Tarea 3 señales y sistemas

Sebastián Valencia Calderón
Universidad de los Andes

Febrero 15, 2013

1. Encontrar la convolución circular discreta de los vectores $\vec{\boldsymbol{x}} = [1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ y $\vec{\boldsymbol{y}} = [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]$.

   La convolución circular de dos señales discretas $x(t)$ y $y(t)$, se define como la operación $x(t) \circledast y(t)$ o de manera más específica, la convolución circular de dos señales $x(t)$ y $y(t)$, se define como una señal $g(t)$ definida de la siguiente manera:

$$g(t) = x(t) \circledast y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} (x_k)(y_{t-k} \bmod N)$$

   Donde N es la longitud de los vectores a multiplicar, en éste caso, las señales, poseen longitud $N = 10$; la representación gráfica de las señales es bastante intuitiva, por lo tanto, se usará un poco de abstracción para éste ejercicio. La estrategia de solución en este caso, depende de una propiedad importante de la concolución circular, la conmutatividad (Las propiedades más significativas de la convolución circular se encuentran en: http://cnx.org/content/m12055/latest/), es decir, para todo par de señales a convolucionar, se tiene: $x(t) \circledast y(t) = y(t) \circledast x(t)$, por lo tanto, al ser prácticos se puede tomar como señal variante la que contiene más ceros, en este caso, esa señal corresponde a $\vec{\boldsymbol{x}} = [1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$, para aplicar la convolución circular a este par de señales $\vec{\boldsymbol{x}}$ y $\vec{\boldsymbol{y}}$, se pueden realizar $(N-1)$ reflexiones circulares y el mismo número de "shifts" o corrimentos en el tiempo de la señal no estática; lo descrito anteriormente, proporciona gran fuerza y vigor para soluciones más gráficas o intuitivas, sin embargo, el enfoque que aquí se da es más computacional y algorítmica.

   La diguiente tabla, proporciona una regal de asignación para una seal evaluada sobre un módulo N, es decir, la regla de asignación para una función $h[t]_N$ para distintas elecciones de t. (Una idea más primitiva de éste algoritmo, se encuentra en: http://cnx.org/content/m10786/latest/)

t	$h[t]_N$
$\vdots$	$\vdots$
$-m$	$h[N-m]$
$\vdots$	$\vdots$
0	$h[0]$
1	$h[1]$
2	$h[2]$
$\vdots$	$\vdots$
$N+m$	$h[m]$
$\vdots$	$\vdots$

Table 1: Valores de $h[t]$ de una señal $\bmod N$

Como puede verse, la tabla 1.1, proporciona una asignación al valor presente de la señal según sean los valores de la misma en un intervalo $[0, N-1]$, intervalo propicio para la evaluación de $x(t) \circledast y(t)$.

Para éste caso, se tiene que la convolución y su computación son:

$$\boldsymbol{g(\vec{t})} = \vec{\boldsymbol{x}} \circledast \vec{\boldsymbol{y}} = \sum_{k=0}^{9} (x_k)(y_{t-k} \bmod 10)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g(\vec{t})} = (x_0)(y_{t-0} \bmod 10) + (x_1)(y_{t-1} \bmod 10) + (x_2)(y_{t-2} \bmod 10) + (x_3)(y_{t-3} \bmod 10) + \\ (x_4)(y_{t-4} \bmod 10) + (x_5)(y_{t-5} \bmod 10) + (x_6)(y_{t-6} \bmod 10) + \\ (x_7)(y_{t-7} \bmod 10) + (x_8)(y_{t-8} \bmod 10) + (x_9)(y_{t-9} \bmod 10)\end{aligned}$$

Si la tabla 1.1 se aplica para $N = 10$, es fácil ver que para todo valor de m en cierto conjunto, el valor de $h[t]$ será cero, éste conjunto es obviamente $\mathbb{J} = [-8, -1] \cup [1, 8]$, es decir, pata todo número en éste conjunto, el valor de su evaluación en $h[t]$ será cero. Lo anterior se explica por la naturaleza cíclica de la tabla y de la señal $x[t] = h[t]$, pues si $h[t] \neq h[0]$ o $h[t] \neq h[1]$, entonces $h[t] = 0$, por lo tanto, si se evalúa $\boldsymbol{g(\vec{t})}$ para $t \in [0, N-1]$, se puede hacer la siguiente simplificación.

