mundo ¿a quien no le importa su situación económica?, ya que sino buscamos acrecentar el capital por lo menos debemos encontrar la forma de mantenerlo con su mismo valor a través del tiempo y esto es teniendo en cuenta la devaluación y la revaluación del mismo. El análisis y la solución de problemas financieros, cuyos fundamentos son la materia

de este trabajo, se basan en la resolución de una ecuación algebraica denominada ecuación de equivalencia, cuya solución se puede describir en un algoritmo de cálculo y cifrar en lenguaje de programación de computadoras, acción que facilita los cálculos y permite conocer, de una manera rápida y precisa, los cambios en la respuesta de un problema financiero debidos a cambios en los valores de sus variables.

Este trabajo me deja grandes expectativas y la inquietud de muchos temas que se deben estudiar en forma detallada para su aplicación a diversos campos.



# Bibliografía

- [CISSELL] CISSELL AND FLASPOHLER, *Matemáticas Financieras*, México CECSA, 1987.
- [Highland] HIGHLAND, E., AND ROSENBAUM R, *Matemáticas Financieras*, Prentice Hall: Mexico, 1.985.
- [Gómez] GÓMEZ CEBALLOS, J. ALBERTO, *Matemáticas Financieras*, Tercera Edición. Armenia: 1.984.
- [Schall] scSchall Lawrence y Haley, Charles W, , *Administración Financiera*. Mexico: McGrawHill,19.75.
- [Newnan] NEWMAN, DONALD E, *Análisis económico en Ingeniería.*, Segunda Edición.Mexico: McGrawHill, 1.983.
- [Zarruk] ZARRUK GÓMEZ, CARLOS ALBERTO, *La corrección monetaria y el crédito en el UP-AC.*, Primera Edición, Bogotá: 1.986.
- [Vélez] VÉLEZ, GERMÁN ARBOLEDA, *Fundamentos de Ingeniería Financiera.*, Séptima Edición.
- [Díez] DÍEZ DE CASTRO, LUIS. MASCARREÑAS, JUAN, *Ingeniería Financiera La gestión en los mercados internacionales.*, Segunda Edición. McGrawHill.
- [Baca] BACA, GUILLERMO, *Ingeniería Económica. Cuarta Edición.*, Fondo Educativo Panamericano. 1.996.
- [Taylor] TAYLOR, GEORGE A, *Ingeniería Económica.*, Mexico, Limusa-Wiley, 1.972.
- [Varela] VARELA V., RODRIGO, *Evaluación económica de alternativas operacionales y de proyectos de inversión. Bogotá.*, Colombia: Editorial Norma, 1.982.
- [Gutierrez] GUTIERREZ M., LUIS F, *Finanza Prácticas para Países en Desarrollo.*, Colombia: Grupo Editorial Norma, 1.992.

- [Tellez] TELLEZ L. MIGUEL., *Finanzas de la construcción. Bogotá*, Colombia: Bhandar Editores, 1.993.
- [LATEX] RODRIGO DE CASTRO KORGİ, *El Universo Latex*, Panamericana Formas e impresos S.A. 2003