Taller 2 señales y sistemas

Sebastián Valencia Calderón
Universidad de los Andes

Febrero 26, 2013

1. Calcule la DFT de las siguientes señales $\vec{\boldsymbol{u}} = [1,0,0,0,0]$, $\vec{\boldsymbol{v}} = [0,1,0,0,0]$, $\vec{\boldsymbol{w}} = [0,0,1,0,0]$, $\vec{\boldsymbol{x}} = [0,0,0,1,0]$ y $\vec{\boldsymbol{y}} = [0,0,0,0,1]$. Grafique la magnitud y la fase de las transfromadas.

   La DFT, se define con la siguiente regla de transformación, donde x_n es la n-ésima posición del vector a transformar o de la entrada, y X_n la n-ésima posición del vector transfromado o la salida.

$$\mathbf{DFT}[z_k] = Z_k = \sum_{n=0}^{N-1} z_n e^{\frac{-i2n\pi}{N}k}$$

   A cada vector o señal discreta se le aplicará la regla de transformación para obtener la respectiva DFT, a continuación se muestra el proceso algorítmico de cada transformación. Para las cinco señales, se tiene que su longitud N es cinco, por lo tanto la regla de transformación de un vector de entrada z estará dada por la igualdad anterior con $N = 5$. Ya que los vectores tienen magnitud uno por tener un único elemento unitario en él, la deducción formal de la transformada, se reduce a evaluar la expresión $e^{\frac{-i2n\pi}{N}k}$ para n igual a la posición de la entrada unitaria del vector, comenzando el conteo de posición en cero.

$$U_k = e^{\frac{-i2(0)\pi}{5}k} = [e^{\frac{0}{5}}, e^{\frac{0}{5}}, e^{\frac{0}{5}}, e^{\frac{0}{5}}, e^{\frac{0}{5}}] = [1,1,1,1,1]$$
$$V_k = e^{\frac{-i2(1)\pi}{5}k} = [e^{\frac{-i2\pi}{5}0}, e^{\frac{-i2\pi}{5}1}, e^{\frac{-i2\pi}{5}2}, e^{\frac{-i2\pi}{5}3}, e^{\frac{-i2\pi}{5}4}] = [1, e^{\frac{-i2\pi}{5}}, e^{\frac{-i4\pi}{5}}, e^{\frac{-i6\pi}{5}}, e^{\frac{-i8\pi}{5}}]$$
$$W_k = e^{\frac{-i2(2)\pi}{5}k} = [e^{\frac{-i4\pi}{5}0}, e^{\frac{-i4\pi}{5}1}, e^{\frac{-i4\pi}{5}2}, e^{\frac{-i4\pi}{5}3}, e^{\frac{-i4\pi}{5}4}] = [1, e^{\frac{-i4\pi}{5}}, e^{\frac{-i8\pi}{5}}, e^{\frac{-i12\pi}{5}}, e^{\frac{-i16\pi}{5}}]$$
$$X_k = e^{\frac{-i2(3)\pi}{5}k} = [e^{\frac{-i6\pi}{5}0}, e^{\frac{-i6\pi}{5}1}, e^{\frac{-i6\pi}{5}2}, e^{\frac{-i6\pi}{5}3}, e^{\frac{-i6\pi}{5}4}] = [1, e^{\frac{-i6\pi}{5}}, e^{\frac{-i12\pi}{5}}, e^{\frac{-i18\pi}{5}}, e^{\frac{-i24\pi}{5}}]$$
$$Y_k = e^{\frac{-i2(4)\pi}{5}k} = [e^{\frac{-i8\pi}{5}0}, e^{\frac{-i8\pi}{5}1}, e^{\frac{-i8\pi}{5}2}, e^{\frac{-i8\pi}{5}3}, e^{\frac{-i8\pi}{5}4}] = [1, e^{\frac{-i8\pi}{5}}, e^{\frac{-i16\pi}{5}}, e^{\frac{-i24\pi}{5}}, e^{\frac{-i32\pi}{5}}]$$

