Universidad de los Andes
Departamento de Ingeniería Industrial
Probabilidad y Estadística I (IIND2106)
Profesor Coordinador: Mario Castillo
Profesores: Astrid Bernal, Carlos Castellanos, Fabio Lagos, María Alejandra López, Gonzalo Torres, Hernando Mutis.
Segundo semestre de 2015

Complementaria 5
Ejercicios sobre variables aleatorias con distribuciones continúas de mayor aplicación: Uniforme, Exponencial, Normal

Punto 1

La cantidad total de gasolina, en decenas de miles de galones, que es bombeada en una estación de servicio en un mes particular, se puede modelar como una variable aleatoria X con distribución uniforme. La función de densidad de probabilidad correspondiente se presenta a continuación.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & 0 < x < 3 \\ 0 & dlc \end{cases}$$

a. Calcule la probabilidad de que en la estación se bombee entre 0.8 y 1.2 decenas de miles de galones.

$$P(0.8 \leq X \leq 1.2) \int_{0.8}^{1.2} \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} x \Big|_{0.8}^{1.2} = 0.133$$

b. Determine la desviación estándar del número de galones bombeados para un mes determinado.

Para una distribución uniforme con parámetros a y b:

$$Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(3-0)^2}{12} = 0.75$$

$$desviación\ estándar = 0.866$$

c. Si Y corresponde al costo de x cantidad de gasolina, en donde 0.6 x es el costo variable, y 1.5 el costo fijo, encuentre el valor esperado del costo y su varianza.

$$Y = 0.6x + 1.5$$

$$E(Y) = E(0.6x + 1.5) = 0.6E(x) + 1.5 = 0.6 * \left(\frac{3}{2}\right) + 1.5 = 2.4$$

$$Var(Y) = Var(0.6x + 1.5) = 0.6^2 Var(x) = 0.6^2(0.75)=0.27$$

Punto 2

En promedio son 30 aviones los que aterrizan en el Aeropuerto El Dorado cada hora de acuerdo con un proceso de Poisson. El tiempo que sucede entre la llegada de dos aviones se puede modelar a través de la variable aleatoria T, que tiene una distribución exponencial. Aerocivil desea presentar un informe mensual sobre el tráfico de aviones en el aeropuerto, para lo cual requiere la siguiente información:

a. El tiempo esperado que transcurre entre la llegada de dos aviones consecutivos.

$$X\text{: } Número\ de\ llegadas\ en\ intervalo\ de\ tiempo\ t$$
$$T\text{: } Tiempo\ que\ transcurre\ entre\ 2\ llegadas\ o\ aterrizajes$$

Se sabe que el tiempo entre aterrizajes tiene una distribución exponencial:

$$T \sim Exponencial\left(\lambda = 30 \frac{llegadas}{hora}\right)$$

El valor esperado para una distribución exponencial está dado por:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{30} = 0.034\ horas\ que\ equivalen\ a\ 2\ minutos.$$

En promedio, el tiempo esperado que transcurre entre la llegada de dos aviones es de 0.034 horas.

b. En un día seleccionado al azar, ¿cuál la probabilidad de que el primer aterrizaje se dé después de las 12:05 a.m.? Tenga en cuenta que el día inicia a las 12:00 a.m.

Se sabe que el tiempo entre la llegada de dos aviones sigue una distribución exponencial, por lo tanto:

$$P(T \geq t) = 1 - P(T < t)$$
$$P(T > 5/60) = 1 - P(T \leq 5/60) = 1 - (1 - e^{-30*\frac{5}{60}}) = e^{-2.5} = 0.08$$

c. Si se sabe que ningún avión ha llegado al aeropuerto durante los primeros 10 minutos del día, ¿cuál es la probabilidad de que pasen por lo menos otros 10 minutos sin que ocurra ninguna llegada?

