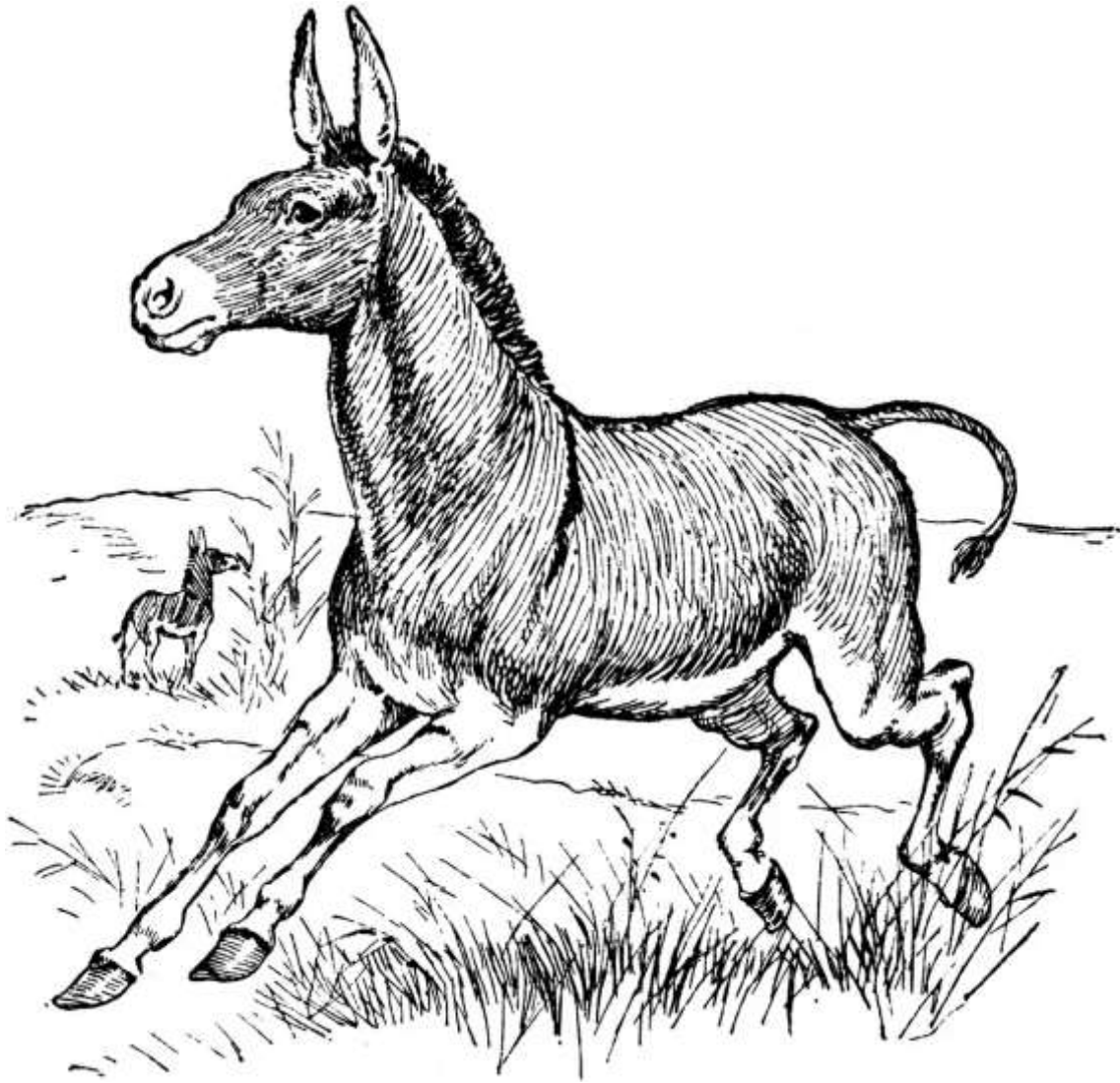


Learn some basic stuffs of polynomials



Delving into Polynomials

An unpractical guide

Rhodes Island

Amiya

Table of Contents

Preface	iii
Delving into Polynomials	1
Prerequisites	2
Definition of Polynomials	30
Division Algorithm	40
Polynomial Equality	44
Derivatives	50
Roots of Polynomials	58
Polynomials over \mathbb{F}	65
Interpolation	75
Generalized Binomial Coefficients	94
Summation Formulae	101

Preface

本文是瞎写的。我给本文的另一个名字是“Re: ゼロから始めるポリノミアルのイントロダクション”。不过想了想, 算了算了。龙鸣日语, 不好意思直接说出来。

这是写给中学生看的。

总是可以去这儿得到本文的最新版本:

<https://gitee.com/septsea/strange-book-zero>

<https://github.com/septsea/strange-book-zero>

就先说到这里。

评注 总算写完 Prerequisites 了。我写这玩意儿花了好久好久啊。先发布再说吧。

June 3, 2021

评注 忘记介绍域是什么东西了。我真是笨蛋啊。

June 3, 2021

Delving into Polynomials

Out of boredom, I wrote the article.

Gohan ni suru? Ofuro ni suru? Sore tomo... wa ta shi?

(Would you like dinner? Would you like a bath? Or... would you like me?)

Prerequisites

读者将在本节熟悉一些记号与术语。建议读者熟悉本节的内容后学习下节的内容。

在进入小节 Sets 前, 让我们先回顾命题、复数与数学归纳法吧!

定义 能判断真假的话是命题 (*proposition*)。正确的命题称为真命题; 错误的命题称为假命题。当然, 命题也可以用“对”“错”形容。

例 根据常识, “日东升西落”是真命题。类似地, “月自身可发光”是假命题。

“这是什么?” 不是命题, 因为它没有作出判断。类似地, “请保持安静”也不是命题, 因为它只是一个祈使句 (*imperative sentence*)。不过, “难道中国不强?” 不但是命题, 它还是正确的, 因为这个反问 (*rhetorical question*) 作出了正确的判断。

“ $x > 3$ ”不是命题, 因为它不可判断真假。像这种话里有未知元, 且揭秘未知元前不可知此话之真伪的话是开句 (*open sentence*)。

我们会经常遇到“若 p , 则 q ”的命题。

定义 设“若 p , 则 q ”是真命题。我们说, p 是 q 的充分条件 (*sufficient condition*), q 是 p 的必要条件 (*necessary condition*)。用符号写出来, 就是

$$p \Rightarrow q \quad \text{or} \quad q \Leftarrow p.$$

例 “若刚下过雨, 则地面潮湿”是对的。“刚下过雨”是“充分的”: 根据常识可以知道这一点。“地面潮湿”是“必要的”: 地面不潮湿, 那么不可能刚下过雨。

评注 我们会遇到形如“ ℓ 的一个必要与充分条件是 r ”的命题。换个说法, 就是“ r 是 ℓ 的一个必要与充分条件”。再分解一下, 就是“ r 是 ℓ 的一个必要条件”与“ r 是 ℓ 的一个充分条件”这二个命题。根据定义, 这相当于“若 ℓ , 则 r ”与“若 r , 则 ℓ ”都是真命题。也就是说, ℓ 跟 r 是等价的 (*equivalent*)。用符号写出来, 就是

$$p \Leftrightarrow q.$$

证明“ ℓ 的一个必要与充分条件是 r ”时, 我们会把它分为必要性 (*necessity*) 与充分性 (*sufficiency*) 二个部分。证明必要性, 就是证明“ r 是 ℓ 的一个必要条件”, 也就是证明“若 ℓ , 则 r ”是对的; 换句话说, 证明左边可以推出右边。证明充分性, 就是证明“ r 是 ℓ 的一个充分条件”, 也就是证明“若 r , 则 ℓ ”是对的; 换句话说, 证明右边可以推出左边。

命题就介绍到这里。下面回顾复数基础。

定义 复数 (*complex number*) 是形如 $x + yi$ (x, y 是实数) 的数。

评注 可将 $x + yi$ 写为 $x + iy$ 。

定义 设 a, b, c, d 是实数。则

$$a + bi = c + di \iff a = c \text{ and } b = d.$$

评注 我们把形如 $a + 0i$ 的复数写为 a , 并认为 $a + 0i$ 是实数。反过来, a 也可以认为是复数 $a + 0i$ 。

形如 $0 + bi$ 的复数可写为 bi 。按照习惯, $1i$ 可写为 i , 且 $-1i$ 可写为 $-i$ 。

定义 复数的加、乘法定义为

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i, \\ (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

由此可见, 二个复数的和 (或积) 还是复数。

例 我们计算 i 与自己的积:

$$i \cdot i = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)i = -1.$$

简单地说, 就是

$$i \cdot i = i^2 = -1.$$

设 z_1, z_2, z_3 是任意三个复数 (不必不同)。设 $z_1 = a + bi$ 。

命题 复数的加法适合如下运算律:

- (i) 交换律: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
 - (ii) 结合律: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
 - (iii) $0 + z_1 = z_1$;
 - (iv) 存在复数 $w = (-a) + (-b)i$ 使 $w + z_1 = 0$ 。
- 通常把适合 (iv) 的 w 记为 $-z_1$, 且称之为 z_1 的相反数。

评注 $(-a) + (-b)i$ 可写为 $-a - bi$ 。

定义 复数的减法定义为

$$z_2 - z_1 = z_2 + (-z_1).$$

命题 复数的乘法适合如下运算律:

(v) 交换律: $z_1 z_2 = z_2 z_1$;

(vi) 结合律: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$;

(vii) $1 z_1 = z_1$;

(viii) $(-1) z_1 = -z_1$;

(ix) 若 $z_1 \neq 0$, 则存在复数 $v = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$ 使 $v z_1 = 1$ 。

通常把适合 (ix) 的 v 记为 z_1^{-1} , 且称之为 z_1 的倒数。

定义 复数的除法定义为

$$\frac{z_2}{z_1} = z_2 z_1^{-1}。$$

命题 复数的加法与乘法还适合分配律:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3,$$

$$(z_2 + z_3) z_1 = z_2 z_1 + z_3 z_1。$$

评注 a, bi, c, di 都可以看成是复数。这样

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= (a + bi)c + (a + bi)(di) \\ &= ac + bic + adi + bdi^2 \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= (ac + bdi^2) + (ad + bc)i \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i。 \end{aligned}$$

也就是说, 我们不必死记复数的乘法规则: 只要用运算律与 $i^2 = -1$ 即可召唤它。

定义 $a + bi$ 的共轭 (*conjugate*) 是复数 $a - bi$ 。复数 z_1 的共轭可写为 $\overline{z_1}$ 。

命题 共轭适合如下性质:

(x) $\overline{z_1} + z_1$ 与 $i \cdot (\overline{z_1} - z_1)$ 都是实数;

(xi) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$;

(xii) $\overline{\overline{z_1}} = z_1$;

(xiii) $\overline{z_1} z_1$ 是正数, 除非 $z_1 = 0$ 。

定义 $|z_1| = \sqrt{\overline{z_1} z_1}$ 称为 z_1 的绝对值 (*absolute value*)。

命题 绝对值适合如下性质:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|。$$

定义 设 n 是整数。若 $n = 0$, 则说 $z_1^n = 1$ 。若 $n \geq 1$, 则说 z_1^n 是 n 个 z_1 的积。若 $z_1 \neq 0$, 且 $n \leq -1$, 则说 z_1^n 是 $\frac{1}{z_1^{-n}}$ 。

z_1^n 的一个名字是 z_1 的 n 次幂 (power)。

命题 设 m, n 是非负整数。幂适合如下性质:

$$z_1^m z_1^n = z_1^{m+n}, \quad (z_1^m)^n = z_1^{mn}, \quad (z_1 z_2)^m = z_1^m z_2^m.$$

若 z_1 与 z_2 都不是 0, 则 m, n 允许取全体整数。

复数就先回顾到这里。下面回顾数学归纳法。

评注 数学归纳法 (mathematical induction) 是一种演绎推理。

命题 设 $P(n)$ 是跟整数 n 相关的命题。设 $P(n)$ 适合:

(i) $P(n_0)$ 是正确的;

(ii) 任取 $\ell \geq n_0$, 必有“若 $P(\ell)$ 是正确的, 则 $P(\ell + 1)$ 是正确的”成立。

则任取不低于 n_0 的整数 n , 必有 $P(n)$ 是正确的。

评注 可以这么理解数学归纳法。假设有一排竖立的砖。如果 (i) 第一块砖倒下, 且 (ii) 前一块砖倒下可引起后一块砖倒下, 那么所有的砖都可以倒下, 是吧? 由此也可以看出, (i) (ii) 缺一不可。第一块砖不倒, 后面的砖怎么倒下呢?[†] 如果前一块砖倒下时后一块砖不一定能倒下, 那么会在某块砖后开始倒不下去。

例 我们试着用数学归纳法证明, 对任意正整数 n ,

$$P(n): \quad 0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

既然想证明对任意正整数 n , $P(n)$ 都成立, 我们取 $n_0 = 1$ 。然后验证 (i): 左边只有 0 这一项, 右边是 $\frac{1 \cdot (1-1)}{2} = 0$ 。所以 (i) 适合。

再验证 (ii)。(ii) 是说, 要由 $P(\ell)$ 推出 $P(\ell + 1)$ 。所以, 假设

$$0 + 1 + \cdots + (\ell-1) = \frac{\ell(\ell-1)}{2}, \quad \ell \geq n_0.$$

因为

$$\begin{aligned} 0 + 1 + \cdots + (\ell-1) + \ell &= (0 + 1 + \cdots + (\ell-1)) + \ell \\ \text{(IH)} \quad &= \frac{\ell(\ell-1)}{2} + \ell \end{aligned}$$

[†] 当然, 也可以从第 n 块砖开始倒下 ($n > 1$), 但这就照顾不到第一块了。

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ell(\ell-1)}{2} + \frac{\ell \cdot 2}{2} \\
&= \frac{\ell(\ell+1)}{2} \\
&= \frac{(\ell+1)((\ell+1)-1)}{2},
\end{aligned}$$

故我们由 $P(\ell)$ 推出了 $P(\ell+1)$ 。我们在哪儿用到了 $P(\ell)$ 呢？我们在标了 (IH) 的那一行用了 $P(\ell)$ 。这样的假设称为归纳假设 (*induction hypothesis*)。

既然 (i) (ii) 都适合, 那么任取不低于 $n_0 = 1$ 的整数 n , $P(n)$ 都对。

我们用二个具体的例说明, (i) (ii) 缺一不可。

例 我们“证明”, 对任意正整数 n ,

$$P'(n): \quad 0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} + 1。$$

这里, n_0 自然取 1。

(i) 不适合: 显然 $n = 1$ 时, 左侧是 0 而右侧是 1。再看 (ii)。假设

$$0 + 1 + \cdots + (\ell-1) = \frac{\ell(\ell-1)}{2} + 1, \quad \ell \geq n_0。$$

由于

$$\begin{aligned}
0 + 1 + \cdots + (\ell-1) + \ell &= (0 + 1 + \cdots + (\ell-1)) + \ell \\
\text{("IH")} \quad &= \frac{\ell(\ell-1)}{2} + 1 + \ell \\
&= \frac{\ell(\ell-1)}{2} + \frac{\ell \cdot 2}{2} + 1 \\
&= \frac{\ell(\ell+1)}{2} + 1 \\
&= \frac{(\ell+1)((\ell+1)-1)}{2} + 1,
\end{aligned}$$

故我们由 $P'(\ell)$ “推出”了 $P'(\ell+1)$ 。我们也在 (“IH”) 处用到了“归纳假设”。那么 $P'(n)$ 就是正确的吗？当然不是！前面我们知道，

$$0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

也就是说, $P'(n)$ 的右侧的 “+ 1” 使其错误。当然, 一般我们很少会犯这样的错误: 毕竟, 一开始就不对的东西就不用看下去了。

例 不同的老婆[†]有着不同的发色。但是, 我们用数学归纳法却可以“证明”, 任意的 n ($n \geq 1$) 个老婆有着相同的发色! 称这个命题为 $Q(n)$ 。这里, n_0 自然取 1。

[†] 一般地, 二次元人会称动画、漫画、游戏、小说中自己喜爱的女性角色为老婆 (*waifu*)。一个二次元人可以有不止一个老婆。

(i) 当 $n = n_0 = 1$ 时, 一个老婆自然只有一种发色。这个时候, 命题是正确的!

(ii) 假设任意的 ℓ ($\ell \geq n_0$) 个老婆有着相同的发色! 随意取 $\ell + 1$ 个老婆。根据假设, 老婆 1, 2, \dots , ℓ 有着相同的发色, 且老婆 2, \dots , ℓ , $\ell + 1$ 有着相同的发色。这二组中都有 2, \dots , ℓ 这 $\ell - 1$ 个老婆, 所以老婆 1, 2, \dots , ℓ , $\ell + 1$ 有着相同的发色!

根据 (i) (ii), 命题成立。

可是这对吗? 不对。问题出在 (ii)。如果说, 任意二个老婆有着相同的发色, 那任意三个老婆也有着相同的发色。这没问题。可是, 由 $Q(1)$ 推不出 $Q(2)$: 老婆 1 与老婆 2 根本就不重叠呀! (ii) 要求任取 $\ell \geq n_0$, 必有 $Q(\ell)$ 推出 $Q(\ell + 1)$ 。而 $\ell = 1$ 时, (ii) 不对, 因此不能推出 $Q(n)$ 对任意正整数都对。

下面是数学归纳法的一个变体。

命题 设 $P(n)$ 是跟整数 n 相关的命题。设 $P(n)$ 适合:

(i) $P(n_0)$ 是正确的;

(ii)' 任取 $\ell \geq n_0$, 必有“若 $\ell - n_0 + 1$ 个命题 $P(n_0), P(n_0 + 1), \dots, P(\ell)$ 都是正确的, 则 $P(\ell + 1)$ 是正确的”成立。

则任取不低于 n_0 的整数 n , 必有 $P(n)$ 是正确的。

评注 可以由下面的推理看出, 上面的数学归纳法变体是正确的。

作命题 $Q(n)$ ($n \geq n_0$) 为“ $n - n_0 + 1$ 个命题 $P(n_0), P(n_0 + 1), \dots, P(n)$ 都是正确的”。

(i) $P(n_0)$ 是正确的, 所以 $n_0 - n_0 + 1$ 个命题 $P(n_0)$ 是正确的, 也就是 $Q(n_0)$ 是正确的。

(ii) 任取 $\ell \geq n_0$ 。假设 $Q(\ell)$ 是正确的, 也就是假设 $\ell - n_0 + 1$ 个命题 $P(n_0), P(n_0 + 1), \dots, P(\ell)$ 都是正确的。由 (ii)', $P(\ell + 1)$ 是正确的。所以, $\ell + 1 - n_0 + 1$ 个命题 $P(n_0), P(n_0 + 1), \dots, P(\ell), P(\ell + 1)$ 都是正确的。换句话说, $Q(\ell + 1)$ 是正确的。

由数学归纳法可知, 任取不低于 n_0 的整数 n , 必有 $Q(n)$ 是正确的。所以, $P(n)$ 是正确的。

另一方面, 这个变体的条件 (ii)' 比数学归纳法的 (ii) 强, 所以若变体正确, 数学归纳法也正确。也就是说, 数学归纳法与其变体是等价的。

以后, “数学归纳法”既可以指老的数学归纳法 (由 $P(\ell)$ 推 $P(\ell + 1)$), 也可以指变体 (由 $P(n_0), P(n_0 + 1), \dots, P(\ell)$ 推 $P(\ell + 1)$)。

知识就回顾到这里。开始进入集的世界吧!

Sets

定义 集 (*set*) 是具有某种特定性质的对象汇集而成的一个整体, 其对象称为元 (*element*)。

定义 无元的集是空集 (*empty set*)。

评注 一般用小写字母表示元, 大写字母表示集。

定义 一般地, 若集 A 由元 a, b, c, \dots 作成, 我们写

$$A = \{a, b, c, \dots\}.$$

还有一种记号。设集 A 是由具有某种性质 p 的对象汇集而成, 则记

$$A = \{x \mid x \text{ possesses the property } p\}.$$

定义 若 a 是集 A 的元, 则写 $a \in A$ 或 $A \ni a$, 说 a 属于 (*to belong to*) A 或 A 包含 (*to contain*) a 。若 a 不是集 A 的元, 则写 $a \notin A$ 或 $A \not\ni a$, 说 a 不属于 A 或 A 不包含 a 。

例 全体整数作成的集用 \mathbb{Z} (*Zahl*)[†] 表示。它可以写为

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots, n, -n, \dots\}.$$

例 全体非负整数作成的集用 \mathbb{N} (*natural*) 表示。它可以写为

$$\mathbb{N} = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ and } x \geq 0\}.$$

为了方便, 也可以写为

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}.$$

定义 若任取 $a \in A$, 都有 $a \in B$, 则写 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 说 A 是 B 的子集 (*subset*) 或 B 是 A 的超集 (*superset*)。假如有一个 $b \in B$ 不是 A 的元, 可以用“真” (*proper*) 形容之。

例 空集是任意集的子集。空集是任意不空的集的真子集。

例 全体有理数作成的集用 \mathbb{Q} (*quotient*) 表示。因为整数是有理数, 所以 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ 。因为有理数 $\frac{1}{2}$ 不是整数, 我们说 \mathbb{Z} 是 \mathbb{Q} 的真子集。

定义 全体实数作成的集用 \mathbb{R} (*real*) 表示。

[†] A German word which means *number*.

定义 全体复数作成的集用 \mathbb{C} (*complex*) 表示。不难看出,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

定义 \mathbb{F} (*field*) 可表示 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 的任意一个。不难看出, \mathbb{F} 适合这几条:

- (i) $0 \in \mathbb{F}, 1 \in \mathbb{F}, 0 \neq 1$;
 - (ii) 任取 $x, y \in \mathbb{F} (y \neq 0)$, 必有 $x - y, \frac{x}{y} \in \mathbb{F}$ 。
- 后面会见到稍详细的论述。

定义 设 \mathbb{L} 是 $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{F}$ 的任意一个。 \mathbb{L}^* 表示 \mathbb{L} 去掉 0 后得到的集。不难看出, \mathbb{L} 是 \mathbb{L}^* 的真超集。

定义 若集 A 与 B 包含的元完全一样, 则 A 与 B 是同一集。我们说 A 等于 B , 写 $A = B$ 。显然

$$A = B \iff A \subset B \text{ and } B \subset A.$$

定义 集 A 与 B 的交 (*intersection*) 是集

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}.$$

也就是说, $A \cap B$ 恰由 A 与 B 的公共元作成。

集 A 与 B 的并 (*union*) 是集

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}.$$

也就是说, $A \cup B$ 恰包含 A 与 B 的全部元。

类似地, 可定义多个集的交与并。

定义 设 A, B 是集。定义

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

$A \times A$ 可简写为 A^2 。类似地,

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}, \quad A^3 = A \times A \times A.$$

例 设 $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4, 5\}$ 。则

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}.$$

而

$$B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}.$$

评注 一般地, $A \times B \neq B \times A$ 。假如 A, B 各自有 m, n 个元, 利用一点计数知识可以看出, $A \times B$ 有 mn 个元。

Functions

定义 假如通过一个法则 f , 使任取 $a \in A$, 都能得到唯一的 $b \in B$, 则说这个法则 f 是集 A 到集 B 的一个函数 (*function*)。元 b 是元 a 在函数 f 下的象 (*image*)。元 a 是元 b 在 f 下的一个原象 (*inverse image*)。这个关系可以写为

$$\begin{aligned} f: & & A &\rightarrow B, \\ & & a &\mapsto b = f(a). \end{aligned}$$

称 A 是定义域 (*domain*), B 是陪域[†] (*codomain*)。

例 可以把 \mathbb{R}^2 看作平面上的点集。

$$\begin{aligned} f: & & \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ & & (x, y) &\mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

是函数: 它表示点 (x, y) 到点 $(0, 0)$ 的距离。

例 设

$$A = \{\text{dinner, bath, me}\}, \quad B = \{0, 1\}.$$

法则

$$f_1: \quad \text{dinner} \mapsto 0, \quad \text{bath} \mapsto 1$$

不是 A 到 B 的函数, 因为它没有为 A 的元 me 规定象。但是, 如果记 $A_1 = \{\text{dinner, bath}\}$, 这个 f_1 可以是 A_1 到 B 的函数。

法则

$$\begin{aligned} f_2: & & \text{dinner} &\mapsto 0, \\ & & \text{bath} &\mapsto 1, \\ & & \text{me} &\mapsto b \quad \text{where } b^2 = b \end{aligned}$$

不是 A 到 B 的函数, 因为它给 A 的元 me 规定的象不唯一。

法则

$$f_3: \quad \text{dinner} \mapsto 0, \quad \text{bath} \mapsto 1, \quad \text{me} \mapsto -1$$

不是 A 到 B 的函数, 因为它给 A 的元 me 规定的象不是 B 的元。但是, 如果记 $B_1 = \{-1, 0, 1\}$, 这个 f_3 可以是 A 到 B_1 的函数。

[†] 不要混淆陪域与象集 (*image, range*)。 f 的象集是

$$\text{Im } f = \{b \in B \mid b = f(a), a \in A\}.$$

这就是中学数学里的“值域”。

定义 设 f_1 与 f_2 都是 A 到 B 的函数。若任取 $a \in A$, 必有 $f_1(a) = f_2(a)$, 则说这二个函数相等, 写为 $f_1 = f_2$ 。

例 设 $A \subset \mathbb{C}$, 且 A 非空。定义二个 A 到 \mathbb{C} 的函数: $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = |x|^2$ 。如果 $A = \mathbb{R}$, 那么 $f_1 = f_2$ 。可是, 若 $A = \mathbb{C}$, f_1 与 f_2 不相等。

例 设 A 是全体正实数作成的集。定义二个 A 到 \mathbb{R} 的函数: $f_1(x) = \frac{1}{6} \log_2 x^3$, $f_2(x) = \log_4 x$ 。知道对数的读者可以看出, f_1 与 f_2 有着相同的对应法则, 故 $f_1 = f_2$ 。因为 f_2 是对数函数 (*logarithmic function*), 所以 f_1 也是。

评注 在上下文清楚的情况下, 可以单说函数的对应法则。比如, 中学数学课说“二次函数 $f(x) = x^2 + x - 1$ ”时, 定义域与陪域默认都是 \mathbb{R} 。中学的函数一般都是实数的子集到实数的子集的函数。所谓“自然定义域”是指 (在一定范围内) 一切使对应法则有意义的元构成的集。比如, 在中学, 我们说 $\frac{1}{x}$ 的自然定义域是 \mathbb{R}^* , \sqrt{x} 的自然定义域是一切非负实数。在研究复变函数时, 我们说 $\frac{1}{z}$ 的自然定义域是 \mathbb{C}^* 。如果不明确函数的定义域, 我们会根据上下文作出自然定义域作为它的定义域。

定义 A 到 A 的函数是 A 的变换 (*transform*)。换句话说, 变换是定义域跟陪域一样的函数。

Binary Functions

定义 A^2 到 A 的函数称为 A 的二元运算 (*binary functions*)。

例 设 $f(x, y) = x - y$ 。这个 f 是 \mathbb{Z} 的二元运算; 但是, 它不是 \mathbb{N} 的二元运算。

评注 设 \circ 是 A 的二元运算。代替 $\circ(x, y)$, 我们写 $x \circ y$ 。一般地, 若表示这个二元运算的符号不是字母, 我们就把这个符号写在二个元的中间。

定义 设 $T(A)$ 是全部 A 的变换作成的集。设 f, g 是 A 的变换。任取 $a \in A$, 当然有 $b = f(a) \in A$ 。所以, $g(b) = g(f(a))$ 也是 A 的元。当然, 这个 $g(f(a))$ 也是唯一确定的。这样, 我们说, f 与 g 的复合 (*composition*) $g \circ f$ 是

$$\begin{aligned} g \circ f: & & A &\rightarrow A, \\ & & a &\mapsto g(f(a)). \end{aligned}$$

所以, 复合是 $T(A)$ 的二元运算:

$$\begin{aligned} \circ: \quad & T(A) \times T(A) \rightarrow T(A), \\ & (g, f) \mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

评注 设 A 有有限多个元。此时, 可排出 A 的元:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

设 f 是 A^2 到 B 的函数。则任给整数 $i, j, 1 \leq i, j \leq n$, 记

$$f(a_i, a_j) = b_{i,j} \in B.$$

可以用这样的表描述此函数:

	a_1	a_2	\cdots	a_n
a_1	$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	\cdots	$b_{1,n}$
a_2	$b_{2,1}$	$b_{2,2}$	\cdots	$b_{2,n}$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
a_n	$b_{n,1}$	$b_{n,2}$	\cdots	$b_{n,n}$

