

Table of Contents

Preface	iii
Delving into Polynomials	1
Prerequisites	2
Definition of Polynomials	24
Division Algorithm	31
Roots of Polynomials	35

Preface

本文是瞎写的。我给本文的另一个名字是“Re: ゼロから始めるポリノミアルのイントロダクション”。不过想了想, 算了算了。龙鸣日语, 不好意思直接说出来。

这是写给中学生看的。

总是可以去这儿得到本文的最新版本:

<https://gitee.com/septsea/strange-book-zero>

<https://github.com/septsea/strange-book-zero>

就先说到这里。

评注 总算写完 Prerequisites 了。我写这玩意儿花了好久好久啊。先发布再说吧。

June 3, 2021

评注 忘记介绍域是什么东西了。我真是笨蛋啊。

June 3, 2021

Delving into Polynomials

Out of boredom, I wrote the article.

Gohan ni suru? Ofuro ni suru? Sore tomo... wa ta shi?

(Would you like dinner? Would you like a bath? Or... would you like me?)

Prerequisites

您将在本节熟悉一些记号与术语。不必细品。本节有很多定义。不要害怕：就当是认识一下词语好了。本文主要讨论多项式，所以并不会过多涉及到本节内容。说白了，本节是工具节。

Sets

定义 集 (*set*) 是具有某种特定性质的对象汇集而成的一个整体，其对象称为元 (*element*)。

定义 无元的集是空集 (*empty set*)。

评注 一般用小写字母表示元，大写字母表示集。

定义 一般地，若集 A 由元 a, b, c, \dots 作成，我们写

$$A = \{a, b, c, \dots\}.$$

还有一种记号。设集 A 是由具有某种性质 p 的对象汇集而成，则记

$$A = \{x \mid x \text{ possesses the property } p\}.$$

定义 若 a 是集 A 的元，则写 $a \in A$ 或 $A \ni a$ ，说 a 属于 (*to belong to*) A 或 A 包含 (*to contain*) a 。若 a 不是集 A 的元，则写 $a \notin A$ ，说 a 不属于 A 。[†]

例 全体整数作成的集用 \mathbb{Z} (*Zahl*)[‡] 表示。它可以写为

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots, n, -n, \dots\}.$$

例 全体非负整数作成的集用 \mathbb{N} (*natural*) 表示。它可以写为

$$\mathbb{N} = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ and } x \geq 0\}.$$

为了方便，也可以写为

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}.$$

定义 若任取 $a \in A$ ，都有 $a \in B$ ，则写 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ ，说 A 是 B 的子集 (*subset*) 或 B 是 A 的超集 (*superset*)。假如有一个 $b \in B$ 不是 A 的元，可以用“真” (*proper*) 形容之。

[†] 有点尴尬，我太菜了，那个“不包含”符号打不出来。

[‡] A German word which means *number*.

例 空集是任意集的子集。空集是任意不空的集的真子集。

例 全体有理数作成的集用 \mathbb{Q} (*quotient*) 表示。因为整数是有理数, 所以 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ 。因为有理数 $\frac{1}{2}$ 不是整数, 我们说 \mathbb{Z} 是 \mathbb{Q} 的真子集。

定义 全体实数作成的集用 \mathbb{R} (*real*) 表示。

定义 全体复数作成的集用 \mathbb{C} (*complex*) 表示。不难看出,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

定义 \mathbb{F} (*field*) 可表示 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 的任意一个。不难看出, \mathbb{F} 适合这几条:

- (i) $0 \in \mathbb{F}, 1 \in \mathbb{F}, 0 \neq 1$;
- (ii) 任取 $x, y \in \mathbb{F} (y \neq 0)$, 必有 $x - y, \frac{x}{y} \in \mathbb{F}$ 。

后面会见到稍详细的论述。

定义 设 \mathbb{L} 是 $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{F}$ 的任意一个。 \mathbb{L}^* 表示 \mathbb{L} 去掉 0 后得到的集。不难看出, \mathbb{L} 是 \mathbb{L}^* 的真超集。

定义 若集 A 与 B 包含的元完全一样, 则 A 与 B 是同一集。我们说 A 等于 B , 写 $A = B$ 。显然

$$A = B \iff A \subset B \text{ and } B \subset A.$$

定义 集 A 与 B 的交 (*intersection*) 是集

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}.$$

也就是说, $A \cap B$ 恰由 A 与 B 的公共元作成。

集 A 与 B 的并 (*union*) 是集

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}.$$

也就是说, $A \cup B$ 恰包含 A 与 B 的全部元。

类似地, 可定义多个集的交与并。

定义 设 A, B 是集。定义

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

$A \times A$ 可简写为 A^2 。类似地,

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}, \quad A^3 = A \times A \times A.$$

例 设 $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ 。则

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}。$$

而

$$B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}。$$

评注 一般地, $A \times B \neq B \times A$ 。假如 A, B 各自有 m, n 个元, 利用一点计数知识可以看出, $A \times B$ 有 mn 个元。

Functions

定义 假如通过一个法则 f , 使任取 $a \in A$, 都能得到唯一的 $b \in B$, 则说这个法则 f 是集 A 到集 B 的一个函数 (*function*)。元 b 是元 a 在函数 f 下的象 (*image*)。元 a 是元 b 在 f 下的一个原象 (*inverse image*)。这个关系可以写为

$$\begin{aligned} f: \quad & A \rightarrow B, \\ & a \mapsto b = f(a)。 \end{aligned}$$

称 A 是定义域 (*domain*), B 是陪域[†] (*codomain*)。

例 可以把 \mathbb{R}^2 看作平面上的点集。所以

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \\ & (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

是函数: 它表示点 (x, y) 到点 $(0, 0)$ 的距离。

例 设

$$A = \{\text{dinner, bath, me}\}, \quad B = \{0, 1\}。$$

法则

$$f_1: \quad \text{dinner} \mapsto 0, \quad \text{bath} \mapsto 1$$

不是 A 到 B 的函数, 因为它没有为 A 的元 me 规定象。但是, 如果记 $A_1 = \{\text{dinner, bath}\}$, 这个 f_1 可以是 A_1 到 B 的函数。

[†] 不要混淆陪域与象集 (*image, range*)。 f 的象集是

$$\text{Im } f = \{b \in B \mid b = f(a), a \in A\}。$$

这就是中学数学里的“值域”。

法则

$$\begin{aligned} f_2: \quad & \text{dinner} \mapsto 0, \\ & \text{bath} \mapsto 1, \\ & \text{me} \mapsto b \quad \text{where } b^2 = b \end{aligned}$$

不是 A 到 B 的函数, 因为它给 A 的元 me 规定的象不唯一。

法则

$$f_3: \quad \text{dinner} \mapsto 0, \quad \text{bath} \mapsto 1, \quad \text{me} \mapsto -1$$

不是 A 到 B 的函数, 因为它给 A 的元 me 规定的象不是 B 的元。但是, 如果记 $B_1 = \{-1, 0, 1\}$, 这个 f_3 可以是 A 到 B_1 的函数。

定义 设 f_1 与 f_2 都是 A 到 B 的函数。若任取 $a \in A$, 必有 $f_1(a) = f_2(a)$, 则说这二个函数相等, 写为 $f_1 = f_2$ 。

例 设 $A \subset \mathbb{C}$, 且 A 非空。定义二个 A 到 \mathbb{C} 的函数: $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = |x|^2$ 。如果 $A = \mathbb{R}$, 那么 $f_1 = f_2$ 。可是, 若 $A = \mathbb{C}$, f_1 与 f_2 不相等。

例 设 A 是全体正实数作成的集。定义二个 A 到 \mathbb{R} 的函数: $f_1(x) = \frac{1}{6} \log_2 x^3$, $f_2(x) = \log_4 x$ 。知道对数的读者可以看出, f_1 与 f_2 有着相同的对应法则, 故 $f_1 = f_2$ 。因为 f_2 是对数函数 (*logarithmic function*), 所以 f_1 也是。

评注 在上下文清楚的情况下, 可以单说函数的对应法则。比如, 中学数学课说“二次函数 $f(x) = x^2 + x - 1$ ”时, 定义域与陪域默认都是 \mathbb{R} 。中学的函数一般都是实数的子集到实数的子集的函数。所谓“自然定义域”是指 (在一定范围内) 一切使对应法则有意义的元构成的集。比如, 在中学, 我们说 $\frac{1}{x}$ 的自然定义域是 \mathbb{R}^* , \sqrt{x} 的自然定义域是一切非负实数。在研究复变函数时, 我们说 $\frac{1}{z}$ 的自然定义域是 \mathbb{C}^* 。如果不明确函数的定义域, 我们会根据上下文作出自然定义域作为它的定义域。

定义 A 到 A 的函数是 A 的变换 (*transform*)。换句话说, 变换是定义域跟陪域一样的函数。

Binary Functions

定义 A^2 到 A 的函数称为 A 的二元运算 (*binary functions*)。

例 设 $f(x, y) = x - y$ 。这个 f 是 \mathbb{Z} 的二元运算; 但是, 它不是 \mathbb{N} 的二元运算。

评注 设 \circ 是 A 的二元运算。代替 $\circ(x, y)$, 我们写 $x \circ y$ 。一般地, 若表示这个二元运算的符号不是字母, 我们就把这个符号写在二个元的中间。

