查考多项式

Septsea

目录

版权声明

前言

本文是瞎写的. 我给本文的另一个名字是 “Re: ゼロから始めるポリノミアルのイントロダクション”. 不过想了想, 算了算了. 龙鸣日语, 不好意思直接说出来.

本文用尽可能朴素的语言讨论了多项式及其部分应用.

总是可以去这儿得到本文的最新版本:

`https://gitee.com/septsea/strange-book-zero`

`https://github.com/septsea/strange-book-zero`

您可以自由地阅读、修改、再分发本文.

如果您发现本文有什么地方不对, 那么您就毫不犹豫地告诉我. 当然, 任何意见与建议也是可以的.

(记得先看看最新版本改过来没有哟. 不过就算没看最新版本也没关系啦. 我一定会处理您的消息的! 嘿嘿.)

就先说到这里.

评注 总算写完 “预备知识” 了. 我写这玩意儿花了好久好久啊. 先发布再说吧.

June 3, 2021

评注 忘记介绍域是什么东西了. 我真是笨蛋啊.

June 3, 2021

评注 前几日意识到, 我不能又写得严谨, 又指望着中学生都能读懂. 不过本文业已成形, “改” 不如 “重写”. 不过本文是开源的 (主要是无版权), 您可以随意重写.

June 17, 2021

评注 6 月 6 日, 我在这里发了贴, 目的是让更多的人看到我写的 ⑨ 文. 我得到了很多意见与建议. 今日, 我写完了我想写的东西. 我维护本文就好. 我觉得超理太棒了!

June 20, 2021

评注 我总算在改错了. 感谢超理读者 “没啥好叫的” 指出本文的一个错误! 然后我自己发现了一堆印刷错误. 啊啦啊啦. 看多了视觉小说, 我的大脑生锈了呢. 顺便一提, 看本文看累了的时候, 不妨看看小说哦! 这里! 这里! I am sharing my copies of visual novels with my readers!

July 29, 2021

查考多项式

出于无聊, Septsea 撰写本文.

预备知识

读者将在本节熟悉一些记号与术语. 建议读者熟悉本节的内容后学习下节的内容.

在进入小节 “集” 前, 让我们先回顾命题、复数与数学归纳法吧!

定义 能判断真假的话是命题 ($proposition$). 正确的命题称为真命题; 错误的命题称为假命题. 当然, 命题也可以用 “对” “错” 形容.

例 根据常识, “日东升西落” 是真命题. 类似地, “月自身可发光” 是假命题.

“这是什么?” 不是命题, 因为它没有作出判断. 类似地, “请保持安静” 也不是命题, 因为它只是一个祈使句 ($imperative\ sentence$). 不过, “难道中国不强?” 不但是命题, 它还是正确的, 因为这个反问 ($rhetorical\ question$) 作出了正确的判断.

“$x > 3$” 不是命题, 因为它不可判断真假. 像这种话里有未知元, 且揭秘未知元前不可知此话之真伪的话是开句 ($open\ sentence$).

我们会经常遇到 “若 p, 则 q” 的命题.

定义 设 “若 p, 则 q” 是真命题. 我们说, p 是 q 的充分条件 ($sufficient\ condition$), q 是 p 的必要条件 ($necessary\ condition$). 用符号写出来, 就是

$$p \Rightarrow q \quad \text{or} \quad q \Leftarrow p.$$

例 “若刚下过雨, 则地面潮湿” 是对的. “刚下过雨” 是 “充分的”: 根据常识可以知道这一点. “地面潮湿” 是 “必要的”: 地面不潮湿, 那么不可能刚下过雨.

评注 我们会遇到形如 “ℓ 的一个必要与充分条件是 r” 的命题. 换个说法, 就是 “r 是 ℓ 的一个必要与充分条件”. 再分解一下, 就是 “r 是 ℓ 的一个必要条件” 与 “r 是 ℓ 的一个充分条件” 这二个命题. 根据定义, 这相当于 “若 ℓ, 则 r” 与 “若 r, 则 ℓ” 都是真命题. 也就是说, ℓ 跟 r 是等价的 ($equivalent$). 用符号写出来, 就是

$$p \Leftrightarrow q.$$

证明 “ℓ 的一个必要与充分条件是 r” 时, 我们会把它分为必要性 (*necessity*) 与充分性 (*sufficiency*) 二个部分. 证明必要性, 就是证明 “r 是 ℓ 的一个必要条件”, 也就是证明 “若 ℓ, 则 r” 是对的; 换句话说, 证明左边可以推出右边. 证明充分性, 就是证明 “r 是 ℓ 的一个充分条件”, 也就是证明 “若 r, 则 ℓ” 是对的; 换句话说, 证明右边可以推出左边.

命题就介绍到这里. 下面回顾复数基础.

定义 复数 (*complex number*) 是形如 $x + y\mathrm{i}$ (x, y 是实数) 的数.

评注 可将 $x + y\mathrm{i}$ 写为 $x + \mathrm{i}y$.

定义 设 a, b, c, d 是实数. 则

$$a + b\mathrm{i} = c + d\mathrm{i} \iff a = c \text{ and } b = d.$$

评注 我们把形如 $a + 0\mathrm{i}$ 的复数写为 a, 并认为 $a + 0\mathrm{i}$ 是实数. 反过来, a 也可以认为是复数 $a + 0\mathrm{i}$.

形如 $0 + b\mathrm{i}$ 的复数可写为 $b\mathrm{i}$. 按照习惯, $1\mathrm{i}$ 可写为 i, 且 $-1\mathrm{i}$ 可写为 $-\mathrm{i}$.

定义 复数的加、乘法定义为

$$\begin{aligned}(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) &= (a + c) + (b + d)\mathrm{i},\\ (a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) &= (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

由此可见, 二个复数的和 (或积) 还是复数.

例 我们计算 i 与自己的积:

$$\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = (0 + 1\mathrm{i})(0 + 1\mathrm{i}) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)\mathrm{i} = -1.$$

简单地说, 就是

$$\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}^2 = -1.$$

设 z_1, z_2, z_3 是任意三个复数 (不必不同). 设 $z_1 = a + b\mathrm{i}$.

命题 复数的加法适合如下运算律:
(i) 交换律: $z_1+z_2=z_2+z_1$;
(ii) 结合律: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$;
(iii) $0+z_1=z_1$;
(iv) 存在复数 $w=(-a)+(-b)\mathrm{i}$ 使 $w+z_1=0$.
通常把适合 (iv) 的 w 记为 $-z_1$, 且称之为 z_1 的相反数.

评注 $(-a)+(-b)\mathrm{i}$ 可写为 $-a-b\mathrm{i}$.

定义 复数的减法定义为

$$z_2-z_1=z_2+(-z_1).$$

命题 复数的乘法适合如下运算律:
(v) 交换律: $z_1z_2=z_2z_1$;
(vi) 结合律: $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$;
(vii) $1z_1=z_1$;
(viii) $(-1)z_1=-z_1$;
(ix) 若 $z_1\neq 0$, 则存在复数 $v=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$ 使 $vz_1=1$.
通常把适合 (ix) 的 v 记为 z_1^{-1}, 且称之为 z_1 的倒数.

定义 复数的除法定义为

$$\frac{z_2}{z_1}=z_2z_1^{-1}.$$

命题 复数的加法与乘法还适合分配律:

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3,$$
$$(z_2+z_3)z_1=z_2z_1+z_3z_1.$$

评注 a, $b\mathrm{i}$, c, $d\mathrm{i}$ 都可以看成是复数. 这样

$$\begin{aligned}(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})&=(a+b\mathrm{i})c+(a+b\mathrm{i})(d\mathrm{i})\\&=ac+b\mathrm{i}c+ad\mathrm{i}+b\mathrm{i}d\mathrm{i}\\&=ac+bc\mathrm{i}+ad\mathrm{i}+bd\mathrm{i}^2\\&=(ac+bd\mathrm{i}^2)+(ad+bc)\mathrm{i}\\&=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

也就是说, 我们不必死记复数的乘法规则: 只要用运算律与 $\mathrm{i}^2=-1$ 即可召唤它.

定义 设 a, b 是实数. $a+b\mathrm{i}$ 的共轭 (*conjugate*) 是复数 $a-b\mathrm{i}$. 复数 z_1 的共轭可写为 $\overline{z_1}$.

命题 共轭适合如下性质:
(x) $\overline{z_1}+z_1$ 与 $\mathrm{i}\cdot(\overline{z_1}-z_1)$ 都是实数;
(xi) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$;
(xii) $\overline{\overline{z_1}}=z_1$;
(xiii) $\overline{z_1}z_1$ 是正数, 除非 $z_1=0$.

定义 $|z_1|=\sqrt{\overline{z_1}z_1}$ 称为 z_1 的绝对值 (*absolute value*).

命题 绝对值适合如下性质:

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|.$$

定义 设 n 是整数. 若 $n=0$, 则说 $z_1^n=1$. 若 $n\geq 1$, 则说 z_1^n 是 n 个 z_1 的积. 若 $z_1\neq 0$, 且 $n\leq -1$, 则说 z_1^n 是 $\frac{1}{z_1^{-n}}$.
z_1^n 的一个名字是 z_1 的 n 次幂 (*power*).

命题 设 m,n 是非负整数. 幂适合如下性质:

$$z_1^mz_1^n=z_1^{m+n},\quad (z_1^m)^n=z_1^{mn},\quad (z_1z_2)^m=z_1^mz_2^m.$$

若 z_1 与 z_2 都不是 0, 则 m,n 允许取全体整数.

复数就先回顾到这里. 下面回顾数学归纳法.

评注 数学归纳法 (*mathematical induction*) 是一种演绎推理.

命题 设 $P(n)$ 是跟整数 n 相关的命题. 设 $P(n)$ 适合:
(i) $P(n_0)$ 是正确的;
(ii) 任取 $\ell\geq n_0$, 必有 "若 $P(\ell)$ 是正确的, 则 $P(\ell+1)$ 是正确的" 成立.
则任取不低于 n_0 的整数 n, 必有 $P(n)$ 是正确的.

评注 可以这么理解数学归纳法. 假设有一排竖立的砖. 如果 (i) 第一块砖倒下, 且 (ii) 前一块砖倒下可引起后一块砖倒下, 那么所有的砖都可以倒下, 是吧? 由此也可以看出, (i) (ii) 缺一不可. 第一块砖不倒, 后面的砖怎么倒下呢?† 如果前一块砖倒下时后一块砖不一定能倒下, 那么会在某块砖后开始倒不下去.

例 我们试着用数学归纳法证明, 对任意正整数 n,

$$P(n): \qquad 0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

既然想证明对任意正整数 n, $P(n)$ 都成立, 我们取 $n_0=1$. 然后验证 (i): 左边只有 0 这一项, 右边是 $\frac{1\cdot(1-1)}{2}=0$. 所以 (i) 适合.

再验证 (ii). (ii) 是说, 要由 $P(\ell)$ 推出 $P(\ell+1)$. 所以, 假设

$$0+1+\cdots+(\ell-1)=\frac{\ell(\ell-1)}{2}, \quad \ell\geq n_0.$$

因为

$$\begin{aligned}
0+1+\cdots+(\ell-1)+\ell &= (0+1+\cdots+(\ell-1))+\ell \\
\text{(IH)} \qquad &= \frac{\ell(\ell-1)}{2}+\ell \\
&= \frac{\ell(\ell-1)}{2}+\frac{\ell\cdot 2}{2} \\
&= \frac{\ell(\ell+1)}{2} \\
&= \frac{(\ell+1)((\ell+1)-1)}{2},
\end{aligned}$$

故我们由 $P(\ell)$ 推出了 $P(\ell+1)$. 我们在哪儿用到了 $P(\ell)$ 呢? 我们在标了 (IH) 的那一行用了 $P(\ell)$. 这样的假设称为归纳假设 (*induction hypothesis*).

既然 (i) (ii) 都适合, 那么任取不低于 $n_0=1$ 的整数 n, $P(n)$ 都对.

我们用二个具体的例说明, (i) (ii) 缺一不可.

例 我们 “证明”, 对任意正整数 n,

$$P'(n): \qquad 0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}+1.$$

---

† 当然, 也可以从第 n 块砖开始倒下 $(n>1)$, 但这就照顾不到第一块了.

这里, n_0 自然取 1.

(i) 不适合: 显然 $n=1$ 时, 左侧是 0 而右侧是 1. 再看 (ii). 假设

$$0+1+\cdots+(\ell-1)=\frac{\ell(\ell-1)}{2}+1, \quad \ell \geq n_0.$$

由于

$$\begin{aligned} 0+1+\cdots+(\ell-1)+\ell &= (0+1+\cdots+(\ell-1))+\ell \\ &= \frac{\ell(\ell-1)}{2}+1+\ell \qquad (\text{“IH”}) \\ &= \frac{\ell(\ell-1)}{2}+\frac{\ell\cdot 2}{2}+1 \\ &= \frac{\ell(\ell+1)}{2}+1 \\ &= \frac{(\ell+1)((\ell+1)-1)}{2}+1, \end{aligned}$$

故我们由 $P'(\ell)$ “推出” 了 $P'(\ell+1)$. 我们也在 (“IH”) 处用到了 “归纳假设”. 那么 $P'(n)$ 就是正确的吗? 当然不是! 前面我们知道,

$$0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

也就是说, $P'(n)$ 的右侧的 “$+1$” 使其错误. 当然, 一般我们很少会犯这样的错误: 毕竟, 一开始就不对的东西就不用看下去了.

例 不同的老婆[†]有着不同的发色. 但是, 我们用数学归纳法却可以 “证明”, 任意的 n $(n \geq 1)$ 个老婆有着相同的发色! 称这个命题为 $Q(n)$. 这里, n_0 自然取 1.

(i) 当 $n=n_0=1$ 时, 一个老婆自然只有一种发色. 这个时候, 命题是正确的!

(ii) 假设任意的 ℓ $(\ell \geq n_0)$ 个老婆有着相同的发色! 随意取 $\ell+1$ 个老婆. 根据假设, 老婆 1, 2, ⋯, ℓ 有着相同的发色, 且老婆 2, ⋯, ℓ, $\ell+1$ 有着相同的发色. 这二组中都有 2, ⋯, ℓ 这 $\ell-1$ 个老婆, 所以老婆 1, 2, ⋯, ℓ, $\ell+1$ 有着相同的发色!

[†] 一般地, 二次元人会称动画、漫画、游戏、小说中自己喜爱的女性角色为老婆 (*waifu*). 一个二次元人可以有不止一个老婆.

根据 (i) (ii), 命题成立.

可是这对吗? 不对. 问题出在 (ii). 如果说, 任意二个老婆有着相同的发色, 那任意三个老婆也有着相同的发色. 这没问题. 可是, 由 $Q(1)$ 推不出 $Q(2)$: 老婆 1 与老婆 2 根本就不重叠呀! (ii) 要求任取 $\ell \geq n_0$, 必有 $Q(\ell)$ 推出 $Q(\ell+1)$. 而 $\ell = 1$ 时, (ii) 不对, 因此不能推出 $Q(n)$ 对任意正整数都对.

下面是数学归纳法的一个变体.

命题 设 $P(n)$ 是跟整数 n 相关的命题. 设 $P(n)$ 适合:

(i) $P(n_0)$ 是正确的;

(ii)$'$ 任取 $\ell \geq n_0$, 必有 "若 $\ell - n_0 + 1$ 个命题 $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, ···, $P(\ell)$ 都是正确的, 则 $P(\ell+1)$ 是正确的" 成立.

则任取不低于 n_0 的整数 n, 必有 $P(n)$ 是正确的.

评注 可以由下面的推理看出, 上面的数学归纳法变体是正确的.

作命题 $Q(n)$ $(n \geq n_0)$ 为 "$n - n_0 + 1$ 个命题 $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, ···, $P(n)$ 都是正确的".

(i) $P(n_0)$ 是正确的, 所以 $n_0 - n_0 + 1$ 个命题 $P(n_0)$ 是正确的, 也就是 $Q(n_0)$ 是正确的.

(ii) 任取 $\ell \geq n_0$. 假设 $Q(\ell)$ 是正确的, 也就是假设 $\ell - n_0 + 1$ 个命题 $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, ···, $P(\ell)$ 都是正确的. 由 (ii)$'$, $P(\ell+1)$ 是正确的. 所以, $\ell + 1 - n_0 + 1$ 个命题 $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, ···, $P(\ell)$, $P(\ell+1)$ 都是正确的. 换句话说, $Q(\ell+1)$ 是正确的.

由数学归纳法可知, 任取不低于 n_0 的整数 n, 必有 $Q(n)$ 是正确的. 所以, $P(n)$ 是正确的.

另一方面, 这个变体的条件 (ii)$'$ 比数学归纳法的 (ii) 强, 所以若变体正确, 数学归纳法也正确. 也就是说, 数学归纳法与其变体是等价的.

以后, "数学归纳法" 既可以指老的数学归纳法 (由 $P(\ell)$ 推 $P(\ell+1)$), 也可以指变体 (由 $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, ···, $P(\ell)$ 推 $P(\ell+1)$).

知识就回顾到这里. 开始进入集的世界吧!

集

定义　集 (set) 是具有某种特定性质的对象汇集而成的一个整体, 其对象称为元 ($element$).

定义　无元的集是空集 ($empty\ set$).

评注　一般用小写字母表示元, 大写字母表示集.

定义　一般地, 若集 A 由元 a, b, c, $\cdots$ 作成, 我们写

$$A = \{\, a, b, c, \cdots \}.$$

还有一种记号. 设集 A 是由具有某种性质 p 的对象汇集而成, 则记

$$A = \{\, x \mid x \text{ possesses the property } p \,\}.$$

定义　若 a 是集 A 的元, 则写 $a \in A$ 或 $A \ni a$, 说 a 属于 ($to\ belong\ to$) A 或 A 包含 ($to\ contain$) a. 若 a 不是集 A 的元, 则写 $a \notin A$ 或 $A \not\ni a$, 说 a 不属于 A 或 A 不包含 a.

例　全体整数作成的集用 $\mathbb{Z}$ ($Zahl$)[†] 表示. 它可以写为

$$\mathbb{Z} = \{\, 0, 1, -1, 2, -2, \cdots, n, -n, \cdots \}.$$

例　全体非负整数作成的集用 $\mathbb{N}$ ($natural$) 表示. 它可以写为

$$\mathbb{N} = \{\, x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ and } x \geq 0 \,\}.$$

为了方便, 也可以写为

$$\mathbb{N} = \{\, x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0 \,\}.$$

定义　若任取 $a \in A$, 都有 $a \in B$, 则写 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 说 A 是 B 的子集 ($subset$) 或 B 是 A 的超集 ($superset$). 假如有一个 $b \in B$ 不是 A 的元, 可以用 “真” ($proper$) 形容之.

[†] A German word which means *number*.

例 空集是任意集的子集. 空集是任意不空的集的真子集.

例 全体有理数作成的集用 $\mathbb{Q}$ (*quotient*) 表示. 因为整数是有理数, 所以 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. 因为有理数 $\frac{1}{2}$ 不是整数, 我们说 $\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的真子集.

定义 全体实数作成的集用 $\mathbb{R}$ (*real*) 表示.

定义 全体复数作成的集用 $\mathbb{C}$ (*complex*) 表示. 不难看出,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

定义 $\mathbb{F}$ (*field*) 可表示 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 的任意一个. 不难看出, $\mathbb{F}$ 适合这几条:

(i) $0 \in \mathbb{F}$, $1 \in \mathbb{F}$, $0 \neq 1$;

(ii) 任取 $x, y \in \mathbb{F}$ $(y \neq 0)$, 必有 $x - y, \frac{x}{y} \in \mathbb{F}$.

后面会见到稍详细的论述.

定义 设 $\mathbb{L}$ 是 $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{F}$ 的任意一个. $\mathbb{L}^*$ 表示 $\mathbb{L}$ 去掉 0 后得到的集. 不难看出, $\mathbb{L}$ 是 $\mathbb{L}^*$ 的真超集.

定义 若集 A 与 B 包含的元完全一样, 则 A 与 B 是同一集. 我们说 A 等于 B, 写 $A = B$. 显然

$$A = B \iff A \subset B \text{ and } B \subset A.$$

定义 集 A 与 B 的交 (*intersection*) 是集

$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \text{ and } x \in B \,\}.$$

也就是说, $A \cap B$ 恰由 A 与 B 的公共元作成.

集 A 与 B 的并 (*union*) 是集

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ or } x \in B \,\}.$$

也就是说, $A \cup B$ 恰包含 A 与 B 的全部元.

类似地, 可定义多个集的交与并.

定义 设 A, B 是集. 定义

$$A \times B = \{\, (a,b) \mid a \in A,\ b \in B \,\}.$$

$A \times A$ 可简写为 A^2. 类似地,

$$A \times B \times C = \{\, (a,b,c) \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C \,\}, \quad A^3 = A \times A \times A.$$

例 设 $A = \{\, 1,2 \,\}$, $B = \{\, 3,4,5 \,\}$. 则

$$A \times B = \{\, (1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5) \,\}.$$

而

$$B \times A = \{\, (3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2) \,\}.$$

评注 一般地, $A \times B \neq B \times A$. 假如 A, B 各自有 m, n 个元, 利用一点计数知识可以看出, $A \times B$ 有 mn 个元.

函数

定义 假如通过一个法则 f, 使任取 $a \in A$, 都能得到唯一的 $b \in B$, 则说这个法则 f 是集 A 到集 B 的一个函数 (*function*). 元 b 是元 a 在函数 f 下的象 (*image*). 元 a 是元 b 在 f 下的一个原象 (*inverse image*). 这个关系可以写为

$$f\colon \quad \begin{aligned} &A \to B, \\ &a \mapsto b = f(a). \end{aligned}$$

称 A 是定义域 (*domain*), B 是陪域† (*codomain*).

† 不要混淆陪域与象集 (*image, range*). f 的象集是

$$\operatorname{Im} f = \{\, b \in B \mid b = f(a),\ a \in A \,\}.$$

这就是中学数学里的 “值域”.

例 可以把 $\mathbb{R}^2$ 看作平面上的点集.

$$f:\qquad \begin{aligned}&\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\\ &(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

是函数: 它表示点 (x,y) 到点 $(0,0)$ 的距离.

例 设

$$A = \{\,\mathrm{dinner}, \mathrm{bath}, \mathrm{me}\,\}, \quad B = \{\,0, 1\,\}.$$

法则

$$f_1:\qquad \mathrm{dinner} \mapsto 0, \quad \mathrm{bath} \mapsto 1$$

不是 A 到 B 的函数, 因为它没有为 A 的元 me 规定象. 但是, 如果记 $A_1 = \{\,\mathrm{dinner}, \mathrm{bath}\,\}$, 这个 f_1 可以是 A_1 到 B 的函数.

法则

$$f_2:\qquad \begin{aligned}&\mathrm{dinner} \mapsto 0,\\ &\mathrm{bath} \mapsto 1,\\ &\mathrm{me} \mapsto b \quad \text{where } b^2 = b\end{aligned}$$

不是 A 到 B 的函数, 因为它给 A 的元 me 规定的象不唯一.

法则

$$f_3:\qquad \mathrm{dinner} \mapsto 0, \quad \mathrm{bath} \mapsto 1, \quad \mathrm{me} \mapsto -1$$

不是 A 到 B 的函数, 因为它给 A 的元 me 规定的象不是 B 的元. 但是, 如果记 $B_1 = \{\,-1, 0, 1\,\}$, 这个 f_3 可以是 A 到 B_1 的函数.

定义 设 f_1 与 f_2 都是 A 到 B 的函数. 若任取 $a \in A$, 必有 $f_1(a) = f_2(a)$, 则说这二个函数相等, 写为 $f_1 = f_2$.

例 设 $A \subset \mathbb{C}$, 且 A 非空. 定义二个 A 到 $\mathbb{C}$ 的函数: $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = |x|^2$. 如果 $A = \mathbb{R}$, 那么 $f_1 = f_2$. 可是, 若 $A = \mathbb{C}$, f_1 与 f_2 不相等.

例 设 A 是全体正实数作成的集. 定义二个 A 到 $\mathbb{R}$ 的函数: $f_1(x) = \frac{1}{6}\log_2 x^3$, $f_2(x) = \log_4 x$. 知道对数的读者可以看出, f_1 与 f_2 有着相同的对应法则, 故 $f_1 = f_2$. 因为 f_2 是对数函数 (*logarithmic function*), 所以 f_1 也是.

评注 在上下文清楚的情况下, 可以单说函数的对应法则. 比如, 中学数学课说 "二次函数 $f(x) = x^2 + x - 1$" 时, 定义域与陪域默认都是 $\mathbb{R}$. 中学的函数一般都是实数的子集到实数的子集的函数. 所谓 "自然定义域" 是指 (在一定范围内) 一切使对应法则有意义的元构成的集. 比如, 在中学, 我们说 $\frac{1}{x}$ 的自然定义域是 $\mathbb{R}^*$, $\sqrt{x}$ 的自然定义域是一切非负实数. 在研究复变函数时, 我们说 $\frac{1}{z}$ 的自然定义域是 $\mathbb{C}^*$. 如果不明确函数的定义域, 我们会根据上下文作出自然定义域作为它的定义域.

定义 A 到 A 的函数是 A 的变换 (*transform*). 换句话说, 变换是定义域跟陪域一样的函数.

二元运算

定义 A^2 到 A 的函数称为 A 的二元运算 (*binary functions*).

例 设 $f(x, y) = x - y$. 这个 f 是 $\mathbb{Z}$ 的二元运算; 但是, 它不是 $\mathbb{N}$ 的二元运算.

评注 设 $\circ$ 是 A 的二元运算. 代替 $\circ(x, y)$, 我们写 $x \circ y$. 一般地, 若表示这个二元运算的符号不是字母, 我们就把这个符号写在二个元的中间.

定义 设 $T(A)$ 是全部 A 的变换作成的集. 设 f, g 是 A 的变换. 任取 $a \in A$, 当然有 $b = f(a) \in A$. 所以, $g(b) = g(f(a))$ 也是 A 的元. 当然, 这个 $g(f(a))$ 也是唯一确定的. 这样, 我们说, f 与 g 的复合 (*composition*) $g \circ f$ 是

$$g \circ f\colon \quad A \to A, \quad a \mapsto g(f(a)).$$

所以, 复合是 $T(A)$ 的二元运算:

$$\circ\colon \quad T(A) \times T(A) \to T(A), \quad (g, f) \mapsto g \circ f.$$

评注 设 A 有有限多个元. 此时, 可排出 A 的元:

$$A = \{\, a_1, a_2, \cdots, a_n \,\}.$$

设 f 是 A^2 到 B 的函数. 则任给整数 i, j, $1 \le i, j \le n$, 记

$$f(a_i, a_j) = b_{i,j} \in B.$$

可以用这样的表描述此函数:

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline a_1 & b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ a_2 & b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{array}$$

有的时候, 为了强调函数名, 可在左上角书其名:

$$\begin{array}{c|cccc} f & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline a_1 & b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ a_2 & b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{array}$$

这种表示函数的方式是方便的. 如果这些 $b_{i,j}$ 都是 A 的元, 就说这张表是 A 的运算表.

例 设 $T = \{\, 0, 1, -1 \,\}$, $\circ(x, y) = xy$. 不难看出, $\circ$ 确实是 T 的二元运算. 它的运算表如下:

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

例 设 $\mathbb{F}_{\text{nu}}$ 是将 $\mathbb{F}$ 去掉 0, 1 后得到的集[†]. 看下列 6 个法则:

$$f_0\colon\quad x \mapsto x;$$
$$f_1\colon\quad x \mapsto 1-x;$$
$$f_2\colon\quad x \mapsto \frac{1}{x};$$
$$f_3\colon\quad x \mapsto 1-\frac{1}{1-x};$$
$$f_4\colon\quad x \mapsto 1-\frac{1}{x};$$
$$f_5\colon\quad x \mapsto \frac{1}{1-x}.$$

记 $S_6 = \{\, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \,\}$. 可以验证, $S_6 \subset T(\mathbb{F}_{\text{nu}})$.

进一步地, 36 次复合告诉我们, 任取 $f, g \in S_6$, 必有 $g \circ f \in S_6$. 可以验证, 这是 S_6 的 (复合) 运算表:

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_0	f_4	f_5	f_2	f_3
f_2	f_2	f_5	f_0	f_4	f_3	f_1
f_3	f_3	f_4	f_5	f_0	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_1	f_2	f_5	f_0
f_5	f_5	f_2	f_3	f_1	f_0	f_4

我们在本节会经常用 S_6 举例.

定义 设 $\circ$ 是 A 的二元运算. 若任取 $x, y, z \in A$, 必有

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

则说 f 适合结合律 ($associativity$). 此时, $(x \circ y) \circ z$ 或 $x \circ (y \circ z)$ 可简写为 $x \circ y \circ z$.

例 $\mathbb{Z}$ 的加法当然适合结合律. 可是, 它的减法不适合结合律.

[†] 这个 $\mathbb{F}_{\text{nu}}$ 只是临时记号: nu 表示 *nil*, *unity*.

评注 变换的复合适合结合律. 确切地, 设 f, g, h 都是 A 的变换. 任取 $a \in A$, 则

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))),$$
$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))).$$

也就是说,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

例 S_6 的复合当然适合结合律.

定义 设 $\circ$ 是 A 的二元运算. 若任取 $x, y \in A$, 必有

$$x \circ y = y \circ x,$$

则说 $\circ$ 适合交换律 (*commutativity*).

例 $\mathbb{F}^*$ 的乘法当然适合交换律. 可是, 它的除法不适合交换律.

例 S_6 的复合不适合交换律, 因为 $f_1 \circ f_2 = f_4$, 而 $f_2 \circ f_1 = f_5$, 二者不相等.

评注 在本文里, $\cdot$ 运算的优先级高于 $+$ 运算. 所以, $a \cdot b + c$ 的意思就是

$$(a \cdot b) + c,$$

而不是

$$a \cdot (b + c).$$

定义 设 $+, \cdot$ 是 A 的二个二元运算. 若任取 $x, y, z \in A$, 必有

$$\text{(LD)} \qquad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$$

则说 $+$ 与 $\cdot$ 适合左 $(\cdot)$ 分配律[†] (*left distributivity*). 类似地, 若

$$\text{(RD)} \qquad (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x,$$

[†] 在不引起歧义时, 括号里的内容可省略. 或者这么说: 当我们说 $+, \cdot$ 适合分配律时, 我们不会理解为 $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$. 但有意思的事儿是, 如果把 $+$ 理解为并, $\cdot$ 理解为交, x, y, z 理解为集, 那这个式是对的. 当然, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ 也是对的.

则说 $+$ 与 $\cdot$ 适合右 $(\cdot)$ 分配律 (*right distributivity*). 说既适合 LD 也适合 RD 的 $+$ 与 $\cdot$ 适合 $(\cdot)$ 分配律 (*distributivity*). 显然, 若 $\cdot$ 适合交换律, 则 LD 与 RD 等价.

例 $\mathbb{F}$ 的加法与乘法适合分配律. 当然, 减法与乘法也适合分配律:

$$x(y-z)=xy-xz=yx-zx=(y-z)x.$$

甚至, 在正实数里, 加法与除法适合右分配律:

$$\frac{y+z}{x}=\frac{y}{x}+\frac{z}{x}.$$

定义 设 $\circ$ 是 A 的二元运算. 若任取 $x,y,z\in A$, 必有

$$\text{(LC)}\qquad x\circ y=x\circ z\implies y=z,$$

则说 $\circ$ 适合左消去律 (*left cancellation property*). 类似地, 若

$$\text{(RC)}\qquad x\circ z=y\circ z\implies x=y,$$

则说 $\circ$ 适合右消去律 (*right cancellation property*). 说既适合 LC 也适合 RC 的 $\circ$ 适合消去律 (*cancellation property*). 显然, 若 $\circ$ 适合交换律, 则 LC 与 RC 等价.

例 显然, $\mathbb{N}$ 的乘法不适合消去律, 但 $\mathbb{N}^*$ 的乘法适合消去律[†].

例 考虑 $x\circ y=x^3+y^2$. 若把 $\circ$ 视为 $\mathbb{N}$ 的二元运算, 那么它适合消去律. 若把 $\circ$ 视为 $\mathbb{Q}$ 的二元运算, 那么它适合右消去律. 若把 $\circ$ 视为 $\mathbb{C}$ 的二元运算, 那么它不适合任意一个消去律.

例 一般地, 当 A 至少有二个元时, $\circ$ (在 $T(A)$ 里) 不适合消去律. 设 $a,b\in A$, $a\neq b$. 考虑下面 4 个变换:

$$\begin{aligned}
g_0:&\qquad a\mapsto a,\quad b\mapsto b,\quad x\mapsto x \text{ where } x\neq a,b;\\
g_1:&\qquad a\mapsto a,\quad b\mapsto a,\quad x\mapsto x \text{ where } x\neq a,b;\\
g_2:&\qquad a\mapsto b,\quad b\mapsto b,\quad x\mapsto x \text{ where } x\neq a,b;\\
g_3:&\qquad a\mapsto b,\quad b\mapsto a,\quad x\mapsto x \text{ where } x\neq a,b.
\end{aligned}$$

[†] 后面提到整环时, 我们会稍微修改一下消去律的描述.

可以验证,

$$g_3 \circ g_1 = g_2 \circ g_1 = g_2 \circ g_3 = g_2.$$

由此可以看出, $\circ$ 不适合任意一个消去律.

例 我们看 $\circ$ 在 S_6 里是否适合消去律. 取 $f, g, h \in S_6$. 由表易知, 当 $g \neq h$ 时, $f \circ g \neq f \circ h$ (横着看运算表), 且 $g \circ f \neq h \circ f$ (竖着看运算表). 这说明, $\circ$ 在 $T(\mathbb{F}_{\mathrm{nu}})$ 的子集 S_6 里适合消去律.

定义 设 $\circ$ 是 A 的二元运算. 若存在 $e \in A$, 使若任取 $x \in A$, 必有

$$e \circ x = x \circ e = x,$$

则说 e 是 A 的 (关于运算 $\circ$ 的) 幺元 (*identity*). 如果 e' 也是幺元, 则

$$e = e \circ e' = e'.$$

例 $\mathbb{F}$ 的加法的幺元是 0, 且其乘法的幺元是 1.

例 不难看出, 这个变换是 $T(A)$ 的幺元:

$$\iota: \quad \begin{aligned} A &\to A, \\ a &\mapsto a. \end{aligned}$$

它也有个一般点的名字: 恒等变换 (*identity transform*).

在 S_6 里, f_0 就是这里的 ι.

定义 设 $\circ$ 是 A 的二元运算. 设 e 是 A 的幺元. 设 $x \in A$. 若存在 $y \in A$, 使

$$y \circ x = x \circ y = e,$$

则说 y 是 x 的 (关于运算 $\circ$ 的) 逆元 (*inverse*).

例 $\mathbb{F}$ 的每个元都有加法逆元, 即其相反数.

评注 设 $\circ$ 适合结合律. 如果 y, y' 都是 x 的逆元, 则

$$y = y \circ e = y \circ (x \circ y') = (y \circ x) \circ y' = e \circ y' = y'.$$

此时, 一般用 x^{-1} 表示 x 的逆元. 因为

$$x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e,$$

由上可知, x^{-1} 也有逆元, 且 $(x^{-1})^{-1} = x$.

例 一般地, 当 A 至少有二个元时, $T(A)$ 既有有逆元的变换, 也有无逆元的变换. 还是看前面的 g_0, g_1, g_2, g_3. 首先, g_0 是幺元 ι. 不难看出, g_0 与 g_3 都有逆元:

$$g_0 \circ g_0 = g_3 \circ g_3 = g_0.$$

不过, g_1 不可能有逆元. 假设 g_1 有逆元 h, 则应有

$$(h \circ g_1)(a) = \iota(a) = a, \quad (h \circ g_1)(b) = \iota(b) = b.$$

可是, $g_1(a) = g_1(b) = a$, 故 $(h \circ g_1)(a) = (h \circ g_1)(b) = h(a)$, 它不能既等于 a 也等于 b, 矛盾!

例 再看 S_6. 由表可看出, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 的逆元分别是 f_0, f_1, f_2, f_3, f_5, f_4.

评注 设 $\circ$ 适合结合律. 如果 x, y 都有逆元, 那么 $x \circ y$ 也有逆元, 且

$$(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}.$$

为了说明这一点, 只要按定义验证即可:

$$(y^{-1} \circ x^{-1}) \circ (x \circ y) = y^{-1} \circ (x^{-1} \circ x) \circ y = y^{-1} \circ e \circ y = y^{-1} \circ y = e,$$
$$(x \circ y) \circ (y^{-1} \circ x^{-1}) = x \circ (y \circ y^{-1}) \circ x^{-1} = x \circ e \circ x^{-1} = x \circ x^{-1} = e.$$

这个规则往往称为袜靴规则 (*socks and shoes rule*): 设 y 是穿袜, x 是穿靴, $x \circ y$ 表示动作的复合: 先穿袜后穿靴. 那么这个规则告诉我们, $x \circ y$ 的逆元就是先脱靴再脱袜.

评注 由此可见, 结合律是一条很重要的规则. 我们算 $63 \cdot 8 \cdot 125$ 时也会想着先算 $8 \cdot 125$.

半群与群

定义 设 S 是非空集. 设 $\circ$ 是 S 的二元运算. 若 $\circ$ 适合结合律, 则称 S (关于 $\circ$) 是半群 ($semi$-$group$).

例 $\mathbb{N}$ 关于加法 (或乘法) 作成半群.

例 $T(A)$ 关于 $\circ$ 作成半群.

评注 事实上, 这里要求 S 非空是有必要的.

首先, 空集没什么意思. 其次, 前面所述的结合律、交换律、分配律等自动成立, 这是因为对形如 "若 p, 则 q" 的命题而言, p 为假推出整个命题为真. 这是相当 "危险" 的!

定义 设 m 是正整数. 设 x 是半群 S 的元. 令

$$x^1 = x, \quad x^m = x \circ x^{m-1}.$$

x^m 称为 x 的 m 次幂. 不难看出, 当 m, n 都是正整数时,

$$x^{m+n} = x^m \circ x^n, \quad (x^m)^n = x^{mn}.$$

假如 S 有二个元 x, y 适合 $x \circ y = y \circ x$, 那么还有

$$(x \circ y)^m = x^m \circ y^m.$$

例 还是看熟悉的 $\mathbb{N}$. 对于乘法而言, 这里的幂就是普通的幂——一个数自乘多次的结果. 对于加法而言, 这里的幂相当于乘法——一个数自加多次的结果.

定义 设 G 关于 $\circ$ 是半群. 若 G 的关于 $\circ$ 的幺元存在, 且 G 的任意元都有关于 $\circ$ 的逆元, 则 G 是群 ($group$).

例 $\mathbb{N}$ 关于加法 (或乘法) 不能作成群. $\mathbb{Z}$ 关于加法作成群, 但关于乘法不能作成群. $\mathbb{F}$ 关于乘法不能作成群, 但 $\mathbb{F}^*$ 关于乘法作成群. 不过, $\mathbb{F}^*$ 关于加法不能作成群.

例 $T(A)$ 一般不是群. 不过, S_6 是群.

评注 群有唯一的幺元. 群的每个元都有唯一的逆元.

评注 设 G 关于 $\circ$ 是群. 我们说, $\circ$ 适合消去律.

假如 $x \circ y = x \circ z$. 二侧左边乘 x 的逆元 x^{-1}, 就有

$$x^{-1} \circ (x \circ y) = x^{-1} \circ (x \circ y).$$

由于 $\circ$ 适合结合律,

$$(x^{-1} \circ x) \circ y = (x^{-1} \circ x) \circ y.$$

也就是

$$e \circ y = e \circ z.$$

这样, $y = z$. 类似地, 用同样的方法可以知道, 右消去律也对.

定义 已经知道, 群的每个元 x 都有逆元 x^{-1}. 由此, 当 m 是正整数时, 定义 $x^{-m} = (x^{-1})^m$. 再定义 $x^0 = e$. 利用半群的结果, 可以看出, 当 m, n 都是整数时,

$$x^{m+n} = x^m \circ x^n, \quad (x^m)^n = x^{mn}.$$

假如 G 有二个元 x, y 适合 $x \circ y = y \circ x$, 那么还有

$$(x \circ y)^m = x^m \circ y^m.$$

例 对于 $\mathbb{F}^*$ 的乘法而言, 这里的任意整数幂跟普通的整数幂没有任何区别. 我们学习数的负整数幂的时候, 也是借助倒数定义的.

子群

定义 设 G 关于 $\circ$ 是群. 设 $H \subset G$, H 非空. 若 H 关于 $\circ$ 也作成群, 则 H 是 G 的子群 ($subgroup$).

例 对加法来说, $\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{F}$ 的子群. 对乘法来说, $\mathbb{Z}^*$ 不是 $\mathbb{F}^*$ 的子群.

评注 设 $H \subset G$, H 非空. H 是 G 的子群的一个必要与充分条件是: 任取 $x, y \in H$, 必有 $x \circ y^{-1} \in H$.

怎么说明这一点呢? 先看充分性. 任取 $x \in H$, 则 $e = x \circ x^{-1} \in H$. 任取 $y \in H$, 则 $y^{-1} = e \circ y^{-1} \in H$. 所以

$$x \circ y = x \circ (y^{-1})^{-1} \in H.$$

$\circ$ 在 G 适合结合律, $H \subset G$, 所以 $\circ$ 作为 H 的二元运算也适合结合律. 至此, H 是半群.

前面已经说明, $e \in H$, 所以 H 的关于 $\circ$ 的幺元存在. 进一步地, $x \in H$ 在 G 里的逆元也是 H 的元, 所以 H 的任意元都有关于 $\circ$ 的逆元. 这样, H 是群. 顺便一提, 我们刚才也说明了, G 的幺元也是 H 的幺元, 且 H 的元在 G 里的逆元也是在 H 里的逆元.

再看必要性. 假设 H 是一个群. 任取 $x, y \in H$, 我们要说明 $x \circ y^{-1} \in H$. 看上去有点显然呀! H 是群, 所以 y 有逆元 y^{-1}, 又因为 $\circ$ 是 H 的二元运算, $x \circ y^{-1} \in H$. 不过要注意一个细节. 我们说明充分性时, y^{-1} 被认为是 y 在 G 里的逆元; 可是, 刚才的论证里 y^{-1} 实则是 y 在 H 里的逆元. 大问题! 怎么解决呢? 如果我们说明 y 在 H 里的逆元也是 y 在 G 里的逆元, 那这个漏洞就被修复了.

我们知道, H 有幺元 e_H, 所以 $e_H \circ e_H = e_H$. e_H 是 G 的元, 所以 e_H 在 G 里有逆元 $(e_H)^{-1}$. 这样,

$$\begin{aligned} e_H &= e \circ e_H \\ &= ((e_H)^{-1} \circ e_H) \circ e_H \\ &= (e_H)^{-1} \circ (e_H \circ e_H) \\ &= (e_H)^{-1} \circ e_H \\ &= e. \end{aligned}$$

取 $y \in H$. y 在 H 里有逆元 z, 即

$$z \circ y = y \circ z = e_H = e.$$

y, z 都是 G 的元. 这样, 根据逆元的唯一性, z 自然是 y 在 G 里的逆元.

加群

定义 若 G 关于名为 $+$ 的二元运算作成群, 幺元 e 读作 "零元" 写作 0, $x \in G$ 的逆元 x^{-1} 读作 "x 的相反元" 写作 $-x$, 且 $+$ 适合交换律, 则说 G 是加群 ($additive\ group$). 相应地, "元的幂" 也应该改为 "元的倍": x^m 写为 mx. 用加法的语言改写前面的幂的规则, 就得到了倍的规则: 对任意 $x, y \in G$, $m, n \in \mathbb{Z}$, 有

$$\begin{aligned}&(m+n)x = mx + nx,\\&m(nx) = (mn)x,\\&m(x+y) = mx + my.\end{aligned}$$

顺便一提, 在这种记号下, $x - y$ 是 $x + (-y)$ 的简写. 并且

$$x + y = x + z \implies y = z.$$

由于这里的加法适合交换律, 直接换位就是右消去律. 前面说, 若运算适合结合律, 则 x 的逆元的逆元还是 x. 这句话用加法的语言写, 就是

$$-(-x) = x.$$

前面的 "袜靴规则" 就是

$$-(x+y) = (-y) + (-x) = (-x) + (-y) = -x - y.$$

这就是熟悉的去括号法则. 这里体现了交换律的作用.

评注 初见此定义可能会觉得有些混乱: 怎么 "倒数" 又变为 "相反数" 了? 其实这都是借鉴已有写法. 前面, $\circ$ 虽然不是 $\cdot$, 但这个形状暗示着乘法, 因此有 x^{-1} 这样的记号; 现在, 运算的名字是 $+$, 自然要根据形状作出相应的改变. 其实, 这里 "名为 $+$" "零元" "相反元" 都不是本质——换句话说, 还是可以用老记号. 不过, 我们主要接触至少与二种运算相关联的结构——整环与域, 所以用二套记号、名字是有必要的.

评注 前面的 $x^0 = e$ 在加群里变为 $0x = 0$. 看上去 "很普通", 不过左边的 0 是整数, 右边的 0 是加群的零元, 二者一般不一样!

例 显而易见, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}$ 都是加群.

例 S_6 不是加群, 因为它的二元运算不适合交换律.

评注 类似地, 可以定义子加群 (*sub-additive group*). 这里, 就直接用等价刻画来描述它: "G 的非空子集 H 是加群 G 的子加群的一个必要与充分条件是: 任取 $x, y \in H$, 必有 $x - y \in H$. "

和

定义 设 f 是 $\mathbb{Z}$ 的非空子集 S 到加群 G 的函数. 设 p, q 是二个整数. 如果 $p \leq q$, 则记

$$\sum_{j=p}^{q} f(j) = f(p) + f(p+1) + \cdots + f(q).$$

也就是说, $\sum_{j=p}^{q} f(j)$ 就是 $q - (p-1)$ 个元的和的一种简洁的表示法. 如果 $p > q$, 约定 $\sum_{j=p}^{q} f(j) = 0$.

例 我们已经知道, $n \geq 0$ 时

$$0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

用 $\sum$ 写出来, 就是

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

这里的 k 是所谓的 "dummy variable". 所以

$$\sum_{j=0}^{n-1} j = \sum_{k=0}^{n-1} k = \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell = \frac{n(n-1)}{2}.$$

例 f 可以是常函数:

$$\sum_{t=p}^{q} 1 = \begin{cases} q - p + 1, & q \geq p; \\ 0, & q < p. \end{cases}$$

例 设 f 与 g 是 $\mathbb{Z}$ 的非空子集 S 到加群 G 的函数. 因为加群的加法适合结合律与交换律, 所以

$$\sum_{j=p}^{q}(f(j)+g(j))=\sum_{j=p}^{q}f(j)+\sum_{j=p}^{q}g(j).$$

评注 设 $f(i,j)$ 是 $\mathbb{Z}^2$ 的非空子集到加群 G 的函数. 记

$$S_C=\sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n}f(i,j),\quad S_R=\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q}f(i,j),$$

其中 $q\geq p$, $n\geq m$. $\sum_{i=m}^{n}f(i,j)$ 是何物? 暂时视 i 之外的变元为常元, 则

$$\sum_{i=m}^{n}f(i,j)=f(m,j)+f(m+1,j)+\cdots+f(n,j).$$

$\sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n}f(i,j)$ 是 $\sum_{j=p}^{q}\left(\sum_{i=m}^{n}f(i,j)\right)$ 的简写:

$$\sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n}f(i,j)=\sum_{i=m}^{n}f(i,p)+\sum_{i=m}^{n}f(i,p+1)+\cdots+\sum_{i=m}^{n}f(i,q).$$

$\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q}f(i,j)$ 有着类似的解释. 我们说, S_C 一定与 S_R 相等.

记

$$C_j=\sum_{i=m}^{n}f(i,j),\quad R_i=\sum_{j=p}^{q}f(i,j).$$

考虑下面的表:

$$\begin{array}{cccc|c}
f(m,p) & f(m,p+1) & \cdots & f(m,q) & R_m \\
f(m+1,p) & f(m+1,p+1) & \cdots & f(m+1,q) & R_{m+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
f(n,p) & f(n,p+1) & \cdots & f(n,q) & R_n \\
\hline
C_p & C_{p+1} & \cdots & C_q &
\end{array}$$

由此, 不难看出, S_C 与 S_R 只是用不同的方法将 $(n-m+1)(q-p+1)$ 个元相加罢了.

评注 上面的例其实就是一个特殊情形 $(n-m+1=2)$.

环

定义 设 R 是加群. 设 $\cdot$ (读作 "乘法") 也是 R 的二元运算. 假设
(i) $\cdot$ 适合结合律;
(ii) $+$ 与 $\cdot$ 适合 $\cdot$ 分配律.
我们说 R (关于 $+$ 与 $\cdot$) 是环 (*ring*).

评注 在不引起歧义的情况下, 可省去 $\cdot$. 例如, $a \cdot b$ 可写为 ab.

例 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}$ (关于普通加法与乘法) 都是环.

例 全体偶数作成的集也是环. 一般地, 设 k 是整数, 则全体 k 的倍作成的集是环.

例 这里举一个 "平凡的" (*trivial*) 例. N 只有一个元 0. 可以验证, N 关于普通加法与乘法作成群. 这也是 "最小的环". 在上个例里, 取 $k=0$ 就是 N.

例 这里举一个 "不平凡的" (*nontrivial*) 例. 设 $R = \{0, a, b, c\}$. 加法和乘法由以下二个表给定:

$+$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

$\cdot$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
b	0	a	b	c
c	0	a	b	c

可以验证, 这是一个环.

评注 我们看一下环的简单性质.

已经知道, R 的任意元的 "整数 0 倍" 是 R 的零元. 不禁好奇, 零元乘任意元会是什么结果. 首先, 回想起, R 的零元适合 $0+0=0$. 利用分配律, 当 $x \in R$ 时,

$$0x = (0+0)x = 0x + 0x.$$

我们知道, 加法适合消去律. 所以

$$0 = 0x.$$

类似地, $x0 = 0$. 也许有点眼熟? 但是这里左右二侧的 0 都是 R 的元, 不一定是数!

因为

$$xy + (-x)y = (x - x)y = 0,$$
$$xy + x(-y) = x(y - y) = 0,$$

所以

$$(-x)y = x(-y) = -xy.$$

从而

$$(-x)(-y) = -(x(-y)) = -(-xy) = xy.$$

根据分配律,

$$x(y_1 + \cdots y_n) = xy_1 + \cdots + xy_n,$$
$$(x_1 + \cdots + x_m)y = x_1 y + \cdots + x_m y.$$

二式联合, 就是

$$(x_1 + \cdots + x_m)(y_1 + \cdots y_n) = x_1 y_1 + \cdots + x_1 y_n + \cdots + x_m y_1 + \cdots + x_m y_n.$$

利用 $\sum$ 符号, 此式可以写为

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j.$$

所以, 若 n 是整数, $x, y \in R$, 则

$$(nx)y = n(xy) = x(ny).$$

对于正整数 m, n 与 R 的元 x, 有

$$x^{m+n} = x^m x^n, \quad (x^m)^n = x^{mn}.$$

假如 R 有二个元 x, y 适合 $xy = yx$, 那么还有

$$(xy)^m = x^m y^m.$$

例 在 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}$ 里, 这些就是我们熟悉的 (部分的) 数的运算律.

评注 类似地, 可以定义子环 ($subring$). 这里, 就直接用等价刻画来描述它: "R 的非空子集 S 是环 R 的子环的一个必要与充分条件是: 任取 $x, y \in S$, 必有 $x - y \in S$, $xy \in S$. "

定义 设 R 是环. 假设任取 $x, y \in R$, 必有 $xy = yx$, 就说 R 是交换环 ($commutative\ ring$).

评注 以后接触的环都是交换环.

整环

定义 设 D 是环. 假设

(i) 任取 $x, y \in D$, 必有 $xy = yx$;

(ii) 存在 $1 \in D$, $1 \neq 0$, 使任取 $x \in D$, 必有 $1x = x1 = x$;

(iii) $\cdot$ 适合 "消去律变体"[†]: 若 $xy = xz$, $x \neq 0$, 则 $y = z$.

我们说 D (关于 $+$ 与 $\cdot$) 是整环 ($domain$, $integral\ domain$).

例 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}$ 都是整环. 当然, 也有介于 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{F}$ 之间的整环. 假如 $s \in \mathbb{C}$ 的平方是整数, 那么全体形如 $x + sy$ $(x, y \in \mathbb{Z})$ 的数作成一个整环.

例 看一个有限整环的例. 设 V (*Vierergruppe*)[‡] 是 4 元集:

$$V = \{\, 0, 1, \tau, \tau^2 \,\}.$$

加法与乘法由下面的运算表决定:

$+$	0	1	τ	τ^2
0	0	1	τ	τ^2
1	1	0	τ^2	τ
τ	τ	τ^2	0	1
τ^2	τ^2	τ	1	0

$\cdot$	0	1	τ	τ^2
0	0	0	0	0
1	0	1	τ	τ^2
τ	0	τ	τ^2	1
τ^2	0	τ^2	1	τ

† 一般地, 这也可称为消去律.

‡ A German word which means *four-group*.

可以验证, V 不但是一个环, 它还适合整环定义的条件 (i) (ii) (iii). 因此, V 是整环.

在 V 里, $1+1=0$, 这跟平常的加法有点不一样. 换句话说, 这里的 0 跟 1 已经不是我们熟悉的数了.

评注 整环 D 有乘法幺元 1. 因为 D 是加群, 1 当然有相反元 -1. 任取 $a \in D$. 根据分配律,

$$0 = 0a = (1 + (-1))a = 1a + (-1)a = a + (-1)a.$$

又因为 a 的相反元 $-a$ 适合

$$0 = a + (-a),$$

故由 (加法) 消去律知 $-a = (-1)a$.

例 全体偶数作成的集是交换环, 却不是整环.

例 再来看一个非整环例. 考虑 $\mathbb{Z}^2$. 设 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. 规定

$$\begin{aligned}
&(a, b) = (c, d) \iff a = b \text{ and } c = d, \\
&(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d), \\
&(a, b)(c, d) = (ac, bd).
\end{aligned}$$

可以验证, 在这二种运算下, $\mathbb{Z}^2$ 作成一个交换环, 其加法、乘法幺元分别是 $(0, 0)$, $(1, 1)$. 可是

$$(1, 0) \neq (0, 0), \quad (0, 1) \neq (0, -1), \quad (1, 0)(0, 1) = (1, 0)(0, -1).$$

也就是说, 乘法不适合消去律.

评注 可是, 如果这么定义乘法, 那么 $\mathbb{Z}^2$ 可作为一个整环:

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

事实上, 这就是复数乘法, 因为

$$(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc).$$

评注 整环 D 有乘法幺元 1. 任取 $a \in D$. 我们定义

$$a^0 = 1.$$

我们已经知道, 当 m, n 是正整数, $x \in D$ 时,

$$x^m x^n = x^{m+n}, \quad (x^m)^n = x^{mn}.$$

现在, 当 m, n 是非负整数时, 上面的关系仍成立. 并且, 既然 D 的乘法适合交换律, 那么任取 x, $y \in D$, 必有

$$(xy)^m = x^m y^m,$$

m 可以是非负整数.

评注 类似地, 可以定义子整环 ($subdomain$). 这里, 就直接用前面的等价刻画来描述它: "D 的非空子集 S 是整环 D 的子整环的一个必要与充分条件是: (i) $1 \in S$; (ii) 任取 $x, y \in S$, 必有 $x - y \in S$, $xy \in S$. "

例 设 $D \subset \mathbb{C}$, 且 D 是整环. 不难看出, $\mathbb{Z} \subset D$.

积

定义 设 f 是 $\mathbb{Z}$ 的非空子集 S 到整环 D 的函数. 设 p, q 是二个整数. 如果 $p \leq q$, 则记

$$\prod_{j=p}^{q} f(j) = f(p) \cdot f(p+1) \cdot \cdots \cdot f(q).$$

也就是说, $\prod_{j=p}^{q} f(j)$ 就是 $q - (p-1)$ 个元的积的一种简洁的表示法. 如果 $p > q$, 约定 $\prod_{j=p}^{q} f(j) = 1$.

定义 设 n 是正整数. 那么 1, 2, ···, n 的积是 n 的阶乘 ($factorial$):

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j.$$

顺便约定 $0! = 1$.

评注 不难看出, 当 n 是正整数时,

$$n! = n \cdot (n-1)!.$$

例 不难验证, 下面是 0 至 9 的阶乘:

$$\begin{aligned} 0! &= 1, & 1! &= 1, \\ 2! &= 2, & 3! &= 6, \\ 4! &= 24, & 5! &= 120, \\ 6! &= 720, & 7! &= 5\,040, \\ 8! &= 40\,320, & 9! &= 362\,880. \end{aligned}$$

评注 因为整环的乘法也适合结合律与交换律, 所以

$$\prod_{j=p}^{q}(f(j)\cdot g(j)) = \prod_{j=p}^{q} f(j) \cdot \prod_{j=p}^{q} g(j),$$
$$\prod_{j=p}^{q}\prod_{i=m}^{n} f(i,j) = \prod_{i=m}^{n}\prod_{j=p}^{q} f(i,j),$$

其中, $\prod_{j=p}^{q}\prod_{i=m}^{n} f(i,j)$ 当然是 $\prod_{j=p}^{q}\left(\prod_{i=m}^{n} f(i,j)\right)$ 的简写.

评注 回顾一下 $\sum$ 符号. 我们已经知道

$$\sum_{j=p}^{q}(f(j)+g(j)) = \sum_{j=p}^{q} f(j) + \sum_{j=p}^{q} g(j).$$

因为整环有分配律, 故当 $c \in D$ 与变元 j 无关时†

$$\sum_{j=p}^{q} cf(j) = c\sum_{j=p}^{q} f(j).$$

进而, 当 c, d 都是常元时,

$$\sum_{j=p}^{q}(cf(j)+dg(j)) = c\sum_{j=p}^{q} f(j) + d\sum_{j=p}^{q} g(j).$$

类似地, 当 $q \geq p$, c 是常元时,

$$\prod_{j=p}^{q} cf(j) = c^{q-p+1}\prod_{j=p}^{q} f(j).$$

† 这样的元称为常元 (*constant*).

定义 最后介绍一下双阶乘 (*double factorial*). 前 n 个正偶数的积是 $2n$ 的双阶乘:

$$(2n)!! = \prod_{j=1}^{n} 2j.$$

前 n 个正奇数是 $2n-1$ 的双阶乘:

$$(2n-1)!! = \prod_{j=1}^{n} (2j-1).$$

顺便约定 $0!! = (-1)!! = 1$.

评注 不难看出, 对任意正整数 m, 都有

$$m!! = m \cdot (m-2)!!.$$

双阶乘可以用阶乘表示:

$$\begin{aligned} (2n)!! &= 2^n n!, \\ (2n-1)!! &= \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}. \end{aligned}$$

由此可得

$$n!! \cdot (n-1)!! = n!.$$

例 不难验证, 下面是 1 至 10 的双阶乘:

$$\begin{aligned} &1!! = 1, && 2!! = 2, \\ &3!! = 3, && 4!! = 8, \\ &5!! = 15, && 6!! = 48, \\ &7!! = 105, && 8!! = 384, \\ &9!! = 945, && 10!! = 3\,840. \end{aligned}$$

单位与域

定义 设 D 是整环. 设 $x \in D$. 若存在 $y \in D$ 使 $xy = 1$, 则说 x 是 D 的单位 (*unit*).

评注 不难看出, D 至少有一个单位 1, 因为 $1 \cdot 1 = 1$. 定义里的 y 自然就是 x 的 (乘法) 逆元, 其一般记为 x^{-1}. x^{-1} 当然也是单位. 二个单位 x, y 的积 xy 也是单位: $(xy)(y^{-1}x^{-1}) = 1$. 单位的乘法当然适合结合律. 这样, D 的单位作成一个 (乘法) 群. 姑且叫 D 的所有单位作成的集为单位群 $(unit\ group)$ 吧!

评注 不难看出, 0 一定不是单位.

例 看全体整数作成的整环 $\mathbb{Z}$. 它恰有二个单位: 1 与 -1.

例 $\mathbb{F}$ 也是整环. 它有无数多个单位: 任意 $\mathbb{F}^*$ 的元都是单位.

例 前面的 4 元集 V 的非零元都是单位.

例 现在看一个不那么平凡的例. 设

$$D = \{\, x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Z} \,\}.$$

这个 D (关于数的运算) 作成整环.

首先, 我们说, 不存在有理数 q 使 $q^2 = 3$. 用反证法. 设 $q = \frac{m}{n}$, m, n 是非零整数. 我们知道, 分数可以约分, 故可以假设 m, n 不全为 3 的倍. 这样

$$m^2 = 3n^2.$$

所以 m^2 一定是 3 的倍. 因为

$$(3\ell)^2 = 3 \cdot 3\ell^2,$$
$$(3\ell \pm 1)^2 = 3(3\ell^2 \pm 2\ell) + 1,$$

故由此可看出, m 也是 3 的倍. 记 $m = 3u$. 这样

$$3u^2 = n^2.$$

所以 n 也是 3 的倍. 这跟假设矛盾!

再说一下 D 的二个元相等意味着什么. 设 a, b, c, d 都是整数. 那么

$$a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3} \implies (a - c)^2 = 3(d - b)^2.$$

若 $d-b\neq 0$, 则 $\frac{a-c}{d-b}$ 是有理数, 且

$$\left(\frac{a-c}{d-b}\right)^2=3,$$

而这是荒谬的. 所以 $d-b=0$. 这样 $a-c=0$.

现在再来看单位问题. 若 k 是高于 1 的整数, 则 k 不是 D 的单位. 反证法. 若 k 是单位, 则有 $c,d\in\mathbb{Z}$ 使

$$1=k(c+d\sqrt{3})=kc+kd\sqrt{3}\implies 1=kc,$$

矛盾!

D 有无数多个单位. 因为

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1,$$

故对任意正整数 n, 有

$$(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n=1.$$

所以, $(2\pm\sqrt{3})^n$ 是单位.

定义 设 F 是整环. 若每个 F 的不是 0 的元都是 F 的单位, 则说 F 是域 (*field*).

例 不难看出, $\mathbb{F}$ 是域. 这也解释了为什么我们用 $\mathbb{F}$ 表示 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 之一.

评注 在域 F 里, 只要 $a\neq 0$, 则 a^{-1} 有意义. 那么, 我们说 $\frac{b}{a}$ 就是 $ba^{-1}=a^{-1}b$ 的简写. 不难验证, 当 $a,c\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}&\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\iff bc=da,\\&\frac{b}{a}\pm\frac{d}{c}=\frac{bc\pm da}{ac},\\&\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac}.\end{aligned}$$

若 $d\neq 0$, 则

$$\frac{\frac{b}{a}}{\frac{d}{c}}=\frac{bc}{da}.$$

这就是我们熟知的分数运算法则.

评注 类似地, 可以定义子域 ($subfield$). 这里, 就直接用前面的等价刻画来描述它: "F 的非空子集 K 是域 F 的子域的一个必要与充分条件是: (i) $1 \in K$; (ii) 任取 $x, y \in K$, $y \neq 0$, 必有 $x - y \in K$, $\frac{x}{y} \in K$. "

例 设 $F \subset \mathbb{C}$, 且 F 是域. 不难看出, $\mathbb{Q} \subset F$.

多项式的定义

现在开始介绍多项式.

定义 设 D 是整环. 设 x 是不在 D 里的任意一个文字. 形如

$$f(x)=a_0x^0+a_1x^1+\cdots+a_nx^n \quad (n\in\mathbb{N},\ a_0,a_1,\cdots,a_n\in D,\ a_n\neq 0)$$

的表达式称为 D 上 x 的一个多项式 (*polynomial in x over D*). n 称为其次 (*degree*), a_i 称为其 i 次系数 (*the i^{th} coefficient*), a_ix^i 称为其 i 次项 (*the i^{th} term*). $f(x)$ 的次可写为 $\deg f(x)$.

若二个多项式的次与各同次系数均相等, 则二者相等.

多项式的系数为 0 的项可以不写.

约定 $0\in D$ 也是多项式, 称为零多项式. 零多项式的次是 $-\infty$. 任取整数 m, 约定

$$\begin{aligned}&-\infty=-\infty,\quad -\infty<m,\\&-\infty+m=m+(-\infty)=-\infty+(-\infty)=-\infty.\end{aligned}$$

当然, 还约定, 零多项式只跟自己相等. 换句话说,

$$a_0x^0+a_1x^1+\cdots+a_nx^n=0$$

的一个必要与充分条件是

$$a_0=a_1=\cdots=a_n=0.$$

D 上 x 的所有多项式作成的集是 $D[x]$:

$$D[x]=\{\,a_0x^0+a_1x^1+\cdots+a_nx^n\mid n\in\mathbb{N},\ a_0,a_1,\cdots,a_n\in D\,\}.$$

文字 x 只是一个符号, 它与 D 的元的和与积都是形式的. 我们说, x 是不定元 (*indeterminate*).

