El teorema fundamental de la Programación Lineal

Fernando Lozano

Universidad de los Andes

10 de febrero de 2014

Programa Lineal en Forma Estándar

- Forma estándar:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ & \text{sujeto a} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

donde $\mathbf{x}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{A}$ es matriz $m \times n$, $\mathbf{b} \geq 0$.

Programa Lineal en Forma Estándar

- Forma estándar:

$$\begin{gathered}\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0\end{gathered}$$

  donde $\mathbf{x}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{A}$ es matriz $m \times n$, $\mathbf{b} \geq 0$.
- Suponemos $m < n$ y rango$(A) = m$.

Programa Lineal en Forma Estándar

- Forma estándar:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ & \text{sujeto a} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

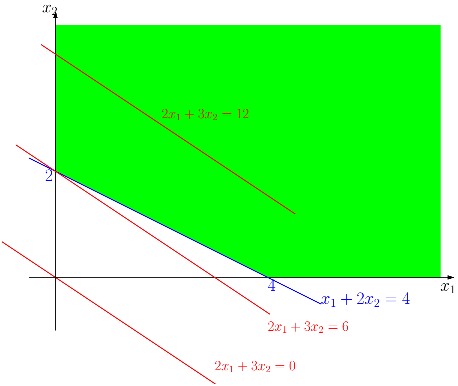
  donde $\mathbf{x}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{A}$ es matriz $m \times n$, $\mathbf{b} \geq 0$.
- Suponemos $m < n$ y rango$(A) = m$.
- Si $\mathbf{x}$ satisface $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{x} \geq 0$, se dice que $\mathbf{x}$ es una solución factible del programa lineal.

Región Factible y Función Objetivo

$$2x_1 + 3x_2 = k$$

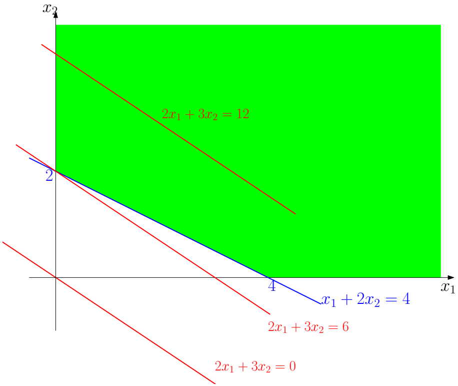
Región Factible y Función Objetivo

$$2x_1 + 3x_2 = k$$



Región Factible y Función Objetivo

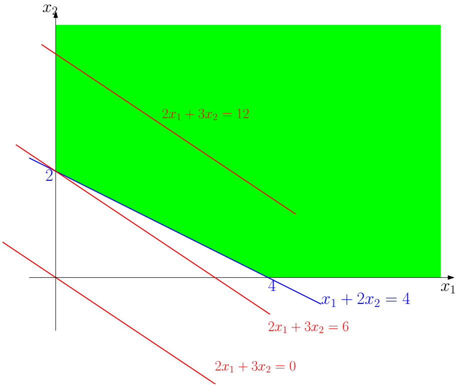
$$2x_1 + 3x_2 = k$$



Mínimo está en una esquina de la región factible.

Región Factible y Función Objetivo

$$2x_1 + 3x_2 = k$$



Mínimo está en una esquina de la región factible. Cómo caracterizamos una esquina?

Ejemplo (Strang)

-

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 + x_2 \\ & \text{sujeto a} \\ & x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

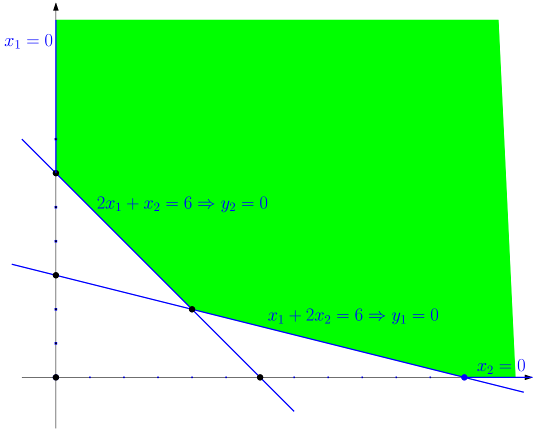
Ejemplo (Strang)

