Optimización: Introducción

Fernando Lozano

Universidad de los Andes

8 de agosto de 2014

Optimización

- Determinar la mejor solución a un problema definido matemáticamente, que usualmente modela un fenómeno físico [Fletcher, 1987].

Optimización

- Determinar la mejor solución a un problema definido matemáticamente, que usualmente modela un fenómeno físico [Fletcher, 1987].
- Seleccionar valores apropiados de variables interrelacionadas.

Optimización

- Determinar la mejor solución a un problema definido matemáticamente, que usualmente modela un fenómeno físico [Fletcher, 1987].
- Seleccionar valores apropiados de variables interrelacionadas.
- Bajo restricciones (de diseño o de otro tipo).

Optimización

- Determinar la mejor solución a un problema definido matemáticamente, que usualmente modela un fenómeno físico [Fletcher, 1987].
- Seleccionar valores apropiados de variables interrelacionadas.
- Bajo restricciones (de diseño o de otro tipo).
- Criterio de optimalidad.

Optimización

- Determinar la mejor solución a un problema definido matemáticamente, que usualmente modela un fenómeno físico [Fletcher, 1987].
- Seleccionar valores apropiados de variables interrelacionadas.
- Bajo restricciones (de diseño o de otro tipo).
- Criterio de optimalidad.
- Métodos de solución (por computador).

Optimización

- Determinar la mejor solución a un problema definido matemáticamente, que usualmente modela un fenómeno físico [Fletcher, 1987].
- Seleccionar valores apropiados de variables interrelacionadas.
- Bajo restricciones (de diseño o de otro tipo).
- Criterio de optimalidad.
- Métodos de solución (por computador).

Problema de Optimización

$$
\begin{gathered}
\text{mín} \quad f(\mathbf{x}) \\
\text{sujeto a} \\
g_i(\mathbf{x}) \leq a_i, \quad i = 1, \ldots, m \\
h_i(\mathbf{x}) = b_i, \quad j = 1, \ldots, q
\end{gathered}
$$

Problema de Optimización

$$
\begin{gathered}
\text{mín} \quad f(\mathbf{x}) \\
\text{sujeto a} \\
g_i(\mathbf{x}) \leq a_i, \quad i = 1, \ldots, m \\
h_i(\mathbf{x}) = b_i, \quad j = 1, \ldots, q
\end{gathered}
$$

- $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ variables a optimizar.

Problema de Optimización

$$
\begin{gathered}
\text{mín} \quad f(\mathbf{x}) \\
\text{sujeto a} \\
g_i(\mathbf{x}) \leq a_i, \quad i = 1, \ldots, m \\
h_i(\mathbf{x}) = b_i, \quad j = 1, \ldots, q
\end{gathered}
$$

- $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ variables a optimizar.
- $f(\mathbf{x})$ es la función de costo u objetivo.

Problema de Optimización

$$
\begin{gathered}
\min \quad f(\mathbf{x}) \\
\text{sujeto a} \\
g_i(\mathbf{x}) \leq a_i, \quad i = 1, \ldots, m \\
h_i(\mathbf{x}) = b_i, \quad j = 1, \ldots, q
\end{gathered}
$$

- $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ variables a optimizar.
- $f(\mathbf{x})$ es la función de costo u objetivo.
- $g_i(\mathbf{x})$,$h_i(\mathbf{x})$ son funciones de restricción.

Problema de Optimización

$$\begin{gathered} \min \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeto a} \\ g_i(\mathbf{x}) \leq a_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ h_i(\mathbf{x}) = b_i, \quad j = 1, \ldots, q \end{gathered}$$

- $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ variables a optimizar.
- $f(\mathbf{x})$ es la función de costo u objetivo.
- $g_i(\mathbf{x})$,$h_i(\mathbf{x})$ son funciones de restricción.
- $\mathbf{x}^*$: Solución óptima.

Ejemplo

Usted está a cargo de una puesto de comida rápida en la universidad que produce ensaladas, sandwiches y hamburguesas para el almuerzo. Cuenta con 4 cocineros que trabajan entre las 11 am y las 3 pm. En la siguiente tabla se resume el contenido calórico, el tiempo que toma un cocinero en elaborar cada producto, y la ganancia por unidad de cada producto:

	Calorías	Ganancia	Tiempo (minutos)
Ensalada	1200	\$800	8
Sandwich	2400	\$1600	12
Hamburguesa	5200	\$2400	16

Pensando en la salud de la comunidad, la universidad le exige que el promedio del contenido calórico de todas las comidas que vende en un día no supere las 2000 calorías. Uste quiere decidir las cantidades de cada producto de manera que maximice sus ganancias.

- Variables:

- Variables: x_1 el número de ensaladas, x_2 el número de sandwiches, y x_3 el número de hamburguesas.

- Variables: x_1 el número de ensaladas, x_2 el número de sandwiches, y x_3 el número de hamburguesas.
- El promedio de calorias debe ser menor a 2000:

- Variables: x_1 el número de ensaladas, x_2 el número de sandwiches, y x_3 el número de hamburguesas.
- El promedio de calorias debe ser menor a 2000:

$$\frac{1200x_1 + 2400x_2 + 5200x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \leq 2000$$

- Variables: x_1 el número de ensaladas, x_2 el número de sandwiches, y x_3 el número de hamburguesas.
- El promedio de calorias debe ser menor a 2000:

$$\frac{1200x_1 + 2400x_2 + 5200x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \leq 2000 \Rightarrow -800x_1 + 400x_2 + 3200x_3 \leq 0$$

- Variables: x_1 el número de ensaladas, x_2 el número de sandwiches, y x_3 el número de hamburguesas.
- El promedio de calorias debe ser menor a 2000:

$$\frac{1200x_1 + 2400x_2 + 5200x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \leq 2000 \Rightarrow -800x_1 + 400x_2 + 3200x_3 \leq 0$$

-

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 800x_1 + 1600x_2 + 2400x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & -800x_1 + 400x_2 + 3200x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

- Variables: x_1 el número de ensaladas, x_2 el número de sandwiches, y x_3 el número de hamburguesas.
- El promedio de calorias debe ser menor a 2000:

$$\frac{1200x_1 + 2400x_2 + 5200x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \leq 2000 \Rightarrow -800x_1 + 400x_2 + 3200x_3 \leq 0$$

-

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 800x_1 + 1600x_2 + 2400x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & -800x_1 + 400x_2 + 3200x_3 \leq 0 \\ & 8x_1 + 12x_2 + 16x_3 \leq 960 \end{aligned}$$

- Variables: x_1 el número de ensaladas, x_2 el número de sandwiches, y x_3 el número de hamburguesas.
- El promedio de calorias debe ser menor a 2000:

$$\frac{1200x_1 + 2400x_2 + 5200x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \leq 2000 \Rightarrow -800x_1 + 400x_2 + 3200x_3 \leq 0$$

- $$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 800x_1 + 1600x_2 + 2400x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & -800x_1 + 400x_2 + 3200x_3 \leq 0 \\ & 8x_1 + 12x_2 + 16x_3 \leq 960 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo

- Planear el suministro de energía para un edificio nuevo.

Ejemplo

- Planear el suministro de energía para un edificio nuevo.
- Fuentes potenciales de energía: electricidad, gas y energía solar (Energía solar está limitada a 30 unidades).

Ejemplo

- Planear el suministro de energía para un edificio nuevo.
- Fuentes potenciales de energía: electricidad, gas y energía solar (Energía solar está limitada a 30 unidades).
- Tareas: Iluminación y equipos eléctricos, calentamiento de agua y calefacción del ambiente.

Ejemplo

- Planear el suministro de energía para un edificio nuevo.
- Fuentes potenciales de energía: electricidad, gas y energía solar (Energía solar está limitada a 30 unidades).
- Tareas: Iluminación y equipos eléctricos, calentamiento de agua y calefacción del ambiente.
- Se requieren 10 unidades de energía para calentamiento de agua, 30 unidades para calefacción del ambinete y 20 unidades para iluminación y equipos eléctricos.
- Los requerimientos de iluminación y equipos eléctricos sólo se pueden satisfacer con energía eléctrica a un costo de $50 por unidad.

	Electricidad	Gas	Solar
Calentamiento de agua	90	60	30
Calefacción ambiente	80	50	40

Cuadro : Costos por unidad ($/unidad)

- Variables?

- Variables?
  - Fuentes: g: gas, s: energía solar, e: electricidad

- Variables?
  - Fuentes: g: gas, s: energía solar, e: electricidad
  - Usos: a: calentamiento de agua, h: calentamiento de ambiente y q: equipos eléctricos e iluminación.

- Variables?
  - Fuentes: g: gas, s: energía solar, e: electricidad
  - Usos: a: calentamiento de agua, h: calentamiento de ambiente y q: equipos eléctricos e iluminación.
  - $x_{ea}, x_{eh}, x_{eq}, x_{ga}, x_{gh}, x_{gq}, x_{sa}, x_{sh}, x_{sq}$.

