Sebastián Valencia Calderón 201111578
Edgar Daniel Gómez 201317343

Punto 1

(a) Identifique las variables aleatorias y la variable de desempeño utilizadas para evaluar la decisión.

La única variable de desempeño para la evaluación de una decisión por medio del modelos es la ganancia mensual de la fábrica (pesos).

Las variables aleatorias son:

- Demanda diaria del plástico impermeable negro de la máquina TX1 $Uniforme(4000, 5000)$.
- Demanda diaria del plástico impermeable negro de la máquina TX2 $Tri(1200, 1800, 2100)$.
- Demanda diaria del plástico impermeable amarillo $\mathcal{N}(\mu = 2000, \sigma = 100)$.
- Costo de producción del plástico impermeable negro $\mathcal{N}(\mu = 750, \sigma = 90)$.
- Costo de producción del plástico impermeable amarillo. $Uniforme(1100, 1350)$.

(b) Presente un esquema del modelo determinístico construido para representar la situación descrita. Utilice los valores esperados de las variables aleatorias para establecer el valor de la variable de desempeño.

En ambos casos, el valor de venta corresponde al valor de mensual de la venta, igualmente el costo de producción mensual (multiplicando cada valor por 30). El arriendo, se obtiene de la tabla. El costo mensual es la suma de los costos de producción, arriendo y servicios. Por último, la ganancia es el valor por ventas menos los costos operacionales mensuales.

Siguiendo el mismo modelo determinístico, se diseñó el probabilista.

(c) ¿Cuál es el valor esperado y el coeficiente de variabilidad de la variable de desempeño en cada alternativa?

A continuación se muestran los resultados de la simulación.

$$\mathbb{E}(TX_1) = 85562109{,}72 \Rightarrow Coef = \frac{12793316{,}12}{85562109{,}72}$$

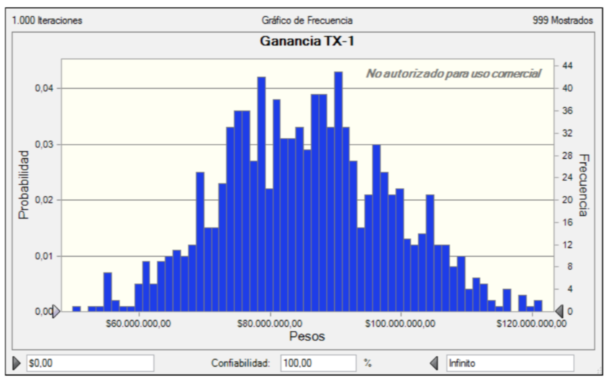
Máquina TX-1	
Demanda negro	4500
Venta	$ 189,000,000.00
Costo producción unitario	$ 750.00
Costro producción total	$ 101,250,000.00
Arriendo	$ 2,100,000.00
Servicios	$ 300,000.00
Costomensual	$ 103,650,000.00
Ganancia	$ 85,350,000.00

Figura 1: Modelo determinístico para la maquina TX-1

$$\mathbb{E}(TX_2) = 95207785{,}72 \Rightarrow Coef = \frac{8235361{,}50}{95207785{,}72}$$

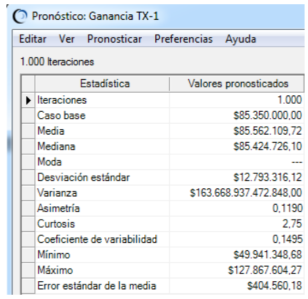
Máquina TX-2	
Demanda negro	1700
Demanda amarillo	2000
Venta	$ 209,400,000.00
Costo producción Negro	750
Costo producción Amarillo	1225
Costro producción total	$ 111,750,000.00
Arriendo	$ 2,500,000.00
Servicios	$ 450,000.00
Costo total	$ 114,700,000.00
Ganancia	$ 94,700,000.00

Figura 2: Modelo determinístico para la maquina TX-2



(d) Calcule un intervalo de confianza con un nivel de confiabilidad del 90 %, para la variable de desempeño en cada alternativa.

Se muestra el intervalo de confianza en ambas alternativas.

