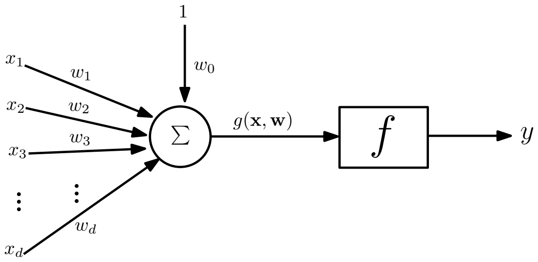
Redes Neuronales

Fernando Lozano

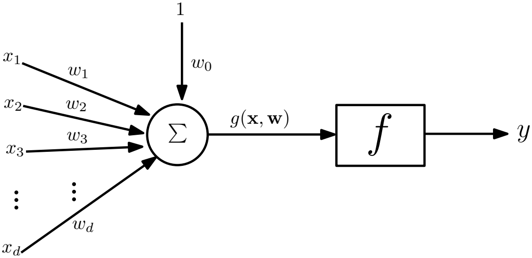
Universidad de los Andes

28 de agosto de 2015

Modelo de una neurona

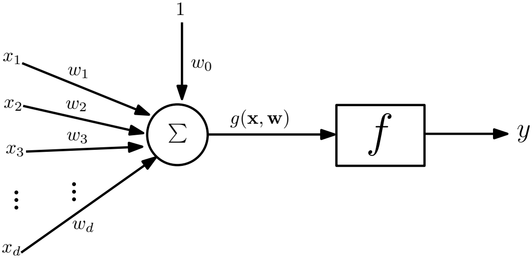


Modelo de una neurona



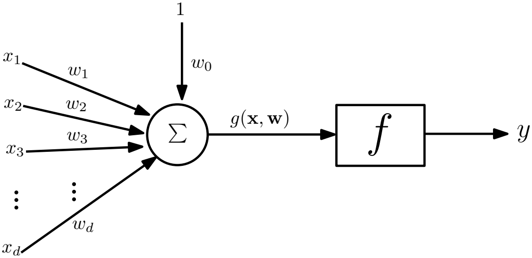
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_d \end{bmatrix}^T$$

Modelo de una neurona



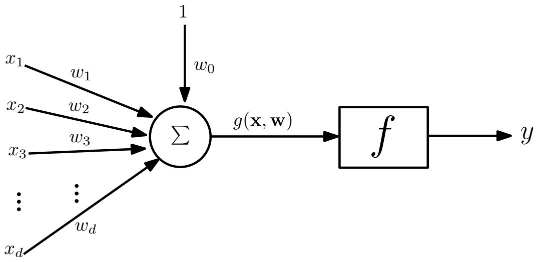
$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_d \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{w} &= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_d \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

Modelo de una neurona



$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_d \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{w} &= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_d \end{bmatrix}^T \\ g(\mathbf{x}, \mathbf{w}) &= \mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0 \end{aligned}$$

Modelo de una neurona



$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_d \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_d \end{bmatrix}^T$$

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0$$

$$y = f(g(\mathbf{x})) = f(\mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0)$$

Vectores extendidos

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_d \end{bmatrix}^T$$

Vectores extendidos

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix}1 & x_1 & x_2 & \dots & x_d\end{bmatrix}^T \\ \tilde{\mathbf{w}} &= \begin{bmatrix}w_0 & w_1 & w_2 & \dots & w_d\end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

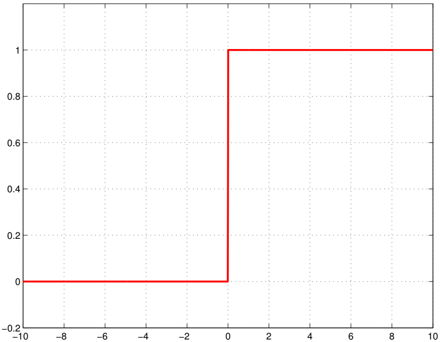
Vectores extendidos

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_d \end{bmatrix}^T \\
\tilde{\mathbf{w}} &= \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & w_2 & \dots & w_d \end{bmatrix}^T \\
g(\mathbf{x}) &= \tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

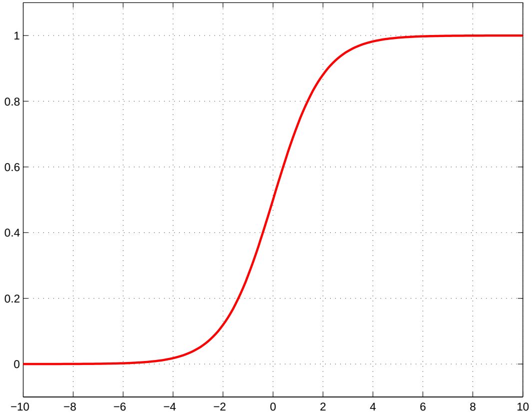
Vectores extendidos

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_d \end{bmatrix}^T \\
\tilde{\mathbf{w}} &= \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & w_2 & \dots & w_d \end{bmatrix}^T \\
g(\mathbf{x}) &= \tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\mathbf{x}} \\
u(\mathbf{x}) &= f(g(\mathbf{x})) = f(\tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\mathbf{x}})
\end{aligned}
$$

Umbral (limitador duro)

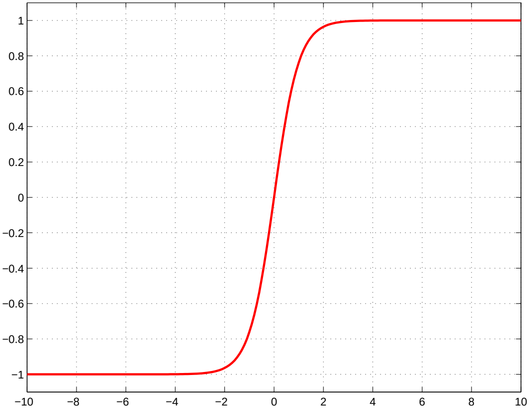


Activación sigmoidal



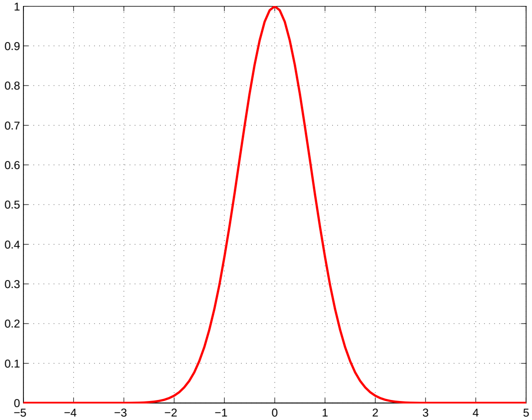
$$f_s(z) = \frac{1}{1 + e^{-\beta z}}$$

Tangente hiperbólica



$$f_{TH}(z) = tanh(z)$$

Función de base radial



$$f_{RBF}(z) = e^{-z^2}$$

Aplicaciones

Aplicaciones

- Clasificación binaria:

Aplicaciones

- Clasificación binaria:
  - Limitador duro: f_{LD}es etiqueta.

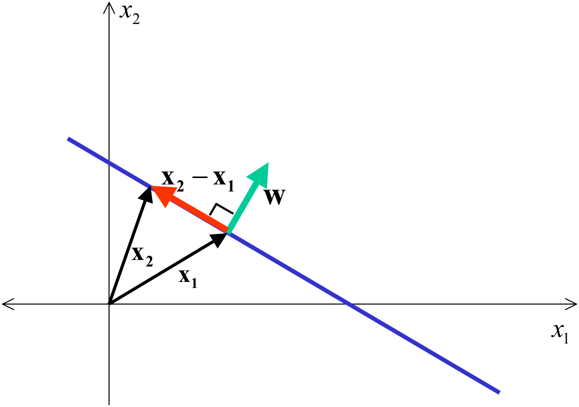
Aplicaciones

- Clasificación binaria:
  - Limitador duro: f_{LD}es etiqueta.
  - Función logística f_s es probabilidad de pertenecer a clase 1.