- Variables?
  - Fuentes: g: gas, s: energía solar, e: electricidad
  - Usos: a: calentamiento de agua, h: calentamiento de ambiente y q: equipos eléctricos e iluminación.
  - $x_{ea}, x_{eh}, x_{eq}, x_{ga}, x_{gh}, x_{gq}, x_{sa}, x_{sh}, x_{sq}$.
- Función objetivo?

- Variables?
  - Fuentes: g: gas, s: energía solar, e: electricidad
  - Usos: a: calentamiento de agua, h: calentamiento de ambiente y q: equipos eléctricos e iluminación.
  - $x_{ea}, x_{eh}, x_{eq}, x_{ga}, x_{gh}, x_{gq}, x_{sa}, x_{sh}, x_{sq}$.
- Función objetivo?

$$\text{mín} \quad 90x_{ea} + 80x_{eh} + 60x_{ga} + 50x_{gh} + 30x_{sa} + 40x_{sh}$$

- Variables?
  - Fuentes: g: gas, s: energía solar, e: electricidad
  - Usos: a: calentamiento de agua, h: calentamiento de ambiente y q: equipos eléctricos e iluminación.
  - $x_{ea}, x_{eh}, x_{eq}, x_{ga}, x_{gh}, x_{gq}, x_{sa}, x_{sh}, x_{sq}$.
- Función objetivo?

$$\text{mín} \quad 90x_{ea} + 80x_{eh} + 60x_{ga} + 50x_{gh} + 30x_{sa} + 40x_{sh}$$

- Restricciones?

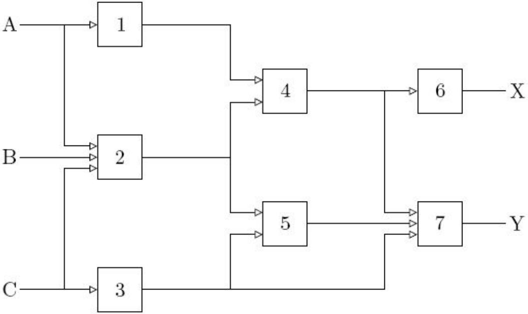
- Variables?
  - Fuentes: g: gas, s: energía solar, e: electricidad
  - Usos: a: calentamiento de agua, h: calentamiento de ambiente y q: equipos eléctricos e iluminación.
  - $x_{ea}, x_{eh}, x_{eq}, x_{ga}, x_{gh}, x_{gq}, x_{sa}, x_{sh}, x_{sq}$.
- Función objetivo?

$$\text{mín} \quad 90x_{ea} + 80x_{eh} + 60x_{ga} + 50x_{gh} + 30x_{sa} + 40x_{sh}$$

- Restricciones?

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & 90x_{ea} + 80x_{eh} + 60x_{ga} + 50x_{gh} + 30x_{sa} + 40x_{sh} \\
\text{sujeto a} \quad & x_{sa} + x_{sh} \leq 30 \\
& x_{ga} + x_{ea} + x_{sa} \geq 10 \\
& x_{gh} + x_{eh} + x_{sh} \geq 30 \\
& x_{ea}, x_{eh}, x_{ga}, x_{gh}, x_{sa}, x_{sh} \geq 0
\end{aligned}$$

Ejemplo: Circuito Digital [Boyd et al., 2007]



Queremos maximizar velocidad (minimizar retardo) bajo restricciones de potencia y área.

- D_i:Retardo de compuerta i, a_i:área de compuerta i, P_i potencia disipada por compuerta i.

- D_i:Retardo de compuerta i, a_i:área de compuerta i, P_i potencia disipada por compuerta i.
- $D_i \approx R_i \sum_j C_j$, $P_i \propto a_i, f_i$.

- D_i:Retardo de compuerta i, a_i:área de compuerta i, P_i potencia disipada por compuerta i.
- $D_i \approx R_i \sum_j C_j$, $P_i \propto a_i, f_i$.
- $R_i \propto a_i \quad C_i \propto \frac{1}{a_i}$

- D_i:Retardo de compuerta i, a_i:área de compuerta i, P_i potencia disipada por compuerta i.
- $D_i \approx R_i \sum_j C_j$, $P_i \propto a_i, f_i$.
- $R_i \propto a_i \quad C_i \propto \frac{1}{a_i}$

Problema de optimización:

- D_i:Retardo de compuerta i, a_i:área de compuerta i, P_i potencia disipada por compuerta i.
- $D_i \approx R_i \sum_j C_j$, $P_i \propto a_i, f_i$.
- $R_i \propto a_i \quad C_i \propto \frac{1}{a_i}$

Problema de optimización:

- Minimizar $D = \max\{D_1 + D_4 + D_6, D_1 + D_4 + D_7, D_2 + D_4 + D_6, D_2 + D_4 + D_7 . D_2 + D_5 + D_7, D_3 + D_5 + D_6, D_3 + D_7\}$

- D_i:Retardo de compuerta i, a_i:área de compuerta i, P_i potencia disipada por compuerta i.
- $D_i \approx R_i \sum_j C_j$, $P_i \propto a_i, f_i$.
- $R_i \propto a_i \quad C_i \propto \frac{1}{a_i}$

Problema de optimización:

- Minimizar $D = \max\{D_1 + D_4 + D_6, D_1 + D_4 + D_7, D_2 + D_4 + D_6, D_2 + D_4 + D_7.D_2 + D_5 + D_7, D_3 + D_5 + D_6, D_3 + D_7\}$
- sujeto a
  - Restricción de área: $\sum_i a_i \leq A^{max}$

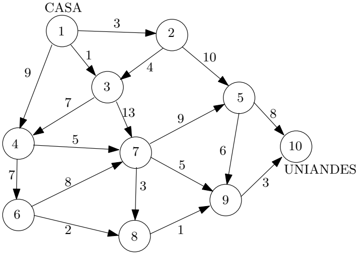
- D_i:Retardo de compuerta i, a_i:área de compuerta i, P_i potencia disipada por compuerta i.
- $D_i \approx R_i \sum_j C_j$, $P_i \propto a_i, f_i$.
- $R_i \propto a_i \quad C_i \propto \frac{1}{a_i}$

Problema de optimización:

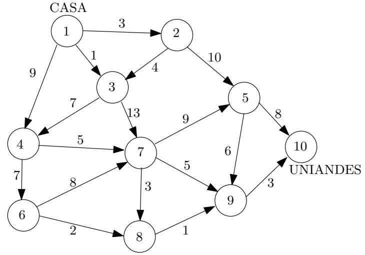
- Minimizar $D = \max\{D_1 + D_4 + D_6, D_1 + D_4 + D_7, D_2 + D_4 + D_6, D_2 + D_4 + D_7.D_2 + D_5 + D_7, D_3 + D_5 + D_6, D_3 + D_7\}$
- sujeto a
  - Restricción de área: $\sum_i a_i \leq A^{max}$
  - Restricción de potencia: $\sum_i P_i \leq P^{max}$.

Ejemplo: El problema de la ruta más corta

Ejemplo: El problema de la ruta más corta

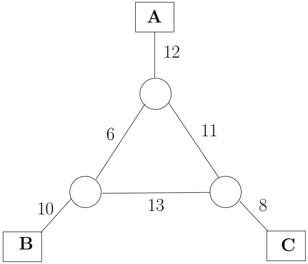


Ejemplo: El problema de la ruta más corta

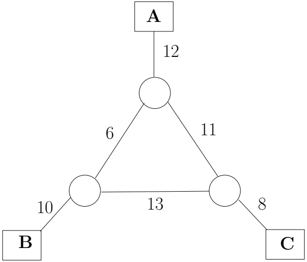


$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{i-j} \\
\text{sujeto a} \quad & x_{1-2} + x_{1-3} + x_{1-4} = 1 \\
& x_{5-10} + x_{9-10} = -1 \\
& \sum_{j\to i} x_{j-i} - \sum_{i\to j} x_{i-j} = 0, \quad i = 2,3,4,5,6,7,8,9. \\
& x_{i-j} \geq 0
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Red de comunicaciones

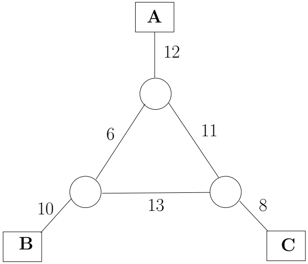


Ejemplo: Red de comunicaciones



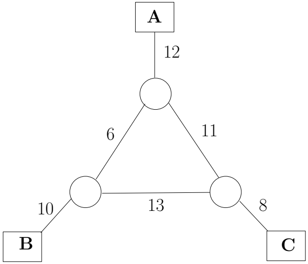
- Cada conexión requiere por lo menos dos unidades de ancho de banda

Ejemplo: Red de comunicaciones



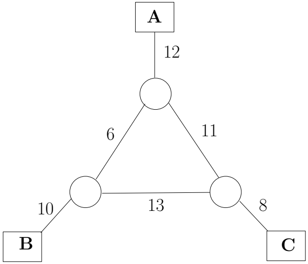
- Cada conexión requiere por lo menos dos unidades de ancho de banda
- Las conexiones **A** – **B**, **B** – **C** y **A** – **C** pagan \$3, \$4 y \$2 por unidad de ancho de banda respectivamente.