例 $0y^0+1y^1+(-1)y^2+0y^3+(-7)y^4\in\mathbb{Z}[y]$ 是一个 4 次多项式. 顺便一提, 一般把 y^1 写为 y. 这个多项式的一个更普通的写法是

$$y-y^2-7y^4.$$

也许 y^0 看起来有些奇怪. 如上所言, 这只是一个形式上的表达式. 我们之后再处理这个小细节.

例 $z^0+z+z^{\frac{3}{2}}$ 不是 z 的多项式.

例 考虑 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}[x]$. 设

$$f(x)=ax^0+x+2x^2-x^4-bx^5,\quad g(x)=cx+dx^2-x^4-3x^5,$$

其中 a, b, c, d 都是整数. 那么, $f(x)=g(x)$ 相当于

$$a=0,\quad 1=c,\quad 2=d,\quad 0=0,\quad -1=-1,\quad -b=-3,$$

也就是

$$a=0,\quad b=3,\quad c=1,\quad d=2.$$

评注 文字 x 的意义在数学中是不断进化的 (*evolving*). 在中小学里, x 是未知元 (*unknown*): 虽然它是待求的, 但是它是一个具体的数. 后来在函数里, x 表示变元 (*variable*), 不过它的取值范围是确定的. 在上面的定义里, x 仅仅是一个文字, 成为不定元.

下面考虑多项式的运算. 先从加法开始.

定义 设

$$f(x)=a_0x^0+a_1x+\cdots+a_nx^n,\quad g(x)=b_0x^0+b_1x+\cdots+b_nx^n$$

是 $D[x]$ 的元. 规定加法如下:

$$f(x)+g(x)=(a_0+b_0)x^0+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n.$$

例 取 $\mathbb{Z}[x]$ 的二个元 $f(x)=x^0+2x^2$, $g(x)=-3x^0+4x-x^3$. 先改写一下:

$$f(x)=1x^0+0x+2x^2+0x^3,\quad g(x)=-3x^0+4x+0x^2+(-1)x^3.$$

所以

$$f(x)+g(x)=-2x^0+4x+2x^2-x^3.$$

命题 $D[x]$ 作成加群.

证 设

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \\
g(x) &= b_0x^0 + b_1x + \cdots + b_nx^n, \\
h(x) &= c_0x^0 + c_1x + \cdots + c_nx^n
\end{aligned}
$$

是 $D[x]$ 的元. 根据加法的定义, $+$ 显然是 $D[x]$ 的二元运算. 因为 D 的加法适合交换律, 故

$$
\begin{aligned}
g(x) + f(x) &= (b_0 + a_0)x^0 + (b_1 + a_1)x + \cdots + (b_n + a_n)x^n \\
&= (a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n \\
&= f(x) + g(x).
\end{aligned}
$$

也就是说, $D[x]$ 的加法适合交换律.

注意到

$$
\begin{aligned}
&(f(x) + g(x)) + h(x) \\
={}& ((a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n) \\
&\quad + (c_0x^0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) \\
={}& ((a_0 + b_0) + c_0)x^0 + ((a_1 + b_1) + c_1)x + \cdots + ((a_n + b_n) + c_n)x^n \\
={}& (a_0 + b_0 + c_0)x^0 + (a_1 + b_1 + c_1)x + \cdots + (a_n + b_n + c_n)x^n.
\end{aligned}
$$

类似地, 计算 $f(x) + (g(x) + h(x))$ 也可以得到一样的结果. 也就是说, $D[x]$ 的加法适合结合律.

零多项式可以写为

$$0 = 0x^0 + 0x + \cdots + 0x^n.$$

这样

$$
\begin{aligned}
0 + f(x) &= (0 + a_0)x^0 + (0 + a_1)x + \cdots + (0 + a_n)x^n \\
&= a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

类似地, $f(x)+0=f(x)$.

记

$$\underline{f}(x)=(-a_0)x^0+(-a_1)x+\cdots+(-a_n)x^n.$$

这样

$$\begin{aligned}\underline{f}(x)+f(x)&=(-a_0+a_0)x^0+(-a_1+a_1)x+\cdots+(-a_n+a_n)x^n\\&=0x^0+0x+\cdots+0x^n\\&=0.\end{aligned}$$

类似地, $f(x)+\underline{f}(x)=0$. 以后, 我们把这个 $\underline{f}(x)$ 用普通的符号写为

$$-f(x)=-a_0x^0-a_1x-\cdots-a_nx^n.$$

综上, $D[x]$ 是加群. ✌

定义 设 $f(x)$, $g(x)\in D[x]$. 规定减法如下:

$$f(x)-g(x)=f(x)+(-g(x)).$$

评注 可以看出, $f(x)\pm g(x)$ 的次既不会超出 $f(x)$ 的次, 也不会超出 $g(x)$ 的次. 用符号写出来, 就是

$$\deg(f(x)\pm g(x))\le\max\{\,\deg f(x),\deg g(x)\,\}.$$

若 $\deg f(x)>\deg g(x)$, 则

$$\deg(f(x)\pm g(x))=\deg f(x).$$

类似地, 若 $\deg f(x)<\deg g(x)$, 则

$$\deg(f(x)\pm g(x))=\deg g(x).$$

评注 既然 $D[x]$ 是加群, 且每个 a_ix^i $(i=0,1,\cdots,n)$ 都可以看成是多项式, 那么多项式的项的次序是不重要的. 前面的写法称为升次排列 (*ascending order*). 下面的写法称为降次排列 (*descending order*):

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0x^0.$$

这跟中学里接触的多项式是一样的.

(非零) 多项式的最高次非零项是首项 (*leading term*). 它的系数是此多项式的首项系数 (*the coefficient of the leading term*).

例 $y-y^2-7y^4 \in \mathbb{Z}[x]$ 可以写为 $-7y^4-y^2+y$, 其首项是 $-7y^4$, 且其首项系数是 -7.

现在考虑乘法.

定义 设

$$f(x)=a_0x^0+a_1x+\cdots+a_mx^m, \quad g(x)=b_0x^0+b_1x+\cdots+b_nx^n$$

是 $D[x]$ 的元. 规定乘法如下:

$$f(x)g(x)=c_0x^0+c_1x+\cdots+c_{m+n}x^{m+n},$$

其中

$$c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_kb_0.$$

且约定 $i>m$ 时 $a_i=0$, $j>n$ 时 $b_j=0$. 在这个约定下, 不难看出, $\ell>m+n$ 时, $c_\ell=0$. 所以, 我们至少有

$$\deg f(x)g(x) \le \deg f(x)+\deg g(x).$$

例 取 $\mathbb{Z}[x]$ 的二个元 $f(x)=x^0+2x^2$, $g(x)=-3x^0+4x-x^3$. 先改写一下:

$$f(x)=1x^0+0x+2x^2, \quad g(x)=-3x^0+4x+0x^2+(-1)x^3.$$

所以

$$\begin{aligned}
c_0 &= 1\cdot(-3)=-3,\\
c_1 &= 1\cdot 4+0\cdot(-3)=4,\\
c_2 &= 1\cdot 0+0\cdot 4+2\cdot(-3)=-6,\\
c_3 &= 1\cdot(-1)+0\cdot 0+2\cdot 4=7,\\
c_4 &= 0\cdot(-1)+2\cdot 0=0,\\
c_5 &= 2\cdot(-1)=-2.
\end{aligned}$$

所以

$$f(x)g(x) = -3x^0 + 4x - 6x^2 + 7x^3 - 2x^5.$$

例 设

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_mx^m.$$

是 $D[x]$ 的元. 零多项式可以写为

$$0 = 0x^0,$$

由此易知

$$0f(x) = f(x)0 = 0.$$

评注 设

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_mx^m, \quad g(x) = b_0x^0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

是 $D[x]$ 的元, 且 $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$. 这样, $f(x)g(x)$ 的 $m+n$ 次项就是 cx^{m+n}, 其中

$$\begin{aligned} c &= a_0b_{m+n} + \cdots + a_{m-1}b_{n+1} + a_mb_n + a_{m+1}b_{n-1} + \cdots + a_{m+n}b_n \\ &= 0 + \cdots + 0 + a_mb_n + 0 + \cdots + 0 \\ &= a_mb_n. \end{aligned}$$

因为 $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$, 所以 $a_mb_n \neq 0$ (反证法: 若 $a_mb_n = 0 = a_m0$, 因为 $a_m \neq 0$, 根据 D 的消去律, 得 $b_n = 0$, 矛盾!). 所以

$$\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x).$$

可以验证, 若 f 或 g 的任意一个是 0, 这个关系也对.

评注 设

$$\begin{aligned} f(x) &= px^m = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m, \\ g(x) &= qx^n = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n. \end{aligned}$$

当 $i \neq m$ 时, $a_i = 0$; 当 $i = m$ 时, $a_i = p \neq 0$. 当 $j \neq n$ 时, $b_j = 0$; 当 $j = n$ 时, $b_j = q \neq 0$. 现在考虑这二个多项式的积

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{m+n} x^{m+n},$$

其中

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0.$$

我们来看什么时候 $a_\ell b_{k-\ell}$ 不是 0. 这相当于要求 a_ℓ 跟 $b_{k-\ell}$ 都不是 0, 所以

$$\ell = m, \quad k - \ell = n,$$

也就是

$$\ell = m, \quad k = m + n.$$

所以, 当 $k \neq m + n$ 时, $c_k = 0$; 当 $k = m + n$ 时,

$$c_{m+n} = a_m b_n = pq \neq 0.$$

所以, 任取 m, $n \in \mathbb{N}$, 必有

$$(px^m)(qx^n) = (pq)x^{m+n}.$$

特别地, 取 $p = q = 1$, 有

$$x^m x^n = x^{m+n}.$$

这里提醒读者: 这个式是形式上的表达式, 其内涵与中学的 “同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加” 的内涵是不一样的!

顺便一提, 若 p 跟 q 的一个是 0, 则每个 c_k 全为 0, 故此时积是零多项式, 此式仍成立.

命题 $D[x]$ 作成整环. 所以, $D[x]$ 的一个名字就是 (整环) D 上 (x) 的多项式 (整) 环.

证 已经知道, $D[x]$ 是加群. 下面先说明 $D[x]$ 是交换环.

根据定义, 多项式的乘法还是多项式, 也就是说, 乘法是二元运算.

设

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_mx^m, \\ g(x) &= b_0x^0 + b_1x + \cdots + b_nx^n, \\ h(x) &= u_0x^0 + u_1x + \cdots + u_sx^s \end{aligned}$$

是 $D[x]$ 的元. 则

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= c_0x^0 + c_1x + \cdots + c_{m+n}x^{m+n}, \\ g(x)f(x) &= d_0x^0 + d_1x + \cdots + d_{n+m}x^{n+m}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} c_k &= a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0, \\ d_k &= b_0a_k + b_1a_{k-1} + \cdots + b_ka_0. \end{aligned}$$

因为 D 的乘法适合交换律, 加法适合交换律与结合律, 故 $c_k = d_k$. 这样, $D[x]$ 的乘法适合交换律.

不难算出

$$\begin{aligned} & (f(x)g(x))h(x) \\ = & (c_0x^0 + c_1x + \cdots + c_{m+n}x^{m+n})(u_0x^0 + u_1x + \cdots + u_sx^s) \\ = & v_0x^0 + v_1x + \cdots + v_{m+n+s}x^{m+n+s}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} v_t &= (\text{the sum of all } a_ib_ju_r\text{'s with } i+j+r=t) \\ &= a_0b_0u_t + a_0b_1u_{t-1} + \cdots + a_0b_tu_0 + a_1b_0u_{t-1} + \cdots. \end{aligned}$$

类似地, 计算 $f(x)(g(x)h(x))$ 也可以得到一样的结果. 也就是说, $D[x]$ 的乘法适合结合律.

现在验证分配律. 前面已经看到, 多项式的乘法是交换的, 所以只要验证一个分配律即可. 不失一般性, 设 $s = n$. 这样

$$g(x) + h(x) = (b_0 + u_0)x^0 + (b_1 + u_1)x + \cdots + (b_n + u_n)x^n.$$

所以

$$f(x)(g(x)+h(x)) = p_0x^0 + p_1x^1 + \cdots + p_{m+n}x^{m+n},$$

其中

$$\begin{aligned} p_k &= a_0(b_k+c_k) + a_1(b_{k-1}+c_{k-1}) + \cdots + a_k(b_0+c_0) \\ &= (a_0b_k + a_0c_k) + (a_1b_{k-1} + a_1c_{k-1}) + \cdots + (a_kb_0 + a_kc_0) \\ &= (a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0) + (a_0c_k + a_1c_{k-1} + \cdots + a_kc_0). \end{aligned}$$

不难看出, 这就是 $f(x)g(x)$ 的 k 次系数与 $f(x)h(x)$ 的 k 次系数的和. 这样, $D[x]$ 的加法与乘法适合分配律. 至此, 我们知道, $D[x]$ 是交换环.

交换环离整环还差二步: 一是乘法幺元, 二是消去律. 先看消去律. 若 $f(x)g(x) = f(x)h(x)$, $f(x) \neq 0$, 根据分配律,

$$0 = f(x)g(x) - f(x)h(x) = f(x)(g(x) - h(x)).$$

如果 $g(x) - h(x) \neq 0$, 则 $g(x) - h(x)$ 的次不是 $-\infty$. $f(x)$ 的次不是 $-\infty$, 故 $f(x)(g(x) - h(x))$ 的次不是 $-\infty$. 换句话说, $f(x)(g(x) - h(x)) \neq 0$, 矛盾!

再看乘法幺元. 设

$$e(x) = x^0.$$

不难算出

$$e(x)f(x) = f(x)e(x) = f(x).$$

综上, $D[x]$ 是整环. ✌

例 在前面, 我们直接用定义计算了下面二个多项式的积:

$$f(x) = x^0 + 2x^2, \quad g(x) = -3x^0 + 4x - x^3.$$

现在, 我们利用

$$(px^m)(qx^n) = (pq)x^{m+n} \quad (p, q \in D,\ m, n \in \mathbb{N})$$

与运算律再做一次:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (x^0+2x^2)(-3x^0+4x-x^3) \\ &= x^0(-3x^0+4x-x^3)+2x^2(-3x^0+4x-x^3) \\ &= -3x^{0+0}+4x^{0+1}-x^{0+3}-6x^{2+0}+8x^{2+1}-2x^{2+3} \\ &= -3x^0+4x-x^3-6x^2+8x^3-2x^5 \\ &= -3x^0+4x-6x^2+7x^3-2x^5. \end{aligned}$$

这跟之前的结果是一致的.

定义 设 $m \in \mathbb{N}$. 多项式 $f(x)$ 的 m 次幂就是 m 个 $f(x)$ 的积:

$$(f(x))^m = \underbrace{f(x)\cdot f(x)\cdot\cdots\cdot f(x)}_{m\ f(x)\text{'s}}.$$

既然 $D[x]$ 是整环, 那么前面的幂规则都适用. 具体地说, 设 $m, n \in \mathbb{N}$, $f(x)$, $g(x) \in D[x]$, 则

$$\begin{aligned} &(f(x))^m(f(x))^n = (f(x))^{m+n}, \\ &((f(x))^m)^n = (f(x))^{mn}, \\ &(f(x)g(x))^m = (f(x))^m(g(x))^m. \end{aligned}$$

前面, 我们知道

$$x^m x^n = x^{m+n}.$$

当时, 我们还说, 这跟中学的 “同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加” 有着不一样的内涵. 有了 “幂” 这个概念后, 我们发现, x^m 的确可以视为 m 个 x 的积.

评注 以后, 我们把 x^0 写为 1. 换句话说, 代替

$$a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

我们写

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n.$$

这儿还有一件事儿值得一提. 考虑

$$D_0 = \{\, ax^0 \mid a \in D \,\} \subset D[x].$$

任取 D_0 的二元 ax^0, bx^0. 首先, $ax^0 = bx^0$ 的一个必要与充分条件是 $a = b$. 然后, 不难看出,

$$ax^0 + bx^0 = (a+b)x^0, \quad (ax^0)(bx^0) = (ab)x^0.$$

由此可以看出, D_0 与 D "几乎完全一样". 用摩登 (*modern*) 数学的话来说, "D_0 与 D 是天然同构的 (*naturally isomorphic*)".

我们不打算深究这一点. 上面, 我们把 x^0 写为 1; 反过来, D 的元 a 也可以理解为是多项式 ax^0. 这跟中学的习惯是一致的.

最后, 我们指出: 既然非零的 $c \in D$ 可视为 0 次多项式, 那么 $cf(x)$ 也是多项式. 如果

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

那么

$$cf(x) = ca_0 + ca_1x + \cdots + ca_nx^n,$$

且

$$\deg cf(x) = \deg f(x).$$

带余除法

我们知道, 非负整数有这样的性质:

命题 设 n 是正整数, m 是非负整数. 则必有一对非负整数 q, r 使

$$m = qn + r, \quad 0 \le r < n.$$

例如, 取 $n = 5$, $m = 23$. 不难看出,

$$23 = 4 \cdot 5 + 3.$$

多项式也有类似的性质哟.

命题 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \in D[x],$$

且 a_n 是 D 的单位. 对任意 $g(x) \in D[x]$, 存在 $q(x), r(x) \in D[x]$ 使

$$g(x) = q(x) f(x) + r(x), \quad \deg r(x) < n.$$

一般称其为带余除法: $q(x)$ 就是商 ($quotient$); $r(x)$ 就是余式 ($remainder$).

证 用数学归纳法. 记 $\deg g(x) = m$. 若 $m < n$, 则 $q(x) = 0$, $r(x) = g(x)$ 适合要求. 所以, 命题对不高于 $n-1$ 的 m 都成立.

设 $m \le \ell$ ($\ell \ge n-1$) 时, 命题成立. 考虑 $m = \ell + 1$ 的情形. 此时, 设

$$g(x) = b_{\ell+1} x^{\ell} + b_{\ell} x^{\ell} + \cdots + b_0 \in D[x].$$

作一个跟 $g(x)$ 有着共同首项的多项式:

$$\begin{aligned} s(x) &= b_{\ell+1} a_n^{-1} x^{\ell+1-n} f(x) \\ &= b_{\ell+1} a_n^{-1} x^{\ell+1-n} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0) \\ &= b_{\ell+1} a_n^{-1} (a_n x^{\ell+1} + a_{n-1} x^{\ell} + \cdots + a_0 x^{\ell+1-n}) \\ &= b_{\ell+1} (x^{\ell+1} + a_n^{-1} a_{n-1} x^{\ell} + \cdots + a_n^{-1} a_0 x^{\ell+1-n}) \\ &= b_{\ell+1} x^{\ell+1} + b_{\ell+1} a_n^{-1} a_{n-1} x^{\ell} + \cdots + b_{\ell+1} a_n^{-1} a_0 x^{\ell+1-n}. \end{aligned}$$

因为 a_n 是单位, 故 $s(x) \in D[x]$. 设 $r_1(x) = g(x) - s(x) \in D[x]$. 这样, $r_1(x)$ 的次不高于 ℓ. 根据归纳假设, 有 $q_2(x)$, $r_2(x) \in D[x]$ 使

$$r_1(x) = q_2(x)f(x) + r_2(x), \quad \deg r_2(x) < n.$$

所以

$$\begin{aligned} g(x) &= b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n}f(x) + r_1(x) \\ &= b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n}f(x) + q_2(x)f(x) + r_2(x) \\ &= (b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n} + q_2(x))f(x) + r_2(x). \end{aligned}$$

记 $q(x) = b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n} + q_2(x)$, $r(x) = r_2(x)$, 则 $q(x)$, $r(x)$ 适合要求. 所以, $m \leq \ell + 1$ 时, 命题成立. 根据数学归纳法, 命题成立. ✌

例 取 $\mathbb{F}[x]$ 的二元 $f(x) = 2(x-1)^2(x+2)$, $g(x) = 8x^6 + 1$. 我们来找一对多项式 $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg f(x).$$

不难看出, $f(x)$ 的次是 3, 且

$$f(x) = 2(x^2 - 2x + 1)(x + 2) = 2x^3 - 6x + 4.$$

我们按上面证明的方法寻找 $q(x)$ 与 $r(x)$. $a_3 = 2$ 是 $\mathbb{F}$ 的单位, 且 $a_3^{-1} = \frac{1}{2}$. 取

$$q_1(x) = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{6-3} = 4x^3.$$

则

$$\begin{aligned} r_1(x) &= g(x) - q_1(x)f(x) \\ &= (8x^6 + 1) - 4x^3(2x^3 - 6x + 4) \\ &= (8x^6 + 1) - (8x^6 - 24x^4 + 16x^3) \\ &= 24x^4 - 16x^3 + 1. \end{aligned}$$

$r_1(x)$ 的次仍不低于 3. 因此, 再来一次. 取

$$q_2(x) = 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{4-3} = 12x.$$

则

$$\begin{aligned}r_2(x) &= r_1(x) - q_2(x)f(x)\\&= (24x^4 - 16x^3 + 1) - 12x(2x^3 - 6x + 4)\\&= (24x^4 - 16x^3 + 1) - (24x^4 - 72x + 48x)\\&= -16x^3 + 72x^2 - 48x + 1.\end{aligned}$$

$r_2(x)$ 的次仍不低于 3. 因此, 再来一次. 取

$$q_3(x) = -16 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{3-3} = -8.$$

则

$$\begin{aligned}r_3(x) &= r_2(x) - q_3(x)f(x)\\&= (-16x^3 + 72x^2 - 48x + 1) - (-8)(2x^3 - 6x + 4)\\&= (-16x^3 + 72x^2 - 48x + 1) - (-16x^3 + 48x - 32)\\&= 72x^2 - 96x + 33.\end{aligned}$$

$r_3(x)$ 的次低于 3. 这样

$$\begin{aligned}g(x) &= q_1(x)f(x) + r_1(x)\\&= q_1(x)f(x) + q_2(x)f(x) + r_2(x)\\&= q_1(x)f(x) + q_2(x)f(x) + q_3(x)f(x) + r_3(x)\\&= (q_1(x) + q_2(x) + q_3(x))f(x) + r_3(x)\\&= (4x^3 + 12x - 8)f(x) + (72x^2 - 96x + 33).\end{aligned}$$

也就是说,

$$q(x) = 4x^3 + 12x - 8, \quad r(x) = 72x^2 - 96x + 33.$$

评注 带余除法要求 $f(x)$ 的首项系数是单位是有必要的.

在上面的例里, $f(x)$ 与 $g(x)$ 可以看成 $\mathbb{Z}[x]$ 的元, 但 2 不是 $\mathbb{Z}$ 的单位. 虽然最终所得 $q(x)$, $r(x)$ 也是 $\mathbb{Z}[x]$ 的元, 但这并不是一定会出现的. 我们看下面的简单例.

考虑 $\mathbb{Z}[x]$ 的多项式 $f(x)=2x$. 设

$$
\begin{aligned}
r(x) &= r_0,\\
q(x) &= q_0+q_1x+\cdots+q_px^p,\\
g(x) &= g_0+g_1x+\cdots+g_sx^s,
\end{aligned}
$$

且 $r_0, q_0, \cdots, q_p, g_0, \cdots, g_s\in\mathbb{Z}$, $q_p, g_s\neq 0$. 若 $g(x)=q(x)f(x)+r(x)$, 则

$$g_0+g_1x+\cdots+g_sx^s=r_0+2q_0x+2q_1x^2+\cdots+2q_px^{p+1}.$$

所以

$$
\begin{aligned}
&p=s-1,\\
&r_0=g_0,\\
&2q_{i-1}=g_i,\quad i=1,\cdots,s.
\end{aligned}
$$

这说明, $g(x)$ 的 i 项系数 $(i=1,\cdots,s)$ 必须是偶数. 所以, 不存在 $q(x)$, $r(x)\in\mathbb{Z}[x]$ 使

$$1+3x+x^2=q(x)\cdot 2x+r(x),\quad \deg r(x)<1.$$

我们知道, 用一个正整数除非负整数, 所得的余数与商是唯一的. 比方说, 5 除 23 的余数只能是 3.

多项式也有类似的性质哟. 不过, 我们需要借助另一个命题的帮助.

命题 设 $f(x)\in D[x]$, 且 $f(x)\neq 0$. 若 D 上 x 的 2 个多项式 $q(x)$, $r(x)$ 适合

$$q(x)f(x)+r(x)=0,\quad \deg r(x)<\deg f(x),$$

则必有

$$q(x)=r(x)=0.$$

通俗地说, 二个非零多项式的积的次不可能变低.

证 题设条件即

$$-q(x)f(x) = r(x).$$

反证法. 若 $-q(x) \neq 0$, 则 $\deg(-q(x)) \geq 0$. 从而

$$\deg r(x) = \deg(-q(x)) + \deg f(x) \geq \deg f(x).$$

可是,

$$\deg r(x) < \deg f(x),$$

矛盾! 故 $-q(x) = 0$. 这样, $r(x) = 0$. ✌

命题 设 $f(x) \in D[x]$, 且 $f(x) \neq 0$. 若 D 上 x 的 4 个多项式 $q_1(x)$, $r_1(x)$, $q_2(x)$, $r_2(x)$ 适合

$$q_1(x)f(x) + r_1(x) = q_2(x)f(x) + r_2(x),$$
$$\deg r_1(x) < \deg f(x), \quad \deg r_2(x) < \deg f(x),$$

则必有

$$q_1(x) = q_2(x), \quad r_1(x) = r_2(x).$$

证 记

$$Q(x) = q_1(x) - q_2(x), \quad R(x) = r_1(x) - r_2(x).$$

题设条件即

$$(q_1(x) - q_2(x))f(x) + (r_1(x) - r_2(x)) = 0,$$

也就是

$$Q(x)f(x) + R(x) = 0.$$

注意到

$$\begin{aligned} \deg R(x) =& \deg(r_1(x) - r_2(x)) \\ \leq& \max\{\deg r_1(x), \deg r_2(x)\} \\ <& \deg f(x). \end{aligned}$$

根据上个命题, $Q(x) = R(x) = 0$. 所以

$$q_1(x) = q_2(x), \quad r_1(x) = r_2(x).$$ ✌

这样, 我们得到了这个命题:

命题 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\in D[x],$$

且 a_n 是 D 的单位. 对任意 $g(x)\in D[x]$, 存在唯一的 $q(x),r(x)\in D[x]$ 使

$$g(x)=q(x)f(x)+r(x),\quad \deg r(x)<n.$$

一般称其为带余除法: $q(x)$ 就是商; $r(x)$ 就是余式. 并且, 当 $f(x)$ 的次不高于 $g(x)$ 的次时, $f(x)$, $g(x)$, $q(x)$ 间还有如下的次关系:

$$\deg g(x)=\deg(g(x)-r(x))=\deg q(x)+\deg f(x).$$

多项式的相等

本节讨论二个多项式的相等.

设 $a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n$ 都是整环 D 的元. 根据定义, 我们已经知道,

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

的一个必要与充分条件是

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \cdots, \quad a_n = b_n.$$

之后, 我们会遇到形如

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n$$

的式, 这里 $c \in D$. 因为

$$1, \quad x-c, \quad (x-c)^2, \quad \cdots, \quad (x-c)^n$$

是首项系数为 1 的 0, 1, 2, ⋯, n 次多项式, 所以这个 $f(x)$ 也是多项式, 且 $\deg f(x) \le n$. 当 $a_n \ne 0$ 时, $\deg f(x) = n$, 且 $f(x)$ 的首项系数为 a_n.

再作一个多项式

$$g(x) = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \cdots + b_n(x-c)^n.$$

$f(x)$ 与 $g(x)$ 都是多项式, 自然可以讨论是否相等. 若 $c = 0$, $(x-c)^\ell$ 就变为普通的 x^ℓ. 所以, $c = 0$ 时, $f(x) = g(x)$ 的一个必要与充分条件是

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \cdots, \quad a_n = b_n.$$

可是, 如果 $c \ne 0$ 呢? 这个时候, 还是一样的条件吗?

先看一个例.

例 我们试研究

$$(\bigstar) \qquad a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2.$$

在中学, 我们已经知道

$$(x-c)^2 = c^2 - 2cx + x^2.$$

这样, (★) 的左侧变为

$$\begin{aligned}&a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2\\=&a_0+a_1(-c+x)+a_2(c^2-2cx+x^2)\\=&a_0+(-a_1c+a_1x)+(a_2c^2+(-2a_2c)x+a_2x^2)\\=&(a_0-a_1c+a_2c^2)+(a_1-2a_2c)x+a_2x^2.\end{aligned}$$

同理, (★) 的右侧变为

$$(b_0-b_1c+b_2c^2)+(b_1-2b_2c)x+b_2x^2.$$

所以, (★) 成立等价于

$$\begin{gathered}a_0-a_1c+a_2c^2=b_0-b_1c+b_2c^2,\\a_1-2a_2c=b_1-2b_2c,\\a_2=b_2,\end{gathered}$$

即

$$\begin{aligned}(a_0-b_0)-c(a_1-b_1)+c^2(a_2-b_2)=0,\\(a_1-b_1)-2c(a_2-b_2)=0,\\(a_2-b_2)=0.\end{aligned}$$

由这个方程组, 可解出

$$a_0-b_0=a_1-b_1=a_2-b_2=0.$$

这跟 $c=0$ 时的

$$a_0=b_0,\quad a_1=b_1,\quad a_2=b_2$$

是完全一致的.

定义 设 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)\in D[x]$. 设 $c_0, c_1, \cdots, c_n\in D$. 我们说

$$c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_np_n(x)$$

是多项式 $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\cdots$, $p_n(x)$ 的一个线性组合 (*linear combination*). c_0, c_1, $\cdots$, c_n 就是此线性组合的系数.

若不存在一组不全为 0 的 D 中元 d_0, d_1, $\cdots$, d_n 使

$$d_0p_0(x)+d_1p_1(x)+\cdots+d_np_n(x)=0,$$

则说 $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\cdots$, $p_n(x)$ 是线性无关的 (*linearly independent*). 换句话说, "$p_0(x)$, $p_1(x)$, $\cdots$, $p_n(x)$ 是线性无关的" 意味着: 若 D 中元 r_0, r_1, $\cdots$, r_n 使

$$r_0p_0(x)+r_1p_1(x)+\cdots+r_np_n(x)=0,$$

则 $r_0=r_1=\cdots=r_n=0$.

例 显然, 1, x, $\cdots$, x^n 是线性无关的. 当然, 前面的例告诉我们, 1, $x-c$, $(x-c)^2$ 也是线性无关的.

例 单独一个非零多项式是线性无关的.

评注 设 $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\cdots$, $p_n(x)$ 是线性无关的.

(i) 显然, 因为多项式的加法可交换, 随意打乱这 $n+1$ 个多项式的次序后得到的多项式仍线性无关.

(ii) 对任意 ℓ $(0\le\ell\le n)$, $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\cdots$, $p_\ell(x)$ 这 $\ell+1$ 个多项式也是线性无关的. 设 c_0, c_1, $\cdots$, $c_\ell\in D$, 且

$$c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_\ell p_\ell(x)=0.$$

这个相当于

$$c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_\ell p_\ell(x)+0p_{\ell+1}(x)+\cdots+0p_n(x)=0.$$

所以

$$c_0=c_1=\cdots=c_\ell=\underbrace{0=\cdots=0}_{(n-\ell)\ 0\text{'s}}=0.$$

(iii) 根据 (i) (ii) 可知, 线性无关的多项式的片段也是线性无关的.

评注 设 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 是线性无关的. 设 $a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n$ 都是 D 的元. 那么

$$a_0p_0(x)+a_1p_1(x)+\cdots+a_np_n(x)=b_0p_0(x)+b_1p_1(x)+\cdots+b_np_n(x)$$

相当于

$$(a_0-b_0)p_0(x)+(a_1-b_1)p_1(x)+\cdots+(a_n-b_n)p_n(x)=0,$$

也就是

$$a_0-b_0=a_1-b_1=\cdots=a_n-b_n=0,$$

亦即

$$a_0=b_0,\quad a_1=b_1,\quad \cdots,\quad a_n=b_n.$$

由此可见, 线性无关的多项式有着优良的性质: 二个线性组合相等的一个必要与充分条件是对应的系数相等.

我们知道, $1, x, \cdots, x^n$ 是线性无关的. 在这串多项式里, 后一个的次比前一个的次多 1. 不仅如此, 由多项式的定义可见, 每一个次不高于 n 的多项式都可以写为它们的线性组合. 下面的命题就是这二件事实的推广.

命题 设 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x) \in D[x]$ 分别是 $0, 1, \cdots, n$ 次多项式. 则:

(i) $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 是线性无关的;

(ii) 若 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 的首项系数都是 D 的单位, 则任意次不高于 n 的多项式都可写为 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 的线性组合. 由 (i) 知, 这个组合的系数一定是唯一的.

证 (i) 用数学归纳法.当 $n=0$ 时, 只有一个 0 次多项式 $p_0(x)=c\neq 0$ 那么, 由 $dc=0$ 可推出 $d=0$. 这样, 命题对 $n=0$ 成立. 假定命题对 $n=\ell\geq 0$ 成立. 设 $c_0, c_1, \cdots, c_{\ell+1}\in D$ 使

$$c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_\ell p_\ell(x)+c_{\ell+1}p_{\ell+1}(x)=0.$$

记

$$r(x) = c_0p_0(x) + c_1p_1(x) + \cdots + c_\ell p_\ell(x),$$

则 $r(x)$ 的次不高于 ℓ. 所以

$$c_{\ell+1}p_{\ell+1}(x) + r(x) = 0, \quad \deg r(x) \le \ell < \deg p_{\ell+1}(x).$$

由上节命题知

$$c_{\ell+1} = 0, \quad r(x) = 0.$$

根据归纳假设,

$$r(x) = c_0p_0(x) + c_1p_1(x) + \cdots + c_\ell p_\ell(x) = 0 \implies c_0 = c_1 = \cdots = c_\ell = 0.$$

这样,

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_\ell = c_{\ell+1} = 0.$$

也就是说, $n = \ell + 1$ 时, 命题成立.

(ii) 用数学归纳法. 当 $n = 0$ 时, 只有一个 0 次多项式 $p_0(x) = c \neq 0$, 且 c 是单位. 任取次不高于 0 的多项式 d. 因为 $d = (dc^{-1})c$, 这样, 命题对 $n = 0$ 成立. 这样, 命题对 $n = 0$ 成立. 假定命题对 $n = \ell \ge 0$ 成立. 任取次不高于 $\ell + 1$ 的多项式 $f(x)$. 由于 $p_{\ell+1}(x)$ 的首项系数是单位, 所以, 由带余除法知道, 存在多项式 $q(x)$, $r(x) \in D[x]$ 使

$$f(x) = q(x)p_{\ell+1}(x) + r(x), \quad \deg r(x) \le \ell.$$

如果 $f(x)$ 的次不高于 ℓ, 则 $q(x) = 0$; 如果 $f(x)$ 的次是 $\ell + 1$, 则

$$\deg q(x) = \deg f(x) - \deg p_{\ell+1}(x) = 0.$$

也就是说, 存在 $c_{\ell+1} \in D$ 使 $q(x) = c_{\ell+1}$. 所以

$$f(x) = r(x) + c_{\ell+1}p_{\ell+1}(x), \quad \deg r(x) \le \ell.$$

根据归纳假设, 存在 c_0, c_1, $\cdots$, $c_\ell \in D$ 使

$$r(x) = c_0p_0(x) + c_1p_1(x) + \cdots + c_\ell p_\ell(x),$$

即

$$f(x) = c_0p_0(x) + c_1p_1(x) + \cdots + c_\ell p_\ell(x) + c_{\ell+1}p_{\ell+1}(x).$$

所以, $n = \ell + 1$ 时, 命题成立. ✌

评注 这里, (ii) 要求每个多项式的首项系数为单位是有必要的. 考虑 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}[x]$. 取 $n = 2$, 及

$$p_0(x) = -1, \quad p_1(x) = 2x, \quad p_2(x) = 3x^2.$$

根据上面的命题, 这三个多项式是线性无关的. 考虑 $f(x) = 3 + x - 2x^2$. 设 c_0, c_1, $c_2 \in \mathbb{Z}$ 使

$$3 + x - 2x^2 = c_0 \cdot (-1) + c_1 \cdot 2x + c_2 \cdot 3x^2.$$

这相当于

$$3 = -c_0, \quad 1 = 2c_1, \quad -2 = 3c_2.$$

容易看出, 这个方程组无整数解, 所以 $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ 的 (系数为 $\mathbb{Z}$ 的元的) 线性组合不能表示每一个次不高于 2 的多项式.

评注 不难看出, 1, x^2, x^3 线性无关. 可是, 它们不能表示每一个次不高于 3 的多项式, 因为其线性组合

$$c_0 + c_1x^2 + c_2x^3, \quad c_0, c_1, c_2 \in D$$

的 1 次系数总是 0. 所以, 最简单的 1 次式 x 无法用 1, x^2, x^3 的线性组合表出.

设 $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\cdots$, $p_n(x)$ 线性无关. 设这些多项式的次的最大值为 d:

$$d = \max\{\deg p_0(x), \deg p_1(x), \cdots, \deg p_n(x)\}.$$

在什么条件下, 其线性组合能表示每一个次不高于 d 的多项式? 上面的命题给出了部分的解答. 为什么说它是 “部分的解答” 呢? 考虑 $\mathbb{Z}[x]$ 的二个 1 次多项式

$$p_0(x) = 3 - 7x, \quad p_1(x) = -2 + 5x.$$

读者可验证, 这二个多项式线性无关. 由于

$$1 = 5p_0(x) + 7p_1(x), \quad x = 2p_0(x) + 3p_1(x),$$

故每一个次不高于 1 的多项式都可写为 $p_0(x)$ 与 $p_1(x)$ 的线性组合.

这个问题的详细讨论将超出本文的范围. 读者也许可在线性代数中找到破解此问题的方法.

本节开头的问题总算得到了解答. 不仅如此, 我们得到了更深的结论:

命题 设 $a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n$ 都是 D 的元. 设 $c \in D$. 再设

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n,$$
$$g(x) = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \cdots + b_n(x-c)^n.$$

则 $f(x) = g(x)$ 的一个必要与充分条件是

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \cdots, \quad a_n = b_n.$$

并且, 任取

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_n x^n \in D[x],$$

必存在 $v_0, v_1, \cdots, v_n \in D$ 使

$$f(x) = v_0 + v_1(x-c) + v_2(x-c)^2 + \cdots + v_n(x-c)^n.$$

微商

本节讨论多项式的微商.

在本节, 我们会将一些容易证明的命题留给读者练习. 读者可乘此机会让自己熟悉证明命题的过程与数学归纳法.

定义 设

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \in D[x].$$

$f(x)$ 的微商 (*derivative*) 是多项式

$$f'(x) = 0 + 1a_1 + 2a_2 x + \cdots + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + na_n x^{n-1} \in D[x].$$

$f'(x)$ 也可写为 $(f(x))'$.

评注 整环 D 里不一定有名为 ± 2, ± 3, $\cdots$ 的元. 回忆一下, 若 $a \in D$, $n \in \mathbb{N}$, 则

$$na = n \cdot a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\ a\text{'s}}.$$

若 $-n \in \mathbb{N}$, 则

$$na = -((-n)a).$$

当然, 在 $\mathbb{Z}$ (或 $\mathbb{F}$) 里, na 可以认为是 $\mathbb{Z}$ (或 $\mathbb{F}$) 的二个元 n 与 a 的积.

例 取 $f(x) = x^6 - x^3 + 1 \in D[x]$. 若 $D = \mathbb{F}$, 则

$$f'(x) = 6x^5 - 3x^2 + 0 = 6x^5 - 3x^2.$$

若 D 是 4 元集 V, 则

$$f'(x) = (6 \cdot 1)x^5 + (3 \cdot (-1))x^2 + 0 = x^2.$$

这里, $V = \{0, 1, \tau, \tau^2\}$. 它的加法与乘法如下:

$+$	0	1	τ	τ^2
0	0	1	τ	τ^2
1	1	0	τ^2	τ
τ	τ	τ^2	0	1
τ^2	τ^2	τ	1	0

$\cdot$	0	1	τ	τ^2
0	0	0	0	0
1	0	1	τ	τ^2
τ	0	τ	τ^2	1
τ^2	0	τ^2	1	τ

在前面 (“预备知识” 节的 “整环” 小节), 我们知道, V 是整环. 任取 $a \in V$, 都有

$$2 \cdot a = a + a = 0.$$

所以 $a = -a$. 这样,

$$\begin{aligned} &6 \cdot 1 = 2 \cdot (3 \cdot 1) = (3 \cdot 1) + (3 \cdot 1) = 0, \\ &3 \cdot (-1) = (-1) + (-1) + (-1) = 1 + 1 + 1 = 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

所以, 当我们把 $f(x)$ 视为 $V[x]$ 中元时, 它的微商 “有点奇怪”. 同样的道理, 在 V 与 $V[x]$ 中,

$$(x^{2k})' = (2k \cdot 1)x^{2k-1} = 0x^{2k-1} = 0.$$

评注 微商就是 $D[x]$ 到 $D[x]$ 的函数 (也就是 $D[x]$ 的变换):

$$\begin{aligned} {}': \qquad & D[x] \to D[x], \\ & a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mapsto a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}. \end{aligned}$$

定义 设

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m, \\ g(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \end{aligned}$$

为 $D[x]$ 中的二个元. 我们称

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = b_0 + b_1f(x) + \cdots + b_n(f(x))^n$$

为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合 ($composition$).

评注 可以看到, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合仍为多项式. 设

$$h(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_sx^s \in D[x].$$

记

$$\begin{aligned} \ell(x) &= (h \circ g)(x) \\ &= d_0 + d_1(b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n) + \cdots \\ &\qquad + d_s(b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n)^s, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}((h\circ g)\circ f)(x) &= (\ell\circ f)(x)\\ &= d_0 + d_1(b_0 + b_1 f(x) + \cdots + b_n(f(x))^n) + \cdots\\ &\qquad + d_s(b_0 + b_1 f(x) + \cdots + b_n(f(x))^n)^s\\ &= d_0 + d_1(g\circ f)(x) + \cdots + d_s((g\circ f)(x))^s\\ &= (h\circ(g\circ f))(x).\end{aligned}$$

换句话说, 多项式的复合适合结合律.

例 取

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n, \quad f(x) = x - c \in D[x].$$

那么

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x)) = b_0 + b_1(x-c) + \cdots + b_n(x-c)^n,\\ (f\circ g)(x) &= f(g(x)) = -c + b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n.\end{aligned}$$

这表明: 多项式的复合一般不交换.

下面的命题相当显然了.

命题 设 $f(x)$, $g(x)$, $h(x) \in D[x]$.
(i) 设 $p(x) = f(x) + g(x)$. 则

$$p(h(x)) = f(h(x)) + g(h(x)).$$

(ii) 设 $q(x) = f(x)g(x)$. 则

$$q(h(x)) = f(h(x))g(h(x)).$$

证 设

$$\begin{aligned}f(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,\\ g(x) &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n\end{aligned}$$

是 $D[x]$ 中二个元. 这样,

$$\begin{aligned} f(h(x)) &= a_0 + a_1 h(x) + \cdots + a_n (h(x))^n, \\ g(h(x)) &= b_0 + b_1 h(x) + \cdots + b_n (h(x))^n. \end{aligned}$$

(i) 根据加法的定义, 有

$$p(x) = f(x) + g(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n,$$

其中

$$c_i = a_i + b_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

所以

$$p(h(x)) = c_0 + c_1 h(x) + \cdots + c_n (h(x))^n.$$

根据多项式的运算律, 有

$$\begin{aligned} & f(h(x)) + g(h(x)) \\ = & (a_0 + a_1 h(x) + \cdots + a_n (h(x))^n) + (b_0 + b_1 h(x) + \cdots + b_n (h(x))^n) \\ = & (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) h(x) + \cdots + (a_n + b_n)(h(x))^n \\ = & c_0 + c_1 h(x) + \cdots + c_n (h(x))^n \\ = & p(h(x)). \end{aligned}$$

(ii) 根据乘法的定义, 有

$$q(x) = f(x) g(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_{2n} x^{2n},$$

其中

$$d_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_i b_0, \quad i = 0, 1, \cdots, 2n.$$

所以

$$q(h(x)) = d_0 + d_1 h(x) + \cdots + d_{2n} (h(x))^{2n}.$$

根据多项式的运算律, 有

$$
\begin{aligned}
&f(h(x))g(h(x)) \\
&= (a_0 + a_1 h(x) + \cdots + a_n (h(x))^n)(b_0 + b_1 h(x) + \cdots + b_n (h(x))^n) \\
&= (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) h(x) + \cdots + (a_n b_n)(h(x))^{2n} \\
&= (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) h(x) + \cdots + (a_0 b_{2n} + a_1 b_{2n-1} + \cdots + a_n b_n \\
&\qquad + a_{n+1} b_{n-1} + \cdots + a_{2n} b_0)(h(x))^{2n} \\
&= c_0 + c_1 h(x) + \cdots + c_{2n} (h(x))^{2n} \\
&= q(h(x)).
\end{aligned}
$$

✌

例 考虑 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}[x]$. 取

$$f(x) = x^3 + 2, \quad g(x) = x^2 + x - 1.$$

不难得到

$$f'(x) = 3x^2, \quad g'(x) = 2x + 1.$$

(i) $4g(x)$ 也是多项式, 当然可以有微商. 因为

$$4g(x) = 4x^2 + 4x - 4,$$

故

$$(4g(x))' = 8x + 4,$$

这刚好是 $4g'(x)$:

$$4g'(x) = 4(2x + 1) = 8x + 4.$$

(ii) $f(x) + g(x)$ 也是多项式. 因为

$$f(x) + g(x) = x^3 + 2 + x^2 + x - 1 = x^3 + x^2 + x + 1,$$

故

$$(f(x) + g(x))' = 3x^2 + 2x + 1,$$

而这刚好是 $f'(x) + g'(x)$:

$$f'(x) + g'(x) = 3x^2 + 2x + 1.$$

一般地, 我们有

命题 设 $f(x)$, $g(x) \in D[x]$, $c \in D$. 则

(i) $(cf(x))' = cf'(x)$;

(ii) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$.

由 (i) (ii) 与数学归纳法可知: 当 c_0, c_1, $\cdots$, $c_{k-1} \in D$, 且 $f_0(x)$, $f_1(x)$, $\cdots$, $f_{k-1}(x) \in D[x]$ 时,

$$\begin{aligned}
&(c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) + \cdots + c_{k-1} f_{k-1}(x))' \\
&= c_0 f_0'(x) + c_1 f_1'(x) + \cdots + c_{k-1} f_{k-1}'(x).
\end{aligned}$$

证 我们证明 (i) (ii), 将剩下的推论留给读者作练习. 设

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n, \\
g(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + b_n x^n
\end{aligned}$$

是 $D[x]$ 中二个元.

(i) $cf(x)$ 就是多项式

$$ca_0 + ca_1 x + ca_2 x^2 + \cdots + ca_{n-1} x^{n-1} + ca_n x^n,$$

故

$$\begin{aligned}
(cf(x))' &= (ca_0 + ca_1 x + ca_2 x^2 + \cdots + ca_{n-1} x^{n-1} + ca_n x^n)' \\
&= ca_1 + 2ca_2 x + \cdots + (n-1)ca_{n-1} x^{n-2} + nca_n x^{n-1} \\
&= ca_1 + c2a_2 x + \cdots + c(n-1)a_{n-1} x^{n-2} + cna_n x^{n-1} \\
&= c(a_1 + 2a_2 x + \cdots + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + na_n x^{n-1}) \\
&= cf'(x).
\end{aligned}$$

(ii) $f(x) \pm g(x)$ 就是多项式

$$\begin{aligned}
&(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + (a_2 \pm b_2)x^2 + \cdots \\
&\qquad + (a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-1} + (a_n \pm b_n)x^n,
\end{aligned}$$

故

$$
\begin{aligned}
&(f(x) \pm g(x))' \\
&= ((a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + (a_2 \pm b_2)x^2 + \cdots \\
&\qquad\qquad + (a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-1} + (a_n \pm b_n)x^n)' \\
&= (a_1 \pm b_1) + 2(a_2 \pm b_2)x + \cdots + (n-1)(a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-2} \\
&\qquad\qquad + n(a_n \pm b_n)x^{n-1} \\
&= (a_1 \pm b_1) + (2a_2x \pm 2b_2x) + \cdots + ((n-1)a_{n-1}x^{n-2} \\
&\qquad\qquad \pm (n-1)b_{n-1}x^{n-2}) + (na_nx^{n-1} \pm nb_nx^{n-1}) \\
&= (a_1 + 2a_2x + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}) \\
&\qquad\qquad \pm (b_1 + 2b_2x + \cdots + (n-1)b_{n-1}x^{n-2} + nb_nx^{n-1}) \\
&= f'(x) \pm g'(x).
\end{aligned}
$$

✌

命题 设 $f(x)$, $g(x) \in D[x]$. 则

(★) $$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

由 (★) 与数学归纳法可知: 当 $f_0(x)$, $f_1(x)$, $\cdots$, $f_{k-1}(x) \in D[x]$ 时,

$$
\begin{aligned}
&(f_0(x)f_1(x)\cdots f_{k-1}(x))' \\
&= f_0'(x)f_1(x)\cdots f_{k-1}(x) + f_0(x)f_1'(x)\cdots f_{k-1}(x) + \cdots \\
&\qquad\qquad + f_0(x)f_1(x)\cdots f_{k-1}'(x).
\end{aligned}
$$

取 $f_0(x) = f_1(x) = \cdots = f_{k-1}(x) = f(x)$ 知

$$((f(x))^k)' = k(f(x))^{k-1}f'(x).$$

证 我们证明 (★), 将剩下的二个式留给读者作练习. 首先, 任取 i, $j \in \mathbb{N}$, p, $q \in D$, 有

$$px^i \cdot qx^j = pqx^{i+j}.$$

这样,

$$\begin{aligned}(px^i \cdot qx^j)' &= (pqx^{i+j})' \\ &= (i+j)pqx^{i+j-1} \\ &= ipqx^{(i-1)+j} + jpqx^{i+(j-1)} \\ &= ipqx^{i-1}x^j + jpqx^ix^{j-1} \\ &= (ipx^{i-1})(qx^j) + (px^i)(jqx^{j-1}) \\ &= (px^i)'(qx^j) + (px^i)(qx^j)'.\end{aligned}$$

设

$$\begin{aligned}f(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m, \\ g(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n\end{aligned}$$

为 $D[x]$ 中的二个元. 取 px^i 为 a_0, a_1x, $\cdots$, a_mx^m, 有

$$\begin{aligned}(a_0 \cdot qx^j)' &= (a_0)'(qx^j) + (a_0)(qx^j)', \\ (a_1x \cdot qx^j)' &= (a_1x)'(qx^j) + (a_1x)(qx^j)', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ (a_mx^m \cdot qx^j)' &= (a_mx^m)'(qx^j) + (a_mx^m)(qx^j)'.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&(f(x) \cdot qx^j)' \\ &= (a_0 \cdot qx^j + a_1x \cdot qx^j + \cdots + a_mx^m \cdot qx^j)' \\ &= (a_0 \cdot qx^j)' + (a_1x \cdot qx^j)' + \cdots + (a_mx^m \cdot qx^j)' \\ &= ((a_0)'(qx^j) + (a_0)(qx^j)') + ((a_1x)'(qx^j) + (a_1x)(qx^j)') \\ &\qquad + \cdots + ((a_mx^m)'(qx^j) + (a_mx^m)(qx^j)') \\ &= ((a_0)'(qx^j) + (a_1x)'(qx^j) + \cdots + (a_mx^m)'(qx^j)) \\ &\qquad + ((a_0)(qx^j)' + (a_1x)(qx^j)' + \cdots + (a_mx^m)(qx^j)') \\ &= ((a_0)' + (a_1x)' + \cdots + (a_mx^m)')(qx^j) \\ &\qquad + (a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m)(qx^j)'\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m)'(qx^j) + f(x)(qx^j)' \\
&= f'(x)(qx^j) + f(x)(qx^j)'.
\end{aligned}
$$

再取 qx^j 为 b_0, $b_1 x$, $\cdots$, $b_n x^n$, 有

$$
\begin{gathered}
(f(x) \cdot b_0)' = f'(x)(b_0) + f(x)(b_0)', \\
(f(x) \cdot b_1 x)' = f'(x)(b_1 x) + f(x)(b_1 x)', \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
(f(x) \cdot b_n x^n)' = f'(x)(b_n x^n) + f(x)(b_n x^n)'.
\end{gathered}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&(f(x)g(x))' \\
&= (f(x) \cdot b_0 + f(x) \cdot b_1 x + \cdots + f(x) \cdot b_n x^n)' \\
&= (f(x) \cdot b_0)' + (f(x) \cdot b_1 x)' + \cdots + (f(x) \cdot b_n x^n)' \\
&= (f'(x)(b_0) + f(x)(b_0)') + (f'(x)(b_1 x) + f(x)(b_1 x)') \\
&\qquad\qquad + \cdots + (f'(x)(b_n x^n) + f(x)(b_n x^n)') \\
&= (f'(x)(b_0) + (f'(x)(b_1 x) + \cdots + f'(x)(b_n x^n)) \\
&\qquad\qquad + (f(x)(b_0)' + f(x)(b_1 x)' + \cdots f(x)(b_n x^n)') \\
&= f'(x)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) \\
&\qquad\qquad + f(x)((b_0)' + (b_1 x)' + \cdots + (b_n x^n)') \\
&= f'(x)g(x) + f(x)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n)' \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}
$$

✌

例 考虑 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}[x]$. 取

$$f(x) = x^3 + 2, \quad g(x) = x^2 + x - 1.$$

不难得到

$$f'(x) = 3x^2, \quad g'(x) = 2x + 1.$$

$f(x)$ 与 $g(x)$ 的积

$$f(x)g(x) = x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 + 2x - 2$$

的微商是

$$(f(x)g(x))' = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 4x + 2.$$

如果用上面的 (★) 计算, 就是

$$\begin{aligned}&f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\\=&\,3x^2(x^2+x-1) + (x^3+2)(2x+1)\\=&\,3x^4+3x^3-3x^2+2x^4+x^3+4x+2\\=&\,5x^4+4x^3-3x^2+4x+2.\end{aligned}$$

也许这不太能体现 (★) 的作用: 算二个多项式积的微商时, 先拆再算好像没什么不方便的. 的确如此. 可是 (★) 的推论

$$((f(x))^k)' = k(f(x))^{k-1}f'(x)$$

很有用. 看下面的例.

例 还是考虑 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}[x]$. 计算

$$\begin{aligned}p(x) &= (g\circ f)(x) = g(f(x)) = (x^3+2)^2 + (x^3+2) - 1,\\q(x) &= (f\circ g)(x) = f(g(x)) = (x^2+x-1)^3 + 2\end{aligned}$$

的微商.

用定义写出 $p(x)$ 的微商并不是很难. 因为

$$p(x) = (x^6+4x^3+4) + x^3 + 2 - 1 = x^6 + 5x^3 + 5,$$

故

$$p'(x) = 6x^5 + 15x^2.$$

不过用定义写出 $q(x)$ 就有点麻烦了: 三项的立方不是那么好算. 但是, 我们利用这个推论, 可直接写出

$$q'(x) = 3(x^2+x-1)^2(2x+1).$$

记 $g(x) = x^k$. 取 $f(x) \in D[x]$. 不难看出,

$$(f(x))^k = (g \circ f)(x).$$

所以

$$(g \circ f)'(x) = ((f(x))^k)' = k(f(x))^{k-1} f'(x) = (g' \circ f)(x) f'(x).$$

这告诉我们什么呢? 如果我们把 $f(x)$ 看成文字 y, 那么 $y^k \in D[y]$ 的微商是 ky^{k-1}.将此结果乘 $y = f(x) \in D[x]$ 的微商 $f'(x)$, 就是 $(g \circ f)(x) \in D[x]$ 的微商.

取 $h(x) = x \in D[x]$. 那么 $(f \circ h)(x)$ 就是 $f(x)$. 因为 $(x)' = 1$, 所以

$$(f \circ h)'(x) = f'(x) = (f' \circ h)(x) h'(x).$$

我们作出猜想: 任取 $f(x), g(x) \in D[x]$, 必有

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) f'(x).$$

幸运的事儿是, 这个猜想是正确的.

命题 设 $f(x), g(x) \in D[x]$. 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合的微商适合链规则 (*the chain rule*):

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) f'(x).$$

链规则也可写为

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) f'(x).$$

证 设

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + b_n x^n \in D[x],$$

则

$$(g \circ f)(x) = b_0 + b_1 f(x) + b_2 (f(x))^2 + \cdots + b_{n-1} (f(x))^{n-1} + b_n (f(x))^n.$$

所以

$$\begin{aligned}
&(g\circ f)'(x)\\
&=b_1f'(x)+b_2((f(x))^2)'+\cdots+b_{n-1}((f(x))^{n-1})'+b_n((f(x))^n)'\\
&=b_1f'(x)+b_2\cdot 2f(x)f'(x)+\cdots+b_{n-1}\cdot(n-1)(f(x))^{n-2}f'(x)\\
&\qquad\qquad+b_n\cdot n(f(x))^{n-1}f'(x)\\
&=b_1f'(x)+2b_2f(x)f'(x)+\cdots+(n-1)b_{n-1}(f(x))^{n-2}f'(x)\\
&\qquad\qquad+nb_n(f(x))^{n-1}f'(x)\\
&=(b_1+2b_2f(x)+\cdots+(n-1)b_{n-1}(f(x))^{n-2}+nb_n(f(x))^{n-1})f'(x)\\
&=(g'\circ f)(x)f'(x).
\end{aligned}$$

✌

例 我们用链规则计算 $p(x)$ 的微商:

$$p'(x)=(g'\circ f)(x)f'(x)=(2(x^3+2)+1)(3x^2)=3x^2(2x^3+5).$$

这跟前面算出的 $6x^5+15x^2$ 是一致的.

多项式的根

我们回顾一下熟悉的多项式函数.

定义 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in D$. 称

$$\begin{aligned} f\colon \quad & D \to D, \\ & t \mapsto a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \end{aligned}$$

为 D 的多项式函数 (*polynomial function*). 我们也说, 这个 f 是由 D 上 x 的多项式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

诱导的多项式函数 (*the polynomial function induced by* f). 不难看出, 若二个多项式相等, 则其诱导的多项式函数也相等.

定义 设 f 与 g 是 D 的二个多项式函数. 二者的和 $f+g$ 定义为

$$\begin{aligned} f+g\colon \quad & D \to D, \\ & t \mapsto f(t) + g(t). \end{aligned}$$

二者的积 fg 定义为

$$\begin{aligned} fg\colon \quad & D \to D, \\ & t \mapsto f(t)g(t). \end{aligned}$$

设 f, g 是 D 的二个多项式函数:

$$\begin{aligned} f\colon \quad & D \to D, \\ & t \mapsto a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, \\ g\colon \quad & D \to D, \\ & t \mapsto b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n. \end{aligned}$$

利用 D 的运算律, 可以得到

$$\begin{aligned} f+g\colon \quad & D \to D, \\ & t \mapsto (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n, \\ fg\colon \quad & D \to D, \\ & t \mapsto c_0 + c_1 t + \cdots + c_{2n} t^{2n}, \end{aligned}$$

其中

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0.$$

由此可得下面的命题:

命题 设 $f(x), g(x) \in D[x]$, f, g 分别是 $f(x), g(x)$ 诱导的多项式函数. 那么 $f+g$ 是 $f(x)+g(x)$ 诱导的多项式函数, 且 fg 是 $f(x)g(x)$ 诱导的多项式函数.

通俗地说, 若多项式 $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_{n-1}(x)$ 之间有一个由加法与乘法计算得到的关系, 那么将 x 换为 D 的元 t, 这样的关系仍成立.

例 考虑 $\mathbb{F}$ 与 $\mathbb{F}[x]$. 前面, 利用带余除法, 得到关系

$$8x^6 + 1 = (4x^3 + 12x - 8) \cdot 2(x-1)^2(x+2) + (72x^2 - 96x + 33).$$

这里 x 只是一个文字, 不是数! 但是, 上面的命题告诉我们, 可以把 x 看成一个数. 比如, 由上面的式可以立即看出, $8t^6+1$ 与 $72t^2-96t+33$ 在 $t=1$ 或 $t=-2$ 时值是一样的.

可是, 对于这样的式, 我们不能将 x 改写为 $\mathbb{F}$ 的元 t:

$$\deg 3x^2 < \deg 2x^3.$$

可以看到, 若 $t=0$, 则 $3t^2 = 2t^3 = 0$, 而 0 的次是 $-\infty$; 若 $t \neq 0$, 则 $3t^2$ 与 $2t^3$ 都是非零数, 次都是 0.

评注 我们已经知道, 多项式确定多项式函数. 自然地, 有这样的问题: 多项式函数能否确定多项式? 一般情况下, 这个问题的答案是 no.

考虑 4 元集 V. 作 V 上 x 的二个多项式:

$$f(x) = x^4 - x, \quad g(x) = 0.$$

显然, 这是二个不相等的多项式. 但是, 任取 $t \in V$, 都有

$$t^4 - t = 0.$$

因此, $f(x)$ 与 $g(x)$ 诱导的多项式函数是同一函数!

不过, 在某些场合下, 多项式函数可以确定多项式. 之后我们还会提到这一点.

评注 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in D[x]$. 设 t 是 D 的元. 以后, 我们直接写

$$f(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n.$$

并称 $f(t)$ 是多项式 $f(x)$ 在点 (*point*) t 的值. 至少, 一方通行 (*one-way traffic*) 是没问题的.

顺便一提, $f(x)$ 的微商也是多项式:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}.$$

我们把

$$a_1+2a_2t+\cdots+na_nt^{n-1}\in D$$

简单地写为 $f'(t)$.

了解了多项式与多项式函数的关系后, 下面的这个命题就不会太凸兀了.

命题 设 $f(x)\in D[x]$ 是 n 次多项式 $(n\geq 1)$, $a\in D$. 则存在 $n-1$ 次多项式 $q(x)$ $(\in D[x])$ 使

$$f(x)=q(x)(x-a)+f(a).$$

根据带余除法, 这样的 $q(x)$ 一定是唯一的.

证 因为 $x-a$ 的首项系数 1 是单位, 故存在 $D[x]$ 的二元 $q(x)$, $r(x)$ 使

$$f(x)=q(x)(x-a)+r(x),\quad \deg r(x)<\deg(x-a)=1.$$

所以, $r(x)=c$, $c\in D$. 用 D 的元 a 替换 x, 有

$$f(a)=q(a)(a-a)+c=c.$$

所以

$$f(x)=q(x)(x-a)+f(a).$$

再看这个 $q(x)$ 的次. 因为 $f(x)$ 的次不低于 $x-a$ 的次, 故

$$\deg q(x)=\deg f(x)-\deg(x-a)=n-1.$$ ✌

评注 如果用 D 的元 b 替换 x, 则

$$f(b) = (b-a)q(b) + f(a),$$

也就是说, 存在 $r \in D$ 使

$$f(b) - f(a) = (b-a)r.$$

所以, 若 $f(x) \in D[x]$ 是 n 次多项式 $(n \geq 1)$, $a, b \in D$, 则存在 $r \in D$ 使 $f(b) - f(a) = (b-a)r$. 当 $f(x)$ 的次低于 1 时, 这个命题也对 (取 $r = 0$).

举个简单的例. 我们说, 不存在系数为整数的多项式 $f(x)$ 使 $f(1) = f(-1) + 1$. 假如说这样的 f 存在, 那么应存在整数 r 使

$$1 = f(1) - f(-1) = (1 - (-1))r = 2r,$$

而 1 不是偶数, 矛盾.

现在, 我们讨论多项式的根的基本性质.

定义 设 $f(x)$ 是 D 上 x 的多项式. 若有 $a \in D$ 使 $f(a) = 0$, 则说 a 是 (多项式) $f(x)$ 的根 ($root$).

例 设 $D \subset \mathbb{C}$, 且 $\mathbb{Z} \subset D$. 看 D 上 x 的多项式

$$f(x) = (2x-1)(x+1)(x^2-3)(x^2+1)(x^2+4).$$

如果 $D = \mathbb{Z}$, 则 $f(x)$ 有一个在 D 里的根: -1. 如果 $D = \mathbb{Q}$, 则 $f(x)$ 有二个在 D 里的根: -1, $\frac{1}{2}$. 如果 $D = \mathbb{R}$, 则 $f(x)$ 有四个在 D 里的根: -1, $\frac{1}{2}$, $\pm\sqrt{3}$. 如果 $D = \mathbb{C}$, 则 $f(x)$ 有八个在 D 里的根: -1, $\frac{1}{2}$, $\pm\sqrt{3}$, $\pm \mathrm{i}$, $\pm 2\mathrm{i}$.

例 再来一个例. 看 D 上 x 的多项式

$$f(x) = x^2 + x - 1.$$

若 $D = \mathbb{R}$, 则 $f(x)$ 的二个根是 $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. 若 $D = V$, 则 $f(x)$ 的二个根是 τ, τ^2. 当然, 若 $D \subset \mathbb{Q}$, 则 $f(x)$ 无 (D 的) 根.