Aplicaciones

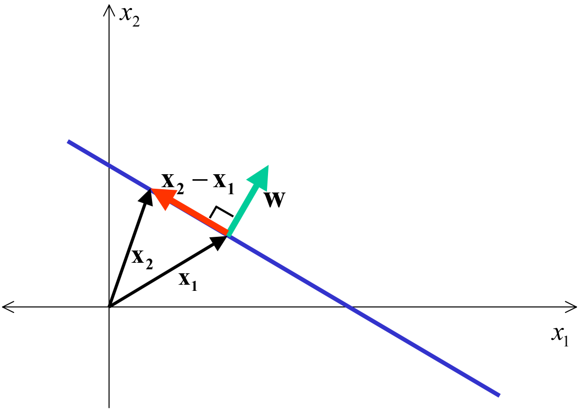
- Clasificación binaria:
  - Limitador duro: f_{LD}es etiqueta.
  - Función logística f_s es probabilidad de pertenecer a clase 1.
- Regresión: Sigmoidal, RBF.

Interpretación geométrica 1



$$C = \{\mathbf{x} : \mathbf{w}^T\mathbf{x} + w_0 = 0\}$$

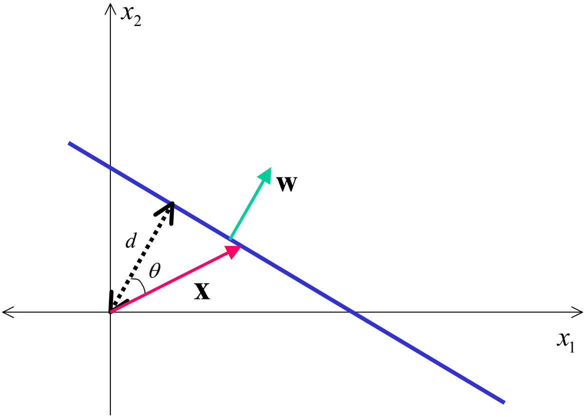
Interpretación geométrica 1



$$C = \{\mathbf{x} : \mathbf{w}^T\mathbf{x} + w_0 = 0\}$$

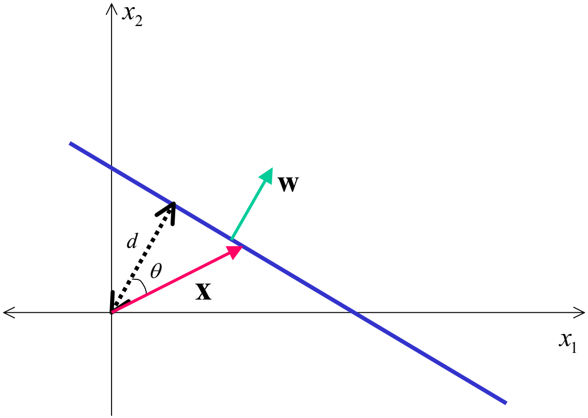
$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C \Rightarrow \mathbf{w}^T(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = 0$$

Interpretación geométrica 2



$$\mathbf{x} \in C \Rightarrow \mathbf{w}^T\mathbf{x} \quad = \quad \|\mathbf{w}\|\|\mathbf{x}\|cos(\theta)$$

Interpretación geométrica 2



$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in C \Rightarrow \mathbf{w}^T\mathbf{x} &= \|\mathbf{w}\|\|\mathbf{x}\|cos(\theta) \\ &= \|\mathbf{w}\|d = -w_0 \Rightarrow d = \frac{-w_0}{\|\mathbf{w}\|} \end{aligned}$$

Cuándo puede ser este modelo óptimo?

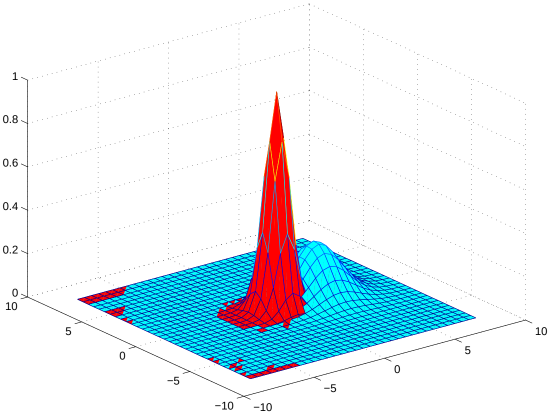
Cuándo puede ser este modelo óptimo?

- Cuando $p_0(\mathbf{x}) \sim N(\mathbf{m}_0, \Sigma)$ y $p_1(\mathbf{x}) \sim N(\mathbf{m}_1, \Sigma)$ el clasificador óptimo de Bayes asigna $\mathbf{x}$ a la clase 1 si:

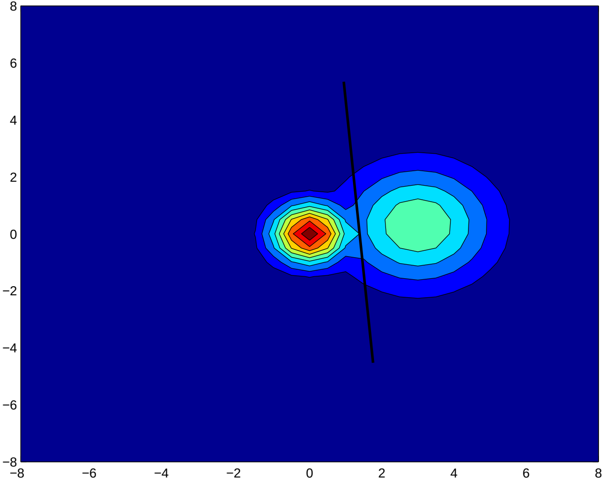
Cuándo puede ser este modelo óptimo?

- Cuando $p_0(\mathbf{x}) \sim N(\mathbf{m}_0, \Sigma)$ y $p_1(\mathbf{x}) \sim N(\mathbf{m}_1, \Sigma)$ el clasificador óptimo de Bayes asigna $\mathbf{x}$ a la clase 1 si:

$$\underbrace{(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_0)^T \Sigma^{-1}}_{\mathbf{w}^T} \mathbf{x} > \underbrace{2 \ln \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{m}_1^T \Sigma^{-1} \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_0^T \Sigma^{-1} \mathbf{m}_0 \right)}_{-w_0}$$



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
10
5
0
−5
−10
−10
−5
0
5
10



8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8

Problema de Aprendizaje

- Tenemos un conjunto de datos $\{\mathbf{x}_i, y_i\}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d, y_i \in \{0, 1\}$.

Problema de Aprendizaje

- Tenemos un conjunto de datos $\{\mathbf{x}_i, y_i\}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d, y_i \in \{0, 1\}$.
- Queremos encontrar $\mathbf{w}$ que nos de una buena regla de clasificación para datos futuros.