Ejemplo: Red de comunicaciones



- Cada conexión requiere por lo menos dos unidades de ancho de banda
- Las conexiones **A** – **B**, **B** – **C** y **A** – **C** pagan \$3, \$4 y \$2 por unidad de ancho de banda respectivamente.
- Cada conexión se puede enrutar de dos formas, a lo largo de una ruta corta y a lo largo de una ruta larga, o por una combinación.

Ejemplo: Red de comunicaciones



- Cada conexión requiere por lo menos dos unidades de ancho de banda
- Las conexiones **A** – **B**, **B** – **C** y **A** – **C** pagan \$3, \$4 y \$2 por unidad de ancho de banda respectivamente.
- Cada conexión se puede enrutar de dos formas, a lo largo de una ruta corta y a lo largo de una ruta larga, o por una combinación.
- Usted como administrador de la red desea maximizar los ingresos.

- Variables?

- Variables?

$$x^c_{AB}, x^l_{AB}, x^c_{BC}, x^l_{BC}, x^c_{AC}, x^l_{AC}$$

- Variables?

$$x^c_{AB}, x^l_{AB}, x^c_{BC}, x^l_{BC}, x^c_{AC}, x^l_{AC}$$

-

$$\text{máx} \quad 3x^c_{AB} + 3x^l_{AB} + 2x^c_{BC} + 2x^l_{BC} + 4x^c_{AC} + 4x^l_{AC}$$

- Variables?

$$x^c_{AB}, x^l_{AB}, x^c_{BC}, x^l_{BC}, x^c_{AC}, x^l_{AC}$$

- $$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 3x^c_{AB} + 3x^l_{AB} + 2x^c_{BC} + 2x^l_{BC} + 4x^c_{AC} + 4x^l_{AC} \\ \text{sujeto a} \quad & \end{aligned}$$

- Variables?

$$x^c_{AB}, x^l_{AB}, x^c_{BC}, x^l_{BC}, x^c_{AC}, x^l_{AC}$$

-

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 3x^c_{AB} + 3x^l_{AB} + 2x^c_{BC} + 2x^l_{BC} + 4x^c_{AC} + 4x^l_{AC} \\ \text{sujeto a} \quad & x^c_{AB} + x^l_{AB} + x^c_{BC} + x_{BC} \leq 10 \end{aligned}$$

- Variables?

$$x^c_{AB}, x^l_{AB}, x^c_{BC}, x^l_{BC}, x^c_{AC}, x^l_{AC}$$

-

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 3x^c_{AB} + 3x^l_{AB} + 2x^c_{BC} + 2x^l_{BC} + 4x^c_{AC} + 4x^l_{AC} \\ \text{sujeto a} \quad & x^c_{AB} + x^l_{AB} + x^c_{BC} + x_{BC} \leq 10 \\ & x^c_{AB} + x^l_{AB} + x^c_{AC} + x^l_{AC} \leq 12 \end{aligned}$$

- Variables?

$$x^c_{AB}, x^l_{AB}, x^c_{BC}, x^l_{BC}, x^c_{AC}, x^l_{AC}$$

- $$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 3x^c_{AB} + 3x^l_{AB} + 2x^c_{BC} + 2x^l_{BC} + 4x^c_{AC} + 4x^l_{AC} \\ \text{sujeto a} \quad & x^c_{AB} + x^l_{AB} + x^c_{BC} + x_{BC} \leq 10 \\ & x^c_{AB} + x^l_{AB} + x^c_{AC} + x^l_{AC} \leq 12 \\ & x^c_{BC} + x^l_{BC} + x^c_{AC} + x^l_{AC} \leq 8 \end{aligned}$$

- Variables?

$$x^c_{AB}, x^l_{AB}, x^c_{BC}, x^l_{BC}, x^c_{AC}, x^l_{AC}$$

-

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & 3x^c_{AB} + 3x^l_{AB} + 2x^c_{BC} + 2x^l_{BC} + 4x^c_{AC} + 4x^l_{AC} \\
\text{sujeto a} \quad & x^c_{AB} + x^l_{AB} + x^c_{BC} + x_{BC} \leq 10 \\
& x^c_{AB} + x^l_{AB} + x^c_{AC} + x^l_{AC} \leq 12 \\
& x^c_{BC} + x^l_{BC} + x^c_{AC} + x^l_{AC} \leq 8 \\
& x^c_{AB} + x^l_{BC} + x^l_{AC} \leq 6
\end{aligned}$$

- Variables?

$$x^c_{AB}, x^l_{AB}, x^c_{BC}, x^l_{BC}, x^c_{AC}, x^l_{AC}$$

-

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 3x^c_{AB} + 3x^l_{AB} + 2x^c_{BC} + 2x^l_{BC} + 4x^c_{AC} + 4x^l_{AC} \\ \text{sujeto a} \quad & x^c_{AB} + x^l_{AB} + x^c_{BC} + x_{BC} \leq 10 \\ & x^c_{AB} + x^l_{AB} + x^c_{AC} + x^l_{AC} \leq 12 \\ & x^c_{BC} + x^l_{BC} + x^c_{AC} + x^l_{AC} \leq 8 \\ & x^c_{AB} + x^l_{BC} + x^l_{AC} \leq 6 \\ & x^l_{AB} + x^c_{BC} + x^l_{AC} \leq 13 \end{aligned}$$

- Variables?

$$x^c_{AB}, x^l_{AB}, x^c_{BC}, x^l_{BC}, x^c_{AC}, x^l_{AC}$$

-

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & 3x^c_{AB} + 3x^l_{AB} + 2x^c_{BC} + 2x^l_{BC} + 4x^c_{AC} + 4x^l_{AC} \\
\text{sujeto a} \quad & x^c_{AB} + x^l_{AB} + x^c_{BC} + x_{BC} \leq 10 \\
& x^c_{AB} + x^l_{AB} + x^c_{AC} + x^l_{AC} \leq 12 \\
& x^c_{BC} + x^l_{BC} + x^c_{AC} + x^l_{AC} \leq 8 \\
& x^c_{AB} + x^l_{BC} + x^l_{AC} \leq 6 \\
& x^l_{AB} + x^c_{BC} + x^l_{AC} \leq 13 \\
& x^l_{AB} + x^l_{BC} + x^c_{AC} \leq 11
\end{aligned}$$

- Variables?

$$x^c_{AB}, x^l_{AB}, x^c_{BC}, x^l_{BC}, x^c_{AC}, x^l_{AC}$$

-

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & 3x^c_{AB} + 3x^l_{AB} + 2x^c_{BC} + 2x^l_{BC} + 4x^c_{AC} + 4x^l_{AC} \\
\text{sujeto a} \quad & x^c_{AB} + x^l_{AB} + x^c_{BC} + x_{BC} \leq 10 \\
& x^c_{AB} + x^l_{AB} + x^c_{AC} + x^l_{AC} \leq 12 \\
& x^c_{BC} + x^l_{BC} + x^c_{AC} + x^l_{AC} \leq 8 \\
& x^c_{AB} + x^l_{BC} + x^l_{AC} \leq 6 \\
& x^l_{AB} + x^c_{BC} + x^l_{AC} \leq 13 \\
& x^l_{AB} + x^l_{BC} + x^c_{AC} \leq 11 \\
& x^c_{AB} + x^l_{AB} \geq 2
\end{aligned}$$

- Variables?

$$x^c_{AB}, x^l_{AB}, x^c_{BC}, x^l_{BC}, x^c_{AC}, x^l_{AC}$$

-

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & 3x^c_{AB} + 3x^l_{AB} + 2x^c_{BC} + 2x^l_{BC} + 4x^c_{AC} + 4x^l_{AC} \\
\text{sujeto a} \quad & x^c_{AB} + x^l_{AB} + x^c_{BC} + x_{BC} \leq 10 \\
& x^c_{AB} + x^l_{AB} + x^c_{AC} + x^l_{AC} \leq 12 \\
& x^c_{BC} + x^l_{BC} + x^c_{AC} + x^l_{AC} \leq 8 \\
& x^c_{AB} + x^l_{BC} + x^l_{AC} \leq 6 \\
& x^l_{AB} + x^c_{BC} + x^l_{AC} \leq 13 \\
& x^l_{AB} + x^l_{BC} + x^c_{AC} \leq 11 \\
& x^c_{AB} + x^l_{AB} \geq 2 \\
& x^c_{BC} + x^l_{BC} \geq 2
\end{aligned}$$