定义 设 $T(A)$ 是全部 A 的变换作成的集。设 f, g 是 A 的变换。任取 $a \in A$, 当然有 $b = f(a) \in A$ 。所以, $g(b) = g(f(a))$ 也是 A 的元。当然, 这个 $g(f(a))$ 也是唯一确定的。这样, 我们说, f 与 g 的复合 (composition) $g \circ f$ 是

$$\begin{aligned} g \circ f: & & A &\rightarrow A, \\ & & a &\mapsto g(f(a)). \end{aligned}$$

所以, 复合是 $T(A)$ 的二元运算:

$$\begin{aligned} \circ: & & T(A) \times T(A) &\rightarrow T(A), \\ & & (g, f) &\mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

评注 设 A 有有限多个元。此时, 可排出 A 的元:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

设 f 是 A^2 到 B 的函数。则任给整数 $i, j, 1 \leq i, j \leq n$, 记

$$f(a_i, a_j) = b_{i,j} \in B.$$

可以用这样的表描述此函数:

	a_1	a_2	\cdots	a_n
a_1	$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	\cdots	$b_{1,n}$
a_2	$b_{2,1}$	$b_{2,2}$	\cdots	$b_{2,n}$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
a_n	$b_{n,1}$	$b_{n,2}$	\cdots	$b_{n,n}$

有的时候, 为了强调函数名, 可在左上角书其名:

f	a_1	a_2	\cdots	a_n
a_1	$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	\cdots	$b_{1,n}$
a_2	$b_{2,1}$	$b_{2,2}$	\cdots	$b_{2,n}$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
a_n	$b_{n,1}$	$b_{n,2}$	\cdots	$b_{n,n}$

这种表示函数的方式是方便的。如果这些 $b_{i,j}$ 都是 A 的元, 就说这张表是 A 的运算表。

例 设 $T = \{0, 1, -1\}$, $\circ(x, y) = xy$ 。不难看出, \circ 确实是 T 的二元运算。它的运算表如下:

	0	1	-1
0	0	0	0
1	0	1	-1
-1	0	-1	1

例 设 \mathbb{F}_{nu} 是将 \mathbb{F} 去掉 0, 1 后得到的集[†]。看下列 6 个法则:

$$\begin{aligned}
 f_0: & \quad x \mapsto x; \\
 f_1: & \quad x \mapsto 1 - x; \\
 f_2: & \quad x \mapsto \frac{1}{x}; \\
 f_3: & \quad x \mapsto 1 - \frac{1}{1 - x}; \\
 f_4: & \quad x \mapsto 1 - \frac{1}{x}; \\
 f_5: & \quad x \mapsto \frac{1}{1 - x}.
 \end{aligned}$$

记 $S_6 = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ 。可以验证, $S_6 \subset T(\mathbb{F}_{\text{nu}})$ 。

进一步地, 36 次复合告诉我们, 任取 $f, g \in S_6$, 必有 $g \circ f \in S_6$ 。可以验证, 这是 S_6 的 (复合) 运算表:

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_0	f_4	f_5	f_2	f_3
f_2	f_2	f_5	f_0	f_4	f_3	f_1
f_3	f_3	f_4	f_5	f_0	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_1	f_2	f_5	f_0
f_5	f_5	f_2	f_3	f_1	f_0	f_4

我们在本节会经常用 S_6 举例。

定义 设 \circ 是 A 的二元运算。若任取 $x, y, z \in A$, 必有

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

则说 f 适合结合律 (*associativity*)。此时, $(x \circ y) \circ z$ 或 $x \circ (y \circ z)$ 可简写为 $x \circ y \circ z$ 。

[†] 这个 \mathbb{F}_{nu} 只是临时记号: nu 表示 *nil, unity*。

例 \mathbb{Z} 的加法当然适合结合律。可是, 它的减法不适合结合律。

评注 变换的复合适合结合律。确切地, 设 f, g, h 都是 A 的变换。任取 $a \in A$, 则

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(a) &= h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))), \\ ((h \circ g) \circ f)(a) &= (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))).\end{aligned}$$

也就是说,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

例 S_6 的复合当然适合结合律。

定义 设 \circ 是 A 的二元运算。若任取 $x, y \in A$, 必有

$$x \circ y = y \circ x,$$

则说 \circ 适合交换律 (*commutativity*)。

例 \mathbb{F}^* 的乘法当然适合交换律。可是, 它的除法不适合交换律。

例 S_6 的复合不适合交换律, 因为 $f_1 \circ f_2 = f_4$, 而 $f_2 \circ f_1 = f_5$, 二者不相等。

评注 在本文里, \cdot 运算的优先级高于 $+$ 运算。所以, $a \cdot b + c$ 的意思就是

$$(a \cdot b) + c,$$

而不是

$$a \cdot (b + c).$$

定义 设 $+, \cdot$ 是 A 的二个二元运算。若任取 $x, y, z \in A$, 必有

$$(LD) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$$

则说 $+$ 与 \cdot 适合左 (\cdot) 分配律[†] (*left distributivity*)。类似地, 若

$$(RD) \quad (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x,$$

则说 $+$ 与 \cdot 适合右 (\cdot) 分配律 (*right distributivity*)。说既适合 LD 也适合 RD 的 $+$ 与 \cdot 适合 (\cdot) 分配律 (*distributivity*)。显然, 若 \cdot 适合交换律, 则 LD 与 RD 等价。

[†] 在不引起歧义时, 括号里的内容可省略。或者这么说: 当我们说 $+, \cdot$ 适合分配律时, 我们不会理解为 $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$ 。但有意思的是, 如果把 $+$ 理解为并, \cdot 理解为交, x, y, z 理解为集, 那这个式是对的。当然, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ 也是对的。

例 \mathbb{F} 的加法与乘法适合分配律。当然, 减法与乘法也适合分配律:

$$x(y - z) = xy - xz = yx - zx = (y - z)x.$$

甚至, 在正实数里, 加法与除法适合右分配律:

$$\frac{y+z}{x} = \frac{y}{x} + \frac{z}{x}.$$

定义 设 \circ 是 A 的二元运算。若任取 $x, y, z \in A$, 必有

$$(LC) \quad x \circ y = x \circ z \implies y = z,$$

则说 \circ 适合左消去律 (*left cancellation property*)。类似地, 若

$$(RC) \quad x \circ z = y \circ z \implies x = y,$$

则说 \circ 适合右消去律 (*right cancellation property*)。说既适合 LC 也适合 RC 的 \circ 适合消去律 (*cancellation property*)。显然, 若 \circ 适合交换律, 则 LC 与 RC 等价。

例 显然, \mathbb{N} 的乘法不适合消去律, 但 \mathbb{N}^* 的乘法适合消去律[†]。

例 考虑 $x \circ y = x^3 + y^2$ 。若把 \circ 视为 \mathbb{N} 的二元运算, 那么它适合消去律。若把 \circ 视为 \mathbb{Q} 的二元运算, 那么它适合右消去律。若把 \circ 视为 \mathbb{C} 的二元运算, 那么它不适合任何一个消去律。

例 一般地, 当 A 至少有二个元时, \circ (在 $T(A)$ 里) 不适合消去律。设 $a, b \in A, a \neq b$ 。考虑下面 4 个变换:

$$g_0: \quad a \mapsto a, \quad b \mapsto b, \quad x \mapsto x \text{ where } x \neq a, b;$$

$$g_1: \quad a \mapsto a, \quad b \mapsto a, \quad x \mapsto x \text{ where } x \neq a, b;$$

$$g_2: \quad a \mapsto b, \quad b \mapsto b, \quad x \mapsto x \text{ where } x \neq a, b;$$

$$g_3: \quad a \mapsto b, \quad b \mapsto a, \quad x \mapsto x \text{ where } x \neq a, b.$$

可以验证,

$$g_3 \circ g_1 = g_2 \circ g_1 = g_2 \circ g_3 = g_2.$$

由此可以看出, \circ 不适合任何一个消去律。

例 我们看 \circ 在 S_6 里是否适合消去律。取 $f, g, h \in S_6$ 。由表易知, 当 $g \neq h$ 时, $f \circ g \neq f \circ h$ (横着看运算表), 且 $g \circ f \neq h \circ f$ (竖着看运算表)。这说明, \circ 在 $T(\mathbb{F}_{\text{nu}})$ 的子集 S_6 里适合消去律。

[†] 后面提到整环时, 我们会稍微修改一下消去律的描述。

定义 设 \circ 是 A 的二元运算。若存在 $e \in A$, 使若任取 $x \in A$, 必有

$$e \circ x = x \circ e = x,$$

则说 e 是 A 的 (关于运算 \circ 的) 么元 (*identity*)。如果 e' 也是么元, 则

$$e = e \circ e' = e'.$$

例 \mathbb{F} 的加法的么元是 0, 且其乘法的么元是 1。

例 不难看出, 这个变换是 $T(A)$ 的么元:

$$\begin{aligned} \iota: \quad & A \rightarrow A, \\ & a \mapsto a. \end{aligned}$$

它也有个一般点的名字: 恒等变换 (*identity transform*)。

在 S_6 里, f_0 就是这里的 ι 。

定义 设 \circ 是 A 的二元运算。设 $x \in A$ 若存在 $y \in A$, 使

$$y \circ x = x \circ y = e,$$

则说 y 是 x 的 (关于运算 \circ 的) 逆元 (*inverse*)。

例 \mathbb{F} 的每个元都有加法逆元, 即其相反数。

评注 设 \circ 适合结合律。如果 y, y' 都是 x 的逆元, 则

$$y = y \circ e = y \circ (x \circ y') = (y \circ x) \circ y' = e \circ y' = y'.$$

此时, 一般用 x^{-1} 表示 x 的逆元。因为

$$x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e,$$

由上可知, x^{-1} 也有逆元, 且 $(x^{-1})^{-1} = x$ 。

例 一般地, 当 A 至少有二个元时, $T(A)$ 既有有逆元的变换, 也有无逆元的变换。还是看前面的 g_0, g_1, g_2, g_3 。首先, g_0 是么元 ι 。不难看出, g_0 与 g_3 都有逆元:

$$g_0 \circ g_0 = g_3 \circ g_3 = g_0.$$

不过, g_1 不可能有逆元。假设 g_1 有逆元 h , 则应有

$$(h \circ g_1)(a) = \iota(a) = a, \quad (h \circ g_1)(b) = \iota(b) = b.$$

可是, $g_1(a) = g_1(b) = a$, 故 $(h \circ g_1)(a) = (h \circ g_1)(b) = h(a)$, 它不能既等于 a 也等于 b , 矛盾!