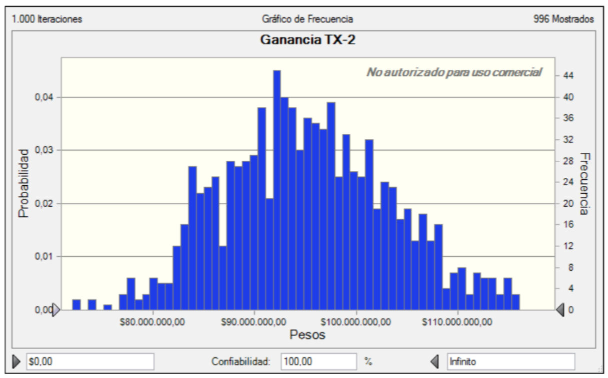


Pronóstico: Ganancia TX-1

Editar Ver Pronosticar Preferencias Ayuda

1.000 Iteraciones

Estadística	Valores pronosticados
Iteraciones	1.000
Caso base	$85.350.000,00
Media	$85.562.109,72
Mediana	$85.424.726,10
Moda	---
Desviación estándar	$12.793.316,12
Varianza	$163.668.937.472.848,00
Asimetría	0,1190
Curtosis	2,75
Coeficiente de variabilidad	0,1495
Mínimo	$49.941.348,68
Máximo	$127.867.604,27
Error estándar de la media	$404.560,18

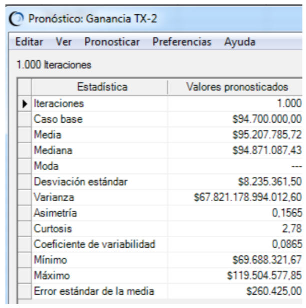


(e) Encuentre el percentil del 50 % y 90 % para la variable de desempeño de cada alternativa. Realice una interpretación de cada uno de los percentiles, en cada una de las variables de desempeño.

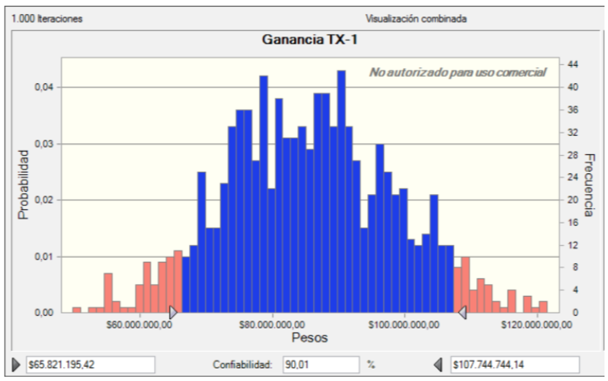
(f) ¿Cuál es la probabilidad de obtener utilidades si la compañía decide arrendar la máquina TX-1? y ¿Cuál es la probabilidad de obtener utilidades si la compañía decide arrendar la máquina TX-2?

Dados los percentiles anteriores, la probabilidad de no perder dinero es de 1.

(g) Realice un análisis de sensibilidad para determinar la variable que más incide en la variable de desempeño de cada alternativa.

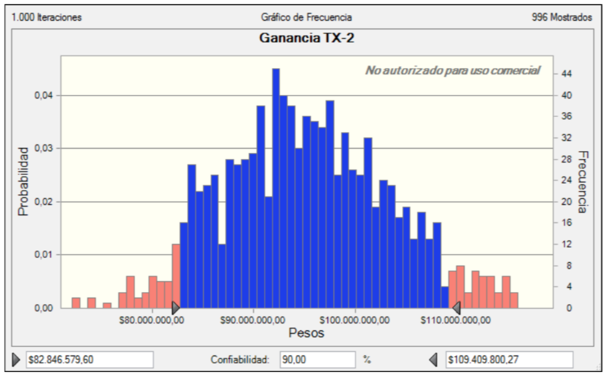


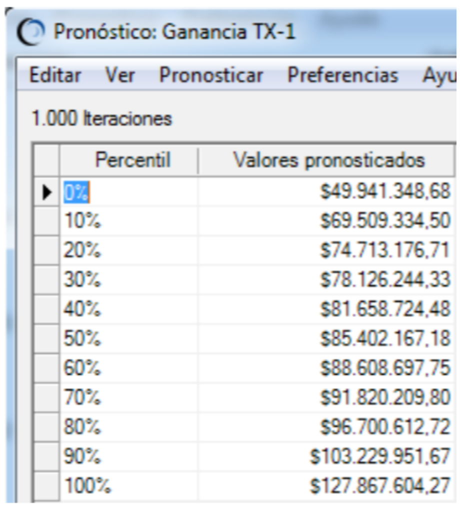
Estadística	Valores pronosticados
Iteraciones	1.000
Caso base	$94.700.000,00
Media	$95.207.785,72
Mediana	$94.871.087,43
Moda	---
Desviación estándar	$8.235.361,50
Varianza	$67.821.178.994.012,60
Asimetría	0,1565
Curtosis	2,78
Coeficiente de variabilidad	0,0865
Mínimo	$69.688.321,67
Máximo	$119.504.577,85
Error estándar de la media	$260.425,00



(h) Realice un gráfico de superposición de los resultados de las alternativas evaluadas y de acuerdo con este resultado y el de los puntos anteriores, determine ¿cuál es para usted la mejor alternativa? Justifique claramente su respuesta.

