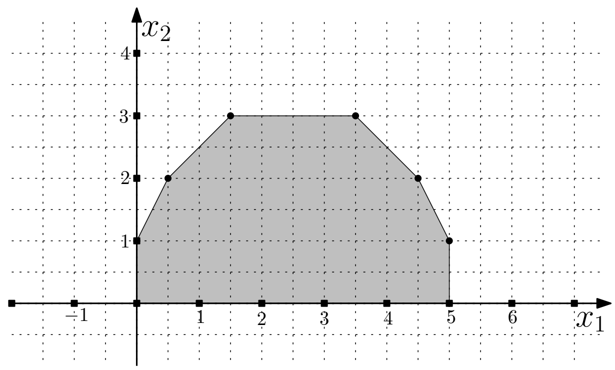
Optimización[1].

Examen Parcial #1
Nombre: 23 de septiembre de 2008

---

1. Considere el problema de optimización $\max 3x_1 + x_2$ sujeto a $(x_1, x_2) \in C$ donde C es el conjunto mostrado en la figura:



   a) Escriba este problema como un programa lineal en forma estándar.

   b) Si la SBF inicial está dada por las variables de holgura ($y_i = 1$), liste la secuencia de SBFs visitadas por el método simplex en este problema.

[1] Usted debe justificar todas sus respuestas. Una respuesta que aparezca de la nada no tiene ningún valor.

2. En el método simplex:

   a) Si $r_j > 0$ para cada j correspondiente a una variable x_j que no es básica, demuestre que la SBF correspondiente es la única solución óptima.

   b) Demuestre que una SBF degenerada puede ser óptima sin satisfacer $r_j \geq 0$ para todo j.

3. Es posible combinar las dos fases del método simplex de dos fases en un sólo procedimiento llamado el *método de la M grande*. Dado un programa lineal en forma estándar:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

construimos el problema auxiliar:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} + M\sum_{i=1}^{m} y_i \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

En este problema $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ es un vector de variables artificiales y M es una constante grande. El término $M\sum_{i=1}^{m} y_i$ *penaliza* soluciones con $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Si este problema se resuelve usando el método simplex, demuestre lo siguiente:

(a) Si se encuentra una solución óptima al problema (2) con $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, entonces el $\mathbf{x}$ resultante es una SBF óptima del problema original (1).

(b) Suponga ahora que el problema (1) tiene un valor óptimo finito $V(\infty)$. Sea $V(M)$ el valor óptimo del problema auxiliar. Demuestre que $V(M) \leq V(\infty)$.