评注 设 $a, b \in D$, 且 $a \neq 0$.

若 $f(x) = a$, 则 $f(x)$ 无根. 换句话说, 零次多项式至多有零个根.

再设 $f(x) = ax + b$ 是一次多项式. 若存在 $c \in D$ 使 $b = ac$, 则 $f(x)$ 有一个根 $-c$. 并且, $f(x)$ 也不会有另一个根 (若 $at_1 + b = at_2 + b$, 则 $at_1 = at_2$, 故 $t_1 = t_2$). 若这样的 c 不存在, 则 $f(x)$ 无根 (反设 $f(x)$ 有根 d, 则由 $ad + b = 0$ 知 $b = a(-d)$, 矛盾). 换句话说, 一次多项式至多有一个根.

结合上面的二个例, 我们猜想: n 次多项式 ($n \in \mathbb{N}$) 至多有 n 个 (不同的) 根. 幸运的事儿是, 这个猜想是正确的.

命题 设 $f(x) \in D[x]$ 是 n 次多项式 ($n \geq 1$). a 是 $f(x)$ 的根的一个必要与充分条件是: 存在 $n-1$ 次多项式 $q(x)$ ($\in D[x]$) 使

$$f(x) = q(x)(x - a).$$

根据带余除法, 这样的 $q(x)$ 一定是唯一的.

证 先看充分性. 若这样的 $q(x)$ 存在, 则

$$f(a) = q(a)(a - a) = 0.$$

再看必要性. 设 $f(a) = 0$. 根据上面的命题, 存在 $n-1$ 次多项式 $q(x) \in D[x]$ 使

$$f(x) = q(a)(x - a) + f(a) = q(a)(x - a).$$ ✌

命题 设 $f(x) \in D[x]$ 是 n 次多项式 ($n \in \mathbb{N}$). 则 $f(x)$ 至多有 n 个不同的根.

证 $n = 0$ 或 $n = 1$ 时, 我们已经知道这是对的. 用数学归纳法. 假设 ℓ 次多项式至多有 ℓ 个不同的根. 看 $\ell + 1$ 次多项式 $f(x)$. 如果它没有根, 当然至多有 $\ell + 1$ 个不同的根. 如果它有一个根 a, 则存在 ℓ 次多项式 $q(x)$ 使

$$f(x) = q(x)(x - a).$$

根据归纳假设, $q(x)$ 至多有 ℓ 个不同的根. 而且, 若 $b \neq a$, 且 b 不是 $q(x)$ 的根, 利用消去律可知 $f(b) \neq 0$. 这样, $f(x)$ 至多有 $\ell + 1$ 个不同的根. ✌

由此可推出一个很有用的事实:

命题 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是 D 的元. 设 n 是非负整数. 设

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

若 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ 是 $n+1$ 个互不相同的 D 的元, 且

$$f(t_0) = f(t_1) = \cdots = f(t_n) = 0,$$

则 $f(x)$ 必为零多项式. 通俗地说, 次不高于 n (且系数为整环的元) 的多项式不可能有 n 个以上的互不相同的根, 除非这个多项式是零.

证 反证法. 设 $f(x)$ 不是零多项式. 设 $f(x)$ 的次为 m, 则 $0 \leq m \leq n$. 根据上个命题, $f(x)$ 至多有 m 个不同的根, 这与题设矛盾! 故 $f(x) = 0$. ✌

评注 再看前面提到的 4 元集 V. 可以看出, 因为 V 的元 "不够多", 所以出现了取零值的非零多项式.

此事实的一个推论是:

命题 设 $a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n$ 是 D 的元. 设 n 是非负整数. 设

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n.$$

若 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ 是 $n+1$ 个互不相同的 D 的元, 且

$$f(t_0) = g(t_0), \quad f(t_1) = g(t_1), \quad \cdots, \quad f(t_n) = g(t_n),$$

则 $f(x)$ 必等于 $g(x)$. 通俗地说, 若次不高于 n (且系数为整环的元) 的二个多项式若在多于 n 处取一样的值, 则这二个多项式相等.

证 考虑 $h(x) = f(x) - g(x)$. 则 $\deg h(x) \leq n$. $h(x)$ 有 $n+1$ 个不同的根. 根据上个命题, $h(x)$ 是零多项式. 这样, $f(x) = g(x)$. ✌

在中学, 我们学过解一元二次方程 $at^2+bt+c=0$ (a, b, c 为实数, 且 $a\neq 0$) 的一种方法: 直接套用公式

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a},$$

其中

$$\Delta=b^2-4ac$$

是判别式: 当 $\Delta>0$ 时, 方程有二个不等的实数解; 当 $\Delta=0$ 时, 方程有二个相等的实数解; 当 $\Delta<0$ 时, 方程无实数解.

当 $\Delta=0$ 时, $c=\frac{b^2}{4a}$, 则

$$at^2+bt+c=a\left(t^2+2\frac{b}{2a}t+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)=a\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

记

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\in\mathbb{R}[x].$$

根据根的定义, $-\frac{b}{2a}\in\mathbb{R}$ 是 $f(x)$ 的根. 我们发现, 这个根 "出现了" 2 次, 是重复的. 我们给这样的根一个特殊点的称呼.

定义 设 $a\in D$ 是多项式 $f(x)\in D[x]$ 的根. 那么, 存在唯一的多项式 $q(x)\in D[x]$ 使

$$f(x)=(x-a)q(x).$$

若 $q(a)=0$, 则说 a 是 $f(x)$ 的一个重根 (*multiple root*). 若 $q(a)\neq 0$, 则说 a 是 $f(x)$ 的一个单根 (*simple root*).

例 看 $\mathbb{Z}$ 上 x 的多项式

$$f(x)=(x^2-3)(x^2+2)(x-1)^2(x+2).$$

显然, $f(x)$ 的根是 1 与 -2. 因为

$$f(x)=(x+2)\underbrace{(x^2-3)(x^2+2)(x-1)^2}_{q_1(x)},$$

且 $q_1(x) \neq 0$, 故 -2 是 $f(x)$ 的单根. 类似地, 由于

$$f(x) = (x-1)\underbrace{(x^2-3)(x^2+2)(x-1)(x+2)}_{q_2(x)},$$

且 $q_2(x) = 0$, 故 1 是 $f(x)$ 的重根.

命题 设 $a \in D$ 是多项式 $f(x) \in D[x]$ 的根. 则:
(i) 若 a 是 $f(x)$ 的重根, 则 a 是 $f'(x)$ 的根;
(ii) 若 a 是 $f(x)$ 的单根, 则 a 不是 $f'(x)$ 的根.
所以, $f(x)$ 有重根的一个必要与充分条件是: $f(x)$ 与 $f'(x)$ 有公共根.

证 因为 a 是 $f(x)$ 的根, 故存在唯一的 $q(x)$ 使

$$f(x) = (x-a)q(x).$$

从而

$$f'(x) = (x-a)'q(x) + (x-a)q'(x) = q(x) + (x-a)q'(x).$$

这样

$$f'(a) = q(a) + (a-a)q'(a) = q(a).$$

(i) 若 a 是 $f(x)$ 的重根, 则 $q(a) = 0$, 故 $f'(a) = 0$.
(ii) 若 a 是 $f(x)$ 的单根, 则 $q(a) \neq 0$, 故 $f'(a) \neq 0$. ✌

例 我们看

$$f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x], \quad a \neq 0.$$

它的微商 $f'(x) = 2ax + b$ 恰有一个根 $t_0 = -\frac{b}{2a}$. 由上个命题, $f(x)$ 有重根相当于 $f(t_0) = 0$, 即

$$0 = f(t_0) = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

$\mathbb{F}$ 上的多项式

我们在前几节讨论的都是整环 D 上的多项式, 所以它们看上去是有些抽象的. 从现在开始, 我们不讨论抽象的 D 与 $D[x]$, 而是讨论 $\mathbb{F}$ 与 $\mathbb{F}[x]$, 其中 $\mathbb{F}$ 可代指 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 的任意一个. 细心的读者会注意到我们在前几节未使用 $\sum$ 符号: 这是为了让读者没那么困难地适应多项式理论. 从本节起, 我们会较多地使用这个 $\sum$. 读者也可以乘此机会让自己熟悉它. 当然, 我们偶尔也会使用 $\prod$ 符号.

本节并没有什么新的知识. 读者可以乘此机会温习一下所学内容. 我们将重述一些定义与命题. 我们在学校学数学的时候, 也会有复习课. 就当本节就是 “复习节” 吧!

先从多项式的定义与运算开始.

定义 设 x 是不在 $\mathbb{F}$ 里的任意一个文字. 形如

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \\ &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad (n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F},\ a_n \neq 0) \end{aligned}$$

的表达式称为 $\mathbb{F}$ 上 x 的一个多项式. n 称为其次, a_i 称为其 i 次系数, $a_i x^i$ 称为其 i 次项. $f(x)$ 的次可写为 $\deg f(x)$.

若二个多项式的次与各同次系数均相等, 则二者相等.

多项式的系数为 0 的项可以不写.

约定 $0 \in \mathbb{F}$ 也是多项式, 称为零多项式. 零多项式的次是 $-\infty$. 任取整数 m, 约定

$$\begin{aligned} &-\infty = -\infty, \quad -\infty < m, \\ &-\infty + m = m + (-\infty) = -\infty + (-\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

当然, 还约定, 零多项式只跟自己相等. 换句话说,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$$

的一个必要与充分条件是

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

$\mathbb{F}$ 上 x 的所有多项式作成的集是 $\mathbb{F}[x]$:

$$\mathbb{F}[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F} \right\}.$$

文字 x 只是一个符号, 它与 $\mathbb{F}$ 的元的和与积都是形式的. 我们说, x 是不定元.

定义 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \in \mathbb{F}[x].$$

规定加法如下:

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i.$$

命题 设 $f(x)$, $g(x)$, $h(x) \in \mathbb{F}[x]$. $\mathbb{F}[x]$ 的加法适合如下性质:
(i) $f(x) + g(x) \in \mathbb{F}[x]$;
(ii) $(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$;
(iii) 存在多项式 0 使 $0 + f(x) = f(x) + 0 = f(x)$;
(iv) 存在多项式 $-f(x)$ 使 $-f(x) + f(x) = f(x) + (-f(x)) = 0$;
(v) $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$.

定义 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \in \mathbb{F}[x].$$

则

$$-g(x) = \sum_{i=0}^{n} (-b_i) x^i.$$

规定减法如下:

$$f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x)).$$

命题 设 $f(x)$, $g(x) \in \mathbb{F}[x]$. 则

$$\deg(f(x) \pm g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}.$$

若 $\deg f(x) > \deg g(x)$, 则

$$\deg(f(x) \pm g(x)) = \deg f(x).$$

类似地, 若 $\deg f(x) < \deg g(x)$, 则

$$\deg(f(x) \pm g(x)) = \deg g(x).$$

定义 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{F}[x].$$

这称为 $f(x)$ 的升次排列. 下面的写法称为 $f(x)$ 的降次排列:

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} x^{n-j} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

(非零) 多项式的最高次非零项是首项. 它的系数是此多项式的首项系数.

定义 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in \mathbb{F}[x].$$

规定乘法如下:

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) x^k.$$

命题 设 m, $n \in \mathbb{N}$, p, $q \in \mathbb{F}$. 则

$$px^i \cdot qx^j = (px^i)(qx^j) = (pq)x^{i+j}.$$

命题 设 $f(x)$, $g(x) \in \mathbb{F}[x]$. 则

$$\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x).$$

命题 设 $f(x)$, $g(x)$, $h(x) \in \mathbb{F}[x]$. $\mathbb{F}[x]$ 的加法与乘法适合 (i) 至 (v) 及如下性质:

(vi) $f(x)g(x) \in \mathbb{F}[x]$;

(vii) $(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$;

(viii) 存在多项式 1 使 $1f(x) = f(x)1 = f(x)$;

(ix) $(-1)f(x) = -f(x)$;

(x) $f(x)g(x) = g(x)f(x)$;

(xi) 若 $f(x) \neq 0$, 则

$$f(x)g(x) = f(x)h(x) \implies g(x) = h(x),$$
$$g(x)f(x) = h(x)f(x) \implies g(x) = h(x);$$

(xii) 二个分配律都对:

$$f(x)(g(x) + h(x)) = f(x)g(x) + f(x)h(x),$$
$$(g(x) + h(x))f(x) = g(x)f(x) + h(x)f(x).$$

评注 $\mathbb{F}[x]$ 的一个名字就是 (域) $\mathbb{F}$ 上 (x) 的多项式环.

定义 设 $m \in \mathbb{N}$. 多项式 $f(x)$ 的 m 次幂就是 m 个 $f(x)$ 的积:

$$(f(x))^m = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot \cdots \cdot f(x)}_{m\ f(x)\text{'s}} = \prod_{\ell=0}^{m-1} f(x).$$

设 m, $n \in \mathbb{N}$, $f(x)$, $g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 则多项式的幂适合如下规则:

$$(f(x))^m(f(x))^n = (f(x))^{m+n},$$
$$((f(x))^m)^n = (f(x))^{mn},$$
$$(f(x)g(x))^m = (f(x))^m(g(x))^m.$$

命题 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. 非零的 $c \in \mathbb{F}$ 是 0 次多项式, 那么

$$\deg cf(x) = \deg f(x).$$

再来看多项式的带余除法. 因为 $\mathbb{F}$ 的每个非零元都是 $\mathbb{F}$ 的单位, 所以有

命题 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是非零多项式. 对任意 $g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 存在唯一的 $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg f(x).$$

一般称其为带余除法: $q(x)$ 就是商; $r(x)$ 就是余式. 并且, 当 $f(x)$ 的次不高于 $g(x)$ 的次时, $f(x)$, $g(x)$, $q(x)$ 间还有如下的次关系:

$$\deg g(x) = \deg(g(x) - r(x)) = \deg q(x) + \deg f(x).$$

可以看到, 在 $\mathbb{F}[x]$ 里, 带余除法的适用范围更广了.

下面回顾多项式的相等. 我们借助 "线性无关" 讨论相等问题.

定义 设 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x) \in \mathbb{F}[x]$. 设 $c_0, c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{F}$. 我们说

$$\sum_{i=0}^{n} c_i p_i(x)$$

是多项式 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 的一个线性组合. $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 就是此线性组合的系数.

若不存在一组不全为 0 的 $\mathbb{F}$ 中元 $d_0, d_1, \cdots, d_n$ 使

$$\sum_{i=0}^{n} d_i p_i(x) = 0,$$

则说 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 是线性无关的. 换句话说, "$p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 是线性无关的" 意味着: 若 $\mathbb{F}$ 中元 $r_0, r_1, \cdots, r_n$ 使

$$\sum_{i=0}^{n} r_i p_i(x) = 0,$$

则 $r_0 = r_1 = \cdots = r_n = 0$.

命题 设 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x) \in \mathbb{F}[x]$ 分别是 $0, 1, \cdots, n$ 次多项式. 则:

(i) $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 是线性无关的;

(ii) 任意次不高于 n 的多项式都可唯一地写为 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 的线性组合.

由于 $\mathbb{F}$ 的每个非零元都是单位, 上面的命题的结论变强了. 下面的例体现了这一点.

例 考虑 $\mathbb{F}$ 与 $\mathbb{F}[x]$. 取 $n=2$, 及

$$p_0(x)=-1,\quad p_1(x)=2x,\quad p_2(x)=3x^2.$$

这三个多项式是线性无关的. 考虑 $f(x)=3+x-2x^2$. 设 $c_0, c_1, c_2\in\mathbb{F}$ 使

$$3+x-2x^2=c_0\cdot(-1)+c_1\cdot 2x+c_2\cdot 3x^2.$$

这相当于

$$3=-c_0,\quad 1=2c_1,\quad -2=3c_2.$$

由此可得

$$c_0=-3,\quad c_1=\frac{1}{2},\quad c_2=-\frac{2}{3}.$$

可以看到, 在 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}[x]$ 里 $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ 的线性组合还不能表示这个 $f(x)$, 但当我们在 “大环境” $\mathbb{F}$ 与 $\mathbb{F}[x]$ 下讨论问题时就可以了.

评注 我们常常把 D 的元分为三类: 零、单位、非零且不是单位的元. 但是在 $\mathbb{F}$, 只要分为二类即可: 零与非零.

命题 设 $a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n\in\mathbb{F}$. 设 $c\in\mathbb{F}$. 再设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x-c)^i,\quad g(x)=\sum_{i=0}^{n}b_i(x-c)^i.$$

则 $f(x)=g(x)$ 的一个必要与充分条件是

$$a_0=b_0,\quad a_1=b_1,\quad \cdots,\quad a_n=b_n.$$

并且, 任取

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}u_ix^i\in\mathbb{F}[x],$$

必存在 $v_0, v_1, \cdots, v_n\in\mathbb{F}$ 使

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}v_i(x-c)^i.$$

我们看看多项式的微商.

定义 设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in\mathbb{F}[x].$$

$f(x)$ 的微商是多项式

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{n}ia_ix^{i-1}\in\mathbb{F}[x].$$

$f'(x)$ 也可写为 $(f(x))'$.

评注 若 $f(x)=c$, $c\in\mathbb{F}$, 则 $f'(x)$ 为零多项式.

定义 设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i,\quad g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j$$

为 $\mathbb{F}[x]$ 中的二个元. 我们称

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sum_{j=0}^{n}b_j(f(x))^j$$

为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合.

命题 多项式的复合适合结合律. 具体地说, 设 $f(x), g(x), h(x)\in\mathbb{F}[x]$, 则

$$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ(g\circ f))(x).$$

命题 设 $f(x), g(x), h(x)\in\mathbb{F}[x]$.
(i) 设 $p(x)=f(x)+g(x)$. 则

$$p(h(x))=f(h(x))+g(h(x)).$$

(ii) 设 $q(x)=f(x)g(x)$. 则

$$q(h(x))=f(h(x))g(h(x)).$$

命题 设 $f(x)$, $g(x) \in \mathbb{F}[x]$, $c \in \mathbb{F}$. 则

(i) $(cf(x))' = cf'(x)$;

(ii) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$.

由 (i) (ii) 与数学归纳法可知: 当 c_0, c_1, ···, $c_{k-1} \in \mathbb{F}$, 且 $f_0(x)$, $f_1(x)$, ···, $f_{k-1}(x) \in \mathbb{F}[x]$ 时,

$$\left(\sum_{\ell=0}^{k-1} c_\ell f_\ell(x)\right)' = \sum_{\ell=0}^{k-1} c_\ell f_\ell'(x).$$

命题 设 $f(x)$, $g(x) \in \mathbb{F}[x]$. 则

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{$\bigstar$}$$

由 ($\bigstar$) 与数学归纳法可知: 当 $f_0(x)$, $f_1(x)$, ···, $f_{k-1}(x) \in \mathbb{F}[x]$ 时,

$$\begin{aligned}&(f_0(x)f_1(x)\cdots f_{k-1}(x))'\\ =\ & f_0'(x)f_1(x)\cdots f_{k-1}(x) + f_0(x)f_1'(x)\cdots f_{k-1}(x) + \cdots\\ &+ f_0(x)f_1(x)\cdots f_{k-1}'(x).\end{aligned}$$

取 $f_0(x) = f_1(x) = \cdots = f_{k-1}(x) = f(x)$ 知

$$((f(x))^k)' = k(f(x))^{k-1}f'(x).$$

命题 设 $f(x)$, $g(x) \in \mathbb{F}[x]$. 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合的微商适合链规则:

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x)f'(x).$$

链规则也可写为

$$(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x).$$

最后, 我们回顾多项式函数与多项式的根.

定义 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$. 称

$$f\colon \quad \begin{aligned}\mathbb{F} &\to \mathbb{F},\\ t &\mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i t^i\end{aligned}$$

为 $\mathbb{F}$ 的多项式函数. 我们也说, 这个 f 是由 $\mathbb{F}$ 上 x 的多项式

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

诱导的多项式函数. 不难看出, 若二个多项式相等, 则其诱导的多项式函数也相等.

定义 设 f 与 g 是 $\mathbb{F}$ 的二个多项式函数. 二者的和 $f+g$ 定义为

$$\begin{aligned} f+g\colon \quad & \mathbb{F}\to\mathbb{F},\\ & t\mapsto f(t)+g(t). \end{aligned}$$

二者的积 fg 定义为

$$\begin{aligned} fg\colon \quad & \mathbb{F}\to\mathbb{F},\\ & t\mapsto f(t)g(t). \end{aligned}$$

设 f, g 是 $\mathbb{F}$ 的二个多项式函数:

$$\begin{aligned} f\colon \quad & \mathbb{F}\to\mathbb{F},\\ & t\mapsto \sum_{i=0}^{n}a_it^i,\\ g\colon \quad & \mathbb{F}\to\mathbb{F},\\ & t\mapsto \sum_{i=0}^{n}b_it^i. \end{aligned}$$

利用 $\mathbb{F}$ 的运算律, 可以得到

$$\begin{aligned} f+g\colon \quad & \mathbb{F}\to\mathbb{F},\\ & t\mapsto \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)t^i,\\ fg\colon \quad & \mathbb{F}\to\mathbb{F},\\ & t\mapsto \sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{\ell=0}^{i}a_\ell b_{i-\ell}\right)t^i. \end{aligned}$$

由此可得下面的命题:

命题 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, f, g 分别是 $f(x), g(x)$ 诱导的多项式函数. 那么 $f+g$ 是 $f(x)+g(x)$ 诱导的多项式函数, 且 fg 是 $f(x)g(x)$ 诱导的多项式函数.

通俗地说, 若多项式 $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_{n-1}(x)$ 之间有一个由加法与乘法计算得到的关系, 那么将 x 换为 $\mathbb{F}$ 的元 t, 这样的关系仍成立.

定义 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{F}[x].$$

设 $t \in \mathbb{F}$. 我们把 $\mathbb{F}$ 的元

$$\sum_{i=0}^{n} a_i t^i$$

简单地写为 $f(t)$, 并称其为多项式 $f(x)$ 在点 t 的值.

顺便一提, $f(x)$ 的微商也是多项式:

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}.$$

我们把

$$\sum_{i=1}^{n} i a_i t^{i-1} \in \mathbb{F}$$

简单地写为 $f'(t)$.

下面是带余除法的推论. 它在根的讨论里起了重要的作用.

命题 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是 n 次多项式 $(n \geq 1)$, $a \in \mathbb{F}$. 则存在 $n-1$ 次多项式 $q(x)$ $(\in \mathbb{F}[x])$ 使

$$f(x) = q(x)(x-a) + f(a).$$

根据带余除法, 这样的 $q(x)$ 一定是唯一的.

定义 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上 x 的多项式. 若有 $a \in \mathbb{F}$ 使 $f(a) = 0$, 则说 a 是 (多项式) $f(x)$ 的根.

命题 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是 n 次多项式 $(n \geq 1)$. a 是 $f(x)$ 的根的一个必要与充分条件是: 存在 $n-1$ 次多项式 $q(x)$ $(\in \mathbb{F}[x])$ 使

$$f(x) = q(x)(x-a).$$

根据带余除法, 这样的 $q(x)$ 一定是唯一的.

命题 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是 n 次多项式 $(n \in \mathbb{N})$. 则 $f(x)$ 至多有 n 个不同的根.

评注 在上节, 我们知道, 整环 D 上的多项式 $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ 不一定有根. 可是, 在域 $\mathbb{F}$ 里, $f(x)$ 就有根 $-\frac{b}{a}$.

命题 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是 $\mathbb{F}$ 的元. 设 n 是非负整数. 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

若 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ 是 $n+1$ 个互不相同的 $\mathbb{F}$ 的元, 且

$$f(t_0) = f(t_1) = \cdots = f(t_n) = 0,$$

则 $f(x)$ 必为零多项式. 通俗地说, 次不高于 n (且系数为 $\mathbb{F}$ 的元) 的多项式不可能有 n 个以上的互不相同的根, 除非这个多项式是零.

命题 设 $a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n$ 是 $\mathbb{F}$ 的元. 设 n 是非负整数. 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i.$$

若 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ 是 $n+1$ 个互不相同的 $\mathbb{F}$ 的元, 且

$$f(t_0) = g(t_0), \quad f(t_1) = g(t_1), \quad \cdots, \quad f(t_n) = g(t_n),$$

则 $f(x)$ 必等于 $g(x)$. 通俗地说, 若次不高于 n (且系数为 $\mathbb{F}$ 的元) 的二个多项式若在多于 n 处取一样的值, 则这二个多项式相等.

定义 设 $a \in \mathbb{F}$ 是多项式 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 的根. 那么, 存在唯一的多项式 $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$f(x) = (x-a)q(x).$$

若 $q(a) = 0$, 则说 a 是 $f(x)$ 的一个重根. 若 $q(a) \neq 0$, 则说 a 是 $f(x)$ 的一个单根.

命题 设 $a \in \mathbb{F}$ 是多项式 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 的根. 则:
(i) 若 a 是 $f(x)$ 的重根, 则 a 是 $f'(x)$ 的根;
(ii) 若 a 是 $f(x)$ 的单根, 则 a 不是 $f'(x)$ 的根.
所以, $f(x)$ 有重根的一个必要与充分条件是: $f(x)$ 与 $f'(x)$ 有公共根.

下面是一些新命题. 由于 $\mathbb{F}$ 里有无数多个元, 所以

命题 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. 设 $S \subset \mathbb{F}$, 且 S 有无数多个元. 若任取 $t \in S$, 必有 $f(t) = 0$, 则 $f(x)$ 必为零多项式. 通俗地说, 系数为 $\mathbb{F}$ 的元的多项式不可能有无数多个根, 除非这个多项式是零.

证 $f(x)$ 的次不可能是非负整数. 所以 $f(x)$ 只能是 0. ✌

由此立得

命题 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. 设 $S \subset \mathbb{F}$, 且 S 有无数多个元. 若任取 $t \in S$, 必有 $f(t) = g(t)$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是二个相同的多项式. 通俗地说, 若系数为 $\mathbb{F}$ 的元的二个多项式在无数多个地方有相同的取值, 则这二个多项式必相等.

证 考虑 $h(x) = f(x) - g(x)$, 并利用上个命题. ✌

前面已经知道, 多项式确定多项式函数. 利用上面的命题, 我们有

命题 $\mathbb{F}$ 上的多项式与 $\mathbb{F}$ 的多项式函数是一一对应的: 不但二个不同的 $\mathbb{F}$ 上的多项式给出二个不同的 $\mathbb{F}$ 的多项式函数, 而且二个不同的 $\mathbb{F}$ 的多项式函数给出二个不同的 $\mathbb{F}$ 上的多项式.

评注 以后, 我们不再区分 “多项式” 与 “多项式函数”. 从现在开始, 读者可以认为本文接下来讨论的 “多项式” 跟中学里的多项式是同一事物.

插值

本节讨论多项式插值问题.

"插值" 听上去可能比较陌生. 不过, 读者在初中一定见过这样的问题:

例 已知一次函数的图像经过点 $(-1,2)$ 与 $(1,3)$, 求其解析式.

例 已知二次函数的图像经过点 $(-1,-1)$, $(1,1)$ 与 $(2,5)$, 求其解析式.

在初中, 我们是用 "待定系数法" (*the method of undetermined coefficients*) 求解的. 它的基本思想是 "求什么, 设什么". 设此一次函数的解析式为

$$y = ax + b, \quad a \neq 0.$$

代入已知条件, 得到二元一次方程组

$$\begin{cases} 2 = -a + b, \\ 3 = a + b. \end{cases}$$

由此可解出

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{5}{2}.$$

所以此一次函数的解析式为

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

完全类似地, 设此二次函数的解析式为

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

代入已知条件, 得到三元一次方程组

$$\begin{cases} -1 = a - b + c, \\ 1 = a + b + c, \\ 5 = 4a + 2b + c. \end{cases}$$

由此可解出

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = -1.$$

所以此二次函数的解析式为

$$y = x^2 + x - 1.$$

在初中, 一般用左 y 右 x 的等式表示函数 (的解析式). 这种表示法强调因变元 (*dependent variable*) y 与自变元 (*independent variable*) x 的关系. 不过, 既然我们有 $f(x)$ 这样的记号, 那么因变元就不必写出了. 并且, 我们在前节提到, 我们不再区分多项式与多项式函数. 所以, 为方便, 我们用另一种方式叙述这二个问题:

例 求次为 1 的多项式 $f(x)$, 使 $f(-1) = 2$, $f(1) = 3$.

例 求次为 2 的多项式 $f(x)$, 使 $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 5$.

设 x_0, x_1, ⋯, x_n 是 $\mathbb{F}$ 的 $n+1$ 个互不相同的元. 这 $n+1$ 个不同的元称为 $n+1$ 个节点 (*node*). 设 y_0, y_1, ⋯, $y_n \in \mathbb{F}$. 通俗地说, 多项式插值 (*polynomial interpolation*) 的任务是: 找一个多项式 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n),$$

且适合 “附加条件”.

这里, “附加条件” 是有必要的: 如果太松, 可能找出的 $f(x)$ 不止一个; 如果太紧, 则可能找不到 $f(x)$.

例 找一个多项式 $f(x)$ 使 $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

如果不作任何别的约束, 那么 n 是奇数时, $f(x) = x^n$ 适合这些条件. 不仅如此, 下面的多项式也适合条件:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^5, \quad -x + 2x^7, \quad \frac{x + x^3 + \cdots + x^{2k-1}}{k}.$$

在初中, 我们知道, 若平面直角坐标系的三点 A, B, C 不在同一直线上, 且任意二点的连线既不与 y 轴平行也不与 y 轴重合, 则存在 (唯一的) 二次

函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) 使其图像过此三点. 假如 "附加条件" 是 "$f(x)$ 是次为 2 的多项式" 呢? 设

$$f(x)=ax^2+bx+c, \quad a\neq 0.$$

代入已知条件, 得到三元一次方程组

$$\begin{cases} -1=a-b+c, \\ 0=c, \\ 1=a+b+c. \end{cases}$$

由此可解出

$$a=0, \quad b=1, \quad c=0.$$

这与假定 $a\neq 0$ 不符. 所以, 这个条件太紧了.

有没有什么 "松紧得当的" "附加条件" 呢? 回想一下这个命题:

命题 设 a_0, b_0, a_1, b_1, ⋯, a_n, b_n 是 $\mathbb{F}$ 的元. 设 n 是非负整数. 设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad g(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i.$$

若 t_0, t_1, ⋯, t_n 是 $n+1$ 个互不相同的 $\mathbb{F}$ 的元, 且

$$f(t_0)=g(t_0), \quad f(t_1)=g(t_1), \quad \cdots, \quad f(t_n)=g(t_n),$$

则 $f(x)$ 必等于 $g(x)$. 通俗地说, 若次不高于 n (且系数为 $\mathbb{F}$ 的元) 的二个多项式若在多于 n 处取一样的值, 则这二个多项式相等.

由此, 我们可以试着作出这样的 "附加条件": 多项式的次低于节点数. 至少, 这个条件不是太松: 因为上面的命题说, 这样的多项式若存在, 必唯一.

这个 "附加条件" 一定能让我们求出这个多项式吗? 不好说.

例 如果把 $\mathbb{F}$ 跟 $\mathbb{F}[x]$ 改为 $\mathbb{Z}$ 跟 $\mathbb{Z}[x]$, 那么就没有 1 次多项式 $f(x)$ 使 $f(-1)=2$, $f(1)=3$. 为啥? 看二元一次方程组

$$\begin{cases} 2=-a+b, \\ 3=a+b. \end{cases}$$

二式相加, 可得 $5=2b$. 可是, 如果 b 是整数, 那么 $2b$ 是偶数. 偶数 $2b$ 不可能等于奇数 5 呀!

具体地说, 设次低于节点数 $n+1$ 的多项式

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{F}[x]$$

适合

$$f(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\cdots,n),$$

则可得到下面的方程组:

$$\begin{cases} y_0 = 1a_0 + x_0 a_1 + \cdots + x_0^n a_n, \\ y_1 = 1a_0 + x_1 a_1 + \cdots + x_1^n a_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ y_n = 1a_0 + x_n a_1 + \cdots + x_n^n a_n. \end{cases}$$

这是一个有 $n+1$ 个 $n+1$ 元一次方程的方程组, 且未知元是 a_0, a_1, $\cdots$, a_n. 假如我们能解出这个方程组, 且这个方程组的解 "不超出 $\mathbb{F}$ 的范围" (我们说, 上面的二元一次方程组超出了 $\mathbb{Z}$ 的范围, 但没有超出 $\mathbb{F}$ 的范围), 那么就能说明 "多项式的次低于节点数" 这个 "附加条件" 是 "松紧得当的".

可惜, 我们在初中并没有研究一般的多元一次方程组. 我们在学习二 (三) 元一次方程组的时候, 主要学习怎么用代入消元法与加减消元法解方程组, 并没有过多地讨论方程组什么时候有解与解的结构这样的问题.

我们换一个角度看问题. 首先, 我们有如下命题:

命题 设 t_0, t_1, $\cdots$, $t_{s-1} \in \mathbb{F}$ 互不相同. 则 t_0, t_1, $\cdots$, t_{s-1} $(1 \le s \le n)$ 是 n 次多项式 $f(x)$ 的根的一个必要与充分条件是: 存在 $n-s$ 次多项式 $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$f(x)=(x-t_0)(x-t_1)\cdots(x-t_{s-1})q(x).$$

证 先看充分性. 既然 $f(x)$ 能写为这种形式, 将 x 换为 t_i $(i=0,1,\cdots,s-1)$, 则有 $f(t_i)=0$.

再看必要性. 因为 t_0 是 $f(x)$ 的根, 故存在 $n-1$ 次多项式 $q_1(x)\in\mathbb{F}[x]$ 使

$$f(x)=(x-t_0)q_1(x).$$

设 t_j 是 $t_1, t_2, \cdots, t_{s-1}$ 的一个. 则 $t_j\neq t_0$. 因为 t_j 也是 $f(x)$ 的根, 故

$$(t_j-t_0)q_1(t_j)=f(t_j)=0=(t_j-t_0)0.$$

根据消去律, $q_1(t_j)=0$. 这样, $t_1, \cdots, t_{s-1}$ 这 $s-1$ 个 $\mathbb{F}$ 中元是 $q_1(x)$ 的根. 所以, 对 $q_1(x)$ 来说, 存在 $n-1-1=n-2$ 次多项式 $q_2(x)\in\mathbb{F}[x]$ 使

$$q_1(x)=(x-t_1)q_2(x) \implies f(x)=(x-t_0)(x-t_1)q_2(x),$$

且 $t_2, \cdots, t_{s-1}$ 这 $s-2$ 个 $\mathbb{F}$ 中元是 $q_2(x)$ 的根. 再将这个过程进行 $s-2$ 次, 可得到 $n-s$ 次多项式 $q_s(x)\in\mathbb{F}[x]$ 使

$$f(x)=(x-t_0)(x-t_1)\cdots(x-t_{s-1})q_s(x).$$

取 $q(x)=q_s(x)$ 即可. ✌

例 我们考虑非常特殊的情形. 如果 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 中恰有一个是 1, 而剩下的全是 0, 那这样的多项式应该长什么样呢?

以 $y_0=1, y_1=y_2=\cdots=y_n=0$ 为例. 这样, 多项式 $f(x)$ 有根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 根据上个命题, 存在多项式 $q(x)$ 使

$$f(x)=q(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

因为 $f(x)$ 的次低于 $n+1$, 而 $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ 的次为 n, 故 $q(x)$ 一定是非零的数 c, 即

$$f(x)=c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

因为 $f(x_0)=y_0=1$, 故

$$1=c(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n),$$

也就是

$$c = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)}.$$

故

$$f(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)}.$$

类似地, 适合条件 $y_1 = 1$, $y_0 = y_2 = y_3 = \cdots = y_n = 0$ 的多项式是

$$\frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n)}.$$

可以将这个多项式简单地写为

$$\prod_{\substack{0\le \ell \le n \\ \ell \ne 1}} \frac{x - x_\ell}{x_1 - x_\ell}.$$

上面的 $f(x)$ 也可以写为

$$\prod_{\substack{0\le \ell \le n \\ \ell \ne 0}} \frac{x - x_\ell}{x_0 - x_\ell}.$$

回到一般的设定 (也就是说, y_0, y_1, $\cdots$, y_n 是 $\mathbb{F}$ 的任意元). 作 $n+1$ 个多项式

$$L_i(x) = \prod_{\substack{0\le \ell \le n \\ \ell \ne i}} \frac{x - x_\ell}{x_i - x_\ell} \quad (i = 0, 1, \cdots, n).$$

不难看出, 任取 $i, j = 0, 1, \cdots, n$,

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \ne j. \end{cases}$$

所以

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

适合条件

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n),$$

且

$$\deg f(x) \le n < n + 1.$$

综合上面的事实, 我们已经证明了

命题 设 x_0, x_1, ···, x_n 是 $\mathbb{F}$ 的 $n+1$ 个互不相同的元. 设 y_0, y_1, ···, $y_n \in \mathbb{F}$. 存在唯一的多项式

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{0 \le \ell \le n \\ \ell \ne i}} \frac{x - x_\ell}{x_i - x_\ell}$$

适合条件

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n),$$

且

$$\deg f(x) < n + 1.$$

这个公式的一个名字是 "Lagrange 插值公式" (*Lagrange's interpolation formula*).

评注 我们在前面接触的线性无关的多项式组 (几乎都) 是次不等的多项式. Lagrange 插值公式告诉我们, $L_0(x)$, $L_1(x)$, ···, $L_n(x)$ 适合:

(i) $L_0(x)$, $L_1(x)$, ···, $L_n(x)$ 是线性无关的;

(ii) 任意次不高于 n 的多项式都可唯一地写为 $L_0(x)$, $L_1(x)$, ···, $L_n(x)$ 的线性组合;

(iii) $L_0(x)$, $L_1(x)$, ···, $L_n(x)$ 全为 n 次多项式.

评注 由上面的公式, 可以看出, $f(x)$ 的 n 次系数是

$$\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{0 \le \ell \le n \\ \ell \ne i}} \frac{1}{x_i - x_\ell}.$$

看上去有点复杂. 我们想个办法简单地写出 $\prod$ 符号代表的内容. 作 $n+1$ 次多项式

$$N_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n).$$

从 0, 1, ···, n 里任取一个整数 i. 那么

$$N_{n+1}(x) = (x - x_i) \prod_{\substack{0 \le \ell \le n \\ \ell \ne i}} (x - x_\ell).$$

二边求微商, 有

$$N_{n+1}(x) = \prod_{\substack{0 \le \ell \le n \\ \ell \ne i}} (x - x_\ell) + (x - x_i) \left(\prod_{\substack{0 \le \ell \le n \\ \ell \ne i}} (x - x_\ell) \right)' .$$

用 x_i 代替 x, 有

$$N'_{n+1}(x) = \prod_{\substack{0 \le \ell \le n \\ \ell \ne i}} (x_i - x_\ell) + 0,$$

即

$$\prod_{\substack{0 \le \ell \le n \\ \ell \ne i}} \frac{1}{x_i - x_\ell} = \frac{1}{N'_{n+1}(x_i)}.$$

这样, $f(x)$ 的 n 次系数可简单地写为

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{N'_{n+1}(x_i)}.$$

例 取 $n = 2$. 取

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2,$$
$$y_0 = -1, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 5.$$

计算 $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$:

$$L_0(x) = \prod_{\substack{0\le\ell\le 2\\ \ell\ne 0}} \frac{x-x_\ell}{x_0-x_\ell} = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3},$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{0\le\ell\le 2\\ \ell\ne 1}} \frac{x-x_\ell}{x_1-x_\ell} = \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1,$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{0\le\ell\le 2\\ \ell\ne 2}} \frac{x-x_\ell}{x_2-x_\ell} = \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}.$$

所以, 适合条件

$$\begin{aligned} &f(-1) = -1, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 5, \\ &\deg f(x) < n+1 = 3 \end{aligned}$$

的多项式 $f(x)$ 就是

$$\begin{aligned} &(-1)L_0(x) + 1L_1(x) + 5L_2(x) \\ =&\ -L_0(x) + L_1(x) + 5L_2(x) \\ =&\ -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 + \frac{5}{3}x^2 - \frac{5}{3} \\ =&\ x^2 + x - 1. \end{aligned}$$

这跟前面用三元一次方程组算出的答案完全一致.

例 取 $n = 3$. 在上例的基础上, 追加

$$x_3 = -2, \quad y_3 = -11.$$

我们的目标是: 找多项式 $f(x)$ 适合条件

$$\begin{aligned} &f(-1) = -1, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 5, \quad f(-2) = -11, \\ &\deg f(x) < n+1 = 4. \end{aligned}$$

在原理上, 并没有什么复杂的地方. 求出 $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$ 后, 答案就出来了:

$$\begin{aligned} f(x) = &-\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(-1-1)(-1-2)(-1+2)} + \frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{(1+1)(1-2)(1+2)} \\ &+ 5\cdot\frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(2+1)(2-1)(2+2)} - 11\cdot\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2-1)(-2-2)}. \end{aligned}$$

不过, 实践告诉我们, 拆开 4 个 3 次多项式后再相加可不是什么轻松的事儿——至少比前一个例复杂一些. 而且, 加一个节点后, $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ (跟之前相比) 都要多乘一个一次多项式. 有无稍微容易一些的算法呢?

定义 设 x_0, x_1, $\cdots$, x_n 是 $\mathbb{F}$ 的 $n+1$ 个互不相同的元. 设 y_0, y_1, $\cdots$, $y_n \in \mathbb{F}$. 定义

$$[x_i, x_j] = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \quad (i \neq j).$$

这称为 1 级差商 (*first-order divided difference*). 类似地, 当 i, j, k 互不相同时, 2 级差商是

$$[x_i, x_j, x_k] = \frac{[x_i, x_j] - [x_j, x_k]}{x_i - x_k}.$$

一般地, 当 i_0, i_1, $\cdots$, $i_{\ell-1}$ 互不相同时, $\ell-1$ 级差商定义为

$$[x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_{\ell-1}}] = \frac{[x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_{\ell-2}}] - [x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{\ell-1}}]}{x_0 - x_{\ell-1}}.$$

“差商” 可指代任意级差商. 高级差商可任意指代 ℓ 级差商, 此处 $\ell > 1$.

例 取 $n=2$. 取

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2,$$
$$y_0 = -1, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 5.$$

我们随意地计算三个 1 级差商:

$$[x_0, x_1] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = 1,$$
$$[x_0, x_2] = \frac{y_0 - y_2}{x_0 - x_2} = 2,$$
$$[x_1, x_2] = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 4.$$

由此可知

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2} = \frac{1-4}{-1-2} = 1.$$

根据 1 级差商的定义,

$$[x_j, x_i] = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} = [x_i, x_j],$$

故

$$[x_2, x_1] = [x_1, x_2] = 4.$$

所以

$$[x_0, x_2, x_1] = \frac{[x_0, x_2] - [x_2, x_1]}{x_0 - x_1} = \frac{2-4}{-1-1} = 1.$$

同样的道理,

$$[x_1, x_0] = [x_0, x_1] = 1.$$

所以

$$[x_1, x_0, x_2] = \frac{[x_1, x_0] - [x_0, x_2]}{x_1 - x_2} = \frac{1-2}{1-2} = 1.$$

我们发现, 在这些特殊的 x_i 与 y_j $(i, j = 0, 1, 2)$ 下

$$[x_0, x_1, x_2] = [x_0, x_2, x_1] = [x_1, x_0, x_2].$$

类似地, 读者还可以计算 $[x_1, x_2, x_0]$, $[x_2, x_0, x_1]$, $[x_2, x_1, x_0]$, 它们跟上面三个 2 级差商有着同样的值. 换句话说, 我们猜想, 2 级差商 $[x_i, x_j, x_k]$ 的三个文字 x_i, x_j, x_k 的次序可以任意交换, 且值不变 (当然, y_i, y_j, y_k 的次序也要交换).

幸运的事儿是, 我们没猜错:

命题 设 m 是高于 1 的整数. $m-1$ 级差商 $[x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}]$ 可表示为

$$[x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}] = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y_k}{N_m'(x_k)},$$

这里

$$N_m(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{m-1}) = \prod_{k=0}^{m-1} (x - x_k).$$

由此立得: 随意交换 x_0, x_1, $\cdots$, x_{m-1} 的次序, 若 y_0, y_1, $\cdots$, y_{m-1} 的次序也跟着改变, 得到的新 $m-1$ 级差商的值不变.

证 回想一下, ℓ 级差商 $(\ell > 1)$ 是用 $\ell - 1$ 级差商定义的. 所以, 我们用数学归纳法证明这个结论.

当 $m = 2$ 时,

$$N_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) = x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0x_1,$$

故

$$N_2'(x) = 2x - (x_0 + x_1).$$

从而

$$N_2'(x_0) = x_0 - x_1, \quad N_2'(x_1) = x_1 - x_0.$$

根据定义,

$$\begin{aligned}
[x_0, x_1] &= \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \\
&= \frac{y_0}{x_0 - x_1} - \frac{y_1}{x_0 - x_1} \\
&= \frac{y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0} \\
&= \frac{y_0}{N_2'(x_0)} + \frac{y_1}{N_2'(x_1)} \\
&= \sum_{k=0}^{2-1} \frac{y_k}{N_2'(x_k)}.
\end{aligned}$$

所以, 结论对 $m = 2$ 成立.

假设结论对 $m = \ell \geq 2$ 成立. 我们要由此推出: 结论对 $m = \ell + 1$ 也成立. x_0, x_1, $\cdots$, x_ℓ 这 $\ell + 1$ 个元的 ℓ 级差商, 按定义, 是

$$[x_0, x_1, \cdots, x_\ell] = \frac{[x_0, x_1, \cdots, x_{\ell-1}] - [x_1, x_2, \cdots, x_\ell]}{x_0 - x_\ell}.$$

这里, $[x_0, x_1, \cdots, x_{\ell-1}]$ 与 $[x_1, x_2, \cdots, x_\ell]$ 都是 $\ell - 1$ 级差商. 按归纳假设,

$$[x_0, x_1, \cdots, x_{\ell-1}] = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{y_k}{P'(x_k)},$$

$$[x_1, x_2, \cdots, x_\ell] = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{y_k}{Q'(x_k)},$$

其中

$$P(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{\ell-1}),$$
$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_\ell).$$

作

$$N_{\ell+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{\ell-1})(x - x_\ell),$$

我们观察 $N_{\ell+1}(x)$ 与 $P(x)$ (或 $Q(x)$) 的关系. 显然,

$$N_{\ell+1}(x) = P(x)(x - x_\ell).$$

二边求微商, 有

$$N'_{\ell+1}(x) = P'(x)(x - x_\ell) + P(x).$$

用 x_u $(u \neq \ell)$ 代替 x, 有

$$\begin{aligned} N'_{\ell+1}(x_u) = P'(x_u)(x_u - x_\ell) + P(x_u) &= P'(x_u)(x_u - x_\ell) \\ \Longrightarrow \ \frac{1}{P'(x_u)} &= \frac{x_u - x_\ell}{N'_{\ell+1}(x_u)}. \end{aligned}$$

同理, 若 $v \neq 0$, 则

$$\frac{1}{Q'(x_v)} = \frac{x_v - x_0}{N'_{\ell+1}(x_v)}.$$

所以

$$\begin{aligned} & [x_0, x_1, \cdots, x_{\ell-1}] - [x_1, x_2, \cdots, x_\ell] \\ = & \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{y_k}{P'(x_k)} - \sum_{k=1}^{\ell} \frac{y_k}{Q'(x_k)} \\ = & \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{y_k(x_k - x_\ell)}{N'_{\ell+1}(x_k)} + \sum_{k=1}^{\ell} \frac{-y_k(x_k - x_0)}{N'_{\ell+1}(x_k)} \\ = & \sum_{k=0}^{\ell} \frac{y_k(x_k - x_\ell)}{N'_{\ell+1}(x_k)} + \sum_{k=0}^{\ell} \frac{y_k(x_0 - x_k)}{N'_{\ell+1}(x_k)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\ell} \frac{y_k(x_k - x_\ell) + y_k(x_0 - x_k)}{N'_{\ell+1}(x_k)} \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \frac{y_k(x_0 - x_\ell)}{N'_{\ell+1}(x_k)} \\
&= (x_0 - x_\ell) \sum_{k=0}^{\ell} \frac{y_k}{N'_{\ell+1}(x_k)}.
\end{aligned}
$$

这样

$$
\begin{aligned}
[x_0, x_1, \cdots, x_\ell] &= \frac{[x_0, x_1, \cdots, x_{\ell-1}] - [x_1, x_2, \cdots, x_\ell]}{x_0 - x_\ell} \\
&= \frac{1}{x_0 - x_\ell} \cdot (x_0 - x_\ell) \sum_{k=0}^{\ell} \frac{y_k}{N'_{\ell+1}(x_k)} \\
&= \sum_{k=0}^{(\ell+1)-1} \frac{y_k}{N'_{\ell+1}(x_k)}.
\end{aligned}
$$

✌

评注 前面, 我们知道, 用 Lagrange 插值公式算出的次不高于 n 的多项式的 n 次系数是

$$
\sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{N'_{n+1}(x_i)},
$$

其中

$$
N_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).
$$

用差商的语言, 有: $f(x)$ 的 n 次系数可用 n 级差商

$$
[x_0, x_1, \cdots, x_n]
$$

表示.

现在, 我们来看看差商在多项式插值里的用处. 设 x_0, x_1, $\cdots$, x_n 是 $\mathbb{F}$

的 $n+1$ 个互不相同的元. 设 y_0, y_1, ···, $y_n \in \mathbb{F}$. 作 $n+1$ 个多项式:

$$\begin{aligned}
&N_0(x) = 1,\\
&N_1(x) = x - x_0,\\
&N_2(x) = (x-x_0)(x-x_1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&N_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).
\end{aligned}$$

因为 $N_0(x)$, $N_1(x)$, ···, $N_n(x)$ 的次分别是 0, 1, ···, n, 所以:

(i) $N_0(x)$, $N_1(x)$, ···, $N_n(x)$ 是线性无关的;

(ii) 任意次不高于 n 的多项式都可唯一地写为 $N_0(x)$, $N_1(x)$, ···, $N_n(x)$ 的线性组合.

由前面的 Lagrange 插值公式可知, 存在一个次不高于 n 的多项式 $f(x)$ 使

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n).$$

对这个 $f(x)$ 而言, 存在 (唯一的) c_0, c_1, ···, $c_n \in \mathbb{F}$ 使

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i N_n(x).$$

我们的任务就是找出 c_0, c_1, ···, c_n. 先从 c_n 看起. 显然, 左侧的 n 次系数是 $[x_0, x_1, \cdots, x_n]$, 而右侧的 n 次系数是 c_n, 故

$$c_n = [x_0, x_1, \cdots, x_n].$$

找出 c_n, 还有 n 个系数要找呢! 接下来的系数该怎么找呢?

命题 设 x_0, x_1, ···, x_n 是 $\mathbb{F}$ 的 $n+1$ 个互不相同的元 $(n \geq 1)$. 设 y_0, y_1, ···, $y_n \in \mathbb{F}$. 作 $n+1$ 个多项式:

$$\begin{aligned}
&N_0(x) = 1,\\
&N_1(x) = x - x_0,\\
&N_2(x) = (x-x_0)(x-x_1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&N_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).
\end{aligned}$$

由 Lagrange 插值公式可知, 存在一个次不高于 n 的多项式 $f(x)$ 使

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n).$$

对这个 $f(x)$ 而言, 存在 (唯一的) c_0, c_1, $\cdots$, $c_n \in \mathbb{F}$ 使

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i N_n(x).$$

这些系数有着简单的形式:

$$\begin{aligned} &c_0 = y_0, \\ &c_i = [x_0, x_1, \cdots, x_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned}$$

证 用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时,

$$\begin{aligned} f(x) &= y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\ &= y_0 \frac{(x - x_0) + (x_0 - x_1)}{x_0 - x_1} - y_1 \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} \\ &= y_0 + y_0 \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} - y_1 \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} \\ &= y_0 + \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x - x_0) \\ &= y_0 N_0(x) + [x_0, x_1] N_1(x). \end{aligned}$$

这样, 结论对 $n = 1$ 成立.

设结论对 $n = \ell \geq 1$ 成立. 我们看 $n = \ell + 1$ 的情形.

由 Lagrange 插值公式可知, 存在一个次不高于 $\ell + 1$ 的多项式 $f(x)$ 使

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, \ell + 1).$$

对这个 $f(x)$ 而言, 存在 (唯一的) c_0, c_1, $\cdots$, $c_\ell, c_{\ell+1} \in \mathbb{F}$ 使

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\ell} c_i N_i(x) + c_{\ell+1} N_{\ell+1}(x).$$

左侧的 $\ell + 1$ 次系数是 $[x_0, x_1, \cdots, x_\ell, x_{\ell+1}]$, 右侧的 $\ell + 1$ 次系数是 $c_{\ell+1}$, 故

$$c_{\ell+1} = [x_0, x_1, \cdots, x_\ell, x_{\ell+1}].$$

作

$$g(x) = f(x) - [x_0, x_1, \cdots, x_\ell, x_{\ell+1}]N_{\ell+1}(x).$$

则

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\ell} c_i N_i(x),$$

且 $i \neq \ell + 1$ 时,

$$g(x_i) = f(x_i) - [x_0, x_1, \cdots, x_\ell, x_{\ell+1}]0 = y_i.$$

这个 $g(x)$ 的次不会高于 ℓ. 并且, $i = 0$, 1, ⋯, ℓ 时, $g(x_i) = y_i$.

由 Lagrange 插值公式, 存在一个次不高于 ℓ 的多项式 $h(x)$ 使

$$h(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, \ell).$$

对这个 $h(x)$ 而言, 存在 (唯一的) d_0, d_1, ⋯, $d_\ell \in \mathbb{F}$ 使

$$h(x) = \sum_{i=0}^{\ell} d_i N_i(x).$$

根据归纳假设,

$$\begin{aligned} & d_0 = y_0, \\ & d_i = [x_0, x_1, \cdots, x_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, \ell). \end{aligned}$$

由插值的唯一性, $g(x) = h(x)$. 所以

$$\begin{aligned} & c_0 = d_0 = y_0, \\ & c_i = d_i = [x_0, x_1, \cdots, x_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, \ell). \end{aligned}$$

所以, $n = \ell + 1$ 时, 结论是正确的. ✌

为方便, 记 $[x_i] = y_i$, 称其为 x_i 的 0 级差商. 我们证明了

命题 设 x_0, x_1, ⋯, x_n 是 $\mathbb{F}$ 的 $n+1$ 个互不相同的元. 设 y_0, y_1, ⋯, $y_n \in \mathbb{F}$. 存在唯一的多项式

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{n}[x_0, x_1, \cdots, x_i]\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j) \\ &= [x_0] + [x_0, x_1](x-x_0) + \cdots + [x_0, x_1, \cdots, x_n](x-x_0) \\ &\quad \cdot (x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

适合条件

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n),$$

且

$$\deg f(x) < n+1.$$

这个公式的一个名字是 "Newton 插值公式" (*Newton's interpolation formula*).

我们举三个具体的例帮读者消化这个 Newton 插值公式.

例 求次不高于 1 的多项式 $f(x)$, 使 $f(-1) = 2$, $f(1) = 3$.

这里, $n = 1$, 且

$$\begin{aligned} x_0 &= -1, \quad x_1 = 1, \\ y_0 &= 2, \quad y_1 = 3. \end{aligned}$$

不难算出

$$\begin{aligned} [x_0] &= y_0 = 2, \\ [x_0, x_1] &= \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

所以

$$f(x) = 2 + \frac{1}{2}(x - (-1)) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

例 求次不高于 2 的多项式 $f(x)$, 使 $f(-1)=-1$, $f(1)=1$, $f(2)=5$.

这里, $n=2$, 且

$$x_0=-1,\quad x_1=1,\quad x_2=2,$$
$$y_0=-1,\quad y_1=1,\quad y_2=5.$$

不难算出

$$\begin{aligned}
&[x_0]=y_0=-1,\\
&[x_0,x_1]=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}=1,\\
&[x_1,x_2]=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=4,\\
&[x_0,x_1,x_2]=\frac{[x_0,x_1]-[x_1,x_2]}{x_0-x_2}=1.
\end{aligned}$$

所以

$$f(x)=-1+(x+1)+(x+1)(x-1)=x^2+x-1.$$

前面, 我们用 Lagrange 插值公式, 得到了一样的结果, 不过计算过程稍繁.

实操时, 往往用名为 “差商表” 的表进行计算. 当 $n=2$ 时, 它长这样:

$$\begin{array}{c|lll}
x_2 & [x_2] & & \\
x_1 & [x_1] & [x_1,x_2] & \\
x_0 & [x_0] & [x_0,x_1] & [x_0,x_1,x_2]
\end{array}$$

在这个问题里, 差商表如下:

$$\begin{array}{c|ccc}
2 & 5 & & \\
1 & 1 & 4 & \\
-1 & -1 & 1 & 1
\end{array}$$

例 求次不高于 3 的多项式 $f(x)$, 使 $f(-1)=-1$, $f(1)=1$, $f(2)=5$, $f(-2)=-11$.

这里, $n=3$, 且

$$x_0=-1,\quad x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=-2$$
$$y_0=-1,\quad y_1=1,\quad y_2=5,\quad y_3=-11.$$

画出 $n=3$ 时的差商表:

$$\begin{array}{c|cccc}
x_3 & [x_3] & & & \\
x_2 & [x_2] & [x_2,x_3] & & \\
x_1 & [x_1] & [x_1,x_2] & [x_1,x_2,x_3] & \\
x_0 & [x_0] & [x_0,x_1] & [x_0,x_1,x_2] & [x_0,x_1,x_2,x_3]
\end{array}$$

我们已经在上个例里算出了 $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_0,x_1,x_2]$:

$$\begin{array}{c|cccc}
x_3 & [x_3] & & & \\
2 & 1 & [x_2,x_3] & & \\
1 & 1 & 4 & [x_1,x_2,x_3] & \\
-1 & -1 & 1 & 1 & [x_0,x_1,x_2,x_3]
\end{array}$$

我们的目标是算出 $[x_0,x_1,x_2,x_3]$. 所以, 我们要算出 $[x_1,x_2,x_3]$; 所以, 我们要算出 $[x_2,x_3]$; 所以, 我们要算出 $[x_3]$. 不过, $[x_3]$ 是已知的, 它就是 y_3, 也就是 -11.

列出算式:

$$\begin{aligned}
&x_3=-2,\\
&[x_3]=y_3=-11,\\
&[x_2,x_3]=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}=4,\\
&[x_1,x_2,x_3]=\frac{[x_1,x_2]-[x_2,x_3]}{x_1-x_3}=0,\\
&[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{[x_0,x_1,x_2]-[x_1,x_2,x_3]}{x_0-x_3}=1.
\end{aligned}$$

此时, 差商表如下:

$$\begin{array}{c|cccc}
-2 & -11 & & & \\
2 & 1 & 4 & & \\
1 & 1 & 4 & 0 & \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) = & -1 + (x+1) + (x+1)(x-1) + (x+1)(x-1)(x-2) \\ & = (x^2+x-1) + (x^3-2x^2-x+2) \\ & = x^3 - x^2 + 1. \end{aligned}$$

用 Lagrange 插值公式, 有

$$\begin{aligned} f(x) = & -\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(-1-1)(-1-2)(-1+2)} + \frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{(1+1)(1-2)(1+2)} \\ & + 5 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(2+1)(2-1)(2+2)} - 11 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2-1)(-2-2)}. \end{aligned}$$

有兴趣的读者可展开上式, 以验证我们的计算是否正确. 由此可见, Newton 插值公式在实操上优于 Lagrange 插值公式.

我们以带余除法与插值的关系结束本节.

命题 设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是 $\mathbb{F}$ 的 $n+1$ 个互不相同的元. 设

$$d(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \in \mathbb{F}[x]$$

是 $n+1$ 次多项式. 由带余除法知, 任取 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 存在唯一的 $q(x)$, $r(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$f(x) = q(x)d(x) + r(x), \quad \deg r(x) < n+1.$$

余式 $r(x)$ 可具体地写出:

$$r(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{0 \le \ell \le n \\ \ell \ne i}} \frac{x - x_\ell}{x_i - x_\ell}$$

或

$$r(x) = \sum_{i=0}^{n} [x_0, x_1, \cdots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j),$$

其中差商的 y_i 取 $f(x_i)$, $i = 0, 1, \cdots, n$.

证 由带余除法知, 任取 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 存在唯一的 $q(x)$, $r(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$f(x) = q(x)d(x) + r(x), \quad \deg r(x) < n+1.$$

用 x_i 代替 x, 有

$$f(x_i) = q(x_i)d(x_i) + r(x_i) = r(x_i).$$

因为 $\deg r(x) < n+1$, 故由插值公式即得待证命题. ✌

广义二项系数

本节讨论广义二项系数.

回忆一下: 正整数 n 的阶乘 $n!$ 是前 n 个正整数的积; 0 的阶乘 $0!$ 是 1.

定义 设 n 是整数. 设 $r \in \mathbb{F}[x]$. 定义广义二项系数 (*generalized binomial coefficient*) 如下:

$$\binom{r}{n} = \begin{cases} \frac{1}{n!}(r-0)(r-1)\cdots(r-(n-1)), & n > 0; \\ 1, & n = 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

广义二项系数在计数上是有用的.

从 m 人里选出 n 人 ($1 \leq n \leq m$, 且任意二个人都不同), 并按一定的顺序让他们坐在 n 个座位上. 一个座位上至多坐一人, 且每一个选出的人都要坐在座位上. 共有多少种不同的安排座位的方法?

不难看出, 我们可以分步安排座位. 可以从 m 人里选 1 人坐第 1 个座位, 再从剩下的 $m-1$ 人里选 1 人坐第 2 个座位……最后从剩下的 $m-(n-1)$ 人里选 1 人坐第 n 个座位. 所以, 共有

$$m \cdot (m-1) \cdot \cdots \cdot (m-(n-1))$$

种不同的安排座位的方法.

前面, 我们是直接按座位数选人坐座位; 现在我们先选 n 人, 再让他们坐在这 n 个座位上. 设从 m 人里选 n 人有 C 种选法. 给这 n 人安排座位, 有多少种不同的方法呢? 跟上面的推理完全一致: 从这 n 人里选 1 人坐第 1 个座位, 再从剩下的 $n-1$ 人里选 1 人坐第 2 个座位……最后剩下的 1 人坐第 n 个座位. 所以, 有

$$n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1 = n!$$

种不同的为这 n 人安排座位的方法. 进而共有

$$C \cdot n!$$

种不同的安排座位的方法.

综上, 我们有

$$m\cdot(m-1)\cdot\dots\cdot(m-(n-1))=C\cdot n!.$$

由此可得, 从 m 人里选 n 人有

$$C=\frac{m\cdot(m-1)\cdot\dots\cdot(m-(n-1))}{n!}=\binom{m}{n}$$

种选法.