有的时候, 为了强调函数名, 可在左上角书其名:

f	a_1	a_2	\cdots	a_n
a_1	$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	\cdots	$b_{1,n}$
a_2	$b_{2,1}$	$b_{2,2}$	\cdots	$b_{2,n}$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
a_n	$b_{n,1}$	$b_{n,2}$	\cdots	$b_{n,n}$

这种表示函数的方式是方便的。如果这些 $b_{i,j}$ 都是 A 的元, 就说这张表是 A 的运算表。

例 设 $T = \{0, 1, -1\}$, $\circ(x, y) = xy$ 。不难看出, \circ 确实是 T 的二元运算。它的运算表如下:

	0	1	-1
0	0	0	0
1	0	1	-1
-1	0	-1	1

例 设 \mathbb{F}_{nu} 是将 \mathbb{F} 去掉 0, 1 后得到的集[†]。看下列 6 个法则:

$$f_0: \quad x \mapsto x;$$

[†] 这个 \mathbb{F}_{nu} 只是临时记号: nu 表示 *nil, unity*。

$$\begin{aligned}
f_1: & \quad x \mapsto 1 - x; \\
f_2: & \quad x \mapsto \frac{1}{x}; \\
f_3: & \quad x \mapsto 1 - \frac{1}{1-x}; \\
f_4: & \quad x \mapsto 1 - \frac{1}{x}; \\
f_5: & \quad x \mapsto \frac{1}{1-x}.
\end{aligned}$$

记 $S_6 = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ 。可以验证, $S_6 \subset T(\mathbb{F}_{\text{nu}})$ 。

进一步地, 36 次复合告诉我们, 任取 $f, g \in S_6$, 必有 $g \circ f \in S_6$ 。可以验证, 这是 S_6 的 (复合) 运算表:

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_0	f_4	f_5	f_2	f_3
f_2	f_2	f_5	f_0	f_4	f_3	f_1
f_3	f_3	f_4	f_5	f_0	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_1	f_2	f_5	f_0
f_5	f_5	f_2	f_3	f_1	f_0	f_4

我们在本节会经常用 S_6 举例。

定义 设 \circ 是 A 的二元运算。若任取 $x, y, z \in A$, 必有

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

则说 f 适合结合律 (*associativity*)。此时, $(x \circ y) \circ z$ 或 $x \circ (y \circ z)$ 可简写为 $x \circ y \circ z$ 。

例 \mathbb{Z} 的加法当然适合结合律。可是, 它的减法不适合结合律。

评注 变换的复合适合结合律。确切地, 设 f, g, h 都是 A 的变换。任取 $a \in A$, 则

$$\begin{aligned}
(h \circ (g \circ f))(a) &= h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))), \\
((h \circ g) \circ f)(a) &= (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))).
\end{aligned}$$

也就是说,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

例 S_6 的复合当然适合结合律。

定义 设 \circ 是 A 的二元运算。若任取 $x, y \in A$, 必有

$$x \circ y = y \circ x,$$

则说 \circ 适合交换律 (*commutativity*)。

例 \mathbb{F}^* 的乘法当然适合交换律。可是, 它的除法不适合交换律。

例 S_6 的复合不适合交换律, 因为 $f_1 \circ f_2 = f_4$, 而 $f_2 \circ f_1 = f_5$, 二者不相等。

评注 在本文里, \cdot 运算的优先级高于 $+$ 运算。所以, $a \cdot b + c$ 的意思就是

$$(a \cdot b) + c,$$

而不是

$$a \cdot (b + c)。$$

定义 设 $+, \cdot$ 是 A 的二个二元运算。若任取 $x, y, z \in A$, 必有

$$(LD) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$$

则说 $+$ 与 \cdot 适合左 (\cdot) 分配律[†] (*left distributivity*)。类似地, 若

$$(RD) \quad (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x,$$

则说 $+$ 与 \cdot 适合右 (\cdot) 分配律 (*right distributivity*)。说既适合 LD 也适合 RD 的 $+$ 与 \cdot 适合 (\cdot) 分配律 (*distributivity*)。显然, 若 \cdot 适合交换律, 则 LD 与 RD 等价。

例 \mathbb{F} 的加法与乘法适合分配律。当然, 减法与乘法也适合分配律:

$$x(y - z) = xy - xz = yx - zx = (y - z)x。$$

甚至, 在正实数里, 加法与除法适合右分配律:

$$\frac{y + z}{x} = \frac{y}{x} + \frac{z}{x}。$$

[†] 在不引起歧义时, 括号里的内容可省略。或者这么说: 当我们说 $+, \cdot$ 适合分配律时, 我们不会理解为 $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$ 。但有意思的事儿是, 如果把 $+$ 理解为并, \cdot 理解为交, x, y, z 理解为集, 那这个式是对的。当然, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ 也是对的。

定义 设 \circ 是 A 的二元运算。若任取 $x, y, z \in A$, 必有

$$(LC) \quad x \circ y = x \circ z \implies y = z,$$

则说 \circ 适合左消去律 (*left cancellation property*)。类似地, 若

$$(RC) \quad x \circ z = y \circ z \implies x = y,$$

则说 \circ 适合右消去律 (*right cancellation property*)。说既适合 LC 也适合 RC 的 \circ 适合消去律 (*cancellation property*)。显然, 若 \circ 适合交换律, 则 LC 与 RC 等价。

例 显然, \mathbb{N} 的乘法不适合消去律, 但 \mathbb{N}^* 的乘法适合消去律[†]。

例 考虑 $x \circ y = x^3 + y^2$ 。若把 \circ 视为 \mathbb{N} 的二元运算, 那么它适合消去律。若把 \circ 视为 \mathbb{Q} 的二元运算, 那么它适合右消去律。若把 \circ 视为 \mathbb{C} 的二元运算, 那么它不适合任意一个消去律。

例 一般地, 当 A 至少有二个元时, \circ (在 $T(A)$ 里) 不适合消去律。设 $a, b \in A, a \neq b$ 。考虑下面 4 个变换:

$$\begin{aligned} g_0: & \quad a \mapsto a, \quad b \mapsto b, \quad x \mapsto x \text{ where } x \neq a, b; \\ g_1: & \quad a \mapsto a, \quad b \mapsto a, \quad x \mapsto x \text{ where } x \neq a, b; \\ g_2: & \quad a \mapsto b, \quad b \mapsto b, \quad x \mapsto x \text{ where } x \neq a, b; \\ g_3: & \quad a \mapsto b, \quad b \mapsto a, \quad x \mapsto x \text{ where } x \neq a, b. \end{aligned}$$

可以验证,

$$g_3 \circ g_1 = g_2 \circ g_1 = g_2 \circ g_3 = g_2 \circ$$

由此可以看出, \circ 不适合任意一个消去律。

例 我们看 \circ 在 S_6 里是否适合消去律。取 $f, g, h \in S_6$ 。由表易知, 当 $g \neq h$ 时, $f \circ g \neq f \circ h$ (横着看运算表), 且 $g \circ f \neq h \circ f$ (竖着看运算表)。这说明, \circ 在 $T(\mathbb{F}_{nu})$ 的子集 S_6 里适合消去律。

定义 设 \circ 是 A 的二元运算。若存在 $e \in A$, 使若任取 $x \in A$, 必有

$$e \circ x = x \circ e = x,$$

则说 e 是 A 的 (关于运算 \circ 的) 么元 (*identity*)。如果 e' 也是么元, 则

$$e = e \circ e' = e'.$$

[†] 后面提到整环时, 我们会稍微修改一下消去律的描述。

例 \mathbb{F} 的加法的么元是 0, 且其乘法的么元是 1。

例 不难看出, 这个变换是 $T(A)$ 的么元:

$$\begin{aligned}\iota: \quad & A \rightarrow A, \\ & a \mapsto a_\circ.\end{aligned}$$

它也有个一般点的名字: 恒等变换 (*identity transform*)。

在 S_6 里, f_0 就是这里的 ι_\circ 。

定义 设 \circ 是 A 的二元运算。设 e 是 A 的么元。设 $x \in A$ 。若存在 $y \in A$, 使

$$y \circ x = x \circ y = e,$$

则说 y 是 x 的 (关于运算 \circ 的) 逆元 (*inverse*)。

例 \mathbb{F} 的每个元都有加法逆元, 即其相反数。

评注 设 \circ 适合结合律。如果 y, y' 都是 x 的逆元, 则

$$y = y \circ e = y \circ (x \circ y') = (y \circ x) \circ y' = e \circ y' = y'.$$

此时, 一般用 x^{-1} 表示 x 的逆元。因为

$$x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e,$$

由上可知, x^{-1} 也有逆元, 且 $(x^{-1})^{-1} = x_\circ$ 。

例 一般地, 当 A 至少有二个元时, $T(A)$ 既有有逆元的变换, 也有无逆元的变换。还是看前面的 g_0, g_1, g_2, g_3 。首先, g_0 是么元 ι_\circ 。不难看出, g_0 与 g_3 都有逆元:

$$g_0 \circ g_0 = g_3 \circ g_3 = g_0 \circ$$

不过, g_1 不可能有逆元。假设 g_1 有逆元 h , 则应有

$$(h \circ g_1)(a) = \iota(a) = a, \quad (h \circ g_1)(b) = \iota(b) = b.$$

可是, $g_1(a) = g_1(b) = a$, 故 $(h \circ g_1)(a) = (h \circ g_1)(b) = h(a)$, 它不能既等于 a 也等于 b , 矛盾!

例 再看 S_6 。由表可看出, $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ 的逆元分别是 $f_0, f_1, f_2, f_3, f_5, f_4$ 。

评注 设 \circ 适合结合律。如果 x, y 都有逆元, 那么 $x \circ y$ 也有逆元, 且

$$(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}.$$

为了说明这一点, 只要按定义验证即可:

$$(y^{-1} \circ x^{-1}) \circ (x \circ y) = y^{-1} \circ (x^{-1} \circ x) \circ y = y^{-1} \circ e \circ y = y^{-1} \circ y = e,$$

$$(x \circ y) \circ (y^{-1} \circ x^{-1}) = x \circ (y \circ y^{-1}) \circ x^{-1} = x \circ e \circ x^{-1} = x \circ x^{-1} = e.$$

这个规则往往称为袜靴规则 (*socks and shoes rule*): 设 y 是穿袜, x 是穿靴, $x \circ y$ 表示动作的复合: 先穿袜后穿靴。那么这个规则告诉我们, $x \circ y$ 的逆元就是先脱靴再脱袜。

评注 由此可见, 结合律是一条很重要的规则。我们算 $63 \cdot 8 \cdot 125$ 时也会想着先算 $8 \cdot 125$ 。

Semi-groups and Groups

定义 设 S 是非空集。设 \circ 是 S 的二元运算。若 \circ 适合结合律, 则称 S (关于 \circ) 是半群 (*semi-group*)。

例 \mathbb{N} 关于加法 (或乘法) 作成半群。

例 $T(A)$ 关于 \circ 作成半群。

评注 事实上, 这里要求 S 非空是有必要的。

首先, 空集没什么意思。其次, 前面所述的结合律、交换律、分配律等自动成立, 这是因为对形如“若 p , 则 q ”的命题而言, p 为假推出整个命题为真。这是相当“危险”的!

定义 设 m 是正整数。设 x 是半群 S 的元。令

$$x^1 = x, \quad x^m = x \circ x^{m-1}.$$

x^m 称为 x 的 m 次幂。不难看出, 当 m, n 都是正整数时,

$$x^{m+n} = x^m \circ x^n, \quad (x^m)^n = x^{mn}.$$

假如 S 有二个元 x, y 适合 $x \circ y = y \circ x$, 那么还有

$$(x \circ y)^m = x^m \circ y^m.$$

例 还是看熟悉的 \mathbb{N} 。对于乘法而言, 这里的幂就是普通的幂——一个数自乘多次的结果。对于加法而言, 这里的幂相当于乘法——一个数自加多次的结果。

定义 设 G 关于 \circ 是半群。若 G 的关于 \circ 的么元存在, 且 G 的任意元都有关于 \circ 的逆元, 则 G 是群 (*group*)。

例 \mathbb{N} 关于加法 (或乘法) 不能作成群。 \mathbb{Z} 关于加法作成群, 但关于乘法不能作成群。 \mathbb{F} 关于乘法不能作成群, 但 \mathbb{F}^* 关于乘法作成群。不过, \mathbb{F}^* 关于加法不能作成群。

例 $T(A)$ 一般不是群。不过, S_6 是群。

评注 群有唯一的么元。群的每个元都有唯一的逆元。

评注 设 G 关于 \circ 是群。我们说, \circ 适合消去律。

假如 $x \circ y = x \circ z$ 。二侧左边乘 x 的逆元 x^{-1} , 就有

$$x^{-1} \circ (x \circ y) = x^{-1} \circ (x \circ z).$$

由于 \circ 适合结合律,

$$(x^{-1} \circ x) \circ y = (x^{-1} \circ x) \circ z.$$

也就是

$$e \circ y = e \circ z.$$

这样, $y = z$ 。类似地, 用同样的方法可以知道, 右消去律也对。

定义 已经知道, 群的每个元 x 都有逆元 x^{-1} 。由此, 当 m 是正整数时, 定义 $x^{-m} = (x^{-1})^m$ 。再定义 $x^0 = e$ 。利用半群的结果, 可以看出, 当 m, n 都是整数时,

$$x^{m+n} = x^m \circ x^n, \quad (x^m)^n = x^{mn}.$$

假如 G 有二个元 x, y 适合 $x \circ y = y \circ x$, 那么还有

$$(x \circ y)^m = x^m \circ y^m.$$

例 对于 \mathbb{F}^* 的乘法而言, 这里的任意整数幂跟普通的整数幂没有任何区别。我们学习数的负整数幂的时候, 也是借助倒数定义的。

Subgroups

定义 设 G 关于 \circ 是群。设 $H \subset G$, H 非空。若 H 关于 \circ 也作成群, 则 H 是 G 的子群 (*subgroup*)。

例 对加法来说, \mathbb{Z} 是 \mathbb{F} 的子群。对乘法来说, \mathbb{Z}^* 不是 \mathbb{F}^* 的子群。

评注 设 $H \subset G$, H 非空。 H 是 G 的子群的一个必要与充分条件是: 任取 $x, y \in H$, 必有 $x \circ y^{-1} \in H$ 。

怎么说明这一点呢? 先看充分性。任取 $x \in H$, 则 $e = x \circ x^{-1} \in H$ 。任取 $y \in H$, 则 $y^{-1} = e \circ y^{-1} \in H$ 。所以

$$x \circ y = x \circ (y^{-1})^{-1} \in H。$$

\circ 在 G 适合结合律, $H \subset G$, 所以 \circ 作为 H 的二元运算也适合结合律。至此, H 是半群。

前面已经说明, $e \in H$, 所以 H 的关于 \circ 的么元存在。进一步地, $x \in H$ 在 G 里的逆元也是 H 的元, 所以 H 的任意元都有关于 \circ 的逆元。这样, H 是群。顺便一提, 我们刚才也说明了, G 的么元也是 H 的么元, 且 H 的元在 G 里的逆元也是在 H 里的逆元。

再看必要性。假设 H 是一个群。任取 $x, y \in H$, 我们要说明 $x \circ y^{-1} \in H$ 。看上去有点显然呀! H 是群, 所以 y 有逆元 y^{-1} , 又因为 \circ 是 H 的二元运算, $x \circ y^{-1} \in H$ 。不过要注意一个细节。我们说明充分性时, y^{-1} 被认为是 y 在 G 里的逆元; 可是, 刚才的论证里 y^{-1} 实则是 y 在 H 里的逆元。大问题! 怎么解决呢? 如果我们说明 y 在 H 里的逆元也是 y 在 G 里的逆元, 那这个漏洞就被修复了。

我们知道, H 有么元 e_H , 所以 $e_H \circ e_H = e_H \circ e_H$ 是 G 的元, 所以 e_H 在 G 里有逆元 $(e_H)^{-1}$ 。这样,

$$\begin{aligned} e_H &= e \circ e_H \\ &= ((e_H)^{-1} \circ e_H) \circ e_H \\ &= (e_H)^{-1} \circ (e_H \circ e_H) \\ &= (e_H)^{-1} \circ e_H \\ &= e。 \end{aligned}$$

取 $y \in H$ 。 y 在 H 里有逆元 z , 即

$$z \circ y = y \circ z = e_H = e。$$

y, z 都是 G 的元。这样, 根据逆元的唯一性, z 自然是 y 在 G 里的逆元。

Additive Groups

定义 若 G 关于名为 $+$ 的二元运算作成群, 么元 e 读作“零元”写作 0 , $x \in G$ 的逆元 x^{-1} 读作“ x 的相反元”写作 $-x$, 且 $+$ 适合交换律, 则说 G 是加群 (additive group)。相应地, “元的幂”也应该改为“元的倍”: x^m

写为 mx 。用加法的语言改写前面的幂的规则, 就得到了倍的规则: 对任意 $x, y \in G, m, n \in \mathbb{Z}$, 有

$$(m+n)x = mx + nx,$$

$$m(nx) = (mn)x,$$

$$m(x+y) = mx + my.$$

顺便一提, 在这种记号下, $x-y$ 是 $x+(-y)$ 的简写。并且

$$x+y = x+z \implies y=z.$$

由于这里的加法适合交换律, 直接换位就是右消去律。前面说, 若运算适合结合律, 则 x 的逆元的逆元还是 x 。这句话用加法的语言写, 就是

$$-(-x) = x.$$

前面的“袜靴规则”就是

$$-(x+y) = (-y) + (-x) = (-x) + (-y) = -x - y.$$

这就是熟悉的去括号法则。这里体现了交换律的作用。

评注 初见此定义可能会觉得有些混乱: 怎么“倒数”又变为“相反数”了? 其实这都是借鉴已有写法。前面, \circ 虽然不是 \cdot , 但这个形状暗示着乘法, 因此有 x^{-1} 这样的记号; 现在, 运算的名字是 $+$, 自然要根据形状作出相应的改变。其实, 这里“名为 $+$ ”“零元”“相反元”都不是本质——换句话说, 还是可以用老记号。不过, 我们主要接触至少与二种运算相关联的结构——整环与域, 所以用二套记号、名字是有必要的。

评注 前面的 $x^0 = e$ 在加群里变为 $0x = 0$ 。看上去“很普通”, 不过左边的 0 是整数, 右边的 0 是加群的零元, 二者一般不一样!

例 显而易见, \mathbb{Z}, \mathbb{F} 都是加群。

例 S_6 不是加群, 因为它的二元运算不适合交换律。

评注 类似地, 可以定义子加群 (sub-additive group)。这里, 就直接用等价刻画来描述它: “ G 的非空子集 H 是加群 G 的子加群的一个必要与充分条件是: 任取 $x, y \in H$, 必有 $x-y \in H$ 。”

Sums

定义 设 f 是 \mathbb{Z} 的非空子集 S 到加群 G 的函数。设 p, q 是二个整数。如果 $p \leq q$, 则记

$$\sum_{j=p}^q f(j) = f(p) + f(p+1) + \cdots + f(q).$$

也就是说, $\sum_{j=p}^q f(j)$ 就是 $q - (p - 1)$ 个元的和的一种简洁的表示法。如果 $p > q$, 约定 $\sum_{j=p}^q f(j) = 0$ 。

例 我们已经知道, $n \geq 0$ 时

$$0 + 1 + \cdots + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2}。$$

用 \sum 写出来, 就是

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n - 1)}{2}。$$

这里的 k 是所谓的 “dummy variable”。所以

$$\sum_{j=0}^{n-1} j = \sum_{k=0}^{n-1} k = \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell = \frac{n(n - 1)}{2}。$$

例 f 可以是常函数:

$$\sum_{t=p}^q 1 = \begin{cases} q - p + 1, & q \geq p; \\ 0, & q < p。 \end{cases}$$

例 设 f 与 g 是 \mathbb{Z} 的非空子集 S 到加群 G 的函数。因为加群的加法适合结合律与交换律, 所以

$$\sum_{j=p}^q (f(j) + g(j)) = \sum_{j=p}^q f(j) + \sum_{j=p}^q g(j)。$$

评注 设 $f(i, j)$ 是 \mathbb{Z}^2 的非空子集到加群 G 的函数。记

$$S_C = \sum_{j=p}^q \sum_{i=m}^n f(i, j), \quad S_R = \sum_{i=m}^n \sum_{j=p}^q f(i, j),$$

其中 $q \geq p, n \geq m$ 。 $\sum_{i=m}^n f(i, j)$ 是何物? 暂时视 i 之外的变元为常元, 则

$$\sum_{i=m}^n f(i, j) = f(m, j) + f(m + 1, j) + \cdots + f(n, j)。$$

$\sum_{j=p}^q \sum_{i=m}^n f(i, j)$ 是 $\sum_{j=p}^q (\sum_{i=m}^n f(i, j))$ 的简写:

$$\sum_{j=p}^q \sum_{i=m}^n f(i, j) = \sum_{i=m}^n f(i, p) + \sum_{i=m}^n f(i, p + 1) + \cdots + \sum_{i=m}^n f(i, q)。$$

$\sum_{i=m}^n \sum_{j=p}^q f(i, j)$ 有着类似的解释。我们说, S_C 一定与 S_R 相等。

记

$$C_j = \sum_{i=m}^n f(i, j), \quad R_i = \sum_{j=p}^q f(i, j).$$

考虑下面的表:

$f(m, p)$	$f(m, p+1)$	\cdots	$f(m, q)$	R_m
$f(m+1, p)$	$f(m+1, p+1)$	\cdots	$f(m+1, q)$	R_{m+1}
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
$f(n, p)$	$f(n, p+1)$	\cdots	$f(n, q)$	R_n
C_p	C_{p+1}	\cdots	C_q	

由此, 不难看出, S_C 与 S_R 只是用不同的方法将 $(n-m+1)(q-p+1)$ 个元相加罢了。

评注 上面的例其实就是一个特殊情形 ($n-m+1=2$)。

Rings

定义 设 R 是加群。设 \cdot (读作“乘法”) 也是 R 的二元运算。假设

(i) \cdot 适合结合律;

(ii) $+$ 与 \cdot 适合分配律。

我们说 R (关于 $+$ 与 \cdot) 是环 (*ring*)。

评注 在不引起歧义的情况下, 可省去 \cdot 。例如, $a \cdot b$ 可写为 ab 。

例 \mathbb{Z}, \mathbb{F} (关于普通加法与乘法) 都是环。

例 全体偶数作成的集也是环。一般地, 设 k 是整数, 则全体 k 的倍作成的集是环。

例 这里举一个“平凡的” (*trivial*) 例。 N 只有一个元 0 。可以验证, N 关于普通加法与乘法作成群。这也是“最小的环”。在上个例里, 取 $k=0$ 就是 N 。

例 这里举一个“不平凡的” (*nontrivial*) 例。设 $R = \{0, a, b, c\}$ 。加法和乘法由以下二个表给定:

$+$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

\cdot	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
b	0	a	b	c
c	0	a	b	c

可以验证, 这是一个环。

评注 我们看一下环的简单性质。

已经知道, R 的任意元的“整数 0 倍”是 R 的零元。不禁好奇, 零元乘任意元会是什么结果。首先, 回想起, R 的零元适合 $0 + 0 = 0$ 。利用分配律, 当 $x \in R$ 时,

$$0x = (0 + 0)x = 0x + 0x。$$

我们知道, 加法适合消去律。所以

$$0 = 0x。$$

类似地, $x0 = 0$ 。也许有点眼熟? 但是这里左右二侧的 0 都是 R 的元, 不一定是数!

因为

$$\begin{aligned} xy + (-x)y &= (x - x)y = 0, \\ xy + x(-y) &= x(y - y) = 0, \end{aligned}$$

所以

$$(-x)y = x(-y) = -xy。$$

从而

$$(-x)(-y) = -(x(-y)) = -(-xy) = xy。$$

根据分配律,

$$\begin{aligned} x(y_1 + \cdots y_n) &= xy_1 + \cdots + xy_n, \\ (x_1 + \cdots + x_m)y &= x_1y + \cdots + x_my。 \end{aligned}$$

二式联合, 就是

$$(x_1 + \cdots + x_m)(y_1 + \cdots y_n) = x_1y_1 + \cdots + x_1y_n + \cdots + x_my_1 + \cdots + x_my_n。$$

利用 \sum 符号, 此式可以写为

$$\left(\sum_{i=1}^m x_i\right) \left(\sum_{j=1}^n y_j\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j。$$

所以, 若 n 是整数, $x, y \in R$, 则

$$(nx)y = n(xy) = x(ny)。$$

对于正整数 m, n 与 R 的元 x , 有

$$x^{m+n} = x^m x^n, \quad (x^m)^n = x^{mn}.$$

假如 R 有二个元 x, y 适合 $xy = yx$, 那么还有

$$(xy)^m = x^m y^m.$$

例 在 \mathbb{Z}, \mathbb{F} 里, 这些就是我们熟悉的 (部分的) 数的运算律。

评注 类似地, 可以定义子环 (*subring*)。这里, 就直接用等价刻画来描述它: “ R 的非空子集 S 是环 R 的子环的一个必要与充分条件是: 任取 $x, y \in S$, 必有 $x - y \in S, xy \in S$ 。”

定义 设 R 是环。假设任取 $x, y \in R$, 必有 $xy = yx$, 就说 R 是交换环 (*commutative ring*)。

评注 以后接触的环都是交换环。

Domains

定义 设 D 是环。假设

- (i) 任取 $x, y \in D$, 必有 $xy = yx$;
 - (ii) 存在 $1 \in D, 1 \neq 0$, 使任取 $x \in D$, 必有 $1x = x1 = x$;
 - (iii) \cdot 适合 “消去律变体”[†]: 若 $xy = xz, x \neq 0$, 则 $y = z$ 。
- 我们说 D (关于 $+$ 与 \cdot) 是整环 (*domain, integral domain*)。

例 \mathbb{Z}, \mathbb{F} 都是整环。当然, 也有介于 \mathbb{Z} 与 \mathbb{F} 之间的整环。假如 $s \in \mathbb{C}$ 的平方是整数, 那么全体形如 $x + sy$ ($x, y \in \mathbb{Z}$) 的数作成个整环。

例 看一个有限整环的例。设 V (*Vierergruppe*)[‡] 是 4 元集:

$$V = \{0, 1, \tau, \tau^2\}.$$

加法与乘法由下面的运算表决定:

$+$	0	1	τ	τ^2	\cdot	0	1	τ	τ^2
0	0	1	τ	τ^2	0	0	0	0	0
1	1	0	τ^2	τ	1	0	1	τ	τ^2
τ	τ	τ^2	0	1	τ	0	τ	τ^2	1
τ^2	τ^2	τ	1	0	τ^2	0	τ^2	1	τ

[†] 一般地, 这也可称为消去律。

[‡] A German word which means *four-group*.