- Variables?

$$x^c_{AB}, x^l_{AB}, x^c_{BC}, x^l_{BC}, x^c_{AC}, x^l_{AC}$$

-

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & 3x^c_{AB} + 3x^l_{AB} + 2x^c_{BC} + 2x^l_{BC} + 4x^c_{AC} + 4x^l_{AC} \\
\text{sujeto a} \quad & x^c_{AB} + x^l_{AB} + x^c_{BC} + x_{BC} \leq 10 \\
& x^c_{AB} + x^l_{AB} + x^c_{AC} + x^l_{AC} \leq 12 \\
& x^c_{BC} + x^l_{BC} + x^c_{AC} + x^l_{AC} \leq 8 \\
& x^c_{AB} + x^l_{BC} + x^l_{AC} \leq 6 \\
& x^l_{AB} + x^c_{BC} + x^l_{AC} \leq 13 \\
& x^l_{AB} + x^l_{BC} + x^c_{AC} \leq 11 \\
& x^c_{AB} + x^l_{AB} \geq 2 \\
& x^c_{BC} + x^l_{BC} \geq 2 \\
& x^c_{AC} + x^l_{AC} \geq 2
\end{aligned}$$

- Variables?

$$x^c_{AB}, x^l_{AB}, x^c_{BC}, x^l_{BC}, x^c_{AC}, x^l_{AC}$$

-

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & 3x^c_{AB} + 3x^l_{AB} + 2x^c_{BC} + 2x^l_{BC} + 4x^c_{AC} + 4x^l_{AC} \\
\text{sujeto a} \quad & x^c_{AB} + x^l_{AB} + x^c_{BC} + x_{BC} \leq 10 \\
& x^c_{AB} + x^l_{AB} + x^c_{AC} + x^l_{AC} \leq 12 \\
& x^c_{BC} + x^l_{BC} + x^c_{AC} + x^l_{AC} \leq 8 \\
& x^c_{AB} + x^l_{BC} + x^l_{AC} \leq 6 \\
& x^l_{AB} + x^c_{BC} + x^l_{AC} \leq 13 \\
& x^l_{AB} + x^l_{BC} + x^c_{AC} \leq 11 \\
& x^c_{AB} + x^l_{AB} \geq 2 \\
& x^c_{BC} + x^l_{BC} \geq 2 \\
& x^c_{AC} + x^l_{AC} \geq 2 \\
& x^c_{AB}, x^l_{AB}, x^c_{BC}, x^l_{BC}, x^c_{AC}, x^l_{AC} \geq 0
\end{aligned}$$

Ejemplo: Problema de Producción

- Determinar la mejor manera de combinar varios componentes para producir cierto producto.

Ejemplo: Problema de Producción

- Determinar la mejor manera de combinar varios componentes para producir cierto producto.
- Cantidad de componente i es x_i.

Ejemplo: Problema de Producción

- Determinar la mejor manera de combinar varios componentes para producir cierto producto.
- Cantidad de componente i es x_i.
- Función de producción $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (cantidad producida)

Ejemplo: Problema de Producción

- Determinar la mejor manera de combinar varios componentes para producir cierto producto.
- Cantidad de componente i es x_i.
- Función de producción $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (cantidad producida)
- Precio unitario q.

Ejemplo: Problema de Producción

- Determinar la mejor manera de combinar varios componentes para producir cierto producto.
- Cantidad de componente i es x_i.
- Función de producción $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (cantidad producida)
- Precio unitario q.
- Precio unitario de componente i es p_i.

Ejemplo: Problema de Producción

- Determinar la mejor manera de combinar varios componentes para producir cierto producto.
- Cantidad de componente i es x_i.
- Función de producción $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (cantidad producida)
- Precio unitario q.
- Precio unitario de componente i es p_i.

Queremos resolver:

Ejemplo: Problema de Producción

- Determinar la mejor manera de combinar varios componentes para producir cierto producto.
- Cantidad de componente i es x_i.
- Función de producción $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (cantidad producida)
- Precio unitario q.
- Precio unitario de componente i es p_i.

Queremos resolver:

$$\max_{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} qf(x_1, x_2, \ldots, x_n) - p_1 x_1 - p_2 x_2 - \cdots - p_n x_n.$$

Ejemplo: Problema de Producción

- Determinar la mejor manera de combinar varios componentes para producir cierto producto.
- Cantidad de componente i es x_i.
- Función de producción $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (cantidad producida)
- Precio unitario q.
- Precio unitario de componente i es p_i.

Queremos resolver:

$$\max_{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} qf(x_1, x_2, \ldots, x_n) - p_1 x_1 - p_2 x_2 - \cdots - p_n x_n.$$

Posibles restricciones?

Ejemplo: Control óptimo

Ejemplo: Control óptimo

- Sistema lineal de tiempo discreto:

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k-1] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k]$$

Ejemplo: Control óptimo

- Sistema lineal de tiempo discreto:

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k-1] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k]$$

- Para un $\mathbf{x}[0]$ dado queremos escoger la señal de control $\mathbf{u}[k]$ de tal forma que el estado $\mathbf{x}[k]$ sea pequeño , gastando la menor energía posible.

Ejemplo: Control óptimo

- Sistema lineal de tiempo discreto:

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k-1] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k]$$

- Para un $\mathbf{x}[0]$ dado queremos escoger la señal de control $\mathbf{u}[k]$ de tal forma que el estado $\mathbf{x}[k]$ sea pequeño , gastando la menor energía posible.
- Problema de optimización:

Ejemplo: Control óptimo

- Sistema lineal de tiempo discreto:

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k-1] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k]$$

- Para un $\mathbf{x}[0]$ dado queremos escoger la señal de control $\mathbf{u}[k]$ de tal forma que el estado $\mathbf{x}[k]$ sea pequeño , gastando la menor energía posible.
- Problema de optimización:

$$\min \quad \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \alpha\|\mathbf{x}[k]\|^2 + \beta\|\mathbf{u}[k]\|^2$$

Ejemplo: Control óptimo

- Sistema lineal de tiempo discreto:

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k-1] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k]$$

- Para un $\mathbf{x}[0]$ dado queremos escoger la señal de control $\mathbf{u}[k]$ de tal forma que el estado $\mathbf{x}[k]$ sea pequeño , gastando la menor energía posible.
- Problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \alpha\|\mathbf{x}[k]\|^2 + \beta\|\mathbf{u}[k]\|^2 \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{x}[k] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k-1] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k] \quad k = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Ejemplo: Control óptimo

- Sistema lineal de tiempo discreto:

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k-1] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k]$$

- Para un $\mathbf{x}[0]$ dado queremos escoger la señal de control $\mathbf{u}[k]$ de tal forma que el estado $\mathbf{x}[k]$ sea pequeño , gastando la menor energía posible.
- Problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \alpha\|\mathbf{x}[k]\|^2 + \beta\|\mathbf{u}[k]\|^2 \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{x}[k] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k-1] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k] \quad k = 1, \ldots, N \end{aligned}$$

- Programación cuadrática.

Ejemplo: QP

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Ejemplo: QP

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

con $\mathbf{Q} > 0$ y $\mathbf{A}$ de rango completo.

Ejemplo: Control Optimo

Ejemplo: Control Optimo

- Deuda de $US\$10,000$ en tarjeta de crédito.

Ejemplo: Control Optimo

- Deuda de $US\$10{,}000$ en tarjeta de crédito.
- Tasa de interes del $2\,\%$.

Ejemplo: Control Optimo

- Deuda de $US\$10{,}000$ en tarjeta de crédito.
- Tasa de interes del $2\,\%$.
- Queremos hacer pagos durante 10 meses de manera que podamos:

Ejemplo: Control Optimo

- Deuda de $US\$10{,}000$ en tarjeta de crédito.
- Tasa de interes del $2\,\%$.
- Queremos hacer pagos durante 10 meses de manera que podamos:
    1. Disminuir deuda.

Ejemplo: Control Optimo

- Deuda de $US\$10{,}000$ en tarjeta de crédito.
- Tasa de interes del 2 %.
- Queremos hacer pagos durante 10 meses de manera que podamos:
  1. Disminuir deuda.
  2. Tener pagos manejables.

Ejemplo: Control Optimo

- Deuda de $US\$10{,}000$ en tarjeta de crédito.
- Tasa de interes del 2 %.
- Queremos hacer pagos durante 10 meses de manera que podamos:
  1. Disminuir deuda.
  2. Tener pagos manejables.
- Sistema dinámico:

$$x_k = 1{,}02x_{k-1} - u_k \quad k = 1, 2, \ldots, 10.$$

Ejemplo: Control Optimo

- Deuda de $US\$10{,}000$ en tarjeta de crédito.
- Tasa de interes del $2\,\%$.
- Queremos hacer pagos durante 10 meses de manera que podamos:
  1. Disminuir deuda.
  2. Tener pagos manejables.
- Sistema dinámico:

$$x_k = 1{,}02 x_{k-1} - u_k \quad k = 1, 2, \ldots, 10.$$

  - Nivel de deuda.