Aunque la distribución generada para la alternativa de la máquina 1 es menos variable que la otra, es más probable ganar más dinero (la media) con la alternativa de la máquina 2. Por esto, y por nuestra alta aversión al riesgo, se considera elegir la máquina TX-2.




Pronóstico: Ganancia TX-1

Editar Ver Pronosticar Preferencias Ayu

1.000 Iteraciones

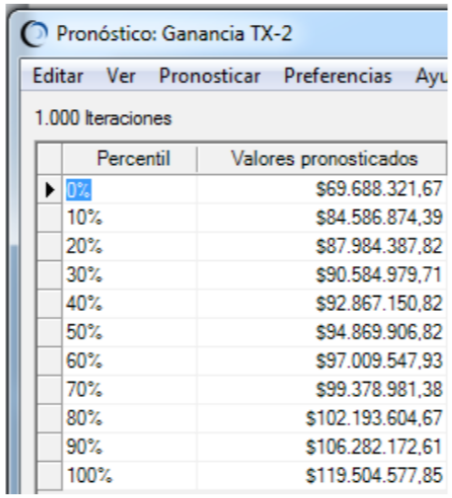
Percentil	Valores pronosticados
0%	$49.941.348,68
10%	$69.509.334,50
20%	$74.713.176,71
30%	$78.126.244,33
40%	$81.658.724,48
50%	$85.402.167,18
60%	$88.608.697,75
70%	$91.820.209,80
80%	$96.700.612,72
90%	$103.229.951,67
100%	$127.867.604,27

Punto 2

(a) Establezca la función de distribución de probabilidad conjunta de X y Y.

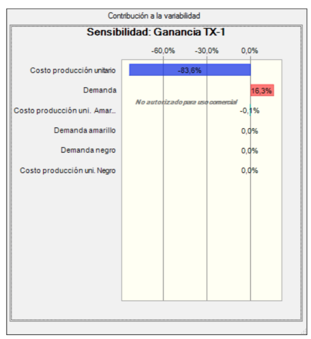
Primero se encuentra $F(X|Y) \sim Bin(p = 0{,}7; n = X, k = Y)$.

$F(X\|Y)$	1	2	3	4
1	0.7	0	0	0
2	0.42	0.49	0	0
3	0.189	0.441	0.343	0
4	0.0756	0.2646	0.4116	0.2401


Pronóstico: Ganancia TX-2
Editar Ver Pronosticar Preferencias Ayu

1.000 Iteraciones

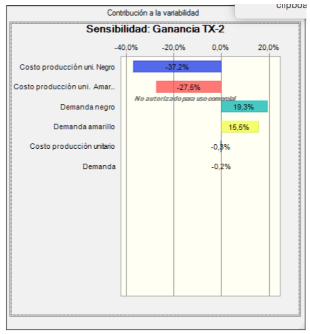
Percentil	Valores pronosticados
0%	$69.688.321,67
10%	$84.586.874,39
20%	$87.984.387,82
30%	$90.584.979,71
40%	$92.867.150,82
50%	$94.869.906,82
60%	$97.009.547,93
70%	$99.378.981,38
80%	$102.193.604,67
90%	$106.282.172,61
100%	$119.504.577,85

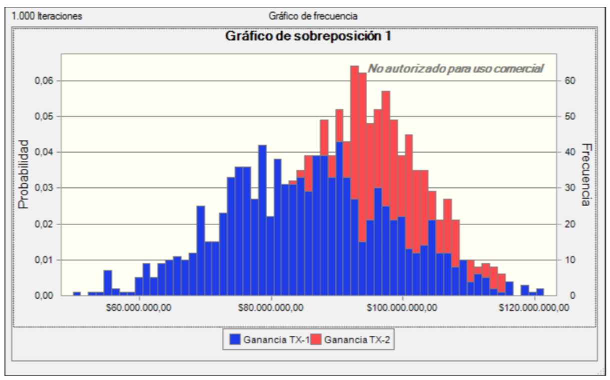


$$g_X(x) = \begin{cases} \frac{\binom{8}{1}\times\binom{4}{3}}{\binom{12}{4}} = 0{,}065 & x = 1 \\ \frac{\binom{8}{2}\times\binom{4}{2}}{\binom{12}{4}} = 0{,}340 & x = 2 \\ \frac{\binom{8}{3}\times\binom{4}{1}}{\binom{12}{4}} = 0{,}450 & x = 3 \\ \frac{\binom{8}{4}\times\binom{4}{0}}{\binom{12}{4}} = 0{,}140 & x = 4 \end{cases}$$

$$f_{XY}(x,y) = f(Y|X) \times g_X(x)$$

$f(y,x)$	1	2	3	4
1	0.0455	0	0	0
2	0.1428	0.1666	0	0
3	0.08505	0.198	0.1543	0
4	0.0105	0.037	0.057	0.0336