Problema de Aprendizaje

- Tenemos un conjunto de datos $\{\mathbf{x}_i, y_i\}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d, y_i \in \{0, 1\}$.
- Queremos encontrar $\mathbf{w}$ que nos de una buena regla de clasificación para datos futuros.
- Si $z_i = f_{LD}(g(\mathbf{w}, \mathbf{x}_i))$, el objetivo es minimizar:

$$\mathbb{P}\{y_i \neq z_i\}$$

Problema de Aprendizaje

- Tenemos un conjunto de datos $\{\mathbf{x}_i, y_i\}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d, y_i \in \{0, 1\}$.
- Queremos encontrar $\mathbf{w}$ que nos de una buena regla de clasificación para datos futuros.
- Si $z_i = f_{LD}(g(\mathbf{w}, \mathbf{x}_i))$, el objetivo es minimizar:

$$\mathbb{P}\{y_i \neq z_i\}$$

- En general, no podemos calcular $\mathbb{P}\{y_i \neq z_i\}$!

Problema de Aprendizaje

- Tenemos un conjunto de datos $\{\mathbf{x}_i, y_i\}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d, y_i \in \{0, 1\}$.
- Queremos encontrar $\mathbf{w}$ que nos de una buena regla de clasificación para datos futuros.
- Si $z_i = f_{LD}(g(\mathbf{w}, \mathbf{x}_i))$, el objetivo es minimizar:

$$\mathbb{P}\{y_i \neq z_i\}$$

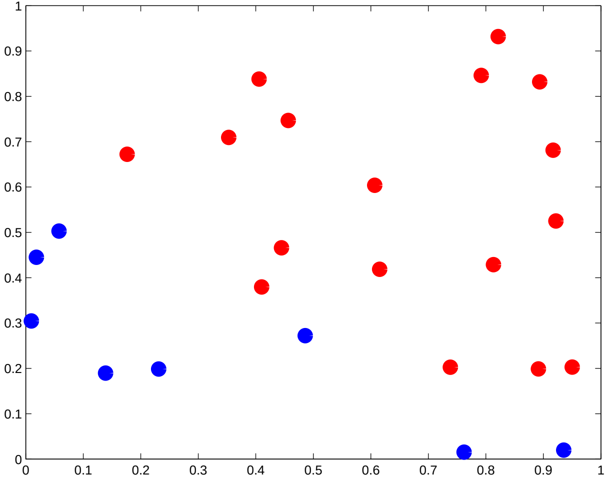
- En general, no podemos calcular $\mathbb{P}\{y_i \neq z_i\}$!
- Estrategia: minimizar función de error en los datos que sea calculable.

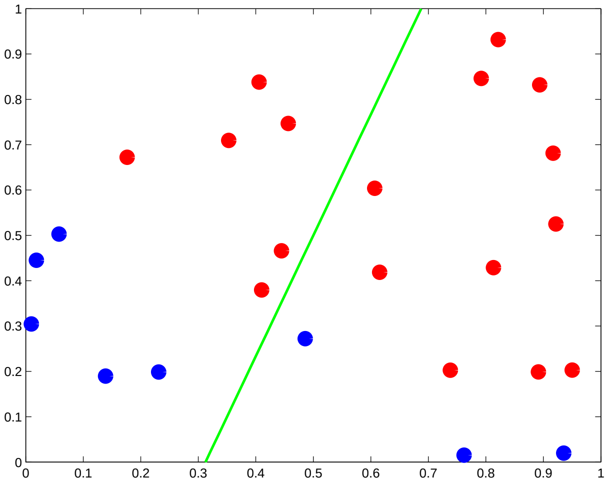
Problema de Aprendizaje

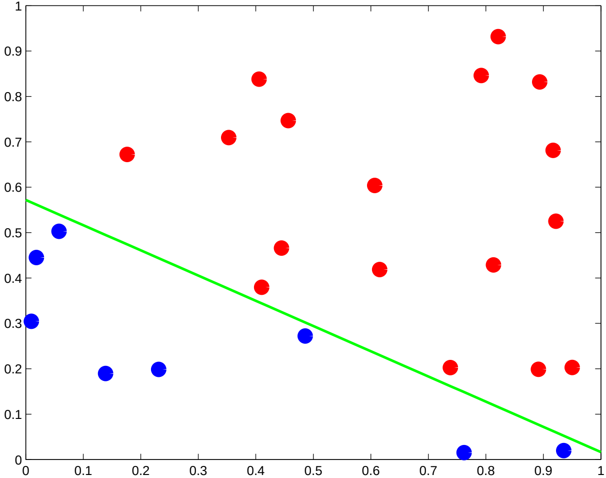
- Tenemos un conjunto de datos $\{\mathbf{x}_i, y_i\}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d, y_i \in \{0, 1\}$.
- Queremos encontrar $\mathbf{w}$ que nos de una buena regla de clasificación para datos futuros.
- Si $z_i = f_{LD}(g(\mathbf{w}, \mathbf{x}_i))$, el objetivo es minimizar:

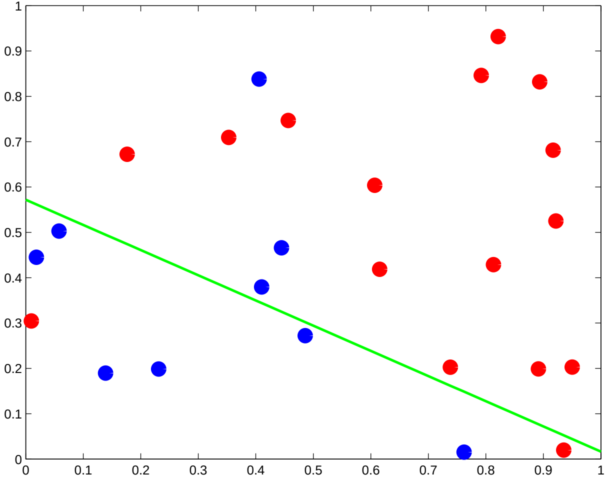
$$\mathbb{P}\{y_i \neq z_i\}$$

- En general, no podemos calcular $\mathbb{P}\{y_i \neq z_i\}$!
- Estrategia: minimizar función de error en los datos que sea calculable.


0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Algoritmos de entrenamiento

Algoritmos de entrenamiento

- Regresión logística.

Algoritmos de entrenamiento

- Regresión logística.
- Algoritmo LMS

Algoritmos de entrenamiento

- Regresión logística.
- Algoritmo LMS
  - Widrow y Hoff (1960)

Algoritmos de entrenamiento

- Regresión logística.
- Algoritmo LMS
  - Widrow y Hoff (1960)
  - Adaptive linear networks (ADALINE).

Algoritmos de entrenamiento

- Regresión logística.
- Algoritmo LMS
  - Widrow y Hoff (1960)
  - Adaptive linear networks (ADALINE).
- Algoritmo del Perceptrón

Algoritmos de entrenamiento

- Regresión logística.
- Algoritmo LMS
  - Widrow y Hoff (1960)
  - Adaptive linear networks (ADALINE).
- Algoritmo del Perceptrón
  - Rosemblatt (1962).

Algoritmos de entrenamiento

- Regresión logística.
- Algoritmo LMS
  - Widrow y Hoff (1960)
  - Adaptive linear networks (ADALINE).
- Algoritmo del Perceptrón
  - Rosemblatt (1962).
  - Prueba de convergencia.

Algoritmos de entrenamiento

- Regresión logística.
- Algoritmo LMS
  - Widrow y Hoff (1960)
  - Adaptive linear networks (ADALINE).
- Algoritmo del Perceptrón
  - Rosemblatt (1962).
  - Prueba de convergencia.
- Perceptrón con bolsillo

Algoritmos de entrenamiento

- Regresión logística.
- Algoritmo LMS
  - Widrow y Hoff (1960)
  - Adaptive linear networks (ADALINE).
- Algoritmo del Perceptrón
  - Rosemblatt (1962).
  - Prueba de convergencia.
- Perceptrón con bolsillo
  - Gallant (1986)

Algoritmos de entrenamiento

- Regresión logística.
- Algoritmo LMS
  - Widrow y Hoff (1960)
  - Adaptive linear networks (ADALINE).
- Algoritmo del Perceptrón
  - Rosemblatt (1962).
  - Prueba de convergencia.
- Perceptrón con bolsillo
  - Gallant (1986)
  - Para datos no linealmente separables.

