

# ANADEC

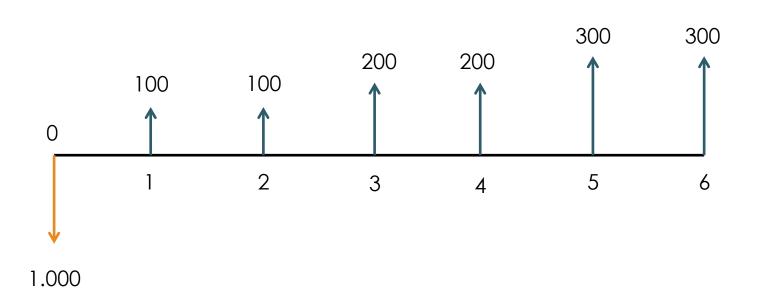
Análisis de Decisiones de Inversión

- Prof. Nicolás Villarreal D.

1



¿Invertiría usted en este proyecto?





- Si no se cuenta con información adicional, no se podrá dar una respuesta técnica a la anterior pregunta.
- Es importante recordar los conceptos vistos hasta ahora:
  - -VDT
  - -Costo de Oportunidad
  - -La tasa de interés
- Es importante recordar que existe una estrecha relación entre los anteriores elementos.



- Trayendo a colación los anteriores conceptos, para cualquier agente económico el dinero pierde valor en el tiempo.
- Es decir, sumas de dinero en diferentes momentos del tiempo no son directamente comparables.
- No obstante, en la vida práctica es necesario manipular cantidades monetarias que están puestas en diferentes momentos del tiempo.

¿Cómo se puede hacer lo anterior sin violar NUNCA el VDT?



#### Las relaciones de equivalencia

- Las matemáticas financieras nos permiten manejar y comparar cantidades monetarias a lo largo del tiempo.
- Para su uso técnico y adecuado, se deben tener en cuenta ciertas consideraciones:

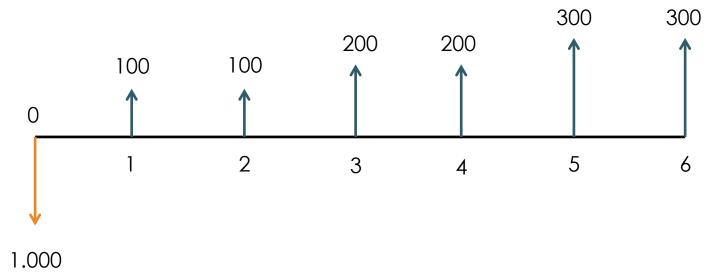
Supuesto 1: Se asume reinversión de interés.

Supuesto 2: Se asume interés vencido.

Supuesto 3: La tasa de interés permanece constante durante el periodo de análisis.



Volvamos al ejemplo anterior



¿Es correcto afirmar que al semestre gano 1.200 con rentabilidad del 20%?



Valor Presente (VP)

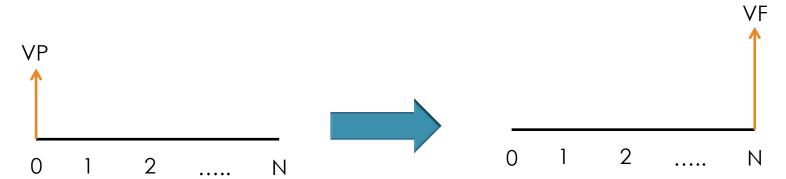
&

Valor Futuro (VF)



### ¿Cuál es el valor futuro equivalente a un valor presente?

Es la relación de equivalencia más básica y a su vez la más importante a la hora de entender las demás equivalencias.





Matemáticamente, se tiene que:

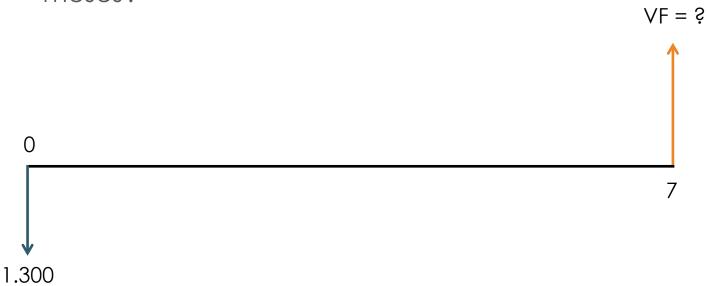
$$V_f = f(V_p, i, n)$$

$$V_f = V_p (1+i)^n$$

9



■ Ejemplo: Usted depositó 1'300.000 en una cuenta de ahorros que rinde 10% NA/SV. ¿Cuánto tendría a los 7 meses?



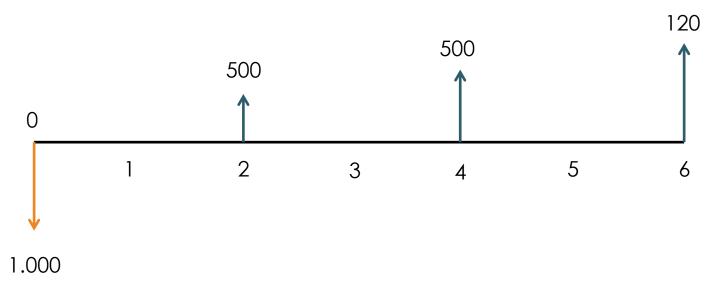


■ Ejemplo: Usted depositó 1'300.000 en una cuenta de ahorros que rinde 10% NA/SV. ¿Cuánto tendría a los 7 meses?

