Optimización[1].

Examen Final
Nombre: 27 de noviembre de 2008

---

1. **(17 puntos)** Para el siguiente problema de optimización sin restricciones:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & x_1 e^{-x_2} \\ \text{sujeto a} & x_1 - 2x_2 = 1 \\ & 0 \le x_1 \le 4 \end{array}$$

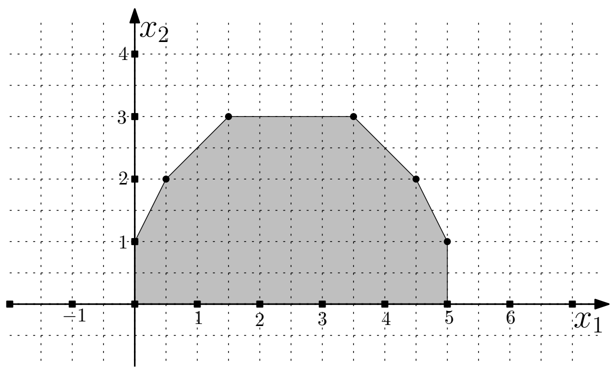
   a) Grafique el conjunto factible y halle las direcciones factibles para un punto factible (x_1, x_2) con $0 < x_1 < 4$.

   b) Encuentre un punto factible (x_1, x_2) con $0 < x_1 < 4$ que cumpla la condición necesaria de primer orden para un máximo local.

[1] Usted debe justificar todas sus respuestas. Una respuesta que aparezca de la nada no tiene ningún valor.

2. **(17 puntos)** Considere la minimización de la función cuadrática en $\mathbb{R}^2$, $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x}$. Los valores propios de $\mathbf{Q}$ son $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 1$ y los vectores propios correspondientes son $\mathbf{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y $\mathbf{v}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Suponga que se corre Steepest Descent dos veces desde los puntos iniciales $\mathbf{x}_1 = (\frac{9}{\sqrt{2}}, \frac{11}{\sqrt{2}})$ y $\mathbf{x}_2 = (-\frac{9}{\sqrt{2}}, \frac{11}{\sqrt{2}})$. Para cuál de estos puntos iniciales es la convergencia al mínimo de f más rápida?

3. **(16 puntos)** Considere el problema de optimización $\max 3x_1 + x_2$ sujeto a $(x_1, x_2) \in C$ donde C es el conjunto mostrado en la figura:



a) Escriba este problema como un programa lineal en forma estándar.

b) Si la SBF inicial está dada por las variables de holgura ($y_i = 1$), liste la secuencia de SBFs visitadas por el método simplex (que escoje siempre la variable libre correspondiente al costo reducido más negativo) en este problema.

4. **(Bono: 10 puntos)** Considere el problema de maximización de entropía sujeto a restricciones lineales:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f_0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \end{aligned}$$

Muestre que la solución óptima tiene la forma:

$$x_i^* = \frac{\exp\left(-\mathbf{a}_i^T \boldsymbol{\lambda}^*\right)}{Z}$$

donde Z es un factor de normalización tal que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$