可以验证, V 不但是一个环, 它还适合整环定义的条件 (i) (ii) (iii)。因此, V 是整环。

在 V 里, $1 + 1 = 0$, 这跟平常的加法有点不一样。换句话说, 这里的 0 跟 1 已经不是我们熟悉的数了。

评注 整环 D 有乘法幺元 1 。因为 D 是加群, 1 当然有相反元 -1 。任取 $a \in D$ 。根据分配律,

$$0 = 0a = (1 + (-1))a = 1a + (-1)a = a + (-1)a。$$

又因为 a 的相反元 $-a$ 适合

$$0 = a + (-a),$$

故由 (加法) 消去律知 $-a = (-1)a$ 。

例 全体偶数作成的集是交换环, 却不是整环。

例 再来看一个非整环例。考虑 \mathbb{Z}^2 。设 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ 。规定

$$(a, b) = (c, d) \iff a = b \text{ and } c = d,$$

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d),$$

$$(a, b)(c, d) = (ac, bd)。$$

可以验证, 在这二种运算下, \mathbb{Z}^2 作成交换环, 其加法、乘法幺元分别是 $(0, 0)$, $(1, 1)$ 。可是

$$(1, 0) \neq (0, 0), \quad (0, 1) \neq (0, -1), \quad (1, 0)(0, 1) = (1, 0)(0, -1)。$$

也就是说, 乘法不适合消去律。

评注 可是, 如果这么定义乘法, 那么 \mathbb{Z}^2 可作为一个整环:

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)。$$

事实上, 这就是复数乘法, 因为

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)。$$

评注 整环 D 有乘法幺元 1 。任取 $a \in D$ 。我们定义

$$a^0 = 1。$$

我们已经知道, 当 m, n 是正整数, $x \in D$ 时,

$$x^m x^n = x^{m+n}, \quad (x^m)^n = x^{mn}。$$

现在, 当 m, n 是非负整数时, 上面的关系仍成立。并且, 既然 D 的乘法适合交换律, 那么任取 $x, y \in D$, 必有

$$(xy)^m = x^m y^m,$$

m 可以是非负整数。

评注 类似地, 可以定义子整环 (*subdomain*)。这里, 就直接用前面的等价刻画来描述它: “ D 的非空子集 S 是整环 D 的子整环的一个必要与充分条件是: (i) $1 \in S$; (ii) 任取 $x, y \in S$, 必有 $x - y \in S, xy \in S$ 。”

例 设 $D \subset \mathbb{C}$, 且 D 是整环。不难看出, $\mathbb{Z} \subset D$ 。

Products

定义 设 f 是 \mathbb{Z} 的非空子集 S 到整环 D 的函数。设 p, q 是二个整数。如果 $p \leq q$, 则记

$$\prod_{j=p}^q f(j) = f(p) \cdot f(p+1) \cdot \cdots \cdot f(q)。$$

也就是说, $\prod_{j=p}^q f(j)$ 就是 $q - (p - 1)$ 个元的积的一种简洁的表示法。如果 $p > q$, 约定 $\prod_{j=p}^q f(j) = 1$ 。

定义 设 n 是正整数。那么 $1, 2, \dots, n$ 的积是 n 的阶乘 (*factorial*):

$$n! = \prod_{j=1}^n j。$$

顺便约定 $0! = 1$ 。

评注 不难看出, 当 n 是正整数时,

$$n! = n \cdot (n-1)!。$$

例 不难验证, 下面是 0 至 9 的阶乘:

$0! = 1,$	$1! = 1,$
$2! = 2,$	$3! = 6,$
$4! = 24,$	$5! = 120,$
$6! = 720,$	$7! = 5\,040,$
$8! = 40\,320,$	$9! = 362\,880。$

评注 因为整环的乘法也适合结合律与交换律, 所以

$$\prod_{j=p}^q (f(j) \cdot g(j)) = \prod_{j=p}^q f(j) \cdot \prod_{j=p}^q g(j),$$

$$\prod_{j=p}^q \prod_{i=m}^n f(i, j) = \prod_{i=m}^n \prod_{j=p}^q f(i, j),$$

其中, $\prod_{j=p}^q \prod_{i=m}^n f(i, j)$ 当然是 $\prod_{j=p}^q (\prod_{i=m}^n f(i, j))$ 的简写。

评注 回顾一下 \sum 符号。我们已经知道

$$\sum_{j=p}^q (f(j) + g(j)) = \sum_{j=p}^q f(j) + \sum_{j=p}^q g(j)。$$

因为整环有分配律, 故当 $c \in D$ 与变元 j 无关时[†]

$$\sum_{j=p}^q cf(j) = c \sum_{j=p}^q f(j)。$$

进而, 当 c, d 都是常元时,

$$\sum_{j=p}^q (cf(j) + dg(j)) = c \sum_{j=p}^q f(j) + d \sum_{j=p}^q g(j)。$$

类似地, 当 $q \geq p, c$ 是常元时,

$$\prod_{j=p}^q cf(j) = c^{q-p+1} \prod_{j=p}^q f(j)。$$

定义 最后介绍一下双阶乘 (*double factorial*)。前 n 个正偶数的积是 $2n$ 的双阶乘:

$$(2n)!! = \prod_{j=1}^n 2j。$$

前 n 个正奇数是 $2n-1$ 的双阶乘:

$$(2n-1)!! = \prod_{j=1}^n (2j-1)。$$

顺便约定 $0!! = (-1)!! = 1$ 。

评注 不难看出, 对任意正整数 m , 都有

$$m!! = m \cdot (m-2)!!。$$

[†] 这样的元称为常元 (*constant*)。

双阶乘可以用阶乘表示:

$$(2n)!! = 2^n n!,$$

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

由此可得

$$n!! \cdot (n-1)!! = n!.$$

例 不难验证, 下面是 1 至 10 的双阶乘:

$1!! = 1,$	$2!! = 2,$
$3!! = 3,$	$4!! = 8,$
$5!! = 15,$	$6!! = 48,$
$7!! = 105,$	$8!! = 384,$
$9!! = 945,$	$10!! = 3840.$

Units and Fields

定义 设 D 是整环。设 $x \in D$ 。若存在 $y \in D$ 使 $xy = 1$, 则说 x 是 D 的单位 (*unit*)。

评注 不难看出, D 至少有一个单位 1, 因为 $1 \cdot 1 = 1$ 。定义里的 y 自然就是 x 的 (乘法) 逆元, 其一般记为 x^{-1} 。 x^{-1} 当然也是单位。二个单位 x, y 的积 xy 也是单位: $(xy)(y^{-1}x^{-1}) = 1$ 。单位的乘法当然适合结合律。这样, D 的单位作成 (乘法) 群。姑且叫 D 的所有单位作成的集为单位群 (*unit group*) 吧!

评注 不难看出, 0 一定不是单位。

例 看全体整数作成的整环 \mathbb{Z} 。它恰有二个单位: 1 与 -1 。

例 \mathbb{F} 也是整环。它有无数多个单位: 任意 \mathbb{F}^* 的元都是单位。

例 前面的 4 元集 V 的非零元都是单位。

例 现在看一个不那么平凡的例。设

$$D = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

这个 D (关于数的运算) 作成整环。

首先, 我们说, 不存在有理数 q 使 $q^2 = 3$ 。用反证法。设 $q = \frac{m}{n}$, m, n 是非零整数。我们知道, 分数可以约分, 故可以假设 m, n 不全为 3 的倍。这样

$$m^2 = 3n^2。$$

所以 m^2 一定是 3 的倍。因为

$$\begin{aligned}(3\ell)^2 &= 3 \cdot 3\ell^2, \\ (3\ell \pm 1)^2 &= 3(3\ell^2 \pm 2\ell) + 1,\end{aligned}$$

故由此可看出, m 也是 3 的倍。记 $m = 3u$ 。这样

$$3u^2 = n^2。$$

所以 n 也是 3 的倍。这跟假设矛盾!

再说一下 D 的二个元相等意味着什么。设 a, b, c, d 都是整数。那么

$$a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3} \implies (a - c)^2 = 3(d - b)^2。$$

若 $d - b \neq 0$, 则 $\frac{a-c}{d-b}$ 是有理数, 且

$$\left(\frac{a-c}{d-b}\right)^2 = 3,$$

而这是荒谬的。所以 $d - b = 0$ 。这样 $a - c = 0$ 。

现在再来看单位问题。若 k 是大于 1 的整数, 则 k 不是 D 的单位。反证法。若 k 是单位, 则有 $c, d \in \mathbb{Z}$ 使

$$1 = k(c + d\sqrt{3}) = kc + kd\sqrt{3} \implies 1 = kc,$$

矛盾!

D 有无数多个单位。因为

$$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1,$$

故对任意正整数 n , 有

$$(2 + \sqrt{3})^n (2 - \sqrt{3})^n = 1。$$

所以, $(2 \pm \sqrt{3})^n$ 是单位。

定义 设 F 是整环。若每个 F 的而不是 0 的元都是 F 的单位, 则说 F 是域 (*field*)。

例 不难看出, F 是域。这也解释了为什么我们用 F 表示 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 之一。

评注 在域 F 里, 只要 $a \neq 0$, 则 a^{-1} 有意义。那么, 我们说 $\frac{b}{a}$ 就是 $ba^{-1} = a^{-1}b$ 的简写。不难验证, 当 $a, c \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{b}{a} &= \frac{d}{c} \iff bc = da, \\ \frac{b}{a} \pm \frac{d}{c} &= \frac{bc \pm da}{ac}, \\ \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} &= \frac{bd}{ac}.\end{aligned}$$

若 $d \neq 0$, 则

$$\frac{\frac{b}{a}}{\frac{d}{c}} = \frac{bc}{da}.$$

这就是我们熟知的分数运算法则。

评注 类似地, 可以定义子域 (*subfield*)。这里, 就直接用前面的等价刻画来描述它: “ F 的非空子集 K 是域 F 的子域的一个必要与充分条件是:

(i) $1 \in K$; (ii) 任取 $x, y \in K, y \neq 0$, 必有 $x - y \in K, \frac{x}{y} \in K$ 。”

例 设 $F \subset \mathbb{C}$, 且 F 是域。不难看出, $\mathbb{Q} \subset F$ 。

Definition of Polynomials

现在开始介绍多项式。

定义 设 D 是整环。设 x 是不在 D 里的任意一个文字。形如

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \quad (n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in D, a_n \neq 0)$$

的表达式称为 D 上 x 的一个多项式 (*polynomial in x over D*)。 n 称为其次 (*degree*), a_i 称为其 i 次系数 (*the i^{th} coefficient*), a_ix^i 称为其 i 次项 (*the i^{th} term*)。 $f(x)$ 的次可写为 $\deg f(x)$ 。

若二个多项式的次与各同次系数均相等, 则二者相等。

多项式的系数为 0 的项可以不写。

约定 $0 \in D$ 也是多项式, 称为零多项式。零多项式的次是 $-\infty$ 。任取整数 m , 约定

$$\begin{aligned}-\infty &= -\infty, \quad -\infty < m, \\ -\infty + m &= m + (-\infty) = -\infty + (-\infty) = -\infty.\end{aligned}$$

当然, 还约定, 零多项式只跟自己相等。换句话说,

$$a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n = 0$$

的一个必要与充分条件是

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0。$$

D 上 x 的所有多项式作成的集是 $D[x]$:

$$D[x] = \{ a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \cdots, a_n \in D \}。$$

文字 x 只是一个符号, 它与 D 的元的和与积都是形式的。我们说, x 是不定元 (*indeterminate*)。

例 $0y^0 + 1y^1 + (-1)y^2 + 0y^3 + (-7)y^4 \in \mathbb{Z}[y]$ 是一个 4 次多项式。顺便一提, 一般把 y^1 写为 y 。这个多项式的一个更普通的写法是

$$y - y^2 - 7y^4。$$

也许 y^0 看起来有些奇怪。如上所言, 这只是一个形式上的表达式。我们之后再处理这个小细节。

例 $z^0 + z + z^{\frac{3}{2}}$ 不是 z 的多项式。

例 考虑 \mathbb{Z} 与 $\mathbb{Z}[x]$ 。设

$$f(x) = ax^0 + x + 2x^2 - x^4 - bx^5, \quad g(x) = cx + dx^2 - x^4 - 3x^5,$$

其中 a, b, c, d 都是整数。那么, $f(x) = g(x)$ 相当于

$$a = 0, \quad 1 = c, \quad 2 = d, \quad 0 = 0, \quad -1 = -1, \quad -b = -3,$$

也就是

$$a = 0, \quad b = 3, \quad c = 1, \quad d = 2。$$

评注 文字 x 的意义在数学中是不断进化的 (*evolving*)。在中小学里, x 是未知元 (*unknown*): 虽然它是待求的, 但是它是一个具体的数。后来在函数里, x 表示变元 (*variable*), 不过它的取值范围是确定的。在上面的定义里, x 仅仅是一个文字, 成为不定元。

下面考虑多项式的运算。先从加法开始。

定义 设

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad g(x) = b_0x^0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

是 $D[x]$ 的元。规定加法如下:

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n。$$

例 取 $\mathbb{Z}[x]$ 的二个元 $f(x) = x^0 + 2x^2$, $g(x) = -3x^0 + 4x - x^3$ 。先改写一下:

$$f(x) = 1x^0 + 0x + 2x^2 + 0x^3, \quad g(x) = -3x^0 + 4x + 0x^2 + (-1)x^3。$$

所以

$$f(x) + g(x) = -2x^0 + 4x + 2x^2 - x^3。$$

命题 $D[x]$ 作成加群。

证 设

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

$$g(x) = b_0x^0 + b_1x + \cdots + b_nx^n,$$

$$h(x) = c_0x^0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$$

是 $D[x]$ 的元。根据加法的定义, $+$ 显然是 $D[x]$ 的二元运算。因为 D 的加法适合交换律, 故

$$\begin{aligned} g(x) + f(x) &= (b_0 + a_0)x^0 + (b_1 + a_1)x + \cdots + (b_n + a_n)x^n \\ &= (a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n \\ &= f(x) + g(x)。 \end{aligned}$$

也就是说, $D[x]$ 的加法适合交换律。

注意到

$$\begin{aligned} &(f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= ((a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n) \\ &\quad + (c_0x^0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) \\ &= ((a_0 + b_0) + c_0)x^0 + ((a_1 + b_1) + c_1)x + \cdots + ((a_n + b_n) + c_n)x^n \\ &= (a_0 + b_0 + c_0)x^0 + (a_1 + b_1 + c_1)x + \cdots + (a_n + b_n + c_n)x^n。 \end{aligned}$$

类似地, 计算 $f(x) + (g(x) + h(x))$ 也可以得到一样的结果。也就是说, $D[x]$ 的加法适合结合律。

零多项式可以写为

$$0 = 0x^0 + 0x + \cdots + 0x^n。$$

这样

$$\begin{aligned} 0 + f(x) &= (0 + a_0)x^0 + (0 + a_1)x + \cdots + (0 + a_n)x^n \\ &= a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \\ &= f(x)。 \end{aligned}$$

类似地, $f(x) + 0 = f(x)$ 。

记

$$\underline{f}(x) = (-a_0)x^0 + (-a_1)x + \cdots + (-a_n)x^n。$$

这样

$$\begin{aligned} \underline{f}(x) + f(x) &= (-a_0 + a_0)x^0 + (-a_1 + a_1)x + \cdots + (-a_n + a_n)x^n \\ &= 0x^0 + 0x + \cdots + 0x^n \\ &= 0。 \end{aligned}$$

类似地, $f(x) + \underline{f}(x) = 0$ 。以后, 我们把这个 $\underline{f}(x)$ 用普通的符号写为

$$-f(x) = -a_0x^0 - a_1x - \cdots - a_nx^n。$$

综上, $D[x]$ 是加群。

☞

定义 设 $f(x), g(x) \in D[x]$ 。规定减法如下:

$$f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))。$$

评注 可以看出, $f(x) \pm g(x)$ 的次既不会超出 $f(x)$ 的次, 也不会超出 $g(x)$ 的次。用符号写出来, 就是

$$\deg(f(x) \pm g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}。$$

若 $\deg f(x) > \deg g(x)$, 则

$$\deg(f(x) \pm g(x)) = \deg f(x)。$$

类似地, 若 $\deg f(x) < \deg g(x)$, 则

$$\deg(f(x) \pm g(x)) = \deg g(x)。$$

评注 既然 $D[x]$ 是加群, 且每个 $a_i x^i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) 都可以看成是多项式, 那么多项式的项的次序是不重要的。前面的写法称为升次排列 (*ascending order*)。下面的写法称为降次排列 (*descending order*):

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^0。$$

这跟中学里接触的多项式是一样的。

(非零) 多项式的最高次非零项是首项 (*leading term*)。它的系数是此多项式的首项系数 (*the coefficient of the leading term*)。

例 $y - y^2 - 7y^4 \in \mathbb{Z}[x]$ 可以写为 $-7y^4 - y^2 + y$, 其首项是 $-7y^4$, 且其首项系数是 -7 。

现在考虑乘法。

定义 设

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x + \dots + a_m x^m, \quad g(x) = b_0 x^0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$$

是 $D[x]$ 的元。规定乘法如下:

$$f(x)g(x) = c_0 x^0 + c_1 x + \dots + c_{m+n} x^{m+n},$$

其中

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0。$$

且约定 $i > m$ 时 $a_i = 0$, $j > n$ 时 $b_j = 0$ 。在这个约定下, 不难看出, $\ell > m + n$ 时, $c_\ell = 0$ 。所以, 我们至少有

$$\deg f(x)g(x) \leq \deg f(x) + \deg g(x)。$$

例 取 $\mathbb{Z}[x]$ 的二个元 $f(x) = x^0 + 2x^2$, $g(x) = -3x^0 + 4x - x^3$ 。先改写一下:

$$f(x) = 1x^0 + 0x + 2x^2, \quad g(x) = -3x^0 + 4x + 0x^2 + (-1)x^3。$$

所以

$$c_0 = 1 \cdot (-3) = -3,$$

$$c_1 = 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-3) = 4,$$

$$c_2 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) = -6,$$

$$c_3 = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 7,$$

$$c_4 = 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 0,$$

$$c_5 = 2 \cdot (-1) = -2。$$

所以

$$f(x)g(x) = -3x^0 + 4x - 6x^2 + 7x^3 - 2x^5。$$

例 设

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_mx^m。$$

是 $D[x]$ 的元。零多项式可以写为

$$0 = 0x^0,$$

由此易知

$$0f(x) = f(x)0 = 0。$$

评注 设

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_mx^m, \quad g(x) = b_0x^0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

是 $D[x]$ 的元, 且 $a_m \neq 0, b_n \neq 0$ 。这样, $f(x)g(x)$ 的 $m+n$ 次项就是 cx^{m+n} , 其中

$$\begin{aligned} c &= a_0b_{m+n} + \cdots + a_{m-1}b_{n+1} + a_mb_n + a_{m+1}b_{n-1} + \cdots + a_{m+n}b_n \\ &= 0 + \cdots + 0 + a_mb_n + 0 + \cdots + 0 \\ &= a_mb_n。 \end{aligned}$$

因为 $a_m \neq 0, b_n \neq 0$, 所以 $a_mb_n \neq 0$ (反证法: 若 $a_mb_n = 0 = a_m0$, 因为 $a_m \neq 0$, 根据 D 的消去律, 得 $b_n = 0$, 矛盾!)。所以

$$\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x)。$$

可以验证, 若 f 或 g 的任意一个是 0, 这个关系也对。

评注 设

$$f(x) = px^m = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m,$$

$$g(x) = qx^n = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n。$$

当 $i \neq m$ 时, $a_i = 0$; 当 $i = m$ 时, $a_i = p \neq 0$ 。当 $j \neq n$ 时, $b_j = 0$; 当 $j = n$ 时, $b_j = q \neq 0$ 。现在考虑这二个多项式的积

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{m+n}x^{m+n},$$

其中

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0.$$

我们来看什么时候 $a_\ell b_{k-\ell}$ 不是 0。这相当于要求 a_ℓ 跟 $b_{k-\ell}$ 都不是 0, 所以

$$\ell = m, \quad k - \ell = n,$$

也就是

$$\ell = m, \quad k = m + n.$$

所以, 当 $k \neq m + n$ 时, $c_k = 0$; 当 $k = m + n$ 时,

$$c_{m+n} = a_m b_n = pq \neq 0.$$

所以, 任取 $m, n \in \mathbb{N}$, 必有

$$(px^m)(qx^n) = (pq)x^{m+n}.$$

特别地, 取 $p = q = 1$, 有

$$x^m x^n = x^{m+n}.$$

这里提醒读者: 这个式是形式上的表达式, 其内涵与中学的“同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加”的内涵是不一样的!

顺便一提, 若 p 跟 q 的一个是 0, 则每个 c_k 全为 0, 故此时积是零多项式, 此式仍成立。

命题 $D[x]$ 作成整环。所以, $D[x]$ 的一个名字就是 (整环) D 上 (x) 的多项式 (整) 环。

证 已经知道, $D[x]$ 是加群。下面先说明 $D[x]$ 是交换环。

根据定义, 多项式的乘法还是多项式, 也就是说, 乘法是二元运算。

设

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m,$$

$$g(x) = b_0 x^0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n,$$

$$h(x) = u_0 x^0 + u_1 x + \cdots + u_s x^s$$

是 $D[x]$ 的元。则

$$f(x)g(x) = c_0 x^0 + c_1 x + \cdots + c_{m+n} x^{m+n},$$

$$g(x)f(x) = d_0x^0 + d_1x + \cdots + d_{n+m}x^{n+m},$$

其中

$$\begin{aligned} c_k &= a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0, \\ d_k &= b_0a_k + b_1a_{k-1} + \cdots + b_ka_0. \end{aligned}$$

因为 D 的乘法适合交换律, 加法适合交换律与结合律, 故 $c_k = d_k$ 。这样, $D[x]$ 的乘法适合交换律。

不难算出

$$\begin{aligned} & (f(x)g(x))h(x) \\ &= (c_0x^0 + c_1x + \cdots + c_{m+n}x^{m+n})(u_0x^0 + u_1x + \cdots + u_sx^s) \\ &= v_0x^0 + v_1x + \cdots + v_{m+n+s}x^{m+n+s}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} v_t &= (\text{the sum of all } a_ib_ju_r \text{'s with } i+j+r=t) \\ &= a_0b_0u_t + a_0b_1u_{t-1} + \cdots + a_0b_tu_0 + a_1b_0u_{t-1} + \cdots. \end{aligned}$$

类似地, 计算 $f(x)(g(x)h(x))$ 也可以得到一样的结果。也就是说, $D[x]$ 的乘法适合结合律。

现在验证分配律。前面已经看到, 多项式的乘法是交换的, 所以只要验证一个分配律即可。不失一般性, 设 $s = n$ 。这样

$$g(x) + h(x) = (b_0 + u_0)x^0 + (b_1 + u_1)x + \cdots + (b_n + u_n)x^n.$$

所以

$$f(x)(g(x) + h(x)) = p_0x^0 + p_1x^1 + \cdots + p_{m+n}x^{m+n},$$

其中

$$\begin{aligned} p_k &= a_0(b_k + c_k) + a_1(b_{k-1} + c_{k-1}) + \cdots + a_k(b_0 + c_0) \\ &= (a_0b_k + a_0c_k) + (a_1b_{k-1} + a_1c_{k-1}) + \cdots + (a_kb_0 + a_kc_0) \\ &= (a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0) + (a_0c_k + a_1c_{k-1} + \cdots + a_kc_0). \end{aligned}$$

不难看出, 这就是 $f(x)g(x)$ 的 k 次系数与 $f(x)h(x)$ 的 k 次系数的和。这样, $D[x]$ 的加法与乘法适合分配律。至此, 我们知道, $D[x]$ 是交换环。

交换环离整环还差二步: 一是乘法么元, 二是消去律。先看消去律。若 $f(x)g(x) = f(x)h(x)$, $f(x) \neq 0$, 根据分配律,

$$0 = f(x)g(x) - f(x)h(x) = f(x)(g(x) - h(x)).$$

如果 $g(x) - h(x) \neq 0$, 则 $g(x) - h(x)$ 的次不是 $-\infty$ 。 $f(x)$ 的次不是 $-\infty$, 故 $f(x)(g(x) - h(x))$ 的次不是 $-\infty$ 。 换句话说, $f(x)(g(x) - h(x)) \neq 0$, 矛盾!

再看乘法么元。 设

$$e(x) = x^0。$$

不难算出

$$e(x)f(x) = f(x)e(x) = f(x)。$$

综上, $D[x]$ 是整环。

☞

例 在前面, 我们直接用定义计算了下面二个多项式的积:

$$f(x) = x^0 + 2x^2, \quad g(x) = -3x^0 + 4x - x^3。$$

现在, 我们利用

$$(px^m)(qx^n) = (pq)x^{m+n} \quad (p, q \in D, m, n \in \mathbb{N})$$

与运算律再做一次:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (x^0 + 2x^2)(-3x^0 + 4x - x^3) \\ &= x^0(-3x^0 + 4x - x^3) + 2x^2(-3x^0 + 4x - x^3) \\ &= -3x^{0+0} + 4x^{0+1} - x^{0+3} - 6x^{2+0} + 8x^{2+1} - 2x^{2+3} \\ &= -3x^0 + 4x - x^3 - 6x^2 + 8x^3 - 2x^5 \\ &= -3x^0 + 4x - 6x^2 + 7x^3 - 2x^5。 \end{aligned}$$

这跟之前的结果是一致的。

定义 设 $m \in \mathbb{N}$ 。 多项式 $f(x)$ 的 m 次幂就是 m 个 $f(x)$ 的积:

$$(f(x))^m = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot \cdots \cdot f(x)}_{m \text{ } f(x)\text{'s}}。$$

既然 $D[x]$ 是整环, 那么前面的幂规则都适用。 具体地说, 设 $m, n \in \mathbb{N}$, $f(x), g(x) \in D[x]$, 则

$$\begin{aligned} (f(x))^m(f(x))^n &= (f(x))^{m+n}, \\ ((f(x))^m)^n &= (f(x))^{mn}, \\ (f(x)g(x))^m &= (f(x))^m(g(x))^m。 \end{aligned}$$

前面, 我们知道

$$x^m x^n = x^{m+n}。$$

当时, 我们还说, 这跟中学的“同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加”有着不一样的内涵。有了“幂”这个概念后, 我们发现, x^m 的确可以视为 m 个 x 的积。

评注 以后, 我们把 x^0 写为 1。换句话说, 代替

$$a_0 x^0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

我们写

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n。$$

这儿还有一件事儿值得一提。考虑

$$D_0 = \{ ax^0 \mid a \in D \} \subset D[x]。$$

任取 D_0 的二元 ax^0, bx^0 。首先, $ax^0 = bx^0$ 的一个必要与充分条件是 $a = b$ 。然后, 不难看出,

$$ax^0 + bx^0 = (a + b)x^0, \quad (ax^0)(bx^0) = (ab)x^0。$$

由此可以看出, D_0 与 D “几乎完全一样”。用摩登 (*modern*) 数学的话来说, “ D_0 与 D 是天然同构的 (*naturally isomorphic*)”。

我们不打算深究这一点。上面, 我们把 x^0 写为 1; 反过来, D 的元 a 也可以理解为是多项式 ax^0 。这跟中学的习惯是一致的。

最后, 我们指出: 既然非零的 $c \in D$ 可视为 0 次多项式, 那么 $cf(x)$ 也是多项式。如果

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

那么

$$cf(x) = ca_0 + ca_1 x + \cdots + ca_n x^n,$$

且

$$\deg cf(x) = \deg f(x)。$$

Division Algorithm

我们知道, 非负整数有这样的性质:

命题 设 n 是正整数, m 是非负整数。则必有一对非负整数 q, r 使

$$m = qn + r, \quad 0 \leq r < n.$$

例如, 取 $n = 5, m = 23$ 。不难看出,

$$23 = 4 \cdot 5 + 3.$$

多项式也有类似的性质哟。

命题 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \in D[x],$$

且 a_n 是 D 的单位。对任意 $g(x) \in D[x]$, 存在 $q(x), r(x) \in D[x]$ 使

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x), \quad \deg r(x) < n.$$

一般称其为带余除法: $q(x)$ 就是商 (quotient); $r(x)$ 就是余式 (remainder)。

证 用数学归纳法。记 $\deg g(x) = m$ 。若 $m < n$, 则 $q(x) = 0, r(x) = g(x)$ 适合要求。所以, 命题对不高于 $n-1$ 的 m 都成立。

设 $m \leq \ell$ ($\ell \geq n-1$) 时, 命题成立。考虑 $m = \ell + 1$ 的情形。此时, 设

$$g(x) = b_{\ell+1} x^{\ell+1} + b_{\ell} x^{\ell} + \cdots + b_0 \in D[x].$$

作一个跟 $g(x)$ 有着共同首项的多项式:

$$\begin{aligned} s(x) &= b_{\ell+1} a_n^{-1} x^{\ell+1-n} f(x) \\ &= b_{\ell+1} a_n^{-1} x^{\ell+1-n} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0) \\ &= b_{\ell+1} a_n^{-1} (a_n x^{\ell+1} + a_{n-1} x^{\ell} + \cdots + a_0 x^{\ell+1-n}) \\ &= b_{\ell+1} (x^{\ell+1} + a_n^{-1} a_{n-1} x^{\ell} + \cdots + a_n^{-1} a_0 x^{\ell+1-n}) \\ &= b_{\ell+1} x^{\ell+1} + b_{\ell+1} a_n^{-1} a_{n-1} x^{\ell} + \cdots + b_{\ell+1} a_n^{-1} a_0 x^{\ell+1-n}. \end{aligned}$$

因为 a_n 是单位, 故 $s(x) \in D[x]$ 。设 $r_1(x) = g(x) - s(x) \in D[x]$ 。这样, $r_1(x)$ 的次不高于 ℓ 。根据归纳假设, 有 $q_2(x), r_2(x) \in D[x]$ 使

$$r_1(x) = q_2(x)f(x) + r_2(x), \quad \deg r_2(x) < n.$$

所以

$$g(x) = b_{\ell+1} a_n^{-1} x^{\ell+1-n} f(x) + r_1(x)$$

$$\begin{aligned}
&= b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n}f(x) + q_2(x)f(x) + r_2(x) \\
&= (b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n} + q_2(x))f(x) + r_2(x).
\end{aligned}$$