(b) Calcule las funciones de probabilidad marginal para las variables aleatorias X y Y.

$$g_X(x) = \begin{cases} 0{,}065 & x = 1 \\ 0{,}340 & x = 2 \\ 0{,}450 & x = 3 \\ = 0{,}140 & x = 4 \end{cases}$$

De manera análoga:

$$h_Y(y) = \begin{cases} 0{,}284 & x = 1 \\ 0{,}402 & x = 2 \\ 0{,}211 & x = 3 \\ 0{,}033 & x = 4 \end{cases}$$

(c) Calcule el valor esperado para cada una de las variables aleatorias e interprete sus resultados en términos de la situación descrita.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{R[X]} x \times g_X(x) = 2{,}655$$

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{R[Y]} y \times h_Y(y) = 1{,}855$$

(d) Determine si las variables aleatorias X y Y son independientes.

$$f(x,y) \stackrel{?}{=} g_X(x) \times h_Y(y) \Rightarrow$$

$$0{,}0455 \stackrel{?}{=} 0{,}065 \times 0{,}0284 \Rightarrow 0{,}0455 \neq 0{,}065 \times 0{,}0284 \text{ Corporación 1}$$

$$0{,}1543 \stackrel{?}{=} 0{,}45 \times 0{,}2113 \Rightarrow 0{,}1543 \neq 0{,}45 \times 0{,}2113 \text{ Corporación 2}$$

Las variables X y Y no son independientes.

(e) Calcule el coeficiente de correlación entre el número de marcadores usados que Juan selecciona de la caja de doce y el número de marcadores usados que dejan de funcionar durante la clase complementaria. Interprete este resultado.

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \times \sigma_Y}$$

Covarianza:

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{R[Y]} \sum_{R[X]} xy \times f_{XY}(x,y) = 5{,}388$$

$$Cov(X,Y) = 5{,}388 - (2{,}655)(1{,}855) = 0{,}46$$

Varianzas:

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \sum_{R[X]} x^2 \times g_X(x) - 2{,}655^2 = 7{,}715 - 2{,}655^2 = 0{,}666$$

$$\mathbb{V}ar(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - [\mathbb{E}(Y)]^2 = \sum_{R[Y]} y^2 \times h_Y(y) - 1{,}855^2 = 4{,}33 - 2{,}655^2 = 0{,}888$$

Coeficiente de correlación:

$$\rho_{XY} = \frac{0{,}46}{\sqrt{0{,}666} \times \sqrt{0{,}888}} = 0{,}59$$

(f) Si se sabe que Juan escogió 3 marcadores viejos entre los cuatro escogidos para dictar la clase, ¿cuántos marcadores se esperaría que fallen durante la clase complementaria?

$$f(Y|X=3) = \sum_{R[Y]} y \times f(Y|X=3) = 2{,}1$$

Se espera que fallen 2.1 marcadores.

(g) Calcule la probabilidad de que el número de marcadores que fallan durante la clase complementaria sea inferior al número de marcadores usados que Juan toma de la caja de doce.

$$\mathbb{P}(Y < X) = \text{ Sumatoria de los valores de } f_{XY}(x,y) \text{ tales que } Y < X$$

$$= f_{XY}(1,2) + f_{XY}(2,3) + f_{XY}(3,4) + f_{XY}(1,3) + f_{XY}(1,4) + f_{XY}(2,4)$$
$$= 0{,}1428 + 0{,}08505 + 0{,}0105 + 0{,}198 + 0{,}037 + 0{,}057 = 0{,}53$$

(h) Si se sabe que el número de marcadores que fallaron era igual al número de marcadores usados que Juan tomó de la caja de doce, determine la probabilidad de que el número de marcadores usados que tomó juan de la caja sea igual a 2.

$$f_{XY}(Y=2|X=2) = 0{,}49$$

Punto 3

(a) Halle el valor de la constante k que permite que la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X esté correctamente definida.

$$\int_0^5 \left(\frac{x^2}{50} - \frac{x}{15} + kx\right) dx = 1$$

$$\frac{x^3}{150}\bigg|_0^5 + \frac{x^2}{30}\bigg|_0^5 + \frac{kx^2}{2}\bigg|_0^5 = 1 \iff 0{,}833 - 0{,}833 + 12{,}5k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{12{,}5}$$

$$k = 0{,}08$$

(b) A partir del enunciado, establezca la función de probabilidad de Y dado X.