   Para facilitar el proceso de graficación, se usará la forma rectangular de cada elemento. Puesto que es más fácil de considerar la magnitud y la fase dada esta forma. La anterior descripción, resulta muy tediosa si se hace con una calculadora, por lo tanto, se ahorra tiempo implementando un algoritmo en MATLAB que para cada vector de entrada de tamaño N, arroja su DFT; el algoritmo es el siguiente

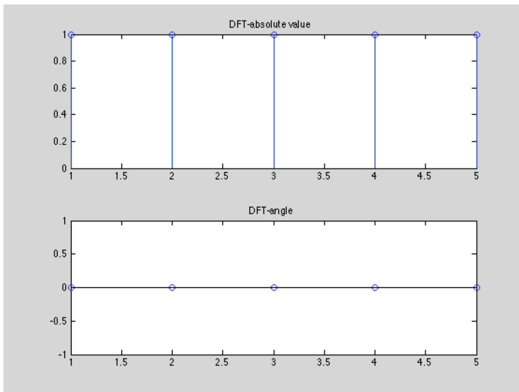
(El algoritmo, fue diseñado por John Proakis, se encuentra en MATLAB central. No se incluyen comentarios por su sencillez.)

```
function [Xk] = dft(xn,N)
n = [0:1:N-1];
k = [0:1:N-1];
WN = exp(-j*2*pi/N);
nk = n'*k;
WNnk = WN .^ nk;
Xk = xn * WNnk;
```

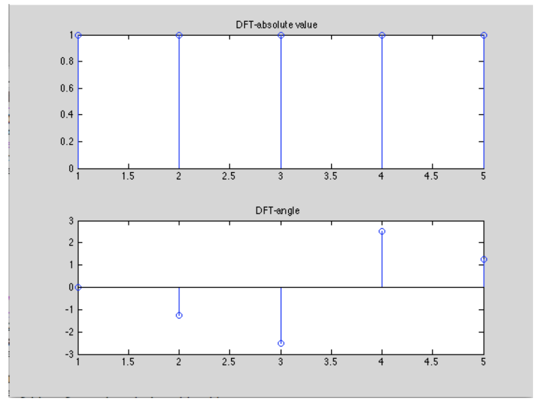
La implementación en MATLAB del anterior algoritmo, para cada señal da los siguientes resultados, donde a,b,c,d,e son los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}, \vec{y}$ respectivamente y N es cinco.

```
>> dft(a,N)
ans =

     1     1     1     1     1

>> dft(b,N)
ans =

   1.0000  0.3090 - 0.9511i  -0.8090 - 0.5878i  -0.8090 + 0.5878i   0.3090 + 0.9511i

>> dft(c,N)
ans =

   1.0000  -0.8090 - 0.5878i   0.3090 + 0.9511i   0.3090 - 0.9511i  -0.8090 +
   0.5878i

>> dft(d,N)
ans =

   1.0000 -0.8090 + 0.5878i   0.3090 - 0.9511i   0.3090 + 0.9511i  -0.8090 - 0.5878i

>> dft(e,N)
ans =

   1.0000  0.3090 + 0.9511i  -0.8090 + 0.5878i  -0.8090 - 0.5878i   0.3090 - 0.9511i

>>
```