El algoritmo LMS

- Función de error:

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - g(\mathbf{w}, \mathbf{x}_i))^2$$

El algoritmo LMS

- Función de error:

$$
\begin{aligned}
E(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - g(\mathbf{w},\mathbf{x}_i))^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mathbf{w}^T\mathbf{x}_i))^2
\end{aligned}
$$

El algoritmo LMS

- Función de error:

$$
\begin{aligned}
E(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - g(\mathbf{w},\mathbf{x}_i))^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mathbf{w}^T\mathbf{x}_i))^2
\end{aligned}
$$

- Problema de minimización:

$$
\mathbf{w}^* = \arg\min_{\mathbf{w}} E(\mathbf{w})
$$

El algoritmo LMS

- Función de error:

$$
\begin{aligned}
E(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - g(\mathbf{w},\mathbf{x}_i))^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mathbf{w}^T\mathbf{x}_i))^2
\end{aligned}
$$

- Problema de minimización:

$$\mathbf{w}^* = \arg\min_{\mathbf{w}} E(\mathbf{w})$$

- Para el caso de una neurona, este problema admite una solución analítica.

Solución usando razonamiento geométrico

- Defina:

$$\mathbf{X} = \left[\mathbf{x}_1^T; \quad \mathbf{x}_2^T; \quad \cdots \quad \mathbf{x}_n^T\right]$$

Solución usando razonamiento geométrico

- Defina:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T; & \mathbf{x}_2^T; & \cdots & \mathbf{x}_n^T \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$$

Solución usando razonamiento geométrico

- Defina:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T; & \mathbf{x}_2^T; & \cdots & \mathbf{x}_n^T \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$$

- Entonces, para una solución con $E(\mathbf{w}) = 0$ se requiere:

Solución usando razonamiento geométrico

- Defina:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T; & \mathbf{x}_2^T; & \cdots & \mathbf{x}_n^T \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$$

- Entonces, para una solución con $E(\mathbf{w}) = 0$ se requiere:

$$\mathbf{X}\mathbf{w} = \mathbf{y}$$

Solución usando razonamiento geométrico

- Defina:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T; & \mathbf{x}_2^T; & \cdots & \mathbf{x}_n^T \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$$

- Entonces, para una solución con $E(\mathbf{w}) = 0$ se requiere:

$$\mathbf{X}\mathbf{w} = \mathbf{y}$$

- Es decir, $\mathbf{y}$ debe ser una combinación lineal de las columnas de $\mathbf{X}$.

Solución usando razonamiento geométrico

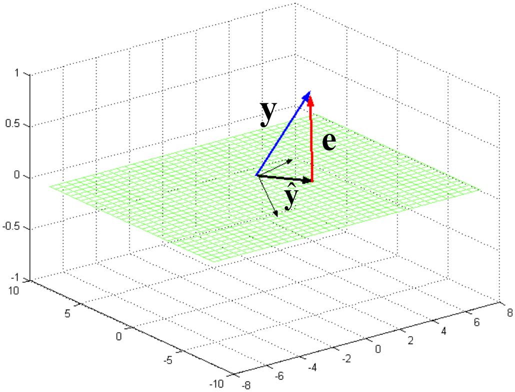
- Defina:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T; & \mathbf{x}_2^T; & \cdots & \mathbf{x}_n^T \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$$

- Entonces, para una solución con $E(\mathbf{w}) = 0$ se requiere:

$$\mathbf{X}\mathbf{w} = \mathbf{y}$$

- Es decir, $\mathbf{y}$ debe ser una combinación lineal de las columnas de $\mathbf{X}$.
- En general, no existe $\mathbf{w}$ que cumpla esta condición.


y
e
ŷ
1
0.5
0
-0.5
-1
10
5
0
-5
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

Solución

$$\mathbf{e} \perp \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\mathbf{w}}$$

Solución

$$\mathbf{e} \perp \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\mathbf{w}} \Rightarrow (\mathbf{X}\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{y}) \perp \mathbf{X}(:, i)$$

Solución

$$\mathbf{e} \perp \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\mathbf{w}} \Rightarrow (\mathbf{X}\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{y}) \perp \mathbf{X}(:, i)$$

$$\mathbf{X}^T(\mathbf{X}\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{y}) = 0$$

Solución

$$\mathbf{e} \perp \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\mathbf{w}} \Rightarrow (\mathbf{X}\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{y}) \perp \mathbf{X}(:, i)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^T(\mathbf{X}\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{y}) &= 0 \\ (\mathbf{X}^T\mathbf{X})\hat{\mathbf{w}} &= \mathbf{X}^T\mathbf{y} \end{aligned}$$

Solución

$$\mathbf{e} \perp \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\mathbf{w}} \Rightarrow (\mathbf{X}\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{y}) \perp \mathbf{X}(:, i)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^T(\mathbf{X}\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{y}) &= 0 \\ (\mathbf{X}^T\mathbf{X})\hat{\mathbf{w}} &= \mathbf{X}^T\mathbf{y} \\ \hat{\mathbf{w}} &= (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \end{aligned}$$

Solución

$$\mathbf{e} \perp \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\mathbf{w}} \Rightarrow (\mathbf{X}\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{y}) \perp \mathbf{X}(:, i)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^T(\mathbf{X}\hat{\mathbf{w}} - \mathbf{y}) &= 0 \\
(\mathbf{X}^T\mathbf{X})\hat{\mathbf{w}} &= \mathbf{X}^T\mathbf{y} \\
\hat{\mathbf{w}} &= (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \\
\hat{\mathbf{w}} &= \mathbf{X}^+\mathbf{y}
\end{aligned}$$

Optimización de la función de error

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i - y_i)^2$$

Optimización de la función de error

$$
\begin{aligned}
E(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i - y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}((\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i)^2 - 2y_i\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i + y_i^2)
\end{aligned}
$$

Optimización de la función de error

$$
\begin{aligned}
E(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i - y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}((\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i)^2 - 2y_i\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i + y_i^2) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T\mathbf{w} - 2y_i\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i + y_i^2)
\end{aligned}
$$

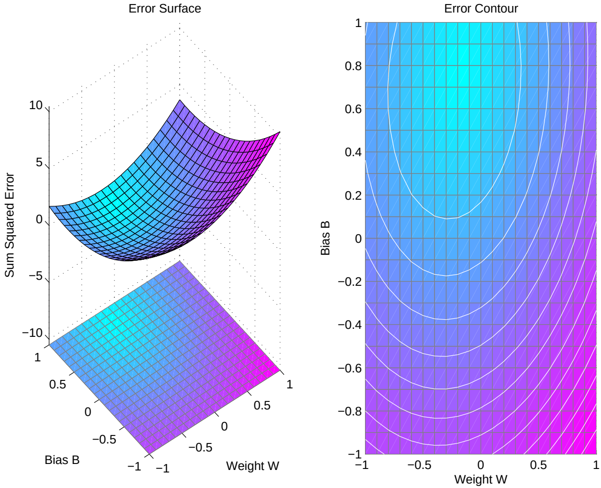
Optimización de la función de error

$$
\begin{aligned}
E(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i - y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}((\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i)^2 - 2y_i\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i + y_i^2) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T\mathbf{w} - 2y_i\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i + y_i^2) \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{H}\mathbf{w} - \mathbf{b}^T\mathbf{w} + c
\end{aligned}
$$

donde:

$$
\mathbf{H} = \textstyle\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T, \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i y_i, \quad c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i
$$