$$V_f = 1.300(1 + 0.82\%)^7$$
  
 $V_f = 1.376, 15$ 



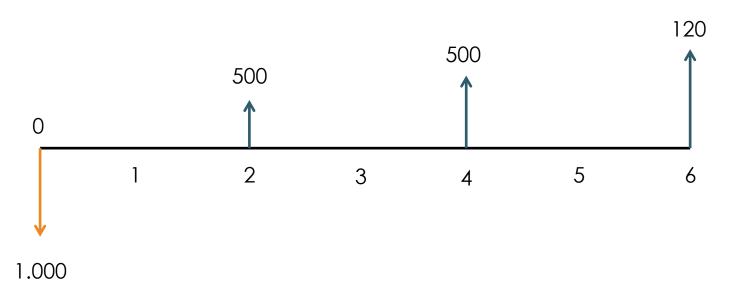
■ Ejemplo 2: Usted se enfrenta a los siguientes flujos mensuales de efectivo. Si su costo de oportunidad es 12% NA/TV, ¿Cuál es el valor futuro de sus flujos de efectivo totales?





$$V_f = -1.000(1+0.99\%)^6 + 500(1+0.99\%)^4 + 500(1+0.99\%)^2 + 120$$

$$V_f = 79$$





### ¿Cuál es el valor presente equivalente a un valor futuro?

■ De igual manera, si se tiene un valor futuro, es de interés encontrar su valor equivalente en valor presente. Esto no es más que la relación inversa de la anterior fórmula.





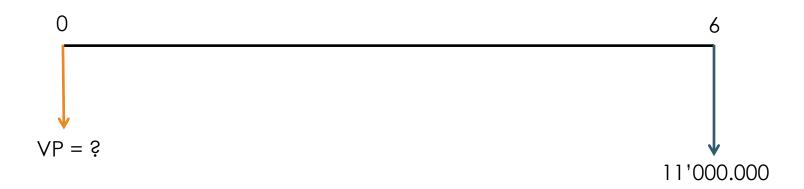
Matemáticamente, se tiene que:

$$V_p = f(V_f, i, n)$$

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n}$$



■ Ejemplo: Si su costo de oportunidad es 10% E.S., cuál es el valor presente del pago de matrícula que hará usted en seis meses?





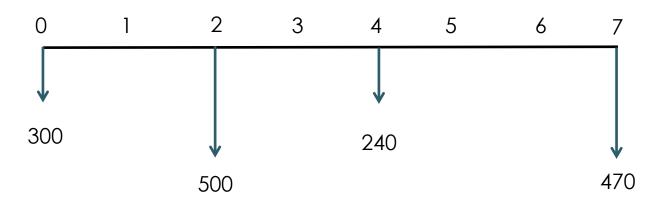
$$V_p = \frac{11'000.000}{(1+10\%)}$$

$$V_p = 10'000.000$$





■ Ejemplo 2: Usted tiene el siguiente esquema de pagos mensuales a un banco que le prestó al 9% NA/SV. ¿Cuánto debería pagar usted si quiere hacer un único pago en el mes 4?



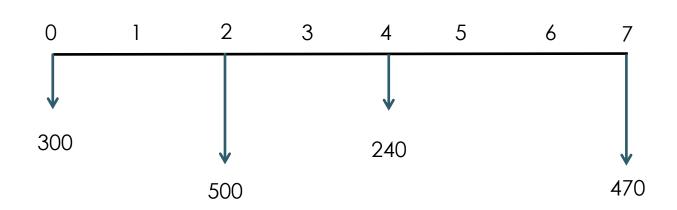


i= 9% NA/SV i=4,5% SV

i=0,74% MV

$$V_4 = -300(1+0.74\%)^4 - 500(1+0.74\%)^2 - 240 - \frac{470}{(1+0.74\%)^3}$$

$$V_4 = -1.516,09$$





### **Series Uniformes**



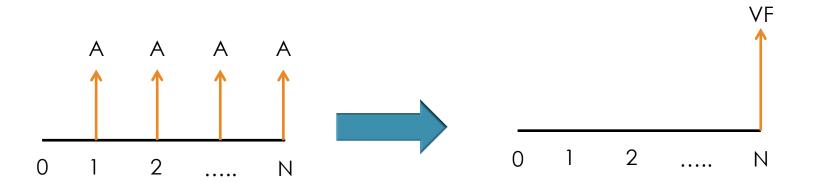
¿Qué sucede si ya no estamos interesados en comparar dos únicos flujos. Ahora es de interés comparar una serie de flujos que se observan en diferentes periodos de tiempo?

¿Dichos flujos pueden ser finitos? ¿Infinitos?



¿Cuál es el valor futuro equivalente a una serie de flujos?

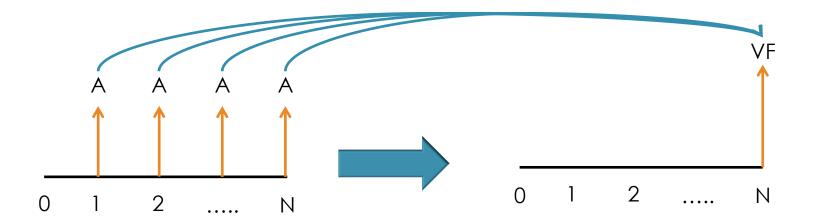
■ Es posible encontrar el valor futuro de una serie de flujos uniformes en el tiempo.





¿Cuál es el valor futuro equivalente a una serie de flujos?

La primera aproximación no es más que utilizar las fórmulas vistas hasta ahora.