一般地, 我们有

命题 从 m 个不同的文字里选 n 个的选法数为广义二项系数

$$\binom{m}{n}=\frac{m(m-1)\cdots(m-(n-1))}{n!}=\frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

证 把上面的 "人" 换为 "文字", 再拟人化文字, 使其 "坐在座位上", 即可套用上面的推理, 从而得到第一个等号. 至于第二个等号, 直接计算即可:

$$\begin{aligned}&\frac{m(m-1)\cdots(m-(n-1))}{n!}\\=&\frac{m(m-1)\cdots(m-(n-1))(m-n)(m-n-1)\cdots1}{n!(m-n)!}\\=&\frac{m!}{n!(m-n)!}.\end{aligned}$$

✌

命题 广义二项系数适合如下性质:

(i) $n\geq 0$ 时, $\binom{x}{n}$ 是首项系数为 $\frac{1}{n!}$ 的 n 次多项式, 前 n 个非负整数恰为其根, 且

$$\binom{n}{n}=1;$$

(ii) 任取 $n\in\mathbb{Z}$, 必有

$$\binom{x+1}{n}=\binom{x}{n}+\binom{x}{n-1};$$

(iii) 若 m, n 是非负整数, 则

$$\sum_{\ell=0}^{m-1}\binom{\ell}{n}=\binom{m}{n+1};$$

(iv) 任取 $n\in\mathbb{Z}$, 必有

$$\binom{-x}{n}=(-1)^n\binom{x+n-1}{n};$$

(v) 若 t, n 是整数, 则

$$\binom{t}{n}\in\mathbb{Z}.$$

证 (i) $\binom{x}{0}=1$ 是 0 次多项式, 无根, 首项系数为 1, 且 $\binom{0}{0}=1$. $n>0$ 时,

$$\binom{x}{n}=\frac{1}{n!}(x-0)(x-1)\cdots(x-(n-1)),$$

故 $\binom{x}{n}$ 是首项系数为 $\frac{1}{n!}$ 的 n 次多项式, 且 0, 1, $\cdots$, $n-1$ 恰为 $\binom{x}{n}$ 的根. 最后, 不难验证

$$\binom{n}{n}=\frac{(n-0)(n-1)\cdots(n-(n-1))}{n!}=1.$$

(ii) 若 $n<0$, 则 $\binom{x+1}{n}$, $\binom{x}{n}$, $\binom{x}{n-1}$ 都是 0, 显然. 若 $n=0$, 则 $\binom{x+1}{n}$, $\binom{x}{n}$ 都是 1, 而 $\binom{x}{n-1}$ 都是 0, 显然. 若 $n=1$, 则 $\binom{x+1}{n}$, $\binom{x}{n}$, $\binom{x}{n-1}$ 分别是 $x+1$, x, 1, 显然. 若 $n\geq 2$, 则

$$\begin{aligned}
&\binom{x}{n}+\binom{x}{n-1}\\
=&\frac{x(x-1)\cdots(x-(n-2))(x-(n-1))}{n!}+\frac{x(x-1)\cdots(x-(n-2))}{(n-1)!}\\
=&\frac{x(x-1)\cdots(x-(n-2))(x-(n-1))}{n!}+\frac{x(x-1)\cdots(x-(n-2))(n)}{n!}\\
=&\frac{x(x-1)\cdots(x-(n-2))(x-(n-1)+n)}{n!}\\
=&\frac{(x+1)x(x-1)\cdots(x-(n-2))}{n!}\\
=&\frac{(x+1)(x+1-1)(x+1-2)\cdots(x+1-(n-1))}{n!}\\
=&\binom{x+1}{n}.
\end{aligned}$$

(iii) 由 (ii) 知

$$\binom{\ell}{n} = \binom{\ell+1}{n+1} - \binom{\ell}{n+1}.$$

所以

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{\ell}{n} &= \sum_{\ell=0}^{m-1} \left(-\binom{\ell}{n+1} + \binom{\ell+1}{n+1} \right) \\
&= -\binom{0}{n+1} + \binom{1}{n+1} - \binom{1}{n+1} + \binom{2}{n+1} \\
&\qquad + \cdots - \binom{m-1}{n+1} + \binom{m}{n+1} \\
&= -\binom{0}{n+1} + \binom{m}{n+1} \\
&= \binom{m}{n+1}.
\end{aligned}$$

(iv) 当 $n<0$ 时, $\binom{-x}{n}$ 与 $\binom{x+n-1}{n}$ 都是 0. 当 $n=0$ 时, $\binom{-x}{n}$ 与 $\binom{x+n-1}{n}$ 都是 1, 且 $(-1)^n=1$. 当 $n>0$ 时,

$$\begin{aligned}
\binom{-x}{n} &= \frac{(-x)(-x-1)\cdots(-x-(n-1))}{n!} \\
&= (-1)^n \frac{x(x+1)\cdots(x+(n-1))}{n!} \\
&= (-1)^n \frac{(x+n-1)(x+n-1-1)\cdots(x+n-1-(n-1))}{n!} \\
&= (-1)^n \binom{x+n-1}{n}.
\end{aligned}$$

(v) 若 $n<0$, 则 $\binom{t}{n}=0\in\mathbb{Z}$. 若 $n=0$, 则 $\binom{t}{n}=1\in\mathbb{Z}$. 下面考虑 $n\geq 1$ 的情形.

我们先说明, 当 t 是非负整数时, $\binom{t}{n}\in\mathbb{Z}$.

对 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, $\binom{t}{n}=t\in\mathbb{Z}$.

设 $n=s\geq 1$ 时, $\binom{t}{n}\in\mathbb{Z}$. 考虑 $n=s+1$ 的情形. 由 (iii) 可知

$$\binom{t}{s+1} = \sum_{\ell=0}^{t-1} \binom{\ell}{s}.$$

根据归纳假设, $\binom{\ell}{s}$ ($\ell = 0, 1, \cdots, t-1$) 都是整数, 故它们的和 $\binom{t}{s+1}$ 也是整数. 所以, $n = s+1$ 时, $\binom{t}{n} \in \mathbb{Z}$.

现在考虑 t 为负整数的情形. 由 (iv) 可知

$$\binom{t}{n} = (-1)^n \binom{-t+n-1}{n} \in \mathbb{Z}.$$

综上, 若 t, n 是整数, 则 $\binom{t}{n} \in \mathbb{Z}$. ✌

性质 (i) (ii) 有计数相关的解释. 下面我们为读者提供二例.

例 (i) 表明, 从 n 个不同的文字里选 n 个的选法数是 1. 这是显然的, 因为所有的文字都被选中了, 也没得选.

例 此例有 "生活的气息". 由 (ii) 可知,

$$\binom{7}{3} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3}.$$

据说在中华人民共和国东部的浙江省, 参加 "普通高等学校招生全国统一考试" (*Nationwide Unified Examination for Admissions to General Universities and Colleges*) 的人, 除了有必考的语文、数学、外语, 还要从物理、化学、生物、技术、政治、历史、地理这 7 个科目里选择 3 个作为选考科目. 由于物理是 "很有挑战性的科目", 故有不少人不选物理. 上式右侧的 $\binom{6}{2}$ 表示选择物理的选法数, 而 $\binom{6}{3}$ 表示不选物理的选法数. 因为人要么选物理, 要么不选, 故它们的和就是 7 选 3 的选法数.

命题 设 n 是非负整数. 广义二项系数适合如下性质:

(vi) 任意次不高于 n 的多项式都可唯一地写为 $\binom{x}{0}$, $\binom{x}{1}$, $\cdots$, $\binom{x}{n}$ 的线性组合;

(vii) 设 $c_0, c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{F}$. 设

$$f(x) = c_0\binom{x}{0} + c_1\binom{x}{1} + \cdots + c_n\binom{x}{n}.$$

若 $c_0, c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{Z}$, 则任取 $t \in \mathbb{Z}$, 必有 $f(t) \in \mathbb{Z}$; 若 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 不全是整数, 则存在整数 u 使 $f(u)$ 不是整数. 换句话说, 任取 $t \in \mathbb{Z}$, 必有 $f(t) \in \mathbb{Z}$ 的一个必要与充分条件是: $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 全是整数.

证 (vi) 注意到 $\binom{x}{0}$, $\binom{x}{1}$, ⋯, $\binom{x}{n}$ 的次分别是 0, 1, ⋯, n.

(vii) 设 $c_0, c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{Z}$. 设 $t \in \mathbb{Z}$. 由 (v), $\binom{t}{0}$, $\binom{t}{1}$, ⋯, $\binom{t}{n}$ 都是整数, 故 $f(t)$ 也是整数.

设 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 不全是整数. 这样, 存在 ℓ 使 $c_0, c_1, \cdots, c_{\ell-1}$ 这 ℓ 个数全为整数, 而 c_ℓ 不是整数 (从左往右, 一个一个地看). 那么

$$\begin{aligned} f(\ell) &= \underbrace{c_0\binom{\ell}{0} + c_1\binom{\ell}{1} + \cdots + c_{\ell-1}\binom{\ell}{\ell-1}}_{\ell \text{ terms}} + c_\ell\binom{\ell}{\ell} \\ &\qquad + \underbrace{c_{\ell+1}\binom{\ell}{\ell+1} + \cdots + c_n\binom{\ell}{n}}_{(n-\ell) \text{ terms}} \\ &= (\text{an integer } q) + c_\ell + 0 \\ &= q + c_\ell. \end{aligned}$$

我们说, $f(\ell)$ 不是整数. 用反证法. 若 $f(\ell)$ 是整数, 因为 q 也是整数, 故 $c_\ell = f(\ell) - q$ 是整数, 矛盾! ✌

例 我们知道, 若多项式 $f(x)$ 的系数全为整数, 则 $t \in \mathbb{Z}$ 时 $f(t) \in \mathbb{Z}$. 不过, 反过来就不对了. 在中学, 读者也许知道 n 是整数时 $\frac{n(n+1)}{2}$ 也是整数: n 与 $n+1$ 必一奇一偶, 故积是偶数, 从而被 2 除后仍为整数. 现在可以这么看:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} = \binom{n+1}{2}.$$

下面我们介绍二个与广义二项系数有关的和. 不过, 我们先介绍一个用完就丢的工具.

定义 固定某 $h \in \mathbb{F}[x]$. 设 n 是非负整数, $r \in \mathbb{F}[x]$. 定义

$$r^{[n]} = \begin{cases} (r-0)(r-h)\cdots(r-(n-1)h), & n > 0; \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

不难看出,

$$r^{[n+1]} = r^{[n]}(r - nh).$$

若 $h = 0$, $r^{[n]}$ 就变为 r 的 n 次幂. 若 $h = 1$, $r^{[n]}$ 就变为 $n!\binom{x}{n}$.

命题 设 $r, s \in \mathbb{F}[x]$. 设 n 是非负整数. 则

$$(\bigstar) \qquad (r+s)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^{[n-k]} s^{[k]}.$$

取 $h=0$, 得到二项展开 (*binomial expansion*):

$$(\mathrm{BE}) \qquad (r+s)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^{n-k} s^{k}.$$

取 $h=1$, 得

$$n!\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k)!k! \binom{r}{n-k}\binom{s}{k}.$$

二边同乘 $\frac{1}{n!}$, 再利用

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

可得 Vandermonde 恒等式 (*Vandermonde's identity*):

$$(\mathrm{VI}) \qquad \binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{n-k}\binom{s}{k}.$$

证 用数学归纳法. 当 $n=0$ 时, ($\bigstar$) 的左侧是 1, 右侧是 $1\cdot 1\cdot 1$. 当 $n=1$ 时, ($\bigstar$) 的左侧是 $r+s$, 右侧是 $1\cdot r\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot s$.

设 $n=\ell\geq 1$ 时, ($\bigstar$) 正确, 即

$$(\bigstar) \qquad (r+s)^{[\ell]} = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} r^{[\ell-k]} s^{[k]}.$$

现在, 考虑 $n=\ell+1$ 的情形:

$$\begin{aligned}
&(r+s)^{[\ell+1]}\\
&= (r+s)^{[\ell]}(r+s-\ell h)\\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} r^{[\ell-k]} s^{[k]}(r+s-\ell h)\\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} r^{[\ell-k]} s^{[k]}(r+s-(\ell-k+k)h)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} r^{[\ell-k]} s^{[k]} ((r-(\ell-k)h)+(s-kh)) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (r^{[\ell-k]}(r-(\ell-k)h) s^{[k]} + r^{[\ell-k]} s^{[k]} (s-kh)) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (r^{[\ell-k+1]} s^{[k]} + r^{[\ell-k]} s^{[k+1]}) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} r^{[\ell+1-k]} s^{[k]} + \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} r^{[\ell-k]} s^{[k+1]} \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} r^{[\ell+1-k]} s^{[k]} + \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k+1-1} r^{[\ell+1-(k+1)]} s^{[k+1]} \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} r^{[\ell+1-k]} s^{[k]} + \sum_{k=1}^{\ell+1} \binom{\ell}{k-1} r^{[\ell+1-k]} s^{[k]} \\
&= \sum_{k=0}^{\ell+1} \binom{\ell}{k} r^{[\ell+1-k]} s^{[k]} + \sum_{k=0}^{\ell+1} \binom{\ell}{k-1} r^{[\ell+1-k]} s^{[k]} \\
&= \sum_{k=0}^{\ell+1} \left(\binom{\ell}{k} + \binom{\ell}{k-1} \right) r^{[\ell+1-k]} s^{[k]} \\
&= \sum_{k=0}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{k} r^{[\ell+1-k]} s^{[k]}.
\end{aligned}
$$

✌

评注 Too cruel though it is, let's say *farewell* to $r^{[n]}$. We will not use $r^{[n]}$ any longer from this moment forward. It is born to be a good old tool for us. May $r^{[n]}$ and its soul rest in peace!

例 (VI) 也有计数相关的解释. 老规矩, 先写下算式:

$$\binom{7}{3} = \binom{3}{3}\binom{4}{0} + \binom{3}{2}\binom{4}{1} + \binom{3}{1}\binom{4}{2} + \binom{3}{0}\binom{4}{3}.$$

回到中华人民共和国东部的浙江省. 回到 “普通高等学校招生全国统一考试”. 前面提到, 在那儿, 参加考试的人从 7 科目里选 3 个. 政治、历史、地理是偏 “阿先生” (*arts*) 的; 物理、化学、生物、技术是偏 “赛先生” (*science*) 的.

7 选 3 可以这么选:

(i) 选 3 个阿先生与 0 个赛先生: $\binom{3}{3}\binom{4}{0}$;

(ii) 或者, 选 2 个阿先生与 1 个赛先生: $\binom{3}{2}\binom{4}{1}$;

(iii) 或者, 选 1 个阿先生与 2 个赛先生: $\binom{3}{1}\binom{4}{2}$;

(iv) 或者, 选 0 个阿先生与 3 个赛先生: $\binom{3}{0}\binom{4}{3}$.

把这 4 种情形下的选法数相加, 就是 $\binom{7}{3}$.

求和公式

本节讨论求和公式 (*summation formula*) 问题: 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 求

$$S(n) = \sum_{\ell=0}^{n-1} f(\ell) = f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1).$$

例 相信大家应该听说过德意志数学家 Carl Friedrich Gauß. 1787 年, Gauß 还只是一个 10 岁的孩子. 据说, 当时他的数学教师给全班同学出了这样的算术题:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = ?$$

这里, 后一个数比前一个数多 1, 且共有 100 个数. 教师刚写完问题, Gauß 就算出, 答案是 5 050. 他的同学还在一个一个地加, 算了很久, 还没算对.

Gauß 是怎么快速算出答案的呢? 设

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100.$$

因为加法适合交换律, 故

$$S = 100 + 99 + 98 + \cdots + 1.$$

所以

$$\begin{aligned} 2S &= (1+100) + (2+99) + (3+98) + \cdots + (100+1) \\ &= \underbrace{101 + 101 + 101 + \cdots + 101}_{\text{a hundred 101's}} \\ &= 100 \cdot 101 \\ &= 10\,100. \end{aligned}$$

由此可得

$$S = \frac{10\,100}{2} = 5\,050.$$

如果记 $f(x) = x + 1$, 则

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 \\ &= f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(100-1) \\ &= \sum_{\ell=0}^{100-1} f(\ell). \end{aligned}$$

考虑更一般的情形. 设 $f(x)=a+bx$. 记

$$S(n)=f(0)+f(1)+\cdots+f(n-1).$$

类似地, 把右侧倒着写:

$$S(n)=f(n-1)+f(n-1)+\cdots+f(0).$$

因为

$$f(k)+f(n-1-k)=a+bk+a+b(n-1-k)=2a+b(n-1),$$

故

$$\begin{aligned}&2S(n)\\=&(f(0)+f(n-1))+(f(1)+f(n-2))+\cdots+(f(n-1)+f(0))\\=&n(2a+b(n-1)),\end{aligned}$$

即

$$S(n)=\frac{n(2a+b(n-1))}{2}=\left(a-\frac{b}{2}\right)n+\frac{b}{2}n^2.$$

我们还可以看出: $S(n)$ 是多项式, 且

$$\deg S(n)=\deg f(n)+1.$$

上面讨论了当 $f(x)$ 的次不高于 1 时如何求 $S(n)$. 那么, 当 $f(x)$ 的次高于 1 时, 怎么找 $S(n)$? 它还是多项式吗?

在求和前, 我们看 $S(n)$ 适合什么性质. $S(n)$ 是 $f(0)$, $f(1)$, $\cdots$, $f(n-1)$ 这 n 个数的和. 因为 0 个数的和是 0, 故 $S(0)=0$. 同时, 不难看出, $S(n+1)$ 比 $S(n)$ 多出 $f(n)$, 也即

$$S(n+1)-S(n)=f(n).$$

反过来, 设 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{F}$ 的函数 $W(n)$ 适合 $W(0)=0$ 与 $W(n+1)-W(n)=f(n)$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{n-1} f(\ell) &= \sum_{\ell=0}^{n-1}(W(\ell+1)-W(\ell)) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} W(\ell+1)-\sum_{\ell=0}^{n-1} W(\ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} W(\ell)-\sum_{\ell=0}^{n-1} W(\ell) \\ &= W(n)-W(0) \\ &= W(n).\end{aligned}$$

这样, 任给 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$, 若我们能找到适合条件 $S(0)=0$ 与 $S(x+1)-S(x)=f(x)$ 的多项式, 则

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} f(\ell)=S(n).$$

命题 设 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ 是 m 次多项式. 存在唯一的 $m+1$ 次多项式 $F(x)\in\mathbb{F}[x]$ 适合条件:

(i) $F(0)=0$;

(ii) $F(x+1)-F(x)=f(x)$.

证 先看存在性. 若 $f(x)=0$, 则 $F(x)=0$ 显然适合 (i) (ii), 且

$$\deg F(x)=-\infty=-\infty+1=\deg f(x)+1.$$

设 $m\geq 0$. 根据广义二项系数的性质, 存在 $m+1$ 个 $\mathbb{F}$ 中元 $c_0, \cdots, c_m$ 使

$$f(x)=\sum_{\ell=0}^{m} c_\ell\binom{x}{\ell}, \quad c_m\neq 0.$$

(读者可思考: 若 $c_m=0$, $f(x)$ 还能是 m 次多项式吗?) 作多项式

$$F(x)=\sum_{\ell=0}^{m} c_\ell\binom{x}{\ell+1}\in\mathbb{F}[x].$$

显然 $\deg F(x)=m+1$. 验证 (i):

$$F(0)=\sum_{\ell=0}^{m} c_\ell \binom{0}{\ell+1}=\sum_{\ell=0}^{m} 0=0.$$

验证 (ii):

$$\begin{aligned}
F(x+1)-F(x) &= \sum_{\ell=0}^{m} c_\ell \binom{x+1}{\ell+1}-\sum_{\ell=0}^{m} c_\ell \binom{x}{\ell+1} \\
&= \sum_{\ell=0}^{m} c_\ell \left(\binom{x+1}{\ell+1}-\binom{x}{\ell+1}\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{m} c_\ell \binom{x}{\ell} \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

再看唯一性. 设 $G(x)\in\mathbb{F}[x]$ 是 $m+1$ 次多项式, 并适合条件 $G(0)=0$ 与 $G(x+1)-G(x)=f(x)$. 作

$$H(x)=F(x)-G(x).$$

则 $H(0)=0$, $H(x+1)-H(x)=0$. 所以, r 为非负整数时, $H(r)=0$. 从而 $H(x)$ 一定是零多项式, 即 $F(x)=G(x)$. ✌

例 记 $f(x)=x^2$. 我们求

$$S(n)=f(0)+f(1)+\cdots+f(n-1)=\sum_{\ell=0}^{n-1} f(\ell).$$

由上个命题可知, 存在唯一的次为 3 的多项式 $F(x)$ 使 $F(0)=0$, $F(x+1)-F(x)=f(x)$, 且 $S(n)=F(n)$.

可以用插值的思想求 $F(x)$. 取 x_0, x_1, x_2, x_3 为 0, 1, -1, 2. 不难算出:

$$\begin{aligned}
y_0 &= F(0)=0, \\
y_1 &= F(1)=F(0)+f(0)=0, \\
y_2 &= F(-1)=F(0)-f(-1)=-1, \\
y_3 &= F(2)=F(1)+f(1)=1.
\end{aligned}$$

注意到 $y_0=y_1=0$, 故可以考虑 Lagrange 插值 (只要算 $L_2(x)$ 与 $L_3(x)$):

$$\begin{aligned}
L_2(x)&=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)}=-\frac{x(x-1)(x-2)}{6},\\
L_3(x)&=\frac{(x-0)(x-1)(x+1)}{(2-0)(2-1)(2+1)}=\frac{x(x-1)(x+1)}{6},\\
F(x)&=y_2L_2(x)+y_3L_3(x)=\frac{x(x-1)(2x-1)}{6}.
\end{aligned}$$

当然, 也可利用 Newton 插值. 作出差商表:

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & & & \\
-1 & -1 & \frac{2}{3} & & \\
1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}
\end{array}$$

故

$$\begin{aligned}
F(x)&=[0]+[0,1](x-0)+[0,1,-1](x-0)(x-1)\\
&\qquad+[0,1,-1,2](x-0)(x-1)(x+1)\\
&=-\frac{1}{2}x(x-1)+\frac{1}{3}x(x-1)(x+1)\\
&=\frac{x(x-1)(2x-1)}{6}.
\end{aligned}$$

综上, 我们有

$$\sum_{\ell=0}^{n-1}\ell^2=0^2+1^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

其实, 我们可以在此处结束本节. 设 $f(x)$ 是 n 次多项式. 上面的命题告诉我们, 存在唯一的 $n+1$ 次多项式 $F(x)$ 使 $F(0)=0$, $F(x+1)-F(x)=f(x)$, 且 $S(n)=F(n)$. 利用这些条件, 可以确定 $F(x)$ 在 $n+2$ 个整数点处的值, 从而可用插值公式求出 $F(x)$. 不过, 为了使实操容易一些, 我们还得多研究一点.

由上个命题的证明过程, 有

命题 若

$$f(x)=c_0\binom{x}{0}+c_1\binom{x}{1}+\cdots+c_m\binom{x}{m},$$

则

$$S(n)=\sum_{\ell=0}^{n-1}f(\ell)=c_0\binom{n}{1}+c_1\binom{n}{2}+\cdots+c_m\binom{n}{m+1}.$$

由此可见, 若我们能把 $f(x)$ 写为广义二项系数的线性组合, 则寻找 $S(n)$ 的过程将十分简单. 接下来, 我们讨论怎么方便地把多项式写为广义二项系数的线性组合.

定义 设 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$. 定义 $f(x)$ 的差分 (*difference*) 为

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)\in\mathbb{F}[x].$$

设 $t\in\mathbb{F}$. 我们把

$$f(t+1)-f(t)\in\mathbb{F}$$

也写为 $\Delta f(t)$.

例 取 $f(x)=x^2+x-1$. 则

$$f(x+1)=(x+1)^2+(x+1)-1=x^2+3x+1,$$

故

$$\Delta f(x)=2x+2.$$

所以

$$\Delta f(332)=2\cdot 332+2=666.$$

命题 设 k 是整数. 则

$$\Delta\binom{x}{k}=\binom{x}{k-1}.$$

证 也许, 这就是所谓的 “新瓶装旧酒” 吧! 不过, 为了方便, 我们还是单独列出来. ✌

回忆一下, 微商适合如下二条性质:

(i) $(cf(x))' = cf'(x)$;

(ii) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$.

差分也有类似的性质.

命题 设 $f(x)$, $g(x) \in \mathbb{F}[x]$, $c \in \mathbb{F}$. 则

(i) $\Delta(cf(x)) = c\Delta f(x)$;

(ii) $\Delta(f(x) \pm g(x)) = \Delta f(x) \pm \Delta g(x)$.

由 (i) (ii) 与数学归纳法可知: 当 c_0, c_1, ⋯, $c_{k-1} \in \mathbb{F}$, 且 $f_0(x)$, $f_1(x)$, ⋯, $f_{k-1}(x) \in \mathbb{F}[x]$ 时,

$$\Delta\left(\sum_{\ell=0}^{k-1} c_\ell f_\ell(x)\right) = \sum_{\ell=0}^{k-1} c_\ell \Delta f_\ell(x).$$

证 老样子, 我们证明 (i) (ii), 将剩下的推论留给读者作练习. 设

(i) 设 $p(x) = cf(x)$. 则

$$\begin{aligned}\Delta(cf(x)) &= \Delta p(x)\\ &= p(x+1) - p(x)\\ &= cf(x+1) - cf(x)\\ &= c(f(x+1) - f(x))\\ &= c\Delta f(x).\end{aligned}$$

(ii) 设 $q(x) = f(x) \pm g(x)$. 则

$$\begin{aligned}\Delta(f(x) \pm g(x)) &= \Delta q(x)\\ &= q(x+1) - q(x)\\ &= (f(x+1) \pm g(x+1)) - (f(x) \pm g(x))\\ &= (f(x+1) - f(x)) \pm (g(x+1) - g(x))\\ &= \Delta f(x) \pm \Delta g(x).\end{aligned}$$

✌

定义 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. 记

$$\Delta^0 f(x) = f(x) \in \mathbb{F}[x],$$

并称其为 $f(x)$ 的 0 级差分 (*zeroth-order difference*). 1 级差分就是差分:

$$\Delta^1 f(x) = \Delta f(x) = \Delta(\Delta^0 f(x)) \in \mathbb{F}[x].$$

1 级差分的差分是 2 级差分:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta^1 f(x)) \in \mathbb{F}[x].$$

2 级差分的差分是 3 级差分:

$$\Delta^3 f(x) = \Delta(\Delta^2 f(x)) \in \mathbb{F}[x].$$

一般地, e 级差分就是 $e-1$ 级差分的差分:

$$\Delta^e f(x) = \Delta(\Delta^{e-1} f(x)) \in \mathbb{F}[x].$$

高级差分可指代任意 e 级差分, 此处 $e > 1$.

设 $t \in \mathbb{F}$. 既然 $\Delta^e f(x)$ 是某个多项式

$$v_0 + v_1 x + \cdots + v_s x^s \in \mathbb{F}[x],$$

我们将

$$v_0 + v_1 t + \cdots + v_s t^s \in \mathbb{F}$$

简单地写为 $\Delta^e f(t)$.

例 设

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 7.$$

根据定义, $f(x)$ 的 0 级差分就是自己:

$$\Delta^0 f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 7.$$

因为

$$\begin{aligned}(1+x)^3 &= (1+x)^2(1+x)\\ &= (1+2x+x^2)(1+x)\\ &= 1+2x+x^2+x+2x^2+x^3\\ &= 1+3x+3x^2+x^3,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} f(x+1) &= 2(x+1)^3 + 3(x+1)^2 + 5(x+1) + 7 \\ &= 2x^3 + 9x^2 + 17x + 17. \end{aligned}$$

从而 $f(x)$ 的 1 级差分是

$$\Delta^1 f(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = 6x^2 + 12x + 10.$$

因为

$$\Delta^1 f(x+1) = 6(x+1)^2 + 12(x+1) + 10 = 6x^2 + 24x + 28,$$

故 $f(x)$ 的 2 级差分是

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta^1 f(x)) = \Delta^1 f(x+1) - \Delta^1 f(x) = 12x + 18.$$

因为

$$\Delta^2 f(x+1) = 12(x+1) + 18 = 12x + 30,$$

故 $f(x)$ 的 3 级差分是

$$\Delta^3 f(x) = \Delta(\Delta^2 f(x)) = \Delta^2 f(x+1) - \Delta^2 f(x) = 12.$$

因为

$$\Delta^3 f(x+1) = 12,$$

故 $f(x)$ 的 4 级差分是

$$\Delta^4 f(x) = \Delta(\Delta^3 f(x)) = \Delta^3 f(x+1) - \Delta^3 f(x) = 0.$$

读者不难验证: 对任意超出 3 的整数 e, 必有

$$\Delta^e f(x) = 0.$$

由上面的计算, 可知

$$\begin{aligned} &\Delta^0 f(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 7 = 17, \\ &\Delta^1 f(1) = 6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1^2 + 10 = 28, \\ &\Delta^2 f(1) = 12 \cdot 1 + 18 = 30, \\ &\Delta^3 f(1) = 12, \\ &\Delta^e f(1) = 0 \quad (e > 3). \end{aligned}$$

高级差分适合如下性质:

命题 设 e 是非负整数. 当 c_0, c_1, …, $c_{k-1} \in \mathbb{F}$, 且 $f_0(x)$, $f_1(x)$, …, $f_{k-1}(x) \in \mathbb{F}[x]$ 时,

$$\Delta^e\left(\sum_{\ell=0}^{k-1} c_\ell f_\ell(x)\right) = \sum_{\ell=0}^{k-1} c_\ell \Delta^e f_\ell(x).$$

证 用数学归纳法. 我们把具体过程留给读者当练习. ✌

命题 设 e 是非负整数. 设 k 是整数. 则

$$\Delta^e\binom{x}{k} = \binom{x}{k-e}.$$

证 用数学归纳法. 我们把具体过程留给读者当练习. ✌

命题 设 e 是非负整数. 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. 则

$$\Delta^e f(x) = \sum_{k=0}^{e} (-1)^{e-k}\binom{e}{k} f(x+k).$$

证 当 $e = 0$ 时, 左侧是 $f(x)$, 右侧是

$$(-1)^0\binom{0}{0} f(x+0) = f(x).$$

当 $e = 1$ 时, 左侧是 $f(x+1) - f(x)$, 右侧是

$$(-1)^1\binom{1}{0} f(x+0) + (-1)^0\binom{1}{1} f(x+1) = -f(x) + f(x+1).$$

所以, 命题对 $e = 0$ 或 $e = 1$ 成立.

设命题对 $e = \ell \geq 1$ 成立, 即

$$\Delta^\ell f(x) = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^{\ell-k}\binom{\ell}{k} f(x+k).$$

则 $e=\ell+1$ 时,

$$\begin{aligned}
&\Delta^{\ell+1}f(x)\\
={}&\Delta(\Delta^{\ell}f(x))\\
={}&\Delta^{\ell}f(x+1)-\Delta^{\ell}f(x)\\
={}&\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^{\ell-k}\binom{\ell}{k}f(x+1+k)-\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^{\ell-k}\binom{\ell}{k}f(x+k)\\
={}&\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^{(\ell+1)-(k+1)}\binom{\ell}{k+1-1}f(x+k+1)\\
&\qquad+\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^{\ell+1-k}\binom{\ell}{k}f(x+k)\\
={}&\sum_{k=1}^{\ell+1}(-1)^{\ell+1-k}\binom{\ell}{k-1}f(x+k)+\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^{\ell+1-k}\binom{\ell}{k}f(x+k)\\
={}&\sum_{k=0}^{\ell+1}(-1)^{\ell+1-k}\binom{\ell}{k-1}f(x+k)+\sum_{k=0}^{\ell+1}(-1)^{\ell+1-k}\binom{\ell}{k}f(x+k)\\
={}&\sum_{k=0}^{\ell+1}\left((-1)^{\ell+1-k}\binom{\ell}{k-1}f(x+k)+(-1)^{\ell+1-k}\binom{\ell}{k}f(x+k)\right)\\
={}&\sum_{k=0}^{\ell+1}(-1)^{\ell+1-k}\left(\binom{\ell}{k-1}+\binom{\ell}{k}\right)f(x+k)\\
={}&\sum_{k=0}^{\ell+1}(-1)^{\ell+1-k}\binom{\ell+1}{k}f(x+k).
\end{aligned}$$

✌

我们再补充一个跟广义二项系数有关的性质:

命题 设 k 是整数. 则

$$\binom{0}{k}=\begin{cases}1, & k=0;\\ 0, & k\neq 0.\end{cases}$$

证 显然. ✌

设 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ 是次不高于 m 的多项式. 我们知道, $f(x)$ 一定可以写

为广义二项系数的线性组合:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{m}c_k\binom{x}{k}.$$

对左右二侧求 e 级差分 $(e\le m)$, 有

$$\Delta^e f(x)=\sum_{k=0}^{m}c_k\binom{x}{k-e}.$$

用 0 替换 x, 有

$$\Delta^e f(0)=\sum_{k=0}^{m}c_k\binom{0}{k-e}=c_e.$$

所以

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=0}^{m}\Delta^k f(0)\binom{x}{k}\\&=\Delta^0 f(0)\binom{x}{0}+\Delta^1 f(0)\binom{x}{1}+\cdots+\Delta^m f(0)\binom{x}{m}\\&=f(0)+\Delta f(0)\binom{x}{1}+\cdots+\Delta^m f(0)\binom{x}{m}.\end{aligned}$$

我们已经证明了

命题 设 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ 是次不高于 m 的多项式. 则

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=0}^{m}\Delta^k f(0)\binom{x}{k}\\&=\Delta^0 f(0)\binom{x}{0}+\Delta^1 f(0)\binom{x}{1}+\cdots+\Delta^m f(0)\binom{x}{m}\\&=f(0)+\Delta f(0)\binom{x}{1}+\cdots+\Delta^m f(0)\binom{x}{m},\end{aligned}$$

所以

$$S(n)=\sum_{\ell=0}^{n-1}f(\ell)=f(0)\binom{n}{1}+\Delta f(0)\binom{n}{2}+\cdots+\Delta^m f(0)\binom{n}{m+1}.$$

注意到

$$\Delta^k f(0)=\sum_{u=0}^{k}(-1)^{k-u}\binom{k}{u}f(u),$$

故计算 $\Delta^k f(0)$ 需要用到 $f(0)$, $f(1)$, ⋯, $f(k)$ 这 $k+1$ 个数. 也就是说, 计算 $\Delta^0 f(0)$, $\Delta^1 f(0)$, ⋯, $\Delta^m f(0)$ 需要用到 $f(0)$, $f(1)$, ⋯, $f(m)$ 这 $m+1$ 个数.

下面我们举几个具体的例, 帮助读者消化这种求和方法.

例 设 $f(x)=x^2+x-1$. 求

$$S(n)=\sum_{\ell=0}^{n-1}f(\ell)=f(0)+f(1)+\cdots+f(n-1).$$

这里, $m=2$. 所以, 我们计算 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$:

$$f(0)=-1,\quad f(1)=1,\quad f(2)=5.$$

由此, 不难算出:

$$\begin{aligned}
&\Delta^0 f(0)=f(0)=-1,\\
&\Delta^1 f(0)=f(1)-f(0)=2,\\
&\Delta^1 f(1)=f(2)-f(1)=4,\\
&\Delta^2 f(0)=\Delta^1 f(1)-\Delta^1 f(0)=2.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
f(x)&=f(0)+\Delta f(0)\binom{x}{1}+\Delta^2 f(0)\binom{x}{2}\\
&=-1+2\binom{x}{1}+2\binom{x}{2}.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
S(n)&=\sum_{\ell=0}^{n-1}f(\ell)\\
&=-1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}\\
&=-n+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{3}\\
&=\frac{n(n+2)(n-2)}{3}.
\end{aligned}$$

实操时, 往往用名为 “差分表” 的表进行计算. 当 $m=2$ 时, 它长这样:

$$
\begin{array}{lll}
\Delta^0 f(2) & & \\
\Delta^0 f(1) & \Delta^1 f(1) & \\
\Delta^0 f(0) & \Delta^1 f(0) & \Delta^2 f(0)
\end{array}
$$

在这个问题里, 差分表如下:

$$
\begin{array}{ccc}
5 & & \\
1 & 4 & \\
-1 & 2 & 2
\end{array}
$$

例 求前 n 个非负整数的立方和

$$S(n)=0^3+1^3+\cdots+(n-1)^3=\sum_{\ell=0}^{n-1}\ell^3.$$

取 $f(x)=x^3$. 这里, $m=3$. 画出 $m=3$ 时的差分表:

$$
\begin{array}{llll}
\Delta^0 f(3) & & & \\
\Delta^0 f(2) & \Delta^1 f(2) & & \\
\Delta^0 f(1) & \Delta^1 f(1) & \Delta^2 f(1) & \\
\Delta^0 f(0) & \Delta^1 f(0) & \Delta^2 f(0) & \Delta^3 f(0)
\end{array}
$$

$\Delta^0 f(t)$ 就是 $f(t)$:

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad f(2)=8,\quad f(3)=27.$$

写在表上, 就是

$$
\begin{array}{cllll}
27 & & & \\
8 & \Delta^1 f(2) & & \\
1 & \Delta^1 f(1) & \Delta^2 f(1) & \\
0 & \Delta^1 f(0) & \Delta^2 f(0) & \Delta^3 f(0)
\end{array}
$$

由此可确定 1 级差分:

$$
\begin{aligned}
\Delta^1 f(2) &= f(3)-f(2)=19,\\
\Delta^1 f(1) &= f(2)-f(1)=7,\\
\Delta^1 f(0) &= f(1)-f(0)=1.
\end{aligned}
$$

写在表上, 就是

$$\begin{array}{llll}
27 & & & \\
8 & 19 & & \\
1 & 7 & \Delta^2 f(1) & \\
0 & 1 & \Delta^2 f(0) & \Delta^3 f(0)
\end{array}$$

类似地, 可确定 2 级差分:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 f(1) &= \Delta^1 f(2) - \Delta^1 f(1) = 12, \\
\Delta^2 f(0) &= \Delta^1 f(1) - \Delta^1 f(0) = 6.
\end{aligned}$$

写在表上, 就是

$$\begin{array}{cccc}
27 & & & \\
8 & 19 & & \\
1 & 7 & 12 & \\
0 & 1 & 6 & \Delta^3 f(0)
\end{array}$$

最后, 可确定 3 级差分:

$$\Delta^3 f(0) = \Delta^2 f(1) - \Delta^2 f(0) = 6.$$

写在表上, 就是

$$\begin{array}{cccc}
27 & & & \\
8 & 19 & & \\
1 & 7 & 12 & \\
0 & 1 & 6 & 6
\end{array}$$

所以

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \Delta f(0)\binom{x}{1} + \Delta^2 f(0)\binom{x}{2} + \Delta^3 f(0)\binom{x}{3} \\
&= \binom{x}{1} + 6\binom{x}{2} + 6\binom{x}{3}.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
S(n) &= \sum_{\ell=0}^{n-1} f(\ell) \\
&= \binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} + 6\binom{n}{4} \\
&= \frac{n(n-1)}{2} + n(n-1)(n-2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} \\
&= \frac{n(n-1)}{4}(2 + 4(n-2) + (n-2)(n-3)) \\
&= \frac{n(n-1)}{4} n(n-1) \\
&= \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

评注 回忆一下, 前 n 个非负整数的和

$$0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

上面的例告诉我们,

$$0^3 + 1^3 + \cdots + (n-1)^3 = (0 + 1 + \cdots + (n-1))^2.$$

所以, 前 n 个非负整数的立方和等于前 n 个非负整数的和的平方.

例 求前 n 个非负整数的 4 次幂和

$$S(n) = 0^4 + 1^4 + \cdots + (n-1)^4 = \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell^4.$$

取 $f(x) = x^4$. 这里, $m = 4$. 画出 $m = 4$ 时的差分表:

$$\begin{array}{lllll}
\Delta^0 f(4) & & & & \\
\Delta^0 f(3) & \Delta^1 f(3) & & & \\
\Delta^0 f(2) & \Delta^1 f(2) & \Delta^2 f(2) & & \\
\Delta^0 f(1) & \Delta^1 f(1) & \Delta^2 f(1) & \Delta^3 f(1) & \\
\Delta^0 f(0) & \Delta^1 f(0) & \Delta^2 f(0) & \Delta^3 f(0) & \Delta^4 f(0)
\end{array}$$

我们直接填差分表:

$$\begin{array}{ccccc}
256 & & & & \\
81 & \Delta^1 f(3) & & & \\
16 & \Delta^1 f(2) & \Delta^2 f(2) & & \\
1 & \Delta^1 f(1) & \Delta^2 f(1) & \Delta^3 f(1) & \\
0 & \Delta^1 f(0) & \Delta^2 f(0) & \Delta^3 f(0) & \Delta^4 f(0)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
256 & & & & \\
81 & 175 & & & \\
16 & 65 & \Delta^2 f(2) & & \\
1 & 15 & \Delta^2 f(1) & \Delta^3 f(1) & \\
0 & 1 & \Delta^2 f(0) & \Delta^3 f(0) & \Delta^4 f(0)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
256 & & & & \\
81 & 175 & & & \\
16 & 65 & 110 & & \\
1 & 15 & 50 & \Delta^3 f(1) & \\
0 & 1 & 14 & \Delta^3 f(0) & \Delta^4 f(0)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
256 & & & & \\
81 & 175 & & & \\
16 & 65 & 110 & & \\
1 & 15 & 50 & 60 & \\
0 & 1 & 14 & 36 & \Delta^4 f(0)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
256 & & & & \\
81 & 175 & & & \\
16 & 65 & 110 & & \\
1 & 15 & 50 & 60 & \\
0 & 1 & 14 & 36 & 24
\end{array}$$

所以

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \Delta f(0)\binom{x}{1} + \Delta^2 f(0)\binom{x}{2} + \Delta^3 f(0)\binom{x}{3} + \Delta^4 f(0)\binom{x}{4} \\
&= \binom{x}{1} + 14\binom{x}{2} + 36\binom{x}{3} + 24\binom{x}{4}.
\end{aligned}$$

从而

$$
\begin{aligned}
S(n) &= \sum_{\ell=0}^{n-1} f(\ell) \\
&= \binom{n}{2} + 14\binom{n}{3} + 36\binom{n}{4} + 24\binom{n}{5} \\
&= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{7n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{3n(n-1)(n-2)(n-3)}{2} \\
&\qquad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{5} \\
&= \frac{n(n-1)}{30}(15 + 70(n-2) + 45(n-3)(n-2) \\
&\qquad + 6(n-4)(n-3)(n-2)) \\
&= \frac{n(n-1)}{30}(6n^3 - 9n^2 + n + 1) \\
&= \frac{n(n-1)}{120}(24n^3 - 36n^2 + 4n + 4) \\
&= \frac{n(n-1)}{120}(3(2n)^3 - 9(2n)^2 + 2(2n) + 4) \\
&= \frac{n(n-1)}{120}(3(2n)^3 - 3 - 9(2n)^2 + 9 + 2(2n) - 2) \\
&= \frac{n(n-1)}{120}(3((2n)^3 - 1) - 9((2n)^2 - 1) + 2((2n) - 1)) \\
&= \frac{n(n-1)}{120}(2n-1)(3((2n)^2 + 2n + 1) - 9(2n+1) + 2) \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1)}{120}(12n^2 - 12n - 4) \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1)}{30}(3n^2 - 3n - 1) \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2 - 3n - 1)}{30}.
\end{aligned}
$$

再探微商

本节将再讨论多项式的微商.

在讨论微商前, 让我们捡起在 "广义二项系数" 节里没用过的二项展开:

命题 设 r, $s \in \mathbb{F}[x]$. 设 n 是非负整数. 则

$$(r+s)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^{n-k} s^k.$$

此式称为二项展开.

评注 等式右侧的 $\binom{n}{k}$ 称为二项系数 (*binomial coefficient*). 事实上, $\binom{n}{k}$ 一开始就是为讨论 $(r+s)^n$ 的展开而生的.

例 在中学, 我们学过完全平方和公式:

$$(r+s)^2 = r^2 + 2rs + s^2.$$

在二项展开里, 取 $n=2$, 就可以得到这个公式:

$$\binom{2}{0} = 1, \quad \binom{2}{1} = 2, \quad \binom{2}{2} = 1,$$
$$\begin{aligned}(r+s)^2 &= 1r^2s^0 + 2r^1s^1 + 1r^0s^2 \\ &= r^2 + 2rs + s^2.\end{aligned}$$

在上节, 我们用分配律拆开了 $(1+x)^3$:

$$\begin{aligned}(1+x)^3 &= (1+x)^2(1+x) \\ &= (1+2x+x^2)(1+x) \\ &= 1+2x+x^2+x+2x^2+x^3 \\ &= 1+3x+3x^2+x^3.\end{aligned}$$

在二项展开里, 取 $n=3$:

$$\binom{3}{0} = 1 = \binom{3}{3}, \quad \binom{3}{1} = 3 = \binom{3}{2},$$
$$\begin{aligned}(r+s)^3 &= 1r^3s^0 + 3r^2s^1 + 3r^1s^2 + 1r^0s^3 \\ &= r^3 + 3r^2s + 3rs^2 + s^3.\end{aligned}$$

用 1, x 替换 r, s, 有

$$\begin{aligned}(1+x)^3 &= 1^3 + 3\cdot 1^2 x + 3\cdot 1 x^2 + x^3\\ &= 1+3x+3x^2+x^3.\end{aligned}$$

设 $c\in\mathbb{F}$. 在 “多项式的相等” 节, 我们用 1, $x-c$, $(x-c)^2$, $\cdots$, $(x-c)^n$ 引出线性无关, 并证明了

命题 设 $a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n\in\mathbb{F}$. 设 $c\in\mathbb{F}$. 再设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i(x-c)^i,\quad g(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i(x-c)^i.$$

则 $f(x)=g(x)$ 的一个必要与充分条件是

$$a_0=b_0,\quad a_1=b_1,\quad \cdots,\quad a_n=b_n.$$

并且, 任取

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} u_i x^i\in\mathbb{F}[x],$$

必存在 $v_0, v_1, \cdots, v_n\in\mathbb{F}$ 使

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} v_i(x-c)^i.$$

利用二项展开, 有

$$\begin{aligned}x^i &= (c+(x-c))^i\\ &= \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}c^{i-j}(x-c)^j.\end{aligned}$$

由此, 我们可以把任意多项式

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} u_i x^i\in\mathbb{F}[x]$$

写为

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} v_i(x-c)^i\in\mathbb{F}[x].$$

例 设

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 12.$$

取 $c = 2$. 利用二项展开, 有

$$\begin{aligned}
x^3 &= (2 + (x-2))^3 \\
&= 1 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 (x-2) + 3 \cdot 2^1 (x-2)^2 + 1 \cdot 2^0 (x-2)^3 \\
&= 8 + 12(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3, \\
x^2 &= (2 + (x-2))^2 \\
&= 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^1 (x-2) + 1 \cdot 2^0 (x-2)^2 \\
&= 4 + 4(x-2) + (x-2)^2, \\
x &= 2 + (x-2).
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 6x^2 + 15x - 12 \\
&= 8 + 12(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3 \\
&\qquad - 6(4 + 4(x-2) + (x-2)^2) \\
&\qquad\qquad + 15(2 + (x-2)) - 12 \\
&= (x-2)^3 + 3(x-2) + 2.
\end{aligned}$$

现在, 读者可能不再那么不熟悉二项展开了. 我们正式重述微商. 不过, 我们并不会完全照搬 “微商” 节.

定义 设

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \in \mathbb{F}[x].$$

$f(x)$ 的微商是多项式

$$Df(x) = 0 + 1a_1 + 2a_2 x + \cdots + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + n a_n x^{n-1} \in \mathbb{F}[x].$$

设 $t \in \mathbb{F}$. 我们把

$$0 + 1a_1 + 2a_2 t + \cdots + (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + n a_n t^{n-1} \in \mathbb{F}$$

简单地写为 $Df(t)$.

评注 若 $f(x)=c$, $c\in\mathbb{F}$, 则 $Df(x)$ 为零多项式.

评注 读者可能会注意到我们在这里换了个记号. 之前, 我们用 $f'(x)$ 或 $(f(x))'$ 表示多项式 $f(x)$ 的微商——那个时候, 我们还是在抽象的整环 D 上讨论问题. 现在, 我们在熟悉的 $\mathbb{F}$ 里讨论问题. 读者已经很久都没见到 D 了吧? 从此节开始, 我们用 D 记号表示微商. 所以, D 将不表示整环.

例 取 $f(x)=x^6-x^3+1\in\mathbb{F}[x]$. 则

$$Df(x)=6x^5-3x^2.$$

下面的命题也是老朋友了.

命题 设 $f(x)$, $g(x)\in\mathbb{F}[x]$, $c\in\mathbb{F}$. 则

(i) $D(cf(x))=cDf(x)$;

(ii) $D(f(x)\pm g(x))=Df(x)\pm Dg(x)$.

由 (i) (ii) 与数学归纳法可知: 当 c_0, c_1, $\cdots$, $c_{k-1}\in\mathbb{F}$, 且 $f_0(x)$, $f_1(x)$, $\cdots$, $f_{k-1}(x)\in\mathbb{F}[x]$ 时,

$$D\left(\sum_{\ell=0}^{k-1}c_\ell f_\ell(x)\right)=\sum_{\ell=0}^{k-1}c_\ell Df_\ell(x).$$

证 本来我们不必重复证明这些命题. 不过, 为了让读者更好地熟悉 D 记号, 我们还是在此处证明 (i) (ii), 并将剩下的推论留给读者作练习. 设

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n,$$
$$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}+b_nx^n$$

是 $\mathbb{F}[x]$ 中二个元.

(i) $cf(x)$ 就是多项式

$$ca_0+ca_1x+ca_2x^2+\cdots+ca_{n-1}x^{n-1}+ca_nx^n,$$

故

$$\begin{aligned}
D(cf(x)) &= D(ca_0 + ca_1x + ca_2x^2 + \cdots + ca_{n-1}x^{n-1} + ca_nx^n) \\
&= ca_1 + 2ca_2x + \cdots + (n-1)ca_{n-1}x^{n-2} + nca_nx^{n-1} \\
&= ca_1 + c2a_2x + \cdots + c(n-1)a_{n-1}x^{n-2} + cna_nx^{n-1} \\
&= c(a_1 + 2a_2x + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}) \\
&= cDf(x).
\end{aligned}$$

(ii) $f(x) \pm g(x)$ 就是多项式

$$\begin{aligned}
&(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + (a_2 \pm b_2)x^2 + \cdots \\
&\qquad + (a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-1} + (a_n \pm b_n)x^n,
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
&D(f(x) \pm g(x)) \\
={}& D((a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + (a_2 \pm b_2)x^2 + \cdots \\
&\qquad + (a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-1} + (a_n \pm b_n)x^n) \\
={}& (a_1 \pm b_1) + 2(a_2 \pm b_2)x + \cdots + (n-1)(a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-2} \\
&\qquad + n(a_n \pm b_n)x^{n-1} \\
={}& (a_1 \pm b_1) + (2a_2x \pm 2b_2x) + \cdots + ((n-1)a_{n-1}x^{n-2} \\
&\qquad \pm (n-1)b_{n-1}x^{n-2}) + (na_nx^{n-1} \pm nb_nx^{n-1}) \\
={}& (a_1 + 2a_2x + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}) \\
&\qquad \pm (b_1 + 2b_2x + \cdots + (n-1)b_{n-1}x^{n-2} + nb_nx^{n-1}) \\
={}& Df(x) \pm Dg(x).
\end{aligned}$$

✌

例 取

$$f(x) = x^3 + 2, \quad g(x) = x^2 + x - 1.$$

不难得到

$$Df(x) = 3x^2, \quad Dg(x) = 2x + 1.$$

(i) $4g(x)$ 也是多项式, 当然可以有微商. 因为

$$4g(x) = 4x^2 + 4x - 4,$$

故

$$D(4g(x)) = 8x + 4,$$

这刚好是 $4Dg(x)$:

$$4Dg(x) = 4(2x + 1) = 8x + 4.$$

(ii) $f(x) + g(x)$ 也是多项式. 因为

$$f(x) + g(x) = x^3 + 2 + x^2 + x - 1 = x^3 + x^2 + x + 1,$$

故

$$D(f(x) + g(x)) = 3x^2 + 2x + 1,$$

而这刚好是 $Df(x) + Dg(x)$:

$$Df(x) + Dg(x) = 3x^2 + 2x + 1.$$

前面讲差商与差分时, 我们引入了高级差商与高级差分. 类似地, 我们引入高级微商.

定义 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. 记

$$D^0 f(x) = f(x) \in \mathbb{F}[x],$$

并称其为 $f(x)$ 的 0 级微商 (*zeroth-order derivative*). 1 级微商就是微商:

$$D^1 f(x) = Df(x) = D(D^0 f(x)) \in \mathbb{F}[x].$$

1 级微商的微商是 2 级微商:

$$D^2 f(x) = D(D^1 f(x)) \in \mathbb{F}[x].$$

2 级微商的微商是 3 级微商:

$$D^3 f(x) = D(D^2 f(x)) \in \mathbb{F}[x].$$

一般地, e 级微商就是 $e-1$ 级微商的微商:

$$D^e f(x) = D(D^{e-1} f(x)) \in \mathbb{F}[x].$$

高级微商可指代任意 e 级微商, 此处 $e > 1$.

设 $t \in \mathbb{F}$. 既然 $D^e f(x)$ 是某个多项式

$$v_0 + v_1 x + \cdots + v_s x^s \in \mathbb{F}[x],$$

我们将

$$v_0 + v_1 t + \cdots + v_s t^s \in \mathbb{F}$$

简单地写为 $D^e f(t)$.

例 设

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 7.$$

根据定义, $f(x)$ 的 0 级微商就是自己:

$$D^0 f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 7.$$

$f(x)$ 的 1 级微商是

$$D^1 f(x) = Df(x) = 6x^2 + 6x + 5.$$

$f(x)$ 的 2 级微商是

$$D^2 f(x) = D(D^1 f(x)) = 12x + 6.$$

$f(x)$ 的 3 级微商是

$$D^3 f(x) = D(D^2 f(x)) = 12.$$

$f(x)$ 的 4 级微商是

$$D^4 f(x) = D(D^3 f(x)) = 0.$$

读者不难验证: 对任意超出 3 的整数 e, 必有

$$D^e f(x) = 0.$$

类似地, 高级微商适合如下性质:

命题 设 e 是非负整数. 当 c_0, c_1, $\cdots$, $c_{k-1} \in \mathbb{F}$, 且 $f_0(x)$, $f_1(x)$, $\cdots$, $f_{k-1}(x) \in \mathbb{F}[x]$ 时,

$$D^e\left(\sum_{\ell=0}^{k-1} c_\ell f_\ell(x)\right) = \sum_{\ell=0}^{k-1} c_\ell D^e f_\ell(x).$$

证 用数学归纳法. 我们把具体过程留给读者当练习. ✌

当初我们为得到 Vandermonde 恒等式与二项展开, 我们引入了临时工具 $r^{[k]}$. 现在, 类似地, 为了更方便地讨论多项式的高级微商, 我们引入

定义 设 m 为整数. 设 $r \in \mathbb{F}[x]$. 定义

$$q_m(r) = \begin{cases} \frac{1}{m!} r^m, & m > 0; \\ 1, & m = 0; \\ 0, & m < 0. \end{cases}$$

设 k 是整数. 我们知道

$$\Delta\binom{x}{k} = \binom{x}{k-1}.$$

类似地, 我们有

命题 设 m 为整数. 则

$$Dq_m(x) = q_{m-1}(x).$$

证 $m > 0$ 时,

$$Dq_m(x) = m \cdot \frac{x^{m-1}}{m!} = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} = q_{m-1}(x).$$

$m \leq 0$ 时, $q_m(x) = a$, 这里 $a \in \mathbb{F}$. 故

$$Dq_m(x) = 0 = q_{m-1}(x).$$ ✌

由此可得

命题 设 e 是非负整数. 设 m 为整数. 则

$$D^e q_m(x) = q_{m-e}(x).$$

证 用数学归纳法. 我们把具体过程留给读者当练习. ✌

现在, 我们看高级微商与二项展开的关系.

固定某 $c \in \mathbb{F}$. 固定某非负整数 n. 任取不高于 n 的非负整数 i. 则

$$\begin{aligned}
q_i(x) &= \frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}c^{i-j}(x-c)^j \\
&= \frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{i}\frac{i!}{(i-j)!j!}c^{i-j}(x-c)^j \\
&= \frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{i} i!q_{i-j}(c)q_j(x-c) \\
&= \sum_{j=0}^{i} q_{i-j}(c)q_j(x-c) \\
&= \sum_{j=0}^{n} q_{i-j}(c)q_j(x-c).
\end{aligned}$$

任取次不高于 n 的多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{F}[x].$$

设

$$b_\ell = \ell!a_\ell \quad (\ell = 0, 1, \cdots, n).$$

则

$$f(x) = b_0q_0(x) + b_1q_1(x) + \cdots + b_nq_n(x).$$

不难看出, 当 j 是非负整数时,

$$D^jf(x) = b_0q_{0-j}(x) + b_1q_{1-j}(x) + \cdots + b_nq_{n-j}(x).$$

所以

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=0}^{n} b_i q_i(x) \\
&= \sum_{i=0}^{n} b_i \sum_{j=0}^{n} q_{i-j}(c) q_j(x-c) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} b_i q_{i-j}(c) q_j(x-c) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} b_i q_{i-j}(c) q_j(x-c) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} b_i q_{i-j}(c) \right) q_j(x-c) \\
&= \sum_{j=0}^{n} D^j f(c) q_j(x-c) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{D^j f(c)}{j!} (x-c)^j.
\end{aligned}
$$

我们已经证明了

命题 设 n 是非负整数. 设 $f(x)$ 是次不高于 n 的多项式. 设 $c \in \mathbb{F}$. 则 Taylor 公式 (*Taylor's formula*) 成立:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{D^j f(c)}{j!} (x-c)^j.$$

评注 我们可以说, Taylor 公式是二项展开的推广. 也可以说, 二项展开是 Taylor 公式的特例.

评注 取 $c = 0$, 有

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{D^j f(0)}{j!} x^j.$$

读者可能会注意到, 上式的形式与

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k f(0) \binom{x}{k}$$

的形式十分相似.

评注 以后我们不用 $q_m(r)$ 记号了.

评注 我们提一个读者可能已经注意到的事实. 设 n 是非负整数. 则 n 次多项式的 n 级微商不是 0, 但 $n+1$ 级微商是 0. 这也解释了为什么在 Taylor 公式里, 我们只要求 n 不低于 $f(x)$ 的次.

例 取 $n=3$. 设

$$f(x)=x^3-6x^2+15x-12.$$

则 $f(x)$ 的次不高于 n, 且

$$\begin{aligned}
D^0f(x)&=f(x)=x^3-6x^2+15x-12,\\
D^1f(x)&=Df(x)=3x^2-12x+15,\\
D^2f(x)&=D(Df(x))=6x-12,\\
D^3f(x)&=D(D^2f(x))=6.
\end{aligned}$$

取 $c=2$. 则

$$\begin{aligned}
D^0f(2)&=2^3-6\cdot 2^2+15\cdot 2-12=2,\\
D^1f(2)&=3\cdot 2^2-12\cdot 2+15=3,\\
D^2f(2)&=6\cdot 2-12=0,\\
D^3f(2)&=6.
\end{aligned}$$

根据 Taylor 公式,

$$\begin{aligned}
f(x)&=2+\frac{3}{1!}(x-2)+\frac{0}{2!}(x-2)^2+\frac{6}{3!}(x-2)^3\\
&=2+3(x-2)+(x-2)^3.
\end{aligned}$$

Taylor 公式一个用途是证明

命题 设 $f(x),\, g(x)\in\mathbb{F}[x]$. 则

$$(\bigstar)\qquad D(f(x)g(x))=Df(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot Dg(x).$$

证 设 $h(x)=f(x)g(x)$. 取整数 n 使 $\deg f(x)\le n$, $\deg g(x)\le n$, $\deg h(x)\le n$, 且 $1\le n$. 任取 $c\in\mathbb{F}$. 则

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\sum_{i=0}^{n}\frac{D^i f(c)}{i!}(x-c)^i,\\
g(x)&=\sum_{j=0}^{n}\frac{D^j g(c)}{j!}(x-c)^j,\\
h(x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{D^k h(c)}{k!}(x-c)^k.
\end{aligned}
$$

不过, 既然 $h(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的积, 也应有

$$
h(x)=\sum_{k=0}^{n+n}s_k(x-c)^k=\sum_{k=0}^{n}s_k(x-c)^k,
$$

其中

$$
\begin{aligned}
s_k&=\sum_{i=0}^{k}\frac{D^i f(c)}{i!}\cdot\frac{D^{k-i}g(c)}{(k-i)!}\\
&=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}D^i f(c)D^{k-i}g(c).
\end{aligned}
$$

所以, 任取不超过 n 的非负整数 k, 必有

$$
\begin{aligned}
&s_k=\frac{D^k h(c)}{k!}\\
\Longrightarrow\ &D^k h(c)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}D^i f(c)D^{k-i}g(c).
\end{aligned}
$$

作多项式

$$
E(x)=D^k h(x)-\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}D^i f(x)D^{k-i}g(x).
$$

上面的推理告诉我们, 任取 $c\in\mathbb{F}$, 必有 $E(c)=0$. 所以 $E(x)$ 一定是零多项式, 即

$$
D^k h(x)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}D^i f(x)D^{k-i}g(x).
$$

取 $k=1$, 有

$$\begin{aligned}
&D(f(x)g(x))\\
=\,&D^1h(x)\\
=\,&\sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}D^if(x)D^{1-i}g(x)\\
=\,&1\cdot D^0f(x)D^1g(x)+1\cdot D^1f(x)D^0g(x)\\
=\,&Df(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot Dg(x).
\end{aligned}$$

✌

评注 事实上, 我们得到了高级微商的 Leibniz 公式 (*Leibniz's formula*): 若 k 是非负整数, 且 $f(x), g(x)\in\mathbb{F}[x]$, 则

$$D^k(f(x)g(x))=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}D^if(x)D^{k-i}g(x).$$

不过, 在本文里, 我们用不到这个公式.

例 取

$$f(x)=x^3+2,\quad g(x)=x^2+x-1.$$

不难得到

$$Df(x)=3x^2,\quad Dg(x)=2x+1.$$

$f(x)$ 与 $g(x)$ 的积

$$f(x)g(x)=x^5+x^4-x^3+2x^2+2x-2$$

的微商是

$$D(f(x)g(x))=5x^4+4x^3-3x^2+4x+2.$$

如果用上面的 (★) 计算, 就是

$$\begin{aligned}
&Df(x)g(x)+f(x)Dg(x)\\
=\,&3x^2(x^2+x-1)+(x^3+2)(2x+1)\\
=\,&3x^4+3x^3-3x^2+2x^4+x^3+4x+2\\
=\,&5x^4+4x^3-3x^2+4x+2.
\end{aligned}$$

下面的二个命题是正确的:

命题 当 $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_{k-1}(x) \in \mathbb{F}[x]$ 时,

$$\begin{aligned}&D(f_0(x)f_1(x)\cdots f_{k-1}(x))\\=\ &Df_0(x)f_1(x)\cdots f_{k-1}(x)+f_0(x)Df_1(x)\cdots f_{k-1}(x)+\cdots\\&\qquad+f_0(x)f_1(x)\cdots Df_{k-1}(x).\end{aligned}$$

取 $f_0(x)=f_1(x)=\cdots=f_{k-1}(x)=f(x)$ 知

$$D((f(x))^k)=k(f(x))^{k-1}Df(x).$$

证 用数学归纳法. 我们把具体过程留给读者当练习. ✌

例 设 $f(x)=(x^2+x-1)^{666}$. 求 $Df(x)$.
取 $g(x)=x^2+x-1$. 显然, $f(x)=(g(x))^{666}$. 所以

$$\begin{aligned}Df(x)&=D((g(x))^{666})\\&=666(g(x))^{666-1}Dg(x)\\&=666(x^2+x-1)^{665}(2x+1)\\&=666(2x+1)(x^2+x-1)^{665}.\end{aligned}$$

命题 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合的微商适合链规则:

$$D(g\circ f)(x)=(Dg\circ f)(x)Df(x).$$

证 可看 “微商” 节的相应内容. ✌

例 设 $f(x)=(x^2+x-1)^5+3(x^2+x-1)^4-1$. 求 $Df(x)$.
取 $g(x)=x^5+3x^4-1$ 与 $h(x)=x^2+x-1$. 则

$$\begin{aligned}&Dg(x)=5x^4+12x^3=x^3(5x+12),\\&Dh(x)=2x+1.\end{aligned}$$

显然,

$$f(x)=g(h(x))=(g\circ h)(x).$$

所以

$$\begin{aligned} Df(x) &= (Dg \circ h)(x) Dh(x) \\ &= (x^2 + x - 1)^3 (5(x^2 + x - 1) + 12)(2x + 1) \\ &= (2x + 1)(5x^2 + 5x + 7)(x^2 + x - 1)^3. \end{aligned}$$

多项式的微分学初步

本节讨论多项式的微分学 (*differential calculus*) 初步[†]. 这也是本文的最终节.

How time flies! 一开始, 我们在 "预备知识" 给读者介绍预备知识. 然后, 我们给读者介绍了系数为整环的元的多项式. 当初, 多项式还是有点抽象的. 我们利用带余除法推出了几个很重要的命题, 并指出: 当多项式的系数为 $\mathbb{F}$ 的元时, 多项式与中学学的多项式 (函数) 没有根本上的区别. 我们在 "插值" 节开始介绍多项式的应用. 后面的 "求和公式" 节告诉读者一种方便的求和法. 在上节, 我们捡起很久未出场的微商, 并把它重讲了一遍. 我们利用高级微商推广了二项展开, 得到了 Taylor 公式, 并用它重证多项式的积的微商规则.

之前, 微商都是形式的——有点 "空降" 的味道. 现在, 我们要用 Taylor 公式给微商一种含义. 如果您知道一点微积分 (*calculus*), 您将不会对本节感到特别陌生; 如果您没有学过微积分, 无妨将本节作为 "入微作".

我们在 "$\mathbb{F}$ 上的多项式" 节说过, 我们不再讨论抽象的整环或系数为整环的元的多项式, 而是讨论 $\mathbb{F}$ 与 $\mathbb{F}[x]$. 现在, 我们再具体一点——讨论老朋友 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}[x]$——再准确点, 其实是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的多项式函数.

不过, 我们需要承认一个事实是对的. 为什么说 "承认" 呢? 因为它的证明需要超出本文的知识很多很多的工具. 但是, 它并不是什么 "牵强附会" 的命题. 是什么命题呢? 我们不必现在就说; 我们在用到它的时候再说.

我们先带读者熟悉实数.

读者也许还记得实数 a 的绝对值:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0; \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

请读者尝试自行证明下面四个命题. 当然, 熟悉这四个命题的读者可以不证. 我们把它们写在这里供读者参考.