$$f_x(X) = \frac{x^2}{50} - \frac{x}{15} + 0{,}08x \wedge R[Y] = \frac{x}{2} \leq y \leq 2x$$

$$f(Y|X) = \frac{1}{2x - x/2} = \frac{1}{(3x)/2} = \frac{2}{3x}$$

(c) Encuentre la función de densidad de probabilidad conjunta y grafique la región en la cual se encuentra definida.

$$f(Y|X) = \frac{f(x,y)}{g(x)} \Rightarrow f(x,y) = f(Y|X) \times g(x)$$

$$f(x,y) = f(Y|X) \times g(x) = \left(\frac{2}{3x}\right) \times \left(\frac{x^2}{50} + \frac{x}{75}\right) = \frac{x}{75} + \frac{2}{225}$$

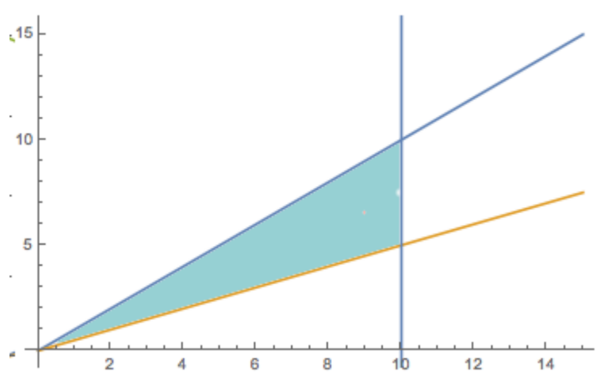


Figura 3: Región de definición de la función de densidad conjunta

(d) Calcule la probabilidad de que la utilidad obtenida por la venta de accesorios más la utilidad obtenida por la venta de computadores portátiles durante la temporada escolar sea menor a \$4000 USD. Para esto especifique los siguientes pasos:

(I) Grafique la región donde se encuentra definida la probabilidad solicitada.

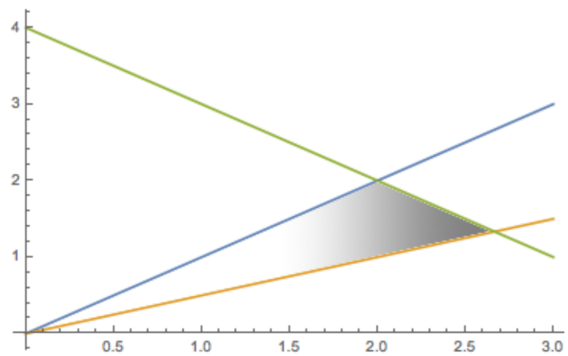


Figura 4: Región de la probabilidad

$$4 - x = \frac{x}{2} \Rightarrow 8 - 2x = x \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$
$$4 - x = 2x \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

(II) Calcule la probabilidad requerida.

$$f(x, y) = 0{,}0133x + 0{,}009$$
$$\mathbb{P}_1(Y < 4 - X) = \int_0^{4/3} \int_{2x}^{x/2} \left(\frac{x}{75} + \frac{2}{225} \right) \, dx$$
$$\mathbb{P}_1(Y < 4 - X) = \int_0^{4/3} \left(\left(\frac{x^2}{2(75)} + \frac{2x}{225} \right) \Bigg|_{2x}^{x/2} \right) \, dx$$
$$\mathbb{P}_1(Y < 4 - X) = \int_0^{4/3} \left(\frac{4x^2}{2(75)} - \frac{x^2}{8(75)} + \frac{4x}{225} - \frac{x}{225} \right) \, dx$$
$$\mathbb{P}_1(Y < 4 - X) = 0{,}0316$$

$$\mathbb{P}_2(Y < 4 - X) = \int_{4/3}^{8/3} \int_{x/2}^{4-x} \left(\frac{x}{75} + \frac{2}{225} \right) \, dx$$

$$\mathbb{P}_2(Y < 4 - X) = \int_{4/3}^{8/3} \left(\left(\frac{x^2}{2(75)} + \frac{2x}{225} \right) \Bigg|_{4-x}^{x/2} \right) \, dx$$

$$\mathbb{P}_2(Y < 4{-}X) = \int_{4/3}^{8/3} \left(\frac{16 - 2(4)x + x^2}{2(75)} - \frac{x^2}{8(75)} + \frac{8 - 2x}{225} - \frac{x}{225} \right) \, dx$$

$$\mathbb{P}_2(Y < 4 - X) = 0{,}0395$$

$$\mathbb{P}(Y < 4 - X) = \mathbb{P}_1(Y < 4 - X) + \mathbb{P}_2(Y < 4 - X) = 0{,}0711$$

