ISIS 1105 Diseño de Algoritmos
Semestre 2010-2 - Tarea No. 2
Prof. Rodrigo Cardoso
Fecha de entrega: Octubre 21, 2010, 10:00 (por Sicua)

---

1 **[30/100]** Un CD tiene N pistas, $N>0$, cada una con duración en segundos $d_1,\ldots,d_N$. Un reproductor de música tiene una capacidad de M minutos de grabación.
Se quiere encontrar un subconjunto de pistas del CD que pueda copiarse en el reproductor (sin repetir pistas) que minimice el tiempo de grabación que se desperdicie.
Estime el orden de complejidad temporal y espacial de su algoritmo.

Lenguaje

maxd(i,x)	≈	Máxima duración posible si las pistas son 1,2,…,i y el reproductor tiene una capacidad de x, $0\le i\le N$, $0\le x\le 60*M$
maxd(N,60*M) =		?

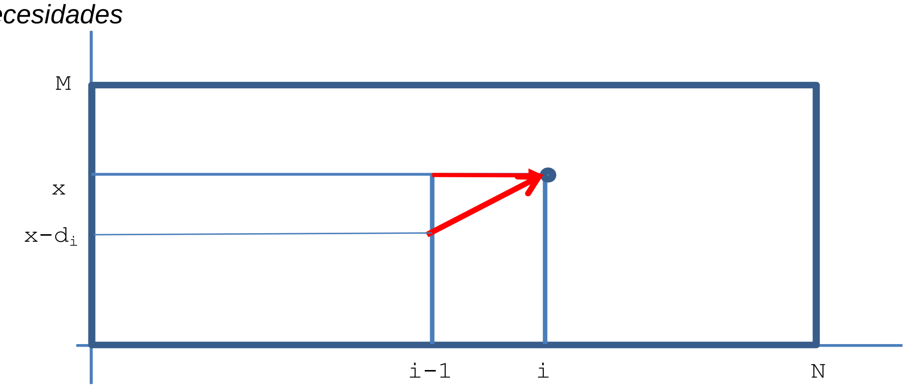
[10/30]

Recurrencia

$$\begin{aligned} maxd(i,x) &= 0 &&, i=0\\ &= maxd(i-1,x) &&, 0<i\le N,\ x<d_i\le 60*M\\ &= \max(maxd(i-1,x),\ d_i + maxd(i-1,x-d_i)) &&, 0<i\le N,\ d_i<x\le 60*M \end{aligned}$$

[5/30]

Diagrama de necesidades



[5/30]

Estructura de datos + Invariante

MD: [0..60*M]**:nat**

Inv : $0\le i\le N \wedge MD[0..x]=maxd(i-1,.) \wedge MD[x+1..60*M]=maxd(i,.)$

[5/30]

Complejidad

$T(N,M) = \theta(NM)$
$S(N,M) = \theta(M)$

[5/30]

Variante 1

Considere un problema de morral, donde:

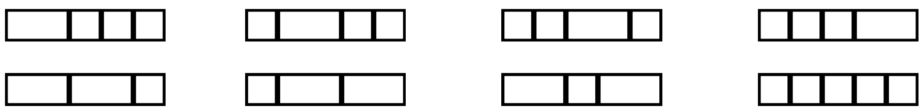
Peso	≈	Duración en segundos
Objetos	≈	Pistas para pasar del CD al reproductor (numeradas `1, 2, ..., N`)
Morral	≈	Capacidad del reproductor ("pesa", i.e., dura `60*M`)
Utilidad	≈	Duración en segundos de lo grabado.

La solución gasta los siguientes recursos:

```
T(N,M) = O(NM)
S(N,M) = O(M)
```

[30/30]

2 **[40/100]** Se desea pavimentar un camino rectangular de dimensiones `1xN` con losas de dimensiones `1xk`, para `k=1,2,...,M`. Se quiere determinar de cuántas maneras puede llevarse a cabo la pavimentación. Por ejemplo, si `N=5`, `M=2`, hay `8` maneras de hacerlo:



Diseñe un algoritmo de programación dinámica que resuelva el problema en el caso general.
Estime el orden de complejidad temporal y espacial de su algoritmo.

Lenguaje:

```
nmp(i) ≈ "número de maneras de pavimentar camino de 1xi", 0<i≤N

nmp(N) = ?
```

[10/40]

Recurrencia:

```
nmp(i)  =   1                          , si 1=i
        =   (+k| 1≤k≤min(i,M): nmp(i-k))  , si 1<i≤N
```

[10/30]

Diagrama de necesidades

[5/30]

Estructura de datos + Invariante

```
NMP: [0..60*M]:nat
Inv : 0≤i≤N ∧ NMP[i-min(i,M)..i-1]=nmp(.)
```

[5/30]

Nótese que solo son necesarios, a lo sumo, los `M` últimos valores calculados.

Complejidad

```
S(N,M) = O(M)
T(N,M) = O(N)*O(M) = O(MN)
```

El cálculo en cada iteración es `O(M)`.

[10/30]

3 [30/100] Dadas dos vasijas de capacidad `a` y `b` litros, con `a<b`, estime el orden de complejidad en tiempo de un algoritmo que, usando el algoritmo de Dijkstra, permita decidir si es posible medir `c` litros en una de ellas, con `0<c≤min(a,b)`.

El problema se puede plantear como una búsqueda de una ruta en un grafo.

Se definen:

```
V = {(x,y)| 0≤x≤a, 0≤y≤b}
```

[5/30]

$E = \{(x,y)\rightarrow(u,v) \mid (x,y)\rightarrow_{op}(u,v)\}$

donde $op \in \{la, lb, va, vb, ta, tb\}$

$(x,y)\rightarrow_{la}(a,y)$		// a arcos
$(x,y)\rightarrow_{lb}(x,b)$		// b arcos
$(x,y)\rightarrow_{va}(0,y)$		// a arcos
$(x,y)\rightarrow_{vb}(x,0)$		// b arcos
$(x,y)\rightarrow_{ta}(x+y-b,b)$	, $b\le x+y\le a+b$	// a+(a-1)+…+0 = a(a+1)/2 arcos
$(x,y)\rightarrow_{ta}(0,x+y)$	, $0\le x+y\le b$	// b+(b-1)+…+0 = b(b+1)/2 arcos
$(x,y)\rightarrow_{tb}(a,x+y-a)$	, $a\le x+y\le a+b$	// b+(b-1)+…+0 = b(b+1)/2 arcos
$(x,y)\rightarrow_{tb}(x+y,0)$	, $0\le x+y\le a$	// a+(a-1)+…+0 = a(a+1)/2 arcos

[10/30]

`G(V,E)` es el grafo de conectividad entre estados del problema (`V`). Usando `1` como distancia entre nodos conectados e ∞ entre no conectados, el algoritmo de Dijkstra permite encontrar o no un camino entre `(0,0)` y `(c,y)` o `(x,0)`.

Hay `#V = (a+1)*(b+1)= ab+a+b` nodos.

[5/30]

Hay $\#E = 2a+2b+a(a+1)+b(b+1) = a^2+4a+4b+b^2$ arcos.

[5/30]

El algoritmo de Dijkstra puede ser implementado en

$$
\begin{aligned}
& T(a,b) \\
= \;& O(\#V \log(\#V) + \#E) \\
= \;& O((ab+a+b)\log(ab+a+b) + a^2+4a+4b+b^2) \\
= \;& \quad \langle\, a < b \,\rangle \\
& O(b^2 (\log b)).
\end{aligned}
$$

[5/30]