记 $q(x) = b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n} + q_2(x)$, $r(x) = r_2(x)$, 则 $q(x)$, $r(x)$ 符合要求。所以, $m \leq \ell + 1$ 时, 命题成立。根据数学归纳法, 命题成立。 ☺

例 取 $\mathbb{F}[x]$ 的二元 $f(x) = 2(x-1)^2(x+2)$, $g(x) = 8x^6 + 1$ 。我们来找一对多项式 $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg f(x).$$

不难看出, $f(x)$ 的次是 3, 且

$$f(x) = 2(x^2 - 2x + 1)(x + 2) = 2x^3 - 6x + 4.$$

我们按上面证明的方法寻找 $q(x)$ 与 $r(x)$ 。 $a_3 = 2$ 是 \mathbb{F} 的单位, 且 $a_3^{-1} = \frac{1}{2}$ 。取

$$q_1(x) = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{6-3} = 4x^3.$$

则

$$\begin{aligned}
r_1(x) &= g(x) - q_1(x)f(x) \\
&= (8x^6 + 1) - 4x^3(2x^3 - 6x + 4) \\
&= (8x^6 + 1) - (8x^6 - 24x^4 + 16x^3) \\
&= 24x^4 - 16x^3 + 1.
\end{aligned}$$

$r_1(x)$ 的次仍不低于 3。因此, 再来一次。取

$$q_2(x) = 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{4-3} = 12x.$$

则

$$\begin{aligned}
r_2(x) &= r_1(x) - q_2(x)f(x) \\
&= (24x^4 - 16x^3 + 1) - 12x(2x^3 - 6x + 4) \\
&= (24x^4 - 16x^3 + 1) - (24x^4 - 72x^2 + 48x) \\
&= -16x^3 + 72x^2 - 48x + 1.
\end{aligned}$$

$r_2(x)$ 的次仍不低于 3。因此, 再来一次。取

$$q_3(x) = -16 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{3-3} = -8.$$

则

$$\begin{aligned}
 r_3(x) &= r_2(x) - q_3(x)f(x) \\
 &= (-16x^3 + 72x^2 - 48x + 1) - (-8)(2x^3 - 6x + 4) \\
 &= (-16x^3 + 72x^2 - 48x + 1) - (-16x^3 + 48x - 32) \\
 &= 72x^2 - 96x + 33.
 \end{aligned}$$

$r_3(x)$ 的次低于 3。这样

$$\begin{aligned}
 g(x) &= q_1(x)f(x) + r_1(x) \\
 &= q_1(x)f(x) + q_2(x)f(x) + r_2(x) \\
 &= q_1(x)f(x) + q_2(x)f(x) + q_3(x)f(x) + r_3(x) \\
 &= (q_1(x) + q_2(x) + q_3(x))f(x) + r_3(x) \\
 &= (4x^3 + 12x - 8)f(x) + (72x^2 - 96x + 33).
 \end{aligned}$$

也就是说,

$$q(x) = 4x^3 + 12x - 8, \quad r(x) = 72x^2 - 96x + 33.$$

评注 带余除法要求 $f(x)$ 的首项系数是单位是有必要的。

在上面的例里, $f(x)$ 与 $g(x)$ 可以看成 $\mathbb{Z}[x]$ 的元, 但 2 不是 \mathbb{Z} 的单位。虽然最终所得 $q(x), r(x)$ 也是 $\mathbb{Z}[x]$ 的元, 但这并不是一定会出现的。我们看下面的简单例。

考虑 $\mathbb{Z}[x]$ 的多项式 $f(x) = 2x$ 。设

$$\begin{aligned}
 r(x) &= r_0, \\
 q(x) &= q_0 + q_1x + \cdots + q_px^p, \\
 g(x) &= g_0 + g_1x + \cdots + g_sx^s,
 \end{aligned}$$

且 $r_0, q_0, \dots, q_p, g_0, \dots, g_s \in \mathbb{Z}, q_p, g_s \neq 0$ 。若 $g(x) = q(x)f(x) + r(x)$, 则

$$g_0 + g_1x + \cdots + g_sx^s = r_0 + 2q_0x + 2q_1x^2 + \cdots + 2q_px^{p+1}.$$

所以

$$\begin{aligned}
 p &= s - 1, \\
 r_0 &= g_0, \\
 2q_{i-1} &= g_i, \quad i = 1, \dots, s.
 \end{aligned}$$

这说明, $g(x)$ 的 i 项系数 ($i = 1, \dots, s$) 必须是偶数。所以, 不存在 $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 使

$$1 + 3x + x^2 = q(x) \cdot 2x + r(x), \quad \deg r(x) < 1.$$

我们知道, 用一个正整数除非负整数, 所得的余数与商是唯一的。比方说, 5 除 23 的余数只能是 3。

多项式也有类似的性质哟。不过, 我们需要借助另一个命题的帮助。

命题 设 $f(x) \in D[x]$, 且 $f(x) \neq 0$ 。若 D 上 x 的 2 个多项式 $q(x)$, $r(x)$ 适合

$$q(x)f(x) + r(x) = 0, \quad \deg r(x) < \deg f(x),$$

则必有

$$q(x) = r(x) = 0。$$

通俗地说, 二个非零多项式的积的次不可能变低。

证 题设条件即

$$-q(x)f(x) = r(x)。$$

反证法。若 $-q(x) \neq 0$, 则 $\deg(-q(x)) \geq 0$ 。从而

$$\deg r(x) = \deg(-q(x)) + \deg f(x) \geq \deg f(x)。$$

可是,

$$\deg r(x) < \deg f(x),$$

矛盾! 故 $-q(x) = 0$ 。这样, $r(x) = 0$ 。

☞

命题 设 $f(x) \in D[x]$, 且 $f(x) \neq 0$ 。若 D 上 x 的 4 个多项式 $q_1(x)$, $r_1(x)$, $q_2(x)$, $r_2(x)$ 适合

$$\begin{aligned} q_1(x)f(x) + r_1(x) &= q_2(x)f(x) + r_2(x), \\ \deg r_1(x) &< \deg f(x), \quad \deg r_2(x) < \deg f(x), \end{aligned}$$

则必有

$$q_1(x) = q_2(x), \quad r_1(x) = r_2(x)。$$

证 记

$$Q(x) = q_1(x) - q_2(x), \quad R(x) = r_1(x) - r_2(x)。$$

题设条件即

$$(q_1(x) - q_2(x))f(x) + (r_1(x) - r_2(x)) = 0,$$

也就是

$$Q(x)f(x) + R(x) = 0.$$

注意到

$$\begin{aligned}\deg R(x) &= \deg(r_1(x) - r_2(x)) \\ &\leq \max\{\deg r_1(x), \deg r_2(x)\} \\ &< \deg f(x).\end{aligned}$$

根据上个命题, $Q(x) = R(x) = 0$ 。所以

$$q_1(x) = q_2(x), \quad r_1(x) = r_2(x).$$

☞

这样, 我们得到了这个命题:

命题 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \in D[x],$$

且 a_n 是 D 的单位。对任意 $g(x) \in D[x]$, 存在唯一的 $q(x), r(x) \in D[x]$ 使

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x), \quad \deg r(x) < n.$$

一般称其为带余除法: $q(x)$ 就是商; $r(x)$ 就是余式。并且, 当 $f(x)$ 的次不高于 $g(x)$ 的次时, $f(x), g(x), q(x)$ 间还有如下的次关系:

$$\deg g(x) = \deg(g(x) - r(x)) = \deg q(x) + \deg f(x).$$

Polynomial Equality

本节讨论二个多项式的相等。

设 $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ 都是整环 D 的元。根据定义, 我们已经知道,

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

的一个必要与充分条件是

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots, \quad a_n = b_n.$$

之后, 我们会遇到形如

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n$$

的式, 这里 $c \in D$ 。因为

$$1, \quad x - c, \quad (x - c)^2, \quad \dots, \quad (x - c)^n$$

是首项系数为 1 的 $0, 1, 2, \dots, n$ 次多项式, 所以这个 $f(x)$ 也是多项式, 且 $\deg f(x) \leq n$ 。当 $a_n \neq 0$ 时, $\deg f(x) = n$, 且 $f(x)$ 的首项系数为 a_n 。

再作一个多项式

$$g(x) = b_0 + b_1(x - c) + b_2(x - c)^2 + \dots + b_n(x - c)^n。$$

$f(x)$ 与 $g(x)$ 都是多项式, 自然可以讨论是否相等。若 $c = 0$, $(x - c)^\ell$ 就变为普通的 x^ℓ 。所以, $c = 0$ 时, $f(x) = g(x)$ 的一个必要与充分条件是

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots, \quad a_n = b_n。$$

可是, 如果 $c \neq 0$ 呢? 这个时候, 还是一样的条件吗?

先看一个例。

例 我们试研究

$$(\star) \quad a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 = b_0 + b_1(x - c) + b_2(x - c)^2。$$

在中学, 我们已经知道

$$(x - c)^2 = c^2 - 2cx + x^2。$$

这样, (\star) 的左侧变为

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 \\ &= a_0 + a_1(-c + x) + a_2(c^2 - 2cx + x^2) \\ &= a_0 + (-a_1c + a_1x) + (a_2c^2 + (-2a_2c)x + a_2x^2) \\ &= (a_0 - a_1c + a_2c^2) + (a_1 - 2a_2c)x + a_2x^2。 \end{aligned}$$

同理, (\star) 的右侧变为

$$(b_0 - b_1c + b_2c^2) + (b_1 - 2b_2c)x + b_2x^2。$$

所以, (\star) 成立等价于

$$\begin{aligned} a_0 - a_1c + a_2c^2 &= b_0 - b_1c + b_2c^2, \\ a_1 - 2a_2c &= b_1 - 2b_2c, \\ a_2 &= b_2, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}(a_0 - b_0) - c(a_1 - b_1) + c^2(a_2 - b_2) &= 0, \\ (a_1 - b_1) - 2c(a_2 - b_2) &= 0, \\ (a_2 - b_2) &= 0.\end{aligned}$$

由这个方程组, 可解出

$$a_0 - b_0 = a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = 0.$$

这跟 $c = 0$ 时的

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2$$

是完全一致的。

定义 设 $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x) \in D[x]$ 。设 $c_0, c_1, \dots, c_n \in D$ 。我们说

$$c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \dots + c_n p_n(x)$$

是多项式 $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ 的一个线性组合 (*linear combination*)。 c_0, c_1, \dots, c_n 就是此线性组合的系数。

若不存在一组不全为 0 的 D 中元 d_0, d_1, \dots, d_n 使

$$d_0 p_0(x) + d_1 p_1(x) + \dots + d_n p_n(x) = 0,$$

则说 $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ 是线性无关的 (*linearly independent*)。换句话说, “ $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ 是线性无关的” 意味着: 若 D 中元 r_0, r_1, \dots, r_n 使

$$r_0 p_0(x) + r_1 p_1(x) + \dots + r_n p_n(x) = 0,$$

则 $r_0 = r_1 = \dots = r_n = 0$ 。

例 显然, $1, x, \dots, x^n$ 是线性无关的。当然, 前面的例告诉我们, $1, x - c, (x - c)^2$ 也是线性无关的。

例 单独一个非零多项式是线性无关的。

评注 设 $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ 是线性无关的。

(i) 显然, 因为多项式的加法可交换, 随意打乱这 $n + 1$ 个多项式的次序后得到的多项式仍线性无关。

(ii) 对任意 ℓ ($0 \leq \ell \leq n$), $p_0(x), p_1(x), \dots, p_\ell$ 这 $\ell + 1$ 个多项式也是线性无关的。设 $c_0, c_1, \dots, c_\ell \in D$, 且

$$c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \dots + c_\ell p_\ell(x) = 0.$$

这个相当于

$$c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \cdots + c_\ell p_\ell(x) + 0 p_{\ell+1}(x) + \cdots + 0 p_n(x) = 0.$$

所以

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_\ell = \underbrace{0 = \cdots = 0}_{(n-\ell) \text{ 0's}} = 0.$$

(iii) 根据 (i) (ii) 可知, 线性无关的多项式的片段也是线性无关的。

评注 设 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 是线性无关的。设 $a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n$ 都是 D 的元。那么

$$a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + \cdots + a_n p_n(x) = b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + \cdots + b_n p_n(x)$$

相当于

$$(a_0 - b_0)p_0(x) + (a_1 - b_1)p_1(x) + \cdots + (a_n - b_n)p_n(x) = 0,$$

也就是

$$a_0 - b_0 = a_1 - b_1 = \cdots = a_n - b_n = 0,$$

亦即

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \cdots, \quad a_n = b_n.$$

由此可见, 线性无关的多项式有着优良的性质: 二个线性组合相等的一个必要与充分条件是对应的系数相等。

我们知道, $1, x, \cdots, x^n$ 是线性无关的。在这串多项式里, 后一个的次比前一个的次多 1。不仅如此, 由多项式的定义可见, 每一个次不高于 n 的多项式都可以写为它们的线性组合。下面的命题就是这二事实的推广。

命题 设 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x) \in D[x]$ 分别是 $0, 1, \cdots, n$ 次多项式。则:

(i) $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 是线性无关的;

(ii) 若 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 的首项系数都是 D 的单位, 则任意次不高于 n 的多项式都可写为 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 的线性组合。由 (i) 知, 这个组合的系数一定是唯一的。

证 (i) 用数学归纳法。当 $n = 0$ 时, 只有一个 0 次多项式 $p_0(x) = c \neq 0$ 那么, 由 $dc = 0$ 可推出 $d = 0$ 。这样, 命题对 $n = 0$ 成立。假定命题对 $n = \ell \geq 0$ 成立。设 $c_0, c_1, \cdots, c_{\ell+1} \in D$ 使

$$c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \cdots + c_\ell p_\ell(x) + c_{\ell+1} p_{\ell+1}(x) = 0.$$

记

$$r(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \cdots + c_\ell p_\ell(x),$$

则 $r(x)$ 的次不高于 ℓ 。所以

$$c_{\ell+1} p_{\ell+1}(x) + r(x) = 0, \quad \deg r(x) \leq \ell < \deg p_{\ell+1}(x).$$

由上节命题知

$$c_{\ell+1} = 0, \quad r(x) = 0.$$

根据归纳假设,

$$r(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \cdots + c_\ell p_\ell(x) = 0 \implies c_0 = c_1 = \cdots = c_\ell = 0.$$

这样,

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_\ell = c_{\ell+1} = 0.$$

也就是说, $n = \ell + 1$ 时, 命题成立。

(ii) 用数学归纳法。当 $n = 0$ 时, 只有一个 0 次多项式 $p_0(x) = c \neq 0$, 且 c 是单位。任取次不高于 0 的多项式 d 。因为 $d = (dc^{-1})c$, 这样, 命题对 $n = 0$ 成立。这样, 命题对 $n = 0$ 成立。假定命题对 $n = \ell \geq 0$ 成立。任取次不高于 $\ell + 1$ 的多项式 $f(x)$ 。由于 $p_{\ell+1}(x)$ 的首项系数是单位, 所以, 由带余除法知道, 存在多项式 $q(x), r(x) \in D[x]$ 使

$$f(x) = q(x)p_{\ell+1}(x) + r(x), \quad \deg r(x) \leq \ell.$$

如果 $f(x)$ 的次不高于 ℓ , 则 $q(x) = 0$; 如果 $f(x)$ 的次是 $\ell + 1$, 则

$$\deg q(x) = \deg f(x) - \deg p_{\ell+1}(x) = 0.$$

也就是说, 存在 $c_{\ell+1} \in D$ 使 $q(x) = c_{\ell+1}$ 。所以

$$f(x) = r(x) + c_{\ell+1} p_{\ell+1}(x), \quad \deg r(x) \leq \ell.$$

根据归纳假设, 存在 $c_0, c_1, \dots, c_\ell \in D$ 使

$$r(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \cdots + c_\ell p_\ell(x),$$

即

$$f(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \cdots + c_\ell p_\ell(x) + c_{\ell+1} p_{\ell+1}(x).$$

所以, $n = \ell + 1$ 时, 命题成立。

评注 这里, (ii) 要求每个多项式的首项系数为单位是有必要的。考虑 \mathbb{Z} 与 $\mathbb{Z}[x]$ 。取 $n = 2$, 及

$$p_0(x) = -1, \quad p_1(x) = 2x, \quad p_2(x) = 3x^2.$$

根据上面的命题, 这三个多项式是线性无关的。考虑 $f(x) = 3 + x - 2x^2$ 。设 $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ 使

$$3 + x - 2x^2 = c_0 \cdot (-1) + c_1 \cdot 2x + c_2 \cdot 3x^2.$$

这相当于

$$3 = -c_0, \quad 1 = 2c_1, \quad -2 = 3c_2.$$

容易看出, 这个方程组无整数解, 所以 $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ 的 (系数为 \mathbb{Z} 的) 线性组合不能表示每一个次不高于 2 的多项式。

评注 不难看出, $1, x^2, x^3$ 线性无关。可是, 它们不能表示每一个次不高于 3 的多项式, 因为其线性组合

$$c_0 + c_1x^2 + c_2x^3, \quad c_0, c_1, c_2 \in D$$

的 1 次系数总是 0。所以, 最简单的 1 次式 x 无法用 $1, x^2, x^3$ 的线性组合表出。

设 $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ 线性无关。设这些多项式的次的最大值为 d :

$$d = \max\{\deg p_0(x), \deg p_1(x), \dots, \deg p_n(x)\}.$$

在什么条件下, 其线性组合能表示每一个次不高于 d 的多项式? 上面的命题给出了部分的解答。为什么说它是“部分的解答”呢? 考虑 $\mathbb{Z}[x]$ 的二个 1 次多项式

$$p_0(x) = 3 - 7x, \quad p_1(x) = -2 + 5x.$$

读者可验证, 这二个多项式线性无关。由于

$$1 = 5p_0(x) + 7p_1(x), \quad x = 2p_0(x) + 3p_1(x),$$

故每一个次不高于 1 的多项式都可写为 $p_0(x)$ 与 $p_1(x)$ 的线性组合。

这个问题的详细讨论将超出本文的范围。读者也许可在线性代数中找到破解此问题的方法。

本节开头的问题总算得到了解答。不仅如此, 我们得到了更深的结论:

命题 设 $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ 都是 D 的元。设 $c \in D$ 。再设

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots + a_n(x-c)^n, \\ g(x) &= b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \dots + b_n(x-c)^n. \end{aligned}$$

则 $f(x) = g(x)$ 的一个必要与充分条件是

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots, \quad a_n = b_n.$$

并且, 任取

$$f(x) = u_0 + u_1x + u_2x^2 + \dots + u_nx^n \in D[x],$$

必存在 $v_0, v_1, \dots, v_n \in D$ 使

$$f(x) = v_0 + v_1(x-c) + v_2(x-c)^2 + \dots + v_n(x-c)^n.$$

Derivatives

本节讨论多项式的导数。

在本节, 我们会将一些容易证明的命题留给读者练习。读者可乘此机会让自己熟悉证明命题的过程与数学归纳法。

定义 设

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \in D[x].$$

$f(x)$ 的导数 (derivative) 是多项式

$$f'(x) = 0 + 1a_1 + 2a_2x + \dots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1} \in D[x].$$

$f'(x)$ 也可写为 $(f(x))'$ 。

评注 整环 D 里不一定有名为 $\pm 2, \pm 3, \dots$ 的元。回忆一下, 若 $a \in D$, $n \in \mathbb{N}$, 则

$$na = n \cdot a = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ a's}}.$$

若 $-n \in \mathbb{N}$, 则

$$na = -((-n)a).$$

当然, 在 \mathbb{Z} (或 \mathbb{F}) 里, na 可以认为是 \mathbb{Z} (或 \mathbb{F}) 的二个元 n 与 a 的积。

例 取 $f(x) = x^6 - x^3 + 1 \in D[x]$ 。若 $D = \mathbb{F}$, 则

$$f'(x) = 6x^5 - 3x^2 + 0 = 6x^5 - 3x^2。$$

若 D 是 4 元集 V , 则

$$f'(x) = (6 \cdot 1)x^5 + (3 \cdot (-1))x^2 + 0 = x^2。$$

这里, $V = \{0, 1, \tau, \tau^2\}$ 。它的加法与乘法如下:

+	0	1	τ	τ^2	\cdot	0	1	τ	τ^2
0	0	1	τ	τ^2	0	0	0	0	0
1	1	0	τ^2	τ	1	0	1	τ	τ^2
τ	τ	τ^2	0	1	τ	0	τ	τ^2	1
τ^2	τ^2	τ	1	0	τ^2	0	τ^2	1	τ

在前面 (Prerequisites 节的 Domains 小节), 我们知道, V 是整环。任取 $a \in V$, 都有

$$2 \cdot a = a + a = 0。$$

所以 $a = -a$ 。这样,

$$6 \cdot 1 = 2 \cdot (3 \cdot 1) = (3 \cdot 1) + (3 \cdot 1) = 0,$$

$$3 \cdot (-1) = (-1) + (-1) + (-1) = 1 + 1 + 1 = 0 + 1 = 1。$$

所以, 当我们把 $f(x)$ 视为 $V[x]$ 中元时, 它的导数 “有点奇怪”。同样的道理, 在 V 与 $V[x]$ 中,

$$(x^{2k})' = (2k \cdot 1)x^{2k-1} = 0x^{2k-1} = 0。$$

评注 导数就是 $D[x]$ 到 $D[x]$ 的函数 (也就是 $D[x]$ 的变换):

$$': D[x] \rightarrow D[x],$$

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mapsto a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}。$$

定义 设

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m,$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

为 $D[x]$ 中的二个元。我们称

$$(g \circ f)(x) = b_0 + b_1f(x) + \cdots + b_n(f(x))^n$$

为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合 (composition)。

评注 可以看到, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合仍为多项式。设

$$h(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_sx^s \in D[x]。$$

记

$$\begin{aligned}\ell(x) &= (h \circ g)(x) \\ &= d_0 + d_1(b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n) + \cdots \\ &\quad + d_s(b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n)^s,\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}((h \circ g) \circ f)(x) &= (\ell \circ f)(x) \\ &= d_0 + d_1(b_0 + b_1f(x) + \cdots + b_n(f(x))^n) + \cdots \\ &\quad + d_s(b_0 + b_1f(x) + \cdots + b_n(f(x))^n)^s \\ &= d_0 + d_1(g \circ f)(x) + \cdots + d_s((g \circ f)(x))^s \\ &= (h \circ (g \circ f))(x)。$$

换句话说, 多项式的复合适合结合律。

例 取

$$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n, \quad f(x) = x - c \in D[x]。$$

那么

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= b_0 + b_1(x - c) + \cdots + b_n(x - c)^n, \\ (f \circ g)(x) &= -c + b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n。$$

例 考虑 \mathbb{Z} 与 $\mathbb{Z}[x]$ 。取

$$f(x) = x^3 + 2, \quad g(x) = x^2 + x - 1。$$

不难得到

$$f'(x) = 3x^2, \quad g'(x) = 2x + 1。$$

(i) $4g(x)$ 也是多项式, 当然可以有导数。因为

$$4g(x) = 4x^2 + 4x - 4,$$

故

$$(4g(x))' = 8x + 4,$$

这刚好是 $4g'(x)$:

$$4g' = 4(2x + 1) = 8x + 4.$$

(ii) $f(x) + g(x)$ 也是多项式。因为

$$f(x) + g(x) = x^3 + 2 + x^2 + x - 1 = x^3 + x^2 + x + 1,$$

故

$$(f(x) + g(x))' = 3x^2 + 2x + 1,$$

而这刚好是 $f'(x) + g'(x)$:

$$f'(x) + g'(x) = 3x^2 + 2x + 1.$$

一般地, 我们有

命题 设 $f(x), g(x) \in D[x]$, $c \in D$ 。则

(i) $(cf(x))' = cf'(x)$;

(ii) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ 。

由 (i) (ii) 与数学归纳法可知: 当 $c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in D$, 且 $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{k-1}(x) \in D[x]$ 时,

$$\begin{aligned} & (c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) + \dots + c_{k-1} f_{k-1}(x))' \\ &= c_0 f_0'(x) + c_1 f_1'(x) + \dots + c_{k-1} f_{k-1}'(x). \end{aligned}$$

证 我们证明 (i) (ii), 将剩下的推论留给读者作练习。设

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n, \\ g(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{n-1} x^{n-1} + b_n x^n \end{aligned}$$

是 $D[x]$ 中二个元。

(i) $cf(x)$ 就是多项式

$$ca_0 + ca_1 x + ca_2 x^2 + \dots + ca_{n-1} x^{n-1} + ca_n x^n,$$

故

$$\begin{aligned} (cf(x))' &= (ca_0 + ca_1 x + ca_2 x^2 + \dots + ca_{n-1} x^{n-1} + ca_n x^n)' \\ &= ca_1 + 2ca_2 x + \dots + (n-1)ca_{n-1} x^{n-2} + nca_n x^{n-1} \\ &= ca_1 + c2a_2 x + \dots + c(n-1)a_{n-1} x^{n-2} + cna_n x^{n-1} \\ &= c(a_1 + 2a_2 x + \dots + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + na_n x^{n-1}) \end{aligned}$$

$$= cf'(x)。$$

(ii) $f(x) \pm g(x)$ 就是多项式

$$(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + (a_2 \pm b_2)x^2 + \cdots \\ + (a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-1} + (a_n \pm b_n)x^n,$$

故

$$\begin{aligned} & (f(x) \pm g(x))' \\ &= ((a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + (a_2 \pm b_2)x^2 + \cdots \\ &\quad + (a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-1} + (a_n \pm b_n)x^n)' \\ &= (a_1 \pm b_1) + 2(a_2 \pm b_2)x + \cdots + (n-1)(a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-2} \\ &\quad + n(a_n \pm b_n)x^{n-1} \\ &= (a_1 \pm b_1) + (2a_2x \pm 2b_2x) + \cdots + ((n-1)a_{n-1}x^{n-2} \\ &\quad \pm (n-1)b_{n-1}x^{n-2}) + (na_nx^{n-1} \pm nb_nx^{n-1}) \\ &= (a_1 + 2a_2x + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}) \\ &\quad \pm (b_1 + 2b_2x + \cdots + (n-1)b_{n-1}x^{n-2} + nb_nx^{n-1}) \\ &= f'(x) \pm g'(x)。 \end{aligned}$$

☞

命题 设 $f(x), g(x) \in D[x]$ 。则

$$(\star) \quad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)。$$

由 (\star) 与数学归纳法可知: 当 $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_{k-1}(x) \in D[x]$ 时,

$$\begin{aligned} & (f_0(x)f_1(x) \cdots f_{k-1}(x))' \\ &= f_0'(x)f_1(x) \cdots f_{k-1}(x) + f_0(x)f_1'(x) \cdots f_{k-1}(x) + \cdots \\ &\quad + f_0(x)f_1(x) \cdots f_{k-1}'(x)。 \end{aligned}$$

取 $f_0(x) = f_1(x) = \cdots = f_{k-1}(x) = f(x)$ 知

$$(f(x))^k = k(f(x))^{k-1}f'(x)。$$

证 我们证明 (\star) , 将剩下的二个式留给读者作练习。首先, 任取 $i, j \in \mathbb{N}, p, q \in D$, 有

$$px^i \cdot qx^j = pqx^{i+j}。$$

这样,

$$(px^i \cdot qx^j)' = (pqx^{i+j})'$$

$$\begin{aligned}
&= (i+j)pqx^{i+j-1} \\
&= ipqx^{(i-1)+j} + jppqx^{i+(j-1)} \\
&= ipqx^{i-1}x^j + jppqx^ix^{j-1} \\
&= (ipx^{i-1})(qx^j) + (px^i)(jqx^{j-1}) \\
&= (px^i)'(qx^j) + (px^i)(qx^j)'。
\end{aligned}$$

设

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m, \\
g(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n
\end{aligned}$$

