Optimización[1].

Examen Final

Nombre: 28 de noviembre de 2008

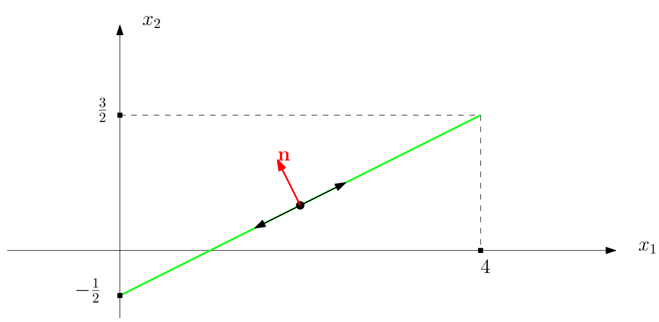
---

1. **(17 puntos)** Para el siguiente problema de optimización sin restricciones:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & x_1 e^{-x_2} \\ \text{sujeto a} & x_1 - 2x_2 = 1 \\ & 0 \le x_1 \le 4 \end{array}$$

   a) Grafique el conjunto factible y halle las direcciones factibles para un punto factible (x_1, x_2) con $0 < x_1 < 4$.
   b) Encuentre un punto factible (x_1, x_2) con $0 < x_1 < 4$ que cumpla la condición necesaria de primer orden para un máximo local.

   a) El conjunto factible es el segmento de recta mostrado en la figura. Una dirección



factible $\mathbf{d}$ en un punto no extremo del segmento de recta debe ser perpendicular al vector $\mathbf{n} = [1\ -2]$ que define la recta, es decir:

$$\langle \mathbf{d}, [1\ -2] \rangle = d_1 - 2d_2 = 0 \Rightarrow d_1 = 2d_2$$

Por ejemplo podemos escoger $\mathbf{d} = [2\ 1]$.

   b) Observe que si $\mathbf{d}$ es dirección factible en un punto no extremo del segmento de recta, $-\mathbf{d}$ también lo es. Luego la condición de primer orden que debe cumplir un máximo local en este caso es $\nabla f^T \mathbf{d} = 0$.

Tenemos $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} e^{-x_2} \\ -x_1 e^{-x_2} \end{bmatrix}$, entonces:

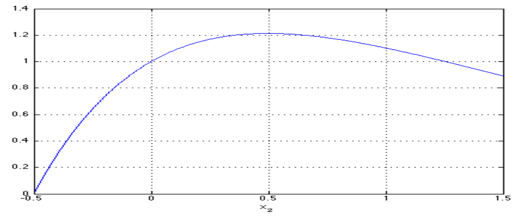
$$\nabla f(x_1, x_2)^T \mathbf{d} = 2d_2 e^{-x_2} - d_2 x_1 e^{-x_2} = (2 - x_1) d_2 e^{-x_2} = 0$$

donde he usado $d_1 = 2d_2$. Luego $x_1 = 2$ y reemplazando en la restricción se tiene $x_2 = \frac{1}{2}$.

---

[1] Usted debe justificar todas sus respuestas. Una respuesta que aparezca de la nada no tiene ningún valor.

Note que usando la restricción podemos despejar $x_1 = 1 + 2x_2$ y escribir la función objetivo en términos de una variable: $f(x_2) = (1 + 2x_2)e^{-x_2}$. Derivando e igualando a cero tenemos $x_2 = \frac{1}{2}$ y reemplazando de nuevo $x_1 = 2$.



