

Optimización

Tarea #2

1. Usted ha heredado una finca de 120 hectáreas, y quiere decidir qué cultivos producir en ésta durante un año. En la siguiente tabla se dan las horas de trabajo y el fertilizante requerido por hectárea, y la ganancia esperada por hectárea para tres tipos diferentes de cultivos. Usted dispone de 6500 horas de trabajo en el año y de 200 toneladas de fertilizante.

	Trabajo (horas/hectárea)	Ganancia/hectárea	Fertilizante (Ton/Hectárea)
Cultivo 1	50	\$500	1.5
Cultivo 2	60	\$600	2
Cultivo 3	105	\$950	4

- a) Naturalmente, usted quiere asignar sus recursos de manera que maximice sus ganancias. Escriba un programa lineal para este efecto.
- b) Halle la solución óptima utilizando el método simplex para resolver el programa lineal del punto anterior.
- c) Responda las siguientes preguntas *utilizando dualidad*:
- 1) Al cabo de un año, dos amigos suyos le proponen las siguientes alternativas de cultivos:
- Amigo 1** : Cultivo que requiere 80 horas de trabajo por hectárea, 3.5 toneladas de fertilizante por hectárea y tiene una ganancia de \$800 por hectárea.
- Amigo 2** : Cultivo que requiere 200 horas de trabajo por hectárea, 1.5 toneladas de fertilizante por hectárea y tiene una ganancia de \$800 por hectárea.
- Cuál de estos amigos presenta una alternativa rentable? las dos alternativas son rentables? Ninguna?
- 2) En el problema original, suponga que con el objetivo de mejorar sus ganancias, usted puede pagar tiempo extra a algunos de sus trabajadores y/o conseguir más fertilizante (suponga que los cambios son pequeños, de manera que no cambian la base óptima). Qué tendría sentido hacer?
2. Usted está a cargo de una puesto de comida rápida en la universidad que produce ensaladas, sandwiches y hamburguesas para el almuerzo. Cuenta con 4 cocineros que trabajan entre las 11 am y las 3 pm. En la siguiente tabla se resume el contenido calórico, el tiempo que toma un cocinero en elaborar cada producto, y la ganancia por unidad de cada producto:

	Calorías	Ganancia	Tiempo (minutos)
Ensalada	1200	\$800	8
Sandwich	2400	\$1600	12
Hamburguesa	5200	\$2400	16

Pensando en la salud de la comunidad, la universidad le exige que *el promedio* del contenido calórico de todas las comidas que vende en un día no supere las 2000 calorías.

- a) Usted quiere decidir las cantidades de cada producto a producir, de manera que maximice sus ganancias. Escriba un programa lineal para este efecto¹.
- b) Halle la solución óptima utilizando el método simplex para resolver el programa lineal del punto anterior. Halle las variables duales óptimas a partir de la solución del primal.
- c) Suponga que usted está pensando en introducir un sandwich Philadelphia al menú. Este sandwich toma 20 minutos para su elaboración y usted espera ganar \$3000 por sandwich. **Utilice dualidad** para calcular el máximo contenido calórico del sandwich Philadelphia que haría rentable introducirlo al menú.
3. Usted es dueño de un hato con tres tipos de vacas v_1, v_2, v_3 que producen semanalmente 40, 30 y 20 unidades de leche respectivamente. En el hato se fabrican tres tipos de quesos q_1, q_2, q_3 que se fabrican con leche de los tres tipos de vacas y se venden a precios unitarios de \$25, \$20 y \$10 respectivamente. La siguiente tabla contiene las unidades de cada tipo de leche que se requieren para producir una unidad de cada tipo de queso:

	q_1	q_2	q_3
v_1	2	3	4
v_2	4	2	1
v_3	3	4	1

- a) Plantee un **programa lineal** que le indique las cantidades de los tres quesos que debe fabricar semanalmente para tener una ganancia máxima.
- b) Resuelva este problema utilizando la función `linprog` de Matlab.
- c) Suponga que un empresario lechero le propone comprarle la producción de leche. Escriba el problema (dual) de optimización que debe resolver el empresario para determinar precios para los tres tipos de leche (de manera que lo convenza a usted de venderle la leche). Halle los precios óptimos utilizando dualidad y holgura complementaria.
4. Una empresa de muebles fabrica escritorios, mesas y sillas. La producción requiere madera, trabajo de acabado y trabajo de carpintería por unidad como se indica en el siguiente cuadro (en unidades apropiadas):

	Escritorio	Mesa	Silla	Disponible
Ganancia	\$60	\$30	\$20	
Madera (ft)	8	6	1	48
Horas acabado	4	2	1.5	20
Horas carpintería	2	1.5	0.5	8

- a) Plantee el programa lineal que le permita a la empresa hallar el número de escritorios, mesas y sillas que debe producir de manera que maximice sus ganancias bajo las restricciones existentes

¹Para su planteamiento suponga que es posible vender cantidades no enteras de sus productos, y que usted vende toda su producción.

- b) Utilice la función `linprog` de Matlab para encontrar la solución óptima al problema y los multiplicadores simplex (o variables duales) óptimos.
- c) Le proponen al gerente de la fábrica producir banquitos. Cada banquito requiere 1 unidad de madera, 0.5 horas de carpintería y 0.3 horas de acabados. Utilice dualidad para determinar cuál sería la ganancia mínima por banquito que convencería al gerente de producirlos.
- d) Suponga que el número de horas disponibles para trabajo de acabados se reduce a 18 (por enfermedad de un operario). Compruebe que la base óptima resultante al cambiar este requerimiento es la misma del problema original. Cuál es la nueva solución óptima? Utilice análisis de sensibilidad para calcular la nueva ganancia óptima.
5. Los candidatos Antanas Santos (AS) y Juan Manuel Mockus (JMM) se encuentran enfrascados en una dura lucha por la presidencia de la república de Rodrigombia.

Los asesores etíopes contratados por AS le han recomendado enfocar su campaña en las siguientes estrategias:

- p:** Propagar rumores falsos con respecto a la pobre higiene personal de su contrincante.
- m:** Promover la candidatura de Rodrigombia como sede del mundial del 2026.

Por su parte, los asesores albaneses contratados por JMM le han recomendado las siguientes estrategias:

- k:** Enfatizar la Kibología como su religión y la del pueblo Rodrigombiano, en contraste con la anti-kibología de su contrincante.
- i:** Establecer un impuesto a los chistes malos (particularmente de profesores universitarios).

La matriz de pagos en millones de votos ganados por JMM es la siguiente:

	p	m
k	3	-1
i	-2	1

Suponga que los candidatos seleccionan una estrategia semanalmente.

- a) Utilice **programación lineal** para determinar la *estrategia mixta*² que le garantice a AS perder la mínima cantidad esperada de votos, independientemente de lo que haga JMM.
- b) Cuál es la estrategia mixta que le permite a JMM garantizar la máxima ganancia esperada de votos independientemente de lo que haga AM?

²Recuerde que una estrategia mixta corresponde a probabilidades con las que se seleccionan las jugadas