例 再看 S_6 。由表可看出, $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ 的逆元分别是 $f_0, f_1, f_2, f_3, f_5, f_4$ 。

评注 设 \circ 适合结合律。如果 x, y 都有逆元, 那么 $x \circ y$ 也有逆元, 且

$$(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}。$$

为了说明这一点, 只要按定义验证即可:

$$\begin{aligned}(y^{-1} \circ x^{-1}) \circ (x \circ y) &= y^{-1} \circ (x^{-1} \circ x) \circ y = y^{-1} \circ e \circ y = y^{-1} \circ y = e, \\(x \circ y) \circ (y^{-1} \circ x^{-1}) &= x \circ (y \circ y^{-1}) \circ x^{-1} = x \circ e \circ x^{-1} = x \circ x^{-1} = e.\end{aligned}$$

这个规则往往称为袜靴规则 (*socks and shoes rule*): 设 y 是穿袜, x 是穿靴, $x \circ y$ 表示动作的复合: 先穿袜后穿靴。那么这个规则告诉我们, $x \circ y$ 的逆元就是先脱靴再脱袜。

评注 由此可见, 结合律是一条很重要的规则。我们算 $63 \cdot 8 \cdot 125$ 时也会想着先算 $8 \cdot 125$ 。

Semi-groups and Groups

定义 设 S 是非空集。设 \circ 是 S 的二元运算。若 \circ 适合结合律, 则称 S (关于 \circ) 是半群 (*semi-group*)。

例 \mathbb{N} 关于加法 (或乘法) 作成半群。

例 $T(A)$ 关于 \circ 作成半群。

评注 事实上, 这里要求 S 非空是有必要的。

首先, 空集没什么意思。其次, 前面所述的结合律、交换律、分配律等自动成立, 这是因为对形如“若 p , 则 q ”的命题 (*proposition*) 而言, p 为假推出整个命题为真。这是相当“危险”的!

定义 设 m 是正整数。设 x 是半群 S 的元。令

$$x^1 = x, \quad x^m = x \circ x^{m-1}。$$

x^m 称为 x 的 m 次幂。不难看出, 当 m, n 都是正整数时,

$$x^{m+n} = x^m \circ x^n, \quad (x^m)^n = x^{mn}。$$

假如 S 有二个元 x, y 适合 $x \circ y = y \circ x$, 那么还有

$$(x \circ y)^m = x^m \circ y^m。$$

例 还是看熟悉的 \mathbb{N} 。对于乘法而言, 这里的幂就是普通的幂——一个数自乘多次的结果。对于加法而言, 这里的幂相当于乘法——一个数自加多次的结果。

定义 设 G 关于 \circ 是半群。若 G 的关于 \circ 的幺元存在, 且 G 的任意元都有关于 \circ 的逆元, 则 G 是群 (*group*)。

例 \mathbb{N} 关于加法 (或乘法) 不能作成群。 \mathbb{Z} 关于加法作成群, 但关于乘法不能作成群。 \mathbb{F} 关于乘法不能作成群, 但 \mathbb{F}^* 关于乘法作成群。不过, \mathbb{F}^* 关于加法不能作成群。

例 $T(A)$ 一般不是群。不过, S_6 是群。

评注 群有唯一的幺元。群的每个元都有唯一的逆元。

评注 设 G 关于 \circ 是群。我们说, \circ 适合消去律。

假如 $x \circ y = x \circ z$ 。二侧左边乘 x 的逆元 x^{-1} , 就有

$$x^{-1} \circ (x \circ y) = x^{-1} \circ (x \circ z).$$

由于 \circ 适合结合律,

$$(x^{-1} \circ x) \circ y = (x^{-1} \circ x) \circ z.$$

也就是

$$e \circ y = e \circ z.$$

这样, $y = z$ 。类似地, 用同样的方法可以知道, 右消去律也对。

定义 已经知道, 群的每个元 x 都有逆元 x^{-1} 。由此, 当 m 是正整数时, 定义 $x^{-m} = (x^{-1})^m$ 。再定义 $x^0 = e$ 。利用半群的结果, 可以看出, 当 m, n 都是整数时,

$$x^{m+n} = x^m \circ x^n, \quad (x^m)^n = x^{mn}.$$

假如 G 有二个元 x, y 适合 $x \circ y = y \circ x$, 那么还有

$$(x \circ y)^m = x^m \circ y^m.$$

例 对于 \mathbb{F}^* 的乘法而言, 这里的任意整数幂跟普通的整数幂没有任何区别。我们学习数的负整数幂的时候, 也是借助倒数定义的。

Subgroups

定义 设 G 关于 \circ 是群。设 $H \subset G$, H 非空。若 H 关于 \circ 也作成群, 则 H 是 G 的子群 (*subgroup*)。

例 对加法来说, \mathbb{Z} 是 \mathbb{F} 的子群。对乘法来说, \mathbb{Z}^* 不是 \mathbb{F}^* 的子群。

评注 设 $H \subset G$, H 非空。 H 是 G 的子群的一个必要与充分条件是: 任取 $x, y \in H$, 必有 $x \circ y^{-1} \in H$ 。

怎么说明这一点呢? 先看充分性。任取 $x \in H$, 则 $e = x \circ x^{-1} \in H$ 。任取 $y \in H$, 则 $y^{-1} = e \circ y^{-1} \in H$ 。所以

$$x \circ y = x \circ (y^{-1})^{-1} \in H。$$

\circ 在 G 适合结合律, $H \subset G$, 所以 \circ 作为 H 的二元运算也适合结合律。至此, H 是半群。

前面已经说明, $e \in H$, 所以 H 的关于 \circ 的么元存在。进一步地, $x \in H$ 在 G 里的逆元也是 H 的元, 所以 H 的任意元都有关于 \circ 的逆元。这样, H 是群。顺便一提, 我们刚才也说明了, G 的么元也是 H 的么元, 且 H 的元在 G 里的逆元也是在 H 里的逆元。

再看必要性。假设 H 是一个群。任取 $x, y \in H$, 我们要说明 $x \circ y^{-1} \in H$ 。看上去有点显然呀! H 是群, 所以 y 有逆元 y^{-1} , 又因为 \circ 是 H 的二元运算, $x \circ y^{-1} \in H$ 。不过要注意一个细节。我们说明充分性时, y^{-1} 被认为是 y 在 G 里的逆元; 可是, 刚才的论证里 y^{-1} 实则是 y 在 H 里的逆元。大问题! 怎么解决呢? 如果我们说明 y 在 H 里的逆元也是 y 在 G 里的逆元, 那这个漏洞就被修复了。

我们知道, H 有么元 e_H , 所以 $e_H \circ e_H = e_H$ 。 e_H 是 G 的元, 所以 e_H 在 G 里有逆元 $(e_H)^{-1}$ 。这样,

$$\begin{aligned} e_H &= e \circ e_H \\ &= ((e_H)^{-1} \circ e_H) \circ e_H \\ &= (e_H)^{-1} \circ (e_H \circ e_H) \\ &= (e_H)^{-1} \circ e_H \\ &= e。 \end{aligned}$$

取 $y \in H$ 。 y 在 H 里有逆元 z , 即

$$z \circ y = y \circ z = e_H = e。$$

y, z 都是 G 的元。这样, 根据逆元的唯一性, z 自然是 y 在 G 里的逆元。

Additive Groups

定义 若 G 关于名为 $+$ 的二元运算作成群, 么元 e 读作“零元”写作 0 , $x \in G$ 的逆元 x^{-1} 读作“ x 的相反元”写作 $-x$, 且 $+$ 适合交换律, 则说 G 是加群 (additive group)。相应地, “元的幂”也应该改为“元的倍”: x^m 写为 mx 。用加法语言改写前面的幂的规则, 就得到了倍的规则: 对任意 $x, y \in G, m, n \in \mathbb{Z}$, 有

$$\begin{aligned}(m+n)x &= mx + nx, \\ m(nx) &= (mn)x, \\ m(x+y) &= mx + my.\end{aligned}$$

顺便一提, 在这种记号下, $x-y$ 是 $x+(-y)$ 的简写。并且

$$x+y = x+z \implies y=z.$$

由于这里的加法适合交换律, 直接换位就是右消去律。前面说, 若运算适合结合律, 则 x 的逆元的逆元还是 x 。这句话用加法语言写, 就是

$$-(-x) = x.$$

前面的“袜靴规则”就是

$$-(x+y) = (-y) + (-x) = (-x) + (-y) = -x - y.$$

这就是熟悉的去括号法则。这里体现了交换律的作用。

评注 初见此定义可能会觉得有些混乱: 怎么“倒数”又变为“相反数”了? 其实这都是借鉴已有写法。前面, \circ 虽然不是 \cdot , 但这个形状暗示着乘法, 因此有 x^{-1} 这样的记号; 现在, 运算的名字是 $+$, 自然要根据形状作出相应的改变。其实, 这里“名为 $+$ ”“零元”“相反元”都不是本质——换句话说, 还是可以用老记号。不过, 我们主要接触至少与二种运算相关联的结构——整环与域, 所以用二套记号、名字是有必要的。

评注 前面的 $x^0 = e$ 在加群里变为 $0x = 0$ 。看上去“很普通”, 不过左边的 0 是整数, 右边的 0 是加群的零元, 二者一般不一样!