### ¿Cuál es el valor futuro equivalente a una serie de flujos?

La primera aproximación no es más que utilizar las fórmulas vistas hasta ahora.

$$V_f = A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + \dots + A(1+i) + A$$

Como se verá a lo largo de curso, existen varios métodos para encontrar equivalencias. Algunos son más "eficientes" que otros.



$$V_f = A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + \dots + A(1+i) + A(1+i)$$

2. 
$$V_f(1+i) = A(1+i)^n + A(1+i)^{n-1} + \dots + A(1+i)^2 + A(1+i)^n$$

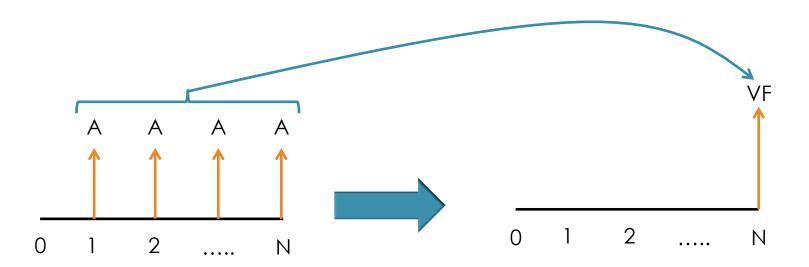
Podemos manipular algebraicamente las dos anteriores ecuaciones y demostrar que, si restamos 2 – 1, se obtiene:

$$V_f(1+i) - V_f = A(1+i)^n - A$$

$$V_f = A \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$



Nótese que el primer flujo está en el periodo n = 1, y el último flujo está en n = N.





¿Cuál es el monto uniforme equivalente a un valor futuro?

$$A = V_f \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$



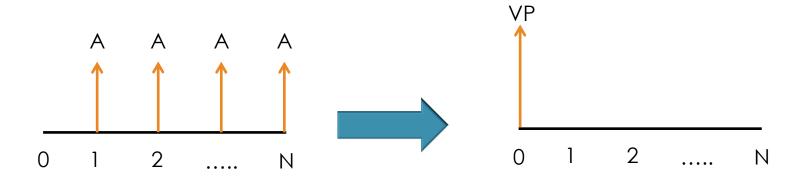
### ¿Cuál es el valor presente equivalente a una serie de flujos?

Es posible encontrar el valor presente de una serie de flujos uniformes en el tiempo por diferentes caminos.

Al igual que con el valor futuro, una primera opción consiste en traer a valor presente cada uno de los flujos de interés



¿Cuál es el valor presente equivalente a una serie de flujos?

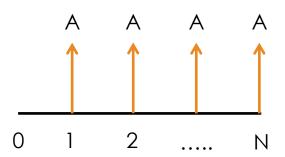


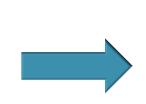


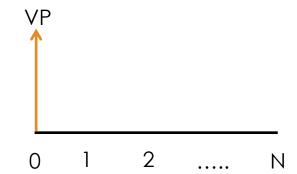
Sabemos que:

$$V_f = A \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

$$V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n}$$









Sabemos que:

$$V_f = A \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \qquad V_p = \frac{V_f}{(1+i)^n}$$

Por lo tanto, basta con traer a valor presente el valor futuro de la anualidad. Esto nos dará como resultado.

$$V_p = A \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$$



¿Cuál es el flujo constante equivalente a un valor presente?



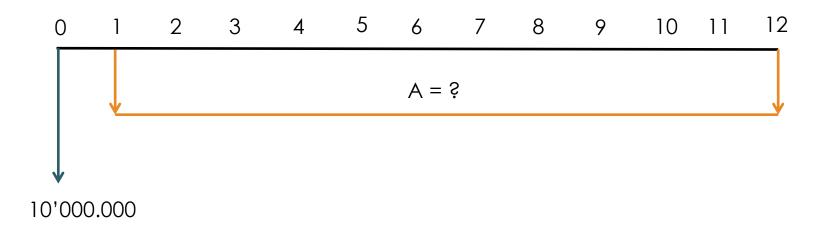


¿Cuál es el flujo constante equivalente a un valor presente?

$$A = V_p \left[ \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$



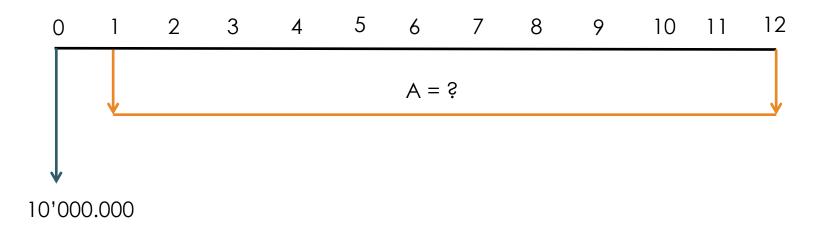
Ejemplo 1: Usted sabe que una máquina fresadora vale 10'000.000 COP. Como usted no tiene la plata hoy, usted quiere saber cuanto debería pagar mensualmente por 1 año para adquirir la máquina. La tasa de interés es 1,2% MV.





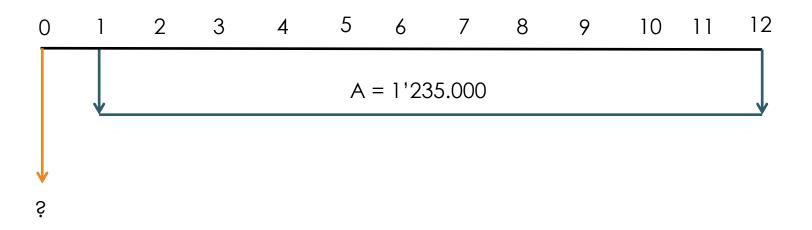
$$A = 10'000.000 \left[ \frac{1,2\%(1+1,2\%)^{12}}{(1+1,2\%)^{12}-1} \right]$$

$$A = 899.754, 33$$





■ Ejemplo 2: Usted paga como cuota anual del carro 1'235.000 COP. El plazo de su crédito es de 12 años. Si la tasa de interés que le ofreció el concesionario era 0,58% MV, ¿Cuál era el valor del carro cuando lo compró?