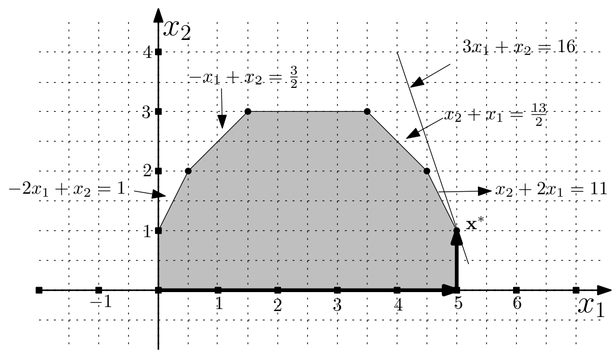
2. **(17 puntos)** Considere la minimización de la función cuadrática en $\mathbb{R}^2$, $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x}$. Los valores propios de $\mathbf{Q}$ son $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 1$ y los vectores propios correspondientes son $\mathbf{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y $\mathbf{v}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Suponga que se corre Steepest Descent dos veces desde los puntos iniciales $\mathbf{x}_1 = (\frac{9}{\sqrt{2}}, \frac{11}{\sqrt{2}})$ y $\mathbf{x}_2 = (-\frac{9}{\sqrt{2}}, \frac{11}{\sqrt{2}})$. Para cuál de estos puntos iniciales es la convergencia al mínimo de f más rápida?

Expresamos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ en términos de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 = 10\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\
\mathbf{x}_2 &= \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + 10\mathbf{v}_2
\end{aligned}$$

Observamos que $\mathbf{x}_2$ está casi alineado con el vector propio correspondiente al valor propio más pequeño, mientras que $\mathbf{x}_1$ está casi alineado con el vector propio correspondiente al valor propio más grande, y $\lambda_1 \gg \lambda_2$, luego la convergencia es mucho más lenta comenzando en $\mathbf{x}_2$ que comenzando en $\mathbf{x}_1$.

3. **(16 puntos)** Considere el problema de optimización $\max 3x_1+x_2$ sujeto a $(x_1,x_2)\in C$ donde C es el conjunto mostrado en la figura:



a) Escriba este problema como un programa lineal en forma estándar.

b) Si la SBF inicial está dada por las variables de holgura (y_i), liste la secuencia de SBFs visitadas por el método simplex (que escoje siempre la variable libre correspondiente al costo reducido más negativo) en este problema.

a) (ver figura)

$$
\begin{array}{llllllllll}
\text{mín} & -3x_1 & -x_2 & & & & & & & \\
\text{sujeto a} & & & & & & & & & \\
 & -2x_1 & +x_2 & +y_1 & & & & & & =1 \\
 & -x_1 & +x_2 & & +y_2 & & & & & =\frac{3}{2} \\
 & & x_2 & & & +y_3 & & & & =3 \\
 & x_1 & +x_2 & & & & +y_4 & & & =\frac{13}{2} \\
 & 2x_1 & +x_2 & & & & & +y_5 & & =11 \\
 & x_1 & & & & & & & +y_6 & =5 \\
 & x_1, & x_2, & y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5, & y_6 & \geq 0
\end{array}
$$

b) Geométricamente vemos que $\mathbf{x}^*=(5,1)$. Comenzando en $(x_1,x_2,y_1,\ldots,y_6)=(0,0,1,\frac{3}{2},3,\frac{13}{2},11,5)$, tenemos los costos reducidos $r_1=-3$ y $r_2=-1$, luego la variable entrante es x_1, y el simplex se desplaza al punto $x_1=5$, $x_2=0$, donde y_6 se vuelve libre. En el siguiente paso alcanza la SBF óptima en $\mathbf{x}^*$, donde x_2 ha entrado a la base y y_5 ha salido. Luego la secuencia de variables básicas en las SBFs es $(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6)\longrightarrow(x_1,y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)\longrightarrow(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3,y_4)$

4. **(Bono: 10 puntos)** Considere el problema de maximización de entropía sujeto a restricciones lineales:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f_0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{1}^T\mathbf{x} = 1 \end{aligned}$$

Muestre que la solución óptima tiene la forma:

$$x_i^* = \frac{\exp\left(-\mathbf{a}_i^T \boldsymbol{\lambda}^*\right)}{Z}$$

donde Z es un factor de normalización tal que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

(Ver apuntes de clase para la solución.)