命题 设 $a \in \mathbb{R}$. 则 $|a| \geq 0$.

[†] 学过一元函数微分学的读者可能会觉得本节废话连篇. 不过, 为照顾不熟悉三角不等式及相关知识的读者, 作者也没什么更好的写作思路了.

命题 设 $a \in \mathbb{R}$. 则

$$a = \begin{cases} |a|, & a \geq 0; \\ -|a|, & a < 0. \end{cases}$$

命题 设 $a \in \mathbb{R}$. 则 $-|a| \leq a \leq |a|$.

命题 设 $a \in \mathbb{R}$, 且 $b > 0$. 则

$$|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b;$$
$$|a| < b \iff -b < a < b.$$

读者也许还记得平方的性质:

$$a^2 = (-a)^2.$$

并且, 若 a, b 都是非负数, 则

$$a = b \iff a^2 = b^2.$$

利用这些性质, 我们有

命题 设 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. 则

$$|a_0 a_1 \cdots a_{n-1}| = |a_0| \cdot |a_1| \cdot \cdots \cdot |a_{n-1}|.$$

特别地, 若 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = a$, 则

$$|a^n| = |a|^n.$$

证 请读者尝试自行证明此命题. 不过, 我们愿意提示读者: (i) 等式的左右二侧都是非负的; (ii) 等式的左右二侧的平方是一样的. ✌

下面是一个十分重要的不等式:

命题 设 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. 则

$$|a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}| \leq |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|.$$

这个不等式的一个名字是三角不等式 (*triangle inequality*).

证 易知

$$\begin{aligned}
&-|a_0| \leq a_0 \leq |a_0|,\\
&-|a_1| \leq a_1 \leq |a_1|,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&-|a_{n-1}| \leq a_{n-1} \leq |a_{n-1}|.
\end{aligned}$$

记

$$b = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|.$$

易知 $b \geq 0$, 且

$$-b \leq a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} \leq b.$$

所以

$$|a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}| \leq b = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|.$$ ✌

定义 设 a, b 是实数, 且 $a < b$. 称

$$[a, b] = \{\, t \in \mathbb{R} \mid a \leq t \leq b \,\}$$

为闭区间 (*closed interval*); 称

$$(a, b) = \{\, t \in \mathbb{R} \mid a < t < b \,\}$$

为开区间 (*open interval*). 类似地, 有半闭区间 (*half-closed interval*):

$$\begin{aligned}
[a, b) &= \{\, t \in \mathbb{R} \mid a \leq t < b \,\},\\
(a, b] &= \{\, t \in \mathbb{R} \mid a < t \leq b \,\}.
\end{aligned}$$

$[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ 都是有限区间 (*finite interval*). 此名暗示着, 还有无限区间 (*infinite interval*):

$$\begin{aligned}
(-\infty, a) &= \{\, t \in \mathbb{R} \mid t < a \,\},\\
(-\infty, a] &= \{\, t \in \mathbb{R} \mid t \leq a \,\},\\
(b, +\infty) &= \{\, t \in \mathbb{R} \mid t > b \,\},\\
[b, +\infty) &= \{\, t \in \mathbb{R} \mid t \geq b \,\},\\
(-\infty, +\infty) &= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

有限区间与无限区间都是区间 (*interval*).

命题 设 a, b 是实数, 且 $a<b$. 若 $r>|a|$ 且 $r>|b|$, 则 $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ 都是 $[-r,r]$ 的真子集.

证 请读者尝试自行证明此命题. ✌

下面建立一些关于多项式的不等式.

命题 设 n 是非负整数. 设 a_0, a_1, ⋯, $a_n \in \mathbb{R}$. 任取正数 r, 必存在正数 M 使

$$|u| \le r \implies |a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n| \le M.$$

证 设正数 C 不低于 $|a_0|$, $|a_1|$, ⋯, $|a_n|$ 的任意一个. 则 $|u| \le r$ 时,

$$\begin{aligned}
&|a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n| \\
\le\ &|a_0| + |a_1 u| + \cdots + |a_n u^n| \\
=\ &|a_0| + |a_1||u| + \cdots + |a_n||u|^n \\
\le\ &C(1 + |u| + \cdots + |u|^n) \\
\le\ &C(1 + r + \cdots + r^n).
\end{aligned}$$

记

$$M = C(1 + r + \cdots + r^n) > 0.$$

由此,

$$|u| \le r \implies |a_0 + a_1 u \cdots + a_n u^n| \le M.$$ ✌

命题 设 I 是有限区间. 设 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. 存在正数 M 使

$$u \in I \implies |f(u)| \le M.$$

用文字描述这句话, 就是: 多项式函数在任意有限区间上都是有界的 (*to be bounded*).

证 取 $r>0$ 使 $I \subset [-r,r]$. 设

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x].$$

根据上个命题, 存在正数 M 使

$$|u| \le r \implies |f(u)| \le M.$$

所以

$$u \in I \implies |f(u)| \le M.$$ ✌

我们有时称 $\mathbb{R}$ 的元为点.

命题　设 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. 设 $t_0 \in \mathbb{R}$. 任取 $\varepsilon > 0$, 必有 $\delta > 0$, 使

$$|t - t_0| < \delta \implies |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

通俗地说, 当点 t 与点 t_0 足够近时, 多项式在二点的值可任意接近.

证　若 $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, 则

$$|f(t) - f(t_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

总是成立的. 下设 $f(x)$ 的次高于 0.

根据 "多项式的根" 节的结论, 存在多项式 $q(x)$ 使

$$f(x) = (x - t_0)q(x) + f(t_0).$$

所以

$$|f(t) - f(t_0)| = |q(t)||t - t_0|.$$

设 $I = [t_0 - 1, t_0 + 1]$. 不难看出,

$$\begin{aligned} I &= \{\, t \in \mathbb{R} \mid t_0 - 1 \le t \le t_0 + 1 \,\} \\ &= \{\, t \in \mathbb{R} \mid -1 \le t - t_0 \le 1 \,\} \\ &= \{\, t \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| \le 1 \,\}. \end{aligned}$$

利用上个命题, 存在 $M > 0$ 使

$$|t - t_0| \le 1 \implies |q(t)| \le M.$$

这样,

$$|t-t_0| \le 1 \implies |f(t)-f(t_0)| \le M|t-t_0|.$$

任取 $\varepsilon > 0$. 取一个既低于 1 也低于 $\frac{\varepsilon}{M}$ 的正数 δ. 这样, $|t-t_0| < \delta$ 时, 必有

$$|f(t)-f(t_0)| \le M|t-t_0| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$ ✌

命题 设 $t_0 \in \mathbb{R}$. 设 ℓ 是非负整数. 设

$$\begin{aligned}
&f(x) = a_\ell(x-t_0)^\ell + a_{\ell+1}(x-t_0)^{\ell+1} + \cdots + a_n(x-t_0)^n,\\
&g(x) = a_\ell(x-t_0)^\ell,
\end{aligned}$$

且 $a_\ell \ne 0$. 则存在 $\delta > 0$, 使 $0 < |t-t_0| < \delta$ 时, 必有 $f(t)$ 与 $g(t)$ 同号.

证 我们说, 二个不为 0 的数 a, b 同号, 相当于 $ab > 0$. 记

$$p(x) = \frac{1}{a_\ell}\sum_{j=\ell+1}^{n} a_j(x-t_0)^{j-(\ell+1)}.$$

则

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_\ell(x-t_0)^\ell + a_\ell(x-t_0)^\ell(x-t_0)p(x)\\
&= a_\ell(x-t_0)^\ell(1+(x-t_0)p(x))\\
&= g(x)(1+(x-t_0)p(x)).
\end{aligned}$$

所以

$$f(x)g(x) = (g(x))^2(1+(x-t_0)p(x)).$$

记 $q(x) = 1+(x-t_0)p(x)$. 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$. 由上个命题, 存在 $\delta > 0$ 使

$$|t-t_0| < \delta \implies |q(t)-1| = |q(t)-q(t_0)| < \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

所以

$$|t-t_0| < \delta \implies q(t)-1 > -\frac{1}{2}.$$

所以

$$0 < |t - t_0| < \delta \implies q(t) > \frac{1}{2}.$$

因为

$$0 < |t - t_0| \implies (g(t))^2 > 0,$$

故

$$0 < |t - t_0| < \delta \implies f(t)g(t) > \frac{1}{2}(g(t))^2 > 0.$$ ✌

下面讨论微商与变率的关系.

定义 设 a, b 是实数, 且 $a < b$. 设 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. 我们说多项式 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 的平均变率 (*average rate of change*) 是

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

例 设 $f(x) = a_0 + a_1 x$. 则

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(a_0 + a_1 b) - (a_0 + a_1 a)}{b - a} = a_1.$$

可以看到, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的平均变率与具体区间无关. 反过来, 若多项式 $f(x)$ 适合: 任取 c, $d \in \mathbb{R}$, $c < d$, 都有

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c}$$

为常数 A, 则

$$d > 0 \implies f(d) = f(0) + Ad.$$

作多项式

$$E(x) = f(0) + Ax - f(x),$$

则任取 $d > 0$, 都有 $E(d) = 0$. 这样, $E(x)$ 是零多项式, 即

$$f(x) = f(0) + Ax.$$

从上面的例可知: 次低于 2 的多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x$ 在任意闭区间 $[a,b]$ 的平均变率都是常数. 我们说, 任取 $t \in \mathbb{R}$, $f(x)$ 在点 t 的变率 (*rate of change*) 是 a_1.

不过, 次高于 1 的多项式有着不一样的平均变率.

例 设 $f(x) = x^2 + x - 1$. 取 $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$. 易知

$$f(a) = -1, \quad f(b) = 1, \quad f(c) = 5.$$

所以, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的平均变率是

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{1 - (-1)}{1 - 0} = 2.$$

而 $f(x)$ 在 $[b,c]$ 的平均变率是

$$\frac{f(c) - f(b)}{c - b} = \frac{5 - 1}{2 - 1} = 4.$$

顺便一提, $f(x)$ 在 $[a,c]$ 的平均变率是

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{5 - (-1)}{2 - 0} = 3.$$

虽然我们现在还不知道任意多项式 $f(x)$ 在点 t 的变率, 但我们还是能作出一些定性判断的.

例 设 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 是多项式. 设想 P_1, P_2 二人同时同地在一条笔直的路上骑车单向前进. 设 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 分别表示 t s 后 P_1, P_2 距始点的距离. 所以, $f_1(x)$ (或 $f_2(x)$) 在 $[a,b]$ 的平均变率代表 a s 至 b s 这一段的平均速率. 如果 $f_1(x)$ (或 $f_2(x)$) 的次为 1, 则平均变率 A 不变, 也就是我们常说的 "匀速直线运动". 我们也说, 任取 $a > 0$, P_1 (或 P_2) 在 a s 的速率都是 A.

设 t_0 s 后, P_1 从后赶上 P_2 并超越之. 这相当于, 存在 $\delta > 0$ 使

$$\begin{aligned} t_0 - \delta < t < t_0 &\implies f_1(t) < f_2(t), \\ t = t_0 &\implies f_1(t) = f_2(t), \\ t_0 < t < t_0 + \delta &\implies f_1(t) > f_2(t). \end{aligned}$$

经验告诉我们, P_1 在 t_0 s 的速率一定不低于 P_2 在 t_0 s 的速率. 若不然, P_1 是不可能赶上 P_2 后并超越之, 是不是?

抽象上面的例, 我们可得到

命题 虽然我们还不能准确地定义变率, 但生活经验告诉我们, 变率应适合如下特性:

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$. 若 $f(t_0) = g(t_0)$, 且存在 $\delta > 0$ 使

$$\begin{aligned} t_0 - \delta < t < t_0 &\implies f(t) < g(t), \\ t_0 < t < t_0 + \delta &\implies f(t) > g(t). \end{aligned}$$

我们说, $f(x)$ 在点 t_0 的变率不低于 $g(x)$ 在点 t_0 的变率.

为充分利用此特性, 我们特化之.

设 $A \in \mathbb{R}$. 取 $g(x) = f(t_0) + A(x - t_0)$, 则 $f(t_0) = g(t_0)$. 因为 $g(x)$ 在 t_0 的变率是 A, 故

命题 变率应适合如下特性:

设 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. 若存在 $\delta_0 > 0$ 使

$$\begin{aligned} t_0 - \delta_0 < t < t_0 &\implies f(t) < f(t_0) + A(t - t_0), \\ t_0 < t < t_0 + \delta_0 &\implies f(t) > f(t_0) + A(t - t_0). \end{aligned}$$

我们说, $f(x)$ 在点 t_0 的变率不低于 A.

若存在 $\delta_1 > 0$ 使

$$\begin{aligned} t_0 - \delta_1 < t < t_0 &\implies f(t) > f(t_0) + A(t - t_0), \\ t_0 < t < t_0 + \delta_1 &\implies f(t) < f(t_0) + A(t - t_0). \end{aligned}$$

我们说, $f(x)$ 在点 t_0 的变率不高于 A.

若 $t_0 - \delta < t < t_0$, 则 $t_0 - t > 0$. 所以

$$\begin{aligned} f(t) < f(t_0) + A(t - t_0) &\iff f(t) < f(t_0) - A(t_0 - t) \\ &\iff A(t_0 - t) < f(t_0) - f(t) \\ &\iff A < \frac{f(t_0) - f(t)}{t_0 - t} \\ &\iff \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} > A. \end{aligned}$$

若 $t_0 < t < t_0 + \delta$, 则 $t - t_0 > 0$. 所以

$$\begin{aligned} f(t) > f(t_0) + A(t - t_0) &\iff f(t) - f(t_0) > A(t - t_0) \\ &\iff \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} > A. \end{aligned}$$

$t_0 - \delta < t < t_0$ 与 $t_0 < t < t_0 + \delta$ 相当于

$$0 < |t - t_0| < \delta.$$

这样, 我们有

命题 变率应适合如下特性:
设 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. 若存在 $\delta > 0$ 使

$$0 < |t - t_0| < \delta \implies \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} > A,$$

我们说, $f(x)$ 在点 t_0 的变率不低于 A.

同理可得

命题 变率应适合如下特性:
设 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. 若存在 $\delta > 0$ 使

$$0 < |t - t_0| < \delta \implies \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} < A,$$

我们说, $f(x)$ 在点 t_0 的变率不高于 A.

现在, 让我们揭秘变率.
设 $t_0 \in \mathbb{R}$. 设 $f(x)$ 的次不高于 n. 根据 Taylor 公式,

$$f(x) = f(t_0) + Df(t_0)(x - t_0) + \sum_{j=2}^{n} \frac{D^j f(t_0)}{j!}(x - t_0)^j.$$

所以, $t \neq t_0$ 时,

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = Df(t_0) + \sum_{j=2}^{n} \frac{D^j f(t_0)}{j!}(t - t_0)^{j-1}.$$

设 $A \in \mathbb{R}$. 则

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} - A = (Df(t_0)-A) + \sum_{j=2}^{n} \frac{D^j f(t_0)}{j!}(t-t_0)^{j-1}.$$

记

$$q(x) = (Df(t_0)-A) + \sum_{j=2}^{n} \frac{D^j f(t_0)}{j!}(x-t_0)^{j-1}.$$

若 $Df(t_0)-A \neq 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使 $0 < |t-t_0| < \delta$ 时, $q(t)$ 与 $Df(t_0)-A$ 同号.

设 $f(x)$ 在点 t_0 的变率为 r. 任取 $A < Df(t_0)$, 必有

$$0 < |t-t_0| < \delta \implies \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} > A \implies r \geq A.$$

任取 $A > Df(t_0)$, 必有

$$0 < |t-t_0| < \delta \implies \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} < A \implies r \leq A.$$

我们证明: $r = Df(t_0)$. 反证法. 若 $r < Df(t_0)$, 作

$$A_0 = \frac{Df(t_0)+r}{2}.$$

不难看出

$$A_0 < \frac{Df(t_0)+Df(t_0)}{2} = Df(t_0),$$

故

$$r \geq A_0 = \frac{Df(t_0)+r}{2} \implies r \geq Df(t_0),$$

矛盾! 若 $r > Df(t_0)$, 作

$$A_1 = \frac{Df(t_0)+r}{2}.$$

不难看出

$$A_1 > \frac{Df(t_0)+Df(t_0)}{2} = Df(t_0),$$

故

$$r \leq A_1 = \frac{Df(t_0) + r}{2} \implies r \leq Df(t_0),$$

矛盾! 所以, r 必为 $Df(t_0)$.

我们得到了本节最重要的命题:

命题 设 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. 设 $t_0 \in \mathbb{R}$. 则 $Df(t_0)$ 是 $f(x)$ 在点 t_0 的变率.

至此, 我们找到了微商的一种含义, 本节的任务终了. 我们就讨论到这里吧. 再见, 读者朋友!

同人作

“啊, 这. ‘查考多项式’ 都能出同人作?”

“还真有人写呢. 不过, 挺烂的. Still better than nothing, though.”

“Fine. I get it.”

整数的一些性质

本文的目标是补充一点整数的性质; 我们后面会用到这些东西.

为尽可能多地照顾读者, 本文被加了一点细节.

我们先从整数的单位开始.

定义 设 f 是整数. 若存在整数 g 使 $fg = 1$, 则说 f 是单位 ($unit$). g 称为 f 的逆 ($inverse$).

命题 1 是单位.

证 因为 $1 \cdot 1 = 1$. ✌

命题 0 一定不是单位.

证 0 与任何整数的积都是 0, 不等于 1. ✌

命题 设 f 是单位. 若整数 g, h 适合 $fg = fh = 1$, 则 $g = h$.

证 因为整数的乘法是交换的、结合的, 故

$$g = g1 = g(fh) = (gf)h = (fg)h = 1h = h.$$ ✌

定义 设 f 是单位. 上个命题指出, f 的逆一定是唯一的 (根据单位的定义, f 的逆当然存在). 我们用 f^{-1} 表示 f 的逆.

命题 设 f 是单位. f 的逆 f^{-1} 也是单位, 且 $(f^{-1})^{-1} = f$.

证 因为 f 是单位, 故存在整数 f^{-1} 使 $ff^{-1} = 1$. 因为乘法可交换, 故 $f^{-1}f = 1$. 所以对整数 f^{-1} 而言, 存在整数 f 使 $f^{-1}f = 1$. 由单位的定义, f^{-1} 是单位. 因为单位的逆唯一, 故 f 是 f^{-1} 的逆. ✌

命题 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是单位. 则 $f_1 f_2 \cdots f_n$ 也是单位, 且

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)^{-1} = f_n^{-1} \cdots f_2^{-1} f_1^{-1}.$$

证　既然 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是单位, 那么它们都有逆, 分别为 $f_1^{-1}, f_2^{-1}, \cdots, f_n^{-1}$. 所以

$$\begin{aligned}
&(f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f_n)(f_n^{-1} f_{n-1}^{-1} \cdots f_2^{-1} f_1^{-1}) \\
=& (f_1 f_2 \cdots f_{n-1})(f_n f_n^{-1})(f_{n-1}^{-1} \cdots f_2^{-1} f_1^{-1}) \\
=& (f_1 f_2 \cdots f_{n-1})(1)(f_{n-1}^{-1} \cdots f_2^{-1} f_1^{-1}) \\
=& (f_1 f_2 \cdots f_{n-1})(f_{n-1}^{-1} \cdots f_2^{-1} f_1^{-1}) \\
=& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
=& f_1 f_1^{-1} \\
=& 1.
\end{aligned}$$

所以, $f_1 f_2 \cdots f_n$ 是单位. 因为单位的逆唯一, 故

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)^{-1} = f_n^{-1} \cdots f_2^{-1} f_1^{-1}.$$ ✌

定义　整数的全体单位称为整数的单位群.

命题　整数的单位群恰由 1 与 -1 作成.

证　1 当然是单位. 因为 $(-1)\cdot(-1) = 1$, 故 -1 也是单位.

设 f 是单位. 所以, 存在整数 g 使 $fg = 1$. 我们证明: $|f| = 1$.

反证法. 若 $|f| > 1$, 则 $|g| = \frac{1}{|f|} < 1$. 因为 g 是整数, 故 $|g|$ 是非负整数, 且 $|g| = 0$. 所以, $g = 0$. 但 $f0 = 0 \neq 1$, 矛盾! 若 $|f| < 1$, 类似地, 有 $f = 0$. 但 $0g = 0 \neq 1$, 矛盾! 所以 $|f|$ 一定是 1.

综上, 整数的单位恰有二个: 1 与 -1. ✌

定义　设 t 是实数. 称最大的且不超过 t 的整数 $\lfloor t \rfloor$ 为 t 的整数部分 (*integer part*); $t - \lfloor t \rfloor$ 为 t 的小数部分 (*fractional part*).

例　读者可能已经知道数学里有一个叫 2π 的数. 如果圆的半径为 r, 则圆的周长是 $2\pi r$, 圆的面积是 $\frac{1}{2}\cdot 2\pi r^2$. 由定义, 知

$$\lfloor 2\pi \rfloor = 6.$$

不过,

$$\lfloor -2\pi \rfloor = -7;$$

不仔细的读者很容易犯错哟.

命题 对任意实数 t,

$$0 \le t - \lfloor t \rfloor < 1.$$

证 $0 \le t - \lfloor t \rfloor$ 是显然的: $\lfloor t \rfloor$ 被定义为最大的且 "不超过" t 的整数. 另一半 $t - \lfloor t \rfloor < 1$ 可以这么看: 既然 $\lfloor t \rfloor$ 被定义为 "最大的" 且不超过 t 的整数, 那么

$$\lfloor t \rfloor + 1 > t.$$

这就是我们所需要的关系. ✌

我们知道, 非负整数有这样的性质:

命题 设 g 是正整数, f 是非负整数. 则必有一对非负整数 q, r 使

$$f = qg + r, \quad 0 \le r < g.$$

例如, 取 $g = 5$, $f = 23$. 不难看出,

$$23 = 4 \cdot 5 + 3.$$

现在, 我们看一看为什么上面的命题是正确的. 顺便一提, 我们可以抛弃一个假定: $f \ge 0$.

还是假定 g 是正整数. $\frac{f}{g}$ 是一个有理数, 当然也是实数. 所以

$$\frac{f}{g} = \underbrace{\left\lfloor \frac{f}{g} \right\rfloor}_{q} + \left(\frac{f}{g} - \left\lfloor \frac{f}{g} \right\rfloor \right).$$

二边同乘 g, 有

$$f = g \cdot q + \underbrace{\left(f - g \left\lfloor \frac{f}{g} \right\rfloor \right)}_{r}.$$

显然 q 与 r 是整数. 注意到 $0 \le \frac{r}{g} < 1$, 所以 $0 \le r < g$.

换句话说, 我们证明了

命题 设 g 是正整数, f 是整数. 则必有一对整数 q, r 使

$$f = qg + r, \quad 0 \leq r < g.$$

设 g 是负整数. 那么 $-g$ 是正整数. 所以, 有一对整数 q, r 使

$$f = q(-g) + r, \quad 0 \leq r < -g.$$

也就是

$$f = (-q)g + r, \quad 0 \leq r < |g|,$$

这里 $|g|$ 代表 g 的绝对值. 综上, 我们证明了 "整数的带余除法":

命题 设 g 是非零整数, f 是整数. 则必有一对整数 q, r 使

$$f = qg + r, \quad 0 \leq r < |g|.$$

还有一个小惊喜: 上述命题的 q 与 r 必定唯一. 设

$$\begin{aligned}&q_1 g + r_1 = q_2 g + r_2,\\&0 \leq r_1 < |g|, \quad 0 \leq r_2 < |g|.\end{aligned}$$

这样

$$|q_1 - q_2||g| = |r_1 - r_2|.$$

不难看出

$$0 - |g| < r_1 - r_2 < |g| + 0,$$

即

$$|r_1 - r_2| < |g|.$$

从而

$$|q_1 - q_2| = \frac{|r_1 - r_2|}{|g|} < \frac{|g|}{|g|} = 1.$$

因为 $|q_1 - q_2|$ 是整数, 故

$$|q_1 - q_2| = 0 \implies q_1 = q_2.$$

进而

$$|r_1 - r_2| = |q_1 - q_2||g| = 0 \implies r_1 = r_2.$$

请读者休息一会儿.

读者或许还记得 “因子” 与 “公因子” 的概念.

定义 设 f, g 是整数. 若存在整数 h 使 $f = gh$, 则说 f 是 g 的倍 (*multiple*), 或 g 是 f 的因子 (*divisor*).

评注 或许, 读者更熟悉 “因数” 与 “倍数”, 而不是 “因子” 与 “倍”. 毕竟, 在小学, 我们就已经接触了 “因数” 与 “倍数”. 之后我们还会利用多项式的带余除法作类似的讨论, 所以作者特地选用了更一般的词.

例 单位是任意整数的因子; 单位只能是单位的倍. 0 只能是 0 的因子; 0 可以是任意整数的倍.

命题 设 f, g, h 是整数. 因子适合如下性质:

(i) f 是 f 的因子;

(ii) 若 h 是 g 的因子, 且 g 是 f 的因子, 则 h 是 f 的因子;

(iii) 若 f 是 g 的因子, 且 g 是 f 的因子, 则存在单位 q 使 $f = qg$;

(iv) 设 k, ℓ 是整数. 若 h 是 f 的因子, 且 h 是 g 的因子, 则 h 是 $kf \pm \ell g$ 的因子;

(v) 若 ε_1, ε_2 是单位, 且 g 是 f 的因子, 则 $\varepsilon_2 g$ 是 $\varepsilon_1 f$ 的因子.

证 (i) 注意到 $f = 1f$, 其中 1 是单位.

(ii) 因为 h 是 g 的因子, 故存在整数 p 使 $g = ph$. 因为 g 是 f 的因子, 故存在整数 q 使 $f = qg$. 所以

$$f = qg = q(ph) = (qp)h.$$

因为 qp 也是整数, 故 h 是 f 的因子.

(iii) 若 $f=0$, 则 $g=0$, 当然有 $f=1g=0$, 其中 1 是单位. 下设 $f\neq 0$.

因为 f 是 g 的因子, 故存在整数 p 使 $g=pf$; 因为 g 是 f 的因子, 故存在整数 q 使 $f=qg$. 所以

$$f=qg=q(pf)=(qp)f.$$

因为 $f\neq 0$, 故可从等式二边消去 f, 即

$$1=qp.$$

由此可知 q 是单位.

(iv) 因为 h 是 f 的因子, 且 h 是 g 的因子, 故存在整数 p, q 使 $f=ph$ 且 $g=qh$. 所以

$$kf\pm\ell g=k(ph)\pm\ell(qh)=(kp)h\pm(\ell q)h=(kp\pm\ell q)h.$$

(v) 若存在整数 q 使 $f=gq$, 则

$$\varepsilon_1 f=g(\varepsilon_1 q)=g(\varepsilon_2\varepsilon_2^{-1})(\varepsilon_1 q)=(g\varepsilon_2)(\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_1 q).$$

因为单位的逆是整数, 且 (有限多个) 整数的积是整数, 故 $\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_1 q$ 是整数. 从而 $\varepsilon_2 g$ 是 $\varepsilon_1 f$ 的因子. ✌

为方便, 我们定义一个新词.

定义 设 f, g 是整数. 若存在单位 ε 使 $f=\varepsilon g$, 则说 f 是 g 的相伴 ($associate$). 因为

$$g=1g=(\varepsilon^{-1}\varepsilon)g=\varepsilon^{-1}(\varepsilon g)=\varepsilon^{-1}f,$$

故 g 当然也是 f 的相伴. 所以, 我们说 f 与 g 相伴 ($to\ be\ associate$).

显然, 因为 $f=1f$, 故 f 与 f 相伴. 上面的文字已经说明 f 与 g 相伴相当于 g 与 f 相伴. 我们还有下面的

命题 设 f, g, h 是整数. 若 f 与 g 相伴, 且 g 与 h 相伴, 则 f 与 h 相伴.

证 因为 f 与 g 相伴, 故存在单位 ε_1 使 $f=\varepsilon_1 g$. 因为 g 与 h 相伴, 故存在单位 ε_2 使 $g=\varepsilon_2 h$. 所以

$$f=\varepsilon_1 g=\varepsilon_1(\varepsilon_2 h)=(\varepsilon_1\varepsilon_2)h.$$

因为 $\varepsilon_1\varepsilon_2$ 是单位, 故 f 与 g 相伴. ✌

根据 (iii), 我们有

命题 设 f, g 是整数. f 与 g 相伴的一个必要与充分条件是 f 是 g 的因子, 且 g 是 f 的因子.

定义 设 f, g 是整数. 若 d 是 f 的因子, 且 d 是 g 的因子, 则 d 是 f 与 g 的公因子 (*common divisor*).

例 单位是任意二个整数的公因子.

现在我们引出 "最大公因子" 的概念.

定义 设 f, g 是整数. 适合下述二性质的整数 d 是 f 与 g 的最大公因子 (*greatest common divisor*):

(i) d 是 f 与 g 的公因子;

(ii) 若 e 是 f 与 g 的公因子, 则 e 是 d 的因子.

评注 或许, 读者更熟悉这句话 (小学里学到的定义): "设 f, g 是二个整数. f 与 g 的公因数的最大者是 f 与 g 的最大公因数. "

由定义立即可得

命题 设 f, g 是整数. 若 d_1 与 d_2 都是 f 与 g 的最大公因子, 则 d_1 与 d_2 相伴.

证 因为 d_1 是 d_2 的因子, 且 d_2 也是 d_1 的因子. ✌

评注 由此可见, 最大公因子不一定是唯一的. 但这不是很重要.

例 不难看出, $d=f$ 是 0 与 f 的最大公因子: (i) d 是 0 的因子, 且 d 是 f 的因子; (ii) 若 e 是 0 与 f 的公因子, 则 e 当然是 d (即 f) 的因子.

例 设 ε 是单位. 不难看出, $d=\varepsilon$ 是 ε 与 f 的最大公因子: (i) d 是 ε 的因子, 且 d 是 f 的因子; (ii) 若 e 是 ε 与 f 的公因子, 则 e 当然是 d (即 ε) 的因子.

命题 设 f, g, q 是整数. 设 f 与 g 的最大公因子是 d_1; 设 $f-gq$ 与 g 的最大公因子是 d_2. 则 d_1 与 d_2 相伴.

证 因为 d_1 是 f 与 g 的公因子, 故 d_1 是 $1\cdot f-q\cdot g$ 的因子. 这说明, d_1 是 $f-gq$ 与 g 的公因子. 因为 d_2 是 $f-gq$ 与 g 的最大公因子, 故 d_1 是 d_2 的因子.

因为 d_2 是 $f-gq$ 与 g 的公因子, 故 d_2 是 $1\cdot(f-gq)+q\cdot g$ 的因子. 这说明, d_2 是 f 与 g 的公因子. 因为 d_1 是 f 与 g 的最大公因子, 故 d_2 是 d_1 的因子.

综上, d_1 与 d_2 相伴. ✌

我们现在可以证明

命题 设 f, g 是整数. f 与 g 的最大公因子一定存在.

证 无妨假定 g 不是 0. 所以, 根据带余除法, 有

$$f=gq_0+r_0,\quad 0\le r_0<|g|.$$

根据上一个命题, r_0 与 g 的最大公因子是 f 与 g 的最大公因子. 若 $r_0=0$, 则 g 就是 0 与 g (从而也是 f 与 g) 的最大公因子. 若 $r_0\ne 0$, 则

$$g=r_0q_1+r_1,\quad 0\le r_1<r_0.$$

根据上一个命题, r_1 与 r_0 的最大公因子是 r_0 与 g 的最大公因子, 所以也是 f 与 g 的最大公因子. 若 $r_1=0$, 则 r_0 就是 0 与 r_0 (从而也是 f 与 g) 的最大公因子. 若 $r_1\ne 0$, 则

$$r_0=r_1q_2+r_2,\quad 0\le r_2<r_1.$$

这个过程必定会在有限步后停止. 反证法. 如果此过程可一直进行下去, 则我们可得到无限多个正整数 $r_0, r_1, \cdots$ 使

$$|g|>r_0>r_1>\cdots>r_k>r_{k+1}>\cdots.$$

可是, 不存在无限递降的正整数列 (低于 $|g|$ 的正整数至多有 $|g|-1$ 个), 矛盾!

为方便, 分别称 f 与 g 为 r_{-2} 与 r_{-1}. 根据上面的分析, 一定存在整数 n 使

$$r_{\ell-2} = r_{\ell-1}q_\ell + r_\ell, \quad 0 < r_\ell < |r_{\ell-1}|, \quad \ell = 0, 1, \cdots, n-2;$$
$$r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1}.$$

r_{n-2} 是 0 与 r_{n-2} 的最大公因子, 也是 r_{n-2} 与 r_{n-3} 的最大公因子, 也是 r_{n-3} 与 r_{n-4} 的最大公因子……也是 r_{-2} 与 r_{-1} 的最大公因子. 所以, r_{n-2} 是 f 与 g 的最大公因子. ✌

这个命题的证明过程事实上也给出了一个计算二个整数的最大公因子的算法.

例 设 $f = 2\,116$, $g = 667$. 我们来找一个 f 与 g 的最大公因子.

不难作出如下计算:

$$2\,116 = 667 \cdot 3 + 115,$$
$$667 = 115 \cdot 5 + 92,$$
$$115 = 92 \cdot 1 + 23,$$
$$92 = 23 \cdot 4.$$

所以, 23 是 92 与 115 的最大公因子, 是 115 与 667 的最大公因子, 是 667 与 2 116 的最大公因子.

当然, 读者不难说明, -23 是另一个最大公因子. ± 23 是 f 与 g 唯二的最大公因子.

根据上面的计算, 我们有

$$1 \cdot 115 + (-1) \cdot 92 = 23.$$

又因为

$$92 = 1 \cdot 667 + (-5) \cdot 115,$$

故

$$1 \cdot 115 + (-1 \cdot 1) \cdot 667 + (-1 \cdot (-5)) \cdot 115 = 23,$$

即

$$6 \cdot 115 + (-1) \cdot 667 = 23.$$

又因为

$$115 = 1 \cdot 2\,116 + (-3) \cdot 667,$$

故

$$(6 \cdot 1) \cdot 2\,116 + (6 \cdot (-3)) \cdot 667 + (-1) \cdot 667 = 23,$$

即

$$6 \cdot 2\,116 + (-19) \cdot 667 = 23.$$

一般地, 我们有

命题 设 f, g 是整数. 设 d 是 f 与 g 的最大公因子. 存在整数 s 与 t 使

$$sf + tg = d.$$

这个等式的一个名字是 Bézout 等式 (*Bézout's identity*).

证 若 $f = g = 0$, 则可取 $s = t = 0$. 下设 $g \neq 0$.

为方便, 分别称 f 与 g 为 r_{-2} 与 r_{-1}. 设存在整数 n 使

$$\begin{aligned}
&r_{\ell-2} = r_{\ell-1}q_\ell + r_\ell, \quad 0 < r_\ell < |r_{\ell-1}|, \quad \ell = 0, 1, \cdots, n-2; \\
&r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1}.
\end{aligned}$$

为方便, 记

$$r_\ell = 0, \quad \ell \geq n-1.$$

我们用数学归纳法证明辅助命题 $P(\ell)$: 任取非负整数 ℓ, 必有二整数 s, t 使

$$r_\ell = sf + tg.$$

r_0 可写为

$$r_0 = 1r_{\ell-2} + (-q_0)r_\ell = 1f + (-q_0)g.$$

r_1 可写为

$$r_1 = 1r_{-1} + (-q_1)r_0 = (-q_1)f + (1 + q_0 q_1)g.$$

所以 $P(0)$ 与 $P(1)$ 正确. 假定 $P(0)$, $P(1)$, ···, $P(k-1)$ 正确. 我们的目标是: 推出 $P(k)$ 正确. 若 $k \geq n-1$, 则

$$r_k = 0 = 0f + 0g.$$

若 $k \leq n-2$, 则根据归纳假设, 存在整数 u, v, z, w 使

$$r_{k-2} = uf + vg, \quad r_{k-1} = zf + wg.$$

所以

$$r_k = r_{k-2} - r_{k-1}q_k = (u - zq_k)f + (v - wq_k)g.$$

因为 $u - zq_k$ 与 $v - wq_k$ 均为整数, 故 $P(k)$ 正确.

所以, 存在整数 s, t 使

$$sf + tg = r_{n-2}.$$

因为 r_{n-2} 与 d 都是 f 与 g 的最大公因子, 故 $d = \varepsilon r_{n-2}$, 其中 ε 是单位. 所以

$$(\varepsilon s)f + (\varepsilon t)g = d.$$ ✌

有了最大公因子的概念, 我们可以引出 “互素”:

定义 设 f, g 是整数. 若单位是 f 与 g 的最大公因子, 则称 f 与 g 互素 (*to be relatively prime*).

例 显然, 单位与任意整数都互素.

下面给出一个极重要的命题:

命题 设 f, g 是整数. f 与 g 互素的一个必要与充分条件是: 存在整数 s, t 使

$$sf + tg = 1.$$

证 先看必要性. 显然; 这是 Bézout 等式的结果.

再看充分性. 设 d 是 f 与 g 的最大公因子. 因为 $sf + tg = 1$, 故 d 是 1 的因子. 这样, d 一定是单位. ✌

下面是几个关于互素的性质.

命题 设 f, g, h 是整数. 互素有如下性质:

(i) 若 h 是 fg 的因子, 且 h 与 f 互素, 则 h 是 g 的因子;

(ii) 若 f 与 g 互素, 且 f 与 h 互素, 则 f 与 gh 互素;

(iii) 若 f 是 h 的因子, g 是 h 的因子, 且 f 与 g 互素, 则 fg 是 h 的因子.

证 (i) 因为 h 与 f 互素, 故存在整数 s 与 t 使

$$sh + tf = 1.$$

所以

$$(gs)h + t(fg) = g.$$

因为 h 是 h 的因子, 且 h 是 fg 的因子, 故 h 是 $g = (gs)h + t(fg)$ 的因子.

(ii) 因为 f 与 g 互素, 故存在整数 u, v 使

$$uf + vg = 1.$$

因为 f 与 h 互素, 故存在整数 s, t 使

$$sf+th=1.$$

从而

$$1=(uf+vg)(sf+th)=(ufs+uth+vgs)f+(vt)(gh).$$

所以 f 与 gh 互素.

(iii) 因为 f 是 h 的因子, 故存在整数 p 使 $h=fp$. 因为 g 是 $h=fp$ 的因子, 且 f 与 g 互素, 故由 (i) 知 g 是 p 的因子. 设 $p=gq$. 这样

$$h=fp=f(gq)=(fg)q,$$

故 fg 是 h 的因子. ✌

感谢您的阅读. 请休息一会儿.

现在我们推广公因子、最大公因子、互素的概念.

前面, 我们讨论了二个整数的公因子、最大公因子、互素; 现在, 我们从量的角度推广.

定义 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是整数. 若 d 是 f_1 的因子, d 是 f_2 的因子…… d 是 f_n 的因子, 则 d 是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的公因子.

评注 我们并没有禁止 n 取 1. 同理, 一个整数也可以有 "最大公因子"; 一个整数也可以 "互素".

作为练习, 请读者证明

命题 设 $k_1, k_2, \cdots, k_n, f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是整数. 若 d 是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的公因子, 则 d 是 $k_1f_1+k_2f_2+\cdots+k_nf_n$ 的因子.

定义 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是整数. 适合下述二性质的整数 d 是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的最大公因子:

(i) d 是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的公因子;

(ii) 若 e 是 d 是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的公因子, 则 e 是 d 的因子.

由定义立即可得

命题 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是整数. 若 d_1 与 d_2 都是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的最大公因子, 则 d_1 与 d_2 相伴.

证 因为 d_1 是 d_2 的因子, 且 d_2 也是 d_1 的因子. ✌

命题 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是整数.

(i) $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的最大公因子存在;

(ii) 若 d 是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的最大公因子, 则存在整数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 使

$$u_1 f_1 + u_2 f_2 + \cdots + u_n f_n = d.$$

证 (i) 对 n 用数学归纳法. 显然, $n = 1$ 或 $n = 2$ 时, 命题成立. 设 $n = k$ $(k \geq 2)$ 时命题成立, 即: $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 的最大公因子存在.

今看 $n = k + 1$ 时的情形. 令 d_k 为 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 的最大公因子. 令 d 为 d_k 与 f_{k+1} 的最大公因子. 我们证明: d 是 $f_1, f_2, \cdots, f_k, f_{k+1}$ 的最大公因子.

首先, d 是 $f_1, f_2, \cdots, f_k, f_{k+1}$ 的公因子. d 当然是 f_{k+1} 的因子. 固定某个 1 至 k 间的 ℓ. 因为 d 是 d_k 的因子, 而 d_k 是 f_ℓ 的因子, 故 d 是 f_ℓ 的因子. 这样, d 确为 $f_1, f_2, \cdots, f_k, f_{k+1}$ 的公因子.

其次, 若 e 是 $f_1, f_2, \cdots, f_k, f_{k+1}$ 的公因子, 则 e 当然是 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 的公因子, 故 e 是 d_k 的因子. 又因为 e 是 f_{k+1} 的因子, 则 e 是 d_k 与 f_{k+1} 的公因子. 这样, e 是 d 的因子.

根据最大公因子的定义, d 一定是 $f_1, f_2, \cdots, f_k, f_{k+1}$ 的最大公因子. 所以, $n = k + 1$ 时, (i) 正确.

(ii) 对 n 用数学归纳法. 显然, $n = 1$ 或 $n = 2$ 时, 命题成立. 设 $n = k$ $(k \geq 2)$ 时命题成立, 即: 若 d_k 是 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 的最大公因子, 则存在整数 $u_1, u_2, \cdots, u_k$ 使

$$u_1 f_1 + u_2 f_2 + \cdots + u_k f_k = d_k.$$

今看 $n = k + 1$ 时的情形. 令 d 为 d_k 与 f_{k+1} 的最大公因子. 由 (i) 知, d 是 $f_1, f_2, \cdots, f_k, f_{k+1}$ 的最大公因子. 由 Bézout 等式知, 存在整数 u, u_{k+1} 使

$$u d_k + u_{k+1} f_{k+1} = d.$$

根据归纳假设, 存在整数 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 使

$$v_1f_1 + v_2f_2 + \cdots + v_kf_k = d_k.$$

这样

$$(uv_1)f_1 + (uv_2)f_2 + \cdots + (uv_k)f_k + u_{k+1}f_{k+1} = d.$$

所以, $n = k+1$ 时, (ii) 正确. ✌

跟之前一样, 有了最大公因子的概念, 我们可以引出 “互素”:

定义 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是整数. 若单位是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的最大公因子, 则称 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 互素.

下面的命题也是十分自然的.

命题 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是整数. $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 互素的一个必要与充分条件是: 存在整数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 使

$$u_1f_1 + u_2f_2 + \cdots + u_nf_n = 1.$$

证 先看必要性. 显然; 这是上个命题的结果.

再看充分性. 设 d 是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的最大公因子. 因为 $u_1f_1 + u_2f_2 + \cdots + u_nf_n = 1$, 故 d 是 1 的因子. 这样, d 一定是单位. ✌

我们再讨论互素的一个性质.

命题 设整数 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 不全是零.

(i) $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的最大公因子 d 不是零;

(ii) 任取 1 至 n 间的整数 ℓ, 必有 (唯一的) 整数 g_ℓ 使 $f_\ell = dg_\ell$;

(iii) 单位是 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 的最大公因子; 换句话说, $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 互素;

(iv) 反过来, 若整数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 互素, 则 w 是 $wu_1, wu_2, \cdots, wu_n$ 的最大公因子.

证 (i) 零一定不是非零整数的因子, 故零不是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的公因子, 当然也不是最大公因子.

(ii) 既然 d 是最大公因子, 当然也是公因子. 对 f_ℓ 而言, 由因子的定义, 知: 存在整数 g_ℓ 使 $f_\ell = dg_\ell$. 现在看唯一性. 假定 $f_\ell = dg_\ell = dg'_\ell$. 因为 $d \neq 0$, 故可从等式二边消去 d, 即 $g_\ell = g'_\ell$.

(iii) 设 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 的最大公因子是 δ. 这样, 由 (ii), 知: 对任意 g_ℓ, 有整数 h_ℓ 使 $g_\ell = \delta h_\ell$. 所以

$$f_\ell = dg_\ell = d(\delta h_\ell) = (d\delta)h_\ell.$$

所以 $d\delta$ 是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的公因子. 所以 $d\delta$ 是 d 的因子. d 显然是 $d\delta$ 的因子, 故 $d\delta = \varepsilon d$, 其中 ε 是单位. 因为 $d \neq 0$, 故可从等式二边消去 d, 即 $\delta = \varepsilon$.

(iv) 若 $w = 0$, 命题显然成立: $0, 0, \cdots, 0$ 的最大公因子当然是 0. 下设 $w \neq 0$.

w 显然是 $wu_1, wu_2, \cdots, wu_n$ 的公因子. 设 ws 是 $wu_1, wu_2, \cdots, wu_n$ 的最大公因子, 这里 s 是某个整数. 由 (ii), 对每个 wu_ℓ, 都有整数 q_ℓ 使 $wu_\ell = wsq_\ell$. 因为 $w \neq 0$, 故可从等式二边消去 w, 即 $u_\ell = sq_\ell$. 这样, s 是 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的公因子, 故 s 是单位的因子, 即 s 是单位. 所以 w 是 $wu_1, wu_2, \cdots, wu_n$ 的最大公因子. ✌

例 读者可能还记得, 有理数是全体形如 $\frac{p}{q}$ 的数, 其中 p, q 为整数, 且 $q \neq 0$. 我们说, 每一个有理数都可以写为 $\frac{m}{n}$, 其中 m 为整数, n 为正整数, 且 m 与 n 互素. 通俗地说, 就是 "每个分数†都可以约分". 有了上面的整数知识, 我们可以解释为什么.

任取有理数 $\frac{P}{Q}$. 若 $Q < 0$, 则令 $q = -Q$, $p = -P$; 若 $Q > 0$, 则令 $q = Q$, $p = P$. 所以

$$\frac{P}{Q} = \frac{p}{q}, \quad q > 0.$$

既然 $q \neq 0$, 那么 p 与 q 的最大公因子不是零. 令 d 是正的最大公因子. 这样, 必有 (唯一的) 整数 m, n 使 $p = dm$, $q = dn$. 所以

$$\frac{p}{q} = \frac{dm}{dn} = \frac{m}{n}.$$

† 有理数也叫分数.

因为 $q>0$, $d>0$, 故 $n>0$. 根据上个命题, m 与 n 互素.

这是一个相当常见的事实.

评注 其实读者在小学或中学一定见过 (甚至用过) 本文的很多命题, 所以这些命题是自然的 (不凸兀的). 本文的目的有:

(i) 总结与 “查考多项式” (原作) 相关的整数性质. 同人作还会讨论原作未讨论的多项式理论, 而部分内容要求读者了解整数的稍深的知识.

(ii) 相对系统地为读者展示初等数论初步 (的初步) 理论. 本文相对独立; 或者说, 读者就算没读原作, 也可以只读 “整数的一些性质”.

(iii) 杀作者的时间. 这是最重要的点; 或者说, 上面二点都是胡扯.

请读者休息一下. 等会儿还有一点东西呢.

现在, 我们讨论不可约的整数.

定义 设整数 f 既不是 0, 也不是单位.

(i) 若存在二个不全为单位的整数 f_1, f_2 使 $f=f_1f_2$, 则 f 是可约的 (*reducible*).

(ii) 若 f 不是可约的, 则说 f 是不可约的 (*irreducible*). 换言之, 若 f 是不可约的, 则 “整数 f_1, f_2 使 $f=f_1f_2$” 可推出 “f_1 是单位或 f_2 是单位”.

评注 或许, 读者还能记起素数† (*prime number*) 的定义:

设整数 $f>1$. 若 “正整数 f_1, f_2 使 $f=f_1f_2$” 可推出 “$f_1=1$ 或 $f_2=1$”, 则 f 是素数.

作者当然可以不用 “不可约的整数”; 但是, 为了让读者更好地体会到整数与多项式的相似的地方, 作者还是使用了一般的词.

评注 0 或单位既不是可约的, 也不是不可约的.

例 2 是不可约的.

设整数 f_1, f_2 适合 $f_1f_2=2$. 所以, $|f_1||f_2|=2$.

设 $|f_1|\le|f_2|$. 这样, 由 $|f_1|^2\le|f_1||f_2|=2$ 知 $|f_1|\le 1$; 由 $|f_2|^2\ge|f_1||f_2|=2$ 知 $|f_2|\ge 2$. f_1 当然不为零, 故 $|f_1|$ 一定是 1. 所以 $f_1=\pm1$.

† “素数” 的一个同义词是 “质数”.

若设 $|f_1| > |f_2|$, 可得 $|f_1|^2 > 2$, 且 $|f_2|^2 < 2$. 这样, 因为 f_2 不为零, 有 $|f_2| = 1$. 所以 $f_2 = \pm 1$.

不管怎么样, 我们已经证明了 "整数 f_1, f_2 使 $2 = f_1 f_2$" 可推出 "f_1 是单位或 f_2 是单位". 这样, 2 是不可约的.

类似地, 读者可 (几乎完全一样地) 证明: 3 是不可约的.

例 6 是可约的: $6 = 2 \cdot 3$, 而 2 不是单位, 3 也不是单位.

命题 设整数 p 既不是 0, 也不是单位. 设 ε 是单位. 若 p 是不可约的, 则 εp 也是不可约的.

证 设二整数 f_1, f_2 使 $\varepsilon p = f_1 f_2$. 所以, $p = (\varepsilon^{-1} f_1)(f_2)$. 因为 p 是不可约的, 故 $\varepsilon^{-1} f_1$ 是单位或 f_2 是单位. 这也就是说, f_1 是单位或 f_2 是单位. 所以, εp 是不可约的. ✌

命题 设整数 p 既不是 0, 也不是单位. 下述四命题等价:

(i) 若整数 f_1, f_2 使 $f = f_1 f_2$, 则 f_1 是单位或 f_2 是单位;

(ii) 对任意整数 f, 要么 p 是 f 的因子, 要么 p 与 f 互素 (二者不会同时发生);

(iii) 若 f, g 是整数, 且 p 是 fg 的因子, 则 p 是 f 的因子, 或 p 是 g 的因子;

(iv) 不存在整数 f_1, f_2 使 $p = f_1 f_2$, 且 $|f_1| < |p|$, $|f_2| < |p|$.

证 (i) $\Rightarrow$ (ii): 任取整数 f. 设 d 是 p 与 f 的最大公因子. 所以, 存在整数 g 使 $p = dg$. 所以, d 是单位或 g 是单位. 若 d 是单位, 则单位是 p 与 f 的最大公因子, 即 p 与 f 互素; 若 g 是单位, 则 $d = pg^{-1}$, 故 p 是 f 的因子.

若二者同时发生, 则 d 是单位且 g 是单位, 故 p 也是单位. 这与 p 不是单位矛盾.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 若 p 是 f 的因子, 则不必证了. 今假设 p 不是 f 的因子. 所以, p 与 f 互素. 因为 p 是 fg 的因子, 故 p 一定是 g 的因子.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): 反证法. 设 $p = f_1 f_2$, 且 $|f_1| < |p|$, $|f_2| < |p|$. 因为 $p \neq 0$, 故 $f_1 \neq 0$, 且 $f_2 \neq 0$. 所以, $|f_1| \geq 1$, 且 $|f_2| \geq 1$. 既然 $p = f_1 f_2$, p 当然是 $f_1 f_2$ 的因子. 所以, p 是 f_1 的因子, 或 p 是 f_2 的因子. 若 p 是 f_1 的因子,

则存在整数 g_1 使 $f_1 = pg_1$. 因为 $f_1 \neq 0$, 故 $g_1 \neq 0$. 这样, $|g_1| \geq 1$. 所以 $|f_1| = |p||g_1| \geq |p|$. 这与假定 $|f_1| < |p|$ 矛盾! 类似地, 若 p 是 f_2 的因子, 也有 $|f_2| \geq |p|$, 矛盾! 综上, 这样的 f_1 与 f_2 不存在.

(iv) $\Rightarrow$ (i): 这说明: 若整数 f_1, f_2 使 $p = f_1 f_2$, 则 $|f_1| \geq |p|$ 或 $|f_2| \geq |p|$. 若 $|f_1| \geq |p|$, 则 $|p| = |f_1||f_2| \geq |p||f_2|$, 故 $|f_2| \leq 1$ (因为 $p \neq 0$, 故 $|p| \neq 0$, 从而可从不等式二边消去正因子), 即 $f_2 = \pm 1$ (因为 f_2 不能为 0), 即 f_2 是单位. 类似地, 若 $|f_2| \geq |p|$, 则 f_1 是单位. ✌

评注 利用 (iii) 与数学归纳法, 读者可得如下结论 (作为练习):

设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是整数. 设整数 p 是不可约的. 若 p 是 $f_1 f_2 \cdots f_n$ 的因子, 则存在 1 至 n 间的整数 ℓ, 使 p 是 f_ℓ 的因子.

评注 设整数 f 既不是 0, 也不是单位. (iv) 表明, “f 是可约的” 的一个必要与充分条件是 “存在二个整数 f_1, f_2, 使 $f = f_1 f_2$, 且 $|f_1| < |f|$, $|f_2| < |f|$”.

下面是关于不可约的整数的积的命题.

命题 设整数 $p_1, p_2, \cdots, p_m, q_1, q_2, \cdots, q_n$ 都是不可约的. 设

$$p_1 p_2 \cdots p_m = q_1 q_2 \cdots q_n.$$

(i) $m = n$;

(ii) 可以适当地调换 $q_1, q_2, \cdots, q_m$ (注意, $n = m$) 的顺序, 使任取 1 至 m 间的整数 ℓ, p_ℓ 与 q_ℓ 相伴.

证 对等式左侧的不可约的整数的数目 m 用数学归纳法. 当 $m = 1$ 时, 有

$$p_1 = q_1 q_2 \cdots q_n.$$

先证明: $n = 1$. 反证法. 设 $n > 1$. 因为 $p_1 = q_1 q_2 \cdots q_n$, 故 p_1 是某个 q_i 的因子 (i 是某个 1 至 n 间的整数). 因为乘法可交换, 不失一般性, 设 p_1 是 q_1 的因子. 因为 q_1 是不可约的, 且 q_1 与 p_1 不是互素的, 故 q_1 也是 p_1 的因子. 所以, 存在单位 ε 使 $q_1 = \varepsilon p_1$. 进而

$$p_1 = (\varepsilon p_1) q_2 \cdots q_n = p_1 (\varepsilon q_2) \cdots q_n.$$

因为 $p_1 \neq 0$, 故可从等式二边消去 p_1, 即

$$1 = (\varepsilon q_2) \cdots q_n.$$

因为 q_2 是不可约的, 故 εq_2 也是不可约的. 上式表明, εq_2 是 1 的因子, 故 εq_2 是单位. 这与假定矛盾! 所以, n 不可大于 1. 这样, $n = 1$.

既然 $n = 1$, 那么 $p_1 = q_1$. 所以, 不必调换顺序即可知 p_1 与 q_1 相伴.

所以, $m = 1$ 时, 命题成立.

假定 $m = k$ 时, 命题成立. 现在看 $m = k + 1$ 时的情形. 设 $p_1, p_2, \cdots, p_k, p_{k+1}, q_1, q_2, \cdots, q_n$ 是不可约的. 设

$$p_1 p_2 \cdots p_k p_{k+1} = q_1 q_2 \cdots q_n.$$

因为 p_1 是 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 的因子, 故 p_1 是某个 q_j 的因子 (j 是某个 1 至 n 间的整数). 因为乘法可交换, 不失一般性, 设 p_1 是 q_1 的因子. 因为 q_1 是不可约的, 且 q_1 与 p_1 不是互素的, 故 q_1 也是 p_1 的因子. 所以, 存在单位 ε' 使 $q_1 = \varepsilon' p_1$. 进而

$$p_1 p_2 \cdots p_k p_{k+1} = (\varepsilon' p_1) q_2 \cdots q_n = p_1 (\varepsilon' q_2) \cdots q_n.$$

因为 $p_1 \neq 0$, 故可从等式二边消去 p_1, 即

$$p_2 \cdots p_k p_{k+1} = (\varepsilon' q_2) \cdots q_n.$$

因为 q_2 是不可约的, 故 $\varepsilon' q_2$ 也是不可约的. 上式左侧的不可约的整数的数目是 k. 根据归纳假设, $n - 1 = k$, 即 $n = k + 1$. 这证明了 $m = k + 1$ 时 (i) 成立.

前面已证得, 适当地调换 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的顺序, 可使 p_1 与 q_1 相伴. 根据归纳假设, 可以适当地调换 $\varepsilon' q_2, \cdots, q_{k+1}$ (注意, $n = k + 1$) 的顺序, 使任取 3 至 $k + 1$ 间的整数 u, p_u 与 q_u 相伴. 当然 p_2 与 $\varepsilon' q_2$ 也相伴. 因为 $\varepsilon' q_2$ 与 q_2 相伴, 所以 p_2 与 q_2 相伴. 把这些事实放在一块儿, 就是: 可以适当地调换 $q_1, q_2, \cdots, q_{k+1}$ 的顺序, 使任取 1 至 $k + 1$ 间的整数 ℓ, p_ℓ 与 q_ℓ 相伴. 这样, $m = k + 1$ 时, (ii) 成立. ✌

命题 设整数 f 既不是 0, 也不是单位. 存在不可约的整数 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 使

$$f = p_1 p_2 \cdots p_m.$$

证 对 f 的绝对值 N 用数学归纳法. 因为 f 既不是 0, 也不是单位, 故 $N \geq 2$. $N=2$ 时, $f=\pm 2$. 我们已经知道, 2 是不可约的; 所以, -2 也是不可约的. 这样, f 是不可约的, 故存在不可约的整数 $p_1=f$ 使 $f=p_1$. 这样, $N=2$ 时, 命题成立.

设 $N \leq k$ $(k \geq 2)$ 时, 命题成立. 考虑 $N=k+1$. 若 f 是不可约的, 则存在不可约的整数 $p_1=f$ 使 $f=p_1$. 若 f 是可约的, 则存在二整数 f_1, f_2, 使 $f=f_1f_2$, 且 $|f_1|<|f|$, $|f_2|<|f|$. 所以 $|f_1| \leq |f|-1=k$, $|f_2| \leq |f|-1=k$. 根据归纳假设, 存在不可约的整数 $p_1, p_2, \cdots, p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, \cdots, p_m$ 使

$$f_1=p_1p_2\cdots p_i, \quad f_2=p_{i+1}p_{i+2}\cdots p_m.$$

所以

$$f=f_1f_2=p_1p_2\cdots p_ip_{i+1}p_{i+2}\cdots p_m.$$

故 $N=k+1$ 时, 命题也成立. ✌

合并上二个命题, 可得 "算术基本定理" (*the fundamental theorem of arithmetic*):

命题 设整数 f 既不是 0, 也不是单位.

(i) 存在不可约的整数 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 使

$$f=p_1p_2\cdots p_m;$$

(ii) 若 $q_1, q_2, \cdots, q_m, s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是不可约的整数, 且

$$f=q_1q_2\cdots q_m=s_1s_2\cdots s_n,$$

则 $m=n$, 且可以适当地调换 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ 的顺序, 使任取 1 至 m 间的整数 ℓ, q_ℓ 与 s_ℓ 相伴.

评注 或许, 读者更熟悉这个命题:

设整数 $f>2$.

(i) 存在素数[†] $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 使

$$f=p_1p_2\cdots p_m;$$

[†] 这里的 "素数" 当然是正的不可约的整数.

(ii) 若 $q_1, q_2, \cdots, q_m, s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是素数, 且

$$f = q_1 q_2 \cdots q_m = s_1 s_2 \cdots s_n,$$

则 $m = n$, 且可以适当地调换 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ 的顺序, 使任取 1 至 m 间的整数 ℓ, $q_\ell = s_\ell$.

作者承认, 这才是原版 "算术基本定理". 不过, 为了消除一些不本质的差异, 作者还是使用了 "不可约的整数" 版.

我们以一个简单的命题结束本文.

命题 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是整数. $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 互素的一个必要与充分条件是: 任取不可约的整数 p, 存在某个 f_i, 使 p 不是 f_i 的因子.

证 先看必要性. 反证法. 假定结论不成立, 即: 存在不可约的整数 p, 使任取 f_i, p 是 f_i 的因子. 这样, p 就是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的公因子. 所以, p 是单位的因子. 矛盾!

再看充分性. 还是反证法. 假定结论不成立, 即: 设 d 是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的最大公因子, 且 d 不是单位. 若 d 是 0, 则 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 全是 0, 故任意的不可约的整数都是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的公因子, 矛盾! 若 d 不是 0, 也不是单位, 那么一定存在不可约的整数 p_0, 使 p_0 是 d 的因子 (由上个命题, 显然). 所以, 存在不可约的整数 p_0, 使任取 f_i, p_0 是 f_i 的因子. 矛盾! ✌

本文就到这里. 再见, 亲爱的读者朋友!

多项式的一些性质

本文的目标是补充一点多项式的性质; 我们后面会用到这些东西.

为尽可能多地照顾读者, 本文被加了一点细节.

$\mathbb{F}$ 表示全体有理数 (或实数、复数) 作成的集. $\mathbb{F}[x]$ 是全体系数为 $\mathbb{F}$ 的元的多项式作成的集. 在本文 "多项式的一些性质" 里, 我们约定: "多项式" 都是 $\mathbb{F}[x]$ 的元, 而 "数" "常数" 都是 $\mathbb{F}$ 的元 (当然也是多项式). "整数" 还是读者熟悉的整数; 当然, 这也是多项式.

读者可能还记得, 我们写多项式时, 一般都会带 "(x)" 记号:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

这个记号的优点有: (i) 清楚地表示出多项式的不定元为 x; (ii) 若 t 是数, 可用 $f(t)$ 表示数

$$a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n;$$

(iii) 若 $g(x)$ 是多项式, 可用 $f(g(x))$ 表示多项式

$$a_0 + a_1 g(x) + \cdots + a_n (g(x))^n.$$

不过, 在本文里, 我们一般不干 (ii) (iii) 这二件事. 所以, 为了方便, 我们也写

$$f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

在正式进入讨论前, 作者希望读者能回想起二件事:

(i) 多项式 f 的次用 $\deg f$ 表示. 零多项式的次是 $-\infty$. 若多项式 g, h 适合 $f = gh$, 则

$$\deg f = \deg g + \deg h.$$

(ii) 多项式的乘法适合消去律. 设 f, g, h 是多项式. 若 $f \neq 0$, 且 $fg = fh$, 则 $g = h$.

我们先从多项式的单位开始.

定义 设 f 是多项式. 若存在多项式 g 使 $fg = 1$, 则说 f 是单位 (*unit*). g 称为 f 的逆 (*inverse*).

命题 1 是单位.

证 因为 $1 \cdot 1 = 1$. ✌

命题 0 一定不是单位.

证 0 与任何多项式的积都是 0, 不等于 1. ✌

命题 设 f 是单位. 若多项式 g, h 适合 $fg = fh = 1$, 则 $g = h$.

证 因为多项式的乘法是交换的、结合的, 故

$$g = g1 = g(fh) = (gf)h = (fg)h = 1h = h.$$ ✌

定义 设 f 是单位. 上个命题指出, f 的逆一定是唯一的 (根据单位的定义, f 的逆当然存在). 我们用 f^{-1} 表示 f 的逆.

命题 设 f 是单位. f 的逆 f^{-1} 也是单位, 且 $(f^{-1})^{-1} = f$.

证 因为 f 是单位, 故存在多项式 f^{-1} 使 $ff^{-1} = 1$. 因为乘法可交换, 故 $f^{-1}f = 1$. 所以对多项式 f^{-1} 而言, 存在多项式 f 使 $f^{-1}f = 1$. 由单位的定义, f^{-1} 是单位. 因为单位的逆唯一, 故 f 是 f^{-1} 的逆. ✌

命题 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是单位. 则 $f_1 f_2 \cdots f_n$ 也是单位, 且

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)^{-1} = f_n^{-1} \cdots f_2^{-1} f_1^{-1}.$$

证 既然 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是单位, 那么它们都有逆, 分别为 $f_1^{-1}, f_2^{-1}, \cdots, f_n^{-1}$. 所以

$$\begin{aligned}
&(f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f_n)(f_n^{-1} f_{n-1}^{-1} \cdots f_2^{-1} f_1^{-1}) \\
=\ &(f_1 f_2 \cdots f_{n-1})(f_n f_n^{-1})(f_{n-1}^{-1} \cdots f_2^{-1} f_1^{-1}) \\
=\ &(f_1 f_2 \cdots f_{n-1})(1)(f_{n-1}^{-1} \cdots f_2^{-1} f_1^{-1}) \\
=\ &(f_1 f_2 \cdots f_{n-1})(f_{n-1}^{-1} \cdots f_2^{-1} f_1^{-1}) \\
=\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\
=\ &f_1 f_1^{-1} \\
=\ &1.
\end{aligned}$$

所以, $f_1 f_2 \cdots f_n$ 是单位. 因为单位的逆唯一, 故

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)^{-1} = f_n^{-1} \cdots f_2^{-1} f_1^{-1}.$$ ✌

定义 多项式的全体单位称为多项式的单位群.