为 $D[x]$ 中的二个元。取 px^i 为 $a_0, a_1x, \cdots, a_mx^m$, 有

$$\begin{aligned}
(a_0 \cdot qx^j)' &= (a_0)'(qx^j) + (a_0)(qx^j)', \\
(a_1x \cdot qx^j)' &= (a_1x)'(qx^j) + (a_1x)(qx^j)', \\
&\dots\dots\dots, \\
(a_mx^m \cdot qx^j)' &= (a_mx^m)'(qx^j) + (a_mx^m)(qx^j)'。
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&(f(x) \cdot qx^j)' \\
&= (a_0 \cdot qx^j + a_1x \cdot qx^j + \cdots + a_mx^m \cdot qx^j)' \\
&= (a_0 \cdot qx^j)' + (a_1x \cdot qx^j)' + \cdots + (a_mx^m \cdot qx^j)' \\
&= ((a_0)'(qx^j) + (a_0)(qx^j)') + ((a_1x)'(qx^j) + (a_1x)(qx^j)') \\
&\quad + \cdots + ((a_mx^m)'(qx^j) + (a_mx^m)(qx^j)') \\
&= ((a_0)'(qx^j) + (a_1x)'(qx^j) + \cdots + (a_mx^m)'(qx^j)) \\
&\quad + ((a_0)(qx^j)' + (a_1x)(qx^j)' + \cdots + (a_mx^m)(qx^j)') \\
&= ((a_0)' + (a_1x)' + \cdots + (a_mx^m)')(qx^j) \\
&\quad + (a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m)(qx^j)' \\
&= (a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m)'(qx^j) + f(x)(qx^j)' \\
&= f'(x)(qx^j) + f(x)(qx^j)'。
\end{aligned}$$

再取 qx^j 为 $b_0, b_1x, \cdots, b_nx^n$, 有

$$\begin{aligned}
(f(x) \cdot b_0)' &= f'(x)(b_0) + f(x)(b_0)', \\
(f(x) \cdot b_1x)' &= f'(x)(b_1x) + f(x)(b_1x)',
\end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots, \\ (f(x) \cdot b_n x^n)' = f'(x)(b_n x^n) + f(x)(b_n x^n)'.$$

所以

$$\begin{aligned} & (f(x)g(x))' \\ &= (f(x) \cdot b_0 + f(x) \cdot b_1 x + \dots + f(x) \cdot b_n x^n)' \\ &= (f(x) \cdot b_0)' + (f(x) \cdot b_1 x)' + \dots + (f(x) \cdot b_n x^n)' \\ &= (f'(x)(b_0) + f(x)(b_0)') + (f'(x)(b_1 x) + f(x)(b_1 x)') \\ &\quad + \dots + (f'(x)(b_n x^n) + f(x)(b_n x^n)') \\ &= (f'(x)(b_0) + (f'(x)(b_1 x) + \dots + f'(x)(b_n x^n)) \\ &\quad + (f(x)(b_0)' + f(x)(b_1 x)' + \dots + f(x)(b_n x^n)')) \\ &= f'(x)(b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n) \\ &\quad + f(x)((b_0)' + (b_1 x)' + \dots + (b_n x^n)') \\ &= f'(x)g(x) + f(x)(b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n)' \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

☞

例 考虑 \mathbb{Z} 与 $\mathbb{Z}[x]$ 。取

$$f(x) = x^3 + 2, \quad g(x) = x^2 + x - 1.$$

不难得到

$$f'(x) = 3x^2, \quad g'(x) = 2x + 1.$$

$f(x)$ 与 $g(x)$ 的积

$$f(x)g(x) = x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 + 2x - 2$$

的导数是

$$(f(x)g(x))' = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 4x + 2.$$

如果用上面的 (★) 计算, 就是

$$\begin{aligned} & f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= 3x^2(x^2 + x - 1) + (x^3 + 2)(2x + 1) \\ &= 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x^4 + x^3 + 4x + 2 \\ &= 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 4x + 2. \end{aligned}$$

也许这不太能体现 (★) 的作用: 算二个多项式积的导数时, 先拆再算好像没什么不方便的。的确如此。可是 (★) 的推论

$$((f(x))^k)' = k(f(x))^{k-1}f'(x)$$

很有用。看下面的例。

例 还是考虑 \mathbb{Z} 与 $\mathbb{Z}[x]$ 。计算

$$\begin{aligned} p(x) &= (g \circ f)(x) = (x^3 + 2)^2 + (x^3 + 2) - 1, \\ q(x) &= (f \circ g)(x) = (x^2 + x - 1)^3 + 2 \end{aligned}$$

的导数。

用定义写出 $p(x)$ 的导数并不是很难。因为

$$p(x) = (x^6 + 4x^3 + 4) + x^3 + 2 - 1 = x^6 + 5x^3 + 5,$$

故

$$p'(x) = 6x^5 + 15x^2。$$

不过用定义写出 $q(x)$ 就有点麻烦了: 三项的立方不是那么好算。但是, 我们利用这个推论, 可直接写出

$$q'(x) = 3(x^2 + x - 1)^2(2x + 1)。$$

记 $g(x) = x^k$ 。取 $f(x) \in D[x]$ 。不难看出,

$$(f(x))^k = (g \circ f)(x)。$$

所以

$$(g \circ f)'(x) = ((f(x))^k)' = k(f(x))^{k-1}f'(x) = (g' \circ f)(x)f'(x)。$$

这告诉我们什么呢? 如果我们把 $f(x)$ 看成文字 y , 那么 $y^k \in D[y]$ 的导数是 ky^{k-1} 。将此结果乘 $y = f(x) \in D[x]$ 的导数 $f'(x)$, 就是 $(g \circ f)(x) \in D[x]$ 的导数。

取 $h(x) = x \in D[x]$ 。那么 $(f \circ h)(x)$ 就是 $f(x)$ 。因为 $(x)' = 1$, 所以

$$(f \circ h)'(x) = f'(x) = (f' \circ h)(x)h'(x)。$$

我们作出猜想: 任取 $f(x), g(x) \in D[x]$, 必有

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x)f'(x)。$$

幸运的事儿是, 这个猜想是正确的。

命题 设 $f(x), g(x) \in D[x]$ 。则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合的导数适合链规则 (the chain rule):

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x)f'(x)。$$

证 设

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n \in D[x],$$

则

$$(g \circ f)(x) = b_0 + b_1f(x) + b_2(f(x))^2 + \cdots + b_{n-1}(f(x))^{n-1} + b_n(f(x))^n。$$

所以

$$\begin{aligned} & (g \circ f)'(x) \\ &= b_1f'(x) + b_2((f(x))^2)' + \cdots + b_{n-1}((f(x))^{n-1})' + b_n((f(x))^n)' \\ &= b_1f'(x) + b_2 \cdot 2f(x)f'(x) + \cdots + b_{n-1} \cdot (n-1)(f(x))^{n-2}f'(x) \\ &\quad + b_n \cdot n(f(x))^{n-1}f'(x) \\ &= b_1f'(x) + 2b_2f(x)f'(x) + \cdots + (n-1)b_{n-1}(f(x))^{n-2}f'(x) \\ &\quad + nb_n(f(x))^{n-1}f'(x) \\ &= (b_1 + 2b_2f(x) + \cdots + (n-1)b_{n-1}(f(x))^{n-2} + nb_n(f(x))^{n-1})f'(x) \\ &= (g' \circ f)(x)f'(x)。 \end{aligned} \quad \text{☺}$$

例 我们用链规则计算 $p(x)$ 的导数:

$$p'(x) = (g' \circ f)(x)f'(x) = (2(x^3 + 2) + 1)(3x^2) = 3x^2(2x^3 + 5)。$$

这跟前面算出的 $6x^5 + 15x^2$ 是一致的。

Roots of Polynomials

我们回顾一下熟悉的多项式函数。

定义 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in D$ 。称

$$\begin{aligned} f: & D \rightarrow D, \\ & t \mapsto a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n \end{aligned}$$

为 D 的多项式函数 (polynomial function)。我们也说, 这个 f 是由 D 上 x 的多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

诱导的多项式函数 (*the polynomial function induced by f*)。不难看出, 若二个多项式相等, 则其诱导的多项式函数也相等。

定义 设 f 与 g 是 D 的二个多项式函数。二者的和 $f + g$ 定义为

$$\begin{aligned} f + g: & \quad D \rightarrow D, \\ & \quad t \mapsto f(t) + g(t). \end{aligned}$$

二者的积 fg 定义为

$$\begin{aligned} fg: & \quad D \rightarrow D, \\ & \quad t \mapsto f(t)g(t). \end{aligned}$$

设 f, g 是 D 的二个多项式函数:

$$\begin{aligned} f: & \quad D \rightarrow D, \\ & \quad t \mapsto a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n, \\ g: & \quad D \rightarrow D, \\ & \quad t \mapsto b_0 + b_1t + \cdots + b_nt^n. \end{aligned}$$

利用 D 的运算律, 可以得到

$$\begin{aligned} f + g: & \quad D \rightarrow D, \\ & \quad t \mapsto (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n, \\ fg: & \quad D \rightarrow D, \\ & \quad t \mapsto c_0 + c_1t + \cdots + c_{2n}t^{2n}, \end{aligned}$$

其中

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0.$$

由此可得下面的命题:

命题 设 $f(x), g(x) \in D[x]$, f, g 分别是 $f(x), g(x)$ 诱导的多项式函数。那么 $f + g$ 是 $f(x) + g(x)$ 诱导的多项式函数, 且 fg 是 $f(x)g(x)$ 诱导的多项式函数。

通俗地说, 若多项式 $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$ 之间有一个由加法与乘法计算得到的关系, 那么将 x 换为 D 的元 t , 这样的关系仍成立。

例 考虑 \mathbb{F} 与 $\mathbb{F}[x]$ 。前面, 利用带余除法, 得到关系

$$8x^6 + 1 = (4x^3 + 12x - 8) \cdot 2(x - 1)^2(x + 2) + (72x^2 - 96x + 33).$$

这里 x 只是一个文字, 不是数! 但是, 上面的命题告诉我们, 可以把 x 看成一个数。比如, 由上面的式可以立即看出, $8t^6 + 1$ 与 $72t^2 - 96t + 33$ 在 $t = 1$ 或 $t = -2$ 时值是一样的。

可是, 对于这样的式, 我们不能将 x 改写为 \mathbb{F} 的元 t :

$$\deg 3x^2 < \deg 2x^3。$$

可以看到, 若 $t = 0$, 则 $3t^2 = 2t^3 = 0$, 而 0 的次是 $-\infty$; 若 $t \neq 0$, 则 $3t^2$ 与 $2t^3$ 都是非零数, 次都是 0 。

评注 我们已经知道, 多项式确定多项式函数。自然地, 有这样的问題: 多项式函数能否确定多项式? 一般情况下, 这个问题的答案是 no。

考虑 4 元集 V 。作 V 上 x 的二个多项式:

$$f(x) = x^4 - x, \quad g(x) = 0。$$

显然, 这是二个不相等的多项式。但是, 任取 $t \in V$, 都有

$$t^4 - t = 0。$$

因此, $f(x)$ 与 $g(x)$ 诱导的多项式函数是同一函数!

不过, 在某些场合下, 多项式函数可以确定多项式。之后我们还会提到这一点。

评注 设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in D[x]$ 。设 t 是 D 的元。以后, 我们直接写

$$f(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n。$$

至少, 一方通行 (*one-way traffic*) 是没问题的。

顺便一提, $f(x)$ 的导数也是多项式:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}。$$

我们把

$$a_1 + 2a_2t + \cdots + na_nt^{n-1} \in D$$

简单地写为 $f'(t)$ 。

了解了多项式与多项式函数的关系后, 下面的这个命题就不会太凸兀了。

命题 设 $f(x) \in D[x]$ 是 n 次多项式 ($n \geq 1$), $a \in D$ 。则存在 $n-1$ 次多项式 $q(x) (\in D[x])$ 使

$$f(x) = q(x)(x-a) + f(a)。$$

根据带余除法, 这样的 $q(x)$ 一定是唯一的。

证 因为 $x-a$ 的首项系数 1 是单位, 故存在 $D[x]$ 的二元 $q(x), r(x)$ 使

$$f(x) = q(x)(x-a) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg(x-a) = 1。$$

所以, $r(x) = c, c \in D$ 。用 D 的元 a 替换 x , 有

$$f(a) = q(a)(a-a) + c = c。$$

所以

$$f(x) = q(x)(x-a) + f(a)。$$

再看这个 $q(x)$ 的次。因为 $f(x)$ 的次不低于 $x-a$ 的次, 故

$$\deg q(x) = \deg f(x) - \deg(x-a) = n-1。 \quad \text{☞}$$

评注 如果用 D 的元 b 替换 x , 则

$$f(b) = (b-a)q(b) + f(a),$$

也就是说, 存在 $r \in D$ 使

$$f(b) - f(a) = (b-a)r。$$

所以, 若 $f(x) \in D[x]$ 是 n 次多项式 ($n \geq 1$), $a, b \in D$, 则存在 $r \in D$ 使 $f(b) - f(a) = (b-a)r$ 。当 $f(x)$ 的次低于 1 时, 这个命题也对 (取 $r=0$)。

举个简单的例。我们说, 不存在系数为整数的多项式 $f(x)$ 使 $f(1) = f(-1) + 1$ 。假如说这样的 f 存在, 那么应存在整数 r 使

$$1 = f(1) - f(-1) = (1 - (-1))r = 2r,$$

而 1 不是偶数, 矛盾。

现在, 我们讨论多项式的根的基本性质。

定义 设 $f(x)$ 是 D 上 x 的多项式。若有 $a \in D$ 使 $f(a) = 0$, 则说 a 是 (多项式) $f(x)$ 的根 (root)。

例 设 $D \subset \mathbb{C}$, 且 $\mathbb{Z} \subset D$ 。看 D 上 x 的多项式

$$f(x) = (2x-1)(x+1)(x^2-3)(x^2+1)(x^2+4)。$$

如果 $D = \mathbb{Z}$, 则 $f(x)$ 有一个在 D 里的根: -1 。如果 $D = \mathbb{Q}$, 则 $f(x)$ 有二个在 D 里的根: $-1, \frac{1}{2}$ 。如果 $D = \mathbb{R}$, 则 $f(x)$ 有四个在 D 里的根: $-1, \frac{1}{2}, \pm\sqrt{3}$ 。如果 $D = \mathbb{C}$, 则 $f(x)$ 有八个在 D 里的根: $-1, \frac{1}{2}, \pm\sqrt{3}, \pm i, \pm 2i$ 。

例 再来一个例。看 D 上 x 的多项式

$$f(x) = x^2 + x - 1。$$

若 $D = \mathbb{R}$, 则 $f(x)$ 的二个根是 $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 。若 $D = V$, 则 $f(x)$ 的二个根是 τ, τ^2 。当然, 若 $D \subset \mathbb{Q}$, 则 $f(x)$ 无 (D 的) 根。

评注 设 $a, b \in D$, 且 $a \neq 0$ 。

若 $f(x) = a$, 则 $f(x)$ 无根。换句话说, 零次多项式至多有零个根。

再设 $f(x) = ax + b$ 是一次多项式。若存在 $c \in D$ 使 $b = ac$, 则 $f(x)$ 有一个根 $-c$ 。并且, $f(x)$ 也不会有另一个根 (若 $at_1 + b = at_2 + b$, 则 $at_1 = at_2$, 故 $t_1 = t_2$)。若这样的 c 不存在, 则 $f(x)$ 无根 (反设 $f(x)$ 有根 d , 则由 $ad + b = 0$ 知 $b = a(-d)$, 矛盾)。换句话说, 一次多项式至多有一个根。

结合上面的二个例, 我们猜想: n 次多项式 ($n \in \mathbb{N}$) 至多有 n 个 (不同的) 根。幸运的事儿是, 这个猜想是正确的。

命题 设 $f(x) \in D[x]$ 是 n 次多项式 ($n \geq 1$)。 a 是 $f(x)$ 的根的一个必要与充分条件是: 存在 $n-1$ 次多项式 $q(x) (\in D[x])$ 使

$$f(x) = q(x)(x - a)。$$

根据带余除法, 这样的 $q(x)$ 一定是唯一的。

证 先看充分性。若这样的 $q(x)$ 存在, 则

$$f(a) = q(a)(a - a) = 0。$$

再看必要性。设 $f(a) = 0$ 。根据上面的命题, 存在 $n-1$ 次多项式 $q(x) \in D[x]$ 使

$$f(x) = q(a)(x - a) + f(a) = q(a)(x - a)。 \quad \text{☞}$$

命题 设 $f(x) \in D[x]$ 是 n 次多项式 ($n \in \mathbb{N}$)。则 $f(x)$ 至多有 n 个不同的根。

证 $n = 0$ 或 $n = 1$ 时, 我们已经知道这是对的。用数学归纳法。假设 ℓ 次多项式至多有 ℓ 个不同的根。看 $\ell + 1$ 次多项式 $f(x)$ 。如果它没有根, 当然至多有 $\ell + 1$ 个不同的根。如果它有一个根 a , 则存在 ℓ 次多项式 $q(x)$ 使

$$f(x) = q(x)(x - a)。$$

根据归纳假设, $q(x)$ 至多有 ℓ 个不同的根。而且, 若 $b \neq a$, 且 b 不是 $q(x)$ 的根, 利用消去律可知 $f(b) \neq 0$ 。这样, $f(x)$ 至多有 $\ell + 1$ 个不同的根。 ☞

由此可推出一个很有用的事实:

命题 设 a_0, a_1, \dots, a_n 是 D 的元。设 n 是非负整数。设

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n。$$

若 t_0, t_1, \dots, t_n 是 $n + 1$ 个互不相同的 D 的元, 且

$$f(t_0) = f(t_1) = \dots = f(t_n) = 0,$$

则 $f(x)$ 必为零多项式。通俗地说, 次不高于 n (且系数为整环的元) 的多项式不可能有 n 个以上的互不相同的根, 除非这个多项式是零。

证 反证法。设 $f(x)$ 不是零多项式。设 $f(x)$ 的次为 m , 则 $0 \leq m \leq n$ 。根据上个命题, $f(x)$ 至多有 m 个不同的根, 这与题设矛盾! 故 $f(x) = 0$ 。 ☞

评注 再看前面提到的 4 元集 V 。可以看出, 因为 V 的元“不够多”, 所以出现了取零值的非零多项式。

此事实的一个推论是:

命题 设 $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ 是 D 的元。设 n 是非负整数。设

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n。$$

若 t_0, t_1, \dots, t_n 是 $n + 1$ 个互不相同的 D 的元, 且

$$f(t_0) = g(t_0), \quad f(t_1) = g(t_1), \quad \dots, \quad f(t_n) = g(t_n),$$

则 $f(x)$ 必等于 $g(x)$ 。通俗地说, 若次不高于 n (且系数为整环的元) 的二个多项式若在多于 n 处取一样的值, 则这二个多项式相等。

证 考虑 $h(x) = f(x) - g(x)$ 。则 $\deg h(x) \leq n$ 。 $h(x)$ 有 $n + 1$ 个不同的根。根据上个命题, $h(x)$ 是零多项式。这样, $f(x) = g(x)$ 。 ☞

在中学, 我们学过解一元二次方程 $at^2 + bt + c = 0$ (a, b, c 为实数, 且 $a \neq 0$) 的一种方法: 直接套用公式

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

其中

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

是判别式: 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有二个不等的实数解; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有二个相等的实数解; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数解。

当 $\Delta = 0$ 时, $c = \frac{b^2}{4a}$, 则

$$at^2 + bt + c = a \left(t^2 + 2\frac{b}{2a}t + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right) = a \left(t + \frac{b}{2a} \right)^2.$$

记

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \in \mathbb{R}[x].$$

根据根的定义, $-\frac{b}{2a} \in \mathbb{R}$ 是 $f(x)$ 的根。我们发现, 这个根“出现了”2次, 是重复的。我们给这样的根一个特殊点的称呼。

定义 设 $a \in D$ 是多项式 $f(x) \in D[x]$ 的根。那么, 存在唯一的多项式 $q(x) \in D[x]$ 使

$$f(x) = (x - a)q(x).$$

若 $q(a) = 0$, 则说 a 是 $f(x)$ 的一个重根 (*multiple root*)。若 $q(a) \neq 0$, 则说 a 是 $f(x)$ 的一个单根 (*simple root*)。

例 看 Z 上 x 的多项式

$$f(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 2)(x - 1)^2(x + 2).$$

显然, $f(x)$ 的根是 1 与 -2 。因为

$$f(x) = (x + 2) \underbrace{(x^2 - 3)(x^2 + 2)(x - 1)^2}_{q_1(x)},$$

且 $q_1(x) \neq 0$, 故 -2 是 $f(x)$ 的单根。类似地, 由于

$$f(x) = (x - 1) \underbrace{(x^2 - 3)(x^2 + 2)(x - 1)(x + 2)}_{q_2(x)},$$

且 $q_2(x) = 0$, 故 1 是 $f(x)$ 的重根。

命题 设 $a \in D$ 是多项式 $f(x) \in D[x]$ 的根。则:

- (i) 若 a 是 $f(x)$ 的重根, 则 a 是 $f'(x)$ 的根;
- (ii) 若 a 是 $f(x)$ 的单根, 则 a 不是 $f'(x)$ 的根。

所以, $f(x)$ 有重根的一个必要与充分条件是: $f(x)$ 与 $f'(x)$ 有公共根。

证 因为 a 是 $f(x)$ 的根, 故存在唯一的 $q(x)$ 使

$$f(x) = (x - a)q(x)。$$

从而

$$f'(x) = (x - a)'q(x) + (x - a)q'(x) = q(x) + (x - a)q'(x)。$$

这样

$$f'(a) = q(a) + (a - a)q'(a) = q(a)。$$

- (i) 若 a 是 $f(x)$ 的重根, 则 $q(a) = 0$, 故 $f'(a) = 0$ 。
- (ii) 若 a 是 $f(x)$ 的单根, 则 $q(a) \neq 0$, 故 $f'(a) \neq 0$ 。

☞

例 我们看

$$f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x], \quad a \neq 0。$$

它的导数 $f'(x) = 2ax + b$ 恰有一个根 $t_0 = -\frac{b}{2a}$ 。由上个命题, $f(x)$ 有重根相当于 $f(t_0) = 0$, 即

$$0 = f(t_0) = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}。$$

Polynomials over \mathbb{F}

我们在前几节讨论的都是整环 D 上的多项式, 所以它们看上去是有些抽象的。从现在开始, 我们不讨论抽象的 D 与 $D[x]$, 而是讨论 \mathbb{F} 与 $\mathbb{F}[x]$, 其中 \mathbb{F} 可代指 \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} 的任意一个。细心的读者会注意到我们在前几节未使用 \sum 符号。这是为了让读者没那么困难地适应多项式理论。从本节起, 我们会较多地使用这个 \sum 。读者也可以乘此机会让自己熟悉它。当然, 我们偶尔也会使用 \prod 符号。

本节并没有什么新的知识。读者可以乘此机会温习一下所学内容。我们将重述一些定义与命题。我们在学校学数学的时候, 也会有复习课。就当本节就是“复习节”吧!

先从多项式的定义与运算开始。

定义 设 x 是不在 \mathbb{F} 里的任意一个文字。形如

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^n a_i x^i \\ &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad (n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}, a_n \neq 0) \end{aligned}$$

的表达式称为 \mathbb{F} 上 x 的一个多项式。 n 称为其次, a_i 称为其 i 次系数, $a_i x^i$ 称为其 i 次项。 $f(x)$ 的次可写为 $\deg f(x)$ 。

若二个多项式的次与各同次系数均相等, 则二者相等。

多项式的系数为 0 的项可以不写。

约定 $0 \in \mathbb{F}$ 也是多项式, 称为零多项式。零多项式的次是 $-\infty$ 。任取整数 m , 约定

$$\begin{aligned} -\infty &= -\infty, \quad -\infty < m, \\ -\infty + m &= m + (-\infty) = -\infty + (-\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

当然, 还约定, 零多项式只跟自己相等。换句话说,

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = 0$$

的一个必要与充分条件是

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

\mathbb{F} 上 x 的所有多项式作成的集是 $\mathbb{F}[x]$:

$$\mathbb{F}[x] = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \mid n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F} \right\}.$$

文字 x 只是一个符号, 它与 \mathbb{F} 的元的和与积都是形式的。我们说, x 是不定元。

定义 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i \in \mathbb{F}[x].$$

规定加法如下:

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i.$$

命题 设 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。 $\mathbb{F}[x]$ 的加法适合如下性质:

(i) $f(x) + g(x) \in \mathbb{F}[x]$;

- (ii) $(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$;
- (iii) 存在多项式 0 使 $0 + f(x) = f(x) + 0 = f(x)$;
- (iv) 存在多项式 $-f(x)$ 使 $-f(x) + f(x) = f(x) + (-f(x)) = 0$;
- (v) $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ 。

定义 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i \in \mathbb{F}[x]。$$

则

$$-g(x) = \sum_{i=0}^n (-b_i) x^i。$$

规定减法如下:

$$f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))。$$

命题 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。则

$$\deg(f(x) \pm g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}。$$

若 $\deg f(x) > \deg g(x)$, 则

$$\deg(f(x) \pm g(x)) = \deg f(x)。$$

类似地, 若 $\deg f(x) < \deg g(x)$, 则

$$\deg(f(x) \pm g(x)) = \deg g(x)。$$

定义 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{F}[x]。$$

这称为 $f(x)$ 的升次排列。下面的写法称为 $f(x)$ 的降次排列:

$$\sum_{j=0}^n a_{n-j} x^{n-j} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0。$$

(非零) 多项式的最高次非零项是首项。它的系数是此多项式的首项系数。

定义 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j \in \mathbb{F}[x]。$$

规定乘法如下:

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) x^k.$$

命题 设 $m, n \in \mathbb{N}$, $p, q \in \mathbb{F}$ 。则

$$px^i \cdot qx^j = (px^i)(qx^j) = (pq)x^{i+j}.$$

命题 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。则

$$\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x).$$

命题 设 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。 $\mathbb{F}[x]$ 的加法与乘法适合 (i) 至 (v) 及如下性质:

- (vi) $f(x)g(x) \in \mathbb{F}[x]$;
- (vii) $(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$;
- (viii) 存在多项式 1 使 $1f(x) = f(x)1 = f(x)$;
- (ix) $(-1)f(x) = -f(x)$;
- (x) $f(x)g(x) = g(x)f(x)$;
- (xi) 若 $f(x) \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= f(x)h(x) \implies g(x) = h(x), \\ g(x)f(x) &= h(x)f(x) \implies g(x) = h(x); \end{aligned}$$

(xii) 二个分配律都对:

$$\begin{aligned} f(x)(g(x) + h(x)) &= f(x)g(x) + f(x)h(x), \\ (g(x) + h(x))f(x) &= g(x)f(x) + h(x)f(x). \end{aligned}$$

评注 $\mathbb{F}[x]$ 的一个名字就是 (域) \mathbb{F} 上 (x) 的多项式环。

定义 设 $m \in \mathbb{N}$ 。多项式 $f(x)$ 的 m 次幂就是 m 个 $f(x)$ 的积:

$$(f(x))^m = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdots f(x)}_{m \text{ } f(x)\text{'s}} = \prod_{\ell=0}^{m-1} f(x).$$

设 $m, n \in \mathbb{N}$, $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 则多项式的幂适合如下规则:

$$\begin{aligned} (f(x))^m (f(x))^n &= (f(x))^{m+n}, \\ ((f(x))^m)^n &= (f(x))^{mn}, \\ (f(x)g(x))^m &= (f(x))^m (g(x))^m. \end{aligned}$$

命题 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。非零的 $c \in \mathbb{F}$ 是 0 次多项式, 那么

$$\deg cf(x) = \deg f(x)。$$

再来看多项式的带余除法。因为 \mathbb{F} 的每个非零元都是 \mathbb{F} 的单位, 所以有

命题 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是非零多项式。对任意 $g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 存在唯一的 $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg f(x)。$$

一般称其为带余除法: $q(x)$ 就是商; $r(x)$ 就是余式。并且, 当 $f(x)$ 的次不高于 $g(x)$ 的次时, $f(x), g(x), q(x)$ 间还有如下的次关系:

$$\deg g(x) = \deg(g(x) - r(x)) = \deg q(x) + \deg f(x)。$$

可以看到, 在 $\mathbb{F}[x]$ 里, 带余除法的适用范围更广了。

下面回顾多项式的相等。我们借助“线性无关”讨论相等问题。

定义 设 $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。设 $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ 。我们说

$$\sum_{i=0}^n c_i p_i(x)$$

是多项式 $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ 的一个线性组合。 c_0, c_1, \dots, c_n 就是此线性组合的系数。

若不存在一组不全为 0 的 \mathbb{F} 中元 d_0, d_1, \dots, d_n 使

$$\sum_{i=0}^n d_i p_i(x) = 0,$$

则说 $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ 是线性无关的。换句话说, “ $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ 是线性无关的”意味着: 若 \mathbb{F} 中元 r_0, r_1, \dots, r_n 使

$$\sum_{i=0}^n r_i p_i(x) = 0,$$

则 $r_0 = r_1 = \dots = r_n = 0$ 。

命题 设 $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x) \in \mathbb{F}[x]$ 分别是 0, 1, \dots , n 次多项式。则:

(i) $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ 是线性无关的;