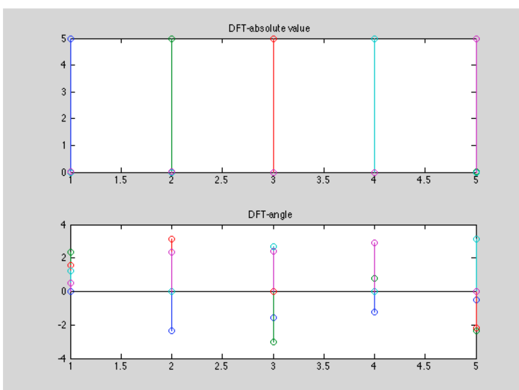
Ahora que se conocen las transformadas de las funciones y un método computacional para hacerlo, se grafica también con MATLAB la magnitud y la fase de la transformada. En la siguiente disposición de figuras, es posible ver que para el tercer vector, la fase de su DFT obedece su naturaleza de función multivaluada, es decir que para un valor de n puede tomar varios valores de la variable dependiente. Asimismo, puede verse que la amplitud de cada DFT es uno para todos los valores de n, lo cual era de esperarse por el factor multiplicativo de la expresión $e^{\frac{-i2n\pi}{N}k}$ para cada transfromada, el cual es uno.
Para la obtención de las gráficas, usando la forma rectangular de cada elemento del vector de salida, se halló con la funcion diseñada de MATLAB **cart2poly(a,b)**para un número complejo $a + ib$,



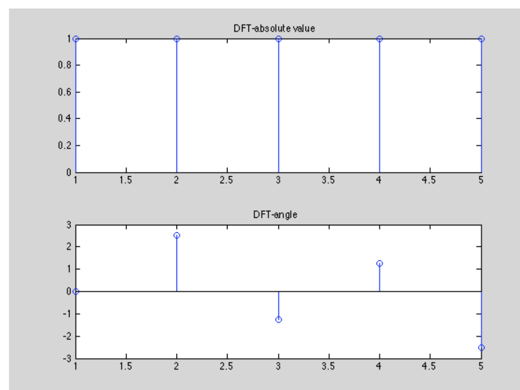
(a) DFT-A



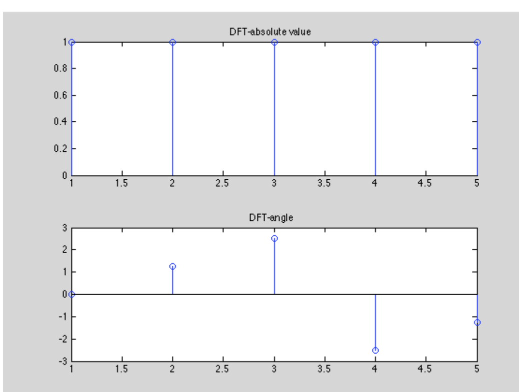
(b) DFT-B



(c) DFT-C



(d) DFT-D



(e) DFT-E

Figure 1: Gráficos de amplitud magnitud de la DFT de cada vector

2. Con base en la definición de la DFT, muestre que la transformada de la señal $y_n = x_{[n+m]} \bmod N$ está dada por $Y_k = e^{\frac{i2m\pi}{N}k} X_k$ Explique los resultados del punto anterior a la luz de esta propiedad de corrimiento de la DFT.

   Sea $\vec{\boldsymbol{x}} = [x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}]$ una señal de N entradas, sea $\vec{\boldsymbol{X}} = [X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}]$ su DFT. Si se define la señal y como un corrimiento modular de la señal x de la forma $\vec{\boldsymbol{y}} = [x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m-1}]$, se tiene que la transformada de este vector modificado será:

$$\mathbf{DFT}[y_k] = Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{\frac{-i2n\pi}{N}k} = \sum_{n=0}^{N-1} x_{[n+m]_N} e^{\frac{-i2n\pi}{N}k}$$

$$= x_{[m]_N} e^{\frac{-i2(0)\pi}{N}k} + x_{[m+1]_N} e^{\frac{-i2(1)\pi}{N}k} + \ldots + x_{[m+N]_N} e^{\frac{-i2(N-1)\pi}{N}k}$$

$$= x_{[m]} + x_{[m+1]} e^{\frac{-i2(1)\pi}{N}k} + \ldots + x_{[m-1]} e^{\frac{-i2(N-1)\pi}{N}k}$$

