Universidad de los Andes
Departamento de Ingeniería Industrial
Probabilidad y Estadística I (IIND2106)
Profesor Coordinador: Mario Castillo
Profesores: María Alejandra López, Astrid Bernal, Carlos Castellanos, Fabio Lagos, Gonzalo Torres, Hernando Mutis.
Segundo semestre de 2015

Complementaria 2
Probabilidad condicional, árboles de probabilidad e independencia de eventos

Punto 1

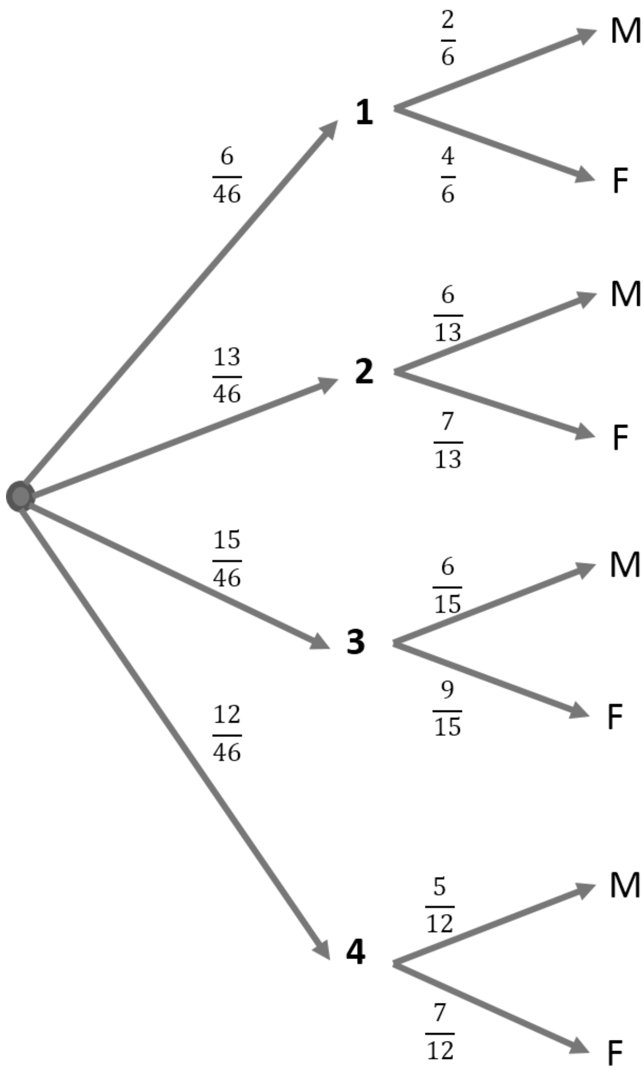
La población de determinado país está conformada por cuatro grupos étnicos, enumerados del 1 al 4. En la siguiente tabla se muestran las cifras (en millones de personas) de los cuatro grupos étnicos, discriminados por género:

		Género	
		Masculino	**Femenino**
Grupo étnico	**1**	2	4
	2	6	7
	3	6	9
	4	5	7
	TOTAL	**19**	**27**

*Cifras en millones

Con base en la información presentada anteriormente, de solución a los siguientes literales:

a. Represente la situación anterior utilizando un árbol de probabilidad.



$$P(M \cap 1) = \frac{6}{46} * \frac{2}{6} = \frac{1}{23}$$

$$P(F \cap 1) = \frac{6}{46} * \frac{4}{6} = \frac{2}{23}$$

$$P(M \cap 2) = \frac{13}{46} * \frac{6}{13} = \frac{3}{23}$$

$$P(F \cap 2) = \frac{13}{46} * \frac{7}{13} = \frac{7}{46}$$

$$P(M \cap 3) = \frac{15}{46} * \frac{6}{15} = \frac{3}{23}$$

$$P(F \cap 3) = \frac{15}{46} * \frac{9}{15} = \frac{9}{46}$$

$$P(M \cap 4) = \frac{12}{46} * \frac{5}{12} = \frac{5}{46}$$

$$P(F \cap 4) = \frac{12}{46} * \frac{7}{12} = \frac{7}{46}$$

b. Calcule la probabilidad de que un individuo de esta población, seleccionado de manera aleatoria, sea de género **Femenino**.