- $$\begin{gathered} \text{mín} \quad x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{gathered}$$
- Con $y_1 = x_1 + x_2 - 6$ y $y_2 = 2x_1 + x_2 - 6$ tenemos en forma estándar:

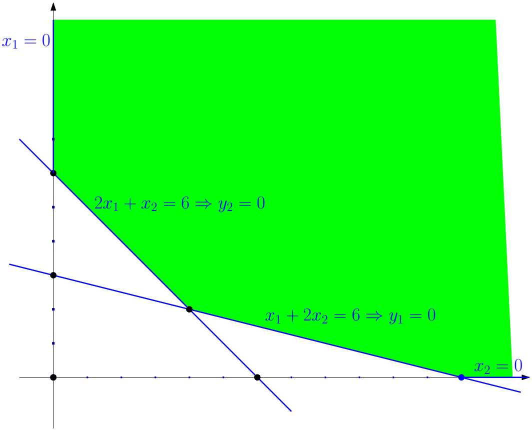
Ejemplo (Strang)

- $$\begin{gathered}\min \quad x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0\end{gathered}$$
- Con $y_1 = x_1 + x_2 - 6$ y $y_2 = 2x_1 + x_2 - 6$ tenemos en forma estándar:

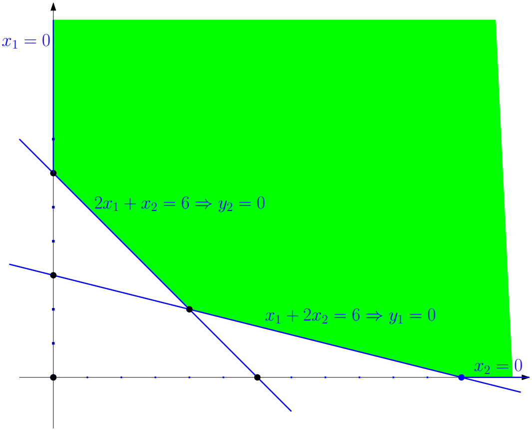
$$\begin{gathered}\min \quad x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} \\ x_1 + 2x_2 - y_1 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - y_2 = 6 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0\end{gathered}$$



$x_1 = 0$
$2x_1 + x_2 = 6 \Rightarrow y_2 = 0$
$x_1 + 2x_2 = 6 \Rightarrow y_1 = 0$
$x_2 = 0$



- En una esquina $n - m$ variables son 0.



- En una esquina $n - m$ variables son 0.
- Unicamente consideramos esquinas factibles

- n variables

- n variables $\begin{cases} n-m & \text{variables libres} \\ m & \text{variables básicas} \end{cases}$

- n variables $\begin{cases} n-m & \text{variables libres} \\ m & \text{variables básicas} \end{cases}$
- Escogemos m columnas linealmente independientes de $\mathbf{A}$:

- n variables $\begin{cases} n-m & \text{variables libres} \\ m & \text{variables básicas} \end{cases}$
- Escogemos m columnas linealmente independientes de $\mathbf{A}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m & \mathbf{a}_{m+1} & \mathbf{a}_{m+2} & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- n variables $\begin{cases} n-m & \text{variables libres} \\ m & \text{variables básicas} \end{cases}$
- Escogemos m columnas linealmente independientes de $\mathbf{A}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m & \mathbf{a}_{m+1} & \mathbf{a}_{m+2} & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- Tenemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- Tenemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- es decir:

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_{\mathbf{B}} = \mathbf{b}$$

- Tenemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- es decir:

$$\mathbf{Bx_B} = \mathbf{b}$$

- $\mathbf{x} = [\mathbf{x_B}\ \mathbf{0}]$ se llama una solución básica de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con respecto a la base $\mathbf{B}$.

- Tenemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- es decir:

$$\mathbf{B}\mathbf{x_B} = \mathbf{b}$$

- $\mathbf{x} = [\mathbf{x_B}\ \mathbf{0}]$ se llama una solución básica de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con respecto a la base $\mathbf{B}$.
- Si adicionalmente $\mathbf{x_B} \geq 0$, $\mathbf{x}$ se llama una solución básica factible (SBF) del programa lineal.