(e) Halle la función de densidad de probabilidad marginal de la variable que representa la utilidad obtenida por la venta de accesorios.

$$h(y) = \int_{R[X]} f(x, y) \, dx$$

$$R[X] = \begin{cases} y/2 < x < 2y \\ y/2 < x < 5 \end{cases}$$

$$h_1(y) = \int_{y/2}^{2y} \left(\frac{x}{75} + \frac{2}{225} \right) \, dx = \left(\frac{x^2}{2(75)} + \frac{2x}{225} \right) \Bigg|_{2y}^{y/2}$$

$$h_1(y) = \frac{4y^2}{2(75)} - \frac{y^2}{8(75)} + \frac{4y}{225} - \frac{y}{225} = \frac{y^2}{40} + \frac{y}{75}$$

$$h_2(y) = \int_{5}^{y/2} \left(\frac{x}{75} + \frac{2}{225} \right) \, dx = \left(\frac{x^2}{2(75)} + \frac{2x}{225} \right) \Bigg|_{y/2}^{5}$$

$$h_2(y) = \frac{25}{2(75)} - \frac{y^2}{8(75)} + \frac{2(5)}{225} - \frac{y}{225} = \frac{-y^2}{600} - \frac{y}{225} + 0{,}211$$

$$h(y) = \begin{cases} \frac{y^2}{40} + \frac{y}{75} & 0 < y < 5/2 \\ \frac{-y^2}{600} - \frac{y}{225} + 0{,}211 & 5/2 < y < 5 \end{cases}$$

(f) Calcule la probabilidad de que la utilidad obtenida por las ventas de accesorios sea menor a \$4000 USD.

$$h(Y < 4) = \int_{0}^{5/2} \left(\frac{y^2}{40} + \frac{y}{75} \right) \, dy + \int_{5/2}^{4} \left(-\frac{y^2}{600} + \frac{y}{225} + 0{,}2111 \right) \, dy = 0{,}439$$

(g) Calcule el valor esperado de la utilidad de la venta de accesorios. Interprete el resultado en términos del problema.

$$\mathbb{E}(y) = \int_{R_1[Y]} y \times h(y) \, dy + \int_{R_2[Y]} y \times h(y) \, dy$$

$$\mathbb{E}(y) = \int_0^{5/2} y \times \left(\frac{y^2}{40} + \frac{y}{75}\right)\ dy + \int_{5/2}^{4} y \times \left(-\frac{y^2}{600} + \frac{y}{225} + 0{,}2111\right)\ dy = 4{,}6$$

4600 USD se espera sea la utilidad de la venta de los accesorios.

(h) Si se sabe que la utilidad obtenida por la venta de computadores portátiles fue de \$4000 USD, calcule el valor esperado de la utilidad obtenida por las ventas de accesorios. Interprete el resultado en términos del problema.

$$\mathbb{E}(Y|X=x) = \int_{R[Y]} (y \times f_y(y|X=x))\ dy$$
$$\mathbb{E}(Y|X=4) = \int_0^{10} \left(y \times \frac{2}{12}\right)\ dy = 8{,}33$$

(i) Si se sabe que la utilidad de portátiles está entre 2000 y 4000. ¿Cuál es el valor esperado de la utilidad de los accesorios?

(j) Determine si las variables aleatorias son independientes entre sí.

$$f(x,y) \neq h(y) \times f(x) \Rightarrow \text{No son independientes}$$

(k) Calcule el coeficiente de correlación e interprete este valor en términos del problema.

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \times \sigma_Y} = \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{\sigma_X \times \sigma_Y}$$
$$\rho_{XY} = \frac{\left[\int_0^5 \int_{x/2}^{2x} \left(xy \times \left(\frac{x}{75} + \frac{2}{225}\right)\ dy\ dx\right)\right] - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{\sigma_X \times \sigma_Y}$$
$$\rho_{XY} = \frac{\left[\int_0^5 \left(\frac{y^2}{2}\left(\frac{x^2}{75} + \frac{2x}{225}\right)\right)\Big|_{x/2}^{2x}\ dx\right] - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{\sigma_X \times \sigma_Y} = \frac{\left[\frac{875}{98}\right] - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{\sigma_X \times \sigma_Y}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{R[X]} x \times f_X(x)\ dx = \int_0^5 x \times \left(\frac{x^2}{50} - \frac{x}{15} + 0{,}08x\right)\ dx = 3{,}605$$
$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{R[X]} x^2 \times f_X(x)\ dx = \int_0^5 x^2 \times \left(\frac{x^2}{50} - \frac{x}{15} + 0{,}08x\right)\ dx = 14{,}58$$