Opción 1 – Por medio de la tabla

$$P(F) = \frac{4+7+9+7}{46} = \frac{27}{46} = 0.59$$

Opción 2 – Por medio del árbol de probabilidad

$$P(F) = P(F \cap 1) + P(F \cap 2) + P(F \cap 3) + P(F \cap 4)$$
$$P(F) = \frac{2}{23} + \frac{7}{46} + \frac{9}{46} + \frac{7}{46} = \frac{27}{46} = 0.59$$

c. Calcule la probabilidad de que un individuo de esta población, seleccionado de manera aleatoria, pertenezca al grupo étnico 4 y sea de género **Masculino**.

Opción 1 – Por medio de la tabla

$$P(4 \cap M) = \frac{5}{46} = 0.11$$

Opción 2 – Por medio del árbol de probabilidad

$$P(4 \cap M) = P(M|4) * P(4) = \frac{5}{12} * \frac{12}{46} = 0.11$$

d. Calcule la probabilidad de que un individuo de esta población, seleccionado de manera aleatoria, pertenezca al grupo étnico 1, 2 ó 3, si se sabe que es de género **Masculino.**

Opción 1 – Por medio de la tabla

$$P(3 \cup 2 \cup 1|M) = \frac{6}{19} + \frac{6}{19} + \frac{2}{19} = 0.74$$

Opción 2 – Por medio del árbol de probabilidad

$$P(3 \cup 2 \cup 1|M) = P(3|M) + (2|M) + P(1|M) = \frac{P(3 \cap M)}{P(M)} + \frac{P(2 \cap M)}{P(M)} + \frac{P(1 \cap M)}{P(M)}$$

$$P(M) = 1 - P(F) = 1 - 0.59 = 0.41$$

$$P(3 \cup 2 \cup 1|M) = \frac{\frac{3}{23}}{0.41} + \frac{\frac{3}{23}}{0.41} + \frac{\frac{1}{23}}{0.41} = 0.74$$

e. Determinar si los eventos "*el individuo es del grupo étnico **2***" y "*el individuo es de género **Femenino***" son independientes.

Para probar que estos dos eventos son independientes, se debe cumplir la siguiente igualdad

$$P(2 \cap F) = P(2) * P(F)$$

$$P(2 \cap F) = P(F|2) * P(2) = \frac{7}{13} * \frac{13}{46} = 0.15$$

$$P(2) * P(F) = \frac{13}{46} * \frac{27}{46} = 0.16$$

$$P(2 \cap F) \neq P(2) * P(F)$$

Por lo tanto los eventos "*el individuo es del grupo étnico 2*" y "*el individuo es de género Femenino*" no son eventos independientes.

Punto 2

En el ámbito laboral se establece que un periodo de prueba tiene una duración de 3 meses para los nuevos empleados, y cualquiera de las partes, el empleado o el empleador, puede dar por terminado el contrato de forma unilateral sin ninguna penalización. De acuerdo con las estadísticas nacionales, se determinó que durante el periodo de prueba, el 15% de los empleados **renuncian** antes de finalizar el periodo de prueba.

En el caso particular de una empresa productora de alimentos, se realizó un seguimiento a los empleados con el fin de determinar la tasa de renuncias en el período de prueba. Luego de 2 años de seguimiento a los empleados se observó que, de cada 10 personas que **asisten** en el primer mes a eventos de la empresa, **renuncian** 3 empleados antes de completar el periodo de prueba.

Con base en la información anterior, resuelva los siguientes literales:

a. ¿La **asistencia** a eventos durante el primer mes ha tenido algún efecto sobre la decisión de **renunciar** de forma unilateral?