命题 多项式的单位群恰由全体非零常数作成.

证 每个非零常数 c 都有倒数 $\frac{1}{c}$. $\frac{1}{c}$ 也是非零常数, 故由 $c \cdot \frac{1}{c} = 1$ 可知 c 是单位.

设 f 是单位. 所以, 存在多项式 g 使 $fg = 1$. 我们证明: $\deg f = 0$.

这很容易. 因为 $fg = 1$, 故 $\deg f + \deg g = \deg 1 = 0$. 显然 $\deg f$ 与 $\deg g$ 都是非负整数. 这样, $\deg f = 0$. 零次多项式就是非零常数.

综上, 多项式的单位群恰由全体非零常数作成. ✌

读者可能还记得, 多项式也有带余除法:

命题 设 f 是非零多项式. 对任意多项式 g, 存在唯一的一对多项式 q, r 使

$$g = qf + r, \quad \deg r < \deg f.$$

一般称其为带余除法: q 就是商; r 就是余式. 并且, 当 f 的次不高于 g 的次时, f, g, q 间还有如下的次关系:

$$\deg g = \deg(g - r) = \deg q + \deg f.$$

我们已经在前面证明过这个关系, 所以我们就不赘述了.

请读者休息一会儿.

定义 设 f, g 是多项式. 若存在多项式 h 使 $f = gh$, 则说 f 是 g 的倍 $(multiple)$, 或 g 是 f 的因子 $(divisor)$.

例 单位是任意多项式的因子; 单位只能是单位的倍. 0 只能是 0 的因子; 0 可以是任意多项式的倍.

命题 设 f, g, h 是多项式. 因子适合如下性质:

(i) f 是 f 的因子;

(ii) 若 h 是 g 的因子, 且 g 是 f 的因子, 则 h 是 f 的因子;

(iii) 若 f 是 g 的因子, 且 g 是 f 的因子, 则存在单位 q 使 $f = qg$;

(iv) 设 k, ℓ 是多项式. 若 h 是 f 的因子, 且 h 是 g 的因子, 则 h 是 $kf \pm \ell g$ 的因子;

(v) 若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是单位, 且 g 是 f 的因子, 则 $\varepsilon_2 g$ 是 $\varepsilon_1 f$ 的因子.

证 (i) 注意到 $f = 1f$, 其中 1 是单位.

(ii) 因为 h 是 g 的因子, 故存在多项式 p 使 $g = ph$. 因为 g 是 f 的因子, 故存在多项式 q 使 $f = qg$. 所以

$$f = qg = q(ph) = (qp)h.$$

因为 qp 也是多项式, 故 h 是 f 的因子.

(iii) 若 $f = 0$, 则 $g = 0$, 当然有 $f = 1g = 0$, 其中 1 是单位. 下设 $f \neq 0$.

因为 f 是 g 的因子, 故存在多项式 p 使 $g = pf$; 因为 g 是 f 的因子, 故存在多项式 q 使 $f = qg$. 所以

$$f = qg = q(pf) = (qp)f.$$

因为 $f \neq 0$, 故可从等式二边消去 f, 即

$$1 = qp.$$

由此可知 q 是单位.

(iv) 因为 h 是 f 的因子, 且 h 是 g 的因子, 故存在多项式 p, q 使 $f = ph$ 且 $g = qh$. 所以

$$kf \pm \ell g = k(ph) \pm \ell(qh) = (kp)h \pm (\ell q)h = (kp \pm \ell q)h.$$

(v) 若存在多项式 q 使 $f = gq$, 则

$$\varepsilon_1 f = g(\varepsilon_1 q) = g(\varepsilon_2 \varepsilon_2^{-1})(\varepsilon_1 q) = (g\varepsilon_2)(\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_1 q).$$

因为单位的逆是多项式, 且 (有限多个) 多项式的积是多项式, 故 $\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_1 q$ 是多项式. 从而 $\varepsilon_2 g$ 是 $\varepsilon_1 f$ 的因子. ✌

为方便, 我们定义一个新词.

定义 设 f, g 是多项式. 若存在单位 ε 使 $f=\varepsilon g$, 则说 f 是 g 的相伴 ($associate$). 因为

$$g=1g=(\varepsilon^{-1}\varepsilon)g=\varepsilon^{-1}(\varepsilon g)=\varepsilon^{-1}f,$$

故 g 当然也是 f 的相伴. 所以, 我们说 f 与 g 相伴 ($to\ be\ associate$).

显然, 因为 $f=1f$, 故 f 与 f 相伴. 上面的文字已经说明 f 与 g 相伴相当于 g 与 f 相伴. 我们还有下面的

命题 设 f, g, h 是多项式. 若 f 与 g 相伴, 且 g 与 h 相伴, 则 f 与 h 相伴.

证 因为 f 与 g 相伴, 故存在单位 ε_1 使 $f=\varepsilon_1 g$. 因为 g 与 h 相伴, 故存在单位 ε_2 使 $g=\varepsilon_2 h$. 所以

$$f=\varepsilon_1 g=\varepsilon_1(\varepsilon_2 h)=(\varepsilon_1\varepsilon_2)h.$$

因为 $\varepsilon_1\varepsilon_2$ 是单位, 故 f 与 g 相伴. ✌

根据 (iii), 我们有

命题 设 f, g 是多项式. f 与 g 相伴的一个必要与充分条件是 f 是 g 的因子, 且 g 是 f 的因子.

定义 设 f, g 是多项式. 若 d 是 f 的因子, 且 d 是 g 的因子, 则 d 是 f 与 g 的公因子 ($common\ divisor$).

例 单位是任意二个多项式的公因子.

现在我们引出 “最大公因子” 的概念.

定义 设 f, g 是多项式. 适合下述二性质的多项式 d 是 f 与 g 的最大公因子 ($greatest\ common\ divisor$):

(i) d 是 f 与 g 的公因子;

(ii) 若 e 是 f 与 g 的公因子, 则 e 是 d 的因子.

由定义立即可得

命题 设 f, g 是多项式. 若 d_1 与 d_2 都是 f 与 g 的最大公因子, 则 d_1 与 d_2 相伴.

证 因为 d_1 是 d_2 的因子, 且 d_2 也是 d_1 的因子. ✌

评注 由此可见, 最大公因子不一定是唯一的. 但这不是很重要.

例 不难看出, $d = f$ 是 0 与 f 的最大公因子: (i) d 是 0 的因子, 且 d 是 f 的因子; (ii) 若 e 是 0 与 f 的公因子, 则 e 当然是 d (即 f) 的因子.

例 设 ε 是单位. 不难看出, $d = \varepsilon$ 是 ε 与 f 的最大公因子: (i) d 是 ε 的因子, 且 d 是 f 的因子; (ii) 若 e 是 ε 与 f 的公因子, 则 e 当然是 d (即 ε) 的因子.

命题 设 f, g, q 是多项式. 设 f 与 g 的最大公因子是 d_1; 设 $f - gq$ 与 g 的最大公因子是 d_2. 则 d_1 与 d_2 相伴.

证 因为 d_1 是 f 与 g 的公因子, 故 d_1 是 $1 \cdot f - q \cdot g$ 的因子. 这说明, d_1 是 $f - gq$ 与 g 的公因子. 因为 d_2 是 $f - gq$ 与 g 的最大公因子, 故 d_1 是 d_2 的因子.

因为 d_2 是 $f - gq$ 与 g 的公因子, 故 d_2 是 $1 \cdot (f - gq) + q \cdot g$ 的因子. 这说明, d_2 是 f 与 g 的公因子. 因为 d_1 是 f 与 g 的最大公因子, 故 d_2 是 d_1 的因子.

综上, d_1 与 d_2 相伴. ✌

我们现在可以证明

命题 设 f, g 是多项式. f 与 g 的最大公因子一定存在.

证 无妨假定 g 不是 0. 所以, 根据带余除法, 有

$$f = gq_0 + r_0, \quad \deg r_0 < \deg g.$$

根据上一个命题, r_0 与 g 的最大公因子是 f 与 g 的最大公因子. 若 $r_0 = 0$, 则 g 就是 0 与 g (从而也是 f 与 g) 的最大公因子. 若 $r_0 \neq 0$, 则

$$g = r_0 q_1 + r_1, \quad \deg r_1 < \deg r_0.$$

根据上一个命题, r_1 与 r_0 的最大公因子是 r_0 与 g 的最大公因子, 所以也是 f 与 g 的最大公因子. 若 $r_1 = 0$, 则 r_0 就是 0 与 r_0 (从而也是 f 与 g) 的最大公因子. 若 $r_1 \neq 0$, 则

$$r_0 = r_1 q_2 + r_2, \quad \deg r_2 < \deg r_1.$$

这个过程必定会在有限步后停止. 反证法. 如果此过程可一直进行下去, 则我们可得到无限多个非负整数 $\deg r_0, \deg r_1, \cdots$ 使

$$\deg g > \deg r_0 > \deg r_1 > \cdots > \deg r_k > \deg r_{k+1} > \cdots.$$

可是, 不存在无限递降的非负整数列 (低于 $\deg g$ 的非负整数至多有 $\deg g$ 个), 矛盾!

为方便, 分别称 f 与 g 为 r_{-2} 与 r_{-1}. 根据上面的分析, 一定存在整数 n 使

$$\begin{aligned} & r_{\ell-2} = r_{\ell-1} q_\ell + r_\ell, \quad 0 \leq \deg r_\ell < \deg r_{\ell-1}, \quad \ell = 0, 1, \cdots, n-2; \\ & r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-1}. \end{aligned}$$

r_{n-2} 是 0 与 r_{n-2} 的最大公因子, 也是 r_{n-2} 与 r_{n-3} 的最大公因子, 也是 r_{n-3} 与 r_{n-4} 的最大公因子……也是 r_{-2} 与 r_{-1} 的最大公因子. 所以, r_{n-2} 是 f 与 g 的最大公因子. ✌

这个命题的证明过程事实上也给出了一个计算二个多项式的最大公因子的算法.

例 设 $f = x^5 + 3x + 1$, $g = x^2 - x - 1$. 我们来找一个 f 与 g 的最大公因子.

不难作出如下计算:

$$\begin{aligned} x^5 + 3x + 1 &= (x^2 - x - 1) \cdot (x^3 + x^2 + 2x + 3) + (8x + 4), \\ x^2 - x - 1 &= (8x + 4) \cdot \frac{2x - 3}{16} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

所以, $-\frac{1}{4}$ 是 $8x + 4$ 与 $x^2 - x - 1$ 的最大公因子, 是 $x^2 - x - 1$ 与 $x^5 + 3x + 1$ 的最大公因子.

当然, 读者不难说明, 每个单位都是 f 与 g 的最大公因子.

根据上面的计算, 我们有

$$1 \cdot (x^2 - x - 1) + \frac{-2x+3}{16} \cdot (8x+4) = -\frac{1}{4}.$$

又因为

$$8x + 4 = 1 \cdot (x^5 + 3x + 1) + (-x^3 - x^2 - 2x - 3) \cdot (x^2 - x - 1),$$

故

$$\begin{aligned} &\frac{-2x+3}{16}(x^5 + 3x + 1) \\ &\qquad + \left(1 + \frac{-2x+3}{16}(-x^3 - x^2 - 2x - 3)\right)(x^2 - x - 1) = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

即

$$\frac{-2x+3}{16}(x^5 + 3x + 1) + \frac{2x^4 - x^3 + x^2 + 7}{16}(x^2 - x - 1) = -\frac{1}{4}.$$

一般地, 我们有

命题 设 f, g 是多项式. 设 d 是 f 与 g 的最大公因子. 存在多项式 s 与 t 使

$$sf + tg = d.$$

这个等式的一个名字是 Bézout 等式 (*Bézout's identity*).

证 若 $f = g = 0$, 则可取 $s = t = 0$. 下设 $g \neq 0$.

为方便, 分别称 f 与 g 为 r_{-2} 与 r_{-1}. 设存在整数 n 使

$$\begin{aligned} &r_{\ell-2} = r_{\ell-1} q_\ell + r_\ell, \quad 0 \leq \deg r_\ell < \deg r_{\ell-1}, \quad \ell = 0, 1, \cdots, n-2; \\ &r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-1}. \end{aligned}$$

为方便, 记

$$r_\ell = 0, \quad \ell \geq n-1.$$

我们用数学归纳法证明辅助命题 $P(\ell)$: 任取非负整数 ℓ, 必有二多项式 s, t 使

$$r_\ell = sf + tg.$$

r_0 可写为

$$r_0 = 1r_{\ell-2} + (-q_0)r_\ell = 1f + (-q_0)g.$$

r_1 可写为

$$r_1 = 1r_{-1} + (-q_1)r_0 = (-q_1)f + (1 + q_0q_1)g.$$

所以 $P(0)$ 与 $P(1)$ 正确. 假定 $P(0)$, $P(1)$, ···, $P(k-1)$ 正确. 我们的目标是: 推出 $P(k)$ 正确. 若 $k \geq n-1$, 则

$$r_k = 0 = 0f + 0g.$$

若 $k \leq n-2$, 则根据归纳假设, 存在多项式 u, v, z, w 使

$$r_{k-2} = uf + vg, \quad r_{k-1} = zf + wg.$$

所以

$$r_k = r_{k-2} - r_{k-1}q_k = (u - zq_k)f + (v - wq_k)g.$$

因为 $u - zq_k$ 与 $v - wq_k$ 均为多项式, 故 $P(k)$ 正确.

所以, 存在多项式 s, t 使

$$sf + tg = r_{n-2}.$$

因为 r_{n-2} 与 d 都是 f 与 g 的最大公因子, 故 $d = \varepsilon r_{n-2}$, 其中 ε 是单位. 所以

$$(\varepsilon s)f + (\varepsilon t)g = d.$$ ✌

有了最大公因子的概念, 我们可以引出 “互素”:

定义 设 f, g 是多项式. 若单位是 f 与 g 的最大公因子, 则称 f 与 g 互素 (*to be relatively prime*).

例 显然, 单位与任意多项式都互素.

下面给出一个极重要的命题:

命题 设 f, g 是多项式. f 与 g 互素的一个必要与充分条件是: 存在多项式 s, t 使

$$sf + tg = 1.$$

证 先看必要性. 显然; 这是 Bézout 等式的结果.

再看充分性. 设 d 是 f 与 g 的最大公因子. 因为 $sf + tg = 1$, 故 d 是 1 的因子. 这样, d 一定是单位. ✌

下面是几个关于互素的性质.

命题 设 f, g, h 是多项式. 互素有如下性质:

(i) 若 h 是 fg 的因子, 且 h 与 f 互素, 则 h 是 g 的因子;

(ii) 若 f 与 g 互素, 且 f 与 h 互素, 则 f 与 gh 互素;

(iii) 若 f 是 h 的因子, g 是 h 的因子, 且 f 与 g 互素, 则 fg 是 h 的因子.

证 (i) 因为 h 与 f 互素, 故存在多项式 s 与 t 使

$$sh + tf = 1.$$

所以

$$(gs)h + t(fg) = g.$$

因为 h 是 h 的因子, 且 h 是 fg 的因子, 故 h 是 $g = (gs)h + t(fg)$ 的因子.

(ii) 因为 f 与 g 互素, 故存在多项式 u, v 使

$$uf + vg = 1.$$

因为 f 与 h 互素, 故存在多项式 s, t 使

$$sf + th = 1.$$

从而

$$1 = (uf + vg)(sf + th) = (ufs + uth + vgs)f + (vt)(gh).$$

所以 f 与 gh 互素.

(iii) 因为 f 是 h 的因子, 故存在多项式 p 使 $h = fp$. 因为 g 是 $h = fp$ 的因子, 且 f 与 g 互素, 故由 (i) 知 g 是 p 的因子. 设 $p = gq$. 这样

$$h = fp = f(gq) = (fg)q,$$

故 fg 是 h 的因子. ✌

感谢您的阅读. 请休息一会儿.

现在我们推广公因子、最大公因子、互素的概念.

前面, 我们讨论了二个多项式的公因子、最大公因子、互素; 现在, 我们从量的角度推广.

定义 设 f_1, f_2, ···, f_n 是多项式. 若 d 是 f_1 的因子, d 是 f_2 的因子 ······d 是 f_n 的因子, 则 d 是 f_1, f_2, ···, f_n 的公因子.

评注 我们并没有禁止 n 取 1. 同理, 一个多项式也可以有 “最大公因子”; 一个多项式也可以 “互素”.

作为练习, 请读者证明

命题 设 k_1, k_2, ···, k_n, f_1, f_2, ···, f_n 是多项式. 若 d 是 f_1, f_2, ···, f_n 的公因子, 则 d 是 $k_1f_1 + k_2f_2 + \cdots + k_nf_n$ 的因子.

定义 设 f_1, f_2, ···, f_n 是多项式. 适合下述二性质的多项式 d 是 f_1, f_2, ···, f_n 的最大公因子:

(i) d 是 f_1, f_2, ···, f_n 的公因子;

(ii) 若 e 是 d 是 f_1, f_2, ···, f_n 的公因子, 则 e 是 d 的因子.

由定义立即可得

命题 设 f_1, f_2, ···, f_n 是多项式. 若 d_1 与 d_2 都是 f_1, f_2, ···, f_n 的最大公因子, 则 d_1 与 d_2 相伴.

证 因为 d_1 是 d_2 的因子, 且 d_2 也是 d_1 的因子. ✌

命题 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是多项式.

(i) $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的最大公因子存在;

(ii) 若 d 是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的最大公因子, 则存在多项式 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 使

$$u_1f_1 + u_2f_2 + \cdots + u_nf_n = d.$$

证 (i) 对 n 用数学归纳法. 显然, $n = 1$ 或 $n = 2$ 时, 命题成立. 设 $n = k$ $(k \geq 2)$ 时命题成立, 即: $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 的最大公因子存在.

今看 $n = k+1$ 时的情形. 令 d_k 为 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 的最大公因子. 令 d 为 d_k 与 f_{k+1} 的最大公因子. 我们证明: d 是 $f_1, f_2, \cdots, f_k, f_{k+1}$ 的最大公因子.

首先, d 是 $f_1, f_2, \cdots, f_k, f_{k+1}$ 的公因子. d 当然是 f_{k+1} 的因子. 固定某个 1 至 k 间的 ℓ. 因为 d 是 d_k 的因子, 而 d_k 是 f_ℓ 的因子, 故 d 是 f_ℓ 的因子. 这样, d 确为 $f_1, f_2, \cdots, f_k, f_{k+1}$ 的公因子.

其次, 若 e 是 $f_1, f_2, \cdots, f_k, f_{k+1}$ 的公因子, 则 e 当然是 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 的公因子, 故 e 是 d_k 的因子. 又因为 e 是 f_{k+1} 的因子, 则 e 是 d_k 与 f_{k+1} 的公因子. 这样, e 是 d 的因子.

根据最大公因子的定义, d 一定是 $f_1, f_2, \cdots, f_k, f_{k+1}$ 的最大公因子. 所以, $n = k+1$ 时, (i) 正确.

(ii) 对 n 用数学归纳法. 显然, $n = 1$ 或 $n = 2$ 时, 命题成立. 设 $n = k$ $(k \geq 2)$ 时命题成立, 即: 若 d_k 是 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 的最大公因子, 则存在多项式 $u_1, u_2, \cdots, u_k$ 使

$$u_1f_1 + u_2f_2 + \cdots + u_kf_k = d_k.$$

今看 $n = k+1$ 时的情形. 令 d 为 d_k 与 f_{k+1} 的最大公因子. 由 (i) 知, d 是 $f_1, f_2, \cdots, f_k, f_{k+1}$ 的最大公因子. 由 Bézout 等式知, 存在多项式 u, u_{k+1} 使

$$ud_k + u_{k+1}f_{k+1} = d.$$

根据归纳假设, 存在多项式 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 使

$$v_1f_1 + v_2f_2 + \cdots + v_kf_k = d_k.$$

这样

$$(uv_1)f_1 + (uv_2)f_2 + \cdots + (uv_k)f_k + u_{k+1}f_{k+1} = d.$$

所以, $n = k+1$ 时, (ii) 正确. ✌

跟之前一样, 有了最大公因子的概念, 我们可以引出 "互素":

定义 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是多项式. 若单位是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的最大公因子, 则称 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 互素.

下面的命题也是十分自然的.

命题 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是多项式. $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 互素的一个必要与充分条件是: 存在多项式 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 使

$$u_1f_1 + u_2f_2 + \cdots + u_nf_n = 1.$$

证 先看必要性. 显然; 这是上个命题的结果.

再看充分性. 设 d 是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的最大公因子. 因为 $u_1f_1 + u_2f_2 + \cdots + u_nf_n = 1$, 故 d 是 1 的因子. 这样, d 一定是单位. ✌

我们再讨论互素的一个性质.

命题 设多项式 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 不全是零.

(i) $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的最大公因子 d 不是零;

(ii) 任取 1 至 n 间的整数 ℓ, 必有 (唯一的) 多项式 g_ℓ 使 $f_\ell = dg_\ell$;

(iii) 单位是 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 的最大公因子; 换句话说, $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 互素;

(iv) 反过来, 若多项式 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 互素, 则 w 是 $wu_1, wu_2, \cdots, wu_n$ 的最大公因子.

证 (i) 零一定不是非零多项式的因子, 故零不是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的公因子, 当然也不是最大公因子.

(ii) 既然 d 是最大公因子, 当然也是公因子. 对 f_ℓ 而言, 由因子的定义, 知: 存在多项式 g_ℓ 使 $f_\ell = dg_\ell$. 现在看唯一性. 假定 $f_\ell = dg_\ell = dg'_\ell$. 因为 $d \neq 0$, 故可从等式二边消去 d, 即 $g_\ell = g'_\ell$.

(iii) 设 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 的最大公因子是 δ. 这样, 由 (ii), 知: 对任意 g_ℓ, 有多项式 h_ℓ 使 $g_\ell = \delta h_\ell$. 所以

$$f_\ell = dg_\ell = d(\delta h_\ell) = (d\delta)h_\ell.$$

所以 $d\delta$ 是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的公因子. 所以 $d\delta$ 是 d 的因子. d 显然是 $d\delta$ 的因子, 故 $d\delta = \varepsilon d$, 其中 ε 是单位. 因为 $d \neq 0$, 故可从等式二边消去 d, 即 $\delta = \varepsilon$.

(iv) 若 $w = 0$, 命题显然成立: $0, 0, \cdots, 0$ 的最大公因子当然是 0. 下设 $w \neq 0$.

w 显然是 $wu_1, wu_2, \cdots, wu_n$ 的公因子. 设 ws 是 $wu_1, wu_2, \cdots, wu_n$ 的最大公因子, 这里 s 是某个多项式. 由 (ii), 对每个 wu_ℓ, 都有多项式 q_ℓ 使 $wu_\ell = wsq_\ell$. 因为 $w \neq 0$, 故可从等式二边消去 w, 即 $u_\ell = sq_\ell$. 这样, s 是 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的公因子, 故 s 是单位的因子, 即 s 是单位. 所以 w 是 $wu_1, wu_2, \cdots, wu_n$ 的最大公因子. ✌

现在, 我们讨论不可约的多项式.

定义 设多项式 f 既不是 0, 也不是单位.

(i) 若存在二个不全为单位的多项式 f_1, f_2 使 $f = f_1 f_2$, 则 f 是可约的 (*reducible*).

(ii) 若 f 不是可约的, 则说 f 是不可约的 (*irreducible*). 换言之, 若 f 是不可约的, 则 "多项式 f_1, f_2 使 $f = f_1 f_2$" 可推出 "f_1 是单位或 f_2 是单位".

评注 0 或单位既不是可约的, 也不是不可约的.

例 设 t 是常数. 则 $x - t$ 是不可约的.

设多项式 f_1, f_2 适合 $f_1 f_2 = x - t$.所以, $\deg f_1 + \deg f_2 = \deg(x - t) = 1$.

f_1 与 f_2 当然是非零的. 这样, $\deg f_1$ 与 $\deg f_2$ 都是非负整数. 所以, $\deg f_1$ 与 $\deg f_2$ 必定有一个是 0, 另一个是 1. 无妨假设 $\deg f_1 = 0$. 所以 f_1 是非零常数. 所以 f_1 是单位. 类似地, 若 $\deg f_2 = 0$, 则 f_2 是单位.

不管怎么样, 我们已经证明了 "多项式 f_1, f_2 使 $x - t = f_1 f_2$" 可推出 "f_1 是单位或 f_2 是单位". 这样, $x - t$ 是不可约的.

例 x^2-1 是可约的: $x^2-1=(x+1)(x-1)$, 而 $x+1$ 不是单位, $x-1$ 也不是单位.

评注 作者在此有必要提醒读者: 不可约的多项式与多项式的系数所在范围密切相关.

我们看 $f=x^2-2$. 显然, 读者在中学可能已经知道, "这没法再 (在有理数范围里) '分解' 了". 的确, f 作为有理系数多项式是不可约的. 不过, 如果视 f 为实系数多项式, 则可继续将 f 写为 $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$. 类似地, 若视 $g=x^2+1$ 为实系数多项式, 则 g "也没办法再 (在实数范围里) '分解' 了". 可是, 若视 g 为复系数多项式, 则 $g=(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})$.

所以, 除非语境明确 (或者系数所在范围无关紧要), 我们总是说 "某多项式作为有理 (实、复) 系数多项式是不可约的".

命题 设多项式 p 既不是 0, 也不是单位. 设 ε 是单位. 若 p 是不可约的, 则 εp 也是不可约的.

证 设二多项式 f_1, f_2 使 $\varepsilon p=f_1f_2$. 所以, $p=(\varepsilon^{-1}f_1)(f_2)$. 因为 p 是不可约的, 故 $\varepsilon^{-1}f_1$ 是单位或 f_2 是单位. 这也就是说, f_1 是单位或 f_2 是单位. 所以, εp 是不可约的. ✌

例 由上个命题可知: 1 次多项式一定是不可约的.

命题 设多项式 p 既不是 0, 也不是单位. 下述四命题等价:

(i) 若多项式 f_1, f_2 使 $f=f_1f_2$, 则 f_1 是单位或 f_2 是单位;

(ii) 对任意多项式 f, 要么 p 是 f 的因子, 要么 p 与 f 互素 (二者不会同时发生);

(iii) 若 f, g 是多项式, 且 p 是 fg 的因子, 则 p 是 f 的因子, 或 p 是 g 的因子;

(iv) 不存在多项式 f_1, f_2 使 $p=f_1f_2$, 且 $\deg f_1<\deg p$, $\deg f_2<\deg p$.

证 (i) $\Rightarrow$ (ii): 任取多项式 f. 设 d 是 p 与 f 的最大公因子. 所以, 存在多项式 g 使 $p=dg$. 所以, d 是单位或 g 是单位. 若 d 是单位, 则单位是 p 与 f 的最大公因子, 即 p 与 f 互素; 若 g 是单位, 则 $d=pg^{-1}$, 故 p 是 f 的因子.

若二者同时发生, 则 d 是单位且 g 是单位, 故 p 也是单位. 这与 p 不是单位矛盾.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 若 p 是 f 的因子, 则不必证了. 今假设 p 不是 f 的因子. 所以, p 与 f 互素. 因为 p 是 fg 的因子, 故 p 一定是 g 的因子.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): 反证法. 设 $p = f_1 f_2$, 且 $\deg f_1 < \deg p$, $\deg f_2 < \deg p$. 因为 $p \neq 0$, 故 $f_1 \neq 0$, 且 $f_2 \neq 0$. 所以, $\deg f_1 \geq 0$, 且 $\deg f_2 \geq 0$. 既然 $p = f_1 f_2$, p 当然是 $f_1 f_2$ 的因子. 所以, p 是 f_1 的因子, 或 p 是 f_2 的因子. 若 p 是 f_1 的因子, 则存在多项式 g_1 使 $f_1 = pg_1$. 因为 $f_1 \neq 0$, 故 $g_1 \neq 0$. 这样, $\deg g_1 \geq 0$. 所以 $\deg f_1 = \deg p + \deg g_1 \geq \deg p$. 这与假定 $\deg f_1 < \deg p$ 矛盾! 类似地, 若 p 是 f_2 的因子, 也有 $\deg f_2 \geq \deg p$, 矛盾! 综上, 这样的 f_1 与 f_2 不存在.

(iv) $\Rightarrow$ (i): 这说明: 若多项式 f_1, f_2 使 $p = f_1 f_2$, 则 $\deg f_1 \geq \deg p$ 或 $\deg f_2 \geq \deg p$. 若 $\deg f_1 \geq \deg p$, 则 $\deg p = \deg f_1 + \deg f_2 \geq \deg p + \deg f_2$, 故 $\deg f_2 \leq 0$, 即 f_2 是非零常数, 即 f_2 是单位. 类似地, 若 $\deg f_2 \geq \deg p$, 则 f_1 是单位. ✌

评注 利用 (iii) 与数学归纳法, 读者可得如下结论 (作为练习):

设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是多项式. 设多项式 p 是不可约的. 若 p 是 $f_1 f_2 \cdots f_n$ 的因子, 则存在 1 至 n 间的整数 ℓ, 使 p 是 f_ℓ 的因子.

评注 设多项式 f 既不是 0, 也不是单位. (iv) 表明, “f 是可约的” 的一个必要与充分条件是 “存在二个多项式 f_1, f_2, 使 $f = f_1 f_2$, 且 $\deg f_1 < \deg f$, $\deg f_2 < \deg f$”.

下面是关于不可约的多项式的积的命题.

命题 设多项式 $p_1, p_2, \cdots, p_m, q_1, q_2, \cdots, q_n$ 都是不可约的. 设

$$p_1 p_2 \cdots p_m = q_1 q_2 \cdots q_n.$$

(i) $m = n$;

(ii) 可以适当地调换 $q_1, q_2, \cdots, q_m$ (注意, $n = m$) 的顺序, 使任取 1 至 m 间的整数 ℓ, p_ℓ 与 q_ℓ 相伴.

证 对等式左侧的不可约的多项式的数目 m 用数学归纳法. 当 $m=1$ 时, 有

$$p_1 = q_1 q_2 \cdots q_n.$$

先证明: $n=1$. 反证法. 设 $n>1$. 因为 $p_1 = q_1 q_2 \cdots q_n$, 故 p_1 是某个 q_i 的因子 (i 是某个 1 至 n 间的整数). 因为乘法可交换, 不失一般性, 设 p_1 是 q_1 的因子. 因为 q_1 是不可约的, 且 q_1 与 p_1 不是互素的, 故 q_1 也是 p_1 的因子. 所以, 存在单位 ε 使 $q_1 = \varepsilon p_1$. 进而

$$p_1 = (\varepsilon p_1) q_2 \cdots q_n = p_1 (\varepsilon q_2) \cdots q_n.$$

因为 $p_1 \neq 0$, 故可从等式二边消去 p_1, 即

$$1 = (\varepsilon q_2) \cdots q_n.$$

因为 q_2 是不可约的, 故 εq_2 也是不可约的. 上式表明, εq_2 是 1 的因子, 故 εq_2 是单位. 这与假定矛盾! 所以, n 不可大于 1. 这样, $n=1$.

既然 $n=1$, 那么 $p_1 = q_1$. 所以, 不必调换顺序即可知 p_1 与 q_1 相伴.

所以, $m=1$ 时, 命题成立.

假定 $m=k$ 时, 命题成立. 现在看 $m=k+1$ 时的情形. 设 $p_1, p_2, \cdots, p_k, p_{k+1}, q_1, q_2, \cdots, q_n$ 是不可约的. 设

$$p_1 p_2 \cdots p_k p_{k+1} = q_1 q_2 \cdots q_n.$$

因为 p_1 是 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 的因子, 故 p_1 是某个 q_j 的因子 (j 是某个 1 至 n 间的整数). 因为乘法可交换, 不失一般性, 设 p_1 是 q_1 的因子. 因为 q_1 是不可约的, 且 q_1 与 p_1 不是互素的, 故 q_1 也是 p_1 的因子. 所以, 存在单位 ε' 使 $q_1 = \varepsilon' p_1$. 进而

$$p_1 p_2 \cdots p_k p_{k+1} = (\varepsilon' p_1) q_2 \cdots q_n = p_1 (\varepsilon' q_2) \cdots q_n.$$

因为 $p_1 \neq 0$, 故可从等式二边消去 p_1, 即

$$p_2 \cdots p_k p_{k+1} = (\varepsilon' q_2) \cdots q_n.$$

因为 q_2 是不可约的, 故 $\varepsilon' q_2$ 也是不可约的. 上式左侧的不可约的多项式的数目是 k. 根据归纳假设, $n-1=k$, 即 $n=k+1$. 这证明了 $m=k+1$ 时 (i) 成立.

前面已证得, 适当地调换 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的顺序, 可使 p_1 与 q_1 相伴. 根据归纳假设, 可以适当地调换 $\varepsilon' q_2, \cdots, q_{k+1}$ (注意, $n=k+1$) 的顺序, 使任取 3 至 $k+1$ 间的整数 u, p_u 与 q_u 相伴. 当然 p_2 与 $\varepsilon' q_2$ 也相伴. 因为 $\varepsilon' q_2$ 与 q_2 相伴, 所以 p_2 与 q_2 相伴. 把这些事实放在一块儿, 就是: 可以适当地调换 $q_1, q_2, \cdots, q_{k+1}$ 的顺序, 使任取 1 至 $k+1$ 间的整数 ℓ, p_ℓ 与 q_ℓ 相伴. 这样, $m=k+1$ 时, (ii) 成立. ✌

命题 设多项式 f 既不是 0, 也不是单位. 存在不可约的多项式 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 使

$$f = p_1 p_2 \cdots p_m.$$

证 对 f 的次 N 用数学归纳法. 因为 f 既不是 0, 也不是单位, 故 $N \geq 1$. $N=1$ 时, $f = ax+b$, 这里 a, b 是常数, 且 $a \neq 0$. 我们已经知道, 1 次多项式是不可约的. 这样, f 是不可约的, 故存在不可约的多项式 $p_1 = f$ 使 $f = p_1$. 这样, $N=1$ 时, 命题成立.

设 $N \leq k$ $(k \geq 1)$ 时, 命题成立. 考虑 $N=k+1$. 若 f 是不可约的, 则存在不可约的多项式 $p_1 = f$ 使 $f = p_1$. 若 f 是可约的, 则存在二多项式 f_1, f_2, 使 $f = f_1 f_2$, 且 $\deg f_1 < \deg f$, $\deg f_2 < \deg f$. 所以 $\deg f_1 \leq \deg f - 1 = k$, $\deg f_2 \leq \deg f - 1 = k$. 根据归纳假设, 存在不可约的多项式 $p_1, p_2, \cdots, p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, \cdots, p_m$ 使

$$f_1 = p_1 p_2 \cdots p_i, \quad f_2 = p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_m.$$

所以

$$f = f_1 f_2 = p_1 p_2 \cdots p_i p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_m.$$

故 $N=k+1$ 时, 命题也成立. ✌

合并上二个命题, 可得

命题 设多项式 f 既不是 0, 也不是单位.

(i) 存在不可约的多项式 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 使

$$f = p_1 p_2 \cdots p_m;$$

(ii) 若 $q_1, q_2, \cdots, q_m, s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是不可约的多项式, 且

$$f = q_1 q_2 \cdots q_m = s_1 s_2 \cdots s_n,$$

则 $m = n$, 且可以适当地调换 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ 的顺序, 使任取 1 至 m 间的整数 ℓ, q_ℓ 与 s_ℓ 相伴.

我们以一个简单的命题结束本文.

命题 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是多项式. $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 互素的一个必要与充分条件是: 任取不可约的多项式 p, 存在某个 f_i, 使 p 不是 f_i 的因子.

证 先看必要性. 反证法. 假定结论不成立, 即: 存在不可约的多项式 p, 使任取 f_i, p 是 f_i 的因子. 这样, p 就是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的公因子. 所以, p 是单位的因子. 矛盾!

再看充分性. 还是反证法. 假定结论不成立, 即: 设 d 是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的最大公因子, 且 d 不是单位. 若 d 是 0, 则 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 全是 0, 故任意的不可约的多项式都是 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的公因子, 矛盾! 若 d 不是 0, 也不是单位, 那么一定存在不可约的多项式 p_0, 使 p_0 是 d 的因子 (由上个命题, 显然). 所以, 存在不可约的多项式 p_0, 使任取 f_i, p_0 是 f_i 的因子. 矛盾! ✌

评注 作者说一件不是很重要的事. 事实上, 本文改编自 “整数的一些性质”. 作者做了这么几件事: (i) 将大量的 “整数” 替换为 “多项式”; (ii) 修改一些细节; (iii) 修改了几个例. (i) 是最容易的, 而 (iii) 是最繁的.

本文就到这里. 再见, 亲爱的读者朋友!

整系数多项式与有理系数多项式

前面, 我们系统地介绍了整数与 (系数为 $\mathbb{F}$ 的元的) 多项式的一些性质. 它们有一个共同点: 都可以作带余除法. 因为带余除法, 我们证明了最大公因子的存在性与 Bézout 等式; 因为最大公因子与 Bézout 等式, 我们考察了互素, 进而考虑了不可约的整数与不可约的多项式.

读者可能注意到, 在 "多项式的一些性质" 里, 我们没有讨论整系数多项式. 为什么没讨论呢? 读者可以想一想, 整系数多项式是否还有带余除法.

例 以 $f = x^2 + 1$, $g = 2x$ 为例. 设存在整系数多项式 q, r 使

$$f = gq + r, \quad \deg r < \deg g = 1.$$

由此可设 $r = c$, c 是某个待确定的整数. 设

$$q = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

且 a_0, a_1, $\cdots$, a_n 都是整数. 所以

$$x^2 + 1 = c + 2a_0 x + 2a_1 x^2 + \cdots + 2a_n x^{n+1}.$$

由此可知 $n + 1 = 2$, 且

$$1 = c, \quad 0 = 2a_0, \quad 1 = 2a_1.$$

问题来了: 哪个整数乘 2 等于 1? 所以这样的 q 不存在.

当然, 如果读者视 f, g, q, r 为有理系数多项式, 立即可得

$$q = \frac{1}{2}x, \quad r = 1.$$

在 "多项式的一些性质" 里, 我们把 "整数的一些性质" 的套路几乎原封不动地搬了过来. 不过, 由于整系数多项式不一定有带余除法, 故我们没法 "偷懒地" 讨论整系数多项式.

但情况不是特别糟. 首先, 整数是有理数, 故整系数多项式是有理系数多项式. 其次, 读者知道, 有理数是二个整数的比 (分母不为零). 取不为零的有理系数多项式

$$f = \frac{p_0}{q_0} + \frac{p_1}{q_1}x + \cdots + \frac{p_n}{q_n}x^n,$$

这里 p_0, q_0, p_1, q_0, $\cdots$, p_n, q_n 都是整数, 且 q_0, q_1, $\cdots$, q_n 都不是零. 作整数

$$\begin{aligned}
&Q = q_0q_1\cdots q_n,\\
&Q_0 = q_1q_2\cdots q_n = \frac{Q}{q_0},\\
&Q_1 = q_0q_2\cdots q_n = \frac{Q}{q_1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&Q_n = q_0q_1\cdots q_{n-1} = \frac{Q}{q_n},
\end{aligned}$$

将 f 改写为

$$f = \frac{p_0Q_0}{Q} + \frac{p_1Q_1}{Q}x + \cdots + \frac{p_nQ_n}{Q}x^n.$$

设 d 是 p_0Q_0, p_1Q_1, $\cdots$, p_nQ_n (视为整数, 而不是多项式) 的最大公因子. 这样, 存在整数 m_0, m_1, $\cdots$, m_n 使

$$p_0Q_0 = dm_0, \quad p_1Q_1 = dm_1, \quad \cdots, \quad p_nQ_n = dm_n.$$

所以

$$f = \frac{d}{Q}(m_0 + m_1x + \cdots + m_nx^n).$$

由最大公因子的性质, 知 m_0, m_1, $\cdots$, m_n 互素. 最后, 设 D 是 d 与 Q 的最大公因子, 且 $d = Dd'$, $Q = DQ'$. 所以

$$f = \frac{d'}{Q'}(m_0 + m_1x + \cdots + m_nx^n).$$

上面的叙述看起来有些抽象, 实则很好理解.

例 取

$$f = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{5}x^3.$$

这里

$$q_0 = 1, \quad q_1 = 3, \quad q_2 = 6, \quad q_3 = 5.$$

所以

$$Q = 180, \quad Q_0 = 180, \quad Q_1 = 60, \quad Q_2 = 30, \quad Q_3 = 36.$$

因为

$$p_0 = 1, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 1, \quad p_3 = 3,$$

故

$$p_0Q_0 = 180, \quad p_1Q_1 = 120, \quad p_2Q_2 = 30, \quad p_3Q_3 = 108.$$

所以 f 可被改写为

$$f = \frac{180}{180} + \frac{120}{180}x + \frac{30}{180}x^2 + \frac{108}{180}x^3.$$

读者可能一眼就认出来, 这如果不是通分, 那它什么都不是.

不难算出 6 是 180, 120, 30, 108 的最大公因子是 6. 所以

$$f = \frac{6}{180}(30 + 20x + 5x^2 + 18x^3).$$

不难算出, 1 是 30, 20, 5, 18 的最大公因子. 最后, 因为 6 是 6 与 180 的最大公因子, 故可进一步将 f 改写为

$$f = \frac{1}{30}(30 + 20x + 5x^2 + 18x^3).$$

上面假定 $f \neq 0$; 现在考虑 0. 显然 $0 = 0 \cdot 1$, 其中 1 是整系数多项式, 且其系数互素.

上面的文字说明: 有理系数多项式 f 总可以写为一个有理数 c_f 与一个整系数多项式 f^* 的积, 且 f^* 的系数互素.

因此, 我们可以借助有理系数多项式讨论整系数多项式.

定义 设

$$f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n.$$

若系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是整数, 且整数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 互素, 则 f 是本原的 $(primitive)$.

命题 设 f 是有理系数多项式, 且 f 不是零.

(i) f 一定可以写为有理数 c_f 与本原的多项式 f^* 的积, 即 $f = c_f f^*$;

(ii) 若有理数 r 与本原的多项式 g 适合 $f = rg$, 必有 $r = \varepsilon c_f$, $g = \varepsilon^{-1} f^*$, 其中 $\varepsilon = \pm 1$.

c_f 称为 f 的容量 (*capacity*); f^* 称为 f 的本原的相伴 (*primitive associate*).

证 (i) 显然.

(ii) 设 $c_f f^* = rg$, 其中 c_f, r 是有理数, f^*, g 是本原的多项式. 不难看出, f 的次一定等于 g 的次. 设

$$f^* = s_0 + s_1 x + \cdots + s_n x^n,$$
$$g = t_0 + t_1 x + \cdots + t_n x^n.$$

设 $\frac{c_f}{r} = \frac{p}{q}$, p, q 为整数, $q \geq 1$ 且 p 与 q 互素. 所以

$$pf^* = q\frac{c_f f^*}{r} = q\frac{rg}{r} = qg.$$

所以

$$ps_i = qt_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

因为 p 与 q 互素, 故任取 g 的系数 t_i, p 一定是 t_i 的因子. 所以 p 是 t_0, t_1, $\cdots$, t_n 的公因子. 因为 t_0, t_1, $\cdots$, t_n 互素, 故 p 是 (整数的) 单位 ε_1. 既然 p 与 q 互素, 则 q 也是 (整数的) 单位 ε_2. 所以

$$r = c_f \frac{q}{p} = (\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2) c_f.$$

从而

$$g = f^* \frac{c_f}{f} = (\varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1}) f^*.$$

记 $\varepsilon = \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2$, 则 $\varepsilon^{-1} = \varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1}$. 因为 ε_1, ε_2 都是整数的单位, 故 ε 也是整数的单位. 所以, $\varepsilon = \pm 1$. ✌

评注 我们可以这么叙述我们刚才证明的命题: 若忽略 (整数的) 单位的区别, 有理系数多项式可唯一地写为有理数与本原的多项式的积.

命题 设多项式 f, g, h 的系数都是整数. 设 $f = gh$.

(i) 若 f 是本原的, 则 g 与 h 也是本原的;

(ii) 若 g 与 h 是本原的, 则 f 也是本原的.

证 (i) 反证法. 因为乘法可交换, 故不失一般性, 设 g 不是本原的. 这样, 存在整系数多项式 ℓ 与不是 (整数的) 单位的整数 t, 使 $g = t\ell$. 这样, $f = t\cdot(\ell h)$. 所以 t 是 f 的所有系数的公因子, 故 t 是 (整数的) 单位的公因子, 即 t 也是 (整数的) 单位. 矛盾!

(ii) 任取不可约的整数 p. 我们证明: 存在 f 的系数 c, 使 p 不是 c 的因子. 设

$$
\begin{aligned}
g &= g_m x^m + g_{m-1}x^{m-1} + \cdots + g_0,\\
h &= h_n x^n + h_{n-1}x^{n-1} + \cdots + h_0
\end{aligned}
$$

是二个本原的多项式. 所以, 从次高的项往次低的项看, 一定存在二个整数 s, t 使 p 是 g_m, g_{m-1}, $\cdots$, g_{s+1}, h_n, h_{n-1}, $\cdots$, h_{t+1} 的因子, 但 p 不是 g_s 的因子, 且 p 不是 h_t 的因子. 我们看 f 的 $s+t$ 次系数:

$$
\begin{aligned}
f_{s+t} = g_s h_t &+ g_{s+1}h_{t-1} + \cdots + g_{s+t}h_0\\
&+ g_{s-1}h_{t+1} + \cdots + g_0 h_{s+t}.
\end{aligned}
$$

由此可见, p 是上式右侧除 $g_s h_t$ 外的任意一项的因子. 这样, p 不是 f 的 $s+t$ 次系数 f_{s+t} 的因子. 所以 f 的全部系数一定互素. ✌

命题 设多项式 f, g 的系数都是整数.

(i) 若 g 是本原的, 且存在多项式 h 使 $f = gh$, 则 h 的系数也都是整数;

(ii) 在 (i) 的基础上, 若还假定 f 也是本原的, 则 h 也是本原的.

证 (i) f 与 g 当然可以视为有理系数多项式. 由带余除法知, h 至少也是有理系数多项式. 将 h 写为 $c_h h^*$, 其中 c_h 是某有理数, h 是本原的多项式. 所以

$$
f = gh = g(c_h h^*) = c_h(gh^*).
$$

显然, gh^* 是本原的. 当然, f 也可写为

$$
f = c_f f^*,
$$

其中 c_f 是整数 (因为 f 的系数都是整数), 且 f^* 是本原的多项式. 所以, 存在 (整数的) 单位 ε, 使

$$c_h = \varepsilon c_f, \quad gh^* = \varepsilon^{-1} f^*.$$

从而

$$h = c_h h^* = \varepsilon c_f h^*$$

的系数都是整数.

(ii) 若 f 也是本原的, 则由 (i) 的证明过程, 知 h 是本原的. ✌

命题 设多项式 f 的系数都是整数. 设 f 可写为二个有理系数多项式 g, h 的积. 则 f 可写为

$$f = c_f g^* h^*.$$

上式应这么理解: 存在 g 的某个本原的相伴 g^*, 存在 h 的某个本原的相伴 h^*, 存在 f 的某个容量 c_f, 使上式成立.

证 设 $f = c_f f^*$, $g = c_g g^*$, $h = c_h h^*$, 其中 f^*, g^*, h^* 都是本原的多项式, c_g 与 c_h 使有理数, 且 c_f (由题设) 是整数. 因为 $f = gh$, 故

$$c_f f^* = (c_g c_h)(g^* h^*).$$

$g^* h^*$ 是本原的. 所以, 存在 (整数的) 单位 ε, 使

$$c_g c_h = \varepsilon c_f, \quad g^* h^* = \varepsilon^{-1} f^*.$$

所以

$$f = c_g c_h g^* h^* = (\varepsilon c_f) g^* h^* = c_f' g^* h^*.$$ ✌

评注 设多项式 f 的系数都是整数. 上个命题表明: 若 f 可写为二个有理系数多项式的积, 则 f 可写为二个整系数多项式的积. 反过来, 因为整数是有理数, 故若 f 可写为二个整系数多项式的积, f 当然可写为二个有理系数多项式的积. 每个有理系数多项式都可写为有理数与本原的多项式的积. 所以, 我们可以借整数的性质研究有理系数多项式是否是可约的.

作者本想到此结束本文. 不过, 抱着认真、负责的态度, 作者再给几个重要的命题就结束本文吧.

先从几个简单的小命题开始吧. 这里, 为了方便, 称正的不可约的整数为素数.

命题 设 p 是素数. 若 j 是小于 p 的正整数, 则 p 是 (广义) 二项系数 $\binom{p}{j}$ 的因子.

证 易知

$$\binom{p}{j} = \frac{p\cdot(p-1)\cdots(p-(j-1))}{j!} = K,$$

其中 K 是整数. 所以

$$p\cdot(p-1)\cdots(p-(j-1)) = K\cdot j!.$$

我们的目标是: 证明 p 是 K 的因子. 这里, p 已经是 $K\cdot j!$ 的因子了. 如果我们能证明 p 与 $j!$ 互素, 那么 p 一定是 K 的因子. 想法很美好, 是吧? 确实.

继续分解这个目标. 假如我们能说明 $1, 2, \cdots, j$ 都与 p 互素, 那 $1! = 1$ 与 p 互素, $2! = 1!\cdot 2$ 与 p 也互素, $3! = 2!\cdot 3$ 与 p 也互素……一直到 $j! = (j-1)!\cdot j$ 与 p 也互素.

好! 任取小于 p 的正整数 ℓ. 我们证明: p 与 ℓ 互素. 反证法. 若 p 与 ℓ 不互素, 则 p 一定是 ℓ 的因子. 所以, 存在整数 q 使 $\ell = pq$. 因为 $\ell \neq 0$, 故 $q \neq 0$, 即 $|q| \geq 1$. 所以

$$\ell = |\ell| = |p||q| \geq |p|\cdot 1 = p.$$

但是, 这与假定 $\ell < p$ 矛盾. 彳亍. 完了. ✌

前面, 我们讨论多项式的性质时, 为了简单, 我们把 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $\cdots$ 写为 f, g, h, $\cdots$. 现在, 因为我们需要多项式的复合, 我们需要写出被省略的 “(x)”.

命题 设

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

是有理系数多项式, 且 $n\geq 1$, $a_n\neq 0$ (这表明, $f(x)$ 不是 0, 也不是多项式的单位, 且 $f(x)$ 的次为 n). 设 α, β 是有理数, 且 $\alpha\neq 0$. 设

$$g(x)=f(\alpha x+\beta)=a_0+a_1(\alpha x+\beta)+\cdots+a_n(\alpha x+\beta)^n.$$

显然, $g(x)$ 也是有理系数多项式, 且次仍为 n ($g(x)$ 的次不超过 n, 且其 n 次系数 $a_n\alpha^n\neq 0$). 因为

$$x=\alpha\cdot\left(\frac{1}{\alpha}x+\frac{-\beta}{\alpha}\right)+\beta,$$

故

$$f(x)=f\left(\alpha\cdot\left(\frac{1}{\alpha}x+\frac{-\beta}{\alpha}\right)+\beta\right)=g\left(\frac{1}{\alpha}x+\frac{-\beta}{\alpha}\right).$$

这里, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{-\beta}{\alpha}$ 当然也是有理数, 且 $\frac{1}{\alpha}\neq 0$.

(i) 若 $f(x)$ (作为有理系数多项式, 下同) 是可约的, 则 $g(x)$ 是可约的;

(ii) 若 $g(x)$ 是可约的, 则 $f(x)$ 是可约的.

简单点说, "$f(x)$ 是可约的 (不可约的)" 的一个必要与充分条件是: "$f(\alpha x+\beta)$ (α, β 是有理数, 且 $\alpha\neq 0$) 是可约的 (不可约的)".

证 事实上, 我们只要证明 (i). (ii) 的证明就是把 (i) 的证明里的 f 与 g 互换, 且 α, β 分别换为 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{-\beta}{\alpha}$.

设 $f(x)$ 是可约的. 所以, 存在二个不是单位的 (次高于 0 的) 多项式 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 使

$$f(x)=f_1(x)f_2(x).$$

记

$$g_1(x)=f_1(\alpha x+\beta),\quad g_2(x)=f_2(\alpha x+\beta),$$

则

$$g(x)=f(\alpha x+\beta)=f_1(\alpha x+\beta)f_2(\alpha x+\beta)=g_1(x)g_2(x).$$

因为 $\deg g_1(x)=\deg f_1(x)$, $\deg g_2(x)=\deg f_2(x)$, 故 $g_1(x)$, $g_2(x)$ 都不是单位. 从而 $g(x)$ 也是可约的. ✌

评注　有一点值得读者注意.

设 $f(x) = x + 4$. 显然, $f(x)$ 是不可约的.

设 $g(x) = f(x^2) = x^2 + 4$. 我们证明: $g(x)$ 是不可约的.

反证法. 假定存在二个有理系数多项式 $g_1(x)$, $g_2(x)$ 使

$$g(x) = g_1(x)g_2(x),$$

且 $g_1(x)$, $g_2(x)$ 都不是单位. 根据前面的命题, 可进一步假定 $g_1(x)$, $g_2(x)$ 的系数都是整数 (这可以简化讨论). 因为 $\deg g_1(x) + \deg g_2(x) = 2$, 而 $\deg g_1(x) > 0$, $\deg g_2(x) > 0$, 故 $g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 的次都是 1. 所以, 设

$$g_1(x) = ax + b, \quad g_2(x) = cx + d,$$

其中 a, b, c, d 都是整数. 从而

$$x^2 + 4 = (ax + b)(cx + d) = (ac)x^2 + (ad + bc)x + (bd),$$

也就是

$$ac = 1, \quad ad + bc = 0, \quad bd = 4.$$

由 $ac = 1$ 知 $a = c = 1$ 或 $a = c = -1$. 所以

$$\begin{aligned} &b + d = \frac{ad + ba}{a} = \frac{ad + bc}{a} = 0, \\ &bd = 4. \end{aligned}$$

消去 d, 有

$$b^2 = -4.$$

看到这里, 读者可能笑了: 整数的平方不可能是 -4 呀! 所以, $g(x)$ 一定是不可约的.

设 $h(x) = g(x^2) = x^4 + 4$. 我们证明: $h(x)$ 是可约的.

这里就没必要反证了. 作者直接点吧. 无非就是添平方嘛! 具体一点, 就是

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 \\ &= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2). \end{aligned}$$

显然 $x^2 \pm 2x + 2$ 不是单位. 所以, $h(x)$ 是可约的.

设 $\ell(x) = h(x^2) = x^8 + 4$. 显然,

$$\begin{aligned} x^8 + 4 &= (x^2)^4 + 4 \\ &= ((x^2)^2 + 2x^2 + 2)((x^2)^2 - 2x^2 + 2) \\ &= (x^4 + 2x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 2), \end{aligned}$$

且 $x^4 \pm 2x^2 + 2$ 不是单位, 故 $\ell(x)$ 是可约的.

作者举这个例的目的是提醒读者: 上个命题的 $\alpha x + \beta$ 不能改为较高次的多项式; 否则, 命题不一定成立.

定义 设

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

是多项式, $a_n \neq 0$, 且 $a_0 \neq 0$. $f(x)$ 的反多项式 (*reciprocal polynomial*) 是

$$f^{\mathrm{r}}(x) = a_n + a_{n-1} x + \cdots + a_0 x^n.$$

也就是说, $f^{\mathrm{r}}(x)$ 的 j 次系数是 a_{n-j} $(j = 0, 1, \cdots, n)$.

请读者注意: 上面的 $f(x)$ 的 0 次项系数不是 0. 如果 $a_0 = 0$, 它的反多项式是未定义的.

例 设

$$f(x) = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5.$$

所以

$$f^{\mathrm{r}}(x) = 21 + 15x + 10x^2 + 6x^3 + 3x^4 + x^5.$$

例 设

$$g(x) = -6 - 5(x-1) + 2(x-1)^2 + (x-1)^3.$$

读者可能会觉得

$$g^{\mathrm{r}}(x) = 1 + 2(x-1) - 5(x-1)^2 - 6(x-1)^3.$$

但这不对. 按照定义, 我们要先将 $g(x)$ 写为 $1, x, x^2, x^3, \cdots$ 的线性组合:

$$\begin{aligned} g(x) = & -6-5(x-1)+2(x^2-2x+1)+(x^3-3x^2+3x-1) \\ = & -6+(-5x+5)+(2x^2-4x+2)+(x^3-3x^2+3x-1) \\ = & -6x-x^2+x^3. \end{aligned}$$

由此可见, $g(x)$ 的 0 次项系数为 0. 所以, $g^{\mathrm{r}}(x)$ 是未定义的.

命题 设

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

是多项式, $a_n\neq 0$, 且 $a_0\neq 0$.

(i) $f(x)$ 的反多项式 $f^{\mathrm{r}}(x)$ 的次仍为 n;

(ii) $f^{\mathrm{r}}(x)$ 的反多项式 $(f^{\mathrm{r}})^{\mathrm{r}}(x)$ 是 $f(x)$;

(iii) 若 t 是非零的数, 则

$$f^{\mathrm{r}}(t)=t^nf\left(\frac{1}{t}\right).$$

证 (i) $f(x)$ 的反多项式是

$$f^{\mathrm{r}}(x)=a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_0x^n.$$

因为 $a_0\neq 0$, 故 $f^{\mathrm{r}}(x)$ 的次仍为 n.

(ii) 设

$$b_j=a_{n-j},\quad j=0,1,\cdots,n.$$

则 $f(x)$ 的反多项式可写为

$$f^{\mathrm{r}}(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n.$$

因为 $b_0=a_n\neq 0$, 且 $b_n=a_0\neq 0$, 故 $f^{\mathrm{r}}(x)$ 的反多项式是

$$\begin{aligned} (f^{\mathrm{r}})^{\mathrm{r}}(x) &= b_n+b_{n-1}x+\cdots+b_0x^n \\ &= a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \\ &= f(x). \end{aligned}$$

(iii) 设 t 是非零的数. 则

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{t}\right) &= a_0 + a_1\frac{1}{t} + a_2\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \cdots + a_n\left(\frac{1}{t}\right)^n \\
&= a_0 + a_1\frac{1}{t} + a_2\frac{1}{t^2} + \cdots + a_n\frac{1}{t^n} \\
&= a_0\frac{t^n}{t^n} + a_1\frac{t^{n-1}}{t^n} + a_2\frac{t^{n-2}}{t^n} + \cdots + a_n\frac{1}{t^n} \\
&= \frac{a_0t^n + a_1t^{n-1} + a_2t^{n-2} + \cdots + a_n}{t^n} \\
&= \frac{a_n + a_{n-1}t + \cdots + a_0t^n}{t^n} \\
&= \frac{f^{\mathrm{r}}(t)}{t^n}.
\end{aligned}$$

所以

$$f^{\mathrm{r}}(t) = t^n f\left(\frac{1}{t}\right).$$ ✌

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetuer at, consectetuer sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.

Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetuer a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetuer. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetuer odio sem sed wisi.

Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetuer eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.

Etiam euismod. Fusce facilisis lacinia dui. Suspendisse potenti. In mi erat, cursus id, nonummy sed, ullamcorper eget, sapien. Praesent pretium, magna in eleifend egestas, pede pede pretium lorem, quis consectetuer tortor sapien facilisis magna. Mauris quis magna varius nulla scelerisque imperdiet. Aliquam non quam. Aliquam porttitor quam a lacus. Praesent vel arcu ut tortor cursus volutpat. In vitae pede quis diam bibendum placerat. Fusce elementum convallis neque. Sed dolor orci, scelerisque ac, dapibus nec, ultricies ut, mi. Duis nec dui quis leo sagittis commodo.

Aliquam lectus. Vivamus leo. Quisque ornare tellus ullamcorper nulla. Mauris porttitor pharetra tortor. Sed fringilla justo sed mauris. Mauris tellus. Sed non leo. Nullam elementum, magna in cursus sodales, augue est scelerisque sapien, venenatis congue nulla arcu et pede. Ut suscipit enim vel sapien. Donec congue. Maecenas urna mi, suscipit in, placerat ut, vestibulum ut, massa. Fusce ultrices nulla et nisl.

Etiam ac leo a risus tristique nonummy. Donec dignissim tincidunt nulla. Vestibulum rhoncus molestie odio. Sed lobortis, justo et pretium lobortis, mauris turpis condimentum augue, nec ultricies nibh arcu pretium enim. Nunc purus neque, placerat id, imperdiet sed, pellentesque nec, nisl. Vestibulum imperdiet neque non sem accumsan laoreet. In hac habitasse platea dictumst. Etiam condimentum facilisis libero. Suspendisse in elit quis nisl aliquam dapibus. Pellentesque auctor sapien. Sed egestas sapien nec lectus. Pellentesque vel dui vel neque bibendum viverra. Aliquam porttitor nisl nec pede. Proin mattis libero vel turpis. Donec rutrum mauris et libero. Proin euismod porta felis. Nam lobortis, metus quis elementum commodo, nunc lectus elementum mauris, eget vulputate ligula tellus eu neque. Vivamus eu dolor.

Nulla in ipsum. Praesent eros nulla, congue vitae, euismod ut, commodo a, wisi. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Aenean nonummy magna non leo. Sed felis erat, ullamcorper in, dictum non, ultricies ut, lectus. Proin vel arcu a odio lobortis euismod. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Proin ut est. Aliquam odio. Pellentesque massa turpis, cursus eu, euismod nec, tempor congue, nulla. Duis viverra gravida mauris. Cras tincidunt. Curabitur eros ligula, varius ut, pulvinar in, cursus faucibus, augue.

Nulla mattis luctus nulla. Duis commodo velit at leo. Aliquam vulputate magna et leo. Nam vestibulum ullamcorper leo. Vestibulum condimentum rutrum mauris. Donec id mauris. Morbi molestie justo et pede. Vivamus eget turpis sed nisl cursus tempor. Curabitur mollis sapien condimentum nunc. In wisi nisl, malesuada at, dignissim sit amet, lobortis in, odio. Aenean consequat arcu a ante. Pellentesque porta elit sit amet orci. Etiam at turpis nec elit ultricies imperdiet. Nulla facilisi. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse viverra aliquam risus. Nullam pede justo, molestie nonummy, scelerisque eu, facilisis vel, arcu.

Curabitur tellus magna, porttitor a, commodo a, commodo in, tortor. Donec interdum. Praesent scelerisque. Maecenas posuere sodales odio. Vivamus metus lacus, varius quis, imperdiet quis, rhoncus a, turpis. Etiam ligula arcu, elementum a, venenatis quis, sollicitudin sed, metus. Donec nunc pede, tincidunt in, venenatis vitae, faucibus vel, nibh. Pellentesque wisi. Nullam malesuada. Morbi ut tellus ut pede tincidunt porta. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam congue neque id dolor.

Donec et nisl at wisi luctus bibendum. Nam interdum tellus ac libero. Sed sem justo, laoreet vitae, fringilla at, adipiscing ut, nibh. Maecenas non sem quis tortor eleifend fermentum. Etiam id tortor ac mauris porta vulputate. Integer porta neque vitae massa. Maecenas tempus libero a libero posuere dictum. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Aenean quis mauris sed elit commodo placerat. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Vivamus rhoncus tincidunt libero. Etiam elementum pretium justo. Vivamus est. Morbi a tellus eget pede tristique commodo. Nulla nisl. Vestibulum sed nisl eu sapien cursus rutrum.

Nulla non mauris vitae wisi posuere convallis. Sed eu nulla nec eros scelerisque pharetra. Nullam varius. Etiam dignissim elementum metus. Vestibulum faucibus, metus sit amet mattis rhoncus, sapien dui laoreet odio, nec ultricies nibh augue a enim. Fusce in ligula. Quisque at magna et nulla commodo consequat. Proin accumsan imperdiet sem. Nunc porta. Donec feugiat mi at justo. Phasellus facilisis ipsum quis ante. In ac elit eget ipsum pharetra faucibus. Maecenas viverra nulla in massa.

Nulla ac nisl. Nullam urna nulla, ullamcorper in, interdum sit amet, gravida ut, risus. Aenean ac enim. In luctus. Phasellus eu quam vitae turpis viverra pellentesque. Duis feugiat felis ut enim. Phasellus pharetra, sem id porttitor sodales, magna nunc aliquet nibh, nec blandit nisl mauris at pede. Suspendisse risus risus, lobortis eget, semper at, imperdiet sit amet, quam.

Quisque scelerisque dapibus nibh. Nam enim. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Nunc ut metus. Ut metus justo, auctor at, ultrices eu, sagittis ut, purus. Aliquam aliquam.