   realizando un ingenioso cambio de variables sobre el factor de Fourier, se tiene:

$$= x_{[m]} e^{\frac{i2m\pi}{N}k} e^{\frac{-i2m\pi}{N}k} + x_{[m+1]} e^{\frac{i2m\pi}{N}k} e^{\frac{-i2(m+1)\pi}{N}k} + \ldots + x_{[N-1]} e^{\frac{i2m\pi}{N}k} e^{\frac{-i2(N-1)\pi}{N}k} +$$

$$x_{[0]} e^{\frac{i2m\pi}{N}k} e^{\frac{-i2(0)\pi}{N}k} + \ldots + x_{[m-1]} e^{\frac{i2m\pi}{N}k} e^{\frac{-i2(N-1+m)\pi}{N}k}$$

$$= e^{\frac{i2m\pi}{N}k} \big[x_{[m]} e^{\frac{-i2m\pi}{N}k} + x_{[m+1]} e^{\frac{-i2(m+1)\pi}{N}k} + \ldots + x_{[N-1]} e^{\frac{-i2(N-1)\pi}{N}k} + x_{[0]} e^{\frac{-i2(0)\pi}{N}k} + \ldots$$

$$+ x_{[m-1]} e^{\frac{-i2(N-1+m)\pi}{N}k} \big]$$

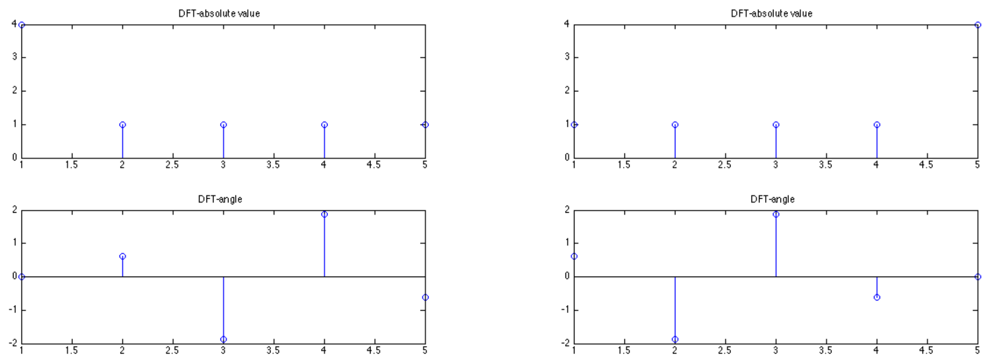
   Nuevamente, la circularidad de la señal y, permite realizar un cambio de variable sobre el subíndice de x sin alterar su valor. De tal manera, la señal $\mathbf{DFT}[y_k]$ queda:

$$e^{\frac{i2m\pi}{N}k} \big[x_{[0]} e^{\frac{-i2(0)\pi}{N}k} + x_{[m-1]} e^{\frac{-i2(N-1+m)\pi}{N}k} + \ldots + x_{[m+1]} e^{\frac{-i2(m+1)\pi}{N}k} + \ldots$$

$$+ x_{[N-1]} e^{\frac{-i2(N-1)\pi}{N}k} \big]$$

$$= e^{\frac{i2m\pi}{N}k} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\frac{-i2n\pi}{N}k} = e^{\frac{i2m\pi}{N}k} [X_0, X_1, \ldots, X_{N-2}, X_{N-1}] = e^{\frac{i2m\pi}{N}k} X_k$$

   Para explicar los resultados del punto anterior, se puede ver que los cuatro últimos vectores son corrimientos del primero con distintos valores de m, por lo tanto, al poderse representar por medio de señales periodicas, la DFT del segundo, tercero, cuarto y quinto corresponden a lo demostrado es éste inciso.