$R: Empleados\ renuncian\ durante\ el\ periodo\ de\ prueba.$
$A: Asisten\ a\ eventos\ de\ la\ empresa.$

Cuando la información del evento A no aporta información respecto a la ocurrencia o no del evento B, se tiene: P (B|A) = P (B) y los eventos son independientes.
Por lo tanto, si el evento de que los empleados asistan a eventos de la empresa (A), no aporta información respecto a la renuncia durante el periodo de prueba (R), se tendrá que la asistencia no tiene efecto sobre la decisión de renunciar:

$$P(R|A) = P(R) \quad Eventos\ independientes$$

Y en el caso contrario si la asistencia (A) aporta información al evento de renunciar (R), se tendrá que la asistencia tiene efecto sobre la decisión de renunciar:

$$P(R|A) \neq P(R)\ Eventos\ dependientes$$

$$\frac{3}{10} \neq 0.15$$

Dado que $P(R|A) \neq P(R)$, es posible afirmar que los eventos son dependientes entre sí, se puede afirmar que la asistencia a los eventos durante el primer mes de trabajo tiene un efecto sobre la decisión de renunciar.

b. Si se sabe que de cada 200 personas que **renunciaron,** 51 han **asistido** a eventos de la empresa durante el primer mes de prueba, y que por cada 400 personas que **no renunciaron,** 42 **asistieron** a eventos de la empresa durante el primer mes de prueba, ¿cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar, que **no asiste** durante su primer mes a eventos programados por la empresa, **no renuncie** antes de finalizar el periodo de prueba?

R: *Empleados renuncian durante el periodo de prueba.*
A: *Asisten a eventos de la empresa.*

$$P(R) = 0.15$$

$$P(R|A) = \frac{3}{10}$$

$$P(A|R^c) = \frac{42}{400}$$

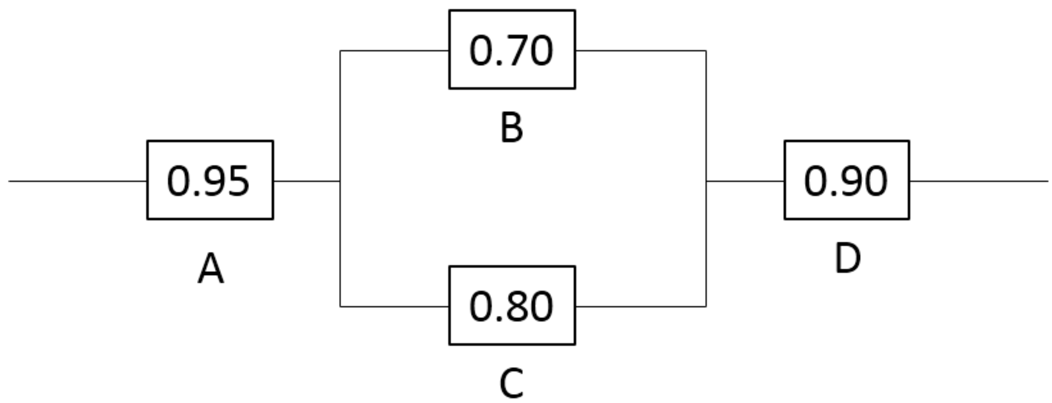
$$P(A|R) = \frac{51}{200}$$

$$P(R^c|A^c) = \frac{P(R^c \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(A^c|R^c) * P(R^c)}{P(A^c|R^c) * P(R^c) + P(A^c|R) * P(R)}$$

$$P(R^c|A^c) = \frac{\frac{358}{400} * 0.85}{\frac{358}{400} * 0.85 + \frac{149}{200} * 0.15} = 0.87$$

Punto 3

Considere el circuito que aparece a continuación, en donde se indica la probabilidad de que cada componente funcione:

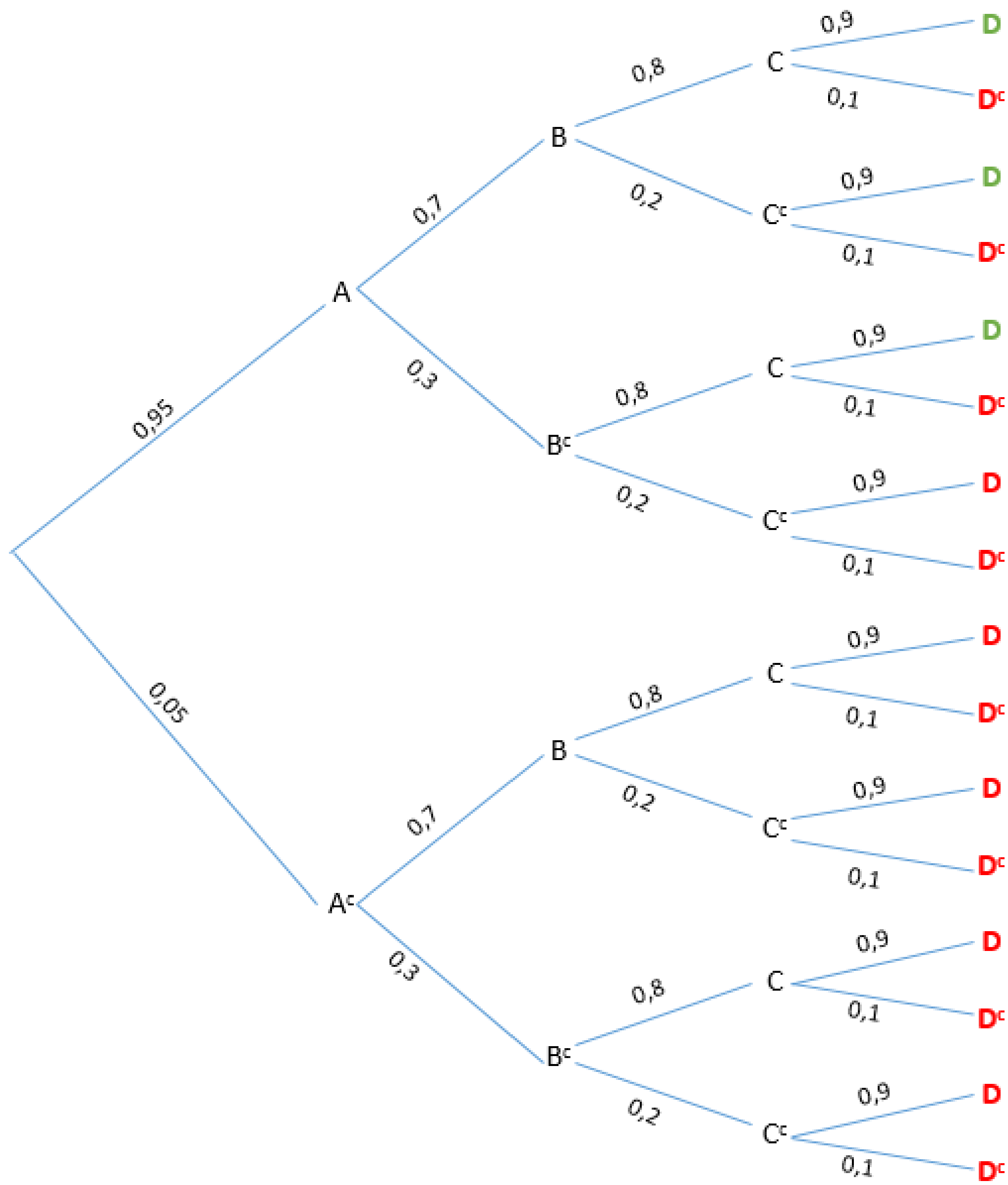


a. ¿Cuál es la probabilidad que el circuito funcione? Asuma que cada una de las piezas funciona independientemente una de la otra.

Para que el circuito funcione tenemos que considerar varios escenarios:

- Funcionan A,B,C y D
- Funcionan A, B y D; no funciona C
- Funcionan A,C y D; no funciona B

Representando esto en un diagrama de árbol:



En este árbol, los eventos señalados como A, B, C, D nos indican el circuito funciona, mientras que los eventos señalados con A^C, B^C, C^C, D^C indican que no funciona

Para calcular la probabilidad de que funcione, utilizando la ley de las probabilidades totales, calculamos las probabilidades de cada uno de los eventos “ramas” que nos indican que funciona el circuito

$$
\begin{aligned}
P(F) = P(ABCD) + P(ABC^cD) + P(AB^cCD) \\
&= (0.95 * 0.7 * 0.8 * 0.9) + (0.95 * 0.7 * 0.2 * 0.9) \\
&+ (0.95 * 0.3 * 0.8 * 0.9) = 0.80
\end{aligned}
$$

b. Si se sabe que el circuito no funcionó, ¿cuál es la probabilidad que B funcionara correctamente?