Función de error



Solución

Solución

- El mínimo de $E(\mathbf{w})$ cumple $\nabla_{\mathbf{w}} E = 0$:

Solución

- El mínimo de $E(\mathbf{w})$ cumple $\nabla_{\mathbf{w}} E = 0$:

$$\nabla_{\mathbf{w}} E = \mathbf{H}\mathbf{w} - \mathbf{b} = 0$$

Solución

- El mínimo de $E(\mathbf{w})$ cumple $\nabla_{\mathbf{w}} E = 0$:

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{w}} E &= \mathbf{H}\mathbf{w} - \mathbf{b} = 0 \\
\hat{\mathbf{w}} &= \mathbf{H}^{-1}\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Solución

- El mínimo de $E(\mathbf{w})$ cumple $\nabla_{\mathbf{w}} E = 0$:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{w}} E &= \mathbf{H}\mathbf{w} - \mathbf{b} = 0 \\ \hat{\mathbf{w}} &= \mathbf{H}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

- Se requiere invertir $\mathbf{H}$, que puede no ser invertible o ser mal condicionada.

Solución

- El mínimo de $E(\mathbf{w})$ cumple $\nabla_{\mathbf{w}} E = 0$:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{w}} E &= \mathbf{H}\mathbf{w} - \mathbf{b} = 0 \\ \hat{\mathbf{w}} &= \mathbf{H}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

- Se requiere invertir $\mathbf{H}$, que puede no ser invertible o ser mal condicionada.
- LMS: solución iterativa.

Algoritmo LMS

- Procedimiento iterativo:

Algoritmo LMS

- Procedimiento iterativo:
  1. Comenzar en un punto (aleatorio):

$$\mathbf{w}_0 = \text{random}$$

Algoritmo LMS

- Procedimiento iterativo:
  1. Comenzar en un punto (aleatorio):

$$\mathbf{w}_0 = \text{random}$$

  2. Búsqueda de gradiente: Ir "hacia abajo de la colina".

Algoritmo LMS

- Procedimiento iterativo:
  1. Comenzar en un punto (aleatorio):

$$\mathbf{w}_0 = \text{random}$$

  2. Búsqueda de gradiente: Ir “hacia abajo de la colina”.

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k - \mu \nabla_{\mathbf{w}} E|_{\mathbf{w}_k}$$

Algoritmo LMS

- Procedimiento iterativo:
  1. Comenzar en un punto (aleatorio):

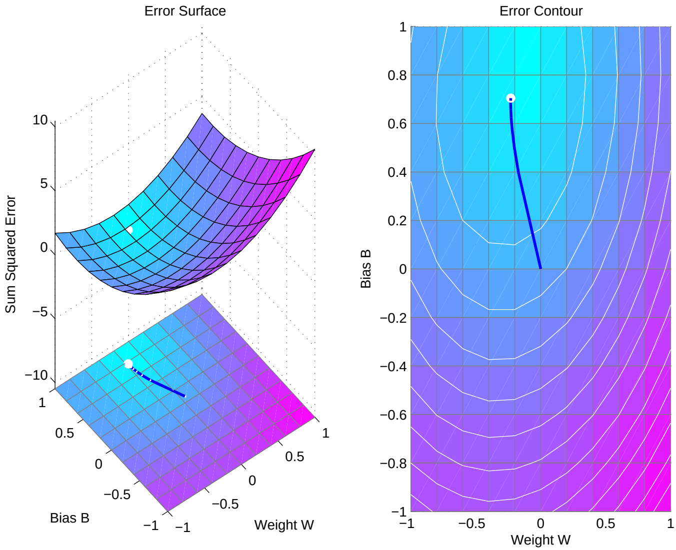
$$\mathbf{w}_0 = \text{random}$$

  2. Búsqueda de gradiente: Ir “hacia abajo de la colina”.

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k - \mu \nabla_{\mathbf{w}} E|_{\mathbf{w}_k}$$

- $\nabla_{\mathbf{w}} E|_{\mathbf{w}_k}$ no se calcula exactamente.

Búsqueda iterativa



Estimación del gradiente

$$
\begin{aligned}
E(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mathbf{w}^T\mathbf{x}_i))^2 \\
\nabla_{\mathbf{w}} E &= \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i - y_i)\mathbf{x}_i
\end{aligned}
$$

Estimación del gradiente

$$
\begin{aligned}
E(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mathbf{w}^T\mathbf{x}_i))^2 \\
\nabla_{\mathbf{w}} E &= \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i - y_i)\mathbf{x}_i
\end{aligned}
$$

- $\nabla_{\mathbf{w}} E|_{\mathbf{w}_k}$ se estima a partir de un subconjunto de los datos.

Estimación del gradiente

$$
\begin{aligned}
E(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mathbf{w}^T\mathbf{x}_i))^2 \\
\nabla_{\mathbf{w}} E &= \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i - y_i)\mathbf{x}_i
\end{aligned}
$$

- $\nabla_{\mathbf{w}} E|_{\mathbf{w}_k}$ se estima a partir de un subconjunto de los datos.
- Varias pasadas por los datos.

Estimación del gradiente

$$
\begin{aligned}
E(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mathbf{w}^T\mathbf{x}_i))^2 \\
\nabla_{\mathbf{w}} E &= \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i - y_i)\mathbf{x}_i
\end{aligned}
$$

- $\nabla_{\mathbf{w}} E|_{\mathbf{w}_k}$ se estima a partir de un subconjunto de los datos.
- Varias pasadas por los datos.
- Usualmente se usa un solo dato

Estimación del gradiente

$$
\begin{aligned}
E(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mathbf{w}^T\mathbf{x}_i))^2 \\
\nabla_{\mathbf{w}} E &= \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i - y_i)\mathbf{x}_i
\end{aligned}
$$

- $\nabla_{\mathbf{w}} E|_{\mathbf{w}_k}$ se estima a partir de un subconjunto de los datos.
- Varias pasadas por los datos.
- Usualmente se usa un solo dato:

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{w}} E &\approx (\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i - y_i)\mathbf{x}_i \\
&= e_i\mathbf{x}_i
\end{aligned}
$$

Algoritmo LMS

Incialize $\mathbf{w}_0$ a valores pequeños.

Algoritmo LMS

Incialize $\mathbf{w}_0$ a valores pequeños.
repeat
  Escoja $(\mathbf{x}_i, y_i)$

Algoritmo LMS

Incialize $\mathbf{w}_0$ a valores pequeños.
repeat
  Escoja $(\mathbf{x}_i, y_i)$
  $g = \mathbf{w}_k^T \mathbf{x}_i$

Algoritmo LMS

Incialize $\mathbf{w}_0$ a valores pequeños.

repeat

  Escoja $(\mathbf{x}_i, y_i)$

  $g = \mathbf{w}_k^T \mathbf{x}_i$

  $e = g - y_i$

Algoritmo LMS

Incialize $\mathbf{w}_0$ a valores pequeños.
repeat
  Escoja $(\mathbf{x}_i, y_i)$
  $g = \mathbf{w}_k^T \mathbf{x}_i$
  $e = g - y_i$
  $\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k - \mu e \mathbf{x}_i$

Algoritmo LMS

Incialize $\mathbf{w}_0$ a valores pequeños.
repeat
  Escoja $(\mathbf{x}_i, y_i)$
  $g = \mathbf{w}_k^T \mathbf{x}_i$
  $e = g - y_i$
  $\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k - \mu e \mathbf{x}_i$
until Condición de terminación.