Ejemplo: Control Optimo

- Deuda de $US\$10{,}000$ en tarjeta de crédito.
- Tasa de interes del 2 %.
- Queremos hacer pagos durante 10 meses de manera que podamos:
  1. Disminuir deuda.
  2. Tener pagos manejables.
- Sistema dinámico:

$$x_k = 1{,}02 x_{k-1} - u_k \quad k = 1, 2, \ldots, 10.$$

  - Nivel de deuda.
  - Pago mensual.

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10}\left(\alpha x_k^2 + \beta u_k^2\right) \\
\text{sujeto a} \quad & x_k = 1{,}02 x_{k-1} - u_k \quad k = 1, 2, \ldots, 10, \quad x_0 = 10000
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10}\left(\alpha x_k^2 + \beta u_k^2\right) \\ \text{sujeto a} \quad & x_k = 1{,}02 x_{k-1} - u_k \quad k = 1, 2, \ldots, 10, \quad x_0 = 10000 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}^T = [x_1, \ldots, x_{10}, u_1, \ldots, u_{10}] \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \alpha\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & & \cdots & 0 & -1 & & \cdots & 0 \\ -1{,}02 & 1 & & \vdots & & -1 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & -1{,}02 & 1 & 0 & \cdots & & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10200 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

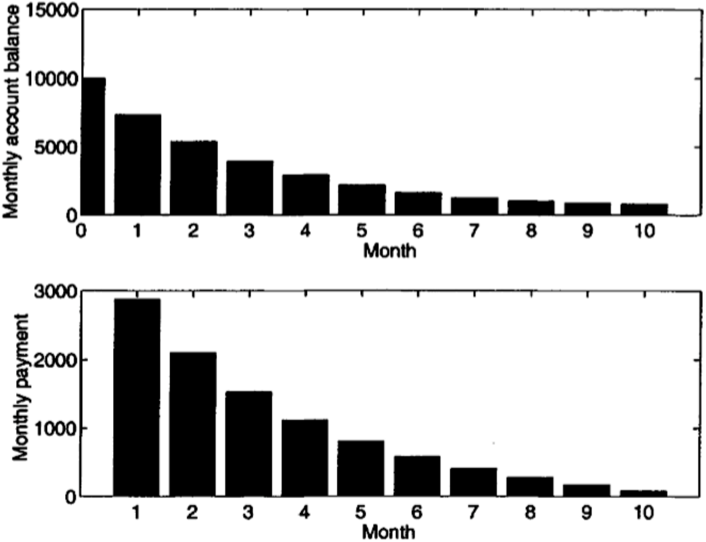
$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10}\left(\alpha x_k^2+\beta u_k^2\right) \\ \text{sujeto a} & x_k = 1{,}02x_{k-1}-u_k \quad k=1,2,\ldots,10, \quad x_0=10000 \end{array}$$

$$\mathbf{x}^T = [x_1,\ldots,x_{10},u_1,\ldots,u_{10}] \qquad \mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\alpha\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}\end{bmatrix}$$

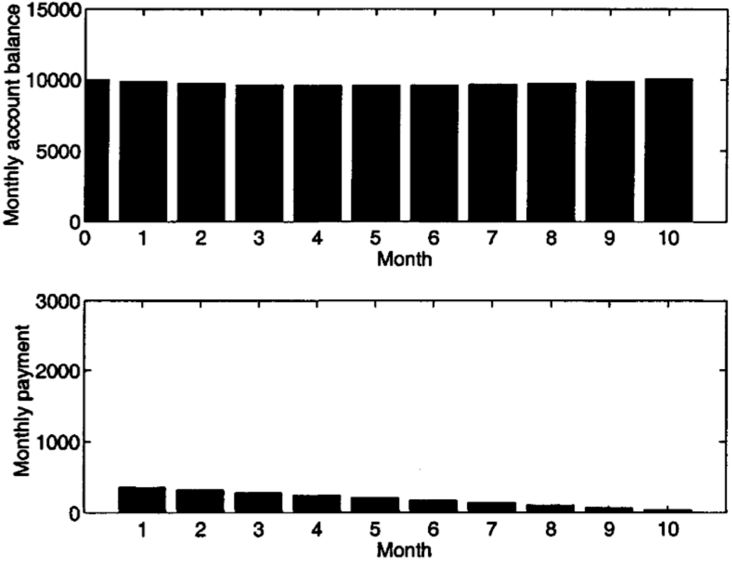
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & & \cdots & 0 & -1 & & \cdots & 0\\ -1{,}02 & 1 & & \vdots & & -1 & & \vdots\\ & \ddots & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & -1{,}02 & 1 & 0 & \cdots & & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}10200\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^*=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b}$$

$$\alpha = 1,\ \beta = 10$$



$$\alpha = 1,\ \beta = 300$$



Ejemplo: aprender una distribución de probabilidad

Ejemplo: aprender una distribución de probabilidad

- Queremos modelar la distribución de palabras en el idioma español.

Ejemplo: aprender una distribución de probabilidad

- Queremos modelar la distribución de palabras en el idioma español.
- Si no sabemos nada:

Ejemplo: aprender una distribución de probabilidad

- Queremos modelar la distribución de palabras en el idioma español.
- Si no sabemos nada: distribución uniforme.

Ejemplo: aprender una distribución de probabilidad

- Queremos modelar la distribución de palabras en el idioma español.
- Si no sabemos nada: distribución uniforme.
- Suponga que podemos recolectar estadísticas:

Ejemplo: aprender una distribución de probabilidad

- Queremos modelar la distribución de palabras en el idioma español.
- Si no sabemos nada: distribución uniforme.
- Suponga que podemos recolectar estadísticas:
  - P(longitud > 5)=0.3

Ejemplo: aprender una distribución de probabilidad

- Queremos modelar la distribución de palabras en el idioma español.
- Si no sabemos nada: distribución uniforme.
- Suponga que podemos recolectar estadísticas:
    - P(longitud > 5)=0.3
    - P(termina en a)=0.12

Ejemplo: aprender una distribución de probabilidad

- Queremos modelar la distribución de palabras en el idioma español.
- Si no sabemos nada: distribución uniforme.
- Suponga que podemos recolectar estadísticas:
  - P(longitud > 5)=0.3
  - P(termina en a)=0.12
  - P(comienza con a) $= 0.05$

Ejemplo: aprender una distribución de probabilidad

- Queremos modelar la distribución de palabras en el idioma español.
- Si no sabemos nada: distribución uniforme.
- Suponga que podemos recolectar estadísticas:
  - P(longitud $>$ 5)=0.3
  - P(termina en a)=0.12
  - P(comienza con a) $=$ 0.05
  - $\vdots$

Ejemplo: aprender una distribución de probabilidad

- Queremos modelar la distribución de palabras en el idioma español.
- Si no sabemos nada: distribución uniforme.
- Suponga que podemos recolectar estadísticas:
  - P(longitud $>$ 5)=0.3
  - P(termina en a)=0.12
  - P(comienza con a) = 0.05
  - $\vdots$
- Qué distribución debemos escoger?

- Sea S el conjunto de palabras.

- Sea S el conjunto de palabras.
- Para palabras $x \in S$ medimos las características:

- Sea S el conjunto de palabras.
- Para palabras $x \in S$ medimos las características:

$$T_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{longitud de } x > 5 \ , \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Sea S el conjunto de palabras.
- Para palabras $x \in S$ medimos las características:

$$T_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{longitud de } x > 5 \text{ ,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$T_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{x comienza en a ,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Sea S el conjunto de palabras.
- Para palabras $x \in S$ medimos las características:

$$T_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{longitud de } x > 5 \text{ ,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$T_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{x comienza en a ,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\vdots$$

- Sea S el conjunto de palabras.
- Para palabras $x \in S$ medimos las características:

$$T_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{longitud de } x > 5 \text{ ,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$T_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{x comienza en a ,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\vdots$$

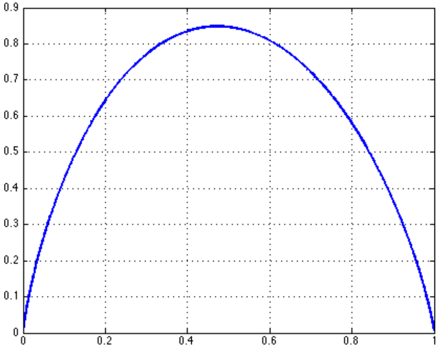
- Querems encontrar una distribución que satisface las restricciones:

$$ET_1(x) = 0{,}3$$
$$ET_2(x) = 0{,}12$$
$$\vdots$$

que sea tan aleatoria como sea posible.