(ii) 任意次不高于 n 的多项式都可唯一地写为 $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ 的线性组合。

由于 \mathbb{F} 的每个非零元都是单位, 上面的命题的结论变强了。下面的例体现了这一点。

例 考虑 \mathbb{F} 与 $\mathbb{F}[x]$ 。取 $n = 2$, 及

$$p_0(x) = -1, \quad p_1(x) = 2x, \quad p_2(x) = 3x^2。$$

这三个多项式是线性无关的。考虑 $f(x) = 3 + x - 2x^2$ 。设 $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{F}$ 使

$$3 + x - 2x^2 = c_0 \cdot (-1) + c_1 \cdot 2x + c_2 \cdot 3x^2。$$

这相当于

$$3 = -c_0, \quad 1 = 2c_1, \quad -2 = 3c_2。$$

由此可得

$$c_0 = -3, \quad c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = -\frac{2}{3}。$$

可以看到, 在 \mathbb{Z} 与 $\mathbb{Z}[x]$ 里 $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ 的线性组合还不能表示这个 $f(x)$, 但我们在“大环境” \mathbb{F} 与 $\mathbb{F}[x]$ 下讨论问题时就可以了。

评注 我们常常把 D 的元分为三类: 零、单位、非零且不是单位的元。但是在 \mathbb{F} , 只要分为二类即可: 零与非零。

命题 设 $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{F}$ 。设 $c \in \mathbb{F}$ 。再设

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x-c)^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^n b_i(x-c)^i。$$

则 $f(x) = g(x)$ 的一个必要与充分条件是

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots, \quad a_n = b_n。$$

并且, 任取

$$f(x) = \sum_{i=0}^n u_i x^i \in \mathbb{F}[x],$$

必存在 $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{F}$ 使

$$f(x) = \sum_{i=0}^n v_i(x-c)^i。$$

我们看看多项式的导数。

定义 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{F}[x]。$$

$f(x)$ 的导数是多项式

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1} \in \mathbb{F}[x]。$$

$f'(x)$ 也可写为 $(f(x))'$ 。

评注 若 $f(x) = c$, $c \in \mathbb{F}$, 则 $f'(x)$ 为零多项式。

定义 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$$

为 $\mathbb{F}[x]$ 中的二个元。我们称

$$(g \circ f)(x) = \sum_{j=0}^n b_j (f(x))^j$$

为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合。

命题 多项式的复合适合结合律。具体地说, 设 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{F}[x]$, 则

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)。$$

命题 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, $c \in \mathbb{F}$ 。则

$$(i) \quad (cf(x))' = cf'(x);$$

$$(ii) \quad (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)。$$

由 (i) (ii) 与数学归纳法可知: 当 $c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{F}$, 且 $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{k-1}(x) \in \mathbb{F}[x]$ 时,

$$\left(\sum_{\ell=0}^{k-1} c_\ell f_\ell(x) \right)' = \sum_{\ell=0}^{k-1} c_\ell f'_\ell(x)。$$

命题 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。则

$$(\star) \quad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)。$$

由 (\star) 与数学归纳法可知: 当 $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{k-1}(x) \in \mathbb{F}[x]$ 时,

$$(f_0(x)f_1(x)\cdots f_{k-1}(x))'$$

$$= f'_0(x)f_1(x)\cdots f_{k-1}(x) + f_0(x)f'_1(x)\cdots f_{k-1}(x) + \cdots \\ + f_0(x)f_1(x)\cdots f'_{k-1}(x)。$$

取 $f_0(x) = f_1(x) = \cdots = f_{k-1}(x) = f(x)$ 知

$$(f(x))^k = k(f(x))^{k-1}f'(x)。$$

命题 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合的导数适合链规则:

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x)f'(x)。$$

最后, 我们回顾多项式函数与多项式的根。

定义 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$ 。称

$$f: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, \\ t \mapsto \sum_{i=0}^n a_i t^i$$

为 \mathbb{F} 的多项式函数。我们也说, 这个 f 是由 \mathbb{F} 上 x 的多项式

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

诱导的多项式函数。不难看出, 若二个多项式相等, 则其诱导的多项式函数也相等。

定义 设 f 与 g 是 \mathbb{F} 的二个多项式函数。二者的和 $f + g$ 定义为

$$f + g: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, \\ t \mapsto f(t) + g(t)。$$

二者的积 fg 定义为

$$fg: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, \\ t \mapsto f(t)g(t)。$$

设 f, g 是 \mathbb{F} 的二个多项式函数:

$$f: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, \\ t \mapsto \sum_{i=0}^n a_i t^i,$$

$$g: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F},$$

$$t \mapsto \sum_{i=0}^n b_i t^i.$$

利用 \mathbb{F} 的运算律, 可以得到

$$\begin{aligned} f+g: \quad & \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, \\ & t \mapsto \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) t^i, \\ fg: \quad & \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, \\ & t \mapsto \sum_{i=0}^{2n} \left(\sum_{\ell=0}^i a_\ell b_{i-\ell} \right) t^i. \end{aligned}$$

由此可得下面的命题:

命题 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, f, g 分别是 $f(x), g(x)$ 诱导的多项式函数。那么 $f+g$ 是 $f(x)+g(x)$ 诱导的多项式函数, 且 fg 是 $f(x)g(x)$ 诱导的多项式函数。

通俗地说, 若多项式 $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$ 之间有一个由加法与乘法计算得到的关系, 那么将 x 换为 \mathbb{F} 的元 t , 这样的关系仍成立。

定义 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{F}[x].$$

设 $t \in \mathbb{F}$ 。我们把 \mathbb{F} 的元

$$\sum_{i=0}^n a_i t^i$$

简单地写为 $f(t)$ 。

顺便一提, $f(x)$ 的导数也是多项式:

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}.$$

我们把

$$\sum_{i=1}^n i a_i t^{i-1} \in \mathbb{F}$$

简单地写为 $f'(t)$ 。

下面是带余除法的推论。它在根的讨论里起了重要的作用。

命题 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是 n 次多项式 ($n \geq 1$), $a \in \mathbb{F}$ 。则存在 $n-1$ 次多项式 $q(x) (\in \mathbb{F}[x])$ 使

$$f(x) = q(x)(x - a) + f(a)。$$

根据带余除法, 这样的 $q(x)$ 一定是唯一的。

定义 设 $f(x)$ 是 \mathbb{F} 上 x 的多项式。若有 $a \in \mathbb{F}$ 使 $f(a) = 0$, 则说 a 是 (多项式) $f(x)$ 的根。

命题 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是 n 次多项式 ($n \geq 1$)。 a 是 $f(x)$ 的根的一个必要与充分条件是: 存在 $n-1$ 次多项式 $q(x) (\in \mathbb{F}[x])$ 使

$$f(x) = q(x)(x - a)。$$

根据带余除法, 这样的 $q(x)$ 一定是唯一的。

命题 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是 n 次多项式 ($n \in \mathbb{N}$)。则 $f(x)$ 至多有 n 个不同的根。

评注 在上节, 我们知道, 整环 D 上的多项式 $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) 不一定有根。可是, 在域 \mathbb{F} 里, $f(x)$ 就有根 $-\frac{b}{a}$ 。

命题 设 a_0, a_1, \dots, a_n 是 \mathbb{F} 的元。设 n 是非负整数。设

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i。$$

若 t_0, t_1, \dots, t_n 是 $n+1$ 个互不相同的 \mathbb{F} 的元, 且

$$f(t_0) = f(t_1) = \dots = f(t_n) = 0,$$

则 $f(x)$ 必为零多项式。通俗地说, 次不高于 n (且系数为 \mathbb{F} 的元) 的多项式不可能有 n 个以上的互不相同的根, 除非这个多项式是零。

命题 设 $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ 是 \mathbb{F} 的元。设 n 是非负整数。设

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i。$$

若 t_0, t_1, \dots, t_n 是 $n+1$ 个互不相同的 \mathbb{F} 的元, 且

$$f(t_0) = g(t_0), \quad f(t_1) = g(t_1), \quad \dots, \quad f(t_n) = g(t_n),$$

则 $f(x)$ 必等于 $g(x)$ 。通俗地说, 若次不高于 n (且系数为 \mathbb{F} 的元) 的二个多项式若在多于 n 处取一样的值, 则这二个多项式相等。

定义 设 $a \in \mathbb{F}$ 是多项式 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 的根。那么, 存在唯一的多项式 $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$f(x) = (x - a)q(x).$$

若 $q(a) = 0$, 则说 a 是 $f(x)$ 的一个重根。若 $q(a) \neq 0$, 则说 a 是 $f(x)$ 的一个单根。

命题 设 $a \in \mathbb{F}$ 是多项式 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 的根。则:

(i) 若 a 是 $f(x)$ 的重根, 则 a 是 $f'(x)$ 的根;

(ii) 若 a 是 $f(x)$ 的单根, 则 a 不是 $f'(x)$ 的根。

所以, $f(x)$ 有重根的一个必要与充分条件是: $f(x)$ 与 $f'(x)$ 有公共根。

下面是一些新命题。由于 \mathbb{F} 里有无数多个元, 所以

命题 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。设 $S \subset \mathbb{F}$, 且 S 有无数多个元。若任取 $t \in S$, 必有 $f(t) = 0$, 则 $f(x)$ 必为零多项式。通俗地说, 系数为 \mathbb{F} 的元的多项式不可能有无数多个根, 除非这个多项式是零。

证 $f(x)$ 的次不可能是非负整数。所以 $f(x)$ 只能是 0。 \mathfrak{S}

由此立得

命题 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。设 $S \subset \mathbb{F}$, 且 S 有无数多个元。若任取 $t \in S$, 必有 $f(t) = g(t)$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是二个相同的多项式。通俗地说, 若系数为 \mathbb{F} 的元的二个多项式在无数多个地方有相同的取值, 则这二个多项式必相等。

证 考虑 $h(x) = f(x) - g(x)$, 并利用上个命题。 \mathfrak{S}

前面已经知道, 多项式确定多项式函数。利用上面的命题, 我们有

命题 \mathbb{F} 上的多项式与 \mathbb{F} 的多项式函数是一一对应的: 不但二个不同的 \mathbb{F} 上的多项式给出二个不同的 \mathbb{F} 的多项式函数, 而且二个不同的 \mathbb{F} 的多项式函数给出二个不同的 \mathbb{F} 上的多项式。

评注 以后, 我们不再区分“多项式”与“多项式函数”。从现在开始, 读者可以认为本文接下来讨论的“多项式”跟中学里的多项式是同一事物。

Interpolation

本节讨论多项式插值问题。

“插值”听上去可能比较陌生。不过, 读者在初中一定见过这样的问题:

例 已知一次函数的图像经过点 $(-1, 2)$ 与 $(1, 3)$, 求其解析式。

例 已知二次函数的图像经过点 $(-1, -1)$, $(1, 1)$ 与 $(2, 5)$, 求其解析式。

在初中, 我们是用“待定系数法” (*the method of undetermined coefficients*) 求解的。它的基本思想是“求什么, 设什么”。设此一次函数的解析式为

$$y = ax + b, \quad a \neq 0.$$

代入已知条件, 得到二元一次方程组

$$\begin{cases} 2 = -a + b, \\ 3 = a + b. \end{cases}$$

由此可解出

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{5}{2}.$$

所以此一次函数的解析式为

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

完全类似地, 设此二次函数的解析式为

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

代入已知条件, 得到三元一次方程组

$$\begin{cases} -1 = a - b + c, \\ 1 = a + b + c, \\ 5 = 4a + 2b + c. \end{cases}$$

由此可解出

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = -1.$$

所以此二次函数的解析式为

$$y = x^2 + x - 1.$$

在初中, 一般用左 y 右 x 的等式表示函数 (的解析式)。这种表示法强调因变元 (*dependent variable*) y 与自变元 (*independent variable*) x 的关系。不过, 既然我们有 $f(x)$ 这样的记号, 那么因变元就不必写出了。并且, 我们在前节提到, 我们不再区分多项式与多项式函数。所以, 为方便, 我们用另一种方式叙述这二个问题:

例 求次为 1 的多项式 $f(x)$, 使 $f(-1) = 2, f(1) = 3$ 。

例 求次为 2 的多项式 $f(x)$, 使 $f(-1) = -1, f(1) = 1, f(2) = 5$ 。

设 x_0, x_1, \dots, x_n 是 F 的 $n+1$ 个互不相同的元。这 $n+1$ 个不同的元称为 $n+1$ 个节点 (node)。设 $y_0, y_1, \dots, y_n \in F$ 。通俗地说, 多项式插值 (polynomial interpolation) 的任务是: 找一个多项式 $f(x) \in F[x]$ 使

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

且适合“附加条件”。

这里, “附加条件”是有必要的: 如果太松, 可能找出的 $f(x)$ 不止一个; 如果太紧, 则可能找不到 $f(x)$ 。

例 找一个多项式 $f(x)$ 使 $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$ 。

如果不作任何别的约束, 那么 n 是奇数时, $f(x) = x^n$ 适合这些条件。不仅如此, 下面的多项式也适合条件:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^5, \quad -x + 2x^7, \quad \frac{x + x^3 + \dots + x^{2k-1}}{k}。$$

在初中, 我们知道, 若平面直角坐标系的三点 A, B, C 不在同一直线上, 且任意二点的连线既不与 y 轴平行也不与 y 轴重合, 则存在 (唯一的) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 使其图像过此三点。假如“附加条件”是“ $f(x)$ 是次为 2 的多项式”呢? 设

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0。$$

代入已知条件, 得到三元一次方程组

$$\begin{cases} -1 = a - b + c, \\ 0 = c, \\ 1 = a + b + c. \end{cases}$$

由此可解出

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = 0。$$

这与假定 $a \neq 0$ 不符。所以, 这个条件太紧了。

有没有什么“松紧得当的”“附加条件”呢? 回想一下这个命题:

命题 设 $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ 是 F 的元。设 n 是非负整数。设

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i。$$

$$f(t_0) = g(t_0), \quad f(t_1) = g(t_1), \quad \dots, \quad f(t_n) = g(t_n),$$

由此, 我们可以试着作出这样的“附加条件”: 多项式的次低于节点数。至少, 这个条件不是太松: 因为上面的命题说, 这样的多项式若存在, 必唯一。

例 如果把 \mathbb{F} 跟 $\mathbb{F}[x]$ 改为 \mathbb{Z} 跟 $\mathbb{Z}[x]$, 那么就没有 1 次多项式 $f(x)$ 使 $f(-1) = 2, f(1) = 3$ 。为啥? 看二元一次方程组

$$\begin{cases} 2 = -a + b, \\ 3 = a + b. \end{cases}$$

具体地说, 设次低于节点数 $n + 1$ 的多项式

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{F}[x]$$

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$
$$\begin{cases} y_0 = 1a_0 + x_0a_1 + \cdots + x_0^n a_n, \\ y_1 = 1a_0 + x_1a_1 + \cdots + x_1^n a_n, \\ \dots\dots\dots, \\ y_n = 1a_0 + x_na_1 + \cdots + x_n^n a_{n\circ} \end{cases}$$

可惜,我们在初中并没有研究一般的多元一次方程组。我们在学习二(三)元一次方程组的时候,主要学习怎么用代入消元法与加减消元法解方程组,并没有过多地讨论方程组什么时候有解与解的结构这样的问题。

我们换一个角度看问题。首先,我们有如下命题:

命题 设 $t_0, t_1, \dots, t_{s-1} \in \mathbb{F}$ 互不相同。则 t_0, t_1, \dots, t_{s-1} ($1 \leq s \leq n$) 是 n 次多项式 $f(x)$ 的根的一个必要与充分条件是: 存在 $n-s$ 次多项式 $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$f(x) = (x - t_0)(x - t_1) \cdots (x - t_{s-1})q(x).$$

证 先看充分性。既然 $f(x)$ 能写为这种形式, 将 x 换为 t_i ($i = 0, 1, \dots, s-1$), 则有 $f(t_i) = 0$ 。

再看必要性。因为 t_0 是 $f(x)$ 的根, 故存在 $n-1$ 次多项式 $q_1(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$f(x) = (x - t_0)q_1(x).$$

设 t_j 是 t_1, t_2, \dots, t_{s-1} 的一个。则 $t_j \neq t_0$ 。因为 t_j 也是 $f(x)$ 的根, 故

$$(t_j - t_0)q_1(t_j) = f(t_j) = 0 = (t_j - t_0)0.$$

根据消去律, $q_1(t_j) = 0$ 。这样, t_1, \dots, t_{s-1} 这 $s-1$ 个 \mathbb{F} 中元是 $q_1(x)$ 的根。所以, 对 $q_1(x)$ 来说, 存在 $n-1-1 = n-2$ 次多项式 $q_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$q_1(x) = (x - t_1)q_2(x) \implies f(x) = (x - t_0)(x - t_1)q_2(x),$$

且 t_2, \dots, t_{s-1} 这 $s-2$ 个 \mathbb{F} 中元是 $q_2(x)$ 的根。再将这个过程进行 $s-2$ 次, 可得到 $n-s$ 次多项式 $q_s(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$f(x) = (x - t_0)(x - t_1) \cdots (x - t_{s-1})q_s(x).$$

取 $q(x) = q_s(x)$ 即可。 ✎

例 我们考虑非常特殊的情形。如果 y_0, y_1, \dots, y_n 中恰有一个是 1, 而剩下的全是 0, 那这样的多项式应该长什么样呢?

以 $y_0 = 1, y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$ 为例。这样, 多项式 $f(x)$ 有根 x_1, x_2, \dots, x_n 。根据上个命题, 存在多项式 $q(x)$ 使

$$f(x) = q(x)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

因为 $f(x)$ 的次低于 $n+1$, 而 $(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ 的次为 n , 故 $q(x)$ 一定是非零的数 c , 即

$$f(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

因为 $f(x_0) = y_0 = 1$, 故

$$1 = c(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n),$$

也就是

$$c = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} \circ$$

故

$$f(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} \circ$$

类似地, 适合条件 $y_1 = 1, y_0 = y_2 = y_3 = \cdots = y_n = 0$ 的多项式是

$$\frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)} \circ$$

可以将这个多项式简单地写为

$$\prod_{\substack{0 \leq \ell \leq n \\ \ell \neq 1}} \frac{x - x_\ell}{x_1 - x_\ell} \circ$$

上面的 $f(x)$ 也可以写为

$$\prod_{\substack{0 \leq \ell \leq n \\ \ell \neq 0}} \frac{x - x_\ell}{x_0 - x_\ell} \circ$$

回到一般的设定 (也就是说, y_0, y_1, \dots, y_n 是 \mathbb{F} 的任意元)。作 $n+1$ 个多项式

$$L_i(x) = \prod_{\substack{0 \leq \ell \leq n \\ \ell \neq i}} \frac{x - x_\ell}{x_i - x_\ell} \quad (i = 0, 1, \dots, n) \circ$$

不难看出, 任取 $i, j = 0, 1, \dots, n$,

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

所以

$$f(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

适合条件

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

且

$$\deg f(x) \leq n < n+1 \circ$$

综合上面的事实, 我们已经证明了

命题 设 x_0, x_1, \dots, x_n 是 F 的 $n+1$ 个互不相同的元。设 $y_0, y_1, \dots, y_n \in F$ 。存在唯一的多项式

$$f(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{0 \leq \ell \leq n \\ \ell \neq i}} \frac{x - x_\ell}{x_i - x_\ell}$$

适合条件

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

且

$$\deg f(x) < n+1。$$

这个公式以“Lagrange 插值公式”(Lagrange's interpolation formula) 之名闻名全球。

评注 我们在前面接触的线性无关的多项式组 (几乎都) 是次不等的多项式。Lagrange 插值公式告诉我们, $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ 适合:

- (i) $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ 是线性无关的;
- (ii) 任意次不高于 n 的多项式都可唯一地写为 $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ 的线性组合;
- (iii) $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ 全为 n 次多项式。

评注 由上面的公式, 可以看出, $f(x)$ 的 n 次系数是

$$\sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{0 \leq \ell \leq n \\ \ell \neq i}} \frac{1}{x_i - x_\ell}。$$

看上去有点复杂。我们想个办法简单地写出 \prod 符号代表的内容。作 $n+1$ 次多项式

$$N_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)。$$

从 $0, 1, \dots, n$ 里任取一个整数 i 。那么

$$N_{n+1}(x) = (x - x_i) \prod_{\substack{0 \leq \ell \leq n \\ \ell \neq i}} (x - x_\ell)。$$

二边求导, 有

$$N_{n+1}'(x) = \sum_{\substack{0 \leq \ell \leq n \\ \ell \neq i}} (x - x_\ell) + (x - x_i) \left(\sum_{\substack{0 \leq \ell \leq n \\ \ell \neq i}} (x - x_\ell) \right)'。$$

用 x_i 代替 x , 有

$$N'_{n+1}(x) = \prod_{\substack{0 \leq \ell \leq n \\ \ell \neq i}} (x_i - x_\ell) + 0,$$

即

$$\prod_{\substack{0 \leq \ell \leq n \\ \ell \neq i}} \frac{1}{x_i - x_\ell} = \frac{1}{N'_{n+1}(x_i)}.$$

这样, $f(x)$ 的 n 次系数可简单地写为

$$\sum_{i=0}^n \frac{y_i}{N'_{n+1}(x_i)}.$$

例 取 $n = 2$ 。取

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2,$$

$$y_0 = -1, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 5.$$

计算 $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$:

$$L_0(x) = \prod_{\substack{0 \leq \ell \leq 2 \\ \ell \neq 0}} \frac{x - x_\ell}{x_0 - x_\ell} = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3},$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{0 \leq \ell \leq 2 \\ \ell \neq 1}} \frac{x - x_\ell}{x_1 - x_\ell} = \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1,$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{0 \leq \ell \leq 2 \\ \ell \neq 2}} \frac{x - x_\ell}{x_2 - x_\ell} = \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}.$$

所以, 适合条件

$$f(-1) = -1, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 5,$$

$$\deg f(x) < n+1 = 3$$

的多项式 $f(x)$ 就是

$$\begin{aligned} & (-1)L_0(x) + 1L_1(x) + 5L_2(x) \\ &= -L_0(x) + L_1(x) + 5L_2(x) \\ &= -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 + \frac{5}{3}x^2 - \frac{5}{3} \\ &= x^2 + x - 1. \end{aligned}$$

这跟前面用三元一次方程组算出的答案完全一致。

例 取 $n = 3$ 。在上例的基础上, 追加

$$x_3 = -2, \quad y_3 = -11。$$

我们的目标是: 找多项式 $f(x)$ 适合条件

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 5, \quad f(-2) = -11, \\ \deg f(x) &< n + 1 = 4。 \end{aligned}$$

在原理上, 并没有什么复杂的地方。求出 $L_0(x), L_1(x), L_2(x), L_3(x)$ 后, 答案就出来了:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(-1-1)(-1-2)(-1+2)} + \frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{(1+1)(1-2)(1+2)} \\ &\quad + 5 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(2+1)(2-1)(2+2)} - 11 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2-1)(-2-2)}。 \end{aligned}$$

不过, 实践告诉我们, 拆开 4 个 3 次多项式后再相加可不是什么轻松的事儿——至少比前一个例复杂一些。而且, 加一个节点后, $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$ (跟之前相比) 都要多乘一个一次多项式。有无稍微容易一些的算法呢?

定义 设 x_0, x_1, \dots, x_n 是 F 的 $n+1$ 个互不相同的元。设 $y_0, y_1, \dots, y_n \in F$ 。定义

$$[x_i, x_j] = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \quad (i \neq j)。$$

这称为 1 级差商 (*first-order divided difference*)。类似地, 当 i, j, k 互不相同, 2 级差商是

$$[x_i, x_j, x_k] = \frac{[x_i, x_j] - [x_j, x_k]}{x_i - x_k}。$$

一般地, 当 $i_0, i_1, \dots, i_{\ell-1}$ 互不相同, $\ell-1$ 级差商定义为

$$[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{\ell-1}}] = \frac{[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{\ell-2}}] - [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{\ell-1}}]}{x_{i_0} - x_{i_{\ell-1}}}。$$

“差商”可指代任意级差商。

例 取 $n = 2$ 。取

$$\begin{aligned} x_0 &= -1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \\ y_0 &= -1, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 5。 \end{aligned}$$

我们随意地计算三个 1 级差商:

$$[x_0, x_1] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = 1,$$

$$\begin{aligned}[x_0, x_2] &= \frac{y_0 - y_2}{x_0 - x_2} = 2, \\ [x_1, x_2] &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 4.\end{aligned}$$

由此可知

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2} = \frac{1 - 4}{-1 - 2} = 1.$$

根据 1 级差商的定义,

$$[x_j, x_i] = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} = [x_i, x_j],$$

故

$$[x_2, x_1] = [x_1, x_2] = 4.$$

所以

$$[x_0, x_2, x_1] = \frac{[x_0, x_2] - [x_2, x_1]}{x_0 - x_1} = \frac{2 - 4}{-1 - 1} = 1.$$

同样的道理,

$$[x_1, x_0] = [x_0, x_1] = 1.$$

所以

$$[x_1, x_0, x_2] = \frac{[x_1, x_0] - [x_0, x_2]}{x_1 - x_2} = \frac{1 - 2}{1 - 2} = 1.$$

我们发现, 在这些特殊的 x_i 与 y_j ($i, j = 0, 1, 2$) 下

$$[x_0, x_1, x_2] = [x_0, x_2, x_1] = [x_1, x_0, x_2].$$

类似地, 读者还可以计算 $[x_1, x_2, x_0]$, $[x_2, x_0, x_1]$, $[x_2, x_1, x_0]$, 它们跟上面三个 2 级差商有着同样的值。换句话说, 我们猜想, 2 级差商 $[x_i, x_j, x_k]$ 的三个文字 x_i, x_j, x_k 的次序可以任意交换, 且值不变 (当然, y_i, y_j, y_k 的次序也要交换)。

幸运的事儿是, 我们没猜错:

命题 设 m 是大于 1 的整数。 $m - 1$ 级差商 $[x_0, x_1, \dots, x_{m-1}]$ 可表示为

$$[x_0, x_1, \dots, x_{m-1}] = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y_k}{N'_m(x_k)},$$

这里

$$N_m(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{m-1}) = \prod_{k=0}^{m-1} (x - x_k).$$

由此立得: 随意交换 $x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}$ 的次序, 若 $y_0, y_1, \cdots, y_{m-1}$ 的次序也跟着改变, 得到的新 $m-1$ 级差商的值不变。

证 回想一下, ℓ 级差商 ($\ell > 1$) 是用 $\ell-1$ 级差商定义的。所以, 我们用数学归纳法证明这个结论。

当 $m = 2$ 时,

$$N_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) = x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0x_1,$$

故

$$N_2'(x) = 2x - (x_0 + x_1).$$

从而

$$N_2'(x_0) = x_0 - x_1, \quad N_2'(x_1) = x_1 - x_0.$$

根据定义,

$$\begin{aligned} [x_0, x_1] &= \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \\ &= \frac{y_0}{x_0 - x_1} - \frac{y_1}{x_0 - x_1} \\ &= \frac{y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{y_0}{N_2'(x_0)} + \frac{y_1}{N_2'(x_1)} \\ &= \sum_{k=0}^{2-1} \frac{y_k}{N_2'(x_k)}. \end{aligned}$$

所以, 结论对 $m = 2$ 成立。

假设结论对 $m = \ell \geq 2$ 成立。我们要由此推出: 结论对 $m = \ell + 1$ 也成立。 x_0, x_1, \cdots, x_ℓ 这 $\ell + 1$ 个元的 ℓ 级差商, 按定义, 是

$$[x_0, x_1, \cdots, x_\ell] = \frac{[x_0, x_1, \cdots, x_{\ell-1}] - [x_1, x_2, \cdots, x_\ell]}{x_0 - x_\ell}.$$

这里, $[x_0, x_1, \cdots, x_{\ell-1}]$ 与 $[x_1, x_2, \cdots, x_\ell]$ 都是 $\ell-1$ 级差商。按归纳假设,

$$[x_0, x_1, \cdots, x_{\ell-1}] = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{y_k}{P'(x_k)},$$

$$[x_1, x_2, \dots, x_\ell] = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{y_k}{Q'(x_k)},$$

其中

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{\ell-1}), \\ Q(x) &= (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_\ell). \end{aligned}$$

作

$$N_{\ell+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{\ell-1})(x - x_\ell),$$

我们观察 $N_{\ell+1}(x)$ 与 $P(x)$ (或 $Q(x)$) 的关系。显然,

$$N_{\ell+1}(x) = P(x)(x - x_\ell).$$

二边求导, 有

$$N'_{\ell+1}(x) = P'(x)(x - x_\ell) + P(x).$$

用 x_u ($u \neq \ell$) 代替 x , 有

$$\begin{aligned} N'_{\ell+1}(x_u) &= P'(x_u)(x_u - x_\ell) + P(x_u) = P'(x_u)(x_u - x_\ell) \\ \Rightarrow \frac{1}{P'(x_u)} &= \frac{x_u - x_\ell}{N'_{\ell+1}(x_u)}. \end{aligned}$$

同理, 若 $v \neq 0$, 则

$$\frac{1}{Q'(x_v)} = \frac{x_v - x_0}{N'_{\ell+1}(x_v)}.$$

所以

$$\begin{aligned} & [x_0, x_1, \dots, x_{\ell-1}] - [x_1, x_2, \dots, x_\ell] \\ &= \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{y_k}{P'(x_k)} - \sum_{k=1}^{\ell} \frac{y_k}{Q'(x_k)} \\ &= \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{y_k(x_k - x_\ell)}{N'_{\ell+1}(x_k)} + \sum_{k=1}^{\ell} \frac{-y_k(x_k - x_0)}{N'_{\ell+1}(x_k)} \\ &= \sum_{k=0}^{\ell} \frac{y_k(x_k - x_\ell)}{N'_{\ell+1}(x_k)} + \sum_{k=0}^{\ell} \frac{y_k(x_0 - x_k)}{N'_{\ell+1}(x_k)} \\ &= \sum_{k=0}^{\ell} \frac{y_k(x_k - x_\ell) + y_k(x_0 - x_k)}{N'_{\ell+1}(x_k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\ell} \frac{y_k(x_0 - x_{\ell})}{N'_{\ell+1}(x_k)} \\
&= (x_0 - x_{\ell}) \sum_{k=0}^{\ell} \frac{y_k}{N'_{\ell+1}(x_k)}.
\end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned}
[x_0, x_1, \dots, x_{\ell}] &= \frac{[x_0, x_1, \dots, x_{\ell-1}] - [x_1, x_2, \dots, x_{\ell}]}{x_0 - x_{\ell}} \\
&= \frac{1}{x_0 - x_{\ell}} \cdot (x_0 - x_{\ell}) \sum_{k=0}^{\ell} \frac{y_k}{N'_{\ell+1}(x_k)} \\
&= \sum_{k=0}^{(\ell+1)-1} \frac{y_k}{N'_{\ell+1}(x_k)}.
\end{aligned}$$

评注 前面, 我们知道, 用 Lagrange 插值公式算出的次不高于 n 的多项式的 n 次系数是

$$\sum_{i=0}^n \frac{y_i}{N'_{n+1}(x_i)},$$

其中

$$N_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

用差商的语言, 有: $f(x)$ 的 n 次系数可用 n 级差商

$$[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

表示。

现在, 我们来看看差商在多项式插值里的用处。设 x_0, x_1, \dots, x_n 是 \mathbb{F} 的 $n+1$ 个互不相同的元。设 $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{F}$ 。作 $n+1$ 个多项式:

$$\begin{aligned}
N_0(x) &= 1, \\
N_1(x) &= x - x_0, \\
N_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1), \\
&\dots\dots\dots, \\
N_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).
\end{aligned}$$

因为 $N_0(x), N_1(x), \dots, N_n(x)$ 的次分别是 $0, 1, \dots, n$, 所以:

(i) $N_0(x), N_1(x), \dots, N_n(x)$ 是线性无关的;

(ii) 任意次不高于 n 的多项式都可唯一地写为 $N_0(x), N_1(x), \dots, N_n(x)$ 的线性组合。

由前面的 Lagrange 插值公式可知, 存在一个次不高于 n 的多项式 $f(x)$ 使

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)。$$

对这个 $f(x)$ 而言, 存在 (唯一的) $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ 使

$$f(x) = \sum_{i=0}^n c_i N_i(x)。$$

我们的任务就是找出 c_0, c_1, \dots, c_n 。先从 c_n 看起。显然, 左侧的 n 次系数是 $[x_0, x_1, \dots, x_n]$, 而右侧的 n 次系数是 c_n , 故

$$c_n = [x_0, x_1, \dots, x_n]。$$

找出 c_n , 还有 n 个系数要找呢! 接下来的系数该怎么找呢?

