Universidad de los Andes
Departamento de Ingeniería Industrial
Probabilidad y Estadística I (IIND2106)
Profesor Coordinador: Mario Castillo
Profesores: Astrid Bernal, Carlos Castellanos, Fabio Lagos, María Alejandra López, Gonzalo Torres, Hernando Mutis.
Segundo semestre de 2015

Complementaria 8

Ejercicios sobre variables aleatorias conjuntas continuas, función de densidad conjunta y función de probabilidad acumulada conjunta. Funciones condicionales. Ejercicios sobre valor esperado, covarianza, correlación.

Punto 1

Una compañía vende paquetes de frutos secos mixtos que contienen almendras, maní y pistachos. Suponga que el peso neto de cada paquete es exactamente de una libra, pero la contribución en peso de cada tipo de fruto es aleatoria. De esta manera, un modelo de probabilidad conjunta que represente la contribución del peso de almendras y de pistachos al paquete de frutos secos, indica la contribución del maní. Se define X como la variable aleatoria que representa el peso de las almendras en un paquete seleccionado al azar y se define Y como la variable aleatoria que representa el peso de los pistachos en un paquete seleccionado al azar. A continuación se presenta la función de distribución de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X y Y:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k\mathrm{x} & 0 \le x \le 1 \quad , \quad \mathrm{x}^2 \le \mathrm{y} \le \frac{1}{2}\mathrm{x} + \frac{1}{2} \\ & 0 \qquad\qquad\qquad dlc \end{cases}$$

a. Encuentre el valor de k para que la función de densidad de probabilidad conjunta esté correctamente definida.

$$\int_{R(Y)}\int_{R(X)} f_{xy}(X,Y)dydx = 1$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}} kx\, dydx = 1$$

Desarrollo de la primera integral:

$$\mathrm{kx}\int_{\mathrm{x}^2}^{\frac{\mathrm{x}}{2}+\frac{1}{2}} 1\,\mathrm{dy} = \mathrm{kx} * y\Big|_{\mathrm{x}^2}^{\frac{\mathrm{x}}{2}+\frac{1}{2}} = \mathrm{kx}\left(\frac{\mathrm{x}}{2}+\frac{1}{2}-\mathrm{x}^2\right) = -kx^3+\frac{kx^2}{2}+\frac{kx}{2}$$

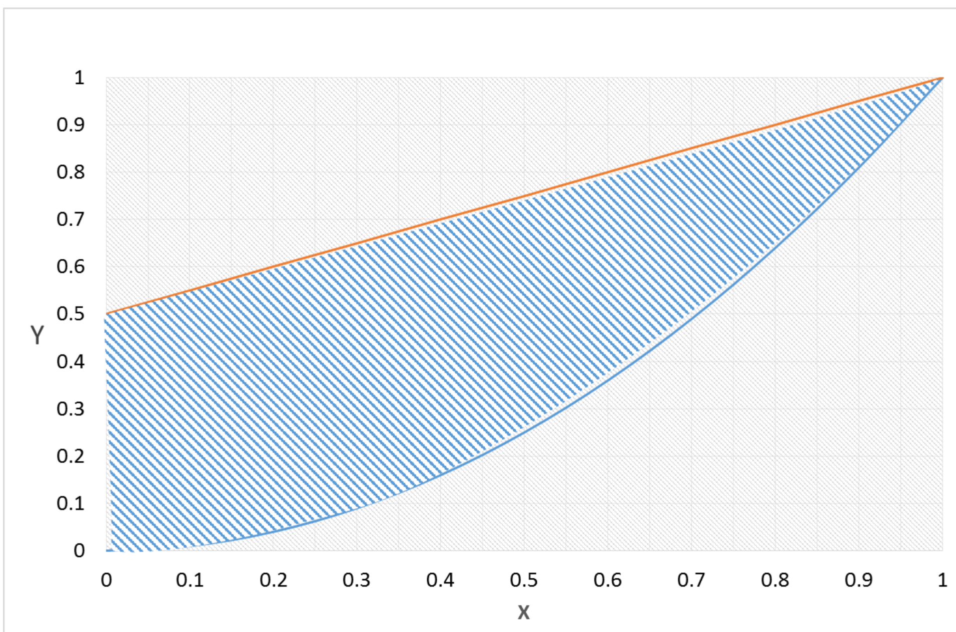
Desarrollo de la segunda integral:

$$\int_0^1 -kx^3+\frac{kx^2}{2}+\frac{kx}{2}\,\mathrm{dx} = -\frac{kx^4}{4}+\frac{kx^3}{6}+\frac{kx^2}{4}\Big|_0^1 = \frac{k}{6} = 1 \rightarrow \mathrm{k} = 6$$
$$= 6$$

La función correctamente definida con el valor de k es:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 6x \quad 0 \le x \le 1 \quad , \quad x^2 < y < \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \\ \qquad 0 \qquad\qquad\qquad dlc \end{cases}$$

b. Grafique la región donde se encuentra definida la función de densidad de probabilidad conjunta.



c. Encuentre las funciones de densidad de probabilidad marginal de las variables aleatorias X y Y.

Para encontrar la función de probabilidad marginal de Y, El rango de X esta partido en 2:

1) $0 \le x \le \sqrt{y}$, cuando 0$\le y \le 0.5$
2) $2y-1 \le x \le \sqrt{y}$,cuando $0.5 \le y \le 1$

Cuando 0$\le y \le 0.5$

$$f_Y(y) = \int_0^{\sqrt{y}} 6x \ dx = 3x^2|_0^{\sqrt{y}} = 3y$$

Cuando $0.5 \leq y \leq 1$

$$f_Y(y) = \int_{2y-1}^{\sqrt{y}} 6x \ dx = 3x^2|_{2y-1}^{\sqrt{y}} = 3(y) - (2y-1)^2 = 3y - 3(4y^2 - 4y + 1)$$

$$= -3(4y^2 - 5y + 1)$$

Por lo tanto la función marginal de la variable aleatoria Y es:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3y & 0 \leq y \leq 0.5 \\ -3(4y^2 - 5y + 1) & 0.5 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

La función marginal de la variable aleatoria X:

$$f_X(x) = \int_{x^2}^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}} 6x \ \ dy = 6xy|_{x^2}^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}} = 6x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} - x^2\right) = 3x(-2x^2 + x + 1) \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x(-2x^2 + x + 1) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & d.l.c \end{cases}$$

d. ¿Las variables X y Y son independientes?

$$f_{XY}(x, y) = f_Y(y) * f_X(x)$$

$$6x \neq 3y * 3x(-2x^2 + x + 1)$$

El producto de funciones marginales de X y Y no es igual a la función de probabilidad conjunta, por lo tanto concluimos que las variables no son independientes

e. ¿Cuál es la probabilidad de que una bolsa de snacks contenga menos de 0.5 lb de pistachos?

$$P(Y < 0.5) = \int_0^{\sqrt{0.5}} \int_{x^2}^{0.5} 6x \ dydx$$

$$P(Y < 0.5) = \int_0^{\sqrt{0.5}} 6xy|_{x^2}^{0.5} dx = \int_0^{\sqrt{0.5}} -6x(x^2 - 0.5)\, dx = \int_0^{\sqrt{0.5}} -6x^3 + 3x\, dx$$