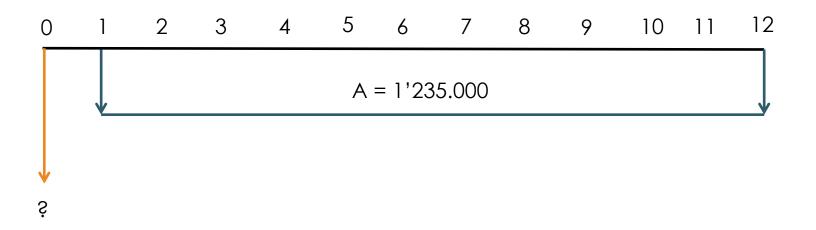




#### Matemáticas Financieras

$$V_p = 1'235.000 \left[ \frac{(1+7,19\%)^{12} - 1}{7,19\%(1+7,19\%)^{12}} \right]$$

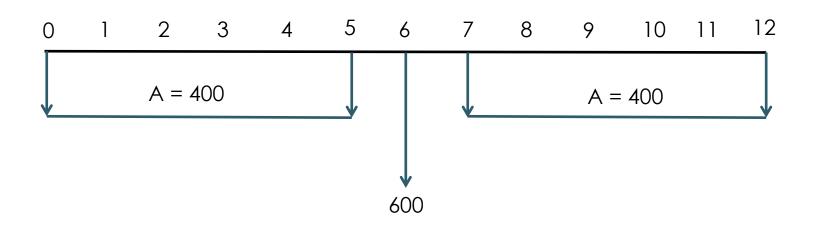
$$V_p = 9'712.522,61$$





#### Matemáticas Financieras

■ Ejemplo 3: Usted tiene los flujos anuales que se muestran a continuación. Si su costo de oportunidad es 8% E.A., ¿Cuál es el valor futuro (en 12) de todos los flujos?





#### **Gradientes**



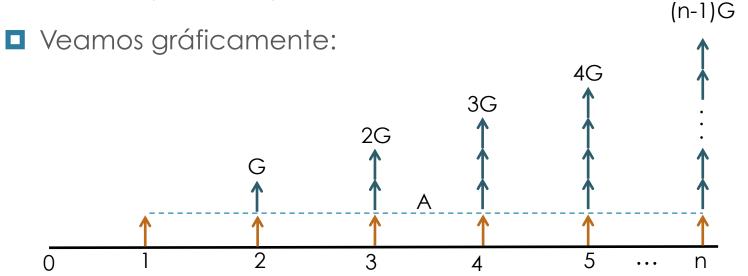
Las equivalencias que hemos derivado hasta el momento para las anualidades (A) están limitadas a un valor constante a lo largo del tiempo

¿Que sucede ahora, si tenemos unos flujos anuales que no son constantes y que crecen en un monto determinado?

Existen otro tipo de relaciones de equivalencia con particular interés en las matemáticas financieras. Se trata de las relaciones de equivalencia cuando los pagos vencidos periódicos no se comportan de manera constante, sino que por el contrario crecen en el tiempo en valor constante conocido ("G").



Técnicamente este valor de crecimiento constante "G" se conoce como el gradiente de crecimiento uniforme de los flujos de caja.



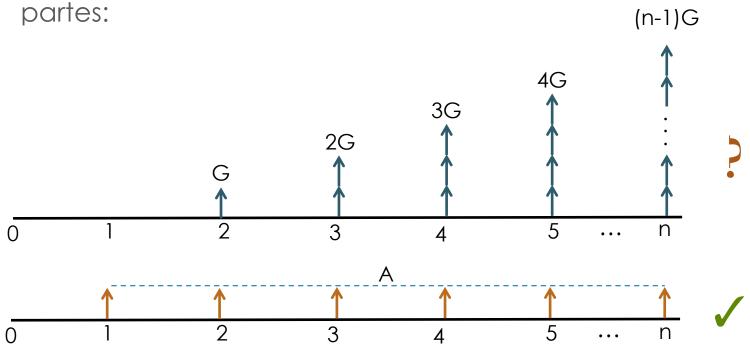
Note que "G" es una cantidad constante en que se incrementan los flujos de caja a partir del periodo dos (2)



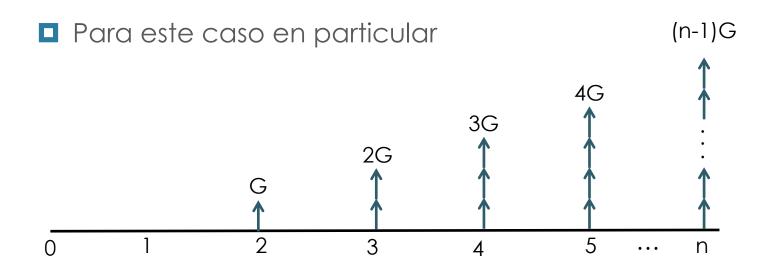
- Al igual que en nuestros casos anteriores la presencia de un "gradiente" (G) no altera nuestra conceptualización básica. Podemos con nuestra formulas primarias encontrar la suma presente (VP) equivalente de cualquier suma de dinero futura (VF) y viceversa.
- Igualmente si se dispone de un VP y/o VF podemos con nuestras formulas ya conocidas obtener sus equivalencias con una suma constante vencida (A).
- Consecuentemente, podremos encontrar las respectivas equivalencias para una suma periódica vencida que crece y/o decrece a una suma constante conocida por período.



El problema anterior lo podemos fraccionar en dos partes:
(p-1)







Procediendo una vez más de manera análoga, es fácil deducir las formulas que resumen las relaciones de equivalencia cuando se considera el GRADIENTE ("G")