Entropía

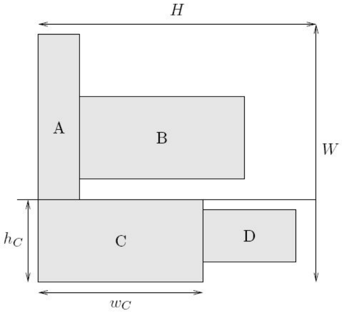
$$H(\mathbf{p}) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$



Ejemplo: Máxima Entropía

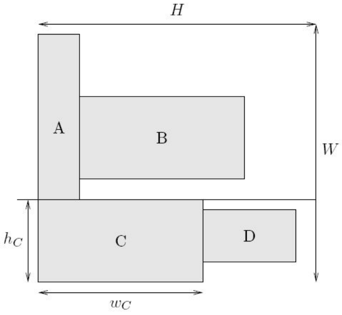
$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \\
\text{sujeto a} \quad & \sum_{i=1}^{n} T_j(x_i) p_i = m_i \\
& \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \quad p_i \geq 0
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Floor Planning [Boyd et al., 2007]



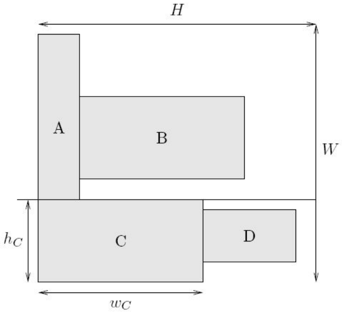
- Acomodar/deformar rectángulos, de manera que se ocupe menor área posible.

Ejemplo: Floor Planning [Boyd et al., 2007]



- Acomodar/deformar rectángulos, de manera que se ocupe menor área posible.
- En general, problema difícil.

Ejemplo: Floor Planning [Boyd et al., 2007]



- Acomodar/deformar rectángulos, de manera que se ocupe menor área posible.
- En general, problema difícil.
- Restricciones: A a la izquierda de B, C a la izquierda de D, (A,b) sobre (C,D).

- Variables:

- Variables: $w_A, w_B, w_C, w_D, h_A, h_B, h_C, h_D$.

- Variables: $w_A, w_B, w_C, w_D, h_A, h_B, h_C, h_D$.
- Objetivo:

- Variables: $w_A, w_B, w_C, w_D, h_A, h_B, h_C, h_D$.
- Objetivo: Minimizar $W \times H$.

- Variables: $w_A, w_B, w_C, w_D, h_A, h_B, h_C, h_D$.
- Objetivo: Minimizar $W \times H$.
  - $H = \text{máx}\{h_A, h_B\} + \text{máx}\{h_C, h_D\}$.

- Variables: $w_A, w_B, w_C, w_D, h_A, h_B, h_C, h_D$.
- Objetivo: Minimizar $W \times H$.
  - $H = \text{máx}\{h_A, h_B\} + \text{máx}\{h_C, h_D\}$.
  - $W = \text{máx}\{w_A + w_B, w_C + w_D\}$.

- Variables: $w_A, w_B, w_C, w_D, h_A, h_B, h_C, h_D$.
- Objetivo: Minimizar $W \times H$.
  - $H = \max\{h_A, h_B\} + \max\{h_C, h_D\}$.
  - $W = \max\{w_A + w_B, w_C + w_D\}$.
- Restricciones:

- Variables: $w_A, w_B, w_C, w_D, h_A, h_B, h_C, h_D$.
- Objetivo: Minimizar $W \times H$.
  - $H = \max\{h_A, h_B\} + \max\{h_C, h_D\}$.
  - $W = \max\{w_A + w_B, w_C + w_D\}$.
- Restricciones:

$$h_A w_A = a, \quad h_B w_B = b, \quad h_C w_C = c, \quad h_D w_D = d.$$

- Variables: $w_A, w_B, w_C, w_D, h_A, h_B, h_C, h_D$.
- Objetivo: Minimizar $W \times H$.
  - $H = \max\{h_A, h_B\} + \max\{h_C, h_D\}$.
  - $W = \max\{w_A + w_B, w_C + w_D\}$.
- Restricciones:

$$h_A w_A = a, \quad h_B w_B = b, \quad h_C w_C = c, \quad h_D w_D = d.$$

$$\frac{1}{\alpha_{max}} \leq \frac{h_A}{w_A} \leq \alpha_{max}, \ldots, \frac{1}{\alpha_{max}} \leq \frac{h_D}{w_D} \leq \alpha_{max}$$

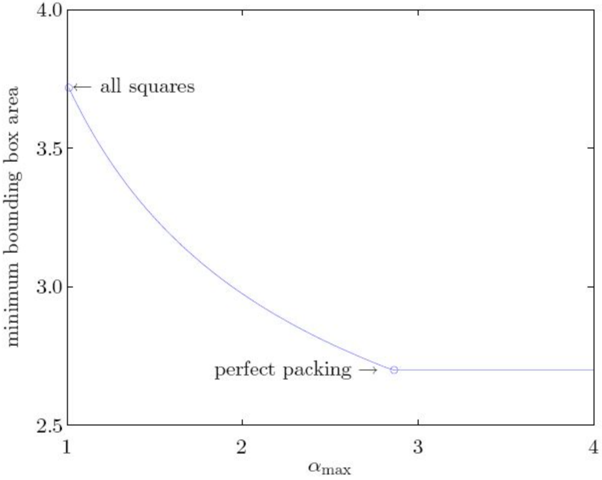
- Variables: $w_A, w_B, w_C, w_D, h_A, h_B, h_C, h_D$.
- Objetivo: Minimizar $W \times H$.
  - $H = \max\{h_A, h_B\} + \max\{h_C, h_D\}$.
  - $W = \max\{w_A + w_B, w_C + w_D\}$.
- Restricciones:

$$h_A w_A = a, \quad h_B w_B = b, \quad h_C w_C = c, \quad h_D w_D = d.$$

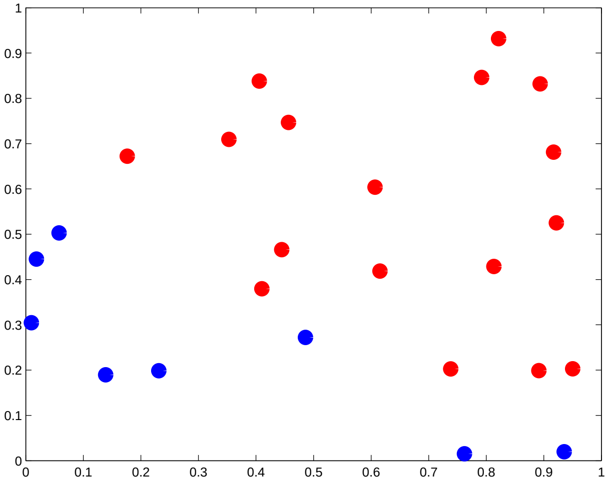
$$\frac{1}{\alpha_{max}} \leq \frac{h_A}{w_A} \leq \alpha_{max}, \ldots, \frac{1}{\alpha_{max}} \leq \frac{h_D}{w_D} \leq \alpha_{max}$$

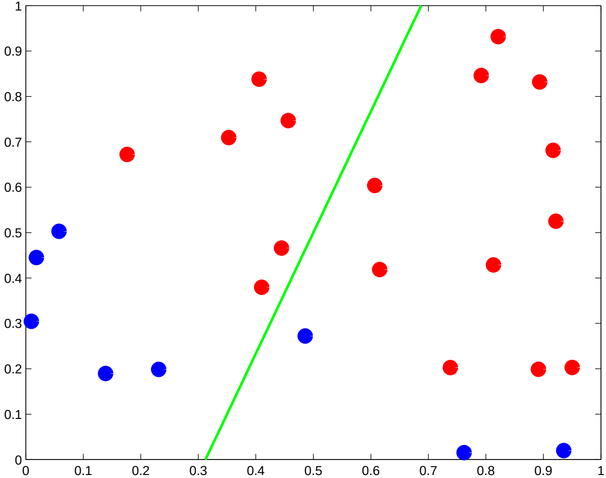
- Programa geométrico!