Teorema

(Teorema fundamental de programación lineal) Dado un programa lineal en forma estándar en la cual $\mathbf{A}$ *tiene rango* m*:*

1. *Si existe una solución factible, entonces existe una solución básica factible.*
2. *Si existe una solución factible óptima, entonces existe una solución básica factible óptima.*

Demostración de ❶

- Sea $\mathbf{x}$ una solución factible.

Demostración de ❶

- Sea $\mathbf{x}$ una solución factible.
- Suponga que exactamente p variables de $\mathbf{x}$ son positivas.

Demostración de ❶

- Sea $\mathbf{x}$ una solución factible.
- Suponga que exactamente p variables de $\mathbf{x}$ son positivas. SPDG suponga que son las primeras p:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$$

Demostración de ❶

- Sea $\mathbf{x}$ una solución factible.
- Suponga que exactamente p variables de $\mathbf{x}$ son positivas. SPDG suponga que son las primeras p:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$$

- Dos casos:

Demostración de ❶

- Sea $\mathbf{x}$ una solución factible.
- Suponga que exactamente p variables de $\mathbf{x}$ son positivas. SPDG suponga que son las primeras p:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$$

- Dos casos:

  Caso 1: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente independientes.

Demostración de ❶

- Sea $\mathbf{x}$ una solución factible.
- Suponga que exactamente p variables de $\mathbf{x}$ son positivas. SPDG suponga que son las primeras p:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$$

- Dos casos:

  Caso 1: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente independientes.

  - Si $p = m$ $\mathbf{x}$ es SBF.

Demostración de ❶

- Sea $\mathbf{x}$ una solución factible.
- Suponga que exactamente p variables de $\mathbf{x}$ son positivas. SPDG suponga que son las primeras p:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$$

- Dos casos:

  Caso 1: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente independientes.
    - Si $p = m$ $\mathbf{x}$ es SBF.
    - Si $p < m$ $\mathbf{x}$ es SBF degenerada

Demostración de ❶

- Sea $\mathbf{x}$ una solución factible.
- Suponga que exactamente p variables de $\mathbf{x}$ son positivas. SPDG suponga que son las primeras p:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$$

- Dos casos:

  Caso 1: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente independientes.
  - Si $p = m$ $\mathbf{x}$ es SBF.
  - Si $p < m$ $\mathbf{x}$ es SBF degenerada. Podemos encontrar otras $m - p$ columnas de $\mathbf{A}$ linealmente independientes, hacer las variables correspondientes cero e incorporarlas a $\mathbf{x}$ que es entonces una SBF.

Caso 2: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente dependientes.

Caso 2: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente dependientes.

- Tenemos:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b} \qquad (1)$$

Caso 2: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente dependientes.

- Tenemos:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b} \tag{1}$$

- Podemos encontrar coeficientes y_i no todos cero tal que:

$$y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \cdots + y_p\mathbf{a}_p = 0 \tag{2}$$

  (por lo menos un $y_i > 0$)

Caso 2: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente dependientes.

- Tenemos:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b} \tag{1}$$

- Podemos encontrar coeficientes y_i no todos cero tal que:

$$y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \cdots + y_p\mathbf{a}_p = 0 \tag{2}$$

(por lo menos un $y_i > 0$)
- Multiplicando (2) por ϵ y restando de (1),

Caso 2: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente dependientes.

- Tenemos:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b} \tag{1}$$

- Podemos encontrar coeficientes y_i no todos cero tal que:

$$y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \cdots + y_p\mathbf{a}_p = 0 \tag{2}$$

  (por lo menos un $y_i > 0$)
- Multiplicando (2) por ϵ y restando de (1),

$$(x_1 - \epsilon y_1)\mathbf{a}_1 + (x_2 - \epsilon y_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (x_p - \epsilon y_p)\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$$

Caso 2: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots \mathbf{a}_p$ son linealmente dependientes.

- Tenemos:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b} \tag{1}$$

- Podemos encontrar coeficientes y_i no todos cero tal que:

$$y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \cdots + y_p\mathbf{a}_p = 0 \tag{2}$$

  (por lo menos un $y_i > 0$)
- Multiplicando (2) por ϵ y restando de (1),

$$(x_1 - \epsilon y_1)\mathbf{a}_1 + (x_2 - \epsilon y_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (x_p - \epsilon y_p)\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$$

- Sea $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} - \epsilon\mathbf{y}_p$ con $\mathbf{y}_p = [y_1, y_2, \dots, y_p, 0, 0, \dots, 0]$, tenemos:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$$

- Incrementemos ϵ desde cero.