Así por ejemplo la equivalencia de una suma presente (VP) dado una suma de dinero vencida (G) que crece de manera constante en concordancia con nuestro gráfico anterior estaría dada por la siguiente ecuación:

$$V_p = G \left[ \frac{1}{i} \left( \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right) \right]$$

$$V_p = f(G, i, n)$$



Adicionalmente, es posible derivar las siguientes ecuaciones:

$$V_p = G\left[\frac{1}{i}\left(\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right)\right] \quad \text{Valor presente de un gradiente aritmético}$$

$$A = G\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Serie uniforme de un aradiente aritmática gradiente aritmético

$$V_p = \frac{G}{i^2}$$

Valor presente de un gradiente aritmético infinito

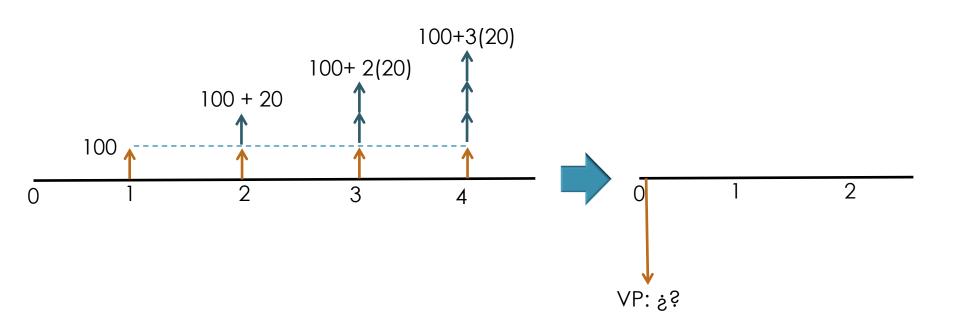


#### Ejemplo 1:

- Una nueva compañía financiera conocida como DMG está ofreciendo a sus clientes un rendimiento del 10% EA. Por la estructura de ingresos piramidal de la compañía, ellos se comprometen a entregarle a usted, por su inversión, unas anualidades de la siguiente forma:
  - Año 1: 100
  - Año 2: Año 1 + 20
  - Año 3: Año 2 + 20
  - Año 4: Año 3 + 20
- ¿Cuál sería el monto que usted tendría que invertir hoy para recibir la rentabilidad mencionada?



Gráficamente tenemos que:





Una primera aproximación puede ser el calculo de cada uno de los flujos traídos individualmente al presente, así:

$$V_p = \frac{D_1}{(1+i)} + \frac{D_2}{(1+i)^2} + \frac{D_3}{(1+i)^3} + \frac{D_4}{(1+i)^4}$$

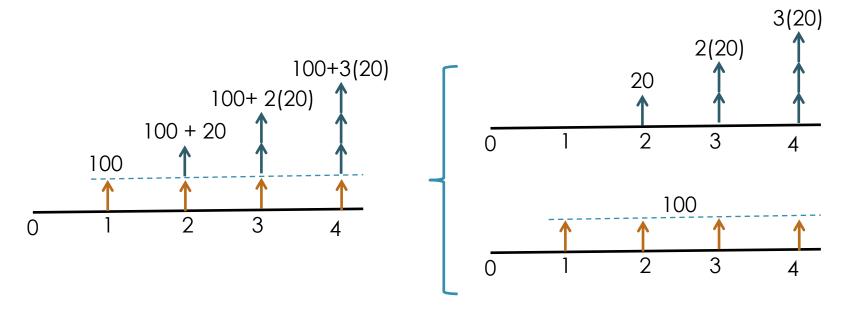
$$V_p = \frac{100}{(1+10\%)} + \frac{100+20}{(1+10\%)^2} + \frac{100+2(20)}{(1+10\%)^3} + \frac{100+3(20)}{(1+10\%)^4}$$

$$V_p = \$404,55$$

Sin embargo, en problemas con un número mayor de flujos, el cálculo sería extremadamente largo

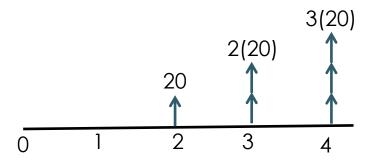


Gracias a las ecuaciones que hemos derivado, podemos fraccionar el problema, así:





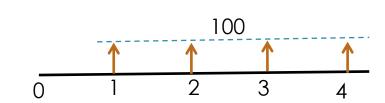
Se calcula el valor presente:



$$V_p = G \left[ \frac{1}{i} \left( \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right) \right]$$

$$i = 10\%$$
  $n = 4$   $G = 20$ 

$$V_p(1) = \$87, 56$$



$$V_p = A \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$$
 $i = 10\% \qquad n = 4 \qquad A = 100$ 
 $V_p(2) = \$316,99$ 