Soluciones para $a = 0{,}2,\ b = 0{,}5,\ c = 1{,}5,\ d = 0{,}5.$

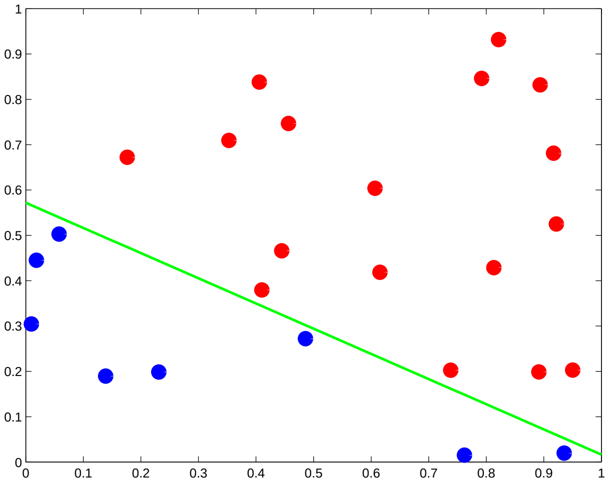


Ejemplo: Support Vector Machine

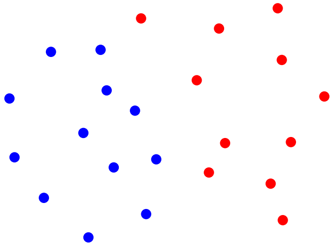




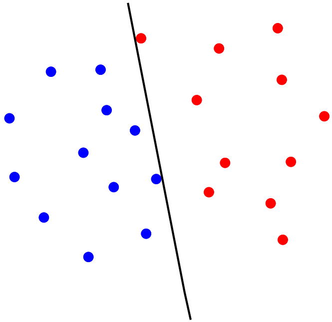
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

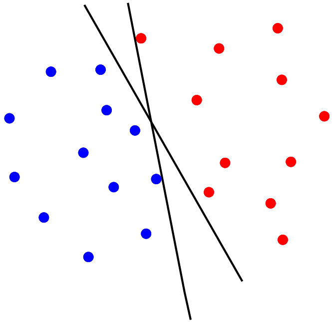
Clasificador con márgen (caso linealmente separable)



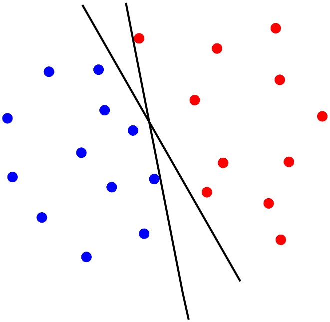
Clasificador con márgen (caso linealmente separable)



Clasificador con márgen (caso linealmente separable)

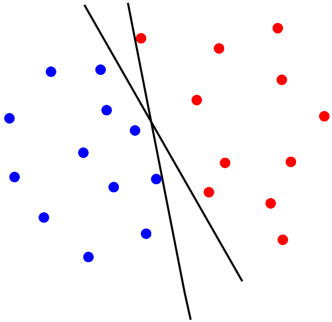


Clasificador con márgen (caso linealmente separable)



- Márgen: Distancia de un punto a la superficie de separación.

Clasificador con márgen (caso linealmente separable)



- Márgen: Distancia de un punto a la superficie de separación.
- Es deseable tener márgenes grandes.

Cómo encontrar un separador lineal con márgen grande?

Cómo encontrar un separador lineal con márgen grande?

- Hipótesis $h(\mathbf{x}) = \text{sign}(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b)$

Cómo encontrar un separador lineal con márgen grande?

- Hipótesis $h(\mathbf{x}) = \text{sign}(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b)$
- Separación:

Cómo encontrar un separador lineal con márgen grande?

- Hipótesis $h(\mathbf{x}) = \operatorname{sign}(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b)$
- Separación:

$$\begin{array}{cc} \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b \geq 1 & \text{Si } y_i = 1 \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b \leq -1 & \text{Si } y_i = -1 \end{array}$$

Cómo encontrar un separador lineal con márgen grande?

- Hipótesis $h(\mathbf{x}) = \text{sign}(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b)$
- Separación:

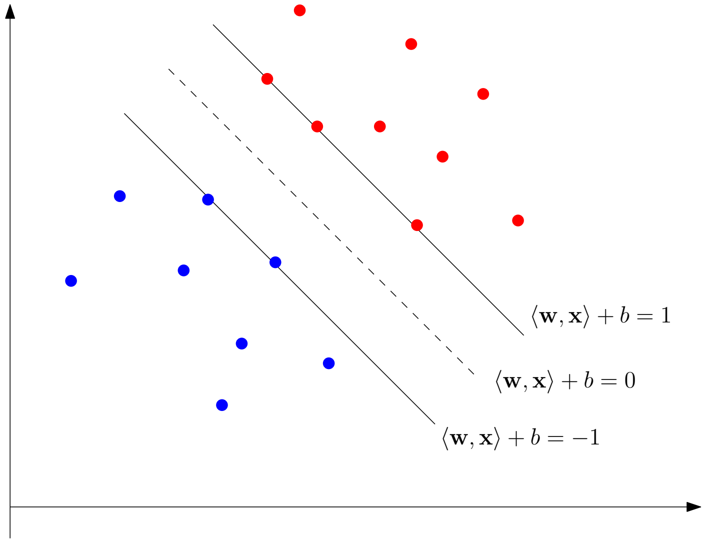
$$\left.\begin{array}{cc} \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b \geq 1 & \text{Si } y_i = 1 \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b \leq -1 & \text{Si } y_i = -1 \end{array}\right\} y_i \left(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b \right) - 1 \geq 0 \quad \forall i$$

Cómo encontrar un separador lineal con márgen grande?

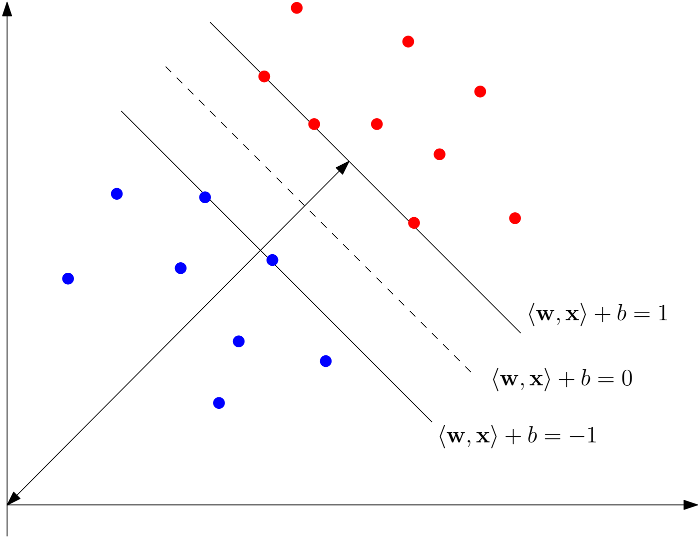
- Hipótesis $h(\mathbf{x}) = \text{sign}(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b)$
- Separación:

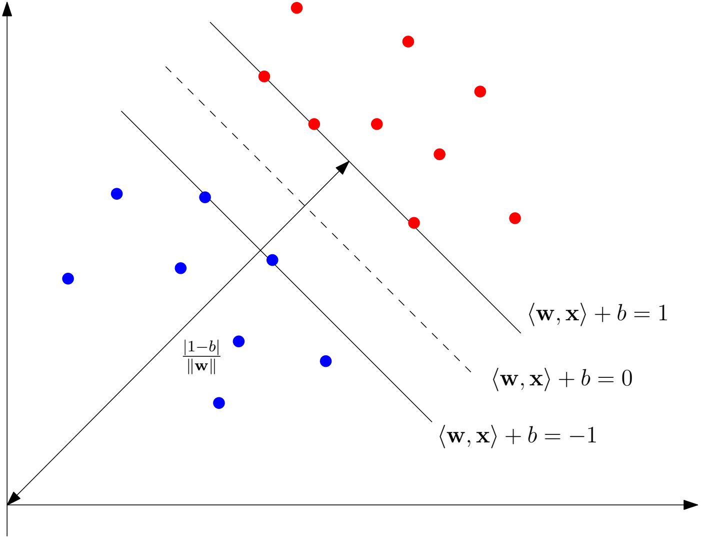
$$\left.\begin{array}{cc} \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b \geq 1 & \text{Si } y_i = 1 \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b \leq -1 & \text{Si } y_i = -1 \end{array}\right\} y_i \left(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b \right) - 1 \geq 0 \quad \forall i$$

- Márgen?