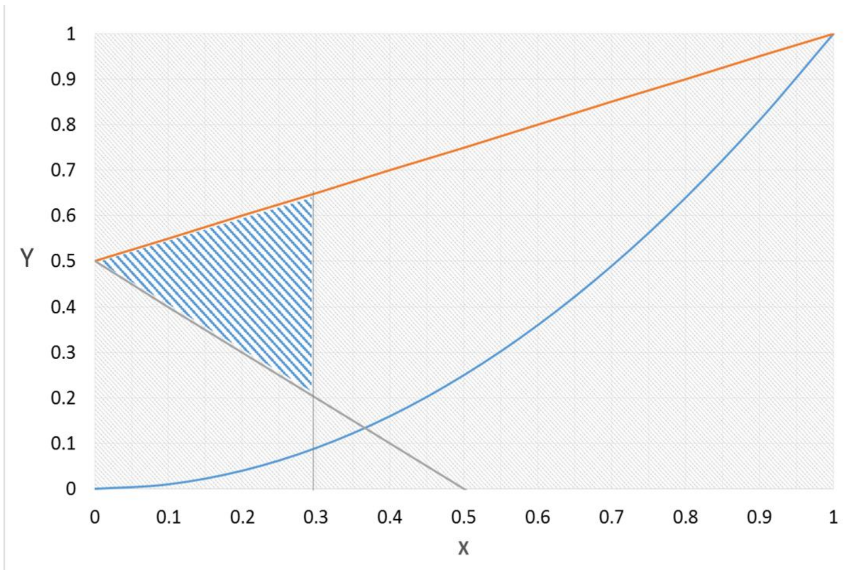
$$= \frac{3x^2}{2} - \frac{6x^4}{4}\Bigg|_0^{\sqrt{0.5}} = 0.37$$

Por lo tanto la probabilidad de que una bolsa contenga menos de 0.5 lb de pistachos es de 0.37.

f. ¿Cuál es la probabilidad de que una bolsa contenga menos de 0.5 lb de maní y menos de 0.3 lb de almendras?

Se sabe que una bolsa de 1 lb de snacks contiene una mezcla entre pistachos, almendras y maní. La probabilidad de que la bolsa contenga menos de 0.5 lb de maní, es equivalente a la probabilidad de que la bolsa contenga más de 0.5 lb de mezcla de almendras y pistachos: $P(X+Y>0.5, X<0.3)$.

El primer paso para hallar esta probabilidad, es graficar para poder observar el área de integración de acuerdo a la probabilidad de interés, la gráfica de las funciones se muestra a continuación:



$$P(X+Y>0.5, X<0.3) = \int_{0}^{0.3}\int_{0.5-x}^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}} 6x \, dydx$$

Desarrollando la primera integral:

$$\int_{0.5-x}^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}} 6x \, dy = 6xy|_{0.5-x}^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}} = 9x^2$$

Desarrollando la segunda integral:

$$\int_{0}^{0.3} 9x^2 dx = 3x^3|_{0}^{0.3}$$

$$P(X+Y>0.5, X<0.3) = 0.081$$

g. Si se sabe que en una bolsa de snacks mixtos hay 0.2 libras de almendras, ¿cuál es la probabilidad de que en el paquete se encuentren entre 0.3 y 0.6 libras de pistachos?

$$f_{Y|X} = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

$$f_{Y|X} = \frac{6x}{3x(-2x^2 + x + 1)}$$

$$= \frac{6x}{-6x^3 + 3x^2 + 3x}$$

$$= \frac{6x}{x(-6x^2 + 3x + 3)}$$

$$= \frac{6}{-6x^2 + 3x + 3}$$

$$= \frac{2}{-2x^2 + x + 1}$$

$$f_{Y|X} = \frac{2}{-2x^2 + x + 1}$$

$$0 \leq x \leq 1, x^2 < y < \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

La probabilidad condicional solicitada se encuentra reemplazando el valor dado de la variabilidad aleatoria X.

$$P(0.3 < Y < 0.6|X = 0.2) = \int_{0.3}^{0.6} \frac{2}{-2(0.2)^2 + (0.2) + 1} dy$$

Desarrollando la integral:

$$\int_{0.3}^{0.6} \frac{2}{-2(0.2)^2 + (0.2) + 1} dy = 1.786y|_{0.3}^{0.6} = 0.536$$

h. Si se sabe que en una bolsa de snacks contiene 0.2 libras de almendras, ¿qué cantidad de pistachos se espera encontrar en la bolsa?

De acuerdo con la función de probabilidad condicional hallada en el literal anterior:

$$E(Y|X = 0.2) = \int_{0.04}^{0.6} \frac{2}{-2x^2 + x + 1} y dy = 0.32$$

Se espera que si en un paquete hay 0.2 libras de almendras, en promedio hayan 0.319 libras de pistachos.

i. Halle el coeficiente de correlación de las variables aleatorias X y Y, e interprete el resultado.