例 显而易见, \mathbb{Z}, \mathbb{F} 都是加群。

例 S_6 不是加群, 因为它的二元运算不适合交换律。

评注 类似地, 可以定义子加群 (sub-additive group)。这里, 就直接用等价刻画来描述它: “ G 的非空子集 H 是加群 G 的子加群的一个必要与充分条件是: 任取 $x, y \in H$, 必有 $x-y \in H$ 。”

Sums

定义 设 f 是 \mathbb{Z} 的非空子集 S 到加群 G 的函数。设 p, q 是二个整数。如果 $p \leq q$, 则记

$$\sum_{j=p}^q f(j) = f(p) + f(p+1) + \cdots + f(q)。$$

也就是说, $\sum_{j=p}^q f(j)$ 就是 $q - (p - 1)$ 个元的和的一种简洁的表示法。如果 $p > q$, 约定 $\sum_{j=p}^q f(j) = 0$ 。

例 我们已经知道, $n \geq 0$ 时

$$0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}。$$

用 \sum 写出来, 就是

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}。$$

这里的 k 是所谓的 “dummy variable”。所以,

$$\sum_{j=0}^{n-1} j = \sum_{k=0}^{n-1} k = \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell = \frac{n(n-1)}{2}。$$

例 f 可以是常函数:

$$\sum_{t=p}^q 1 = \begin{cases} q - p + 1, & q \geq p; \\ 0, & q < p。 \end{cases}$$

例 设 f 与 g 是 \mathbb{Z} 的非空子集 S 到加群 G 的函数。因为加群的加法适合结合律与交换律, 所以

$$\sum_{j=p}^q (f(j) + g(j)) = \sum_{j=p}^q f(j) + \sum_{j=p}^q g(j)。$$

评注 设 $f(i, j)$ 是 \mathbb{Z}^2 的非空子集到加群 G 的函数。记

$$S_C = \sum_{j=p}^q \sum_{i=m}^n f(i, j), \quad S_R = \sum_{i=m}^n \sum_{j=p}^q f(i, j),$$

其中 $q \geq p, n \geq m$ 。 $\sum_{i=m}^n f(i, j)$ 是何物? 暂时视 i 之外的变元为常元, 则

$$\sum_{i=m}^n f(i, j) = f(m, j) + f(m+1, j) + \cdots + f(n, j)。$$

$\sum_{j=p}^q \sum_{i=m}^n f(i, j)$ 是 $\sum_{j=p}^q (\sum_{i=m}^n f(i, j))$ 的简写:

$$\sum_{j=p}^q \sum_{i=m}^n f(i, j) = \sum_{i=m}^n f(i, p) + \sum_{i=m}^n f(i, p+1) + \cdots + \sum_{i=m}^n f(i, q).$$

$\sum_{i=m}^n \sum_{j=p}^q f(i, j)$ 有着类似的解释。我们说, S_C 一定与 S_R 相等。
记

$$C_j = \sum_{i=m}^n f(i, j), \quad R_i = \sum_{j=p}^q f(i, j).$$

考虑下面的表:

$f(m, p)$	$f(m, p+1)$	\cdots	$f(m, q)$	R_m
$f(m+1, p)$	$f(m+1, p+1)$	\cdots	$f(m+1, q)$	R_{m+1}
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
$f(n, p)$	$f(n, p+1)$	\cdots	$f(n, q)$	R_n
C_p	C_{p+1}	\cdots	C_q	

由此, 不难看出, S_C 与 S_R 只是用不同的方法将 $(n-m+1)(q-p+1)$ 个元相加罢了。

评注 上面的例其实就是一个特殊情形 ($n-m=1$)。

Rings

定义 设 R 是加群。设 \cdot (读作“乘法”) 也是 R 的二元运算。假设

(i) \cdot 适合结合律;

(ii) $+$ 与 \cdot 适合分配律。

我们说 R (关于 $+$ 与 \cdot) 是环 (*ring*)。

评注 在不引起歧义的情况下, 可省去 \cdot 。例如, $a \cdot b$ 可写为 ab 。

例 \mathbb{Z}, \mathbb{F} (关于普通加法与乘法) 都是环。

例 全体偶数作成的集也是环。一般地, 设 k 是整数, 则全体 k 的倍作成的集是环。

例 这里举一个“平凡的” (*trivial*) 例。 N 只有一个元 0 。可以验证, N 关于普通加法与乘法作成群。这也是“最小的环”。在上个例里, 取 $k=0$ 就是 N 。

例 这里举一个“不平凡的” (*nontrivial*) 例。设 $R = \{0, a, b, c\}$ 。加法和乘法由以下二个表给定:

+	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

·	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
b	0	a	b	c
c	0	a	b	c

可以验证, 这是一个环。

评注 我们看一下环的简单性质。

已经知道, R 的任意元的“整数 0 倍”是 R 的零元。不禁好奇, 零元乘任意元会是什么结果。首先, 回想起, R 的零元适合 $0 + 0 = 0$ 。利用分配律, 当 $x \in R$ 时,

$$0x = (0 + 0)x = 0x + 0x。$$

我们知道, 加法适合消去律。所以

$$0 = 0x。$$

类似地, $x0 = 0$ 。也许有点眼熟? 但是这里左右二侧的 0 都是 R 的元, 不一定是数!

因为

$$xy + (-x)y = (x - x)y = 0,$$

$$xy + x(-y) = x(y - y) = 0,$$

所以

$$(-x)y = x(-y) = -xy。$$

从而

$$(-x)(-y) = -(x(-y)) = -(-xy) = xy。$$

根据分配律,

$$x(y_1 + \cdots y_n) = xy_1 + \cdots + xy_n,$$

$$(x_1 + \cdots + x_m)y = x_1y + \cdots + x_my。$$

二式联合, 就是

$$(x_1 + \cdots + x_m)(y_1 + \cdots y_n) = x_1y_1 + \cdots + x_1y_n + \cdots + x_my_1 + \cdots + x_my_n。$$

利用 \sum 符号, 此式可以写为

$$\left(\sum_{i=1}^m x_i\right) \left(\sum_{j=1}^n y_j\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j.$$

所以, 若 n 是整数, $x, y \in R$, 则

$$(nx)y = n(xy) = x(ny).$$

对于正整数 m, n 与 R 的元 x , 有

$$x^{m+n} = x^m x^n, \quad (x^m)^n = x^{mn}.$$

假如 R 有二个元 x, y 适合 $xy = yx$, 那么还有

$$(xy)^m = x^m y^m.$$

例 在 \mathbb{Z}, \mathbb{F} 里, 这些就是我们熟悉的 (部分的) 数的运算律。

评注 类似地, 可以定义子环 (*subring*)。这里, 就直接用等价刻画来描述它: “ R 的非空子集 S 是环 R 的子环的一个必要与充分条件是: 任取 $x, y \in S$, 必有 $x - y \in S, xy \in S$ 。”

定义 设 R 是环。假设任取 $x, y \in R$, 必有 $xy = yx$, 就说 R 是交换环 (*commutative ring*)。

评注 以后接触的环都是交换环。

Domains

定义 设 D 是环。假设

- (i) 任取 $x, y \in D$, 必有 $xy = yx$;
 - (i) 存在 $1 \in D, 1 \neq 0$, 使任取 $x \in D$, 必有 $1x = x1 = x$;
 - (ii) \cdot 适合“消去律变体”[†]: 若 $xy = xz, x \neq 0$, 则 $y = z$ 。
- 我们说 D (关于 $+$ 与 \cdot) 是整环 (*domain*), *integral domain*。

例 \mathbb{Z}, \mathbb{F} 都是整环。当然, 也有介于 \mathbb{Z} 与 \mathbb{F} 之间的整环。假如 $s \in \mathbb{C}$ 的平方是整数, 那么全体形如 $x + sy$ ($x, y \in \mathbb{Z}$) 的数作成一個整环。

例 看一个有限整环的例。设 V (*Viererguppe*)[‡] 是 4 元集:

$$V = \{0, 1, \tau, \tau^2\}.$$

[†] 一般地, 这也可称为消去律。

[‡] A German word which means *four-group*.