Condición de terminación

Condición de terminación

- Cuando el error sea suficientemente pequeño:

$$E \leq E_{min}$$

Condición de terminación

- Cuando el error sea suficientemente pequeño:

$$E \leq E_{min}$$

- Cuando el gradiente sea suficientemente cercano a cero:

$$\|\nabla_{\mathbf{w}} E\| \leq g_{\text{mín}}$$

Condición de terminación

- Cuando el error sea suficientemente pequeño:

$$E \leq E_{min}$$

- Cuando el gradiente sea suficientemente cercano a cero:

$$\|\nabla_{\mathbf{w}} E\| \leq g_{\text{mín}}$$

- Validación cruzada.

Condición de terminación

- Cuando el error sea suficientemente pequeño:

$$E \leq E_{min}$$

- Cuando el gradiente sea suficientemente cercano a cero:

$$\|\nabla_{\mathbf{w}} E\| \leq g_{\text{mín}}$$

- Validación cruzada.

El perceptrón

- Conjunto de datos:

$$\{\mathbf{x}_i, y_i\}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d, y_i \in \{-1, 1\}$$

El perceptrón

- Conjunto de datos:

$$\{\mathbf{x}_i, y_i\}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d, y_i \in \{-1, 1\}$$

- $(\mathbf{x}_i, y_i)$ es clasificado correctamente si:

$$g(\mathbf{w}, \mathbf{x}_i) y_i \quad > \quad 0$$

El perceptrón

- Conjunto de datos:

$$\{\mathbf{x}_i, y_i\}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d, y_i \in \{-1, 1\}$$

- $(\mathbf{x}_i, y_i)$ es clasificado correctamente si:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{w}, \mathbf{x}_i) y_i &> 0 \\ (\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i) y_i &> 0 \end{aligned}$$

El perceptrón

- Conjunto de datos:

$$\{\mathbf{x}_i, y_i\}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d, y_i \in \{-1, 1\}$$

- $(\mathbf{x}_i, y_i)$ es clasificado correctamente si:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{w}, \mathbf{x}_i) y_i &> 0 \\ (\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i) y_i &> 0 \end{aligned}$$

- Criterio de error del perceptrón:

El perceptrón

- Conjunto de datos:

$$\{\mathbf{x}_i, y_i\}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d, y_i \in \{-1, 1\}$$

- $(\mathbf{x}_i, y_i)$ es clasificado correctamente si:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{w}, \mathbf{x}_i) y_i &> 0 \\ (\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i) y_i &> 0 \end{aligned}$$

- Criterio de error del perceptrón:

$$E(\mathbf{w}) = -\sum_{\mathbf{x}_i \in \mathcal{M}} (\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i) y_i, \quad \mathcal{M} = \{\mathbf{x}_i : (\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i) y_i < 0\}$$

Criterio de error del perceptrón

- $E(\mathbf{w})$ es una función lineal a trozos.

Criterio de error del perceptrón

- $E(\mathbf{w})$ es una función lineal a trozos.
- $E(\mathbf{w})$ es una función continua.

Criterio de error del perceptrón

- $E(\mathbf{w})$ es una función lineal a trozos.
- $E(\mathbf{w})$ es una función continua.
- $\nabla_{\mathbf{w}} E$ es una función discontinua.

Criterio de error del perceptrón

- $E(\mathbf{w})$ es una función lineal a trozos.
- $E(\mathbf{w})$ es una función continua.
- $\nabla_{\mathbf{w}} E$ es una función discontinua.
- Sin embargo, en los puntos donde es continua, $-\nabla_{\mathbf{w}} E$ es una dirección de descenso en la superficie de error.

Algoritmo del perceptrón

- Procedimiento iterativo:

Algoritmo del perceptrón

- Procedimiento iterativo:
  1. Comenzar en:

$$\mathbf{w}_0 = 0$$

Algoritmo del perceptrón

- Procedimiento iterativo:
  1. Comenzar en:
  $$\mathbf{w}_0 = 0$$
  2. Búsqueda de gradiente: Ir “hacia abajo de la colina”.

Algoritmo del perceptrón

- Procedimiento iterativo:
  1. Comenzar en:

$$\mathbf{w}_0 = 0$$

  2. Búsqueda de gradiente: Ir "hacia abajo de la colina".

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k - \nabla_{\mathbf{w}} E|_{\mathbf{w}_k}$$

Algoritmo del perceptrón

- Procedimiento iterativo:
  1. Comenzar en:
  $$\mathbf{w}_0 = 0$$
  2. Búsqueda de gradiente: Ir "hacia abajo de la colina".
  $$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k - \nabla_{\mathbf{w}} E|_{\mathbf{w}_k}$$
- Nuevamente, $\nabla_{\mathbf{w}} E|_{\mathbf{w}_k}$ no se calcula exactamente:

Algoritmo del perceptrón

- Procedimiento iterativo:
  1. Comenzar en:
  $$\mathbf{w}_0 = 0$$
  2. Búsqueda de gradiente: Ir "hacia abajo de la colina".
  $$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k - \nabla_{\mathbf{w}} E|_{\mathbf{w}_k}$$
- Nuevamente, $\nabla_{\mathbf{w}} E|_{\mathbf{w}_k}$ no se calcula exactamente:
$$\nabla_{\mathbf{w}} E = -\sum_{\mathbf{x}_i \in \mathcal{M}} \mathbf{x}_i y_i$$

Algoritmo del perceptrón

- Procedimiento iterativo:
  1. Comenzar en:
  $$\mathbf{w}_0 = 0$$
  2. Búsqueda de gradiente: Ir "hacia abajo de la colina".
  $$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k - \nabla_{\mathbf{w}} E|_{\mathbf{w}_k}$$
- Nuevamente, $\nabla_{\mathbf{w}} E|_{\mathbf{w}_k}$ no se calcula exactamente:
$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{w}} E &= -\sum_{\mathbf{x}_i \in \mathcal{M}} \mathbf{x}_i y_i \\ &\approx -\mathbf{x}_i y_i \end{aligned}$$

Algoritmo del perceptrón

Incialize $\mathbf{w}_0 = 0$

Algoritmo del perceptrón

Incialize $\mathbf{w}_0 = 0$
repeat
  Escoja $(\mathbf{x}_i, y_i)$ al azar

Algoritmo del perceptrón

Incialize $\mathbf{w}_0 = 0$
repeat
  Escoja $(\mathbf{x}_i, y_i)$ al azar
  if $(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i)y_i < 0$ **then**

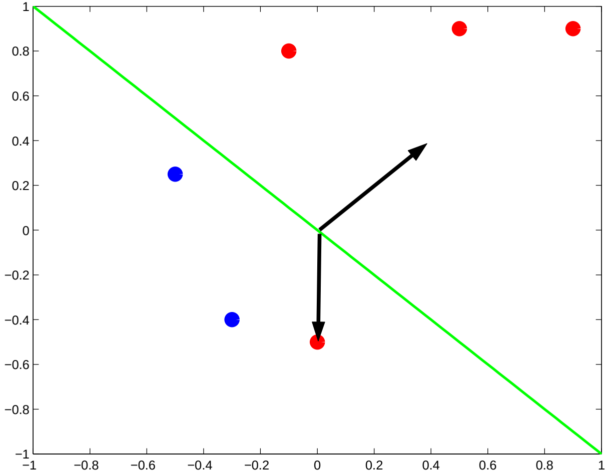
Algoritmo del perceptrón

Incialize $\mathbf{w}_0 = 0$
repeat
  Escoja $(\mathbf{x}_i, y_i)$ al azar
  if $(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i) y_i < 0$ **then**
    $\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k + \mathbf{x}_i y_i$