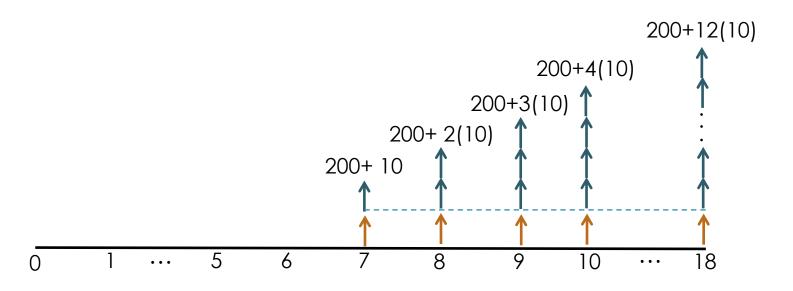
$$V_p = V_p(1) + V_p(2) = \$404,55$$

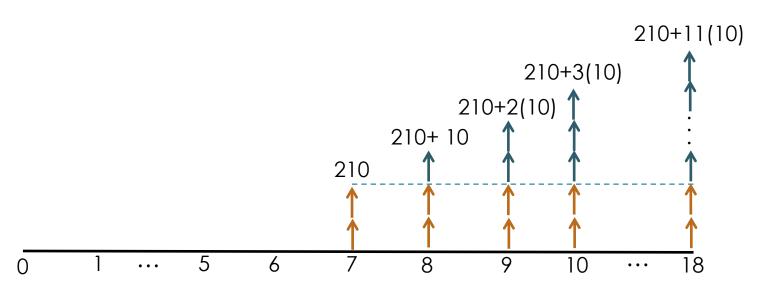


#### Ejemplo 2:

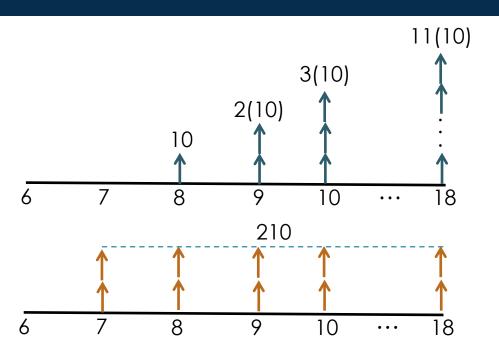
- Usted ha adquirido un nuevo empleo cuyo contrato de un año empieza dentro de 6 meses. La compañía tiene un sueldo base de 200 por mes y una bonificación por fidelidad de 10 por mes. Es decir, por cada mes que usted labore en la compañía recibirá una bonificación de 10. Así las cosas, en el mes 1 recibirá el sueldo base más 10, en el mes 2 recibirá el sueldo base más 20, etc.
- Si el costo de oportunidad es del 0,3% mensual, ¿Cuál es el valor presente de sus ingresos?











 Utilizando la ecuación del gradiente aritmético

$$V_{f6_{(1)}} = \$643, 11$$

 Utilizando la ecuación de anualidades o cuotas uniformes

$$V_{f6_{(2)}} = \$2.471, 54$$

Se calcula el valor en el periodo 6

$$V_{f6} = V_{f6_{(1)}} + V_{f6_{(2)}} = \$3.114,65$$

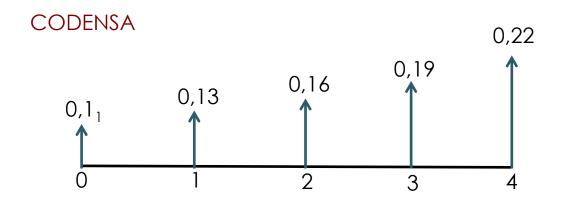
$$V_p = \frac{V_{f6}}{(1+i)^6} = \$3.059,17$$



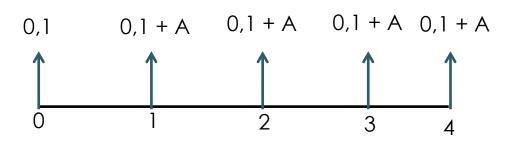
#### Ejemplo 3:

- El gobierno ha establecido una política de fijación de tarifas de servicios públicos para los próximos 5 años. El costo en un año por kwh es de \$0.10. Las directivas de CODENSA quieren aumentar la tarifa de manera anual en \$0.03 por kwh. El aumento se hará a partir del año 2. Suponga una tasa de interés de 8% anual.
- Usted cree que aumentar la tarifa cada año no es "lo más adecuado políticamente". En cambio, usted prefiere decretar un único aumento. ¿Cuál debería ser el aumento de la tarifa que es equivalente a la propuesta de CODENSA?

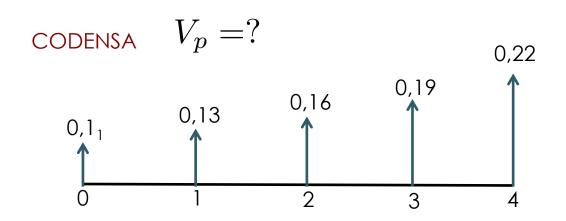




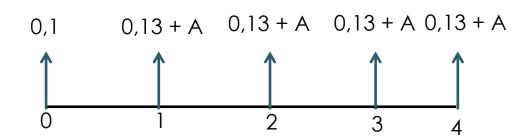
#### Propuesta







Propuesta 
$$V_p=?$$



$$A = 3\% \left[ \frac{1}{8\%} - \frac{4}{(1+8\%)^4 - 1} \right]$$

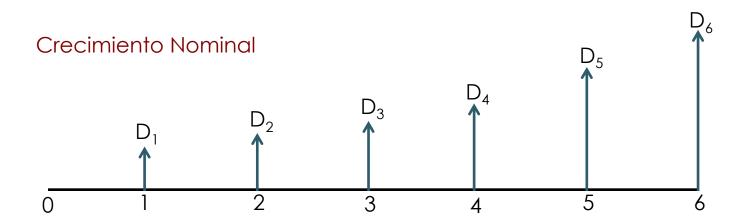
$$A = 0,042$$



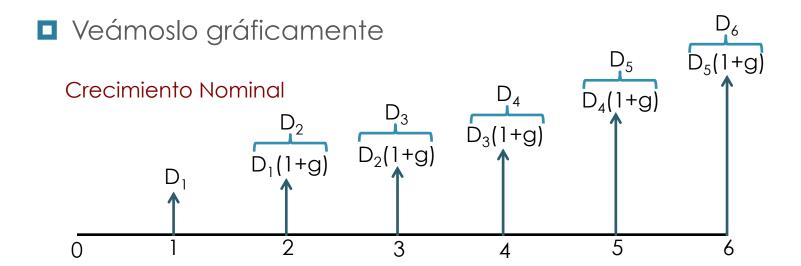
¿Que sucede ahora, si tenemos unos flujos anuales que crecen a una tasa determinada?

Otro caso particular, es aquel donde el flujo de cada año crece a una tasa constante ("g"). A diferencia del crecimiento anterior, éste no son montos fijos (G) sino crece proporcionalmente a una tasa "g".