加法与乘法由下面的运算表决定:

+	0	1	τ	τ^2	\cdot	0	1	τ	τ^2
0	0	1	τ	τ^2	0	0	0	0	0
1	1	0	τ^2	τ	1	0	1	τ	τ^2
τ	τ	τ^2	0	1	τ	0	τ	τ^2	1
τ^2	τ^2	τ	1	0	τ^2	0	τ^2	1	τ

可以验证, V 不但是一个环, 它还适合整环定义的条件 (i) (ii) (iii)。因此, V 是整环。

在 V 里, $1 + 1 = 0$, 这跟平常的加法有点不一样。换句话说, 这里的 0 跟 1 已经不是我们熟悉的数了。

例 全体偶数作成的集是交换环, 却不是整环。

例 再来看一个非整环例。考虑 \mathbb{Z}^2 。设 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ 。规定

$$\begin{aligned}(a, b) &= (c, d) \iff a = c \text{ and } b = d, \\ (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d), \\ (a, b)(c, d) &= (ac, bd).\end{aligned}$$

可以验证, 在这二种运算下, \mathbb{Z}^2 作成交换环, 其加法、乘法幺元分别是 $(0, 0)$, $(1, 1)$ 。可是

$$(1, 0) \neq (0, 0), \quad (0, 1) \neq (0, -1), \quad (1, 0)(0, 1) = (1, 0)(0, -1).$$

也就是说, 乘法不适合消去律。

评注 可是, 如果这么定义乘法, 那么 \mathbb{Z}^2 可作为一个整环:

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

事实上, 这就是复数乘法, 因为

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

评注 类似地, 可以定义子整环 (*subdomain*)。这里, 就直接用前面的等价刻画来描述它: “ D 的非空子集 S 是整环 D 的子整环的一个必要与充分条件是: (i) $1 \in S$; (ii) 任取 $x, y \in S$, 必有 $x - y \in S$, $xy \in S$ 。”

例 设 $D \subset \mathbb{C}$, 且 D 是整环。不难看出, $\mathbb{Z} \subset D$ 。

Sums and Products

定义 设 f 是 \mathbb{Z} 的非空子集 S 到整环 D 的函数。设 p, q 是二个整数。如果 $p \leq q$, 则记

$$\prod_{j=p}^q f(j) = f(p) \cdot f(p+1) \cdot \cdots \cdot f(q)。$$

也就是说, $\prod_{j=p}^q f(j)$ 就是 $q - (p - 1)$ 个元的积的一种简洁的表示法。如果 $p > q$, 约定 $\prod_{j=p}^q f(j) = 1。$

定义 设 n 是正整数。那么 $1, 2, \dots, n$ 的积是 n 的阶乘 (*factorial*):

$$n! = \prod_{j=1}^n j。$$

顺便约定 $0! = 1。$

评注 不难看出, 当 n 是正整数时,

$$n! = n \cdot (n-1)!。$$

例 不难验证, 下面是 0 至 9 的阶乘:

$0! = 1,$	$1! = 1,$
$2! = 2,$	$3! = 6,$
$4! = 24,$	$5! = 120,$
$6! = 720,$	$7! = 5\,040,$
$8! = 40\,320,$	$9! = 362\,880。$

评注 因为整环的乘法也适合结合律与交换律, 所以

$$\begin{aligned} \prod_{j=p}^q (f(j) \cdot g(j)) &= \prod_{j=p}^q f(j) \cdot \prod_{j=p}^q g(j), \\ \prod_{j=p}^q \prod_{i=m}^n f(i, j) &= \prod_{i=m}^n \prod_{j=p}^q f(i, j), \end{aligned}$$

其中, $\prod_{j=p}^q \prod_{i=m}^n f(i, j)$ 当然是 $\prod_{j=p}^q (\prod_{i=m}^n f(i, j))$ 的简写。

例 回顾一下 \sum 符号。我们已经知道

$$\sum_{j=p}^q (f(j) + g(j)) = \sum_{j=p}^q f(j) + \sum_{j=p}^q g(j)。$$

因为整环有分配律, 故当 $c \in D$ 与变元 j 无关时[†]

$$\sum_{j=p}^q cf(j) = c \sum_{j=p}^q f(j)。$$

进而, 当 c, d 都是常元时,

$$\sum_{j=p}^q (cf(j) + dg(j)) = c \sum_{j=p}^q f(j) + d \sum_{j=p}^q g(j)。$$

评注 类似地, 当 $q \geq p$, c 是常元时,

$$\prod_{j=p}^q cf(j) = c^{q-p+1} \prod_{j=p}^q f(j)。$$

定义 最后介绍一下双阶乘 (*double factorial*)。前 n 个正偶数的积是 $2n$ 的双阶乘:

$$(2n)!! = \prod_{j=1}^n 2j。$$

前 n 个正奇数是 $2n-1$ 的双阶乘:

$$(2n-1)!! = \prod_{j=1}^n (2j-1)。$$

顺便约定 $0!! = (-1)!! = 1$ 。

评注 不难看出, 对任意正整数 m , 都有

$$m!! = m \cdot (m-2)!!。$$

双阶乘可以用阶乘表示:

$$\begin{aligned} (2n)!! &= 2^n n!, \\ (2n-1)!! &= \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}。 \end{aligned}$$

由此可得

$$n!! \cdot (n-1)!! = n!。$$

例 不难验证, 下面是 1 至 10 的双阶乘:

1!! = 1,	2!! = 2,
3!! = 3,	4!! = 8,
5!! = 15,	6!! = 48,
7!! = 105,	8!! = 384,
9!! = 945,	10!! = 3 840。

[†] 这样的元称为常元 (*constant*)。

Units and Fields

定义 设 D 是整环。设 $x \in D$ 。若存在 $y \in D$ 使 $xy = 1$, 则说 x 是 D 的单位 (*unit*)。

评注 不难看出, D 至少有一个单位 1 , 因为 $1 \cdot 1 = 1$ 。定义里的 y 自然就是 x 的 (乘法) 逆元, 其一般记为 x^{-1} 。 x^{-1} 当然也是单位。二个单位 x, y 的积 xy 也是单位: $(xy)(y^{-1}x^{-1}) = 1$ 。单位的乘法当然适合结合律。这样, D 的单位作成是一个 (乘法) 群。姑且叫 D 的所有单位作成的集为单位群 (*unit group*) 吧!

评注 不难看出, 0 一定不是单位。

例 看全体整数作成的整环 \mathbb{Z} 。它恰有二个单位: 1 与 -1 。

例 \mathbb{F} 也是整环。它有无数个单位: 任意 \mathbb{F}^* 的元都是单位。

例 前面的 4 元集 V 的非零元都是单位。

例 现在看一个不那么平凡的例。设

$$D = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

这个 D (关于数的运算) 作成整环。

首先, 我们说, 不存在有理数 q 使 $q^2 = 3$ 。用反证法。设 $q = \frac{m}{n}$, m, n 是非零整数。我们知道, 分数可以约分, 故可以假设 m, n 不全为 3 的倍。这样

$$m^2 = 3n^2.$$

所以 m^2 一定是 3 的倍。因为

$$(3\ell)^2 = 3 \cdot 3\ell^2,$$

$$(3\ell \pm 1)^2 = 3(3\ell^2 \pm 2\ell) + 1,$$

故由此可看出, m 也是 3 的倍。记 $m = 3u$ 。这样

$$3u^2 = n^2.$$

所以 n 也是 3 的倍。这跟假设矛盾!

再说一下 D 的二个元相等意味着什么。设 a, b, c, d 都是整数。那么

$$a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3} \implies (a - c)^2 = 3(d - b)^2.$$

若 $d - b \neq 0$, 则 $\frac{a-c}{d-b}$ 是有理数, 且

$$\left(\frac{a-c}{d-b}\right)^2 = 3,$$

而这是荒谬的。所以 $d - b = 0$ 。这样 $a - c = 0$ 。

现在再来看单位问题。若 k 是大于 1 的整数, 则 k 不是 D 的单位。反证法。若 k 是单位, 则有 $c, d \in \mathbb{Z}$ 使

$$1 = k(c + d\sqrt{3}) = kc + kd\sqrt{3} \implies 1 = kc,$$

矛盾!

D 有无数多个单位。因为

$$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1,$$

故对任意正整数 n , 有

$$(2 + \sqrt{3})^n (2 - \sqrt{3})^n = 1.$$

所以, $(2 \pm \sqrt{3})^n$ 是单位。

定义 设 F 是整环。若每个 F 的而不是 0 的元都是 F 的单位, 则说 F 是域 (*field*)。

例 上面的 \mathbb{F} 跟 V 是域。这也解释了为什么我们用 \mathbb{F} 表示 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 之一。

评注 在域 F 里, 只要 $a \neq 0$, 则 a^{-1} 有意义。那么, 我们说 $\frac{b}{a}$ 就是 $ba^{-1} = a^{-1}b$ 的简写。不难验证, 当 $a, c \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{d}{c} \iff bc = da, \\ \frac{b}{a} \pm \frac{d}{c} &= \frac{bc \pm da}{ac}, \\ \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} &= \frac{bd}{ac}. \end{aligned}$$

若 $d \neq 0$, 则

$$\frac{\frac{b}{a}}{\frac{d}{c}} = \frac{bc}{da}.$$

这就是我们熟知的分数运算法则。

评注 类似地, 可以定义子域 (*subfield*)。这里, 就直接用前面的等价刻画来描述它: “ F 的非空子集 K 是域 F 的子域的一个必要与充分条件是: (i) $1 \in K$; (ii) 任取 $x, y \in K, y \neq 0$, 必有 $x - y \in K, \frac{x}{y} \in K$ 。”

例 设 $F \subset C$, 且 F 是域。不难看出, $\mathbb{Q} \subset F$ 。

Definition of Polynomials

现在开始介绍多项式。

定义 设 D 是整环。设 x 是不在 D 里的任意一个文字。形如

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \quad (n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in D, a_n \neq 0)$$