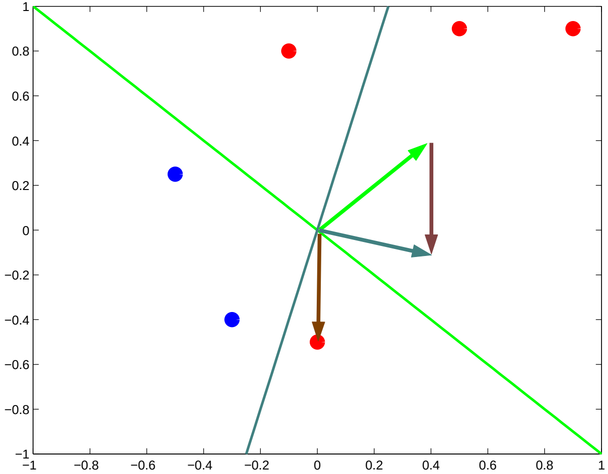
Algoritmo del perceptrón

Incialize $\mathbf{w}_0 = 0$
repeat
  Escoja $(\mathbf{x}_i, y_i)$ al azar
  if $(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i) y_i < 0$ **then**
    $\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k + \mathbf{x}_i y_i$
  end if
until Convergencia.

Interpretación geométrica



Interpretación geométrica



Convergencia

Teorema

Suponga:

Convergencia

Teorema

Suponga:

- $\|\mathbf{x}_i\| \leq K \in \mathbb{R}, \quad i = 1 \ldots, n.$

Convergencia

Teorema

Suponga:

- $\|\mathbf{x}_i\| \leq K \in \mathbb{R}, \quad i = 1 \ldots, n.$
- $\exists \hat{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^{d+1}, \delta > 0 \quad \textit{tal que} \quad \hat{\mathbf{w}}^T \mathbf{x}_i \geq \delta \quad i = 1, \ldots, n.$

Convergencia

Teorema

Suponga:

- $\|\mathbf{x}_i\| \leq K \in \mathbb{R}, \quad i = 1 \ldots, n.$
- $\exists \hat{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^{d+1}, \delta > 0 \quad \textit{tal que} \quad \hat{\mathbf{w}}^T \mathbf{x}_i \geq \delta \quad i = 1, \ldots, n.$

Entonces el algoritmo del perceptrón ejecuta el paso de actualización a lo sumo $\left(\frac{K\|\hat{\mathbf{w}}\|}{\delta}\right)^2$ *veces.*

Convergencia

Teorema

Suponga:

- $\|\mathbf{x}_i\| \leq K \in \mathbb{R}, \quad i = 1 \ldots, n.$
- $\exists \hat{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^{d+1}, \delta > 0 \quad \textit{tal que} \quad \hat{\mathbf{w}}^T \mathbf{x}_i \geq \delta \quad i = 1, \ldots, n.$

Entonces el algoritmo del perceptrón ejecuta el paso de actualización a lo sumo $\left(\frac{K\|\hat{\mathbf{w}}\|}{\delta}\right)^2$ *veces.*

- Es decir, para datos linealmente separables, el algoritmo del perceptrón converge en un número finito de pasos.

Demostración

Demostración

- S.P.D.G Cambie los $\mathbf{x}_i$ para los cuales $\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{x}_i < 0$ por $-\mathbf{x}_i$. Con este cambio $\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i > 0$ indica clasificación correcta.

Demostración

- S.P.D.G Cambie los $\mathbf{x}_i$ para los cuales $\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{x}_i < 0$ por $-\mathbf{x}_i$. Con este cambio $\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i > 0$ indica clasificación correcta.
- Sea t el número de correcciones a $\mathbf{w}$. Con $\mathbf{w}_0 = 0$ tenemos:

Demostración

- S.P.D.G Cambie los $\mathbf{x}_i$ para los cuales $\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{x}_i < 0$ por $-\mathbf{x}_i$. Con este cambio $\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i > 0$ indica clasificación correcta.
- Sea t el número de correcciones a $\mathbf{w}$. Con $\mathbf{w}_0 = 0$ tenemos:

$$\mathbf{w}_t = \mathbf{w}_{t-1} + \mathbf{x}_i$$

Demostración

- S.P.D.G Cambie los $\mathbf{x}_i$ para los cuales $\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{x}_i < 0$ por $-\mathbf{x}_i$. Con este cambio $\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i > 0$ indica clasificación correcta.
- Sea t el número de correcciones a $\mathbf{w}$. Con $\mathbf{w}_0 = 0$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_t &= \mathbf{w}_{t-1} + \mathbf{x}_i \\
\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_t &= \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_{t-1} + \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{x}_i \geq \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_{t-1} + \delta
\end{aligned}
$$

Demostración

- S.P.D.G Cambie los $\mathbf{x}_i$ para los cuales $\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{x}_i < 0$ por $-\mathbf{x}_i$. Con este cambio $\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i > 0$ indica clasificación correcta.
- Sea t el número de correcciones a $\mathbf{w}$. Con $\mathbf{w}_0 = 0$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_t &= \mathbf{w}_{t-1} + \mathbf{x}_i \\
\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_t &= \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_{t-1} + \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{x}_i \geq \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_{t-1} + \delta \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Demostración

- S.P.D.G Cambie los $\mathbf{x}_i$ para los cuales $\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{x}_i < 0$ por $-\mathbf{x}_i$. Con este cambio $\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i > 0$ indica clasificación correcta.
- Sea t el número de correcciones a $\mathbf{w}$. Con $\mathbf{w}_0 = 0$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_t &= \mathbf{w}_{t-1} + \mathbf{x}_i \\
\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_t &= \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_{t-1} + \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{x}_i \geq \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_{t-1} + \delta \\
&\vdots \\
\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_t &\geq (t\delta)
\end{aligned}
$$

Demostración

- S.P.D.G Cambie los $\mathbf{x}_i$ para los cuales $\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{x}_i < 0$ por $-\mathbf{x}_i$. Con este cambio $\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i > 0$ indica clasificación correcta.
- Sea t el número de correcciones a $\mathbf{w}$. Con $\mathbf{w}_0 = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_t &= \mathbf{w}_{t-1} + \mathbf{x}_i \\
\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_t &= \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_{t-1} + \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{x}_i \geq \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_{t-1} + \delta \\
&\vdots \\
\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_t &\geq (t\delta)
\end{aligned}$$

- Similarmente:

Demostración

- S.P.D.G Cambie los $\mathbf{x}_i$ para los cuales $\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{x}_i < 0$ por $-\mathbf{x}_i$. Con este cambio $\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i > 0$ indica clasificación correcta.
- Sea t el número de correcciones a $\mathbf{w}$. Con $\mathbf{w}_0 = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_t &= \mathbf{w}_{t-1} + \mathbf{x}_i \\
\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_t &= \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_{t-1} + \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{x}_i \geq \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_{t-1} + \delta \\
&\vdots \\
\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_t &\geq (t\delta)
\end{aligned}$$

- Similarmente:

$$\|\mathbf{w}_t\|^2 = \mathbf{w}_t^T\mathbf{w}_t = (\mathbf{w}_{t-1} + \mathbf{x}_i)^T(\mathbf{w}_{t-1} + \mathbf{x}_i)$$