命题 设 x_0, x_1, \dots, x_n 是 \mathbb{F} 的 $n+1$ 个互不相同的元 ($n \geq 1$)。设 $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{F}$ 。作 $n+1$ 个多项式:

$$\begin{aligned} N_0(x) &= 1, \\ N_1(x) &= x - x_0, \\ N_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1), \\ &\dots\dots\dots, \\ N_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})。 \end{aligned}$$

由 Lagrange 插值公式可知, 存在一个次不高于 n 的多项式 $f(x)$ 使

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)。$$

对这个 $f(x)$ 而言, 存在 (唯一的) $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ 使

$$f(x) = \sum_{i=0}^n c_i N_i(x)。$$

这些系数有着简单的形式:

$$\begin{aligned} c_0 &= y_0, \\ c_i &= [x_0, x_1, \dots, x_i] \quad (i = 1, 2, \dots, n)。 \end{aligned}$$

证 用数学归纳法。当 $n = 1$ 时,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\
 &= y_0 \frac{(x - x_0) + (x_0 - x_1)}{x_0 - x_1} - y_1 \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} \\
 &= y_0 + y_0 \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} - y_1 \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} \\
 &= y_0 + \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} (x - x_0) \\
 &= y_0 N_0(x) + [x_0, x_1] N_1(x).
 \end{aligned}$$

这样, 结论对 $n = 1$ 成立。

设结论对 $n = \ell \geq 1$ 成立。我们看 $n = \ell + 1$ 的情形。

由 Lagrange 插值公式可知, 存在一个次不高于 $\ell + 1$ 的多项式 $f(x)$ 使

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, \ell + 1).$$

对这个 $f(x)$ 而言, 存在 (唯一的) $c_0, c_1, \dots, c_\ell, c_{\ell+1} \in \mathbb{F}$ 使

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\ell} c_i N_i(x) + c_{\ell+1} N_{\ell+1}(x).$$

左侧的 $\ell + 1$ 次系数是 $[x_0, x_1, \dots, x_\ell, x_{\ell+1}]$, 右侧的 $\ell + 1$ 次系数是 $c_{\ell+1}$, 故

$$c_{\ell+1} = [x_0, x_1, \dots, x_\ell, x_{\ell+1}].$$

作

$$g(x) = f(x) - [x_0, x_1, \dots, x_\ell, x_{\ell+1}] N_{\ell+1}(x).$$

则

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\ell} c_i N_i(x),$$

且 $i \neq \ell + 1$ 时,

$$g(x_i) = f(x_i) - [x_0, x_1, \dots, x_\ell, x_{\ell+1}] 0 = y_i.$$

这个 $g(x)$ 的次不会高于 ℓ 。并且, $i = 0, 1, \dots, \ell$ 时, $g(x_i) = y_i$ 。

由 Lagrange 插值公式, 存在一个次不高于 ℓ 的多项式 $h(x)$ 使

$$h(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, \ell).$$

对这个 $h(x)$ 而言, 存在 (唯一的) $d_0, d_1, \dots, d_\ell \in \mathbb{F}$ 使

$$h(x) = \sum_{i=0}^{\ell} d_i N_i(x).$$

根据归纳假设,

$$\begin{aligned} d_0 &= y_0, \\ d_i &= [x_0, x_1, \dots, x_i] \quad (i = 1, 2, \dots, \ell). \end{aligned}$$

由插值的唯一性, $g(x) = h(x)$ 。所以

$$\begin{aligned} c_0 &= d_0 = y_0, \\ c_i &= d_i = [x_0, x_1, \dots, x_i] \quad (i = 1, 2, \dots, \ell). \end{aligned}$$

所以, $n = \ell + 1$ 时, 结论是正确的。 ✎

为方便, 记 $[x_i] = y_i$, 称其为 x_i 的 0 级差商。我们证明了

命题 设 x_0, x_1, \dots, x_n 是 \mathbb{F} 的 $n+1$ 个互不相同的元。设 $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{F}$ 。存在唯一的多项式

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^n [x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \\ &= [x_0] + [x_0, x_1](x - x_0) + \dots + [x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \\ &\quad \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

适合条件

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

且

$$\deg f(x) < n + 1.$$

这个公式以 “Newton 插值公式” (*Newton's interpolation formula*) 之名闻名全球。

我们举三个具体的例帮读者消化这个 Newton 插值公式。

例 求次不高于 1 的多项式 $f(x)$, 使 $f(-1) = 2, f(1) = 3$ 。
这里, $n = 1$, 且

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 1,$$

$$y_0 = 2, \quad y_1 = 3。$$

不难算出

$$\begin{aligned} [x_0] &= y_0 = 2, \\ [x_0, x_1] &= \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{1}{2}。 \end{aligned}$$

所以

$$f(x) = 2 + \frac{1}{2}(x - (-1)) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}。$$

例 求次不高于 2 的多项式 $f(x)$, 使 $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 5$ 。
这里, $n = 2$, 且

$$\begin{aligned} x_0 &= -1, & x_1 &= 1, & x_2 &= 2, \\ y_0 &= -1, & y_1 &= 1, & y_2 &= 5。 \end{aligned}$$

不难算出

$$\begin{aligned} [x_0] &= y_0 = -1, \\ [x_0, x_1] &= \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = 1, \\ [x_1, x_2] &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 4, \\ [x_0, x_1, x_2] &= \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2} = 1。 \end{aligned}$$

所以

$$f(x) = -1 + (x + 1) + (x + 1)(x - 1) = x^2 + x - 1。$$

前面, 我们用 Lagrange 插值公式, 得到了一样的结果, 不过计算过程稍繁。

实操时, 往往用名为“差商表”的表进行计算。当 $n = 2$ 时, 它长这样:

$$\begin{array}{c|ccc} x_2 & [x_2] & & \\ x_1 & [x_1] & [x_1, x_2] & \\ x_0 & [x_0] & [x_0, x_1] & [x_0, x_1, x_2] \end{array}$$

在这个问题里, 差商表如下:

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 5 & & \\ 1 & 1 & 4 & \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

例 求次不高于 3 的多项式 $f(x)$, 使 $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 5$, $f(-2) = -11$ 。

这里, $n = 3$, 且

$$\begin{aligned} x_0 &= -1, & x_1 &= 1, & x_2 &= 2, & x_3 &= -2 \\ y_0 &= -1, & y_1 &= 1, & y_2 &= 5, & y_3 &= -11. \end{aligned}$$

画出 $n = 3$ 时的差商表:

x_3	$[x_3]$			
x_2	$[x_2]$	$[x_2, x_3]$		
x_1	$[x_1]$	$[x_1, x_2]$	$[x_1, x_2, x_3]$	
x_0	$[x_0]$	$[x_0, x_1]$	$[x_0, x_1, x_2]$	$[x_0, x_1, x_2, x_3]$

我们已经在上个例里算出了 $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_0, x_1, x_2]$:

x_3	$[x_3]$			
2	1	$[x_2, x_3]$		
1	1	4	$[x_1, x_2, x_3]$	
-1	-1	1	1	$[x_0, x_1, x_2, x_3]$

我们的目标是算出 $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ 。所以, 我们要算出 $[x_1, x_2, x_3]$; 所以, 我们要算出 $[x_2, x_3]$; 所以, 我们要算出 $[x_3]$ 。不过, $[x_3]$ 是已知的, 它就是 y_3 , 也就是 -11 。

列出算式:

$$\begin{aligned} x_3 &= -2, \\ [x_3] &= y_3 = -11, \\ [x_2, x_3] &= \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = 4, \\ [x_1, x_2, x_3] &= \frac{[x_1, x_2] - [x_2, x_3]}{x_1 - x_3} = 0, \\ [x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{[x_0, x_1, x_2] - [x_1, x_2, x_3]}{x_0 - x_3} = 1. \end{aligned}$$

此时, 差商表如下:

-2	-11			
2	1	4		
1	1	4	0	
-1	-1	1	1	1

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= -1 + (x+1) + (x+1)(x-1) + (x+1)(x-1)(x-2) \\ &= (x^2 + x - 1) + (x^3 - 2x^2 - x + 2) \\ &= x^3 - x^2 + 1. \end{aligned}$$

用 Lagrange 插值公式, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(-1-1)(-1-2)(-1+2)} + \frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{(1+1)(1-2)(1+2)} \\ &\quad + 5 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(2+1)(2-1)(2+2)} - 11 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2-1)(-2-2)}. \end{aligned}$$

有兴趣的读者可展开上式, 以验证我们的计算是否正确。由此可见, Newton 插值公式在实操上优于 Lagrange 插值公式。

我们以带余除法与插值的关系结束本节。

命题 设 x_0, x_1, \dots, x_n 是 \mathbb{F} 的 $n+1$ 个互不相同的元。设

$$d(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \in \mathbb{F}[x]$$

是 $n+1$ 次多项式。由带余除法知, 任取 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 存在唯一的 $q(x)$, $r(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$f(x) = q(x)d(x) + r(x), \quad \deg r(x) < n+1.$$

余式 $r(x)$ 可具体地写出:

$$r(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{0 \leq \ell \leq n \\ \ell \neq i}} \frac{x-x_\ell}{x_i-x_\ell}$$

或

$$r(x) = \sum_{i=0}^n [x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x-x_j),$$

其中差商的 y_i 取 $f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ 。

证 由带余除法知, 任取 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 存在唯一的 $q(x)$, $r(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$f(x) = q(x)d(x) + r(x), \quad \deg r(x) < n+1.$$

用 x_i 代替 x , 有

$$f(x_i) = q(x_i)d(x_i) + r(x_i) = r(x_i).$$

因为 $\deg r(x) < n+1$, 故由插值公式即得待证命题。

Generalized Binomial Coefficients

本节讨论广义二项系数。

回忆一下: 正整数 n 的阶乘 $n!$ 是前 n 个正整数的积; 0 的阶乘 $0!$ 是 1。

定义 设 n 是整数。设 $r \in \mathbb{F}[x]$ 。定义广义二项系数 (*generalized binomial coefficient*) 如下:

$$\binom{r}{n} = \begin{cases} \frac{1}{n!}(r-0)(r-1)\cdots(r-(n-1)), & n > 0; \\ 1, & n = 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

广义二项系数在计数上是有用的。

从 m 人里选出 n 人 ($1 \leq n \leq m$, 且任意二个人都不同), 并按一定的顺序让他们坐在 n 个座位上。一个座位上至多坐一人, 且每一个选出的人都要坐在座位上。共有多少种不同的安排座位的方法?

不难看出, 我们可以分步安排座位。可以从 m 人里选 1 人坐第 1 个座位, 再从剩下的 $m-1$ 人里选 1 人坐第 2 个座位……最后从剩下的 $m-(n-1)$ 人里选 1 人坐第 n 个座位。所以, 共有

$$m \cdot (m-1) \cdot \cdots \cdot (m-(n-1))$$

种不同的安排座位的方法。

前面, 我们是直接按座位数选人坐座位; 现在我们先选 n 人, 再让他们坐在这 n 个座位上。设从 m 人里选 n 人有 C 种选法。给这 n 人安排座位, 有多少种不同的方法呢? 跟上面的推理完全一致: 从这 n 人里选 1 人坐第 1 个座位, 再从剩下的 $n-1$ 人里选 1 人坐第 2 个座位……最后剩下的 1 人坐第 n 个座位。所以, 有

$$n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1 = n!$$

种不同的为这 n 人安排座位的方法。进而共有

$$C \cdot n!$$

种不同的安排座位的方法。

综上, 我们有

$$m \cdot (m-1) \cdot \cdots \cdot (m-(n-1)) = C \cdot n!.$$

由此可得, 从 m 人里选 n 人有

$$C = \frac{m \cdot (m-1) \cdots (m-(n-1))}{n!} = \binom{m}{n}$$

种选法。

一般地, 我们有

命题 从 m 个不同的文字里选 n 个的选法数为广义二项系数

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1) \cdots (m-(n-1))}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

证 把上面的“人”换为“文字”, 再拟人化文字, 使其“坐在座位上”, 即可套用上面的推理, 从而得到第一个等号。至于第二个等号, 直接计算即可:

$$\begin{aligned} & \frac{m(m-1) \cdots (m-(n-1))}{n!} \\ &= \frac{m(m-1) \cdots (m-(n-1))(m-n)(m-n-1) \cdots 1}{n!(m-n)!} \\ &= \frac{m!}{n!(m-n)!}. \end{aligned} \quad \text{☺}$$

命题 广义二项系数适合如下性质:

(i) $n \geq 0$ 时, $\binom{x}{n}$ 是首项系数为 $\frac{1}{n!}$ 的 n 次多项式, 前 n 个非负整数恰为其根, 且

$$\binom{n}{n} = 1;$$

(ii) 任取 $n \in \mathbb{Z}$, 必有

$$\binom{x+1}{n} = \binom{x}{n} + \binom{x}{n-1};$$

(iii) 若 m, n 是非负整数, 则

$$\sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{\ell}{n} = \binom{m}{n+1};$$

(iv) 任取 $n \in \mathbb{Z}$, 必有

$$\binom{-x}{n} = (-1)^n \binom{x+n-1}{n};$$

(v) 若 t, n 是整数, 则

$$\binom{t}{n} \in \mathbb{Z}_0.$$

证 (i) $\binom{x}{0} = 1$ 是 0 次多项式, 无根, 首项系数为 1, 且 $\binom{0}{0} = 1$ 。 $n > 0$ 时,

$$\binom{x}{n} = \frac{1}{n!}(x-0)(x-1)\cdots(x-(n-1)),$$

故 $\binom{x}{n}$ 是首项系数为 $\frac{1}{n!}$ 的 n 次多项式, 且 $0, 1, \dots, n-1$ 恰为 $\binom{x}{n}$ 的根。最后, 不难验证

$$\binom{n}{n} = \frac{(n-0)(n-1)\cdots(n-(n-1))}{n!} = 1。$$

(ii) 若 $n < 0$, 则 $\binom{x+1}{n}, \binom{x}{n}, \binom{x}{n-1}$ 都是 0, 显然。若 $n = 0$, 则 $\binom{x+1}{n}, \binom{x}{n}$ 都是 1, 而 $\binom{x}{n-1}$ 都是 0, 显然。若 $n = 1$, 则 $\binom{x+1}{n}, \binom{x}{n}, \binom{x}{n-1}$ 分别是 $x+1, x, 1$, 显然。若 $n \geq 2$, 则

$$\begin{aligned} & \binom{x}{n} + \binom{x}{n-1} \\ &= \frac{x(x-1)\cdots(x-(n-2))(x-(n-1))}{n!} + \frac{x(x-1)\cdots(x-(n-2))}{(n-1)!} \\ &= \frac{x(x-1)\cdots(x-(n-2))(x-(n-1))}{n!} + \frac{x(x-1)\cdots(x-(n-2))(n)}{n!} \\ &= \frac{x(x-1)\cdots(x-(n-2))(x-(n-1)+n)}{n!} \\ &= \frac{(x+1)x(x-1)\cdots(x-(n-2))}{n!} \\ &= \frac{(x+1)(x+1-1)(x+1-2)\cdots(x+1-(n-1))}{n!} \\ &= \binom{x+1}{n}。 \end{aligned}$$

(iii) 由 (ii) 知

$$\binom{\ell}{n} = \binom{\ell+1}{n+1} - \binom{\ell}{n+1}。$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{\ell}{n} &= \sum_{\ell=0}^{m-1} \left(-\binom{\ell}{n+1} + \binom{\ell+1}{n+1} \right) \\ &= -\binom{0}{n+1} + \binom{1}{n+1} - \binom{1}{n+1} + \binom{2}{n+1} \\ &\quad + \cdots - \binom{m-1}{n+1} + \binom{m}{n+1} \\ &= -\binom{0}{n+1} + \binom{m}{n+1} \end{aligned}$$

$$= \binom{m}{n+1}.$$

(iv) 当 $n < 0$ 时, $\binom{-x}{n}$ 与 $\binom{x+n-1}{n}$ 都是 0。当 $n = 0$ 时, $\binom{-x}{n}$ 与 $\binom{x+n-1}{n}$ 都是 1, 且 $(-1)^n = 1$ 。当 $n > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \binom{-x}{n} &= \frac{(-x)(-x-1)\cdots(-x-(n-1))}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{x(x+1)\cdots(x+(n-1))}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{(x+n-1)(x+n-1-1)\cdots(x+n-1-(n-1))}{n!} \\ &= (-1)^n \binom{x+n-1}{n}. \end{aligned}$$

(v) 若 $n < 0$, 则 $\binom{t}{n} = 0 \in \mathbb{Z}$ 。若 $n = 0$, 则 $\binom{t}{n} = 1 \in \mathbb{Z}$ 。下面考虑 $n \geq 1$ 的情形。

我们先说明, 当 t 是非负整数时, $\binom{t}{n} \in \mathbb{Z}$ 。

对 n 用数学归纳法。当 $n = 1$ 时, $\binom{t}{n} = t \in \mathbb{Z}$ 。

设 $n = s \geq 1$ 时, $\binom{t}{n} \in \mathbb{Z}$ 。考虑 $n = s + 1$ 的情形。由 (iii) 可知

$$\binom{t}{s+1} = \sum_{\ell=0}^{t-1} \binom{\ell}{s}.$$

根据归纳假设, $\binom{\ell}{s}$ ($\ell = 0, 1, \dots, t-1$) 都是整数, 故它们的和 $\binom{t}{s+1}$ 也是整数。所以, $n = s + 1$ 时, $\binom{t}{n} \in \mathbb{Z}$ 。

现在考虑 t 为负整数的情形。由 (iv) 可知

$$\binom{t}{n} = (-1)^n \binom{-t+n-1}{n} \in \mathbb{Z}.$$

综上, 若 t, n 是整数, 则 $\binom{t}{n} \in \mathbb{Z}$ 。 ✎

性质 (i) (ii) 有计数相关的解释。下面我们为读者提供二例。

例 (i) 表明, 从 n 个不同的文字里选 n 个的选法数是 1。这是显然的, 因为所有的文字都被选中了, 也没得选。

例 此例有“生活的气息”。由 (ii) 可知,

$$\binom{7}{3} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3}.$$

据说在中华人民共和国东部的浙江省, 参加“普通高等学校招生全国统一考试” (*Nationwide Unified Examination for Admissions to General Universities and Colleges*) 的人, 除了有必考的语文、数学、外语, 还要从物理、化学、

生物、技术、政治、历史、地理这 7 个科目里选择 3 个作为选考科目。由于物理是“很有挑战性的科目”，故有不少人不选物理。上式右侧的 $\binom{6}{2}$ 表示选择物理的选法数，而 $\binom{6}{3}$ 表示不选物理的选法数。因为人要么选物理，要么不选，故它们的和就是 7 选 3 的选法数。

命题 设 n 是非负整数。广义二项系数适合如下性质：

(vi) 任意次不高于 n 的多项式都可唯一地写为 $\binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \dots, \binom{x}{n}$ 的线性组合；

(vii) 设 $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ 。设

$$f(x) = c_0 \binom{x}{0} + c_1 \binom{x}{1} + \dots + c_n \binom{x}{n}.$$

若 $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$ ，则任取 $t \in \mathbb{Z}$ ，必有 $f(t) \in \mathbb{Z}$ ；若 c_0, c_1, \dots, c_n 不全是整数，则存在整数 u 使 $f(u)$ 不是整数。换句话说，任取 $t \in \mathbb{Z}$ ，必有 $f(t) \in \mathbb{Z}$ 的一个必要与充分条件是： c_0, c_1, \dots, c_n 全是整数。

证 (vi) 注意到 $\binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \dots, \binom{x}{n}$ 的次分别是 $0, 1, \dots, n$ 。

(vii) 设 $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$ 。设 $t \in \mathbb{Z}$ 。由 (v)， $\binom{t}{0}, \binom{t}{1}, \dots, \binom{t}{n}$ 都是整数，故 $f(t)$ 也是整数。

设 c_0, c_1, \dots, c_n 不全是整数。这样，存在 ℓ 使 $c_0, c_1, \dots, c_{\ell-1}$ 这 ℓ 个数全为整数，而 c_ℓ 不是整数（从左往右，一个一个地看）。那么

$$\begin{aligned} f(\ell) &= \underbrace{c_0 \binom{\ell}{0} + c_1 \binom{\ell}{1} + \dots + c_{\ell-1} \binom{\ell}{\ell-1}}_{\ell \text{ terms}} + c_\ell \binom{\ell}{\ell} \\ &\quad + \underbrace{c_{\ell+1} \binom{\ell}{\ell+1} + \dots + c_n \binom{\ell}{n}}_{(n-\ell) \text{ terms}} \\ &= (\text{an integer } q) + c_\ell + 0 \\ &= q + c_\ell. \end{aligned}$$

我们说， $f(\ell)$ 不是整数。用反证法。若 $f(\ell)$ 是整数，因为 q 也是整数，故 $c_\ell = f(\ell) - q$ 是整数，矛盾！ \clubsuit

例 我们知道，若多项式 $f(x)$ 的系数全为整数，则 $t \in \mathbb{Z}$ 时 $f(t) \in \mathbb{Z}$ 。不过，反过来就不对了。在中学，读者也许知道 n 是整数时 $\frac{n(n+1)}{2}$ 也是整数： n 与 $n+1$ 必一奇一偶，故积是偶数，从而被 2 除后仍为整数。现在可以这么看：

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} = \binom{n+1}{2}.$$

下面我们介绍二个与广义二项系数有关的和。不过, 我们先介绍一个用完就丢的工具。

定义 固定某 $h \in \mathbb{F}[x]$ 。设 n 是非负整数, $r \in \mathbb{F}[x]$ 。定义

$$r^{[n]} = \begin{cases} (r-0)(r-h)\cdots(r-(n-1)h), & n > 0; \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

不难看出,

$$r^{[n+1]} = r^{[n]}(r-nh)。$$

若 $h = 0$, $r^{[n]}$ 就变为 r 的 n 次幂。若 $h = 1$, $r^{[n]}$ 就变为 $n! \binom{x}{n}$ 。

命题 设 $r, s \in \mathbb{F}[x]$ 。设 n 是非负整数。则

$$(\star) \quad (r+s)^{[n]} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{[n-k]} s^{[k]}。$$

取 $h = 0$, 得到二项展开 (*binomial expansion*):

$$(BE) \quad (r+s)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{n-k} s^k。$$

取 $h = 1$, 得

$$n! \binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n-k)! k! \binom{r}{n-k} \binom{s}{k}。$$

二边同乘 $\frac{1}{n!}$, 再利用

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

可得 Vandermonde 恒等式 (*Vandermonde's identity*):

$$(VI) \quad \binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{r}{n-k} \binom{s}{k}。$$

证 用数学归纳法。当 $n = 0$ 时, (\star) 的左侧是 1, 右侧是 $1 \cdot 1 \cdot 1$ 。当 $n = 1$ 时, (\star) 的左侧是 $r+s$, 右侧是 $1 \cdot r \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot s$ 。

设 $n = \ell \geq 1$ 时, (\star) 正确, 即

$$(\star) \quad (r+s)^{[\ell]} = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} r^{[\ell-k]} s^{[k]}。$$

现在, 考虑 $n = \ell + 1$ 的情形:

$$\begin{aligned}
& (r+s)^{[\ell+1]} \\
&= (r+s)^{[\ell]}(r+s-\ell h) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} r^{[\ell-k]} s^{[k]} (r+s-\ell h) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} r^{[\ell-k]} s^{[k]} (r+s-(\ell-k+k)h) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} r^{[\ell-k]} s^{[k]} ((r-(\ell-k)h) + (s-kh)) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (r^{[\ell-k]}(r-(\ell-k)h)s^{[k]} + r^{[\ell-k]}s^{[k]}(s-kh)) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (r^{[\ell-k+1]}s^{[k]} + r^{[\ell-k]}s^{[k+1]}) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} r^{[\ell+1-k]}s^{[k]} + \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} r^{[\ell-k]}s^{[k+1]} \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} r^{[\ell+1-k]}s^{[k]} + \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k+1-1} r^{[\ell+1-(k+1)]}s^{[k+1]} \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} r^{[\ell+1-k]}s^{[k]} + \sum_{k=1}^{\ell+1} \binom{\ell}{k-1} r^{[\ell+1-k]}s^{[k]} \\
&= \sum_{k=0}^{\ell+1} \binom{\ell}{k} r^{[\ell+1-k]}s^{[k]} + \sum_{k=0}^{\ell+1} \binom{\ell}{k-1} r^{[\ell+1-k]}s^{[k]} \\
&= \sum_{k=0}^{\ell+1} \left(\binom{\ell}{k} + \binom{\ell}{k-1} \right) r^{[\ell+1-k]}s^{[k]} \\
&= \sum_{k=0}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{k} r^{[\ell+1-k]}s^{[k]}. \quad \text{☞}
\end{aligned}$$

评注 Too cruel though it is, let's say *farewell* to $r^{[n]}$. We will not use $r^{[n]}$ any longer from this moment forward. It is born to be a good old tool for us. May $r^{[n]}$ and its soul rest in peace!