- Incrementemos ϵ desde cero.
- Eventualmente un término se vuelve cero.

- Incrementemos ϵ desde cero.
- Eventualmente un término se vuelve cero.Hagamos:

$$\epsilon = \min \left\{ \frac{x_i}{y_i} : y_i > 0 \right\}$$

- Incrementemos ϵ desde cero.
- Eventualmente un término se vuelve cero.Hagamos:

$$\epsilon = \text{mín}\left\{\frac{x_i}{y_i} : y_i > 0\right\}$$

- Para este valor de ϵ, $\mathbf{x}_1$ es factible y tiene a lo sumo $p-1$ variables positivas.

- Incrementemos ϵ desde cero.
- Eventualmente un término se vuelve cero.Hagamos:

$$\epsilon = \text{mín}\left\{\frac{x_i}{y_i} : y_i > 0\right\}$$

- Para este valor de ϵ, $\mathbf{x}_1$ es factible y tiene a lo sumo $p-1$ variables positivas.
- Repita hasta tener solución con $\{\mathbf{a}_i\}$ linealmente independientes.

- Incrementemos ϵ desde cero.
- Eventualmente un término se vuelve cero.Hagamos:

$$\epsilon = \min \left\{ \frac{x_i}{y_i} : y_i > 0 \right\}$$

- Para este valor de ϵ, $\mathbf{x}_1$ es factible y tiene a lo sumo $p-1$ variables positivas.
- Repita hasta tener solución con $\{\mathbf{a}_i\}$ linealmente independientes. $\Rightarrow$ Caso 1.

Demostración de ❷

Sea $\mathbf{x}$ una solución factible óptima con exactamente p variables positivas.

Demostración de ❷

Sea $\mathbf{x}$ una solución factible óptima con exactamente p variables positivas.

Caso 1: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente independientes.

Demostración de ❷

Sea $\mathbf{x}$ una solución factible óptima con exactamente p variables positivas.

Caso 1: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente independientes.El mismo razonamiento en ❶ aplica.

Demostración de ❷

Sea $\mathbf{x}$ una solución factible óptima con exactamente p variables positivas.

Caso 1: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente independientes.El mismo razonamiento en ❶ aplica.

Caso 2: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente dependientes.

Demostración de ❷

Sea $\mathbf{x}$ una solución factible óptima con exactamente p variables positivas.

Caso 1: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente independientes.El mismo razonamiento en ❶ aplica.

Caso 2: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente dependientes.

- Debemos evaluar función objetivo en $\mathbf{x}_1$:

Demostración de ❷

Sea $\mathbf{x}$ una solución factible óptima con exactamente p variables positivas.

Caso 1: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente independientes.El mismo razonamiento en ❶ aplica.

Caso 2: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente dependientes.

- Debemos evaluar función objetivo en $\mathbf{x}_1$:

$$\mathbf{c}^T(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y}_p) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \epsilon \mathbf{c}^T \mathbf{y}_p$$

Demostración de ❷

Sea $\mathbf{x}$ una solución factible óptima con exactamente p variables positivas.

Caso 1: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente independientes.El mismo razonamiento en ❶ aplica.

Caso 2: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente dependientes.

- Debemos evaluar función objetivo en $\mathbf{x}_1$:

$$\mathbf{c}^T(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y}_p) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{c}^T\mathbf{y}_p$$

- Para un valor de ϵ suficientemente pequeño en magnitud (positivo o negativo) $\mathbf{x}_1$ es factible.

Demostración de ❷

Sea $\mathbf{x}$ una solución factible óptima con exactamente p variables positivas.

Caso 1: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente independientes.El mismo razonamiento en ❶ aplica.

Caso 2: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente dependientes.

- Debemos evaluar función objetivo en $\mathbf{x}_1$:

$$\mathbf{c}^T(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y}_p) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{c}^T\mathbf{y}_p$$

- Para un valor de ϵ suficientemente pequeño en magnitud (positivo o negativo) $\mathbf{x}_1$ es factible.
- $\mathbf{c}^T\mathbf{y}_p$ debe ser cero

Demostración de ❷

Sea $\mathbf{x}$ una solución factible óptima con exactamente p variables positivas.