的表达式称为 D 上 x 的一个多项式 (*polynomial in x over D*)。 n 称为其次 (*degree*), a_i 称为其 i 次系数 (*the i^{th} coefficient*), a_ix^i 称为其 i 次项 (*the i^{th} coefficient*)。 $f(x)$ 的次可写为 $\deg f(x)$ 。

若二个多项式的次与各同次系数均相等, 则二者相等。

多项式的系数为 0 的项可以不写。

约定 $0 \in D$ 也是多项式, 称为零多项式。零多项式的次是 $-\infty$ 。任取整数 m , 约定

$$-\infty = -\infty, \quad -\infty < m, \quad -\infty + m = m + (-\infty) = -\infty.$$

当然, 还约定, 零多项式只跟自己相等。换句话说,

$$a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n = 0$$

的一个必要与充分条件是

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

D 上 x 的所有多项式作成的集是 $D[x]$:

$$D[x] = \{ a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in D \}.$$

文字 x 只是一个符号, 它与 D 的元的和与积都是形式的。我们说, x 是不定元 (*indeterminate*)。

例 $0y^0 + 1y^1 + (-1)y^2 + 0y^3 + (-7)y^4 \in \mathbb{Z}[y]$ 是一个 4 次多项式。顺便一提, 一般把 y^1 写为 y 。这个多项式的一个更普通的写法是

$$y - y^2 - 7y^4.$$

也许 y^0 看起来有些奇怪。如上所言, 这只是一个形式上的表达式。我们之后再处理这个小细节。

例 $z^0 + z + z^{\frac{3}{2}}$ 不是 z 的多项式。

评注 文字 x 的意义在数学中是不断进化的 (*evolving*)。在中小学里, x 是未知元 (*unknown*): 虽然它是待求的, 但是它是一个具体的数。后来在函数里, x 表示变元 (*variable*), 不过它的取值范围是确定的。在上面的定义里, x 仅仅是一个文字, 成为不定元。

定义 设

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad g(x) = b_0x^0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

是 $D[x]$ 的元。规定加法如下:

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n。$$

例 取 $\mathbb{Z}[x]$ 的二个元 $f(x) = x^0 + 2x^2$, $g(x) = -3x^0 + 4x - x^3$ 。先改写一下:

$$f(x) = 1x^0 + 0x + 2x^2 + 0x^3, \quad g(x) = -3x^0 + 4x + 0x^2 + (-1)x^3。$$

所以

$$f(x) + g(x) = -2x^0 + 4x + 2x^2 - x^3。$$

命题 $D[x]$ 作成加群。

证 设

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

$$g(x) = b_0x^0 + b_1x + \cdots + b_nx^n,$$

$$h(x) = c_0x^0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$$

是 $D[x]$ 的元。根据加法的定义, $+$ 显然是 $D[x]$ 的二元运算。因为 D 的加法适合交换律, 故

$$\begin{aligned} g(x) + f(x) &= (b_0 + a_0)x^0 + (b_1 + a_1)x + \cdots + (b_n + a_n)x^n \\ &= (a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n \\ &= f(x) + g(x)。 \end{aligned}$$

也就是说, $D[x]$ 的加法适合交换律。

注意到

$$\begin{aligned} &(f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= ((a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n) \\ &\quad + (c_0x^0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) \\ &= ((a_0 + b_0) + c_0)x^0 + ((a_1 + b_1) + c_1)x + \cdots + ((a_n + b_n) + c_n)x^n \\ &= (a_0 + b_0 + c_0)x^0 + (a_1 + b_1 + c_1)x + \cdots + (a_n + b_n + c_n)x^n。 \end{aligned}$$

类似地, 计算 $f(x) + (g(x) + h(x))$ 也可以得到一样的结果。也就是说, $D[x]$ 的加法适合结合律。

零多项式可以写为

$$0 = 0x^0 + 0x + \cdots + 0x^n。$$

这样

$$\begin{aligned} 0 + f(x) &= (0 + a_0)x^0 + (0 + a_1)x + \cdots + (0 + a_n)x^n \\ &= a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \\ &= f(x)。 \end{aligned}$$

类似地, $f(x) + 0 = f(x)$ 。

记

$$\underline{f}(x) = (-a_0)x^0 + (-a_1)x + \cdots + (-a_n)x^n。$$

这样

$$\begin{aligned} \underline{f}(x) + f(x) &= (-a_0 + a_0)x^0 + (-a_1 + a_1)x + \cdots + (-a_n + a_n)x^n \\ &= 0x^0 + 0x + \cdots + 0x^n \\ &= 0。 \end{aligned}$$

类似地, $f(x) + \underline{f}(x) = 0$ 。以后, 我们把这个 $\underline{f}(x)$ 用普通的符号写为

$$-f(x) = -a_0x^0 - a_1x - \cdots - a_nx^n。$$

综上, $D[x]$ 是加群。



评注 这算是本文的第零个单独写出的命题了。我们也比较详细地写出了一个证明 (*proof*)。写完证明后, 我们还比了一个 V 形手势 (*the victory sign*)。以后, 每做完一道题就给自己鼓励吧!

评注 可以看出, $f(x) \pm g(x)$ 的次既不会超出 $f(x)$ 的次, 也不会超出 $g(x)$ 的次。用符号写出来, 就是

$$\deg(f(x) \pm g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}。$$

评注 既然 $D[x]$ 是加群, 且每个 a_ix^i ($i = 0, 1, \dots, n$) 都可以看成是多项式, 那么多项式的项的次序是不重要的。前面的写法称为升次排列 (*ascending order*)。下面的写法称为降次排列 (*descending order*):

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0x^0。$$

这跟中学里接触的多项式是一样的。当然, 也可以用 \sum 符号书写:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{or} \quad \sum_{i=0}^n a_{n-i} x^{n-i}.$$

(非零) 多项式的最高次非零项是首项 (*leading term*)。

例 $y - y^2 - 7y^4 \in \mathbb{Z}[x]$ 可以写为 $-7y^4 - y^2 + y$, 其首项是 $-7y^4$ 。

定义 设

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m, \quad g(x) = b_0 x^0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

是 $D[x]$ 的元。规定乘法如下:

$$f(x)g(x) = c_0 x^0 + c_1 x + \cdots + c_{m+n} x^{m+n},$$

其中

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0,$$

且约定 $i > m$ 时 $a_i = 0$, $j > n$ 时 $b_j = 0$ 。在这个约定下, 不难看出, $\ell > m + n$ 时, $c_\ell = 0$ 。所以, 我们至少有

$$\deg f(x)g(x) \leq \deg f(x) + \deg g(x).$$

例 取 $\mathbb{Z}[x]$ 的二个元 $f(x) = x^0 + 2x^2$, $g(x) = -3x^0 + 4x - x^3$ 。先改写一下:

$$f(x) = 1x^0 + 0x + 2x^2, \quad g(x) = -3x^0 + 4x + 0x^2 + (-1)x^3.$$

所以

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \cdot (-3) = -3, \\ c_1 &= 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-3) = 4, \\ c_2 &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) = -6, \\ c_3 &= 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 7, \\ c_4 &= 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 0, \\ c_5 &= 2 \cdot (-1) = -2. \end{aligned}$$

所以

$$f(x)g(x) = -3x^0 + 4x - 6x^2 + 7x^3 - 2x^5.$$

例 再看一个例。设

$$f(x) = x, \quad g(x) = x^\ell.$$

a_i 在 $i = 1$ 时为 1, $i \neq 1$ 时为 0; b_j 在 $j = \ell$ 时为 1, $j \neq \ell$ 时为 0。

$\ell = 0$ 时, 不难算出, $f(x)g(x) = x$ 。现在设 $\ell \geq 1$ 。 $k \leq \ell$ 时,

$$c_k = 0b_k + 1 \cdot 0 + \cdots + 0 \cdot 0 = 0.$$

$k = \ell + 1$ 时,

$$c_{\ell+1} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \cdots + 0 \cdot 0 = 1.$$

所以

$$x \cdot x^\ell = x^{\ell+1}.$$

这样, x^ℓ 可以视为 x 的 ℓ 次幂。

评注 由上面二个例可以看到, 这跟中学的多项式乘法运算没有什么本质区别。

例 设

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_mx^m.$$

是 $D[x]$ 的元。零多项式可以写为

$$0 = 0x^0,$$

由此易知

$$0f(x) = f(x)0 = 0.$$

评注 设

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_mx^m, \quad g(x) = b_0x^0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

是 $D[x]$ 的元, 且 $a_m \neq 0, b_n \neq 0$ 。这样, $f(x)g(x)$ 的 $m+n$ 次项就是 cx^{m+n} , 其中

$$\begin{aligned} c &= a_0b_{m+n} + \cdots + a_{m-1}b_{n+1} + a_mb_n + a_{m+1}b_{n-1} + \cdots + a_{m+n}b_n \\ &= 0 + \cdots + 0 + a_mb_n + 0 + \cdots + 0 \\ &= a_mb_n. \end{aligned}$$

因为 $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$, 所以 $a_m b_n \neq 0$ (反证法: 若 $a_m b_n = 0 = a_m 0$, 因为 $a_m \neq 0$, 根据 D 的消去律, 得 $b_n = 0$, 矛盾!). 所以

$$\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x).$$

可以验证, 若 f 或 g 的任意一个是 0, 这个关系也对。

命题 $D[x]$ 作成整环。

证 已经知道, $D[x]$ 是加群。下面先说明 $D[x]$ 是交换环。

根据定义, 多项式的乘法还是多项式, 也就是说, 乘法是二元运算。

设

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_mx^m, \\ g(x) &= b_0x^0 + b_1x + \cdots + b_nx^n, \\ h(x) &= u_0x^0 + u_1x + \cdots + u_sx^s \end{aligned}$$