$$P(\,B \mid no\ funcionó\,) = P(\,no\ funcionó \mid B\,) * \frac{P(B)}{P(no\ funcionó)}$$

Para calcular la probabilidad de que no funcionó dado que B si funcionó:

$$P(\,no\ funcionó \mid B\,) = \frac{P(ABC^cD^c) + P(ABCD^c) + P(A^CBCD) + P(A^CBCD^C) + P(A^CBC^CD) + P(A^CBC^CD^C)}{P(B)}$$

$$= \frac{\begin{matrix}(0.95 * 0.7 * 0.2 * 0.1) + (0.95 * 0.7 * 0.8 * 0.1) + (0.05 * 0.7 * 0.8 * 0.9) + (0.05 * 0.7 * 0.8 * 0.1) \\ +(0.05 * 0.7 * 0.2 * 0.9) + (0.05 * 0.7 * 0.2 * 0.1)\end{matrix}}{0.7} = 0.14$$

$$P(\,B \mid no\ funcionó\,) = 0.14 * \frac{0.7}{1 - 0.8} = 0.52$$

Punto 4

Dos empresas de ingeniería, Ingesolum y ANN Ingenieros, están considerando la posibilidad de competir por la construcción de un gran proyecto de infraestructura en Colombia, cuyo contrato les puede ser adjudicado o no, dependiendo de su propuesta.

La empresa Ingesolum presenta una propuesta y la probabilidad de que la obra les sea adjudicada es de 3/4 siempre y cuando la empresa ANN Ingenieros no compita. La probabilidad de que ANN Ingenieros compita es de 3/4. Adicionalmente, se ha estimado que la probabilidad de que Ingesolum no gane la adjudicación de la obra es 9/16.

Si Ingesolum obtiene la obra, ¿cuál es la probabilidad de que ANN Ingenieros haya competido?

La información con la que se cuenta es:

$$P(ANN\ Ingenieros\ compite) = 0.75$$
$$P(Ingesolum\ obtiene\ obra | ANN\ No\ compite) = 0.75$$
$$P(Ingesolum\ no\ obtiene\ la\ obra) = \frac{9}{16}$$

La probabilidad solicitada es la siguiente:

$$P(ANN\ compite | Ingesolum\ obtiene\ obra) = \frac{P(ANN\ Compite\ \cap Ingesolum\ obtiene\ obra)}{P(Ingesolum\ obtiene\ obra)}$$

$$= \frac{P(Ingesolum\ obtiene\ obra|ANN\ compite) * P(ANN\ compite)}{P(Ingesolum\ obtiene\ obra)}$$

$$= \frac{P(Ingesolum\ obtiene\ obra|ANN\ compite) * 0.75}{1 - P(Ingesolum\ NO\ obtiene\ obra)} = \frac{\frac{1}{3} * 0.75}{1 - (\frac{9}{16})} = \frac{4}{7} = 0.57$$

$P(Ingesolum\ obtiene\ obra|ANN\ compite)$, para obtener esta probabilidad debe utilizar la ley de probabilidad total.

$$P(Ingesolum\ obtiene\ la\ obra) = P(ANN\ No\ compite\ \cap Ingesolum\ obtiene\ obra) + P(ANN\ compite \cap Ingesolum\ obtiene\ obra)$$

$$P(Ingesolum\ obtiene\ la\ obra) = P(Ingesolum\ obtiene\ obra|ANN\ No\ compite) * P(ANN\ No\ compite) + P(Ingesolum\ obtiene\ obra|ANN\ compite) * P(ANN\ compite)$$

$$\frac{7}{16} = 0.75 * 0.25 + P(Ingesolum\ obtiene\ obra|ANN\ compite) * 0.75$$

Despejando:

$$P(Ingesolum\ obtiene\ obra|ANN\ compite) = \frac{\frac{7}{16} - (0.75 * 0.25)}{0.75} = \frac{1}{3}$$