例 (VI) 也有计数相关的解释。老规矩, 先写下算式:

$$\binom{7}{3} = \binom{3}{3}\binom{4}{0} + \binom{3}{2}\binom{4}{1} + \binom{3}{1}\binom{4}{2} + \binom{3}{0}\binom{4}{3}.$$

回到中华人民共和国东部的浙江省。回到“普通高等学校招生全国统一考试”。前面提到, 在那儿, 参加考试的人从 7 科目里选 3 个。政治、历史、地

理是偏“阿先生”(arts)的;物理、化学、生物、技术是偏“赛先生”(science)的。

7 选 3 可以这么选:

- (i) 选 3 个阿先生与 0 个赛先生: $\binom{3}{3}\binom{4}{0}$;
- (ii) 或者, 选 2 个阿先生与 1 个赛先生: $\binom{3}{2}\binom{4}{1}$;
- (iii) 或者, 选 1 个阿先生与 2 个赛先生: $\binom{3}{1}\binom{4}{2}$;
- (iv) 或者, 选 0 个阿先生与 3 个赛先生: $\binom{3}{0}\binom{4}{3}$ 。

把这 4 种情形下的选法数相加, 就是 $\binom{7}{3}$ 。

Summation Formulae

本节讨论求和公式 (summation formula) 问题: 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 求

$$S(n) = \sum_{\ell=0}^{n-1} f(\ell) = f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1)。$$

例 相信大家应该听说过德意志数学家 Gauss。1787 年, Gauss 还只是一个 10 岁的孩子。据说, 当时他的数学教师给全班同学出了这样的算术题:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = ?$$

这里, 后一个数比前一个数多 1, 且共有 100 个数。教师刚写完问题, Gauss 就算出, 答案是 5 050。他的同学还在一个一个地加, 算了很久, 还没算对。

Gauss 是怎么快速算出答案的呢? 设

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100。$$

因为加法适合交换律, 故

$$S = 100 + 99 + 98 + \cdots + 1。$$

所以

$$\begin{aligned} 2S &= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (100 + 1) \\ &= \underbrace{101 + 101 + 101 + \cdots + 101}_{\text{a hundred 101's}} \\ &= 100 \cdot 101 \\ &= 10\,100。 \end{aligned}$$

由此可得

$$S = \frac{10\,100}{2} = 5\,050。$$

如果记 $f(x) = x + 1$, 则

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 \\ &= f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(100 - 1) \\ &= \sum_{\ell=0}^{100-1} f(\ell). \end{aligned}$$

考虑更一般的情形。设 $f(x) = a + bx$ 。记

$$S(n) = f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1).$$

类似地, 把右侧倒着写:

$$S(n) = f(n-1) + f(n-1) + \cdots + f(0).$$

因为

$$f(k) + f(n-1-k) = a + bk + a + b(n-1-k) = 2a + b(n-1),$$

故

$$\begin{aligned} 2S(n) &= (f(0) + f(n-1)) + (f(1) + f(n-2)) + \cdots + (f(n-1) + f(0)) \\ &= n(2a + b(n-1)), \end{aligned}$$

即

$$S(n) = \frac{n(2a + b(n-1))}{2} = \left(a - \frac{b}{2}\right)n + \frac{b}{2}n^2.$$

我们还可以看出: $S(n)$ 是多项式, 且

$$\deg S(n) = \deg f(n) + 1.$$

上面讨论了当 $f(x)$ 的次不高于 1 时如何求 $S(n)$ 。那么, 当 $f(x)$ 的次高于 1 时, 怎么找 $S(n)$? 它还是多项式吗?

在求和前, 我们看 $S(n)$ 适合什么性质。 $S(n)$ 是 $f(0), f(1), \dots, f(n-1)$ 这 n 个数的和。因为 0 个数的和是 0, 故 $S(0) = 0$ 。同时, 不难看出, $S(n+1)$ 比 $S(n)$ 多出 $f(n)$, 也即

$$S(n+1) - S(n) = f(n).$$

反过来, 设 \mathbb{N} 到 \mathbb{F} 的函数 $W(n)$ 适合 $W(0) = 0$ 与 $W(n+1) - W(n) = f(n)$, 则

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} f(\ell) = \sum_{\ell=0}^{n-1} (W(\ell+1) - W(\ell))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} W(\ell+1) - \sum_{\ell=0}^{n-1} W(\ell) \\
&= \sum_{\ell=1}^n W(\ell) - \sum_{\ell=0}^{n-1} W(\ell) \\
&= W(n) - W(0) \\
&= W(n)_0.
\end{aligned}$$

这样, 任给 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 若我们能找到适合条件 $S(0) = 0$ 与 $S(x+1) - S(x) = f(x)$ 的多项式, 则

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} f(\ell) = S(n)_0.$$

命题 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是 m 次多项式。存在唯一的 $m+1$ 次多项式 $F(x) \in \mathbb{F}[x]$ 适合条件:

- (i) $F(0) = 0$;
- (ii) $F(x+1) - F(x) = f(x)_0$.

证 先看存在性。若 $f(x) = 0$, 则 $F(x) = 0$ 显然适合 (i) (ii), 且

$$\deg F(x) = -\infty = -\infty + 1 = \deg f(x) + 1_0.$$

设 $m \geq 0$ 。根据广义二项系数的性质, 存在 $m+1$ 个 \mathbb{F} 中元 c_0, \dots, c_m 使

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^m c_{\ell} \binom{x}{\ell}, \quad c_m \neq 0_0.$$

(读者可思考: 若 $c_m = 0$, $f(x)$ 还能是 m 次多项式吗?) 作多项式

$$F(x) = \sum_{\ell=0}^m c_{\ell} \binom{x}{\ell+1} \in \mathbb{F}[x]_0.$$

显然 $\deg F(x) = m+1$ 。验证 (i):

$$F(0) = \sum_{\ell=0}^m c_{\ell} \binom{0}{\ell+1} = \sum_{\ell=0}^m 0 = 0_0.$$

验证 (ii):

$$\begin{aligned}
F(x+1) - F(x) &= \sum_{\ell=0}^m c_{\ell} \binom{x+1}{\ell+1} - \sum_{\ell=0}^m c_{\ell} \binom{x}{\ell+1} \\
&= \sum_{\ell=0}^m c_{\ell} \left(\binom{x+1}{\ell+1} - \binom{x}{\ell+1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\ell=0}^m c_{\ell} \binom{x}{\ell} \\
 &= f(x).
 \end{aligned}$$

再看唯一性。设 $G(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是 $m+1$ 次多项式, 并适合条件 $G(0) = 0$ 与 $G(x+1) - G(x) = f(x)$ 。作

$$H(x) = F(x) - G(x).$$

则 $H(0) = 0$, $H(x+1) - H(x) = 0$ 。所以, r 为非负整数时, $H(r) = 0$ 。从而 $H(x)$ 一定是零多项式, 即 $F(x) = G(x)$ 。 \clubsuit

例 记 $f(x) = x^2$ 。我们求

$$S(n) = f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1) = \sum_{\ell=0}^{n-1} f(\ell).$$

由上个命题可知, 存在唯一的次为 3 的多项式 $F(x)$ 使 $F(0) = 0$, $F(x+1) - F(x) = f(x)$, 且 $S(n) = F(n)$ 。

可以用插值的思想求 $F(x)$ 。取 x_0, x_1, x_2, x_3 为 0, 1, -1, 2。不难算出:

$$\begin{aligned}
 y_0 &= F(0) = 0, \\
 y_1 &= F(1) = F(0) + f(0) = 0, \\
 y_2 &= F(-1) = F(0) - f(-1) = -1, \\
 y_3 &= F(2) = F(1) + f(1) = 1.
 \end{aligned}$$

注意到 $y_0 = y_1 = 0$, 故可以考虑 Lagrange 插值 (只要算 $L_2(x)$ 与 $L_3(x)$):

$$\begin{aligned}
 L_2(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{x(x-1)(x-2)}{6}, \\
 L_3(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x+1)}{(2-0)(2-1)(2+1)} = \frac{x(x-1)(x+1)}{6}, \\
 F(x) &= y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6}.
 \end{aligned}$$

当然, 也可利用 Newton 插值。作出差商表:

2	1				
-1	-1	$\frac{2}{3}$			
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$		
0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	

故

$$F(x) = [0] + [0, 1](x-0) + [0, 1, -1](x-0)(x-1)$$

$$\begin{aligned}
& + [0, 1, -1, 2](x-0)(x-1)(x+1) \\
& = -\frac{1}{2}x(x-1) + \frac{1}{3}x(x-1)(x+1) \\
& = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6}.
\end{aligned}$$

综上, 我们有

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} \ell^2 = 0^2 + 1^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

其实, 我们可以在此处结束本节。设 $f(x)$ 是 n 次多项式。上面的命题告诉我们, 存在唯一的 $n+1$ 次多项式 $F(x)$ 使 $F(0) = 0$, $F(x+1) - F(x) = f(x)$, 且 $S(n) = F(n)$ 。利用这些条件, 可以确定 $F(x)$ 在 $n+2$ 个整数点处的值, 从而可用插值公式求出 $F(x)$ 。不过, 为了使实操容易一些, 我们还得研究一点。

由上个命题的证明过程, 有

命题 若

$$f(x) = c_0 \binom{x}{0} + c_1 \binom{x}{1} + \cdots + c_m \binom{x}{m},$$

则

$$S(n) = \sum_{\ell=0}^{n-1} f(\ell) = c_0 \binom{n}{1} + c_1 \binom{n}{2} + \cdots + c_m \binom{n}{m+1}.$$

由此可见, 若我们能将 $f(x)$ 写为广义二项系数的线性组合, 则寻找 $S(n)$ 的过程将十分简单。接下来, 我们讨论怎么方便地把多项式写为广义二项系数的线性组合。

定义 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。定义 $f(x)$ 的差分 (difference) 为

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) \in \mathbb{F}[x].$$

设 $t \in \mathbb{F}$ 。我们把

$$f(t+1) - f(t) \in \mathbb{F}$$

也写为 $\Delta f(t)$ 。

例 取 $f(x) = x^2 + x - 1$ 。则

$$f(x+1) = (x+1)^2 + (x+1) - 1 = x^2 + 3x + 1,$$

故


$$\Delta f(x) = 2x + 2。$$

所以

$$\Delta f(332) = 2 \cdot 332 + 2 = 666。$$

命题 设 k 是整数。则

$$\Delta \binom{x}{k} = \binom{x}{k-1}。$$

证 也许, 这就是所谓的“新瓶装旧酒”吧! 不过, 为了方便, 我们还是单独列出来。 

回忆一下, 导数适合如下二条性质:

- (i) $(cf(x))' = cf'(x);$
- (ii) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)。$

差分也有类似的性质。

命题 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x], c \in \mathbb{F}$ 。则

- (i) $\Delta(cf(x)) = c\Delta f(x);$
- (ii) $\Delta(f(x) \pm g(x)) = \Delta f(x) \pm \Delta g(x)。$

由 (i) (ii) 与数学归纳法可知: 当 $c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{F}$, 且 $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{k-1}(x) \in \mathbb{F}[x]$ 时,

$$\Delta \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} c_{\ell} f_{\ell}(x) \right) = \sum_{\ell=0}^{k-1} c_{\ell} \Delta f_{\ell}(x)。$$

证 老样子, 我们证明 (i) (ii), 将剩下的推论留给读者作练习。设

(i) 设 $p(x) = cf(x)$ 。则

$$\begin{aligned} \Delta(cf(x)) &= \Delta p(x) \\ &= p(x+1) - p(x) \\ &= cf(x+1) - cf(x) \\ &= c(f(x+1) - f(x)) \\ &= c\Delta f(x)。 \end{aligned}$$

(ii) 设 $q(x) = f(x) \pm g(x)$ 。则

$$\Delta(f(x) \pm g(x)) = \Delta q(x)$$

$$\begin{aligned}
&= q(x+1) - q(x) \\
&= (f(x+1) \pm g(x+1)) - (f(x) \pm g(x)) \\
&= (f(x+1) - f(x)) \pm (g(x+1) - g(x)) \\
&= \Delta f(x) \pm \Delta g(x). \quad \text{§}
\end{aligned}$$

定义 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。记

$$\Delta^0 f(x) = f(x) \in \mathbb{F}[x],$$

并称其为 $f(x)$ 的 0 级差分 (zeroth-order difference)。1 级差分就是差分:

$$\Delta^1 f(x) = \Delta f(x) = \Delta(\Delta^0 f(x)) \in \mathbb{F}[x]。$$

1 级差分的差分是 2 级差分:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta^1 f(x)) \in \mathbb{F}[x]。$$

2 级差分的差分是 3 级差分:

$$\Delta^3 f(x) = \Delta(\Delta^2 f(x)) \in \mathbb{F}[x]。$$

一般地, e 级差分就是 $e-1$ 级差分的差分:

$$\Delta^e f(x) = \Delta(\Delta^{e-1} f(x)) \in \mathbb{F}[x]。$$

设 $t \in \mathbb{F}$ 。既然 $\Delta^e f(x)$ 是某个多项式

$$v_0 + v_1 x + \cdots + v_s x^s \in \mathbb{F}[x],$$

我们将

$$v_0 + v_1 t + \cdots + v_s t^s \in \mathbb{F}[x]$$

简单地写为 $\Delta^e f(t)$ 。

例 设

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 7。$$

根据定义, $f(x)$ 的 0 级差分就是自己:

$$\Delta^0 f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 7。$$

因为

$$(1+x)^3 = (1+x)^2(1+x)$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + 2x + x^2)(1 + x) \\
&= 1 + 2x + x^2 + x + 2x^2 + x^3 \\
&= 1 + 3x + 3x^2 + x^3,
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
f(x+1) &= 2(x+1)^3 + 3(x+1)^2 + 5(x+1) + 7 \\
&= 2x^3 + 9x^2 + 17x + 17.
\end{aligned}$$

从而 $f(x)$ 的 1 级差分是

$$\Delta^1 f(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = 6x^2 + 12x + 10.$$

因为

$$\Delta^1 f(x+1) = 6(x+1)^2 + 12(x+1) + 10 = 6x^2 + 24x + 28,$$

故 $f(x)$ 的 2 级差分是

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta^1 f(x)) = \Delta^1 f(x+1) - \Delta^1 f(x) = 12x + 18.$$

因为

$$\Delta^2 f(x+1) = 12(x+1) + 18 = 12x + 30,$$

故 $f(x)$ 的 3 级差分是

$$\Delta^3 f(x) = \Delta(\Delta^2 f(x)) = \Delta^2 f(x+1) - \Delta^2 f(x) = 12.$$

因为

$$\Delta^3 f(x+1) = 12,$$

故 $f(x)$ 的 4 级差分是

$$\Delta^4 f(x) = \Delta(\Delta^3 f(x)) = \Delta^3 f(x+1) - \Delta^3 f(x) = 0.$$

读者不难验证: 对任意超出 3 的整数 e , 必有

$$\Delta^e f(x) = 0.$$

由上面的计算, 可知

$$\Delta^0 f(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 7 = 17,$$

$$\Delta^1 f(1) = 6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + 10 = 28,$$

$$\Delta^2 f(1) = 12 \cdot 1 + 18 = 30,$$

$$\Delta^3 f(1) = 12,$$

$$\Delta^e f(1) = 0 \quad (e > 3).$$

高级差分适合如下性质:

命题 设 e 是非负整数。当 $c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{F}$, 且 $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{k-1}(x) \in \mathbb{F}[x]$ 时,

$$\Delta^e \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} c_\ell f_\ell(x) \right) = \sum_{\ell=0}^{k-1} c_\ell \Delta^e f_\ell(x)。$$

证 用数学归纳法。我们把具体过程留给读者当练习。 ✎

命题 设 e 是非负整数。设 k 是整数。则

$$\Delta^e \binom{x}{k} = \binom{x}{k-e}。$$

证 用数学归纳法。我们把具体过程留给读者当练习。 ✎

命题 设 e 是非负整数。设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。则

$$\Delta^e f(x) = \sum_{k=0}^e (-1)^{e-k} \binom{e}{k} f(x+k)。$$

证 当 $e = 0$ 时, 左侧是 $f(x)$, 右侧是

$$(-1)^0 \binom{0}{0} f(x+0) = f(x)。$$

当 $e = 1$ 时, 左侧是 $f(x+1) - f(x)$, 右侧是

$$(-1)^1 \binom{1}{0} f(x+0) + (-1)^0 \binom{1}{1} f(x+1) = -f(x) + f(x+1)。$$

所以, 命题对 $e = 0$ 或 $e = 1$ 成立。

设命题对 $e = \ell \geq 1$ 成立, 即

$$\Delta^\ell f(x) = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^{\ell-k} \binom{\ell}{k} f(x+k)。$$

则 $e = \ell + 1$ 时,

$$\begin{aligned} & \Delta^{\ell+1} f(x) \\ &= \Delta(\Delta^\ell f(x)) \\ &= \Delta^\ell f(x+1) - \Delta^\ell f(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^{\ell-k} \binom{\ell}{k} f(x+1+k) - \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^{\ell-k} \binom{\ell}{k} f(x+k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^{(\ell+1)-(k+1)} \binom{\ell}{k+1-1} f(x+k+1) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^{\ell+1-k} \binom{\ell}{k} f(x+k) \\
&= \sum_{k=1}^{\ell+1} (-1)^{\ell+1-k} \binom{\ell}{k-1} f(x+k) + \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^{\ell+1-k} \binom{\ell}{k} f(x+k) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell+1} (-1)^{\ell+1-k} \binom{\ell}{k-1} f(x+k) + \sum_{k=0}^{\ell+1} (-1)^{\ell+1-k} \binom{\ell}{k} f(x+k) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell+1} \left((-1)^{\ell+1-k} \binom{\ell}{k-1} f(x+k) + (-1)^{\ell+1-k} \binom{\ell}{k} f(x+k) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell+1} (-1)^{\ell+1-k} \left(\binom{\ell}{k-1} + \binom{\ell}{k} \right) f(x+k) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell+1} (-1)^{\ell+1-k} \binom{\ell+1}{k} f(x+k). \quad \text{证}
\end{aligned}$$

我们再补充一个跟广义二项系数有关的性质:

命题 设 k 是整数。则

$$\binom{0}{k} = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

证 显然。 证

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是次不高于 m 的多项式。我们知道, $f(x)$ 一定可以写为广义二项系数的线性组合:

$$f(x) = \sum_{k=0}^m c_k \binom{x}{k}.$$

对左右二侧求 e 级差分 ($e \leq m$), 有

$$\Delta^e f(x) = \sum_{k=0}^m c_k \binom{x}{k-e}.$$

用 0 替换 x , 有

$$\Delta^e f(0) = \sum_{k=0}^m c_k \binom{0}{k-e} = c_e.$$

所以

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \Delta^k f(0) \binom{x}{k}$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta^0 f(0) \binom{x}{0} + \Delta^1 f(0) \binom{x}{1} + \cdots + \Delta^m f(0) \binom{x}{m} \\
&= f(0) + \Delta f(0) \binom{x}{1} + \cdots + \Delta^m f(0) \binom{x}{m}.
\end{aligned}$$

我们已经证明了

命题 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是次不高于 m 的多项式。则

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^m \Delta^k f(0) \binom{x}{k} \\
&= \Delta^0 f(0) \binom{x}{0} + \Delta^1 f(0) \binom{x}{1} + \cdots + \Delta^m f(0) \binom{x}{m} \\
&= f(0) + \Delta f(0) \binom{x}{1} + \cdots + \Delta^m f(0) \binom{x}{m},
\end{aligned}$$

所以

$$S(n) = \sum_{\ell=0}^{n-1} f(\ell) = f(0) \binom{n}{1} + \Delta f(0) \binom{n}{2} + \cdots + \Delta^m f(0) \binom{n}{m+1}.$$

注意到

$$\Delta^k f(0) = \sum_{u=0}^k (-1)^{k-u} \binom{k}{u} f(u),$$

故计算 $\Delta^k f(0)$ 需要用到 $f(0), f(1), \dots, f(k)$ 这 $k+1$ 个数。也就是说, 计算 $\Delta^0 f(0), \Delta^1 f(0), \dots, \Delta^m f(0)$ 需要用到 $f(0), f(1), \dots, f(m)$ 这 $m+1$ 个数。

下面我们举几个具体的例, 帮助读者消化这种求和方法。

例 设 $f(x) = x^2 + x - 1$ 。求

$$S(n) = \sum_{\ell=0}^{n-1} f(\ell) = f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1).$$

这里, $m = 2$ 。所以, 我们计算 $f(0), f(1), f(2)$:

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 5.$$

由此, 不难算出:

$$\begin{aligned}
\Delta^0 f(0) &= f(0) = -1, \\
\Delta^1 f(0) &= f(1) - f(0) = 2, \\
\Delta^1 f(1) &= f(2) - f(1) = 4, \\
\Delta^2 f(0) &= \Delta^1 f(1) - \Delta^1 f(0) = 2.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \Delta f(0) \binom{x}{1} + \Delta^2 f(0) \binom{x}{2} \\ &= -1 + 2 \binom{x}{1} + 2 \binom{x}{2}. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{\ell=0}^{n-1} f(\ell) \\ &= -1 \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + 2 \binom{n}{3} \\ &= -n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \\ &= \frac{n(n+2)(n-2)}{3}. \end{aligned}$$

实操时, 往往用名为“差分表”的表进行计算。当 $m=2$ 时, 它长这样:

$$\begin{array}{rcl} \Delta^0 f(2) & & \\ \Delta^0 f(1) & \Delta^1 f(1) & \\ \Delta^0 f(0) & \Delta^1 f(0) & \Delta^2 f(0) \end{array}$$

在这个问题里, 差分表如下:

$$\begin{array}{rcl} 5 & & \\ 1 & 4 & \\ -1 & 2 & 2 \end{array}$$

例 求前 n 个非负整数的立方和

$$S(n) = 0^3 + 1^3 + \cdots + (n-1)^3 = \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell^3.$$

取 $f(x) = x^3$ 。这里, $m=3$ 。画出 $m=3$ 时的差分表:

$$\begin{array}{rclcl} \Delta^0 f(3) & & & & \\ \Delta^0 f(2) & \Delta^1 f(2) & & & \\ \Delta^0 f(1) & \Delta^1 f(1) & \Delta^2 f(1) & & \\ \Delta^0 f(0) & \Delta^1 f(0) & \Delta^2 f(0) & \Delta^3 f(0) & \end{array}$$

$\Delta^0 f(t)$ 就是 $f(t)$:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 8, \quad f(3) = 27.$$

写在表上, 就是

27			
8	$\Delta^1 f(2)$		
1	$\Delta^1 f(1)$	$\Delta^2 f(1)$	
0	$\Delta^1 f(0)$	$\Delta^2 f(0)$	$\Delta^3 f(0)$

由此可确定 1 级差分:

$$\Delta^1 f(2) = f(3) - f(2) = 19,$$

$$\Delta^1 f(1) = f(2) - f(1) = 7,$$

$$\Delta^1 f(0) = f(1) - f(0) = 1.$$

写在表上, 就是

27			
8	19		
1	7	$\Delta^2 f(1)$	
0	1	$\Delta^2 f(0)$	$\Delta^3 f(0)$

类似地, 可确定 2 级差分:

$$\Delta^2 f(1) = \Delta^1 f(2) - \Delta^1 f(1) = 12,$$

$$\Delta^2 f(0) = \Delta^1 f(1) - \Delta^1 f(0) = 6.$$

写在表上, 就是

27			
8	19		
1	7	12	
0	1	6	$\Delta^3 f(0)$

最后, 可确定 3 级差分:

$$\Delta^3 f(0) = \Delta^2 f(1) - \Delta^2 f(0) = 6.$$

写在表上, 就是

27			
8	19		
1	7	12	
0	1	6	6

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \Delta f(0) \binom{x}{1} + \Delta^2 f(0) \binom{x}{2} + \Delta^3 f(0) \binom{x}{3} \\ &= \binom{x}{1} + 6 \binom{x}{2} + 6 \binom{x}{3}. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{\ell=0}^{n-1} f(\ell) \\ &= \binom{x}{2} + 6 \binom{x}{3} + 6 \binom{x}{4} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} + n(n-1)(n-2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} \\ &= \frac{n(n-1)}{4} (2 + 4(n-2) + (n-2)(n-3)) \\ &= \frac{n(n-1)}{4} n(n-1) \\ &= \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

评注 回忆一下, 前 n 个非负整数的和

$$0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

上面的例告诉我们,

$$0^3 + 1^3 + \cdots + (n-1)^3 = (0 + 1 + \cdots + (n-1))^2.$$

所以, 前 n 个非负整数的立方和等于前 n 个非负整数的和的平方。

例 求前 n 个非负整数的 4 次幂和

$$S(n) = 0^4 + 1^4 + \cdots + (n-1)^4 = \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell^4.$$

取 $f(x) = x^4$ 。这里, $m = 4$ 。画出 $m = 4$ 时的差分表:

$$\begin{array}{cccccc} \Delta^0 f(4) & & & & & \\ \Delta^0 f(3) & \Delta^1 f(3) & & & & \\ \Delta^0 f(2) & \Delta^1 f(2) & \Delta^2 f(2) & & & \\ \Delta^0 f(1) & \Delta^1 f(1) & \Delta^2 f(1) & \Delta^3 f(1) & & \\ \Delta^0 f(0) & \Delta^1 f(0) & \Delta^2 f(0) & \Delta^3 f(0) & \Delta^4 f(0) & \end{array}$$

我们直接填差分表:

256				
81	$\Delta^1 f(3)$			
16	$\Delta^1 f(2)$	$\Delta^2 f(2)$		
1	$\Delta^1 f(1)$	$\Delta^2 f(1)$	$\Delta^3 f(1)$	
0	$\Delta^1 f(0)$	$\Delta^2 f(0)$	$\Delta^3 f(0)$	$\Delta^4 f(0)$
256				
81	175			
16	65	$\Delta^2 f(2)$		
1	15	$\Delta^2 f(1)$	$\Delta^3 f(1)$	
0	1	$\Delta^2 f(0)$	$\Delta^3 f(0)$	$\Delta^4 f(0)$
256				
81	175			
16	65	110		
1	15	50	$\Delta^3 f(1)$	
0	1	14	$\Delta^3 f(0)$	$\Delta^4 f(0)$
256				
81	175			
16	65	110		
1	15	50	60	
0	1	14	36	$\Delta^4 f(0)$
256				
81	175			
16	65	110		
1	15	50	60	
0	1	14	36	24

所以

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(0) + \Delta f(0) \binom{x}{1} + \Delta^2 f(0) \binom{x}{2} + \Delta^3 f(0) \binom{x}{3} + \Delta^4 f(0) \binom{x}{4} \\
 &= \binom{x}{1} + 14 \binom{x}{2} + 36 \binom{x}{3} + 24 \binom{x}{4}.
 \end{aligned}$$

从而

$$S(n) = \sum_{\ell=0}^{n-1} f(\ell)$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n}{2} + 14\binom{n}{3} + 36\binom{n}{4} + 24\binom{n}{5} \\
&= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{7n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{3n(n-1)(n-2)(n-3)}{2} \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{5} \\
&= \frac{n(n-1)}{30}(15 + 70(n-2) + 45(n-3)(n-2) \\
&\quad + 6(n-4)(n-3)(n-2)) \\
&= \frac{n(n-1)}{30}(6n^3 - 9n^2 + n + 1) \\
&= \frac{n(n-1)}{120}(24n^3 - 36n^2 + 4n + 4) \\
&= \frac{n(n-1)}{120}(3(2n)^3 - 9(2n)^2 + 2(2n) + 4) \\
&= \frac{n(n-1)}{120}(3(2n)^3 - 3 - 9(2n)^2 + 9 + 2(2n) - 2) \\
&= \frac{n(n-1)}{120}(3((2n)^3 - 1) - 9((2n)^2 - 1) + 2((2n) - 1)) \\
&= \frac{n(n-1)}{120}(2n-1)(3((2n)^2 + 2n + 1) - 9(2n+1) + 2) \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1)}{120}(12n^2 - 12n - 4) \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1)}{30}(3n^2 - 3n - 1) \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2 - 3n - 1)}{30}.
\end{aligned}$$