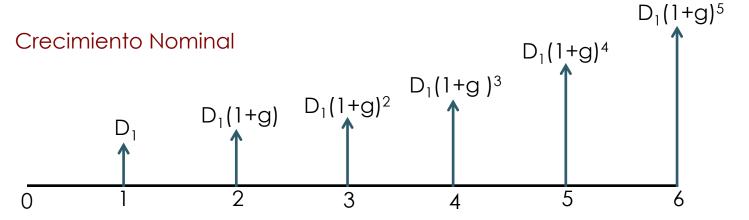




g= Inflación



Veámoslo gráficamente





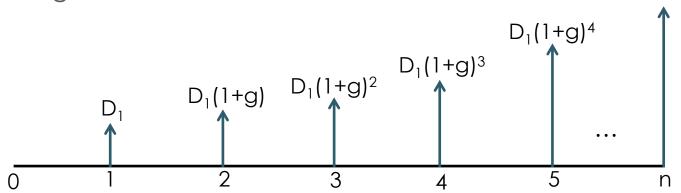
- El anterior crecimiento de los flujos (1+g) se conoce como **crecimiento geométrico**.
- Esta es una de las relaciones de equivalencia de mayor uso en el campo de las finanzas, pues tiene su aplicación en el campo de la valoración de activos.
- Es posible encontrar una equivalencia para series finitas e infinitas
- El caso de series infinitas, es conocido en el dominio financiero como el "Modelo de Gordon-Shapiro".



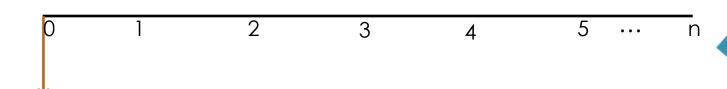
 $D_1(1+g)^{n-1}$ 

## Gradientes geométricos

En general se tiene:



Se quiere encontrar el Valor Presente (VP) de una serie infinita con crecimiento geométrico constante (g)



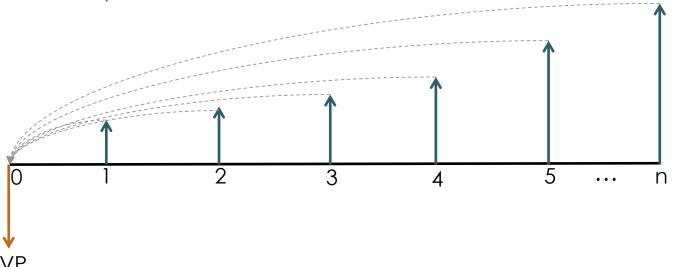


- La serie presenta un comportamiento creciente geométrico, debido a la presencia de una razón de crecimiento constante "g".
- Según esto, veamos a qué corresponde cada uno de los flujos D<sub>i</sub>.

$$D_1 = D_1$$
 $D_2 = D_1 (1+g)$ 
 $D_3 = D_2 (1+g) = D_1 (1+g)^2$ 
 $\vdots$ 
 $D_j = D_1 (1+g)^{j-1}$ 



La única forma de calcular el valor presente de esta serie, es trayendo uno a uno cada término a VP y sumarlos entre sí. Es necesario recurrir a la convergencia de series para realizar esta tarea, pues no hay que olvidar que esta serie es infinita.





Por lo tanto, la suma de todos los componentes de la serie es:
∞
√

$$V_p = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_j}{(1+k)^j}$$

$$V_p = D_1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1+g)^{j-1}}{(1+k)^j}$$

$$V_p = \frac{D_1}{(1+k)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1+g)^{j-1}}{(1+k)^{j-1}}$$

■ Realizando un cambio de variable: j-1 = l tenemos:

$$V_p = \frac{D_1}{(1+k)} \sum_{I=0}^{\infty} \frac{(1+g)^I}{(1+k)^I}$$



Sabemos adicionalmente que  $\sum_{I=0}^{\infty} a^I = \frac{1}{1-a}$ , para a<1, luego:

$$V_p = \frac{D_1}{(1+k)} \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{1+g}{1+k}\right)} \right] parak > g$$

$$V_p = \frac{D_1}{(1+k)} \left[ \frac{1}{k-g} \right]$$

$$V_p = \frac{D_1}{(k-g)}$$
 Modelo de Gordon Shapiro



Recordemos que D<sub>1</sub> es el flujo de efectivo en el año 1, k es la tasa de descuento y g es la tasa de crecimiento constante.



Según nuestra notación

$$V_p = f(D_1, i\%, g\%)$$

$$V_p = \frac{D_1}{(k-g)}$$



- Ahora, veamos el caso de una serie finita con crecimiento geométrico constante (g), si se quiere encontrar su equivalente en VP, se tiene:
- Al igual que la anterior serie, ésta presenta un comportamiento creciente geométrico, debido a la presencia de una razón de crecimiento constante "g".
- La única diferencia es que la serie es finita, y no infinita como el caso anterior.



Matemáticamente, se puede llegar a:

$$V_p = D_1 \left[ \frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+k}\right)^n}{k - g} \right]$$

Puede observarse que cuando n tiende a infinito, la expresión anterior converge al Modelo de Gordon-Shapiro. Por otra parte, si no hubiese crecimiento (o sea g=0,) dicha expresión converge al valor presente de una serie uniforme.



Según nuestra notación:

$$V_p = D_1 \left[ \frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+k}\right)^n}{k - g} \right]$$

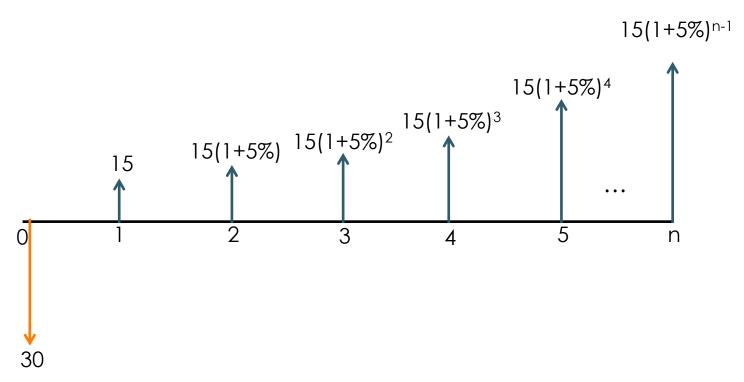
$$V_p = f(D_1, i\%, g\%, n)$$



#### Ejemplo 1:

- Su nueva idea de negocio, espera competir fuertemente con las arepas del SD. Usted espera generar unos ingresos de 15 millones de pesos en el primer año, y que las ventas se incrementen año a año en un 5%, a cambio de una inversión de 30 millones de pesos.
- Su costo de financiarse vía Deuda y Equity es del 12% efectivo anual
- ¿Cuál es el mínimo valor al cual usted estaría dispuesto a vender su idea de negocio?