Demostración

- S.P.D.G Cambie los $\mathbf{x}_i$ para los cuales $\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{x}_i < 0$ por $-\mathbf{x}_i$. Con este cambio $\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i > 0$ indica clasificación correcta.
- Sea t el número de correcciones a $\mathbf{w}$. Con $\mathbf{w}_0 = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_t &= \mathbf{w}_{t-1} + \mathbf{x}_i \\
\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_t &= \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_{t-1} + \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{x}_i \geq \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_{t-1} + \delta \\
&\vdots \\
\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_t &\geq (t\delta)
\end{aligned}$$

- Similarmente:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{w}_t\|^2 = \mathbf{w}_t^T\mathbf{w}_t &= (\mathbf{w}_{t-1} + \mathbf{x}_i)^T(\mathbf{w}_{t-1} + \mathbf{x}_i) \\
&= \|\mathbf{w}_{t-1}\|^2 + 2\mathbf{w}_{t-1}^T\mathbf{x}_i + \|\mathbf{x}_i\|^2 \leq \|\mathbf{w}_{t-1}\|^2 + K^2
\end{aligned}$$

Demostración

- S.P.D.G Cambie los $\mathbf{x}_i$ para los cuales $\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{x}_i < 0$ por $-\mathbf{x}_i$. Con este cambio $\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i > 0$ indica clasificación correcta.
- Sea t el número de correcciones a $\mathbf{w}$. Con $\mathbf{w}_0 = 0$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_t &= \mathbf{w}_{t-1} + \mathbf{x}_i \\
\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_t &= \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_{t-1} + \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{x}_i \geq \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_{t-1} + \delta \\
&\vdots \\
\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_t &\geq (t\delta)
\end{aligned}
$$

- Similarmente:

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{w}_t\|^2 &= \mathbf{w}_t^T\mathbf{w}_t = (\mathbf{w}_{t-1} + \mathbf{x}_i)^T(\mathbf{w}_{t-1} + \mathbf{x}_i) \\
&= \|\mathbf{w}_{t-1}\|^2 + 2\mathbf{w}_{t-1}^T\mathbf{x}_i + \|\mathbf{x}_i\|^2 \leq \|\mathbf{w}_{t-1}\|^2 + K^2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Demostración

- S.P.D.G Cambie los $\mathbf{x}_i$ para los cuales $\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{x}_i < 0$ por $-\mathbf{x}_i$. Con este cambio $\mathbf{w}^T\mathbf{x}_i > 0$ indica clasificación correcta.
- Sea t el número de correcciones a $\mathbf{w}$. Con $\mathbf{w}_0 = 0$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_t &= \mathbf{w}_{t-1} + \mathbf{x}_i \\
\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_t &= \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_{t-1} + \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{x}_i \geq \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_{t-1} + \delta \\
&\vdots \\
\hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{w}_t &\geq (t\delta)
\end{aligned}
$$

- Similarmente:

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{w}_t\|^2 &= \mathbf{w}_t^T\mathbf{w}_t = (\mathbf{w}_{t-1} + \mathbf{x}_i)^T(\mathbf{w}_{t-1} + \mathbf{x}_i) \\
&= \|\mathbf{w}_{t-1}\|^2 + 2\mathbf{w}_{t-1}^T\mathbf{x}_i + \|\mathbf{x}_i\|^2 \leq \|\mathbf{w}_{t-1}\|^2 + K^2 \\
&\vdots \\
\|\mathbf{w}_t\|^2 &\leq tK^2
\end{aligned}
$$

- Combinando:

- Combinando:

$$t\delta \leq \hat{\mathbf{w}}^T \mathbf{w}_t$$

- Combinando:

$$
\begin{aligned}
t\delta &\leq \hat{\mathbf{w}}^T \mathbf{w}_t \\
&= \|\hat{\mathbf{w}}\| \|\mathbf{w}_t\| cos\theta
\end{aligned}
$$

- Combinando:

$$\begin{aligned} t\delta &\leq \hat{\mathbf{w}}^T \mathbf{w}_t \\ &= \|\hat{\mathbf{w}}\| \|\mathbf{w}_t\| cos\theta \\ &\leq \|\hat{\mathbf{w}}\| \|\mathbf{w}_t\| \end{aligned}$$

- Combinando:

$$\begin{aligned} t\delta &\leq \hat{\mathbf{w}}^T \mathbf{w}_t \\ &= \|\hat{\mathbf{w}}\| \|\mathbf{w}_t\| cos\theta \\ &\leq \|\hat{\mathbf{w}}\| \|\mathbf{w}_t\| \\ &\leq \|\hat{\mathbf{w}}\| K\sqrt{t} \end{aligned}$$

- Combinando:

$$
\begin{aligned}
t\delta &\leq \hat{\mathbf{w}}^T \mathbf{w}_t \\
&= \|\hat{\mathbf{w}}\| \|\mathbf{w}_t\| cos\theta \\
&\leq \|\hat{\mathbf{w}}\| \|\mathbf{w}_t\| \\
&\leq \|\hat{\mathbf{w}}\| K\sqrt{t} \\
t &\leq \left(\frac{K\|\hat{\mathbf{w}}\|}{\delta} \right)^2
\end{aligned}
$$

- Combinando:

$$
\begin{aligned}
t\delta &\leq \hat{\mathbf{w}}^T \mathbf{w}_t \\
&= \|\hat{\mathbf{w}}\| \|\mathbf{w}_t\| cos\theta \\
&\leq \|\hat{\mathbf{w}}\| \|\mathbf{w}_t\| \\
&\leq \|\hat{\mathbf{w}}\| K\sqrt{t} \\
t &\leq \left(\frac{K\|\hat{\mathbf{w}}\|}{\delta}\right)^2
\end{aligned}
$$

$\square$

Observaciones

Observaciones

- Convergencia (lo cual es bueno...)

Observaciones

- Convergencia (lo cual es bueno...).
- En la práctica no es posible determinar número de iteraciones antes de ejecutar el algoritmo.

Observaciones

- Convergencia (lo cual es bueno...).
- En la práctica no es posible determinar número de iteraciones antes de ejecutar el algoritmo.
- Para datos que son "menos" separables (δ pequeño) t es grande.

Observaciones

- Convergencia (lo cual es bueno...).
- En la práctica no es posible determinar número de iteraciones antes de ejecutar el algoritmo.
- Para datos que son “menos” separables (δ pequeño) t es grande.
- Condición de separabilidad lineal:

Observaciones

- Convergencia (lo cual es bueno...).
- En la práctica no es posible determinar número de iteraciones antes de ejecutar el algoritmo.
- Para datos que son "menos" separables (δ pequeño) t es grande.
- Condición de separabilidad lineal:
  - Ruido.

Observaciones

- Convergencia (lo cual es bueno...).
- En la práctica no es posible determinar número de iteraciones antes de ejecutar el algoritmo.
- Para datos que son "menos" separables (δ pequeño) t es grande.
- Condición de separabilidad lineal:
  - Ruido.
  - Generalización?

Observaciones

- Convergencia (lo cual es bueno...).
- En la práctica no es posible determinar número de iteraciones antes de ejecutar el algoritmo.
- Para datos que son "menos" separables (δ pequeño) t es grande.
- Condición de separabilidad lineal:
  - Ruido.
  - Generalización?
  - Cuando no hay separabilidad, determinar máximo conjunto separable es un problema difícil (NP completo).

Observaciones

- Convergencia (lo cual es bueno...).
- En la práctica no es posible determinar número de iteraciones antes de ejecutar el algoritmo.
- Para datos que son “menos” separables (δ pequeño) t es grande.
- Condición de separabilidad lineal:
  - Ruido.
  - Generalización?
  - Cuando no hay separabilidad, determinar máximo conjunto separable es un problema difícil (NP completo).
- Cuando no hay separabilidad, el algoritmo oscila y no termina.