De manera análoga, $\mathbb{E}(Y) = 4{,}6$ y $\mathbb{E}(Y^2) = 25{,}52$.

$$\mathbb{V}ar(X) = 14{,}58 - (3{,}605^2) = 1{,}58$$
$$\mathbb{V}ar(X) = 25{,}52 - (4{,}6^2) = 4{,}36$$
$$\rho_{XY} = \frac{\left[\frac{875}{98}\right] - (3{,}605)(4{,}6)}{\sqrt{1{,}58} \times \sqrt{4{,}36}} = 0{,}63$$

Punto 4

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la demanda mensual de Detergente2 en una sucursal en particular esté entre 12000 y 18000 unidades?

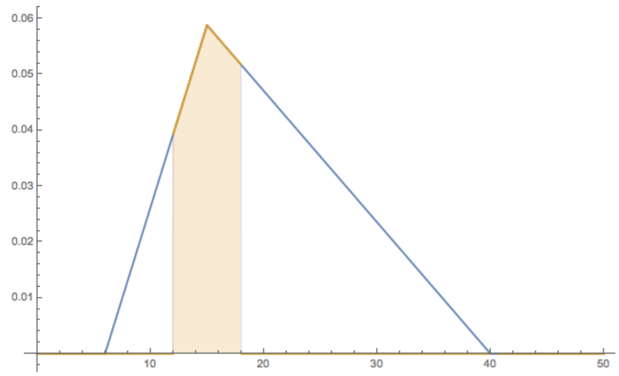


Figura 5: Distribución triangular de X. $\mathbb{P}(12 < X < 18)$

$$\mathbb{P}(12 < X < 18) = 1 - [\mathbb{P}(X < 12) + \mathbb{P}(18 < X)]$$

$$\mathbb{P}(12 < X < 18) = 1 - \left[\frac{(6)(0{,}039)}{2} + \frac{(22)(0{,}0517)}{2}\right] = 0{,}3143$$

(b) La empresa ha decidido examinar la demanda promedio mensual del producto Detergente2, de 70 sucursales seleccionadas al azar. Calcule la probabilidad de que la demanda mensual promedio en dichas sucursales sea mayor a 21000 unidades.

Dado que $70 > 30$, es posible modelar el promedio como una distribución normal con parámetros:

$$\mu = (6 + 15 + 40)/3 = 20{,}33$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{6^2 + 40^2 + 15^2 + (6)(40) - (6)(15) - (40)(15)}{18}} = 7{,}19$$

Se quiere la probabilidad $\mathbb{P}(X > 21) = 1 - \mathbb{P}(X < 21)$.

$$Z = \frac{21 - 20{,}33}{(7{,}18/\sqrt{70})} = 0{,}78$$

$$\mathbb{P}(X > 21) = 1 - \mathbb{P}(X < 21) = 1 - \mathbb{P}(Z < 0{,}78) = 0{,}7823$$

(c) Si se eligen 35 sucursales al azar, calcule la probabilidad de que la demanda mensual total del Detergente2 en estas sea menor a 650000 unidades.

Dado que 35 ¿30, por el teorema del limite central, se sabe que X_n, se puede modelar como una distribución normal con parámetros equivalentes a multiplicar por $n = 35$, la media y la varianza de la distribución triangular, es decir:

$$\mu = n \times \mu_{Tri} = (35) \times (20{,}33) = 711{,}55$$
$$\sigma = n \times \sigma_{Tri} = (35) \times (7{,}19) = 251{,}65$$

$$\mathbb{P}(X_n < 650000) = \mathbb{P}\left(Z < \frac{650 - 711{,}55}{251{,}65}\right) = 1 - \mathbb{P}(Z < 0{,}24) = 0{,}4052$$

(d) Si se sabe que el precio unitario del producto Detergente2 es de $1200 pesos y que el costo logístico mensual, asociado únicamente a este producto, en cada una de las sucursales se comporta como una variable aleatoria normal $\mathcal{N}(\mu = 20{,}5, \sigma = 5{,}6)$ en millones de pesos, ¿se esperaría que las ventas promedio mensuales del producto en todas las sucursales del país sean suficientes para solventar dicho costo para la empresa?