是 $D[x]$ 的元。则

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= c_0x^0 + c_1x + \cdots + c_{m+n}x^{m+n}, \\ g(x)f(x) &= d_0x^0 + d_1x + \cdots + d_{n+m}x^{n+m}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} c_k &= a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0, \\ d_k &= b_0a_k + b_1a_{k-1} + \cdots + b_ka_0. \end{aligned}$$

因为 D 的乘法适合交换律, 加法适合交换律与结合律, 故 $c_k = d_k$ 。这样, $D[x]$ 的乘法适合交换律。

不难算出

$$\begin{aligned} &(f(x)g(x))h(x) \\ &= (c_0x^0 + c_1x + \cdots + c_{m+n}x^{m+n})(u_0x^0 + u_1x + \cdots + u_sx^s) \\ &= v_0x^0 + v_1x + \cdots + v_{m+n+s}x^{m+n+s}, \end{aligned}$$

其中

$$v_t = (\text{the sum of all } a_ib_ju_r \text{'s with } i+j+r=t).$$

类似地, 计算 $f(x)(g(x)h(x))$ 也可以得到一样的结果。也就是说, $D[x]$ 的乘法适合结合律。

现在验证分配律。前面已经看到, 多项式的乘法是交换的, 所以只要验证一个分配律即可。不失一般性, 设 $s = n$ 。这样

$$g(x) + h(x) = (b_0 + u_0)x^0 + (b_1 + u_1)x + \cdots + (b_n + u_n)x^n。$$

所以

$$f(x)(g(x) + h(x)) = p_0x^0 + p_1x^1 + \cdots + p_{m+n}x^{m+n},$$

其中

$$\begin{aligned} p_k &= a_0(b_k + c_k) + a_1(b_{k-1} + c_{k-1}) + \cdots + a_k(b_0 + c_0) \\ &= (a_0b_k + a_0c_k) + (a_1b_{k-1} + a_1c_{k-1}) + \cdots + (a_kb_0 + a_kc_0) \\ &= (a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0) + (a_0c_k + a_1c_{k-1} + \cdots + a_kc_0)。 \end{aligned}$$

不难看出, 这就是 $f(x)g(x)$ 的 k 次系数与 $f(x)h(x)$ 的 k 次系数的和。这样, $D[x]$ 的加法与乘法适合分配律。至此, 我们知道, $D[x]$ 是交换环。

交换环离整环还差二步: 一是乘法幺元, 二是消去律。先看消去律。若 $f(x)g(x) = f(x)h(x)$, $f(x) \neq 0$, 根据分配律,

$$0 = f(x)g(x) - f(x)h(x) = f(x)(g(x) - h(x))。$$

如果 $g(x) - h(x) \neq 0$, 则 $g(x) - h(x)$ 的次不是 $-\infty$ 。 $f(x)$ 的次不是 $-\infty$, 故 $f(x)(g(x) - h(x))$ 的次不是 $-\infty$ 。换句话说, $f(x)(g(x) - h(x)) \neq 0$, 矛盾!

再看乘法幺元。设

$$e(x) = x^0。$$

不难算出

$$e(x)f(x) = f(x)e(x) = f(x)。$$

综上, $D[x]$ 是整环。

✎

评注 以后, 我们把 x^0 写为 1。换句话说, 代替

$$a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

我们写

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n。$$

这儿还有一件事儿值得一提。考虑

$$D_0 = \{ax^0 \mid a \in D\} \subset D[x]。$$

任取 D_0 的二元 ax^0, bx^0 。首先, $ax^0 = bx^0$ 的一个必要与充分条件是 $a = b$ 。然后, 不难看出,

$$ax^0 + bx^0 = (a + b)x^0, \quad (ax^0)(bx^0) = (ab)x^0。$$

由此可以看出, D_0 与 D “几乎完全一样”。用摩登 (*modern*) 数学的话来说, “ D_0 与 D 是天然同构的 (*naturally isomorphic*)”。

我们不打算深究这一点。上面, 我们把 x^0 写为 1; 反过来, D 的元 a 也可以理解为是多项式 ax^0 。这跟中学的习惯是一致的。

Division Algorithm

我们知道, 非负整数有这样的性质:

命题 设 n 是正整数, m 是非负整数。则必有一对非负整数 q, r 使

$$m = qn + r, \quad 0 \leq r < n。$$

例如, 取 $n = 5, m = 23$ 。不难看出,

$$18 = 4 \cdot 5 + 3。$$

多项式也有类似的性质哟。

命题 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in D[x],$$

且 a_n 是 D 的单位。对任意 $g(x) \in D[x]$, 存在 $q(x), r(x) \in D[x]$ 使

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x), \quad \deg r(x) < n。$$

一般称其为带余除法: $q(x)$ 就是商 (*quotient*); $r(x)$ 就是余式 (*remainder*)。

证 用归纳法。记 $\deg g(x) = m$ 。若 $m < n$, 则 $q(x) = 0, r(x) = g(x)$ 适合要求。所以, 命题对不高于 $n - 1$ 的 m 都成立。

设 $m \leq \ell$ ($\ell \geq n - 1$) 时, 命题成立。考虑 $m = \ell + 1$ 的情形。此时, 设

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\ell+1} b_i x^i。$$

则


$$\begin{aligned}
& g(x) - b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n}f(x) \\
&= \sum_{i=0}^{\ell+1} b_i x^i - b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n} \sum_{i=0}^n a_i x^i \\
&= \sum_{i=0}^{\ell} b_i x^i + b_{\ell+1}x^{\ell+1} - \sum_{i=0}^{n-1} b_{\ell+1}a_n^{-1}a_i x^{\ell+1-n+i} - b_{\ell+1}a_n^{-1}a_n x^{\ell+1} \\
&= \sum_{i=0}^{\ell} b_i x^i - \sum_{i=0}^{n-1} b_{\ell+1}a_n^{-1}a_i x^{\ell+1-n+i} + b_{\ell+1}x^{\ell+1} - b_{\ell+1}x^{\ell+1} \\
&= \sum_{i=0}^{\ell} b_i x^i - \sum_{i=0}^{n-1} b_{\ell+1}a_n^{-1}a_i x^{\ell+1-n+i}.
\end{aligned}$$

设 $r_1(x) = g(x) - b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n}f(x)$ 。这样, $r_1(x)$ 的次不高于 ℓ 。根据归纳假设, 有 $q_1(x), r(x) \in D[x]$ 使

$$r_1(x) = q_1(x)f(x) + r(x), \quad \deg r(x) < n.$$

所以

$$\begin{aligned}
g(x) &= b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n}f(x) + r_1(x) \\
&= b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n}f(x) + q_1(x)f(x) + r(x) \\
&= (b_{\ell+1}a_n^{-1} + q_1(x))f(x) + r(x).
\end{aligned}$$

记 $q(x) = b_{\ell+1}a_n^{-1} + q_1(x)$, 则 $q(x), r(x)$ 适合要求。所以, $m \leq \ell + 1$ 时, 命题成立。根据归纳法原理, 命题成立。 

例 取 $\mathbb{F}[x]$ 的二元 $f(x) = 2(x-1)^2(x+2)$, $g(x) = 8x^6 + 1$ 。我们来找一对多项式 $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg f(x).$$

不难看出, $f(x)$ 的次是 3, 且

$$f(x) = 2(x^2 - 2x + 1)(x + 2) = 2x^3 - 6x + 4.$$

我们按上面证明的方法寻找 $q(x)$ 与 $r(x)$ 。 $a_3 = 2$ 是 \mathbb{F} 的单位, 且 $a_3^{-1} = \frac{1}{2}$ 。取

$$q_1(x) = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{6-3} = 4x^3.$$

则

$$\begin{aligned}
 r_1(x) &= g(x) - q_1(x)f(x) \\
 &= (8x^6 + 1) - 4x^3(2x^3 - 6x + 4) \\
 &= (8x^6 + 1) - (8x^6 - 24x^4 + 16x^3) \\
 &= 24x^4 - 16x^3 + 1.
 \end{aligned}$$

$r_1(x)$ 的次仍不低于 3。因此, 再来一次。取

$$q_2(x) = 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{4-3} = 12x.$$

则

$$\begin{aligned}
 r_2(x) &= r_1(x) - q_2(x)f(x) \\
 &= (24x^4 - 16x^3 + 1) - 12x(2x^3 - 6x + 4) \\
 &= (24x^4 - 16x^3 + 1) - (24x^4 - 72x + 48x) \\
 &= -16x^3 + 72x^2 - 48x + 1.
 \end{aligned}$$

$r_2(x)$ 的次仍不低于 3。因此, 再来一次。取

$$q_3(x) = -16 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{3-3} = -8.$$

则

$$\begin{aligned}
 r_3(x) &= r_2(x) - q_3(x)f(x) \\
 &= (-16x^3 + 72x^2 - 48x + 1) - (-8)(2x^3 - 6x + 4) \\
 &= (-16x^3 + 72x^2 - 48x + 1) - (-16x^3 + 48x - 32) \\
 &= 72x^2 - 96x + 33.
 \end{aligned}$$