(a) DFT-A (b) DFT-B

Figure 2: Gráficos de amplitud magnitud de la DFT de cada vector

3. Calcule y grafique la DFT de las señales $[1, 1, 0, 1, 1]$ y $[1, e^{\frac{i2\pi}{5}}, 0, e^{\frac{i6\pi}{5}}, e^{\frac{i8\pi}{5}}]$
Para esto, se utiliza el algoritmo implementado en MATLAB anteriormente citado. Asimismo, arriba se muestran las gráficas de amplitud y magnitud de cada DFT.

```
>> k

k =

     1     1     0     1     1

>> dft(k,5)

ans =

   4.0000             0.8090 + 0.5878i  -0.3090 - 0.9511i  -0.3090 + 0.9511i   0.8090 - 0.5878i

>> g

g =

   1.0000             0.3090 + 0.9511i        0           -0.8090 - 0.5878i   0.3090 - 0.9511i

>> dft(g,5)

ans =

   0.8090 - 0.5878i   4.0000 - 0.0000i   0.8090 + 0.5878i  -0.3090 - 0.9511i  -0.3090 + 0.9511i
```

4. Con base en la definición de DFT muestre que la transfromada de la señal $y_n = e^{\frac{i2r\pi}{5}}nx_n$ está dada por: $Y_k = X_{k-r}$
Si se tiene un señal $y_n = e^{\frac{i2r\pi}{N}}nx_n$, por definición, su DFT está dada por la expresión $\mathbf{DFT}[y_k] = Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{\frac{-i2n\pi}{N}k}$ y por la definición de la señal y_n como dependiente de la señal x_n se tiene que $\mathbf{DFT}[y_k] = Y_k = \sum_{n=0}^{N-1}[e^{\frac{i2r\pi}{N}}nx_n]e^{\frac{-i2n\pi}{N}k} = \sum_{n=0}^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{i2n(r-k)\pi}{N}}x_n$. $\mathbf{DFT}[y_k] = Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{i2n(r-k)\pi}{N}}x_n = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{-i2n(k-r)\pi}{N}}x_n$Si se representa $k - r$ como l, se tiene que $\mathbf{DFT}[y_k] = Y_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{-i2n(l)\pi}{N}}x_n = \mathbf{DFT}[x_l] = \mathbf{DFT}[x_{k-r}] = X_{k-r}$. Para entender el punto anterior a través de ésta demostración, se tiene que $\vec{x_n} = [1, 1, 0, 1, 1]$ y $\vec{y_n} = \vec{w_n}\vec{x_n}$ con $\vec{w_m} = [1, e^{\frac{i2\pi}{5}}, 0, e^{\frac{i6\pi}{5}}, e^{\frac{i8\pi}{5}}]$, por lo tanto, para este caso $r = 1$ y $\vec{y_n}$ es expresableen la forma necesaria para que se cumpla la fórmula de la demostración y por lo tanto, la computación adecuada mostrará que la DFT del segundo vector del punto anterior cumple con lo aquí demostrado.

5. Demostrar la fórmula de suma geométrica infinita para números complejo.

   Es clara la siguiente afirmación $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, y se sabe por cálculo elemental que la suma geométrica infinita para números reales se cumple, por lo que debe pensarse esta y otras propiedades como una herencia de los números complejos, es decir sabemos que es cierta. A continuación la demostración formal.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} z^n = \lim_{k\to\infty} \xi \implies \xi = \sum_{n=1}^{k} z^n$$

$$\xi = 1 + z + z^2 + \ldots + z^k \implies z\xi = z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{k+1}$$

$$\implies \xi - z\xi = (1 + z + z^2 + \ldots + z^k) - (z\xi = z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{k+1}) = 1 - z^{k+1}$$

$$\implies \xi(1-z) = 1 - z^{k+1} \implies \xi = \frac{1 - z^{k+1}}{1-z} = \sum_{n=1}^{k} z^n$$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} z^n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1 - z^{k+1}}{1-z}$$

   Para un rango abierto entre menos uno y uno se sabe que la suma converge si k tiende a infinito, por lo tanto.