Costo de oportunidad = WACC=12% EA



Traemos todo al presente para comparar los flujo de inversión e ingresos.



$$V_p = -30 + \frac{15}{(12\% - 5\%)}$$

The image cannot be displayed. Your computer may not have enough memory to open the image, or the image may have been corrupted. Restart your computer, and then open the file again. If the red x still appears, you may have to delete the image and then insert it again.

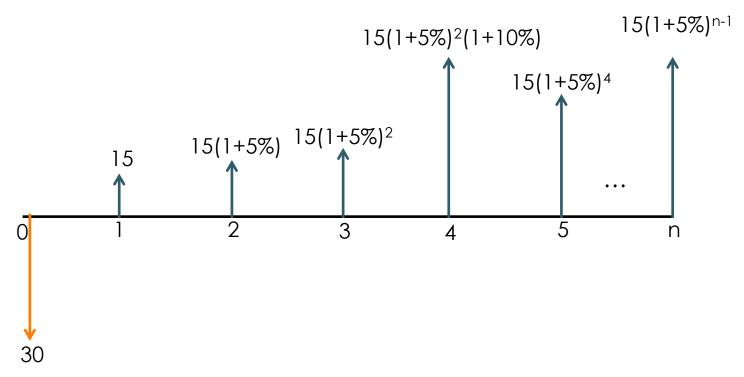
The image cannot be displayed. Your computer may not have enough memory to open the image, or the image may have been corrupted. Restart your computer, and then open the file again. If the red x still appears, you may have to delete the image and then insert it again.



#### Ejemplo 2:

- Considere el ejercicio anterior, pero ahora usted sabe que en el año 4 podrá participar en la versión del FOPRE de este periodo. Por lo anterior, usted espera un crecimiento anormal del 10% de sus ventas en este año. Sin embargo, en el año siguiente sus ventas se estabilizarán de acuerdo al crecimiento normal, ya que solo consiguió la participación en este evento por un año. Es decir, sus flujos a partir del año 5 serán equivalentes a los del ejercicio anterior.
- Su costo de financiarse vía Deuda y Equity es del 12% anual
- ¿Cuál es el mínimo valor al cual usted estaría dispuesto a vender su idea de negocio?

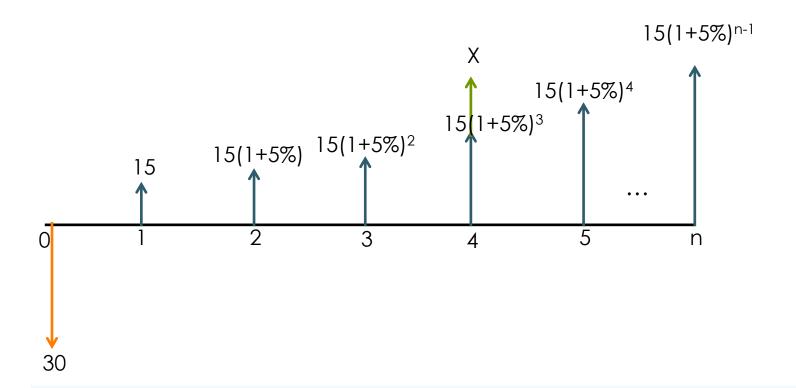




Costo de oportunidad = WACC=12% EA

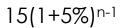


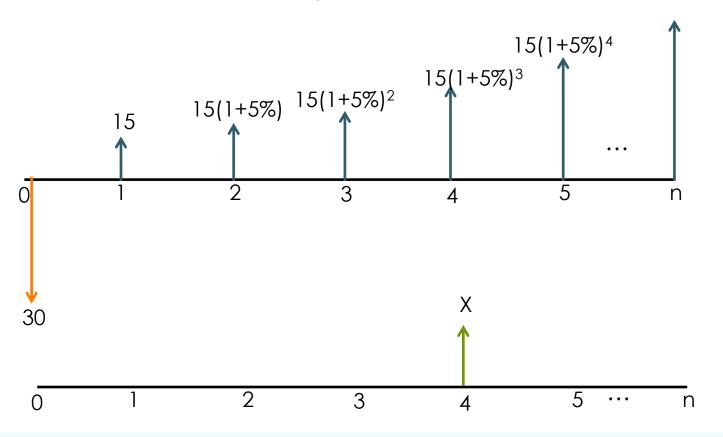
■ Podemos fraccionar el problema en:





■ Podemos fraccionar el problema en:







Es posible encontrar a X de la siguiente manera:

$$15(1+g)^{2}(1+10\%) = 15(1+g)^{3} + X$$

$$X = 15(1+g)^{2}(1+10\%) - 15(1+g)^{3}$$

$$X = 15\left[(1+g)^{2}(1+10\%) - (1+g)^{3}\right]$$

$$X = 15(1+g)^{2}\left[(1+10\%) - (1+g)\right]$$

$$X = 15(1+g)^{2}\left[10\% - g\right]$$



Traemos todo al presente para comparar los flujo de inversión e ingresos.

$$V_p = Inv + \frac{D_1}{(k-g)} + \frac{D_1(1+g)^2(10\% - g)}{(1+k)^4}$$
$$V_p(1) = 184,29 \qquad V_p(2) = 0,52$$

$$V_p = 184, 81$$



#### Relaciones y formulas de Equivalencia

Deberá ser claro que las formulas hasta aquí presentadas pueden utilizarse en combinaciones. En otras palabras, pueden encontrarse operaciones y/o contratos financieros que requieran el uso combinado de una o más de nuestras formulas básicas.