$$T \sim Exponencial\left(\lambda = 30\,\frac{llegadas}{hora}\right)$$

Por la propiedad de no memoria:

$$P\left(T > \frac{20}{60} \middle| T > \frac{10}{60}\right) = \frac{P(T > \frac{20}{60} \cap T > \frac{10}{60})}{P(T > \frac{10}{60})} = P(T > \frac{10}{60})$$

$$P\left(T > \frac{10}{60}\right) = 1 - P\left(T \leq \frac{10}{60}\right) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t} = e^{-30*\frac{10}{60}} = 0.0067$$

d. Cuál debe ser el tiempo máximo que puede durar la pista en mantenimiento para que el próximo avión aterrice sin problema. Suponga que el mantenimiento inicia tan pronto sucede un aterrizaje, y que con una probabilidad de 0.6 no se excede el tiempo entre el inicio del mantenimiento de la pista y el aterrizaje del próximo avión.

$$T \sim Exponencial\left(\lambda = 30\,\frac{llegadas}{hora}\right)$$

$$P(T > t) = 0.6 = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-30t}$$

$$t = 0.02\ horas$$

Punto 3

En uno de los exámenes que realiza el gobierno de forma anual a los estudiantes de grado noveno y décimo, se evalúan diferentes competencias tales como: matemáticas, lectura crítica, ciencias sociales, ciencias naturales e inglés. Los resultados encontrados se pueden modelar por medio de una distribución normal. Para las instituciones educativas es fundamental conocer el desempeño de sus estudiantes en dichas áreas, por lo que se solicita su ayuda, respondiendo las siguientes preguntas:

a. Si el profesor del curso ha decidido asignar una calificación "Muy Superior" a los estudiantes que obtengan un puntaje que esté dos desviaciones estándar por encima de la media, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante escogido al azar obtenga una nota “Muy Superior”?

El resultado que obtiene un estudiante en el examen se puede representar por medio de la variable aleatoria X.

Se debe calcular $P(X > \mu + 2\sigma)$

$$P(X > \mu + 2\sigma) = P\left(Z > \frac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.977 = 0.023$$

b. Si los resultados del examen de estado siguen una distribución normal con media 325 y desviación estándar 40. ¿Cuál es el puntaje que debe obtener un estudiante para que con una probabilidad del 5% se encuentre entre los mejores estudiantes?

Se debe encontrar un x tal que $P(X \geq x) = 0.05$ ó $P(X < x) = 0.95$.

$$P\left(X < \frac{x - 325}{40}\right) = 0.95$$

En la tabla de la distribución normal, se tiene que $P(Z < z) = 0.95 \approx 1.645$. Al despejar x:

$$\left(\frac{x - 325}{40}\right) = 1.645$$

$$\mathrm{x} = 390.8$$

Podemos concluir que un estudiante debería obtener un puntaje de 390.8 para estar en el 5% superior de los estudiantes.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante escogido al azar obtenga un puntaje entre 300 y 370?

$$P(300 \leq X \leq 370) = P\left(\frac{300 - 325}{40} \leq Z \leq \frac{370 - 325}{40}\right)$$

$$P(300 \leq X \leq 370) = P(-0.625 \leq Z \leq 1.125) = P(Z \leq 1.125) - P(Z \leq -0.625)$$

$$P(Z \leq 1.125) - P(Z \leq -0.625) = P(Z \leq 1.125) - [1 - P(Z \leq 0.625)]$$

$$P(300 \leq X \leq 370) = 0.8686 - [1 - 0.7324] = 0.601$$

d. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante escogido al azar obtenga un puntaje igual a 330? ¿Superior a 330?

$$P(X = 330) = 0\ ,\ X\ \textit{es una variable aleatoria continua.}$$

$$P(X > 330) = 1 - P(X \leq 330) \quad = \quad 1 - P\left(\frac{X - 325}{40} \leq \frac{330 - 325}{40}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.125) \ = 1 - P(Z < 0.125)$$

$$= 1 - 0.549 = 0.451$$

$$P(X > 330) = 0.451 \approx 45.1\ \%$$