$$g(0) = x(9)h(1) + x(0)h(0) = 19 - 10 = -9$$

$$g(1) = x(0)h(1) + x(1)h(0) = 10 - 11 = 1$$

$$g(2) = x(1)h(1) + x(2)h(0) = 11 - 12 = 1$$

$$g(3) = x(2)h(1) + x(3)h(0) = 12 - 13 = 1$$

$$g(4) = x(3)h(1) + x(4)h(0) = 13 - 14 = 1$$

$$g(5) = x(4)h(1) + x(5)h(0) = 14 - 15 = 1$$

$$g(6) = x(5)h(1) + x(6)h(0) = 15 - 16 = 1$$
$$g(7) = x(6)h(1) + x(7)h(0) = 16 - 17 = 1$$
$$g(8) = x(7)h(1) + x(8)h(0) = 17 - 18 = 1$$
$$g(9) = x(8)h(1) + x(9)h(0) = 18 - 19 = 1$$

La simetría de la señal resultante, es consecuencia de la naturalea periódica de la tabla 1.1 para $N = 10$. Finalmente, la señal $\boldsymbol{g(\vec{t})}$, está dada por el siguiente vector

$$\boldsymbol{g(\vec{t})} = [-9, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

Lo último puede ser comprobado utilizando la siguiente rutina de MATLAB, aplicando la función cconv(a,b,n). (La documentación precisa de la función cconv de MATLAB, se encuentra en:http://www.mathworks.com/help/signal/ref/cconv.html)

```
>> a=[1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0];
>> b=[10:19];
>> cconv(a,b,10)
ans =
    -9.0000    1.0000    1.0000    1.0000
     1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
     1.0000    1.0000
```

2. Calcular y graficar la DFT de la señal $\vec{\boldsymbol{x}} = [0, 1, 0]$

La transformada discreta de Fourier, se define como un endomorfismo biyectivo lineal con forma general $\alpha\colon \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$. Su fórmula explicita, está dada por la siguiente expresión, para la cuál, se tiene que N es la longitud del vector de entrada y salida, por tratarse de un endomorfismo.

Sea $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C}^N : \alpha(\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}}) = \vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\frac{-i2n\pi}{N}k}, k \in [0, N-1]$, sea $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}} = [0, 1, 0]$, por lo tanto, el valor correspondiente de N para éste caso es 3, luego, la forma de la transformada DFT, estará dada por la siguiente serie:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\frac{-i2n\pi}{3}k} = \sum_{n=0}^{2} x_n e^{\frac{-i2n\pi}{3}k} = x_0 e^{\frac{0\pi}{3}k} + x_1 e^{\frac{-i2\pi}{3}k} + x_2 e^{\frac{-i4\pi}{3}k}$$

Reemplazando directamente las posiciones de cada x_n en la fórmula, se obtiene: $\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k}} = e^{\frac{-i2\pi}{3}k}$, por lo tanto, $\vec{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{k}}$ es un vector cuya posición k-ésima corresponde a $e^{\frac{-i2\pi}{3}k}$; como el valor de k está acotado, la computación de su resultado no resulta tediosa, de tal manera, el vector transformado será:

$$k = 0 \Rightarrow \vec{\boldsymbol{X_k}} = \vec{\boldsymbol{X_0}} = e^{\frac{-i2\pi}{3}(0) = 1}$$

$$k = 1 \Rightarrow \vec{\boldsymbol{X_k}} = \vec{\boldsymbol{X_1}} = e^{\frac{-i2\pi}{3}(1)} = e^{\frac{-i2\pi}{3}}$$

$$k = 2 \Rightarrow \vec{\boldsymbol{X_k}} = \vec{\boldsymbol{X_2}} = e^{\frac{-i2\pi}{3}(2)} = e^{\frac{-i4\pi}{3}}$$

La diversidad, versatilidad y grandeza de las matemáticas permiten la posibilidad de múltiples representaciones gráficas para éstos puntos, sin embargo, se selecciona por simplicidad una representación sencilla en el plano complejo según la forma polar y por solidez una representación amplitud y fase de la respuesta o DFT del vector. (Las representaciones se encuentran en la última página). Para obtener la representación amplitud fase, se utilizó el siguiente código:

```
>> N=3;
>> a=[0 1 0];
>> b=zeros(N);
>> for k=1:N
     for n=1:N
         w=exp((-2*pi*i*(k-1)*(n-1))/N);
         x(n)=w;
     end
     c(k,:)=x;
  end
>> r=[c]*[a']
r =   1.0000       -0.5000 - 0.8660i -0.5000 + 0.8660i
>> subplot(2,1,1)
>> stem(abs(r));
>> subplot(2,1,2)
>> stem(angle(r));
```

En la representación polar, los puntos resaltados representan cada componente de la DFT, en la segunda representación, se tiene la amplitud y fase de cada componente de la DFT del vector.