Optimización[1].

Examen Final

Nombre: 27 de mayo de 2008

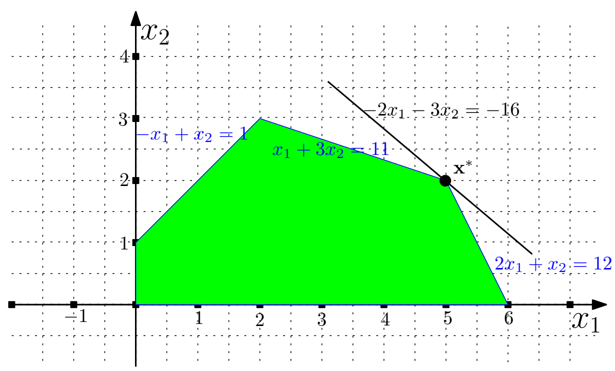
---

1. (17 puntos) Considere el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -2x_1 - 3x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 11 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   a) Grafique el conjunto factible.

   b) Halle el valor óptimo del costo gráficamente.



[1] El examen se debe elaborar individualmente. No se permite el uso de ningún material (libros,notas, etc) ni de calculadora. Usted debe justificar todas sus respuestas. Una respuesta que aparezca de la nada no tiene ningún valor.

2. (17 puntos) Considere el programa lineal:

$$\begin{array}{rl} \text{mín} & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ \text{sujeto a} & a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 1 \\ & x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{array}$$

donde $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

a) Escriba el problema dual y halle una solución al dual en términos de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

b) Utilice dualidad fuerte y holgura complementaria para encontrar la solución al problema primal.

a)

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & \lambda \\ \text{sujeto a} & a_1 \lambda \leq 1 \\ & a_2 \lambda \leq 1 \\ & \vdots \\ & a_n \lambda \leq 1 \end{array}$$

por inspección $\lambda^* = \frac{1}{a_n}$.

b) Por dualidad fuerte:

$$\lambda^* = x_1^* + x_2^* + \cdots + x_n^*$$

por holgura complementaria $x_1^* = x_2^* = \cdots = x_{n-1}^* = 0$ y $x_n^* > 0$, luego $x_n^* = \lambda^* = \frac{1}{a_n}$.

3. (17 puntos) Considere la función $f(x_1, x_2) = \frac{a}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + bx_1x_2 + x_1 + x_2$. Suponga que se utiliza steepest descent para minimizar esta función. Ordene de menor a mayor la tasa de convergencia (en el peor caso) de steepest descent en los siguientes casos:

   - $a > 0,\ b = 0$
   - $a = 2b,\ b > 0$
   - $a = 100b,\ b > 0$

$$\nabla f^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = a \pm b$$

   - $a > 0,\ b = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \kappa = 1$
   - $a = 2b,\ b > 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3b,\ \lambda_2 = b \Rightarrow \kappa = 3$
   - $a = 100b,\ b > 0 \Rightarrow \lambda_1 = 101b,\ \lambda_2 = 99b \Rightarrow \kappa = \frac{101}{99} \approx 1$

   Convergencia es más rápida para el caso $a > 0,\ b = 0$ (en un paso), sigue $a = 100b,\ b > 0$ y es más lenta para $a = 2b,\ b > 0$.

4. (10 puntos) Una clase de funciones lineales a trozos se puede representar como $f(\mathbf{x}) = \max(\mathbf{c}_1^T\mathbf{x} + d_1,\ \mathbf{c}_2^T\mathbf{x} + d_2, \ldots, \mathbf{c}_p^T\mathbf{x} + d_p)$. Considere el problema:

$$\begin{array}{rl} \text{mín} & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeto a} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \end{array}$$

Muestre cómo convertir este problema a un problema de programación lineal.

$$\begin{array}{rl} \text{mín} & t \\ \text{sujeto a} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{c}_1^T\mathbf{x} + d_1 \leq t \\ & \mathbf{c}_2^T\mathbf{x} + d_2 \leq t \\ & \vdots \\ & \mathbf{c}_p^T\mathbf{x} + d_p \leq t \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

5. (9 puntos) Suponga que se quiere minimizar una función $f(\mathbf{x})$ sobre $\mathbb{R}^n$ utilizando el algoritmo iterativo:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$$

donde $\mathbf{d}_k = -\mathbf{A}\nabla f(\mathbf{x}_k)$ y α_k minimiza $f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k)$. Demuestre que si $\mathbf{A}$ es positiva definida entonces $\mathbf{d}_k$ es una dirección de descenso.

Considere $g(\alpha) = f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k)$, en el punto $\mathbf{x}_k$ tenemos:

$$g'(0) = \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{A} \nabla f(\mathbf{x}_k)$$

Ya que $\mathbf{A}$ es positiva definida $g'(0) < 0$, luego $\mathbf{d}_k$ es una dirección de descenso.