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1 - z^{k+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}$$

6. Si la transformada z se define como $\boldsymbol{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$. Encuentre la transformada z para las siguientes señales: $x_n = u_n$ y $x_n = u_{1-n}$.
   Para la primera señal, se tiene la siguiente proposición:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \land n \gtrsim 0 \implies x[n] = u_n = 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \iff z^{-1} \neq 1$$

   Para la segunda señal, se sabe que si el valor de n es igual a cero, el valor de la transformada z será cero, si n toa otro valor discreto distinto a cero, la suma se puede escribir como $\sum_{n=1}^{\infty} u_n z^{-n}$ y la siguiente proposición se preserva:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \land n \gtrsim 0 \implies x[n] = u_n = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \iff z^{-1} \neq 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} & \text{si } \neg(x \leqslant 0) \end{cases}$$

7. Si la DTFT de una señal se define como $\boldsymbol{X}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jwn}$, encontrar la DTFT de las siguientes señales $x_n = 2^{-n}u_n$, $x_n = 2^n u_{-n}$,$x_n = 2^{-jn}$.

Para la primera señal, se tiene que su DTFT es $\boldsymbol{X}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n}u_n e^{-jwn}$ por definición del escalón unitario, se tiene que:

$$n \in (-\infty, 0) \implies \boldsymbol{X}(w) = 0;$$

$$n \in [0, \infty) \implies \boldsymbol{X}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty}(2e^{jw})^{-n} = \frac{1}{1-(2e^{jw})^{-1}} \iff (2e^{jw})^{-1} \neq 1$$

Para la segunda DTFT, se tiene que u_{-n} es una versión al revés del escalón unitario, por lo tanto, es cero si n es mayor a cero, de lo contrario es uno, para esta última parte se tiene que $\boldsymbol{X}(w) = \sum_{n=-\infty}^{0}(2e^{-jw})^n$, realizando un cambio de variable sobre el límite inferior de la suma, se tiene que

$$\boldsymbol{X}(w) = \sum_{k=0}^{\infty}(2e^{-jw})^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}e^{jwk} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{e^{jw}}{2}\right)^k$$

Nuevamente. usando el resultado obtendo anteriormente, se tiene que:

$$\boldsymbol{X}(w) = \frac{1}{1-\frac{e^{jw}}{2}} \iff \frac{e^{jw}}{2} \neq 1$$

La forma general de esto sera:

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{1-\frac{e^{jw}}{2}} & \text{si } n \leqslant 0 \end{cases}$$

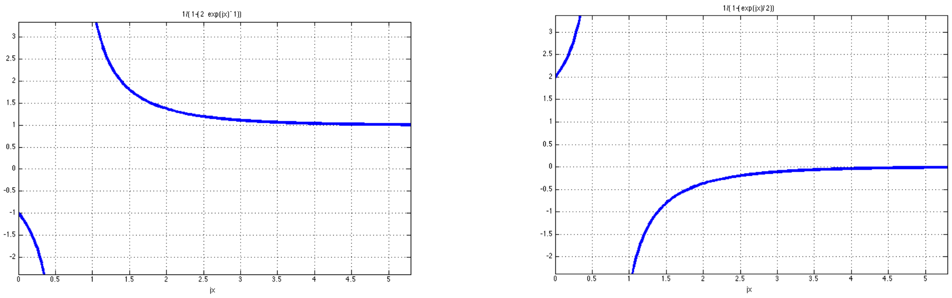
Para la última DTFT, se tiene $\boldsymbol{X}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-jn}e^{-jwn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(2^{-j}e^{-jw})^n = \sum_{n=-\infty}^{0}(2^{-j}e^{-jw})^n + \sum_{n=1}^{\infty}(2^{-j}e^{-jw})^n$, sea $\xi = 2^{-j}e^{-jw}$, entonces,$\boldsymbol{X}(w) = \sum_{n=-\infty}^{0}(\xi)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(\xi)^n$ Por manipulaciones con las propiedades de la sumatoria y algunos cambios de variable, se llega a:

$$\boldsymbol{X}(w) = \sum_{n=-\infty}^{0}(\xi)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(\xi)^n = \sum_{k=0}^{\infty}(\xi)^{-k} + \frac{\xi}{1-\xi}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(2^{-j}e^{-jw})^{-k} + \frac{2^{-j}e^{-jw}}{1-2^{-j}e^{-jw}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-jk}e^{-jwk} + \frac{2^{-j}e^{-jw}}{1-2^{-j}e^{-jw}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}[\frac{1}{2^j e^{jw}}]^k + \frac{2^{-j}e^{-jw}}{1-2^{-j}e^{-jw}} = \sum_{k=0}^{\infty}[\frac{1}{(2e^w)^j}]^k + \frac{2^{-j}e^{-jw}}{1-2^{-j}e^{-jw}}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{(2e^w)^j}} + \frac{2^{-j}e^{-jw}}{1-2^{-j}e^{-jw}} = \frac{1}{1-\frac{1}{(2e^w)^j}} + \frac{1}{(2e^w)^j(1-\frac{1}{(2e^w)^j})} \iff (2e^w)^j) \neq 1$$

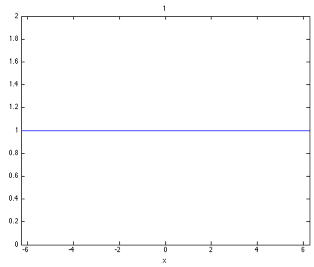


(a) DFT-A (b) DFT-B

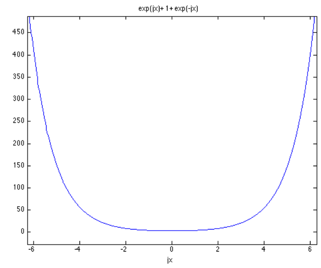
Figure 3: Gráficos las DTFT de cada vector

A continuación, se muestran las gráficas de las primeras dos transformadas.

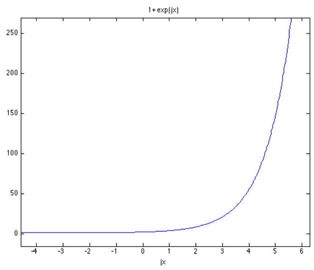
8. Encuentre y grafique la DTFT de las señales δ_n, $u_{n-1} - u_{+1}$ y $\delta_n - \delta_{n-1}$
Como δ_n, tiene un valor distinto a cero sí y sólo si n es cero, el valor de la DTFT es la unidad. La segunda señal, consiste en un pulso negativo entre menos uno y uno, por lo tanto, para n fuera de esta rango cualqquier producto por esta señal es cero, por lo tanto, la DTFT se reduce a $\boldsymbol{X}(e^{jw}) = \sum_{n=-1}^{1} e^{-jwn} = e^{jw} + 1 + e^{-jw}$. Finalmente, la última señal es un pulso en cero y uno negativo en uno; por linealidad de la DTFT, su transformada será $1 + e^{jw}$. A continuación se ilustran las gráficas.



(a) DTFT-A



(b) DTFT-B



(c) DTFT-C

Figure 4: Gráficos las DTFT de cada vector

9. Qué relación existe entre la DFTF y la transformada z
La transformada z, definida como $\boldsymbol{X}(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$ y la DTFT se define como $\boldsymbol{X}(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jwn}$, sea $z = re^{jw}$, si se remplaza esto en la expresión de la transformada z, se tiene

$$\boldsymbol{X}(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n](re^{jw})^{-n} = \boldsymbol{X}(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-jwn}$$

Lo cual revela que la transformada z es la DTFT de $x[n]r^{-n}$