$r_3(x)$ 的次低于 3。这样

$$\begin{aligned}
 g(x) &= q_1(x)f(x) + r_1(x) \\
 &= q_1(x)f(x) + q_2(x)f(x) + r_2(x) \\
 &= q_1(x)f(x) + q_2(x)f(x) + q_3(x)f(x) + r_3(x) \\
 &= (q_1(x) + q_2(x) + q_3(x))f(x) + r_3(x) \\
 &= (4x^3 + 12x - 8)f(x) + (72x^2 - 96x + 33).
 \end{aligned}$$

也就是说,

$$q(x) = 4x^3 + 12x - 8, \quad r(x) = 72x^2 - 96x + 33.$$

评注 带余除法要求 $f(x)$ 的首项系数是单位是有必要的。

在上面的例里, $f(x)$ 与 $g(x)$ 可以看成 $\mathbb{Z}[x]$ 的元, 但 2 不是 \mathbb{Z} 的单位。虽然最终所得 $q(x), r(x)$ 也是 $\mathbb{Z}[x]$ 的元, 但这并不是一定会出现的。我们看下面的简单例。

考虑 $\mathbb{Z}[x]$ 的多项式 $f(x) = 2x$ 。设

$$r(x) = r_0, \quad q(x) = \sum_{i=0}^p q_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^s g_i x^i,$$

且 $r_0, q_0, \dots, q_p, g_0, \dots, g_s \in \mathbb{Z}$ 。由 $g(x) = q(x)f(x) + r(x)$ 知

$$\sum_{i=0}^s g_i x^i = r_0 + \sum_{i=1}^{p+1} 2q_{i-1} x^i。$$

所以

$$p = s - 1,$$

$$r_0 = g_0,$$

$$2q_{i-1} = g_i, \quad i = 1, \dots, s。$$

这说明, $g(x)$ 的 i 项系数 ($i = 1, \dots, s$) 必须是偶数。所以, 不存在 $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 使

$$1 + 3x + x^2 = q(x) \cdot 2x + r(x), \quad \deg r(x) < 1。$$

我们知道, 用一个正整数除非负整数, 所得的余数与商是唯一的。比方说, 5 除 23 的余数只能是 3。

多项式也有类似的性质哟。

命题 设 $f(x) \in D[x]$, 且 $f(x) \neq 0$ 。若 D 上 x 的 4 个多项式 $q_1(x), r_1(x), q_2(x), r_2(x)$ 适合

$$q_1(x)f(x) + r_1(x) = q_2(x)f(x) + r_2(x),$$

$$\deg r_1(x) < \deg f(x), \quad \deg r_2(x) < \deg f(x),$$

则必有

$$r_1(x) = r_2(x), \quad q_1(x) = q_2(x)。$$

证 记

$$Q(x) = q_2(x) - q_1(x), \quad R(x) = r_2(x) - r_1(x)。$$

题设条件即

$$(q_1(x) - q_2(x))f(x) = r_2(x) - r_1(x),$$

也就是

$$-Q(x)f(x) = R(x)。$$

反证法。若 $-Q(x) \neq 0$, 则 $\deg(-Q(x)) \geq 0$ 。从而

$$\deg R(x) = \deg(-Q(x)) + \deg f(x) \geq \deg f(x)。$$

可是

$$\deg R(x) = \deg(r_2(x) - r_1(x)) \leq \deg r_1(x) < \deg f(x),$$

矛盾! 故 $-Q(x) = 0$ 。这样, $R(x) = 0$ 。

☞

这样, 我们得到了这个命题:

命题 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in D[x],$$

且 a_n 是 D 的单位。对任意 $g(x) \in D[x]$, 存在**唯一的** $q(x), r(x) \in D[x]$ 使

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x), \quad \deg r(x) < n。$$

一般称其为带余除法: $q(x)$ 就是商; $r(x)$ 就是余式。并且, 当 $f(x)$ 的次不高
于 $g(x)$ 的次时, $f(x), g(x), q(x)$ 间还有如下的次关系:

$$\deg g(x) = \deg(g(x) - r(x)) = \deg q(x) + \deg f(x)。$$

Roots of Polynomials

本节, 我们讨论多项式的根的基本性质。

我们回顾一下熟悉的多项式函数。

定义 设 $a_0, a_1, \dots, a_n \in D$ 称

$$\begin{aligned} f: \quad D &\rightarrow D, \\ t &\mapsto a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n \end{aligned}$$

为 D 的多项式函数 (*polynomial function*)。我们也说, 这个 f 是由 D 上 x 的多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

诱导的多项式函数 (*the polynomial function induced by f*)。不难看出, 若二个多项式相等, 则其诱导的多项式函数也相等。

定义 设 f 与 g 是 D 的二个多项式函数。二者的和 $f + g$ 定义为

$$\begin{aligned} f + g: & \quad D \rightarrow D, \\ & \quad t \mapsto f(t) + g(t). \end{aligned}$$

二者的积 fg 定义为

$$\begin{aligned} fg: & \quad D \rightarrow D, \\ & \quad t \mapsto f(t)g(t). \end{aligned}$$

例 设 f, g 是 D 的二个多项式函数:

$$\begin{aligned} f: & \quad D \rightarrow D, \\ & \quad t \mapsto a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n, \\ g: & \quad D \rightarrow D, \\ & \quad t \mapsto b_0 + b_1t + \cdots + b_nt^n. \end{aligned}$$

利用 D 的运算律, 可以得到

$$\begin{aligned} f + g: & \quad D \rightarrow D, \\ & \quad t \mapsto (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n, \\ fg: & \quad D \rightarrow D, \\ & \quad t \mapsto c_0 + c_1t + \cdots + c_{2n}t^{2n}, \end{aligned}$$

其中

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0.$$

由此可得下面的命题:

命题 设 $f(x), g(x) \in D[x]$, f, g 分别是 $f(x), g(x)$ 诱导的多项式函数。那么 $f + g$ 是 $f(x) + g(x)$ 诱导的多项式函数, 且 fg 是 $f(x)g(x)$ 诱导的多项式函数。

通俗地说, 就是: 若多项式 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 之间有一个由加法与乘法计算得到的关系, 那么将 x 换为 D 的元 t , 这样的关系仍成立。

例 考虑 \mathbb{F} 与 $\mathbb{F}[x]$ 。前面, 利用带余除法, 得到关系

$$8x^6 + 1 = (4x^3 + 12x - 8) \cdot 2(x - 1)^2(x + 2) + (72x^2 - 96x + 33)。$$

这里 x 只是一个文字, 不是数! 但是, 上面的命题告诉我们, 可以把 x 看成一个数。比如, 由上面的式可以立即看出, $8t^6 + 1$ 与 $72t^2 - 96t + 33$ 在 $t = 1$ 或 $t = -2$ 时值是一样的。

可是, 对于这样的式, 我们不能将 x 改写为 \mathbb{F} 的元 t :

$$\deg 3x^2 < \deg 2x^3。$$

可以看到, 若 $t = 0$, 则 $3t^2 = 2t^3 = 0$, 而 0 的次是 $-\infty$; 若 $t \neq 0$, 则 $3t^2$ 与 $2t^3$ 都是非零数, 次都是 0 。

评注 我们已经知道, 多项式确定多项式函数。自然地, 有这样的问题: 多项式函数能否确定多项式? 一般情况下, 这个问题的答案是 no。

考虑 4 元集 $V = \{0, 1, \tau, \tau^2\}$ 。它的加法与乘法如下:

+	0	1	τ	τ^2	·	0	1	τ	τ^2
0	0	1	τ	τ^2	0	0	0	0	0
1	1	0	τ^2	τ	1	0	1	τ	τ^2
τ	τ	τ^2	0	1	τ	0	τ	τ^2	1
τ^2	τ^2	τ	1	0	τ^2	0	τ^2	1	τ

在前面, 我们已经知道, V 是整环。作 V 上 x 的二个多项式:

$$f(x) = x^4 - x, \quad g(x) = 0。$$

显然, 这是二个不相等的多项式。但是, 任取 $t \in V$, 都有

$$t^4 - t = 0。$$

因此, $f(x)$ 与 $g(x)$ 诱导的多项式函数是同一函数!

不过, 在某些场合下, 多项式函数可以确定多项式。之后我们还会提到这一点。

评注 设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in D[x]$ 。设 t 是 D 的元。以后, 我们直接写

$$f(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n。$$

至少, 一方通行 (one-way traffic) 是没问题的。

了解了多项式与多项式函数的关系后, 下面的这个命题就不会太凸兀了。

命题 设 $f(x) \in D[x]$ 是 n 次多项式 ($n \geq 1$), $a \in D$ 。则存在 $n-1$ 次多项式 $q(x) (\in D[x])$ 使

$$f(x) = q(x)(x - a) + f(a)。$$

证 因为 $x - a$ 的首项系数 1 是单位, 故存在 $D[x]$ 的二元 $q(x), r(x)$ 使

$$f(x) = q(x)(x - a) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg(x - a) = 1。$$

所以, $r(x) = c, c \in D$ 。用 D 的元 a 替换 x , 有

$$f(a) = q(a)(a - a) + c = c。$$

所以

$$f(x) = q(x)(x - a) + f(a)。$$

再看这个 $q(x)$ 的次。因为 $f(x)$ 的次不低于 $x - a$ 的次, 故

$$\deg q(x) = \deg f(x) - \deg(x - a) = n - 1。 \quad \text{☞}$$

定义 设 $f(x)$ 是 D 上 x 的多项式。若有 $a \in D$ 使 $f(a) = 0$, 则说 a 是 (多项式) $f(x)$ 的根 (root)。