Etiam pede massa, dapibus vitae, rhoncus in, placerat posuere, odio. Vestibulum luctus commodo lacus. Morbi lacus dui, tempor sed, euismod eget, condimentum at, tortor. Phasellus aliquet odio ac lacus tempor faucibus. Praesent sed sem. Praesent iaculis. Cras rhoncus tellus sed justo ullamcorper sagittis. Donec quis orci. Sed ut tortor quis tellus euismod tincidunt. Suspendisse congue nisl eu elit. Aliquam tortor diam, tempus id, tristique eget, sodales vel, nulla. Praesent tellus mi, condimentum sed, viverra at, consectetuer quis, lectus. In auctor vehicula orci. Sed pede sapien, euismod in, suscipit in, pharetra placerat, metus. Vivamus commodo dui non odio. Donec et felis.

Etiam suscipit aliquam arcu. Aliquam sit amet est ac purus bibendum congue. Sed in eros. Morbi non orci. Pellentesque mattis lacinia elit. Fusce molestie velit in ligula. Nullam et orci vitae nibh vulputate auctor. Aliquam eget purus. Nulla auctor wisi sed ipsum. Morbi porttitor tellus ac enim. Fusce ornare. Proin ipsum enim, tincidunt in, ornare venenatis, molestie a, augue. Donec vel pede in lacus sagittis porta. Sed hendrerit ipsum quis nisl. Suspendisse quis massa ac nibh pretium cursus. Sed sodales. Nam eu neque quis pede dignissim ornare. Maecenas eu purus ac urna tincidunt congue.

Donec et nisl id sapien blandit mattis. Aenean dictum odio sit amet risus. Morbi purus. Nulla a est sit amet purus venenatis iaculis. Vivamus viverra purus vel magna. Donec in justo sed odio malesuada dapibus. Nunc ultrices aliquam nunc. Vivamus facilisis pellentesque velit. Nulla nunc velit, vulputate dapibus, vulputate id, mattis ac, justo. Nam mattis elit dapibus purus. Quisque enim risus, congue non, elementum ut, mattis quis, sem. Quisque elit.

Maecenas non massa. Vestibulum pharetra nulla at lorem. Duis quis quam id lacus dapibus interdum. Nulla lorem. Donec ut ante quis dolor bibendum condimentum. Etiam egestas tortor vitae lacus. Praesent cursus.

Mauris bibendum pede at elit. Morbi et felis a lectus interdum facilisis. Sed suscipit gravida turpis. Nulla at lectus. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Praesent nonummy luctus nibh. Proin turpis nunc, congue eu, egestas ut, fringilla at, tellus. In hac habitasse platea dictumst.

Vivamus eu tellus sed tellus consequat suscipit. Nam orci orci, malesuada id, gravida nec, ultricies vitae, erat. Donec risus turpis, luctus sit amet, interdum quis, porta sed, ipsum. Suspendisse condimentum, tortor at egestas posuere, neque metus tempor orci, et tincidunt urna nunc a purus. Sed facilisis blandit tellus. Nunc risus sem, suscipit nec, eleifend quis, cursus quis, libero. Curabitur et dolor. Sed vitae sem. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Maecenas ante. Duis ullamcorper enim. Donec tristique enim eu leo. Nullam molestie elit eu dolor. Nullam bibendum, turpis vitae tristique gravida, quam sapien tempor lectus, quis pretium tellus purus ac quam. Nulla facilisi.

Duis aliquet dui in est. Donec eget est. Nunc lectus odio, varius at, fermentum in, accumsan non, enim. Aliquam erat volutpat. Proin sit amet nulla ut eros consectetuer cursus. Phasellus dapibus aliquam justo. Nunc laoreet. Donec consequat placerat magna. Duis pretium tincidunt justo. Sed sollicitudin vestibulum quam. Nam quis ligula. Vivamus at metus. Etiam imperdiet imperdiet pede. Aenean turpis. Fusce augue velit, scelerisque sollicitudin, dictum vitae, tempor et, pede. Donec wisi sapien, feugiat in, fermentum ut, sollicitudin adipiscing, metus.

Donec vel nibh ut felis consectetuer laoreet. Donec pede. Sed id quam id wisi laoreet suscipit. Nulla lectus dolor, aliquam ac, fringilla eget, mollis ut, orci. In pellentesque justo in ligula. Maecenas turpis. Donec eleifend leo at felis tincidunt consequat. Aenean turpis metus, malesuada sed, condimentum sit amet, auctor a, wisi. Pellentesque sapien elit, bibendum ac, posuere et, congue eu, felis. Vestibulum mattis libero quis metus scelerisque ultrices. Sed purus.

Donec molestie, magna ut luctus ultrices, tellus arcu nonummy velit, sit amet pulvinar elit justo et mauris. In pede. Maecenas euismod elit eu erat. Aliquam augue wisi, facilisis congue, suscipit in, adipiscing et, ante. In justo. Cras lobortis neque ac ipsum. Nunc fermentum massa at ante. Donec orci tortor, egestas sit amet, ultrices eget, venenatis eget, mi. Maecenas vehicula leo semper est. Mauris vel metus. Aliquam erat volutpat. In rhoncus sapien ac tellus. Pellentesque ligula.

Cras dapibus, augue quis scelerisque ultricies, felis dolor placerat sem, id porta velit odio eu elit. Aenean interdum nibh sed wisi. Praesent sollicitudin vulputate dui. Praesent iaculis viverra augue. Quisque in libero. Aenean gravida lorem vitae sem ullamcorper cursus. Nunc adipiscing rutrum ante. Nunc ipsum massa, faucibus sit amet, viverra vel, elementum semper, orci. Cras eros sem, vulputate et, tincidunt id, ultrices eget, magna. Nulla varius ornare odio. Donec accumsan mauris sit amet augue. Sed ligula lacus, laoreet non, aliquam sit amet, iaculis tempor, lorem. Suspendisse eros. Nam porta, leo sed congue tempor, felis est ultrices eros, id mattis velit felis non metus. Curabitur vitae elit non mauris varius pretium. Aenean lacus sem, tincidunt ut, consequat quis, porta vitae, turpis. Nullam laoreet fermentum urna. Proin iaculis lectus.

Sed mattis, erat sit amet gravida malesuada, elit augue egestas diam, tempus scelerisque nunc nisl vitae libero. Sed consequat feugiat massa. Nunc porta, eros in eleifend varius, erat leo rutrum dui, non convallis lectus orci ut nibh. Sed lorem massa, nonummy quis, egestas id, condimentum at, nisl. Maecenas at nibh. Aliquam et augue at nunc pellentesque ullamcorper. Duis nisl nibh, laoreet suscipit, convallis ut, rutrum id, enim. Phasellus odio. Nulla nulla elit, molestie non, scelerisque at, vestibulum eu, nulla. Ut odio nisl, facilisis id, mollis et, scelerisque nec, enim. Aenean sem leo, pellentesque sit amet, scelerisque sit amet, vehicula pellentesque, sapien.

Sed consequat tellus et tortor. Ut tempor laoreet quam. Nullam id wisi a libero tristique semper. Nullam nisl massa, rutrum ut, egestas semper, mollis id, leo. Nulla ac massa eu risus blandit mattis. Mauris ut nunc. In hac habitasse platea dictumst. Aliquam eget tortor. Quisque dapibus pede in erat. Nunc enim. In dui nulla, commodo at, consectetuer nec, malesuada nec, elit. Aliquam ornare tellus eu urna. Sed nec metus. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas.

Phasellus id magna. Duis malesuada interdum arcu. Integer metus. Morbi pulvinar pellentesque mi. Suspendisse sed est eu magna molestie egestas. Quisque mi lorem, pulvinar eget, egestas quis, luctus at, ante. Proin auctor vehicula purus. Fusce ac nisl aliquam ante hendrerit pellentesque. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Morbi wisi. Etiam arcu mauris, facilisis sed, eleifend non, nonummy ut, pede. Cras ut lacus tempor metus mollis placerat. Vivamus eu tortor vel metus interdum malesuada.

Sed eleifend, eros sit amet faucibus elementum, urna sapien consectetuer mauris, quis egestas leo justo non risus. Morbi non felis ac libero vulputate fringilla. Mauris libero eros, lacinia non, sodales quis, dapibus porttitor, pede. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Morbi dapibus mauris condimentum nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Etiam sit amet erat. Nulla varius. Etiam tincidunt dui vitae turpis. Donec leo. Morbi vulputate convallis est. Integer aliquet. Pellentesque aliquet sodales urna.

Nullam eleifend justo in nisl. In hac habitasse platea dictumst. Morbi nonummy. Aliquam ut felis. In velit leo, dictum vitae, posuere id, vulputate nec, ante. Maecenas vitae pede nec dui dignissim suscipit. Morbi magna. Vestibulum id purus eget velit laoreet laoreet. Praesent sed leo vel nibh convallis blandit. Ut rutrum. Donec nibh. Donec interdum. Fusce sed pede sit amet elit rhoncus ultrices. Nullam at enim vitae pede vehicula iaculis.

Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Aenean nonummy turpis id odio. Integer euismod imperdiet turpis. Ut nec leo nec diam imperdiet lacinia. Etiam eget lacus eget mi ultricies posuere. In placerat tristique tortor. Sed porta vestibulum metus. Nulla iaculis sollicitudin pede. Fusce luctus tellus in dolor. Curabitur auctor velit a sem. Morbi sapien. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Donec adipiscing urna vehicula nunc. Sed ornare leo in leo. In rhoncus leo ut dui. Aenean dolor quam, volutpat nec, fringilla id, consectetuer vel, pede.

Nulla malesuada risus ut urna. Aenean pretium velit sit amet metus. Duis iaculis. In hac habitasse platea dictumst. Nullam molestie turpis eget nisl. Duis a massa id pede dapibus ultricies. Sed eu leo. In at mauris sit amet tortor bibendum varius. Phasellus justo risus, posuere in, sagittis ac, varius vel, tortor. Quisque id enim. Phasellus consequat, libero pretium nonummy fringilla, tortor lacus vestibulum nunc, ut rhoncus ligula neque id justo. Nullam accumsan euismod nunc. Proin vitae ipsum ac metus dictum tempus. Nam ut wisi. Quisque tortor felis, interdum ac, sodales a, semper a, sem. Curabitur in velit sit amet dui tristique sodales. Vivamus mauris pede, lacinia eget, pellentesque quis, scelerisque eu, est. Aliquam risus. Quisque bibendum pede eu dolor.

Donec tempus neque vitae est. Aenean egestas odio sed risus ullamcorper ullamcorper. Sed in nulla a tortor tincidunt egestas. Nam sapien tortor, elementum sit amet, aliquam in, porttitor faucibus, enim. Nullam congue suscipit nibh. Quisque convallis. Praesent arcu nibh, vehicula eget, accumsan eu, tincidunt a, nibh. Suspendisse vulputate, tortor quis adipiscing viverra, lacus nibh dignissim tellus, eu suscipit risus ante fringilla diam. Quisque a libero vel pede imperdiet aliquet. Pellentesque nunc nibh, eleifend a, consequat consequat, hendrerit nec, diam. Sed urna. Maecenas laoreet eleifend neque. Vivamus purus odio, eleifend non, iaculis a, ultrices sit amet, urna. Mauris faucibus odio vitae risus. In nisl. Praesent purus. Integer iaculis, sem eu egestas lacinia, lacus pede scelerisque augue, in ullamcorper dolor eros ac lacus. Nunc in libero.

Fusce suscipit cursus sem. Vivamus risus mi, egestas ac, imperdiet varius, faucibus quis, leo. Aenean tincidunt. Donec suscipit. Cras id justo quis nibh scelerisque dignissim. Aliquam sagittis elementum dolor. Aenean consectetuer justo in pede. Curabitur ullamcorper ligula nec orci. Aliquam purus turpis, aliquam id, ornare vitae, porttitor non, wisi. Maecenas luctus porta lorem. Donec vitae ligula eu ante pretium varius. Proin tortor metus, convallis et, hendrerit non, scelerisque in, urna. Cras quis libero eu ligula bibendum tempor. Vivamus tellus quam, malesuada eu, tempus sed, tempor sed, velit. Donec lacinia auctor libero.

Praesent sed neque id pede mollis rutrum. Vestibulum iaculis risus. Pellentesque lacus. Ut quis nunc sed odio malesuada egestas. Duis a magna sit amet ligula tristique pretium. Ut pharetra. Vestibulum imperdiet magna nec wisi. Mauris convallis. Sed accumsan sollicitudin massa. Sed id enim. Nunc pede enim, lacinia ut, pulvinar quis, suscipit semper, elit. Cras accumsan erat vitae enim. Cras sollicitudin. Vestibulum rutrum blandit massa.

Sed gravida lectus ut purus. Morbi laoreet magna. Pellentesque eu wisi. Proin turpis. Integer sollicitudin augue nec dui. Fusce lectus. Vivamus faucibus nulla nec lacus. Integer diam. Pellentesque sodales, enim feugiat cursus volutpat, sem mauris dignissim mauris, quis consequat sem est fermentum ligula. Nullam justo lectus, condimentum sit amet, posuere a, fringilla mollis, felis. Morbi nulla nibh, pellentesque at, nonummy eu, sollicitudin nec, ipsum. Cras neque. Nunc augue. Nullam vitae quam id quam pulvinar blandit. Nunc sit amet orci. Aliquam erat elit, pharetra nec, aliquet a, gravida in, mi. Quisque urna enim, viverra quis, suscipit quis, tincidunt ut, sapien. Cras placerat consequat sem. Curabitur ac diam. Curabitur diam tortor, mollis et, viverra ac, tempus vel, metus.

Curabitur ac lorem. Vivamus non justo in dui mattis posuere. Etiam accumsan ligula id pede. Maecenas tincidunt diam nec velit. Praesent convallis sapien ac est. Aliquam ullamcorper euismod nulla. Integer mollis enim vel tortor. Nulla sodales placerat nunc. Sed tempus rutrum wisi. Duis accumsan gravida purus. Nunc nunc. Etiam facilisis dui eu sem. Vestibulum semper. Praesent eu eros. Vestibulum tellus nisl, dapibus id, vestibulum sit amet, placerat ac, mauris. Maecenas et elit ut erat placerat dictum. Nam feugiat, turpis et sodales volutpat, wisi quam rhoncus neque, vitae aliquam ipsum sapien vel enim. Maecenas suscipit cursus mi.

Quisque consectetuer. In suscipit mauris a dolor pellentesque consectetuer. Mauris convallis neque non erat. In lacinia. Pellentesque leo eros, sagittis quis, fermentum quis, tincidunt ut, sapien. Maecenas sem. Curabitur eros odio, interdum eu, feugiat eu, porta ac, nisl. Curabitur nunc. Etiam fermentum convallis velit. Pellentesque laoreet lacus. Quisque sed elit. Nam quis tellus. Aliquam tellus arcu, adipiscing non, tincidunt eleifend, adipiscing quis, augue. Vivamus elementum placerat enim. Suspendisse ut tortor. Integer faucibus adipiscing felis. Aenean consectetuer mattis lectus. Morbi malesuada faucibus dolor. Nam lacus. Etiam arcu libero, malesuada vitae, aliquam vitae, blandit tristique, nisl.

Maecenas accumsan dapibus sapien. Duis pretium iaculis arcu. Curabitur ut lacus. Aliquam vulputate. Suspendisse ut purus sed sem tempor rhoncus. Ut quam dui, fringilla at, dictum eget, ultricies quis, quam. Etiam sem est, pharetra non, vulputate in, pretium at, ipsum. Nunc semper sagittis orci. Sed scelerisque suscipit diam. Ut volutpat, dolor at ullamcorper tristique, eros purus mollis quam, sit amet ornare ante nunc et enim.

Phasellus fringilla, metus id feugiat consectetuer, lacus wisi ultrices tellus, quis lobortis nibh lorem quis tortor. Donec egestas ornare nulla. Mauris mi tellus, porta faucibus, dictum vel, nonummy in, est. Aliquam erat volutpat. In tellus magna, porttitor lacinia, molestie vitae, pellentesque eu, justo. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Sed orci nibh, scelerisque sit amet, suscipit sed, placerat vel, diam. Vestibulum nonummy vulputate orci. Donec et velit ac arcu interdum semper. Morbi pede orci, cursus ac, elementum non, vehicula ut, lacus. Cras volutpat. Nam vel wisi quis libero venenatis placerat. Aenean sed odio. Quisque posuere purus ac orci. Vivamus odio. Vivamus varius, nulla sit amet semper viverra, odio mauris consequat lacus, at vestibulum neque arcu eu tortor. Donec iaculis tincidunt tellus. Aliquam erat volutpat. Curabitur magna lorem, dignissim volutpat, viverra et, adipiscing nec, dolor.

Praesent lacus mauris, dapibus vitae, sollicitudin sit amet, nonummy eget, ligula.

Cras egestas ipsum a nisl. Vivamus varius dolor ut dolor. Fusce vel enim. Pellentesque accumsan ligula et eros. Cras id lacus non tortor facilisis facilisis. Etiam nisl elit, cursus sed, fringilla in, congue nec, urna. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Integer at turpis. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Duis fringilla, ligula sed porta fringilla, ligula wisi commodo felis, ut adipiscing felis dui in enim. Suspendisse malesuada ultrices ante. Pellentesque scelerisque augue sit amet urna. Nulla volutpat aliquet tortor. Cras aliquam, tellus at aliquet pellentesque, justo sapien commodo leo, id rhoncus sapien quam at erat. Nulla commodo, wisi eget sollicitudin pretium, orci orci aliquam orci, ut cursus turpis justo et lacus. Nulla vel tortor. Quisque erat elit, viverra sit amet, sagittis eget, porta sit amet, lacus.

In hac habitasse platea dictumst. Proin at est. Curabitur tempus vulputate elit. Pellentesque sem. Praesent eu sapien. Duis elit magna, aliquet at, tempus sed, vehicula non, enim. Morbi viverra arcu nec purus. Vivamus fringilla, enim et commodo malesuada, tortor metus elementum ligula, nec aliquet est sapien ut lectus. Aliquam mi. Ut nec elit. Fusce euismod luctus tellus. Curabitur scelerisque. Nullam purus. Nam ultricies accumsan magna. Morbi pulvinar lorem sit amet ipsum. Donec ut justo vitae nibh mollis congue. Fusce quis diam. Praesent tempus eros ut quam.

Donec in nisl. Fusce vitae est. Vivamus ante ante, mattis laoreet, posuere eget, congue vel, nunc. Fusce sem. Nam vel orci eu eros viverra luctus. Pellentesque sit amet augue. Nunc sit amet ipsum et lacus varius nonummy. Integer rutrum sem eget wisi. Aenean eu sapien. Quisque ornare dignissim mi. Duis a urna vel risus pharetra imperdiet. Suspendisse potenti.

Morbi justo. Aenean nec dolor. In hac habitasse platea dictumst. Proin nonummy porttitor velit. Sed sit amet leo nec metus rhoncus varius. Cras ante. Vestibulum commodo sem tincidunt massa. Nam justo. Aenean luctus, felis et condimentum lacinia, lectus enim pulvinar purus, non porta velit nisl sed eros. Suspendisse consequat. Mauris a dui et tortor mattis pretium. Sed nulla metus, volutpat id, aliquam eget, ullamcorper ut, ipsum. Morbi eu nunc. Praesent pretium. Duis aliquam pulvinar ligula. Ut blandit egestas justo. Quisque posuere metus viverra pede.

Vivamus sodales elementum neque. Vivamus dignissim accumsan neque. Sed at enim. Vestibulum nonummy interdum purus. Mauris ornare velit id nibh pretium ultricies. Fusce tempor pellentesque odio. Vivamus augue purus, laoreet in, scelerisque vel, commodo id, wisi. Duis enim. Nulla interdum, nunc eu semper eleifend, enim dolor pretium elit, ut commodo ligula nisl a est. Vivamus ante. Nulla leo massa, posuere nec, volutpat vitae, rhoncus eu, magna.

Quisque facilisis auctor sapien. Pellentesque gravida hendrerit lectus. Mauris rutrum sodales sapien. Fusce hendrerit sem vel lorem. Integer pellentesque massa vel augue. Integer elit tortor, feugiat quis, sagittis et, ornare non, lacus. Vestibulum posuere pellentesque eros. Quisque venenatis ipsum dictum nulla. Aliquam quis quam non metus eleifend interdum. Nam eget sapien ac mauris malesuada adipiscing. Etiam eleifend neque sed quam. Nulla facilisi. Proin a ligula. Sed id dui eu nibh egestas tincidunt. Suspendisse arcu.

Maecenas dui. Aliquam volutpat auctor lorem. Cras placerat est vitae lectus. Curabitur massa lectus, rutrum euismod, dignissim ut, dapibus a, odio. Ut eros erat, vulputate ut, interdum non, porta eu, erat. Cras fermentum, felis in porta congue, velit leo facilisis odio, vitae consectetuer lorem quam vitae orci. Sed ultrices, pede eu placerat auctor, ante ligula rutrum tellus, vel posuere nibh lacus nec nibh. Maecenas laoreet dolor at enim. Donec molestie dolor nec metus. Vestibulum libero. Sed quis erat. Sed tristique. Duis pede leo, fermentum quis, consectetuer eget, vulputate sit amet, erat.

Donec vitae velit. Suspendisse porta fermentum mauris. Ut vel nunc non mauris pharetra varius. Duis consequat libero quis urna. Maecenas at ante. Vivamus varius, wisi sed egestas tristique, odio wisi luctus nulla, lobortis dictum dolor ligula in lacus. Vivamus aliquam, urna sed interdum porttitor, metus orci interdum odio, sit amet euismod lectus felis et leo. Praesent ac wisi. Nam suscipit vestibulum sem. Praesent eu ipsum vitae pede cursus venenatis. Duis sed odio. Vestibulum eleifend. Nulla ut massa. Proin rutrum mattis sapien. Curabitur dictum gravida ante.

Phasellus placerat vulputate quam. Maecenas at tellus. Pellentesque neque diam, dignissim ac, venenatis vitae, consequat ut, lacus. Nam nibh. Vestibulum fringilla arcu mollis arcu. Sed et turpis. Donec sem tellus, volutpat et, varius eu, commodo sed, lectus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Quisque enim arcu, suscipit nec, tempus at, imperdiet vel, metus. Morbi volutpat purus at erat. Donec dignissim, sem id semper tempus, nibh massa eleifend turpis, sed pellentesque wisi purus sed libero. Nullam lobortis tortor vel risus. Pellentesque consequat nulla eu tellus. Donec velit. Aliquam fermentum, wisi ac rhoncus iaculis, tellus nunc malesuada orci, quis volutpat dui magna id mi. Nunc vel ante. Duis vitae lacus. Cras nec ipsum.

Morbi nunc. Aliquam consectetuer varius nulla. Phasellus eros. Cras dapibus porttitor risus. Maecenas ultrices mi sed diam. Praesent gravida velit at elit vehicula porttitor. Phasellus nisl mi, sagittis ac, pulvinar id, gravida sit amet, erat. Vestibulum est. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Curabitur id sem elementum leo rutrum hendrerit. Ut at mi. Donec tincidunt faucibus massa. Sed turpis quam, sollicitudin a, hendrerit eget, pretium ut, nisl. Duis hendrerit ligula. Nunc pulvinar congue urna.

Nunc velit. Nullam elit sapien, eleifend eu, commodo nec, semper sit amet, elit. Nulla lectus risus, condimentum ut, laoreet eget, viverra nec, odio. Proin lobortis. Curabitur dictum arcu vel wisi. Cras id nulla venenatis tortor congue ultrices. Pellentesque eget pede. Sed eleifend sagittis elit. Nam sed tellus sit amet lectus ullamcorper tristique. Mauris enim sem, tristique eu, accumsan at, scelerisque vulputate, neque. Quisque lacus. Donec et ipsum sit amet elit nonummy aliquet. Sed viverra nisl at sem. Nam diam. Mauris ut dolor. Curabitur ornare tortor cursus velit.

Morbi tincidunt posuere arcu. Cras venenatis est vitae dolor. Vivamus scelerisque semper mi. Donec ipsum arcu, consequat scelerisque, viverra id, dictum at, metus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut pede sem, tempus ut, porttitor bibendum, molestie eu, elit. Suspendisse potenti. Sed id lectus sit amet purus faucibus vehicula. Praesent sed sem non dui pharetra interdum. Nam viverra ultrices magna.

Aenean laoreet aliquam orci. Nunc interdum elementum urna. Quisque erat. Nullam tempor neque. Maecenas velit nibh, scelerisque a, consequat ut, viverra in, enim. Duis magna. Donec odio neque, tristique et, tincidunt eu, rhoncus ac, nunc. Mauris malesuada malesuada elit. Etiam lacus mauris, pretium vel, blandit in, ultricies id, libero. Phasellus bibendum erat ut diam. In congue imperdiet lectus.

Aenean scelerisque. Fusce pretium porttitor lorem. In hac habitasse platea dictumst. Nulla sit amet nisl at sapien egestas pretium. Nunc non tellus. Vivamus aliquet. Nam adipiscing euismod dolor. Aliquam erat volutpat. Nulla ut ipsum. Quisque tincidunt auctor augue. Nunc imperdiet ipsum eget elit. Aliquam quam leo, consectetuer non, ornare sit amet, tristique quis, felis. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque interdum quam sit amet mi. Pellentesque mauris dui, dictum a, adipiscing ac, fermentum sit amet, lorem.

Ut quis wisi. Praesent quis massa. Vivamus egestas risus eget lacus. Nunc tincidunt, risus quis bibendum facilisis, lorem purus rutrum neque, nec porta tortor urna quis orci. Aenean aliquet, libero semper volutpat luctus, pede erat lacinia augue, quis rutrum sem ipsum sit amet pede. Vestibulum aliquet, nibh sed iaculis sagittis, odio dolor blandit augue, eget mollis urna tellus id tellus. Aenean aliquet aliquam nunc. Nulla ultricies justo eget orci. Phasellus tristique fermentum leo. Sed massa metus, sagittis ut, semper ut, pharetra vel, erat. Aliquam quam turpis, egestas vel, elementum in, egestas sit amet, lorem. Duis convallis, wisi sit amet mollis molestie, libero mauris porta dui, vitae aliquam arcu turpis ac sem. Aliquam aliquet dapibus metus.

Vivamus commodo eros eleifend dui. Vestibulum in leo eu erat tristique mattis. Cras at elit. Cras pellentesque. Nullam id lacus sit amet libero aliquet hendrerit. Proin placerat, mi non elementum laoreet, eros elit tincidunt magna, a rhoncus sem arcu id odio. Nulla eget leo a leo egestas facilisis. Curabitur quis velit. Phasellus aliquam, tortor nec ornare rhoncus, purus urna posuere velit, et commodo risus tellus quis tellus. Vivamus leo turpis, tempus sit amet, tristique vitae, laoreet quis, odio. Proin scelerisque bibendum ipsum. Etiam nisl. Praesent vel dolor. Pellentesque vel magna. Curabitur urna. Vivamus congue urna in velit. Etiam ullamcorper elementum dui. Praesent non urna. Sed placerat quam non mi. Pellentesque diam magna, ultricies eget, ultrices placerat, adipiscing rutrum, sem.

Morbi sem. Nulla facilisi. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Nulla facilisi. Morbi sagittis ultrices libero. Praesent eu ligula sed sapien auctor sagittis. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Donec vel nunc. Nunc fermentum, lacus id aliquam porta, dui tortor euismod eros, vel molestie ipsum purus eu lacus. Vivamus pede arcu, euismod ac, tempus id, pretium et, lacus. Curabitur sodales dapibus urna. Nunc eu sapien. Donec eget nunc a pede dictum pretium. Proin mauris. Vivamus luctus libero vel nibh.

Fusce tristique risus id wisi. Integer molestie massa id sem. Vestibulum vel dolor. Pellentesque vel urna vel risus ultricies elementum. Quisque sapien urna, blandit nec, iaculis ac, viverra in, odio. In hac habitasse platea dictumst. Morbi neque lacus, convallis vitae, commodo ac, fermentum eu, velit. Sed in orci. In fringilla turpis non arcu. Donec in ante. Phasellus tempor feugiat velit. Aenean varius massa non turpis. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Aliquam tortor. Morbi ipsum massa, imperdiet non, consectetuer vel, feugiat vel, lorem. Quisque eget lorem nec elit malesuada vestibulum. Quisque sollicitudin ipsum vel sem. Nulla enim. Proin nonummy felis vitae felis. Nullam pellentesque. Duis rutrum feugiat felis. Mauris vel pede sed libero tincidunt mollis. Phasellus sed urna rhoncus diam euismod bibendum. Phasellus sed nisl. Integer condimentum justo id orci iaculis varius. Quisque et lacus. Phasellus elementum, justo at dignissim auctor, wisi odio lobortis arcu, sed sollicitudin felis felis eu neque. Praesent at lacus.

Vivamus sit amet pede. Duis interdum, nunc eget rutrum dignissim, nisl diam luctus leo, et tincidunt velit nisl id tellus. In lorem tellus, aliquet vitae, porta in, aliquet sed, lectus. Phasellus sodales. Ut varius scelerisque erat. In vel nibh eu eros imperdiet rutrum. Donec ac odio nec neque vulputate suscipit. Nam nec magna. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Nullam porta, odio et sagittis iaculis, wisi neque fringilla sapien, vel commodo lorem lorem id elit. Ut sem lectus, scelerisque eget, placerat et, tincidunt scelerisque, ligula. Pellentesque non orci.

Etiam vel ipsum. Morbi facilisis vestibulum nisl. Praesent cursus laoreet felis. Integer adipiscing pretium orci. Nulla facilisi. Quisque posuere bibendum purus. Nulla quam mauris, cursus eget, convallis ac, molestie non, enim. Aliquam congue. Quisque sagittis nonummy sapien. Proin molestie sem vitae urna. Maecenas lorem. Vivamus viverra consequat enim.

Nunc sed pede. Praesent vitae lectus. Praesent neque justo, vehicula eget, interdum id, facilisis et, nibh. Phasellus at purus et libero lacinia dictum. Fusce aliquet. Nulla eu ante placerat leo semper dictum. Mauris metus. Curabitur lobortis. Curabitur sollicitudin hendrerit nunc. Donec ultrices lacus id ipsum.

Donec a nibh ut elit vestibulum tristique. Integer at pede. Cras volutpat varius magna. Phasellus eu wisi. Praesent risus justo, lobortis eget, scelerisque ac, aliquet in, dolor. Proin id leo. Nunc iaculis, mi vitae accumsan commodo, neque sem lacinia nulla, quis vestibulum justo sem in eros. Quisque sed massa. Morbi lectus ipsum, vulputate a, mollis ut, accumsan placerat, tellus. Nullam in wisi. Vivamus eu ligula a nunc accumsan congue. Suspendisse ac libero. Aliquam erat volutpat. Donec augue. Nunc venenatis fringilla nibh. Fusce accumsan pulvinar justo. Nullam semper, dui ut dignissim auctor, orci libero fringilla massa, blandit pulvinar pede tortor id magna. Nunc adipiscing justo sed velit tincidunt fermentum.

Integer placerat. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Sed in massa. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Phasellus tempus aliquam risus. Aliquam rutrum purus at metus. Donec posuere odio at erat. Nam non nibh. Phasellus ligula. Quisque venenatis lectus in augue. Sed vestibulum dapibus neque.

Mauris tempus eros at nulla. Sed quis dui dignissim mauris pretium tincidunt. Mauris ac purus. Phasellus ac libero. Etiam dapibus iaculis nunc. In lectus wisi, elementum eu, sollicitudin nec, imperdiet quis, dui. Nulla viverra neque ac libero. Mauris urna leo, adipiscing eu, ultrices non, blandit eu, dui. Maecenas dui neque, suscipit sit amet, rutrum a, laoreet in, eros. Ut eu nibh. Fusce nec erat tempus urna fringilla tempus. Curabitur id enim. Sed ante. Cras sodales enim sit amet wisi. Nunc fermentum consequat quam.

Ut auctor, augue porta dignissim vestibulum, arcu diam lobortis velit, vel scelerisque risus augue sagittis risus. Maecenas eu justo. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris congue ligula eget tortor. Nullam laoreet urna sed enim. Donec eget eros ut eros volutpat convallis. Praesent turpis. Integer mauris diam, elementum quis, egestas ac, rutrum vel, orci. Nulla facilisi. Quisque adipiscing, nulla vitae elementum porta, sem urna volutpat leo, sed porta enim risus sed massa. Integer ac enim quis diam sodales luctus. Ut eget eros a ligula commodo ultricies. Donec eu urna viverra dolor hendrerit feugiat. Aliquam ac orci vel eros congue pharetra. Quisque rhoncus, justo eu volutpat faucibus, augue leo posuere lacus, a rhoncus purus pede vel est. Proin ultrices enim.

Aenean tincidunt laoreet dui. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Integer ipsum lectus, fermentum ac, malesuada in, eleifend ut, lorem. Vivamus ipsum turpis, elementum vel, hendrerit ut, semper at, metus. Vivamus sapien tortor, eleifend id, dapibus in, egestas et, pede. Pellentesque faucibus. Praesent lorem neque, dignissim in, facilisis nec, hendrerit vel, odio. Nam at diam ac neque aliquet viverra. Morbi dapibus ligula sagittis magna. In lobortis. Donec aliquet ultricies libero. Nunc dictum vulputate purus. Morbi varius. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In tempor. Phasellus commodo porttitor magna. Curabitur vehicula odio vel dolor.

Praesent facilisis, augue a adipiscing venenatis, libero risus molestie odio, pulvinar consectetuer felis erat ac mauris. Nam vestibulum rhoncus quam. Sed velit urna, pharetra eu, eleifend eu, viverra at, wisi. Maecenas ultrices nibh at turpis. Aenean quam. Nulla ipsum. Aliquam posuere luctus erat. Curabitur magna felis, lacinia et, tristique id, ultrices ut, mauris. Suspendisse feugiat. Cras eleifend wisi vitae tortor. Phasellus leo purus, mattis sit amet, auctor in, rutrum in, magna. In hac habitasse platea dictumst. Phasellus imperdiet metus in sem. Vestibulum ac enim non sem ultricies sagittis. Sed vel diam.

Integer vel enim sed turpis adipiscing bibendum. Vestibulum pede dolor, laoreet nec, posuere in, nonummy in, sem. Donec imperdiet sapien placerat erat. Donec viverra. Aliquam eros. Nunc consequat massa id leo. Sed ullamcorper, lorem in sodales dapibus, risus metus sagittis lorem, non porttitor purus odio nec odio. Sed tincidunt posuere elit. Quisque eu enim. Donec libero risus, feugiat ac, dapibus eget, posuere a, felis. Quisque vel lectus ut metus tincidunt eleifend. Duis ut pede. Duis velit erat, venenatis vitae, vulputate a, pharetra sit amet, est. Etiam fringilla faucibus augue.

Aenean velit sem, viverra eu, tempus id, rutrum id, mi. Nullam nec nibh. Proin ullamcorper, dolor in cursus tristique, eros augue tempor nibh, at gravida diam wisi at purus. Donec mattis ullamcorper tellus. Phasellus vel nulla. Praesent interdum, eros in sodales sollicitudin, nunc nulla pulvinar justo, a euismod eros sem nec nibh. Nullam sagittis dapibus lectus. Nullam eget ipsum eu tortor lobortis sodales. Etiam purus leo, pretium nec, feugiat non, ullamcorper vel, nibh. Sed vel elit et quam accumsan facilisis. Nunc leo. Suspendisse faucibus lacus.

Pellentesque interdum sapien sed nulla. Proin tincidunt. Aliquam volutpat est vel massa. Sed dolor lacus, imperdiet non, ornare non, commodo eu, neque. Integer pretium semper justo. Proin risus. Nullam id quam. Nam neque. Duis vitae wisi ullamcorper diam congue ultricies. Quisque ligula. Mauris vehicula.

Curabitur nunc magna, posuere eget, venenatis eu, vehicula ac, velit. Aenean ornare, massa a accumsan pulvinar, quam lorem laoreet purus, eu sodales magna risus molestie lorem. Nunc erat velit, hendrerit quis, malesuada ut, aliquam vitae, wisi. Sed posuere. Suspendisse ipsum arcu, scelerisque nec, aliquam eu, molestie tincidunt, justo. Phasellus iaculis. Sed posuere lorem non ipsum. Pellentesque dapibus. Suspendisse quam libero, laoreet a, tincidunt eget, consequat at, est. Nullam ut lectus non enim consequat facilisis. Mauris leo. Quisque pede ligula, auctor vel, pellentesque vel, posuere id, turpis. Cras ipsum sem, cursus et, facilisis ut, tempus euismod, quam. Suspendisse tristique dolor eu orci. Mauris mattis. Aenean semper. Vivamus tortor magna, facilisis id, varius mattis, hendrerit in, justo. Integer purus.

Vivamus adipiscing. Curabitur imperdiet tempus turpis. Vivamus sapien dolor, congue venenatis, euismod eget, porta rhoncus, magna. Proin condimentum pretium enim. Fusce fringilla, libero et venenatis facilisis, eros enim cursus arcu, vitae facilisis odio augue vitae orci. Aliquam varius nibh ut odio. Sed condimentum condimentum nunc. Pellentesque eget massa. Pellentesque quis mauris. Donec ut ligula ac pede pulvinar lobortis. Pellentesque euismod. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent elit. Ut laoreet ornare est. Phasellus gravida vulputate nulla. Donec sit amet arcu ut sem tempor malesuada. Praesent hendrerit augue in urna. Proin enim ante, ornare vel, consequat ut, blandit in, justo. Donec felis elit, dignissim sed, sagittis ut, ullamcorper a, nulla. Aenean pharetra vulputate odio.

Quisque enim. Proin velit neque, tristique eu, eleifend eget, vestibulum nec, lacus. Vivamus odio. Duis odio urna, vehicula in, elementum aliquam, aliquet laoreet, tellus. Sed velit. Sed vel mi ac elit aliquet interdum. Etiam sapien neque, convallis et, aliquet vel, auctor non, arcu. Aliquam suscipit aliquam lectus. Proin tincidunt magna sed wisi. Integer blandit lacus ut lorem. Sed luctus justo sed enim.

Morbi malesuada hendrerit dui. Nunc mauris leo, dapibus sit amet, vestibulum et, commodo id, est. Pellentesque purus. Pellentesque tristique, nunc ac pulvinar adipiscing, justo eros consequat lectus, sit amet posuere lectus neque vel augue. Cras consectetuer libero ac eros. Ut eget massa. Fusce sit amet enim eleifend sem dictum auctor. In eget risus luctus wisi convallis pulvinar. Vivamus sapien risus, tempor in, viverra in, aliquet pellentesque, eros. Aliquam euismod libero a sem.

Nunc velit augue, scelerisque dignissim, lobortis et, aliquam in, risus. In eu eros. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Curabitur vulputate elit viverra augue. Mauris fringilla, tortor sit amet malesuada mollis, sapien mi dapibus odio, ac imperdiet ligula enim eget nisl. Quisque vitae pede a pede aliquet suscipit. Phasellus tellus pede, viverra vestibulum, gravida id, laoreet in, justo. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Integer commodo luctus lectus. Mauris justo. Duis varius eros. Sed quam. Cras lacus eros, rutrum eget, varius quis, convallis iaculis, velit. Mauris imperdiet, metus at tristique venenatis, purus neque pellentesque mauris, a ultrices elit lacus nec tortor. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent malesuada. Nam lacus lectus, auctor sit amet, malesuada vel, elementum eget, metus. Duis neque pede, facilisis eget, egestas elementum, nonummy id, neque.

Proin non sem. Donec nec erat. Proin libero. Aliquam viverra arcu. Donec vitae purus. Donec felis mi, semper id, scelerisque porta, sollicitudin sed, turpis. Nulla in urna. Integer varius wisi non elit. Etiam nec sem. Mauris consequat, risus nec congue condimentum, ligula ligula suscipit urna, vitae porta odio erat quis sapien. Proin luctus leo id erat. Etiam massa metus, accumsan pellentesque, sagittis sit amet, venenatis nec, mauris. Praesent urna eros, ornare nec, vulputate eget, cursus sed, justo. Phasellus nec lorem.

Nullam ligula ligula, mollis sit amet, faucibus vel, eleifend ac, dui. Aliquam erat volutpat.

Fusce vehicula, tortor et gravida porttitor, metus nibh congue lorem, ut tempus purus mauris a pede. Integer tincidunt orci sit amet turpis. Aenean a metus. Aliquam vestibulum lobortis felis. Donec gravida. Sed sed urna. Mauris et orci. Integer ultrices feugiat ligula. Sed dignissim nibh a massa. Donec orci dui, tempor sed, tincidunt nonummy, viverra sit amet, turpis. Quisque lobortis. Proin venenatis tortor nec wisi. Vestibulum placerat. In hac habitasse platea dictumst. Aliquam porta mi quis risus. Donec sagittis luctus diam. Nam ipsum elit, imperdiet vitae, faucibus nec, fringilla eget, leo. Etiam quis dolor in sapien porttitor imperdiet.

Cras pretium. Nulla malesuada ipsum ut libero. Suspendisse gravida hendrerit tellus. Maecenas quis lacus. Morbi fringilla. Vestibulum odio turpis, tempor vitae, scelerisque a, dictum non, massa. Praesent erat felis, porta sit amet, condimentum sit amet, placerat et, turpis. Praesent placerat lacus a enim. Vestibulum non eros. Ut congue. Donec tristique varius tortor. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Nam dictum dictum urna.

Phasellus vestibulum orci vel mauris. Fusce quam leo, adipiscing ac, pulvinar eget, molestie sit amet, erat. Sed diam. Suspendisse eros leo, tempus eget, dapibus sit amet, tempus eu, arcu. Vestibulum wisi metus, dapibus vel, luctus sit amet, condimentum quis, leo. Suspendisse molestie. Duis in ante. Ut sodales sem sit amet mauris. Suspendisse ornare pretium orci. Fusce tristique enim eget mi. Vestibulum eros elit, gravida ac, pharetra sed, lobortis in, massa. Proin at dolor. Duis accumsan accumsan pede. Nullam blandit elit in magna lacinia hendrerit. Ut nonummy luctus eros. Fusce eget tortor.

Ut sit amet magna. Cras a ligula eu urna dignissim viverra. Nullam tempor leo porta ipsum. Praesent purus. Nullam consequat. Mauris dictum sagittis dui. Vestibulum sollicitudin consectetuer wisi. In sit amet diam. Nullam malesuada pharetra risus. Proin lacus arcu, eleifend sed, vehicula at, congue sit amet, sem. Sed sagittis pede a nisl. Sed tincidunt odio a pede. Sed dui. Nam eu enim. Aliquam sagittis lacus eget libero. Pellentesque diam sem, sagittis molestie, tristique et, fermentum ornare, nibh. Nulla et tellus non felis imperdiet mattis. Aliquam erat volutpat.

Vestibulum sodales ipsum id augue. Integer ipsum pede, convallis sit amet, tristique vitae, tempor ut, nunc. Nam non ligula non lorem convallis hendrerit. Maecenas hendrerit. Sed magna odio, aliquam imperdiet, porta ac, aliquet eget, mi. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Vestibulum nisl sem, dignissim vel, euismod quis, egestas ut, orci. Nunc vitae risus vel metus euismod laoreet. Cras sit amet neque a turpis lobortis auctor. Sed aliquam sem ac elit. Cras velit lectus, facilisis id, dictum sed, porta rutrum, nisl. Nam hendrerit ipsum sed augue. Nullam scelerisque hendrerit wisi. Vivamus egestas arcu sed purus. Ut ornare lectus sed eros. Suspendisse potenti. Mauris sollicitudin pede vel velit. In hac habitasse platea dictumst.

Suspendisse erat mauris, nonummy eget, pretium eget, consequat vel, justo. Pellentesque consectetuer erat sed lacus. Nullam egestas nulla ac dui. Donec cursus rhoncus ipsum. Nunc et sem eu magna egestas malesuada. Vivamus dictum massa at dolor. Morbi est nulla, faucibus ac, posuere in, interdum ut, sapien. Proin consectetuer pretium urna. Donec sit amet nibh nec purus dignissim mattis. Phasellus vehicula elit at lacus. Nulla facilisi. Cras ut arcu. Sed consectetuer. Integer tristique elit quis felis consectetuer eleifend. Cras et lectus.

Ut congue malesuada justo. Curabitur congue, felis at hendrerit faucibus, mauris lacus porttitor pede, nec aliquam turpis diam feugiat arcu. Nullam rhoncus ipsum at risus. Vestibulum a dolor sed dolor fermentum vulputate. Sed nec ipsum dapibus urna bibendum lobortis. Vestibulum elit. Nam ligula arcu, volutpat eget, lacinia eu, lobortis ac, urna. Nam mollis ultrices nulla. Cras vulputate. Suspendisse at risus at metus pulvinar malesuada. Nullam lacus. Aliquam tempus magna. Aliquam ut purus. Proin tellus.

Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Donec scelerisque metus. Maecenas non mi ut metus porta hendrerit. Nunc semper. Cras quis wisi ut lorem posuere tristique. Nunc vestibulum scelerisque nulla. Suspendisse pharetra sollicitudin ante. Praesent at augue sit amet ante interdum porta. Nunc bibendum augue luctus diam. Etiam nec sem. Sed eros turpis, facilisis nec, vehicula vitae, aliquam sed, nulla. Curabitur justo leo, vestibulum eget, tristique ut, tempus at, nisl.

Nulla venenatis lorem id arcu. Morbi cursus urna a ipsum. Donec porttitor. Integer eleifend, est non mattis malesuada, mi nulla convallis mi, et auctor lectus sapien ut purus. Aliquam nulla augue, pharetra sit amet, faucibus semper, molestie vel, nibh. Pellentesque vestibulum magna et mi. Sed fringilla dolor vel tellus. Nunc libero nunc, venenatis eget, convallis hendrerit, iaculis elementum, mi. Nullam aliquam, felis et accumsan vehicula, magna justo vehicula diam, eu condimentum nisl felis et nunc. Quisque volutpat mauris a velit. Pellentesque massa. Integer at lorem. Nam metus erat, lacinia id, convallis ut, pulvinar non, wisi. Cras iaculis mauris ut neque. Cras sodales, sem vitae imperdiet consequat, pede purus sollicitudin urna, ac aliquam metus orci in leo. Ut molestie ultrices mauris. Vivamus vitae sem. Aliquam erat volutpat. Praesent commodo, nisl ac dapibus aliquet, tortor orci sodales lorem, non ornare nulla lorem quis nisl.

Sed at sem vitae purus ultrices vestibulum. Vestibulum tincidunt lacus et ligula. Pellentesque vitae elit. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Duis ornare, erat eget laoreet vulputate, lacus ipsum suscipit turpis, et bibendum nisl orci non lectus. Vestibulum nec risus nec libero fermentum fringilla. Morbi non velit in magna gravida hendrerit. Pellentesque quis lectus. Vestibulum eleifend lobortis leo. Vestibulum non augue. Vivamus dictum tempor dui. Maecenas at ligula id felis congue porttitor. Nulla leo magna, egestas quis, vulputate sit amet, viverra id, velit.

Ut lectus lectus, ultricies sit amet, semper eget, laoreet non, ante. Proin at massa quis nunc rhoncus mattis. Aliquam lorem. Curabitur pharetra dui at neque. Aliquam eu tellus. Aenean tempus, felis vitae vulputate iaculis, est dolor faucibus urna, in viverra wisi neque non risus. Fusce vel dolor nec sapien pretium nonummy. Integer faucibus massa ac nulla ornare venenatis. Nulla quis sapien. Sed tortor. Phasellus eget mi. Cras nunc. Cras a enim.

Quisque nisl. In dignissim dapibus massa. Aenean sem magna, scelerisque nec, ullamcorper quis, porttitor ut, lectus. Fusce dignissim facilisis tortor. Vivamus gravida felis sit amet nunc. Nam pulvinar odio vel enim. Pellentesque sit amet est. Vivamus pulvinar leo non sapien. Aliquam erat volutpat. Ut elementum auctor metus. Mauris vestibulum neque vitae eros. Pellentesque aliquam quam. Donec venenatis tristique purus. In nisl. Nulla velit libero, fermentum at, porta a, feugiat vitae, urna. Etiam aliquet ornare ipsum. Proin non dolor. Aenean nunc ligula, venenatis suscipit, porttitor sit amet, mattis suscipit, magna. Vivamus egestas viverra est. Morbi at risus sed sapien sodales pretium.

Morbi congue congue metus. Aenean sed purus. Nam pede magna, tristique nec, porta id, sollicitudin quis, sapien. Vestibulum blandit. Suspendisse ut augue ac nibh ullamcorper posuere. Integer euismod, neque at eleifend fringilla, augue elit ornare dolor, vel tincidunt purus est id lacus. Vivamus lorem dui, commodo quis, scelerisque eu, tincidunt non, magna. Cras sodales. Quisque vestibulum pulvinar diam. Phasellus tincidunt, leo vitae tristique facilisis, ipsum wisi interdum sem, dapibus semper nulla velit vel lectus. Cras dapibus mauris et augue. Quisque cursus nulla in libero. Suspendisse et lorem sit amet mauris malesuada mollis. Nullam id justo. Maecenas venenatis. Donec lacus arcu, egestas ac, fermentum consectetuer, tempus eu, metus. Proin sodales, sem in pretium fermentum, arcu sapien commodo mauris, venenatis consequat augue urna in wisi. Quisque sapien nunc, varius eget, condimentum quis, lacinia in, est. Fusce facilisis. Praesent nec ipsum.

Suspendisse a dolor. Nam erat eros, congue eget, sagittis a, lacinia in, pede. Maecenas in elit. Proin molestie varius nibh. Vivamus tristique purus sed augue. Proin egestas semper tortor. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Vestibulum orci enim, sagittis ornare, eleifend ut, mattis at, ligula. Nulla molestie convallis arcu. Ut eros tellus, condimentum at, sodales in, ultrices vel, nulla.

Duis magna ante, bibendum eget, eleifend eget, suscipit sed, neque. Vestibulum in mi sed massa cursus cursus. Pellentesque pulvinar mollis neque. Fusce ut enim vitae mauris malesuada tincidunt. Vivamus a neque. Mauris pulvinar, sapien id condimentum dictum, quam arcu rhoncus dui, id tempor lacus justo et justo. Proin sit amet orci eu diam eleifend blandit. Nunc erat massa, luctus ac, fermentum lacinia, tincidunt ultrices, sapien. Praesent sed orci vitae dolor sollicitudin adipiscing. Cras a neque. Ut risus dui, interdum at, placerat id, tristique eu, enim. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Etiam adipiscing eros vestibulum dolor. Pellentesque aliquam, diam eget eleifend posuere, augue eros porttitor lectus, ac dignissim dui metus nec felis. Quisque lacinia. Vestibulum tellus. Suspendisse nec wisi. Aenean ac felis. Aliquam ultrices metus et nulla.

Praesent sed est non nibh tempus venenatis. Praesent rhoncus. Curabitur sagittis est sit amet neque. Sed commodo malesuada lectus. Phasellus enim tellus, tempor ut, tristique eu, aliquam eu, quam. Aenean quis quam quis wisi gravida vehicula. Pellentesque a massa a leo pretium rhoncus. Suspendisse ultrices. Donec lacinia malesuada massa. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Donec pretium ornare mauris. Phasellus auctor erat eget enim. Integer scelerisque, felis eu consequat fringilla, lorem wisi ultricies velit, id vehicula purus nulla eget odio. Nullam mattis, diam a rutrum fermentum, odio sapien tristique quam, id mollis tellus quam in odio. Mauris eu sapien. Donec aliquam lorem sit amet lorem pharetra lobortis.

Donec ac velit. Sed convallis vestibulum sapien. Vivamus tempor lacus sed lacus. Nunc ut lorem. Ut et tortor. Nullam varius wisi at diam.

Etiam ultricies, dolor sit amet fermentum vulputate, neque libero vestibulum orci, vitae fringilla neque arcu aliquet ante. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Quisque venenatis lobortis augue. Sed tempor, tellus iaculis pellentesque pharetra, pede dui malesuada mauris, vel ultrices urna mauris ac nibh. Etiam nibh odio, ultricies vehicula, vestibulum vitae, feugiat eleifend, felis. Vivamus pulvinar. Aliquam erat volutpat. Nulla egestas venenatis metus. Nam feugiat nunc quis elit egestas sagittis. Sed vitae felis. In libero arcu, rhoncus in, commodo eget, auctor in, enim. Vivamus suscipit est. Nulla dapibus, magna vel aliquet egestas, massa massa hendrerit lacus, ac rutrum tellus tellus sit amet felis. Cras viverra.

Suspendisse eu nunc. Aliquam dignissim urna sit amet mauris. Cras commodo, urna ut porttitor venenatis, arcu metus sodales risus, vitae gravida sapien ligula in est. Donec vulputate sollicitudin wisi. Donec vehicula, est id interdum ornare, nibh tellus consectetuer justo, a ultrices felis erat at lectus. In est massa, malesuada non, suscipit at, ullamcorper eu, elit. Nam nulla lacus, bibendum sit amet, sagittis sed, tempor eget, libero. Praesent ligula. Suspendisse nulla. Etiam diam. Nulla ante diam, vestibulum et, aliquet ac, imperdiet vitae, urna. Fusce tincidunt lacus vel elit. Maecenas dictum, tortor non euismod bibendum, pede nibh pretium tellus, at dignissim leo eros eget pede. Nulla venenatis eleifend eros. Aenean ut odio dignissim augue rutrum faucibus. Fusce posuere, tellus eget viverra mattis, erat tellus porta mi, at facilisis sem nibh non urna. Phasellus quis turpis quis mauris suscipit vulputate. Sed interdum lacus non velit. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae.

Vivamus vehicula leo a justo. Quisque nec augue. Morbi mauris wisi, aliquet vitae, dignissim eget, sollicitudin molestie, ligula. In dictum enim sit amet risus. Curabitur vitae velit eu diam rhoncus hendrerit. Vivamus ut elit. Praesent mattis ipsum quis turpis. Curabitur rhoncus neque eu dui. Etiam vitae magna. Nam ullamcorper. Praesent interdum bibendum magna. Quisque auctor aliquam dolor. Morbi eu lorem et est porttitor fermentum. Nunc egestas arcu at tortor varius viverra. Fusce eu nulla ut nulla interdum consectetuer. Vestibulum gravida. Morbi mattis libero sed est.

Nam quis enim. Quisque ornare dui a tortor. Fusce consequat lacus pellentesque metus. Duis euismod. Duis non quam. Maecenas vitae dolor in ipsum auctor vehicula. Vivamus nec nibh eget wisi varius pulvinar. Cras a lacus. Etiam et massa. Donec in nisl sit amet dui imperdiet vestibulum. Duis porttitor nibh id eros.

Mauris consectetuer, wisi eu lobortis scelerisque, urna nibh feugiat quam, id congue eros justo eget orci. Ut tellus. Maecenas mattis sapien sed eros. Aliquam quis lectus. Donec nec massa ac turpis semper cursus. Etiam consectetuer ante vel odio. Aliquam tincidunt felis non dolor. Cras id augue ut nisl pretium placerat. Phasellus sapien sapien, pharetra sed, aliquam nec, suscipit a, nibh. Suspendisse risus. Nulla ut mi eget tellus sollicitudin euismod. Vestibulum malesuada malesuada dui. Ut at est ac dui aliquam sagittis. Aliquam erat volutpat.

Curabitur ullamcorper est in mauris. Praesent ac massa. Quisque enim odio, lobortis nec, mattis ut, luctus et, mauris. Mauris eu risus. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Duis eu ligula. Nulla vehicula leo tincidunt erat. Maecenas et nunc. Sed ut sapien. Vestibulum in est. Vestibulum rhoncus.

Donec metus metus, condimentum eu, accumsan nec, vulputate non, purus. Vestibulum ullamcorper vehicula sapien. Mauris risus odio, hendrerit ac, congue ac, ullamcorper at, odio. Aenean leo justo, commodo vitae, placerat blandit, malesuada vel, sem. Donec sit amet ante eget mauris adipiscing sollicitudin. Curabitur posuere sem et leo. Nulla ultricies mauris. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Fusce sollicitudin augue vel tellus. Vivamus mauris eros, pharetra vel, lacinia pretium, egestas a, nibh. Morbi a ligula.

Donec vitae turpis. Suspendisse porttitor. Mauris aliquam purus vitae tellus. Morbi metus diam, tempus ac, cursus ut, ultricies quis, nulla. Praesent nec justo. In lobortis. Donec nec lectus a neque laoreet rhoncus. Quisque in risus nec wisi lacinia ullamcorper. In placerat. Proin facilisis sollicitudin libero. Integer eget neque et pede placerat aliquet. Aliquam purus nulla, pulvinar ut, facilisis quis, sodales sed, magna. Curabitur nulla lectus, rutrum id, bibendum ut, sagittis eget, diam. Sed porta dolor eget est. Integer hendrerit orci. In hac habitasse platea dictumst.

Ut facilisis. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Sed pellentesque, turpis sit amet aliquet porta, risus odio venenatis felis, at porta tellus lacus vitae nisl. Donec augue. Quisque consequat, pede laoreet pellentesque posuere, urna sapien tempor justo, eu aliquam tortor nunc id mauris. Fusce pretium, purus facilisis consequat mattis, ligula leo pretium mauris, ac suscipit augue sapien sit amet ipsum. Praesent et ligula eget tortor dapibus blandit. Duis rutrum felis eget dolor. Vestibulum quis elit. Integer dignissim, velit at scelerisque congue, ipsum nulla dignissim dolor, lacinia scelerisque neque erat a mi. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Quisque ipsum lectus, euismod et, lacinia eu, iaculis eu, pede. Etiam justo quam, cursus ut, vulputate vel, feugiat ut, eros. Fusce eleifend mollis ipsum.

Nulla facilisi. Nunc nec elit. Integer ornare convallis tortor. Proin ac diam. In est sapien, laoreet euismod, mattis a, tincidunt at, risus. Vivamus risus. Vestibulum aliquam, urna aliquam porttitor accumsan, nulla tortor ullamcorper elit, ut consequat augue purus sit amet libero. Vivamus nisl lacus, commodo vel, dignissim ut, vestibulum id, pede. Curabitur malesuada hendrerit libero. Mauris quis dolor in tellus varius posuere. Sed vulputate elit at wisi. Fusce vitae neque. Nulla consectetuer, nunc ac eleifend laoreet, mi nulla commodo wisi, vel faucibus ligula lectus ut arcu. Vivamus hendrerit.

Sed varius, nulla vitae tincidunt lobortis, nibh ipsum sollicitudin libero, et commodo tellus massa in neque. Nulla facilisi. Aenean nec lectus. Aliquam fermentum. Duis ut magna et augue interdum gravida. Morbi elit. Fusce malesuada tempus ipsum. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Mauris iaculis enim non metus. Nullam dui magna, congue et, suscipit sed, aliquam vel, turpis. Quisque ultricies.

Suspendisse feugiat sapien laoreet ante. Integer fringilla, erat eget adipiscing ultrices, nibh dui sollicitudin nunc, in lobortis arcu odio vitae erat. Fusce bibendum ultricies lacus. Mauris eleifend ligula a ante. Etiam faucibus cursus pede. Mauris enim eros, malesuada eu, mattis sit amet, blandit in, nulla. Fusce sit amet purus id mi posuere tincidunt. Mauris sit amet quam vitae quam semper accumsan. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Nam a justo at quam accumsan euismod. Duis tincidunt tristique risus. Ut vel nibh vel libero varius malesuada. In hac habitasse platea dictumst. Morbi sagittis mattis lorem. Pellentesque metus tellus, rutrum vitae, malesuada et, pharetra accumsan, ante. Quisque ac metus ac nisl gravida pellentesque. Sed dapibus feugiat sapien. Vestibulum nec nunc eget sem aliquam lobortis. Suspendisse aliquam quam quis metus.

Suspendisse in odio. In elit diam, cursus vitae, venenatis in, molestie in, leo. Cras ornare. Nulla libero. Phasellus feugiat mattis libero. Sed vehicula aliquam ligula. Nullam lacinia, felis vel dignissim sodales, enim lectus lobortis diam, quis nonummy mauris odio auctor tortor. Integer in dui nec lacus bibendum ultrices. Etiam odio elit, aliquam et, porttitor id, interdum cursus, elit. Nulla eleifend tempor mauris. In vel arcu quis pede laoreet vulputate.

Morbi pharetra magna a lorem. Cras sapien. Duis porttitor vehicula urna. Phasellus iaculis, mi vitae varius consequat, purus nibh sollicitudin mauris, quis aliquam felis dolor vel elit. Quisque neque mi, bibendum non, tristique convallis, congue eu, quam. Etiam vel felis. Quisque ac ligula at orci pulvinar rutrum. Donec mi eros, sagittis eu, consectetuer sed, sagittis sed, lorem. Nunc sed eros. Nullam pellentesque ante quis lectus. Vivamus lacinia, sapien vel fermentum placerat, purus nisl aliquet odio, et porta wisi dui nec nunc. Fusce porta cursus libero.

Quisque eu mi a augue mollis posuere. Donec tincidunt, lorem at vestibulum pulvinar, felis purus nonummy urna, at accumsan purus dui nec leo. Praesent tortor turpis, vehicula in, aliquet ut, dignissim ac, leo. Curabitur sagittis mi id eros. In magna. Sed vitae elit facilisis elit semper sollicitudin. Curabitur convallis tempor nulla. Nullam non turpis a pede sagittis ultrices. Etiam vulputate pede in ligula. Sed a ante id metus pellentesque suscipit. Sed adipiscing justo vitae sapien. Nunc posuere, pede ullamcorper gravida egestas, justo libero tincidunt arcu, vitae pellentesque arcu leo ut mauris. Pellentesque auctor mauris sit amet elit luctus fringilla. Cras sed wisi. Morbi luctus enim vitae tellus. Vivamus venenatis sodales libero.

In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse potenti. Nulla pretium sem sit amet nisl. Nulla facilisi. Sed aliquam, turpis sed hendrerit gravida, nunc metus aliquam urna, eget pharetra nibh urna nec lectus. Duis in nisl a nisl commodo facilisis. Nunc placerat risus sed leo. Duis pellentesque porta libero. Praesent et enim. Aenean ullamcorper, ante sit amet fermentum mollis, ligula metus laoreet magna, accumsan accumsan nibh wisi at wisi. Nam tincidunt tempor neque. Maecenas dolor. Donec interdum nisl. Aliquam quam libero, interdum quis, volutpat sed, semper ut, eros. Pellentesque sodales auctor quam. Nullam suscipit massa nec elit. Nullam vulputate.

Aliquam a nulla. Suspendisse suscipit. Etiam lectus ante, interdum sit amet, euismod venenatis, condimentum eu, urna. Etiam at turpis. Cras quis ligula. Cras varius, sapien non pellentesque bibendum, mauris wisi sodales sem, ac commodo mauris neque non felis. Sed sollicitudin tincidunt arcu. Nullam vel lectus sit amet magna tincidunt tempor. Phasellus a ante. Donec et diam.

Proin sit amet augue. Praesent lacus. Donec a leo. Ut turpis ante, condimentum sed, sagittis a, blandit sit amet, enim. Integer sed elit. In ultricies blandit libero. Proin molestie erat dignissim nulla convallis ultrices. Aliquam in magna. Etiam sollicitudin, eros a sagittis pellentesque, lacus odio volutpat elit, vel tincidunt felis dui vitae lorem. Etiam leo. Nulla et justo.

Integer interdum varius diam. Nam aliquam velit a pede. Vivamus dictum nulla et wisi. Vestibulum a massa. Donec vulputate nibh vitae risus dictum varius. Nunc suscipit, nunc nec facilisis convallis, lacus ligula bibendum nulla, ac sollicitudin sapien nisl fermentum velit. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Nullam commodo dui ut augue molestie scelerisque. Sed aliquet rhoncus tortor. Fusce laoreet, turpis a facilisis tristique, leo mauris accumsan tellus, vitae ornare lacus pede sit amet purus. Sed dignissim velit vitae ligula. Sed sit amet diam sit amet arcu luctus ullamcorper.

Duis quis velit id elit facilisis luctus. Donec nec elit. Quisque ullamcorper arcu ac felis. Phasellus leo. Pellentesque consequat consequat purus. Ut vel justo at pede facilisis tempor. Integer tempus blandit dolor. Donec eget neque sed elit ultricies molestie. Cras cursus viverra tortor. Cras commodo condimentum diam. Pellentesque interdum malesuada wisi. Suspendisse eu quam. Donec consectetuer. Suspendisse wisi purus, vestibulum at, vehicula vel, congue a, eros. Nulla vulputate dolor at purus.

Suspendisse ac diam sed dui adipiscing pretium. Donec ullamcorper, sapien nec tempor venenatis, enim felis euismod pede, ut auctor lacus lectus sit amet diam. Vestibulum rutrum sem ut ante. Nulla eros. Quisque vitae nisl eget tellus feugiat volutpat. Nam id neque eu quam sodales vehicula. Nam dapibus, nulla eu iaculis placerat, pede est volutpat purus, id iaculis elit elit vel mauris. Donec dui. In hac habitasse platea dictumst. Nunc non quam. Proin euismod egestas eros. Mauris nisl. Sed neque. Phasellus bibendum. Proin ut purus in eros faucibus auctor.