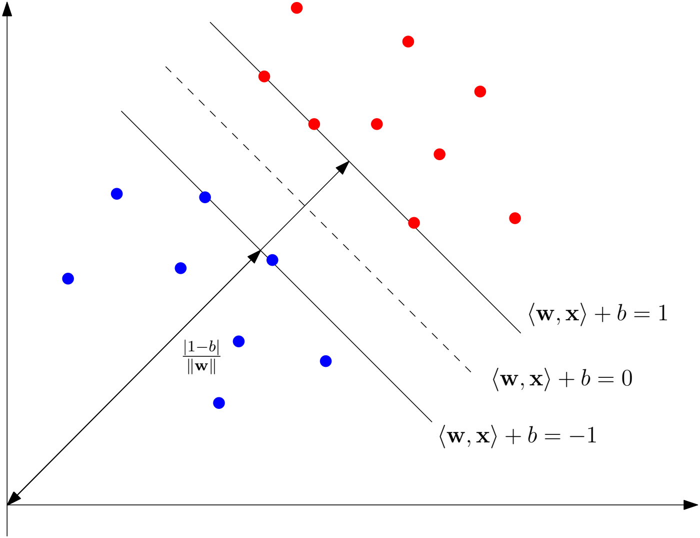


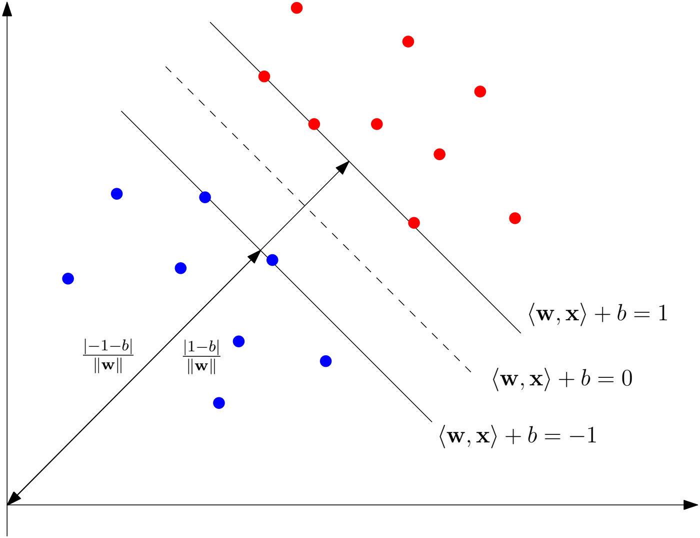
$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = 1$
$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = 0$
$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = -1$

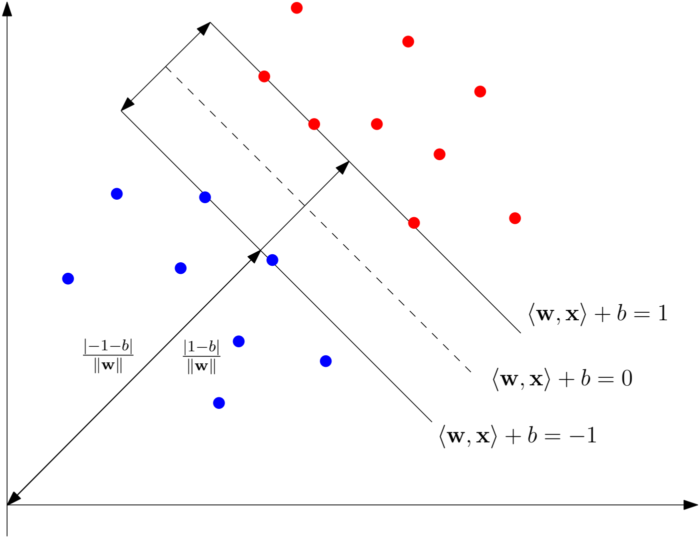

$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = 1$
$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = 0$
$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = -1$

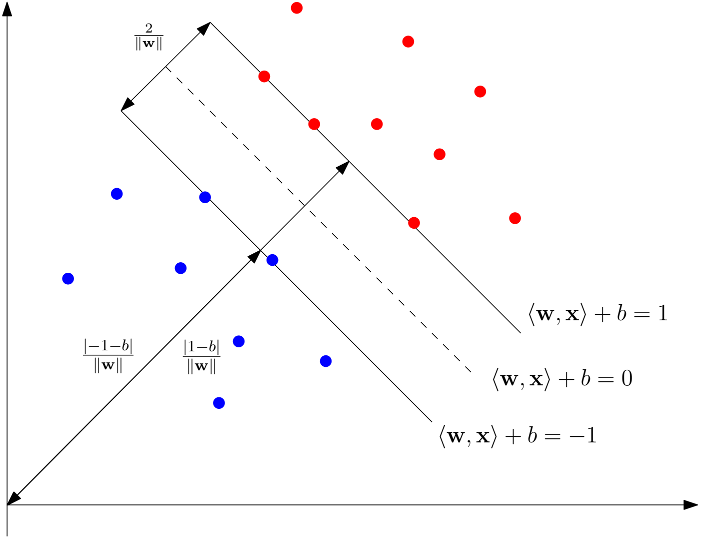


$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = 1$
$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = 0$
$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = -1$
$\frac{|1-b|}{\|\mathbf{w}\|}$


$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = 1$
$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = 0$
$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = -1$
$\frac{|1-b|}{\|\mathbf{w}\|}$


$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = 1$
$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = 0$
$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = -1$
$\frac{|-1-b|}{\|\mathbf{w}\|}$
$\frac{|1-b|}{\|\mathbf{w}\|}$


$\frac{|-1-b|}{\|\mathbf{w}\|}$
$\frac{|1-b|}{\|\mathbf{w}\|}$
$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = 1$
$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = 0$
$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = -1$


$\frac{2}{\|\mathbf{w}\|}$
$\frac{|-1-b|}{\|\mathbf{w}\|}$
$\frac{|1-b|}{\|\mathbf{w}\|}$
$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = 1$
$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = 0$
$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = -1$

- Problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2 \\ \text{sujeto a} \quad & y_i\left(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b\right) - 1 \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

- Problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2 \\ \text{sujeto a} \quad & y_i\left(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b\right) - 1 \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

- Problema de programación cuadrática.

- Problema de optimización:

$$
\begin{array}{rl}
\text{mín} & \frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2 \\
\text{sujeto a} & y_i\left(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b\right) - 1 \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

- Problema de programación cuadrática.
- Problema convexo

Clases de Problemas

Clases de Problemas

$$
\begin{gathered}
\text{mín} \quad f(\mathbf{x}) \\
\text{sujeto a} \\
g_i(\mathbf{x}) \leq a_i, \quad i = 1, \ldots, m \\
h_i(\mathbf{x}) = b_i, \quad j = 1, \ldots, q
\end{gathered}
$$

Clases de Problemas

$$\begin{gathered}\min \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeto a} \\ g_i(\mathbf{x}) \leq a_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ h_i(\mathbf{x}) = b_i, \quad j = 1, \ldots, q\end{gathered}$$

1. Sin restricciones.

Clases de Problemas

$$\begin{gathered}
\text{mín} \quad f(\mathbf{x}) \\
\text{sujeto a} \\
g_i(\mathbf{x}) \leq a_i, \quad i = 1, \ldots, m \\
h_i(\mathbf{x}) = b_i, \quad j = 1, \ldots, q
\end{gathered}$$

1. Sin restricciones.
2. Con restricciones:

Clases de Problemas

$$\begin{gathered} \min \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeto a} \\ g_i(\mathbf{x}) \leq a_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ h_i(\mathbf{x}) = b_i, \quad j = 1, \ldots, q \end{gathered}$$

1. Sin restricciones.
2. Con restricciones:
   1. Programación Lineal: $f(\mathbf{x}), g_i(\mathbf{x}), h_i(\mathbf{x})$ son lineales.

Clases de Problemas

$$\begin{gathered} \text{mín} \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeto a} \\ g_i(\mathbf{x}) \leq a_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ h_i(\mathbf{x}) = b_i, \quad j = 1, \ldots, q \end{gathered}$$

1. Sin restricciones.
2. Con restricciones:
   1. Programación Lineal: $f(\mathbf{x}), g_i(\mathbf{x}), h_i(\mathbf{x})$ son lineales.
   2. Programación No Lineal.

Clases de Problemas

$$\begin{gathered} \min \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeto a} \\ g_i(\mathbf{x}) \leq a_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ h_i(\mathbf{x}) = b_i, \quad j = 1, \ldots, q \end{gathered}$$

1. Sin restricciones.
2. Con restricciones:
    1. Programación Lineal: $f(\mathbf{x}), g_i(\mathbf{x}), h_i(\mathbf{x})$ son lineales.
    2. Programación No Lineal.

Caso especial: Programación convexa: $f(\mathbf{x}), g_i(\mathbf{x})$ son funciones convexas, $h_i(\mathbf{x})$ son funciones lineales.

Qué nos interesa?

Qué nos interesa?

- Identificar.

Qué nos interesa?

- Identificar.
- Formular.

Qué nos interesa?

- Identificar.
- Formular.
- Resolver: Estudiar algoritmos!

Qué nos interesa?

- Identificar.
- Formular.
- Resolver: Estudiar algoritmos!
  - Llega a la solución?

Qué nos interesa?

- Identificar.
- Formular.
- Resolver: Estudiar algoritmos!
  - Llega a la solución?
  - Eficiencia (tiempo, memoria).

Boyd, S., Kim, S. J., Vandenberghe, L., and Hassibi, A. (2007).
A tutorial on geometric programming.
Optimization and Engineering, 8(1):67–127.

Fletcher, R. (1987).
Practical methods of optimization.
Wiley, 2 edition.