Las ventas promedio en todas las sucursales están dadas por el valor esperado de la variable X; demanda mensual con distribución triangular con $\mu = 20{,}33$ miles de unidades. Ventas promedio = (1200)(20330) = 24396000. Como las ventas promedio son mayores al costo promedio ($24396000 > 20500000$), si se espera que las ventas fueran suficientes para solventar el costo.

Punto 5

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de piezas procesadas en 1 hora por la estación de trabajo 1 sea menor a 7?

Las variables aleatorias son:

$$T_o: \text{ Piezas rpocesadas en la estación}$$
$$M_1: \text{ Número de piezas procesadas con la máquina 1 en una hora}$$
$$M_2: \text{ Número de piezas procesadas con la máquina21 en una hora}$$

$$M_1 \sim Poisson(x; \lambda = \lambda_1 = 5, t = 1) \wedge M_2 \sim Poisson(x; \lambda = \lambda_2 = 3, t = 1)$$

$$T_0 = M_1 + M_2 \Rightarrow M_{T_0}(t) = M_{M_1}(t) + M_{M_2}(t)$$
$$M_{T_0}(t) = M_{M_1}(t) + M_{M_2}(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)\times(e^t-1)}$$

$$\Rightarrow T_o \sim Poisson(x; \lambda = \lambda_1 + \lambda_2; t = 1) = \frac{e^{-t(\lambda_1+\lambda_2)}(t(\lambda_1+\lambda_2)^x)}{x!}$$

$$\mathbb{P}(X < 7) = \sum_{x=0}^{6}\left(\frac{e^{-t(\lambda_1+\lambda_2)}(t(\lambda_1+\lambda_2)^x)}{x!}\right) = 0{,}31337$$

(b) Si cada operario verificó una pieza en la estación 2, para un total de 3 piezas revisadas ¿cuál es la probabilidad de que a lo sumo dos de dichas piezas analizadas tengan que ser desechadas?

Las variables aleatorias son:

$$R: \text{ Número de piezas defectuosas halladas por uno de los tres operadores}$$
$$E: \text{ Número de piezas defectuosas halladas en 2 horas}$$

$$R \sim B(x; p) = p^x(1-p)^{1-x} \wedge E \sim Binom(x; k, p) = \binom{k}{x} p^x q^{k-x}$$

Funciones generadoras de momento:

$$M_x(t) = 1 - p + pe^t \wedge M_x(t) = (1 - p + pe^t)^x$$

Probabilidad de una pieza defectuosa:

$$p = 1 - 0{,}85 = 0{,}15 \Rightarrow R_i(x; p = 0{,}15) \wedge E = \sum_{i=1}^{3} R_i \Rightarrow M_E(t) = \prod_{i=1}^{3} M_{R_i}(t)$$

$$M_E(t) = (1 - p + pe^t)^3 \Rightarrow E \sim Binom(x; n = 3, p = 0{,}15) = \binom{k}{x} p^x q^{k-x}$$

$$\mathbb{P}(E < 2) = \sum_{x=0}^{2} [Binom(x; n = 3, p = 0{,}15)] = 0{,}99662$$

La probabilidad de que máximo dos piezas deban ser desechadas es 0,99662.

(c) Si se sabe que cada operario realiza el proceso de control de calidad revisando una a una las piezas hasta encontrar la primera pieza defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que la quinceava pieza revisada de forma independiente por cualquiera de los tres operarios sea la tercera pieza no defectuosa que se encuentra en la producción?

Las variables aleatorias son:

N : Número de piezas defectuosas revisadas hasta encontrar la tercera defectuosa.
N_i : Número de piezas revisadas por el operario i, hasta encontrar la primera pieza defectuosa.

$$N \sim Bin^*(x; p) = \binom{x-1}{k-1} q^{x-k} p^k \wedge N_i \sim Geom(x; p) = pq^{1-x}$$

$$M_N(t) = \left(\frac{p}{-qe^t + 1}\right)^k \wedge M_{N_i}(t) = \frac{p}{1 - qe^t}$$

Se busca la distribución de la variable aleatoria E.

$$E = \sum_{i=1}^{3} N_i \Rightarrow M_E(t) = \prod_{i=1}^{3} M_{N_i}(t) = \left(\frac{0{,}15}{1 - 0{,}85e^t}\right)^3$$

$$\Rightarrow E \sim Bin^*(x; k = 3, p = 0{,}15) = \binom{x-1}{2} 0{,}85^{x-3} 0{,}15^3$$

$$\mathbb{P}(X = 15) = \binom{14}{2} 0{,}85^{x-3} 0{,}15^3 = 0{,}175$$

La probabilidad de que la tercera pieza no defectuosa sea la número 15 en ser revisada es: $7{,}2509 \times 10^{-9}$