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{COV}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$\mathrm{COV}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

$$\mathrm{E}(XY) = \int\limits_{R(Y)} \int\limits_{R(X)} u(X,Y) * f_{xy}(X,Y)dxdy$$

$$\mathrm{E}(XY) = \int\limits_{R(Y)} \int\limits_{R(X)} xy * f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}} 6x^2 y dy\,dx$$

Desarrollando la primera integral:

$$\int\limits_{x^2}^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}} 6x^2 y dy = 3x^2 y^2 |_{x^2}^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} x^2(-4x^4 + x^2 + 2x + 1)$$

Desarrollando la segunda integral:

$$E(XY) = \int\limits_0^1 \frac{3}{4} x^2(-4x^4 + x^2 + 2x + 1)dx = \frac{3}{4}\left(\frac{4x^7}{7} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 0.346$$

Valor esperado de X:

$$E(X) = \int\limits_{R(X)} x * f_X(x)$$

$$E(X) = \int_0^1 x * 3x(-2x^2 + x + 1)\,dx$$

$$E(X) = 3\left(-\frac{2x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 0.55$$

Valor esperado de X^2:

$$E(X^2) = \int\limits_{R(X)} x^2 * f_X(x)$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 * 3x(-2x^2 + x + 1)\,dx = 0.35$$

Valor esperado de Y:

$$E(\mathrm{Y}) = \int_{R(Y)} y * f_Y(y)$$

$$E(Y) = \int_0^{0.5} y * 3y\, dy + \int_{0.5}^{1} y * (-3(4y^2 - 5y + 1))\, dy$$

$$E(Y) = \mathrm{y}^3|_0^{0.5} + -3\left(y^4 - \frac{5y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{0.5}^{1} = 0.125 + 0.437 = 0.56$$

Valor esperado de Y^2:

$$E(\mathrm{Y}^2) = \int_{R(Y)} y^2 * f_Y(y)$$

$$E(\mathrm{Y}^2) = \int_0^{0.5} y^2 * 3y\, dy + \int_{0.5}^{1} y^2 * (-3(4y^2 - 5y + 1))\, dy = 0.046 + 0.315 = 0.361$$

$$\mathrm{VAR(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0.35 - (0.55)^2 = 0.0475}$$

$$\mathrm{VAR}(Y) = \mathrm{E(Y^2) - E(Y)^2 = 0.361 - (0.56)^2 = 0.0474}$$

$$\mathrm{COV(X, Y) = 0.346 - (0.55)(0.56) = 0.038}$$

$$\rho_{\mathrm{XY}} = \frac{0.038}{0.218 * 0.217} = 0.803$$

El coeficiente de correlación indica que hay una relación lineal positiva entre las variables, es decir directamente proporcional. El valor es cercano a 1, lo cual indica que hay una fuerte correlación entre las variables.

Punto 2

Una fábrica de pisos y paredes cerámicos para construcción estima que el peso de su producto (en toneladas) que transporta desde la fábrica hasta el cliente se puede modelar como una variable aleatoria con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f_Y(y) = \frac{1}{10} \qquad 0 \leq y \leq 10$$

En cada viaje, el tiempo (en horas) de recorrido hasta la obra se puede modelar como una variable aleatoria X, la cual se encuentra uniformemente distribuida entre cero y una quinta parte de la cantidad del peso del producto.

a. Halle la función de densidad de probabilidad conjunta de X y Y.

$$f_Y(y) = \frac{1}{10} \qquad 0 \le y \le 10$$

$$f_{X|Y}(x; y) = \frac{1}{\frac{y}{5} - 0} = \frac{5}{y} \qquad 0 \le x \le \frac{y}{5}$$

Dado que se conoce la función de probabilidad marginal de Y, y la función condicional, se pude despejar la función de probabilidad conjunta:

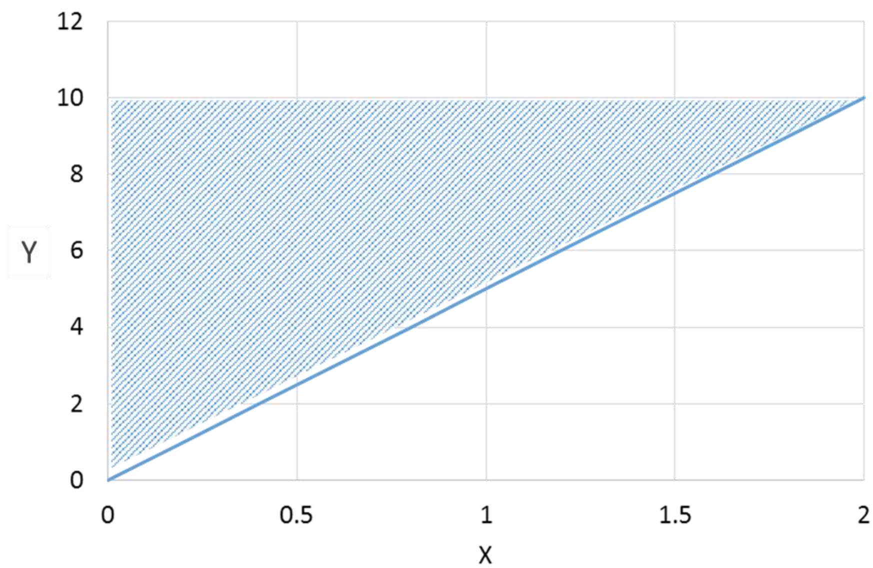
$$\mathrm{f}_{X|Y}(\mathrm{x}; \mathrm{y}) = \frac{\mathrm{f}_{XY}(\mathrm{x}, \mathrm{y})}{\mathrm{f}_Y(\mathrm{y})}$$

$$\mathrm{f}_{XY}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{f}_{X|Y}(\mathrm{x}; \mathrm{y}) * \mathrm{f}_Y(\mathrm{y})$$

$$\mathrm{f}_{XY}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \frac{5}{y} * \frac{1}{10} = \frac{1}{2y}$$

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\mathrm{y}} & 0 \le x \le \frac{\mathrm{y}}{5} \qquad 0 \le y \le 10 \\ 0 & d.l.c. \end{cases}$$

b. Grafique la región donde se encuentra definida la función de densidad de probabilidad conjunta.



c. Verifique que la función de densidad de probabilidad conjunta está correctamente definida.

$$\int_{\mathrm{R(Y)}} \int_{\mathrm{R(X)}} \mathrm{f}_{XY}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \, \mathrm{dx} \, \mathrm{dy} = 1$$

$$\int_{0}^{10}\int_{0}^{y/5}\frac{1}{2y}\,\mathrm{dxdy}$$

Desarrollando la primera integral:

$$\int_{0}^{y/5}\frac{1}{2y}\,\mathrm{dx}=\frac{1}{2y}x\Big|_{0}^{y/5}=\frac{1}{10}$$

Desarrollando la segunda integral:

$$\int_{0}^{10}\frac{1}{10}dy=\frac{1}{10}y\Big|_{0}^{10}=1$$

d. Halle la función de probabilidad marginal de X.

Para hallar la función de densidad marginal de X:

$$\int_{R(y)}\mathrm{f}_{xy}(X,Y)\mathrm{dy}$$

$$f_X(x)=\int_{5x}^{10}\frac{1}{2y}\,\mathrm{dy}=\frac{\log(y)}{2}\Bigg|_{5x}^{10}=\frac{1}{2}-\frac{\log(5x)}{2}$$

$$\mathrm{f}_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{\log(5x)}{2} & 0\le x\le 2\\ 0 & d.l.c\end{cases}$$

e. ¿Son Las variables X y Y independientes entre sí?

$$\mathrm{f}_{XY}(x,y)=\mathrm{f}_Y(y)*\mathrm{f}_X(x)$$

$$\frac{1}{2y}\neq\frac{1}{2}-\frac{\log(5x)}{2}*\frac{1}{10}$$

El producto de funciones marginales de X y Y no es igual a la función de probabilidad conjunta, por lo tanto concluimos que las variables no son independientes.