Caso 1: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente independientes.El mismo razonamiento en ❶ aplica.

Caso 2: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente dependientes.

- Debemos evaluar función objetivo en $\mathbf{x}_1$:

$$\mathbf{c}^T(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y}_p) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{c}^T\mathbf{y}_p$$

- Para un valor de ϵ suficientemente pequeño en magnitud (positivo o negativo) $\mathbf{x}_1$ es factible.
- $\mathbf{c}^T\mathbf{y}_p$ debe ser cero (de otra forma podríamos encontrar una solución factible mejor que $\mathbf{x}$).

Demostración de ❷

Sea $\mathbf{x}$ una solución factible óptima con exactamente p variables positivas.

Caso 1: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente independientes.El mismo razonamiento en ❶ aplica.

Caso 2: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente dependientes.

- Debemos evaluar función objetivo en $\mathbf{x}_1$:

$$\mathbf{c}^T(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y}_p) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{c}^T\mathbf{y}_p$$

- Para un valor de ϵ suficientemente pequeño en magnitud (positivo o negativo) $\mathbf{x}_1$ es factible.
- $\mathbf{c}^T\mathbf{y}_p$ debe ser cero (de otra forma podríamos encontrar una solución factible mejor que $\mathbf{x}$).
- Solución con $p - 1$ variables es óptima.

Demostración de ❷

Sea $\mathbf{x}$ una solución factible óptima con exactamente p variables positivas.

Caso 1: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente independientes.El mismo razonamiento en ❶ aplica.

Caso 2: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_p$ son linealmente dependientes.

- Debemos evaluar función objetivo en $\mathbf{x}_1$:

$$\mathbf{c}^T(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y}_p) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \epsilon \mathbf{c}^T \mathbf{y}_p$$

- Para un valor de ϵ suficientemente pequeño en magnitud (positivo o negativo) $\mathbf{x}_1$ es factible.
- $\mathbf{c}^T \mathbf{y}_p$ debe ser cero (de otra forma podríamos encontrar una solución factible mejor que $\mathbf{x}$).
- Solución con $p-1$ variables es óptima.
- Repetir hasta tener solución con $\{\mathbf{a}_i\}$ linealmente independientes.

Consecuencias

Consecuencias

- Sólo necesitamos examinar soluciones factibles básicas para encontrar una solución.

Consecuencias

- Sólo necesitamos examinar soluciones factibles básicas para encontrar una solución.
- Máximo número de SBF:

Consecuencias

- Sólo necesitamos examinar soluciones factibles básicas para encontrar una solución.
- Máximo número de SBF: $\binom{n}{m}$.

Consecuencias

- Sólo necesitamos examinar soluciones factibles básicas para encontrar una solución.
- Máximo número de SBF: $\binom{n}{m}$.
- Idea: Examinar soluciones básicas, conservar las que son factibles ($\mathbf{x} \geq 0$), seleccionar la que tenga el menor costo.

Consecuencias

- Sólo necesitamos examinar soluciones factibles básicas para encontrar una solución.
- Máximo número de SBF: $\binom{n}{m}$.
- Idea: Examinar soluciones básicas, conservar las que son factibles ($\mathbf{x} \geq 0$), seleccionar la que tenga el menor costo.
- Busqueda exhaustiva es ineficiente.

Estrategia

- Idea:

Estrategia

- Idea: Desplazarse de una esquina a otra a lo largo de los bordes del conjunto factible.

Estrategia

- Idea: Desplazarse de una esquina a otra a lo largo de los bordes del conjunto factible.
- Moverse por un borde a lo largo del cual disminuya función objetivo.

Estrategia

- Idea: Desplazarse de una esquina a otra a lo largo de los bordes del conjunto factible.
- Moverse por un borde a lo largo del cual disminuya función objetivo.
- Eventualmente encontramos esquina que no se pueda mejorar.

Estrategia

- Idea: Desplazarse de una esquina a otra a lo largo de los bordes del conjunto factible.
- Moverse por un borde a lo largo del cual disminuya función objetivo.
- Eventualmente encontramos esquina que no se pueda mejorar.