Fusce mollis dui eu leo. Sed sapien augue, porta at, posuere ut, ultrices molestie, est. Vivamus quis pede nec erat placerat tincidunt. Aenean odio dui, facilisis non, vehicula et, bibendum a, libero. Etiam leo turpis, venenatis eleifend, nonummy sit amet, aliquam non, mi. Maecenas eget mi. Sed nec diam. Integer orci tellus, pellentesque nec, bibendum quis, sodales ut, nibh. Duis laoreet aliquet orci. Curabitur sit amet sem sit amet nibh fermentum faucibus. Donec adipiscing, ipsum id fringilla convallis, elit massa cursus augue, at lobortis massa augue nec ligula. Proin ac lacus.

Nunc id nulla nec mauris iaculis rutrum. Nunc nisl. Integer mi. Praesent lorem neque, egestas at, molestie in, faucibus et, eros. Sed rutrum, ante vitae aliquet tincidunt, diam elit auctor risus, eu elementum purus turpis eu elit. Proin ac orci. Integer varius, urna non sollicitudin consequat, massa libero pharetra erat, et venenatis dui orci eget purus. Aliquam iaculis est eget ipsum. Ut volutpat velit. Phasellus fringilla. Aliquam mollis tellus vel odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Vestibulum gravida sapien sed diam dictum pharetra. Nulla ac odio. Duis vitae metus ut purus feugiat interdum. Duis eros enim, tincidunt ac, venenatis et, dignissim id, lacus. Curabitur sagittis dolor nec augue. Sed ultricies mauris. Donec semper, enim eu vestibulum placerat, justo risus eleifend quam, ac semper velit pede convallis arcu.

Pellentesque tempus. Fusce tempor euismod nulla. Integer metus quam, semper sit amet, pellentesque sed, ornare sit amet, pede. Sed viverra. Aliquam erat volutpat. Donec tristique. In ac pede ut tortor mattis blandit. Phasellus a nunc. Integer metus. Sed malesuada gravida arcu. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit.

Phasellus suscipit placerat neque. Duis rutrum. Quisque enim. Proin et erat at augue aliquam aliquam. Mauris porttitor imperdiet lectus. Proin egestas faucibus risus. Praesent pharetra consequat odio. Fusce sed felis et nulla tempor elementum. Nulla eu turpis. Proin posuere. Nullam nonummy nulla sed nulla volutpat consectetuer. Vivamus vehicula accumsan eros. Fusce ullamcorper. Phasellus vehicula consequat mauris. Sed vitae purus. Sed accumsan, felis suscipit auctor fermentum, odio turpis vestibulum risus, vitae mattis metus neque non pede.

Suspendisse mollis erat et risus. Vestibulum et odio eu nisl malesuada dapibus. Morbi ac tortor et magna tincidunt ullamcorper. Ut pellentesque fermentum mi. Etiam sed neque sit amet leo consectetuer sagittis. Nulla facilisi. Sed lobortis erat vitae nulla. Duis bibendum ipsum et mi scelerisque dapibus. Fusce nonummy vestibulum orci. Donec a nisl. Integer ac nibh. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Aenean nec nunc sed dui lobortis vestibulum. Praesent metus ligula, auctor vitae, lacinia sed, hendrerit a, felis. Etiam sapien. Proin et sem vitae dolor sodales venenatis. Integer luctus aliquam risus.

Maecenas mi massa, fermentum eu, venenatis et, cursus id, ipsum. Morbi vehicula justo faucibus mauris. Donec non neque. Fusce id mi ut neque tincidunt posuere. Suspendisse quis enim. Cras porttitor. Sed quis velit. Aliquam vel augue at wisi blandit suscipit. Duis ut justo. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Etiam bibendum wisi quis augue. Nulla lorem odio, sollicitudin vitae, vehicula nec, dapibus ultricies, purus. In vitae tellus at odio cursus congue. Quisque tincidunt tempus metus. Aenean et nulla nec dolor dapibus ultricies. Phasellus commodo vulputate arcu. Sed enim. Phasellus quis leo. Aliquam iaculis, turpis nec aliquet rutrum, pede risus porta diam, id ullamcorper erat est sed eros. Fusce ornare.

Suspendisse porta, dolor sed fringilla ultrices, augue mauris gravida dolor, vel sollicitudin magna dui sit amet nunc. Mauris mollis condimentum risus. Integer ipsum. Quisque malesuada, erat ac dictum pulvinar, magna nisl fermentum ligula, quis euismod mauris felis non diam. Nullam sapien turpis, rutrum vel, condimentum ac, bibendum vulputate, nulla. Vestibulum tortor ipsum, fermentum egestas, placerat ut, vulputate et, wisi. Aliquam erat volutpat. Donec consequat, ligula sit amet tincidunt aliquam, nunc lorem sagittis nunc, a ullamcorper erat ante ac felis. Donec eleifend. Nullam quam leo, lobortis non, condimentum at, tempus consectetuer, orci. Quisque ut lorem. Donec nisl. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Donec porta, libero eget feugiat posuere, felis arcu pulvinar odio, vel dapibus enim dui nec turpis.

Duis leo. Cras nec odio. Nullam pretium lacinia est. Fusce aliquet, metus et vestibulum lobortis, ante erat vestibulum eros, eu sodales eros turpis id massa. Quisque est. Vivamus eu lacus. Nulla nisl. Nam eros. Aliquam sit amet neque vel magna dictum ultricies. Praesent magna mauris, sollicitudin ac, commodo eu, bibendum sit amet, lectus. Suspendisse potenti. Fusce congue leo quis libero nonummy adipiscing. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Nunc a orci. Ut at erat sit amet nunc scelerisque malesuada. Phasellus odio nisl, porta eget, laoreet nec, vehicula non, risus. Etiam dolor mauris, consectetuer eget, tincidunt sed, egestas quis, neque. Ut egestas ante ac libero. Proin mattis volutpat metus.

Sed tempor metus eget wisi. Duis cursus. Nam nunc. Nulla placerat wisi sed est. Aenean risus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Proin erat dolor, ultricies a, rutrum sed, posuere eget, metus. Donec sagittis nunc ac tortor. Aliquam erat volutpat. Curabitur consectetuer, augue nec viverra eleifend, dolor dolor volutpat orci, dapibus pellentesque eros pede a arcu. Nullam augue. Etiam eget nulla vel mi porta hendrerit. Phasellus cursus scelerisque tortor. Maecenas ut leo.

Donec libero. Quisque vitae est quis dui bibendum suscipit. Fusce leo felis, sagittis non, vehicula ac, ultricies vitae, diam. Aenean congue libero et metus. Nulla convallis libero a lacus. Donec hendrerit lorem sit amet leo. Mauris libero. Pellentesque pulvinar molestie dolor. Proin nibh mauris, ornare at, pretium sit amet, porttitor vel, mi. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas.

Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Aliquam interdum porttitor tortor. Donec ultricies justo eget sapien. Proin ac est. Aliquam erat volutpat. In tempus scelerisque ligula. Morbi scelerisque urna. Duis ac nisl. Donec sed leo. Fusce posuere orci mollis nunc. Sed arcu enim, pharetra nec, aliquam eu, consectetuer sit amet, eros. Sed id enim. Etiam mattis est at elit. Pellentesque est risus, pellentesque nec, dignissim vitae, egestas vitae, sapien. Maecenas et eros non libero iaculis facilisis. Mauris porttitor tempor justo. Sed sollicitudin neque nec libero.

Mauris ac ipsum. Duis ultrices erat ac felis. Donec dignissim luctus orci. Fusce pede odio, feugiat sit amet, aliquam eu, viverra eleifend, ipsum. Fusce arcu massa, posuere id, nonummy eu, pulvinar ut, wisi. Sed dui. Vestibulum nunc nisl, rutrum quis, pharetra eget, congue sed, dui. Donec justo neque, euismod eget, nonummy adipiscing, iaculis eu, leo. Duis lectus. Morbi pellentesque nonummy dui.

Aenean sem dolor, fermentum nec, gravida hendrerit, mattis eget, felis. Nullam non diam vitae mi lacinia consectetuer. Fusce non massa eget quam luctus posuere. Aenean vulputate velit. Quisque et dolor. Donec ipsum tortor, rutrum quis, mollis eu, mollis a, pede. Donec nulla. Duis molestie. Duis lobortis commodo purus. Pellentesque vel quam. Ut congue congue risus. Sed ligula. Aenean dictum pede vitae felis. Donec sit amet nibh. Maecenas eu orci. Quisque gravida quam sed massa.

Nunc euismod, mauris luctus adipiscing pellentesque, augue ligula pellentesque lectus, vitae posuere purus velit a pede. Phasellus leo mi, egestas imperdiet, blandit non, sollicitudin pharetra, enim. Nullam faucibus tellus non enim. Sed egestas nunc eu eros. Nunc euismod venenatis urna. Phasellus ullamcorper. Vivamus varius est ac lorem. In id pede eleifend nibh consectetuer faucibus. Phasellus accumsan euismod elit. Etiam vitae elit. Integer imperdiet nibh. Morbi imperdiet orci euismod mi.

Donec tincidunt tempor metus. Aenean egestas cursus nulla. Fusce ac metus at enim viverra lacinia. Vestibulum in magna non eros varius suscipit. Nullam cursus nibh. Mauris neque. In nunc quam, convallis vitae, posuere in, consequat sed, wisi. Phasellus bibendum consectetuer massa. Curabitur quis urna. Pellentesque a justo.

In sit amet dui eget lacus rutrum accumsan. Phasellus ac metus sed massa varius auctor. Curabitur velit elit, pellentesque eget, molestie nec, congue at, pede. Maecenas quis tellus non lorem vulputate ornare. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Etiam magna arcu, vulputate egestas, aliquet ut, facilisis ut, nisl. Donec vulputate wisi ac dolor. Aliquam feugiat nibh id tellus. Morbi eget massa sit amet purus accumsan dictum. Aenean a lorem. Fusce semper porta sapien.

Curabitur sit amet libero eget enim eleifend lacinia. Vivamus sagittis volutpat dui. Suspendisse potenti. Morbi a nibh eu augue fermentum posuere. Curabitur elit augue, porta quis, congue aliquam, rutrum non, massa. Integer mattis mollis ipsum. Sed tellus enim, mattis id, feugiat sed, eleifend in, elit. Phasellus non purus sed elit viverra rhoncus. Vestibulum id tellus vel sem imperdiet congue. Aenean in arcu. Nullam urna justo, imperdiet eget, volutpat vitae, semper eu, quam. Sed turpis dui, porttitor ut, egestas ac, condimentum non, wisi. Fusce iaculis turpis eget dui. Quisque pulvinar est pellentesque leo. Ut nulla elit, mattis vel, scelerisque vel, blandit ut, justo. Nulla feugiat risus in erat.

Curabitur hendrerit. Morbi fringilla enim quis nunc. Phasellus at dui. Donec commodo augue at nunc. Nunc in sapien et magna mollis sagittis. Morbi eu elit. Phasellus lacus. Donec a quam. Etiam pulvinar sapien. Sed nibh magna, viverra vitae, auctor eget, eleifend nec, lorem. Curabitur fringilla dui a odio. Nunc semper condimentum arcu. Curabitur vitae lectus sit amet turpis pretium condimentum. Nullam imperdiet mattis neque. Proin eget magna porta erat rhoncus consectetuer. Aenean pulvinar erat vitae mi.

In eget turpis non tortor iaculis tincidunt. Ut egestas feugiat magna. Duis enim nibh, gravida vel, nonummy non, sollicitudin ac, enim. Sed in tortor sed tellus eleifend cursus. Morbi a dolor at nibh molestie faucibus. Duis sed wisi. Duis fringilla, dui et malesuada dignissim, elit eros dictum lacus, rhoncus imperdiet pede elit nec tellus. Aenean at ligula eget nulla imperdiet faucibus. Quisque vestibulum lorem ac leo. Sed laoreet neque ut magna.

Aenean eget justo id lorem congue tristique. Maecenas sit amet nunc. Aenean bibendum risus. Nam convallis, mi sed ultrices sodales, metus nibh placerat dui, eu hendrerit erat enim vel libero. Duis placerat sem vitae wisi imperdiet condimentum. Aliquam pellentesque dui ac diam eleifend venenatis. Nulla facilisis posuere sapien. Cras euismod. Praesent ut enim. Aliquam ut ipsum quis urna interdum vehicula. Fusce eget sem. Nullam accumsan ullamcorper turpis.

Integer posuere, metus ac rhoncus auctor, mi tellus scelerisque nunc, venenatis elementum tortor lorem eu erat. Sed consectetuer risus vitae orci. Nullam tortor mauris, interdum at, imperdiet in, convallis eget, massa. Aliquam suscipit, magna nec blandit volutpat, lectus neque suscipit nunc, sit amet cursus nisl erat eget risus. Vestibulum leo lectus, accumsan ut, pharetra vel, elementum sed, quam. Maecenas condimentum orci at enim. Maecenas ut nunc. Vivamus pede. Integer vel purus vel mi mollis vestibulum. Sed laoreet ultricies nibh. Suspendisse non nisl quis ligula fermentum facilisis. Vestibulum sem nibh, porttitor et, fermentum a, ultricies id, augue.

In accumsan convallis metus. Aenean est. Donec pharetra porta odio. Duis nunc nisl, imperdiet ac, tincidunt vitae, varius sit amet, felis. Curabitur wisi. Ut iaculis, nunc in lacinia egestas, elit enim tincidunt turpis, at luctus ipsum augue condimentum metus. Aenean lorem wisi, cursus sit amet, mollis nec, porta ac, augue. Vivamus massa. Praesent rhoncus imperdiet orci. Aenean pharetra dolor ut sapien. Maecenas egestas augue semper dolor.

Vestibulum at lectus. Vestibulum dapibus placerat magna. Suspendisse dolor urna, condimentum sit amet, euismod a, adipiscing a, enim. Aliquam erat volutpat. Donec imperdiet dolor non mi. Phasellus magna metus, dictum sit amet, laoreet non, dictum vel, dui. Suspendisse potenti. Nunc turpis risus, porta vel, pharetra id, eleifend vitae, justo. Duis pulvinar dolor sit amet urna. Integer eu eros. Nulla facilisi. Duis dui. Nullam vitae quam. Morbi a nunc in elit sodales euismod. Nunc sed orci. Etiam malesuada metus vitae felis. Suspendisse imperdiet velit in tellus.

Nullam elit orci, condimentum vitae, accumsan quis, gravida non, velit. Morbi pellentesque accumsan elit. Aenean est purus, eleifend ac, dictum at, dignissim sed, dolor. Vestibulum volutpat sapien quis augue. Maecenas vulputate accumsan sapien. Nam mattis, lacus non iaculis aliquet, mi elit varius lectus, eu malesuada dolor nunc at wisi. Aliquam ligula. Mauris nisl elit, molestie vitae, gravida sit amet, facilisis convallis, enim. Sed urna. Praesent et augue. Fusce pellentesque. Maecenas varius orci eget nisl. Donec tempor rhoncus turpis. Integer nibh. Cras metus erat, tincidunt et, scelerisque quis, bibendum sed, dui. Suspendisse potenti.

Integer ac diam. Nullam porttitor dolor eget metus. Nulla sed metus quis tortor lacinia tempor. Mauris mauris dui, faucibus vitae, aliquet sit amet, placerat a, ante. Nunc placerat tincidunt neque. Mauris egestas dolor ut ipsum cursus malesuada. Curabitur odio. Nunc lobortis. Sed mattis tempor felis. Mauris dolor quam, facilisis at, bibendum sit amet, rutrum ornare, pede. Suspendisse accumsan sagittis velit. Pellentesque varius laoreet lorem. Vivamus egestas sapien id diam.

Integer viverra, felis ac tempus cursus, neque risus interdum turpis, eget venenatis tellus velit in neque. Nulla feugiat luctus tellus. Nam pulvinar lacus id leo. Vestibulum at ligula. Duis laoreet tincidunt enim. Suspendisse at nisl molestie est laoreet laoreet. Suspendisse euismod metus vel nisl. Aenean ullamcorper imperdiet massa. Aliquam nibh. Donec quis erat. Nunc sodales auctor ante.

Nam quis ante. Nullam interdum quam in eros. Sed eleifend libero eu tellus consequat fermentum. Nullam pellentesque risus ut augue. Vestibulum eu tellus. Integer eleifend suscipit urna. Fusce porttitor leo et odio. Vivamus vehicula justo a nisl. In rutrum, purus ut dictum auctor, dolor velit accumsan dolor, eu convallis augue dui ac lectus. Nullam eleifend pellentesque ligula. Nam quis magna. Donec elementum dapibus erat. Pellentesque vel ipsum nec orci fermentum accumsan. Nunc porta magna eu neque. Nam id erat eu mi aliquet cursus. Morbi ut felis. Vestibulum in ipsum.

Donec vel augue. Morbi a turpis sed libero consequat porta. Quisque lacinia consequat odio. Sed vehicula sollicitudin purus. Vestibulum eget est. In hac habitasse platea dictumst. Sed blandit, tortor a auctor imperdiet, wisi nibh ornare leo, ac dictum nibh enim eu orci. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Aliquam tincidunt ullamcorper justo. Etiam accumsan lacus nec ante. Ut dictum luctus mauris. Ut metus. Maecenas gravida. Proin iaculis. Integer convallis, justo iaculis ullamcorper sollicitudin, lectus neque tincidunt mi, at condimentum sem quam vel diam. Aenean sit amet purus.

Sed justo. Maecenas lacinia, turpis sed commodo congue, odio urna elementum nunc, vitae molestie velit nunc eu sem. Maecenas enim. Proin quis neque nec tortor sollicitudin volutpat. Sed at ante. Sed vitae mauris non ante egestas hendrerit. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. In venenatis facilisis magna. Phasellus purus. Cras quis mauris. Aliquam eget magna. Donec rutrum sagittis mi. Morbi elementum, est sit amet sollicitudin feugiat, orci magna semper risus, eu congue nulla metus vel elit. Nunc tempor ornare mi. Integer justo odio, suscipit tincidunt, fermentum eu, tincidunt et, libero. Vestibulum vestibulum, urna et suscipit imperdiet, nulla ante fermentum erat, at laoreet lorem lectus sed metus. Fusce ante sem, posuere in, vehicula a, posuere sed, ante. Phasellus magna. Maecenas sit amet diam. Nunc at nibh sit amet augue tristique gravida.

Aenean adipiscing auctor est. Morbi quam arcu, malesuada sed, volutpat et, elementum sit amet, libero. Duis accumsan. Curabitur urna. In sed ipsum. Donec lobortis nibh. Duis mattis. Sed cursus lectus quis odio. Phasellus arcu. Praesent imperdiet dui in sapien. Vestibulum tellus pede, auctor a, pellentesque sit amet, vulputate sed, purus. Nunc pulvinar, dui at eleifend adipiscing, tellus nulla placerat massa, sed condimentum nulla tellus sed ligula. Nulla vitae odio sit amet leo imperdiet blandit. In vel massa. Maecenas varius dui at turpis. Sed odio.

Quisque aliquam ipsum sed turpis. Pellentesque laoreet velit nec justo. Nam sed augue. Maecenas rutrum quam eu dolor. Fusce consectetuer. Proin tellus est, luctus vitae, molestie a, mattis et, mauris. Donec tempor. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Duis ante felis, dignissim id, blandit in, suscipit vel, dolor. Pellentesque tincidunt cursus felis. Proin rhoncus semper nulla. Ut et est. Vivamus ipsum erat, gravida in, venenatis ac, fringilla in, quam. Nunc ac augue. Fusce pede erat, ultrices non, consequat et, semper sit amet, urna.

Fusce adipiscing justo nec ante. Nullam in enim. Pellentesque felis orci, sagittis ac, malesuada et, facilisis in, ligula. Nunc non magna sit amet mi aliquam dictum. In mi. Curabitur sollicitudin justo sed quam. Aenean imperdiet. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Donec lacinia nonummy lectus. Proin vel urna. Fusce sit amet orci ac magna iaculis pharetra. Duis sagittis massa in tellus. Aenean vel velit vel felis consectetuer pharetra.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetuer at, consectetuer sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.

Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetuer a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetuer. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetuer odio sem sed wisi.

Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetuer eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.

Etiam euismod. Fusce facilisis lacinia dui. Suspendisse potenti. In mi erat, cursus id, nonummy sed, ullamcorper eget, sapien. Praesent pretium, magna in eleifend egestas, pede pede pretium lorem, quis consectetuer tortor sapien facilisis magna. Mauris quis magna varius nulla scelerisque imperdiet. Aliquam non quam. Aliquam porttitor quam a lacus. Praesent vel arcu ut tortor cursus volutpat. In vitae pede quis diam bibendum placerat. Fusce elementum convallis neque. Sed dolor orci, scelerisque ac, dapibus nec, ultricies ut, mi. Duis nec dui quis leo sagittis commodo.

Aliquam lectus. Vivamus leo. Quisque ornare tellus ullamcorper nulla. Mauris porttitor pharetra tortor. Sed fringilla justo sed mauris. Mauris tellus. Sed non leo. Nullam elementum, magna in cursus sodales, augue est scelerisque sapien, venenatis congue nulla arcu et pede. Ut suscipit enim vel sapien. Donec congue. Maecenas urna mi, suscipit in, placerat ut, vestibulum ut, massa. Fusce ultrices nulla et nisl.

Etiam ac leo a risus tristique nonummy. Donec dignissim tincidunt nulla. Vestibulum rhoncus molestie odio. Sed lobortis, justo et pretium lobortis, mauris turpis condimentum augue, nec ultricies nibh arcu pretium enim. Nunc purus neque, placerat id, imperdiet sed, pellentesque nec, nisl. Vestibulum imperdiet neque non sem accumsan laoreet. In hac habitasse platea dictumst. Etiam condimentum facilisis libero. Suspendisse in elit quis nisl aliquam dapibus. Pellentesque auctor sapien. Sed egestas sapien nec lectus. Pellentesque vel dui vel neque bibendum viverra. Aliquam porttitor nisl nec pede. Proin mattis libero vel turpis. Donec rutrum mauris et libero. Proin euismod porta felis. Nam lobortis, metus quis elementum commodo, nunc lectus elementum mauris, eget vulputate ligula tellus eu neque.

Vivamus eu dolor.

Nulla in ipsum. Praesent eros nulla, congue vitae, euismod ut, commodo a, wisi. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Aenean nonummy magna non leo. Sed felis erat, ullamcorper in, dictum non, ultricies ut, lectus. Proin vel arcu a odio lobortis euismod. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Proin ut est. Aliquam odio. Pellentesque massa turpis, cursus eu, euismod nec, tempor congue, nulla. Duis viverra gravida mauris. Cras tincidunt. Curabitur eros ligula, varius ut, pulvinar in, cursus faucibus, augue.

Nulla mattis luctus nulla. Duis commodo velit at leo. Aliquam vulputate magna et leo. Nam vestibulum ullamcorper leo. Vestibulum condimentum rutrum mauris. Donec id mauris. Morbi molestie justo et pede. Vivamus eget turpis sed nisl cursus tempor. Curabitur mollis sapien condimentum nunc. In wisi nisl, malesuada at, dignissim sit amet, lobortis in, odio. Aenean consequat arcu a ante. Pellentesque porta elit sit amet orci. Etiam at turpis nec elit ultricies imperdiet. Nulla facilisi. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse viverra aliquam risus. Nullam pede justo, molestie nonummy, scelerisque eu, facilisis vel, arcu.

Curabitur tellus magna, porttitor a, commodo a, commodo in, tortor. Donec interdum. Praesent scelerisque. Maecenas posuere sodales odio. Vivamus metus lacus, varius quis, imperdiet quis, rhoncus a, turpis. Etiam ligula arcu, elementum a, venenatis quis, sollicitudin sed, metus. Donec nunc pede, tincidunt in, venenatis vitae, faucibus vel, nibh. Pellentesque wisi. Nullam malesuada. Morbi ut tellus ut pede tincidunt porta. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam congue neque id dolor.

Donec et nisl at wisi luctus bibendum. Nam interdum tellus ac libero. Sed sem justo, laoreet vitae, fringilla at, adipiscing ut, nibh. Maecenas non sem quis tortor eleifend fermentum. Etiam id tortor ac mauris porta vulputate. Integer porta neque vitae massa. Maecenas tempus libero a libero posuere dictum. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Aenean quis mauris sed elit commodo placerat. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Vivamus rhoncus tincidunt libero. Etiam elementum pretium justo. Vivamus est. Morbi a tellus eget pede tristique commodo. Nulla nisl. Vestibulum sed nisl eu sapien cursus rutrum.

Nulla non mauris vitae wisi posuere convallis. Sed eu nulla nec eros scelerisque pharetra. Nullam varius. Etiam dignissim elementum metus. Vestibulum faucibus, metus sit amet mattis rhoncus, sapien dui laoreet odio, nec ultricies nibh augue a enim. Fusce in ligula. Quisque at magna et nulla commodo consequat. Proin accumsan imperdiet sem. Nunc porta. Donec feugiat mi at justo. Phasellus facilisis ipsum quis ante. In ac elit eget ipsum pharetra faucibus. Maecenas viverra nulla in massa.

Nulla ac nisl. Nullam urna nulla, ullamcorper in, interdum sit amet, gravida ut, risus. Aenean ac enim. In luctus. Phasellus eu quam vitae turpis viverra pellentesque. Duis feugiat felis ut enim. Phasellus pharetra, sem id porttitor sodales, magna nunc aliquet nibh, nec blandit nisl mauris at pede. Suspendisse risus risus, lobortis eget, semper at, imperdiet sit amet, quam. Quisque scelerisque dapibus nibh. Nam enim. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Nunc ut metus. Ut metus justo, auctor at, ultrices eu, sagittis ut, purus. Aliquam aliquam.

Etiam pede massa, dapibus vitae, rhoncus in, placerat posuere, odio. Vestibulum luctus commodo lacus. Morbi lacus dui, tempor sed, euismod eget, condimentum at, tortor. Phasellus aliquet odio ac lacus tempor faucibus. Praesent sed sem. Praesent iaculis. Cras rhoncus tellus sed justo ullamcorper sagittis. Donec quis orci. Sed ut tortor quis tellus euismod tincidunt. Suspendisse congue nisl eu elit. Aliquam tortor diam, tempus id, tristique eget, sodales vel, nulla. Praesent tellus mi, condimentum sed, viverra at, consectetuer quis, lectus. In auctor vehicula orci. Sed pede sapien, euismod in, suscipit in, pharetra placerat, metus. Vivamus commodo dui non odio. Donec et felis.

Etiam suscipit aliquam arcu. Aliquam sit amet est ac purus bibendum congue. Sed in eros. Morbi non orci. Pellentesque mattis lacinia elit. Fusce molestie velit in ligula. Nullam et orci vitae nibh vulputate auctor. Aliquam eget purus. Nulla auctor wisi sed ipsum. Morbi porttitor tellus ac enim. Fusce ornare. Proin ipsum enim, tincidunt in, ornare venenatis, molestie a, augue. Donec vel pede in lacus sagittis porta. Sed hendrerit ipsum quis nisl. Suspendisse quis massa ac nibh pretium cursus. Sed sodales. Nam eu neque quis pede dignissim ornare. Maecenas eu purus ac urna tincidunt congue.

Donec et nisl id sapien blandit mattis. Aenean dictum odio sit amet risus. Morbi purus. Nulla a est sit amet purus venenatis iaculis. Vivamus viverra purus vel magna. Donec in justo sed odio malesuada dapibus. Nunc ultrices aliquam nunc. Vivamus facilisis pellentesque velit. Nulla nunc velit, vulputate dapibus, vulputate id, mattis ac, justo. Nam mattis elit dapibus purus. Quisque enim risus, congue non, elementum ut, mattis quis, sem. Quisque elit.

Maecenas non massa. Vestibulum pharetra nulla at lorem. Duis quis quam id lacus dapibus interdum. Nulla lorem. Donec ut ante quis dolor bibendum condimentum. Etiam egestas tortor vitae lacus. Praesent cursus. Mauris bibendum pede at elit. Morbi et felis a lectus interdum facilisis. Sed suscipit gravida turpis. Nulla at lectus. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Praesent nonummy luctus nibh. Proin turpis nunc, congue eu, egestas ut, fringilla at, tellus. In hac habitasse platea dictumst.

Vivamus eu tellus sed tellus consequat suscipit. Nam orci orci, malesuada id, gravida nec, ultricies vitae, erat. Donec risus turpis, luctus sit amet, interdum quis, porta sed, ipsum. Suspendisse condimentum, tortor at egestas posuere, neque metus tempor orci, et tincidunt urna nunc a purus. Sed facilisis blandit tellus. Nunc risus sem, suscipit nec, eleifend quis, cursus quis, libero. Curabitur et dolor. Sed vitae sem. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Maecenas ante. Duis ullamcorper enim. Donec tristique enim eu leo. Nullam molestie elit eu dolor. Nullam bibendum, turpis vitae tristique gravida, quam sapien tempor lectus, quis pretium tellus purus ac quam. Nulla facilisi.

Duis aliquet dui in est. Donec eget est. Nunc lectus odio, varius at, fermentum in, accumsan non, enim. Aliquam erat volutpat. Proin sit amet nulla ut eros consectetuer cursus. Phasellus dapibus aliquam justo. Nunc laoreet. Donec consequat placerat magna. Duis pretium tincidunt justo. Sed sollicitudin vestibulum quam. Nam quis ligula. Vivamus at metus. Etiam imperdiet imperdiet pede. Aenean turpis. Fusce augue velit, scelerisque sollicitudin, dictum vitae, tempor et, pede. Donec wisi sapien, feugiat in, fermentum ut, sollicitudin adipiscing, metus.

Donec vel nibh ut felis consectetuer laoreet. Donec pede. Sed id quam id wisi laoreet suscipit. Nulla lectus dolor, aliquam ac, fringilla eget, mollis ut, orci. In pellentesque justo in ligula. Maecenas turpis. Donec eleifend leo at felis tincidunt consequat. Aenean turpis metus, malesuada sed, condimentum sit amet, auctor a, wisi. Pellentesque sapien elit, bibendum ac, posuere et, congue eu, felis. Vestibulum mattis libero quis metus scelerisque ultrices. Sed purus.

Donec molestie, magna ut luctus ultrices, tellus arcu nonummy velit, sit amet pulvinar elit justo et mauris. In pede. Maecenas euismod elit eu erat. Aliquam augue wisi, facilisis congue, suscipit in, adipiscing et, ante. In justo. Cras lobortis neque ac ipsum. Nunc fermentum massa at ante. Donec orci tortor, egestas sit amet, ultrices eget, venenatis eget, mi. Maecenas vehicula leo semper est. Mauris vel metus. Aliquam erat volutpat. In rhoncus sapien ac tellus. Pellentesque ligula.

Cras dapibus, augue quis scelerisque ultricies, felis dolor placerat sem, id porta velit odio eu elit. Aenean interdum nibh sed wisi. Praesent sollicitudin vulputate dui. Praesent iaculis viverra augue. Quisque in libero. Aenean gravida lorem vitae sem ullamcorper cursus. Nunc adipiscing rutrum ante. Nunc ipsum massa, faucibus sit amet, viverra vel, elementum semper, orci. Cras eros sem, vulputate et, tincidunt id, ultrices eget, magna. Nulla varius ornare odio. Donec accumsan mauris sit amet augue. Sed ligula lacus, laoreet non, aliquam sit amet, iaculis tempor, lorem. Suspendisse eros. Nam porta, leo sed congue tempor, felis est ultrices eros, id mattis velit felis non metus. Curabitur vitae elit non mauris varius pretium. Aenean lacus sem, tincidunt ut, consequat quis, porta vitae, turpis. Nullam laoreet fermentum urna. Proin iaculis lectus.

Sed mattis, erat sit amet gravida malesuada, elit augue egestas diam, tempus scelerisque nunc nisl vitae libero. Sed consequat feugiat massa. Nunc porta, eros in eleifend varius, erat leo rutrum dui, non convallis lectus orci ut nibh. Sed lorem massa, nonummy quis, egestas id, condimentum at, nisl. Maecenas at nibh. Aliquam et augue at nunc pellentesque ullamcorper. Duis nisl nibh, laoreet suscipit, convallis ut, rutrum id, enim. Phasellus odio. Nulla nulla elit, molestie non, scelerisque at, vestibulum eu, nulla. Ut odio nisl, facilisis id, mollis et, scelerisque nec, enim. Aenean sem leo, pellentesque sit amet, scelerisque sit amet, vehicula pellentesque, sapien.

Sed consequat tellus et tortor. Ut tempor laoreet quam. Nullam id wisi a libero tristique semper. Nullam nisl massa, rutrum ut, egestas semper, mollis id, leo. Nulla ac massa eu risus blandit mattis. Mauris ut nunc. In hac habitasse platea dictumst. Aliquam eget tortor. Quisque dapibus pede in erat. Nunc enim. In dui nulla, commodo at, consectetuer nec, malesuada nec, elit. Aliquam ornare tellus eu urna. Sed nec metus. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas.

Phasellus id magna. Duis malesuada interdum arcu. Integer metus. Morbi pulvinar pellentesque mi. Suspendisse sed est eu magna molestie egestas. Quisque mi lorem, pulvinar eget, egestas quis, luctus at, ante. Proin auctor vehicula purus. Fusce ac nisl aliquam ante hendrerit pellentesque. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Morbi wisi. Etiam arcu mauris, facilisis sed, eleifend non, nonummy ut, pede. Cras ut lacus tempor metus mollis placerat. Vivamus eu tortor vel metus interdum malesuada.

Sed eleifend, eros sit amet faucibus elementum, urna sapien consectetuer mauris, quis egestas leo justo non risus. Morbi non felis ac libero vulputate fringilla. Mauris libero eros, lacinia non, sodales quis, dapibus porttitor, pede. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Morbi dapibus mauris condimentum nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Etiam sit amet erat. Nulla varius. Etiam tincidunt dui vitae turpis. Donec leo. Morbi vulputate convallis est. Integer aliquet. Pellentesque aliquet sodales urna.

Nullam eleifend justo in nisl. In hac habitasse platea dictumst. Morbi nonummy. Aliquam ut felis. In velit leo, dictum vitae, posuere id, vulputate nec, ante. Maecenas vitae pede nec dui dignissim suscipit. Morbi magna. Vestibulum id purus eget velit laoreet laoreet. Praesent sed leo vel nibh convallis blandit. Ut rutrum. Donec nibh. Donec interdum. Fusce sed pede sit amet elit rhoncus ultrices. Nullam at enim vitae pede vehicula iaculis.

Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Aenean nonummy turpis id odio. Integer euismod imperdiet turpis. Ut nec leo nec diam imperdiet lacinia. Etiam eget lacus eget mi ultricies posuere. In placerat tristique tortor. Sed porta vestibulum metus. Nulla iaculis sollicitudin pede. Fusce luctus tellus in dolor. Curabitur auctor velit a sem. Morbi sapien. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Donec adipiscing urna vehicula nunc. Sed ornare leo in leo. In rhoncus leo ut dui. Aenean dolor quam, volutpat nec, fringilla id, consectetuer vel, pede.

Nulla malesuada risus ut urna. Aenean pretium velit sit amet metus. Duis iaculis. In hac habitasse platea dictumst. Nullam molestie turpis eget nisl. Duis a massa id pede dapibus ultricies. Sed eu leo. In at mauris sit amet tortor bibendum varius. Phasellus justo risus, posuere in, sagittis ac, varius vel, tortor. Quisque id enim. Phasellus consequat, libero pretium nonummy fringilla, tortor lacus vestibulum nunc, ut rhoncus ligula neque id justo. Nullam accumsan euismod nunc. Proin vitae ipsum ac metus dictum tempus. Nam ut wisi. Quisque tortor felis, interdum ac, sodales a, semper a, sem. Curabitur in velit sit amet dui tristique sodales. Vivamus mauris pede, lacinia eget, pellentesque quis, scelerisque eu, est. Aliquam risus. Quisque bibendum pede eu dolor.

Donec tempus neque vitae est. Aenean egestas odio sed risus ullamcorper ullamcorper. Sed in nulla a tortor tincidunt egestas. Nam sapien tortor, elementum sit amet, aliquam in, porttitor faucibus, enim. Nullam congue suscipit nibh. Quisque convallis. Praesent arcu nibh, vehicula eget, accumsan eu, tincidunt a, nibh. Suspendisse vulputate, tortor quis adipiscing viverra, lacus nibh dignissim tellus, eu suscipit risus ante fringilla diam. Quisque a libero vel pede imperdiet aliquet. Pellentesque nunc nibh, eleifend a, consequat consequat, hendrerit nec, diam. Sed urna. Maecenas laoreet eleifend neque. Vivamus purus odio, eleifend non, iaculis a, ultrices sit amet, urna. Mauris faucibus odio vitae risus. In nisl. Praesent purus. Integer iaculis, sem eu egestas lacinia, lacus pede scelerisque augue, in ullamcorper dolor eros ac lacus. Nunc in libero.

Fusce suscipit cursus sem. Vivamus risus mi, egestas ac, imperdiet varius, faucibus quis, leo. Aenean tincidunt. Donec suscipit. Cras id justo quis nibh scelerisque dignissim. Aliquam sagittis elementum dolor. Aenean consectetuer justo in pede. Curabitur ullamcorper ligula nec orci. Aliquam purus turpis, aliquam id, ornare vitae, porttitor non, wisi. Maecenas luctus porta lorem. Donec vitae ligula eu ante pretium varius. Proin tortor metus, convallis et, hendrerit non, scelerisque in, urna. Cras quis libero eu ligula bibendum tempor. Vivamus tellus quam, malesuada eu, tempus sed, tempor sed, velit. Donec lacinia auctor libero.

Praesent sed neque id pede mollis rutrum. Vestibulum iaculis risus. Pellentesque lacus. Ut quis nunc sed odio malesuada egestas. Duis a magna sit amet ligula tristique pretium. Ut pharetra. Vestibulum imperdiet magna nec wisi. Mauris convallis. Sed accumsan sollicitudin massa. Sed id enim. Nunc pede enim, lacinia ut, pulvinar quis, suscipit semper, elit. Cras accumsan erat vitae enim. Cras sollicitudin. Vestibulum rutrum blandit massa.

Sed gravida lectus ut purus. Morbi laoreet magna. Pellentesque eu wisi.

Proin turpis. Integer sollicitudin augue nec dui. Fusce lectus. Vivamus faucibus nulla nec lacus. Integer diam. Pellentesque sodales, enim feugiat cursus volutpat, sem mauris dignissim mauris, quis consequat sem est fermentum ligula. Nullam justo lectus, condimentum sit amet, posuere a, fringilla mollis, felis. Morbi nulla nibh, pellentesque at, nonummy eu, sollicitudin nec, ipsum. Cras neque. Nunc augue. Nullam vitae quam id quam pulvinar blandit. Nunc sit amet orci. Aliquam erat elit, pharetra nec, aliquet a, gravida in, mi. Quisque urna enim, viverra quis, suscipit quis, tincidunt ut, sapien. Cras placerat consequat sem. Curabitur ac diam. Curabitur diam tortor, mollis et, viverra ac, tempus vel, metus.

Curabitur ac lorem. Vivamus non justo in dui mattis posuere. Etiam accumsan ligula id pede. Maecenas tincidunt diam nec velit. Praesent convallis sapien ac est. Aliquam ullamcorper euismod nulla. Integer mollis enim vel tortor. Nulla sodales placerat nunc. Sed tempus rutrum wisi. Duis accumsan gravida purus. Nunc nunc. Etiam facilisis dui eu sem. Vestibulum semper. Praesent eu eros. Vestibulum tellus nisl, dapibus id, vestibulum sit amet, placerat ac, mauris. Maecenas et elit ut erat placerat dictum. Nam feugiat, turpis et sodales volutpat, wisi quam rhoncus neque, vitae aliquam ipsum sapien vel enim. Maecenas suscipit cursus mi.

Quisque consectetuer. In suscipit mauris a dolor pellentesque consectetuer. Mauris convallis neque non erat. In lacinia. Pellentesque leo eros, sagittis quis, fermentum quis, tincidunt ut, sapien. Maecenas sem. Curabitur eros odio, interdum eu, feugiat eu, porta ac, nisl. Curabitur nunc. Etiam fermentum convallis velit. Pellentesque laoreet lacus. Quisque sed elit. Nam quis tellus. Aliquam tellus arcu, adipiscing non, tincidunt eleifend, adipiscing quis, augue. Vivamus elementum placerat enim. Suspendisse ut tortor. Integer faucibus adipiscing felis. Aenean consectetuer mattis lectus. Morbi malesuada faucibus dolor. Nam lacus. Etiam arcu libero, malesuada vitae, aliquam vitae, blandit tristique, nisl.

Maecenas accumsan dapibus sapien. Duis pretium iaculis arcu. Curabitur ut lacus. Aliquam vulputate. Suspendisse ut purus sed sem tempor rhoncus. Ut quam dui, fringilla at, dictum eget, ultricies quis, quam. Etiam sem est, pharetra non, vulputate in, pretium at, ipsum. Nunc semper sagittis orci. Sed scelerisque suscipit diam. Ut volutpat, dolor at ullamcorper tristique, eros purus mollis quam, sit amet ornare ante nunc et enim.

Phasellus fringilla, metus id feugiat consectetuer, lacus wisi ultrices tellus, quis lobortis nibh lorem quis tortor. Donec egestas ornare nulla. Mauris mi tellus, porta faucibus, dictum vel, nonummy in, est. Aliquam erat volutpat. In tellus magna, porttitor lacinia, molestie vitae, pellentesque eu, justo. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Sed orci nibh, scelerisque sit amet, suscipit sed, placerat vel, diam. Vestibulum nonummy vulputate orci. Donec et velit ac arcu interdum semper. Morbi pede orci, cursus ac, elementum non, vehicula ut, lacus. Cras volutpat. Nam vel wisi quis libero venenatis placerat. Aenean sed odio. Quisque posuere purus ac orci. Vivamus odio. Vivamus varius, nulla sit amet semper viverra, odio mauris consequat lacus, at vestibulum neque arcu eu tortor. Donec iaculis tincidunt tellus. Aliquam erat volutpat. Curabitur magna lorem, dignissim volutpat, viverra et, adipiscing nec, dolor. Praesent lacus mauris, dapibus vitae, sollicitudin sit amet, nonummy eget, ligula.

Cras egestas ipsum a nisl. Vivamus varius dolor ut dolor. Fusce vel enim. Pellentesque accumsan ligula et eros. Cras id lacus non tortor facilisis facilisis. Etiam nisl elit, cursus sed, fringilla in, congue nec, urna. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Integer at turpis. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Duis fringilla, ligula sed porta fringilla, ligula wisi commodo felis, ut adipiscing felis dui in enim. Suspendisse malesuada ultrices ante. Pellentesque scelerisque augue sit amet urna. Nulla volutpat aliquet tortor. Cras aliquam, tellus at aliquet pellentesque, justo sapien commodo leo, id rhoncus sapien quam at erat. Nulla commodo, wisi eget sollicitudin pretium, orci orci aliquam orci, ut cursus turpis justo et lacus. Nulla vel tortor. Quisque erat elit, viverra sit amet, sagittis eget, porta sit amet, lacus.

In hac habitasse platea dictumst. Proin at est. Curabitur tempus vulputate elit. Pellentesque sem. Praesent eu sapien. Duis elit magna, aliquet at, tempus sed, vehicula non, enim. Morbi viverra arcu nec purus. Vivamus fringilla, enim et commodo malesuada, tortor metus elementum ligula, nec aliquet est sapien ut lectus. Aliquam mi. Ut nec elit. Fusce euismod luctus tellus. Curabitur scelerisque. Nullam purus. Nam ultricies accumsan magna. Morbi pulvinar lorem sit amet ipsum. Donec ut justo vitae nibh mollis congue. Fusce quis diam. Praesent tempus eros ut quam.

Donec in nisl. Fusce vitae est. Vivamus ante ante, mattis laoreet, posuere eget, congue vel, nunc. Fusce sem. Nam vel orci eu eros viverra luctus. Pellentesque sit amet augue. Nunc sit amet ipsum et lacus varius nonummy. Integer rutrum sem eget wisi. Aenean eu sapien. Quisque ornare dignissim mi. Duis a urna vel risus pharetra imperdiet. Suspendisse potenti.

Morbi justo. Aenean nec dolor. In hac habitasse platea dictumst. Proin nonummy porttitor velit. Sed sit amet leo nec metus rhoncus varius. Cras ante. Vestibulum commodo sem tincidunt massa. Nam justo. Aenean luctus, felis et condimentum lacinia, lectus enim pulvinar purus, non porta velit nisl sed eros. Suspendisse consequat. Mauris a dui et tortor mattis pretium. Sed nulla metus, volutpat id, aliquam eget, ullamcorper ut, ipsum. Morbi eu nunc. Praesent pretium. Duis aliquam pulvinar ligula. Ut blandit egestas justo. Quisque posuere metus viverra pede.

Vivamus sodales elementum neque. Vivamus dignissim accumsan neque. Sed at enim. Vestibulum nonummy interdum purus. Mauris ornare velit id nibh pretium ultricies. Fusce tempor pellentesque odio. Vivamus augue purus, laoreet in, scelerisque vel, commodo id, wisi. Duis enim. Nulla interdum, nunc eu semper eleifend, enim dolor pretium elit, ut commodo ligula nisl a est. Vivamus ante. Nulla leo massa, posuere nec, volutpat vitae, rhoncus eu, magna.

Quisque facilisis auctor sapien. Pellentesque gravida hendrerit lectus. Mauris rutrum sodales sapien. Fusce hendrerit sem vel lorem. Integer pellentesque massa vel augue. Integer elit tortor, feugiat quis, sagittis et, ornare non, lacus. Vestibulum posuere pellentesque eros. Quisque venenatis ipsum dictum nulla. Aliquam quis quam non metus eleifend interdum. Nam eget sapien ac mauris malesuada adipiscing. Etiam eleifend neque sed quam. Nulla facilisi. Proin a ligula. Sed id dui eu nibh egestas tincidunt. Suspendisse arcu.

Maecenas dui. Aliquam volutpat auctor lorem. Cras placerat est vitae lectus. Curabitur massa lectus, rutrum euismod, dignissim ut, dapibus a, odio. Ut eros erat, vulputate ut, interdum non, porta eu, erat. Cras fermentum, felis in porta congue, velit leo facilisis odio, vitae consectetuer lorem quam vitae orci. Sed ultrices, pede eu placerat auctor, ante ligula rutrum tellus, vel posuere nibh lacus nec nibh. Maecenas laoreet dolor at enim. Donec molestie dolor nec metus. Vestibulum libero. Sed quis erat. Sed tristique. Duis pede leo, fermentum quis, consectetuer eget, vulputate sit amet, erat.

Donec vitae velit. Suspendisse porta fermentum mauris. Ut vel nunc non mauris pharetra varius. Duis consequat libero quis urna. Maecenas at ante. Vivamus varius, wisi sed egestas tristique, odio wisi luctus nulla, lobortis dictum dolor ligula in lacus. Vivamus aliquam, urna sed interdum porttitor, metus orci interdum odio, sit amet euismod lectus felis et leo. Praesent ac wisi. Nam suscipit vestibulum sem. Praesent eu ipsum vitae pede cursus venenatis. Duis sed odio. Vestibulum eleifend. Nulla ut massa. Proin rutrum mattis sapien. Curabitur dictum gravida ante.

Phasellus placerat vulputate quam. Maecenas at tellus. Pellentesque neque diam, dignissim ac, venenatis vitae, consequat ut, lacus. Nam nibh. Vestibulum fringilla arcu mollis arcu. Sed et turpis. Donec sem tellus, volutpat et, varius eu, commodo sed, lectus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Quisque enim arcu, suscipit nec, tempus at, imperdiet vel, metus. Morbi volutpat purus at erat. Donec dignissim, sem id semper tempus, nibh massa eleifend turpis, sed pellentesque wisi purus sed libero. Nullam lobortis tortor vel risus. Pellentesque consequat nulla eu tellus. Donec velit. Aliquam fermentum, wisi ac rhoncus iaculis, tellus nunc malesuada orci, quis volutpat dui magna id mi. Nunc vel ante. Duis vitae lacus. Cras nec ipsum.

Morbi nunc. Aliquam consectetuer varius nulla. Phasellus eros. Cras dapibus porttitor risus. Maecenas ultrices mi sed diam. Praesent gravida velit at elit vehicula porttitor. Phasellus nisl mi, sagittis ac, pulvinar id, gravida sit amet, erat. Vestibulum est. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Curabitur id sem elementum leo rutrum hendrerit. Ut at mi. Donec tincidunt faucibus massa. Sed turpis quam, sollicitudin a, hendrerit eget, pretium ut, nisl. Duis hendrerit ligula. Nunc pulvinar congue urna.

Nunc velit. Nullam elit sapien, eleifend eu, commodo nec, semper sit amet, elit. Nulla lectus risus, condimentum ut, laoreet eget, viverra nec, odio. Proin lobortis. Curabitur dictum arcu vel wisi. Cras id nulla venenatis tortor congue ultrices. Pellentesque eget pede. Sed eleifend sagittis elit. Nam sed tellus sit amet lectus ullamcorper tristique. Mauris enim sem, tristique eu, accumsan at, scelerisque vulputate, neque. Quisque lacus. Donec et ipsum sit amet elit nonummy aliquet. Sed viverra nisl at sem. Nam diam. Mauris ut dolor. Curabitur ornare tortor cursus velit.

Morbi tincidunt posuere arcu. Cras venenatis est vitae dolor. Vivamus scelerisque semper mi. Donec ipsum arcu, consequat scelerisque, viverra id, dictum at, metus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut pede sem, tempus ut, porttitor bibendum, molestie eu, elit. Suspendisse potenti. Sed id lectus sit amet purus faucibus vehicula. Praesent sed sem non dui pharetra interdum. Nam viverra ultrices magna.

Aenean laoreet aliquam orci. Nunc interdum elementum urna. Quisque erat. Nullam tempor neque. Maecenas velit nibh, scelerisque a, consequat ut, viverra in, enim. Duis magna. Donec odio neque, tristique et, tincidunt eu, rhoncus ac, nunc. Mauris malesuada malesuada elit. Etiam lacus mauris, pretium vel, blandit in, ultricies id, libero. Phasellus bibendum erat ut diam. In congue imperdiet lectus.

Aenean scelerisque. Fusce pretium porttitor lorem. In hac habitasse platea dictumst. Nulla sit amet nisl at sapien egestas pretium. Nunc non tellus. Vivamus aliquet. Nam adipiscing euismod dolor. Aliquam erat volutpat. Nulla ut ipsum. Quisque tincidunt auctor augue. Nunc imperdiet ipsum eget elit. Aliquam quam leo, consectetuer non, ornare sit amet, tristique quis, felis. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque interdum quam sit amet mi. Pellentesque mauris dui, dictum a, adipiscing ac, fermentum sit amet, lorem.

Ut quis wisi. Praesent quis massa. Vivamus egestas risus eget lacus. Nunc tincidunt, risus quis bibendum facilisis, lorem purus rutrum neque, nec porta tortor urna quis orci. Aenean aliquet, libero semper volutpat luctus, pede erat lacinia augue, quis rutrum sem ipsum sit amet pede. Vestibulum aliquet, nibh sed iaculis sagittis, odio dolor blandit augue, eget mollis urna tellus id tellus. Aenean aliquet aliquam nunc. Nulla ultricies justo eget orci. Phasellus tristique fermentum leo. Sed massa metus, sagittis ut, semper ut, pharetra vel, erat. Aliquam quam turpis, egestas vel, elementum in, egestas sit amet, lorem. Duis convallis, wisi sit amet mollis molestie, libero mauris porta dui, vitae aliquam arcu turpis ac sem. Aliquam aliquet dapibus metus.

Vivamus commodo eros eleifend dui. Vestibulum in leo eu erat tristique mattis. Cras at elit. Cras pellentesque. Nullam id lacus sit amet libero aliquet hendrerit. Proin placerat, mi non elementum laoreet, eros elit tincidunt magna, a rhoncus sem arcu id odio. Nulla eget leo a leo egestas facilisis. Curabitur quis velit. Phasellus aliquam, tortor nec ornare rhoncus, purus urna posuere velit, et commodo risus tellus quis tellus. Vivamus leo turpis, tempus sit amet, tristique vitae, laoreet quis, odio. Proin scelerisque bibendum ipsum. Etiam nisl. Praesent vel dolor. Pellentesque vel magna. Curabitur urna. Vivamus congue urna in velit. Etiam ullamcorper elementum dui. Praesent non urna. Sed placerat quam non mi. Pellentesque diam magna, ultricies eget, ultrices placerat, adipiscing rutrum, sem.

Morbi sem. Nulla facilisi. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Nulla facilisi. Morbi sagittis ultrices libero. Praesent eu ligula sed sapien auctor sagittis. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Donec vel nunc. Nunc fermentum, lacus id aliquam porta, dui tortor euismod eros, vel molestie ipsum purus eu lacus. Vivamus pede arcu, euismod ac, tempus id, pretium et, lacus. Curabitur sodales dapibus urna. Nunc eu sapien. Donec eget nunc a pede dictum pretium. Proin mauris. Vivamus luctus libero vel nibh.

Fusce tristique risus id wisi. Integer molestie massa id sem. Vestibulum vel dolor. Pellentesque vel urna vel risus ultricies elementum. Quisque sapien urna, blandit nec, iaculis ac, viverra in, odio. In hac habitasse platea dictumst. Morbi neque lacus, convallis vitae, commodo ac, fermentum eu, velit. Sed in orci. In fringilla turpis non arcu. Donec in ante. Phasellus tempor feugiat velit. Aenean varius massa non turpis. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Aliquam tortor. Morbi ipsum massa, imperdiet non, consectetuer vel, feugiat vel, lorem. Quisque eget lorem nec elit malesuada vestibulum. Quisque sollicitudin ipsum vel sem. Nulla enim. Proin nonummy felis vitae felis. Nullam pellentesque. Duis rutrum feugiat felis. Mauris vel pede sed libero tincidunt mollis. Phasellus sed urna rhoncus diam euismod bibendum. Phasellus sed nisl. Integer condimentum justo id orci iaculis varius. Quisque et lacus. Phasellus elementum, justo at dignissim auctor, wisi odio lobortis arcu, sed sollicitudin felis felis eu neque. Praesent at lacus.

Vivamus sit amet pede. Duis interdum, nunc eget rutrum dignissim, nisl diam luctus leo, et tincidunt velit nisl id tellus. In lorem tellus, aliquet vitae, porta in, aliquet sed, lectus. Phasellus sodales. Ut varius scelerisque erat. In vel nibh eu eros imperdiet rutrum. Donec ac odio nec neque vulputate suscipit. Nam nec magna. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Nullam porta, odio et sagittis iaculis, wisi neque fringilla sapien, vel commodo lorem lorem id elit. Ut sem lectus, scelerisque eget, placerat et, tincidunt scelerisque, ligula. Pellentesque non orci.

Etiam vel ipsum. Morbi facilisis vestibulum nisl. Praesent cursus laoreet felis. Integer adipiscing pretium orci. Nulla facilisi. Quisque posuere bibendum purus. Nulla quam mauris, cursus eget, convallis ac, molestie non, enim. Aliquam congue. Quisque sagittis nonummy sapien. Proin molestie sem vitae urna. Maecenas lorem. Vivamus viverra consequat enim.

Nunc sed pede. Praesent vitae lectus. Praesent neque justo, vehicula eget, interdum id, facilisis et, nibh. Phasellus at purus et libero lacinia dictum. Fusce aliquet. Nulla eu ante placerat leo semper dictum. Mauris metus. Curabitur lobortis. Curabitur sollicitudin hendrerit nunc. Donec ultrices lacus id ipsum.

Donec a nibh ut elit vestibulum tristique. Integer at pede. Cras volutpat varius magna. Phasellus eu wisi. Praesent risus justo, lobortis eget, scelerisque ac, aliquet in, dolor. Proin id leo. Nunc iaculis, mi vitae accumsan commodo, neque sem lacinia nulla, quis vestibulum justo sem in eros. Quisque sed massa. Morbi lectus ipsum, vulputate a, mollis ut, accumsan placerat, tellus. Nullam in wisi. Vivamus eu ligula a nunc accumsan congue. Suspendisse ac libero. Aliquam erat volutpat. Donec augue. Nunc venenatis fringilla nibh. Fusce accumsan pulvinar justo. Nullam semper, dui ut dignissim auctor, orci libero fringilla massa, blandit pulvinar pede tortor id magna. Nunc adipiscing justo sed velit tincidunt fermentum.

Integer placerat. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Sed in massa. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Phasellus tempus aliquam risus. Aliquam rutrum purus at metus. Donec posuere odio at erat. Nam non nibh. Phasellus ligula. Quisque venenatis lectus in augue. Sed vestibulum dapibus neque.

Mauris tempus eros at nulla. Sed quis dui dignissim mauris pretium tincidunt. Mauris ac purus. Phasellus ac libero. Etiam dapibus iaculis nunc. In lectus wisi, elementum eu, sollicitudin nec, imperdiet quis, dui. Nulla viverra neque ac libero. Mauris urna leo, adipiscing eu, ultrices non, blandit eu, dui. Maecenas dui neque, suscipit sit amet, rutrum a, laoreet in, eros. Ut eu nibh. Fusce nec erat tempus urna fringilla tempus. Curabitur id enim.

Sed ante. Cras sodales enim sit amet wisi. Nunc fermentum consequat quam.

Ut auctor, augue porta dignissim vestibulum, arcu diam lobortis velit, vel scelerisque risus augue sagittis risus. Maecenas eu justo. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris congue ligula eget tortor. Nullam laoreet urna sed enim. Donec eget eros ut eros volutpat convallis. Praesent turpis. Integer mauris diam, elementum quis, egestas ac, rutrum vel, orci. Nulla facilisi. Quisque adipiscing, nulla vitae elementum porta, sem urna volutpat leo, sed porta enim risus sed massa. Integer ac enim quis diam sodales luctus. Ut eget eros a ligula commodo ultricies. Donec eu urna viverra dolor hendrerit feugiat. Aliquam ac orci vel eros congue pharetra. Quisque rhoncus, justo eu volutpat faucibus, augue leo posuere lacus, a rhoncus purus pede vel est. Proin ultrices enim.

Aenean tincidunt laoreet dui. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Integer ipsum lectus, fermentum ac, malesuada in, eleifend ut, lorem. Vivamus ipsum turpis, elementum vel, hendrerit ut, semper at, metus. Vivamus sapien tortor, eleifend id, dapibus in, egestas et, pede. Pellentesque faucibus. Praesent lorem neque, dignissim in, facilisis nec, hendrerit vel, odio. Nam at diam ac neque aliquet viverra. Morbi dapibus ligula sagittis magna. In lobortis. Donec aliquet ultricies libero. Nunc dictum vulputate purus. Morbi varius. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In tempor. Phasellus commodo porttitor magna. Curabitur vehicula odio vel dolor.

Praesent facilisis, augue a adipiscing venenatis, libero risus molestie odio, pulvinar consectetuer felis erat ac mauris. Nam vestibulum rhoncus quam. Sed velit urna, pharetra eu, eleifend eu, viverra at, wisi. Maecenas ultrices nibh at turpis. Aenean quam. Nulla ipsum. Aliquam posuere luctus erat. Curabitur magna felis, lacinia et, tristique id, ultrices ut, mauris. Suspendisse feugiat. Cras eleifend wisi vitae tortor. Phasellus leo purus, mattis sit amet, auctor in, rutrum in, magna. In hac habitasse platea dictumst. Phasellus imperdiet metus in sem. Vestibulum ac enim non sem ultricies sagittis. Sed vel diam.

Integer vel enim sed turpis adipiscing bibendum. Vestibulum pede dolor, laoreet nec, posuere in, nonummy in, sem. Donec imperdiet sapien placerat erat. Donec viverra. Aliquam eros. Nunc consequat massa id leo. Sed ullamcorper, lorem in sodales dapibus, risus metus sagittis lorem, non porttitor purus odio nec odio. Sed tincidunt posuere elit. Quisque eu enim. Donec libero risus, feugiat ac, dapibus eget, posuere a, felis. Quisque vel lectus ut metus tincidunt eleifend. Duis ut pede. Duis velit erat, venenatis vitae, vulputate a, pharetra sit amet, est. Etiam fringilla faucibus augue.

Aenean velit sem, viverra eu, tempus id, rutrum id, mi. Nullam nec nibh. Proin ullamcorper, dolor in cursus tristique, eros augue tempor nibh, at gravida diam wisi at purus. Donec mattis ullamcorper tellus. Phasellus vel nulla. Praesent interdum, eros in sodales sollicitudin, nunc nulla pulvinar justo, a euismod eros sem nec nibh. Nullam sagittis dapibus lectus. Nullam eget ipsum eu tortor lobortis sodales. Etiam purus leo, pretium nec, feugiat non, ullamcorper vel, nibh. Sed vel elit et quam accumsan facilisis. Nunc leo. Suspendisse faucibus lacus.

Pellentesque interdum sapien sed nulla. Proin tincidunt. Aliquam volutpat est vel massa. Sed dolor lacus, imperdiet non, ornare non, commodo eu, neque. Integer pretium semper justo. Proin risus. Nullam id quam. Nam neque. Duis vitae wisi ullamcorper diam congue ultricies. Quisque ligula. Mauris vehicula.

Curabitur nunc magna, posuere eget, venenatis eu, vehicula ac, velit. Aenean ornare, massa a accumsan pulvinar, quam lorem laoreet purus, eu sodales magna risus molestie lorem. Nunc erat velit, hendrerit quis, malesuada ut, aliquam vitae, wisi. Sed posuere. Suspendisse ipsum arcu, scelerisque nec, aliquam eu, molestie tincidunt, justo. Phasellus iaculis. Sed posuere lorem non ipsum. Pellentesque dapibus. Suspendisse quam libero, laoreet a, tincidunt eget, consequat at, est. Nullam ut lectus non enim consequat facilisis. Mauris leo. Quisque pede ligula, auctor vel, pellentesque vel, posuere id, turpis. Cras ipsum sem, cursus et, facilisis ut, tempus euismod, quam.

Suspendisse tristique dolor eu orci. Mauris mattis. Aenean semper. Vivamus tortor magna, facilisis id, varius mattis, hendrerit in, justo. Integer purus.

Vivamus adipiscing. Curabitur imperdiet tempus turpis. Vivamus sapien dolor, congue venenatis, euismod eget, porta rhoncus, magna. Proin condimentum pretium enim. Fusce fringilla, libero et venenatis facilisis, eros enim cursus arcu, vitae facilisis odio augue vitae orci. Aliquam varius nibh ut odio. Sed condimentum condimentum nunc. Pellentesque eget massa. Pellentesque quis mauris. Donec ut ligula ac pede pulvinar lobortis. Pellentesque euismod. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent elit. Ut laoreet ornare est. Phasellus gravida vulputate nulla. Donec sit amet arcu ut sem tempor malesuada. Praesent hendrerit augue in urna. Proin enim ante, ornare vel, consequat ut, blandit in, justo. Donec felis elit, dignissim sed, sagittis ut, ullamcorper a, nulla. Aenean pharetra vulputate odio.

Quisque enim. Proin velit neque, tristique eu, eleifend eget, vestibulum nec, lacus. Vivamus odio. Duis odio urna, vehicula in, elementum aliquam, aliquet laoreet, tellus. Sed velit. Sed vel mi ac elit aliquet interdum. Etiam sapien neque, convallis et, aliquet vel, auctor non, arcu. Aliquam suscipit aliquam lectus. Proin tincidunt magna sed wisi. Integer blandit lacus ut lorem. Sed luctus justo sed enim.

Morbi malesuada hendrerit dui. Nunc mauris leo, dapibus sit amet, vestibulum et, commodo id, est. Pellentesque purus. Pellentesque tristique, nunc ac pulvinar adipiscing, justo eros consequat lectus, sit amet posuere lectus neque vel augue. Cras consectetuer libero ac eros. Ut eget massa. Fusce sit amet enim eleifend sem dictum auctor. In eget risus luctus wisi convallis pulvinar. Vivamus sapien risus, tempor in, viverra in, aliquet pellentesque, eros. Aliquam euismod libero a sem.

Nunc velit augue, scelerisque dignissim, lobortis et, aliquam in, risus. In eu eros. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Curabitur vulputate elit viverra augue. Mauris fringilla, tortor sit amet malesuada mollis, sapien mi dapibus odio, ac imperdiet ligula enim eget nisl. Quisque vitae pede a pede aliquet suscipit. Phasellus tellus pede, viverra vestibulum, gravida id, laoreet in, justo. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Integer commodo luctus lectus. Mauris justo. Duis varius eros. Sed quam. Cras lacus eros, rutrum eget, varius quis, convallis iaculis, velit. Mauris imperdiet, metus at tristique venenatis, purus neque pellentesque mauris, a ultrices elit lacus nec tortor. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent malesuada. Nam lacus lectus, auctor sit amet, malesuada vel, elementum eget, metus. Duis neque pede, facilisis eget, egestas elementum, nonummy id, neque.

Proin non sem. Donec nec erat. Proin libero. Aliquam viverra arcu. Donec vitae purus. Donec felis mi, semper id, scelerisque porta, sollicitudin sed, turpis. Nulla in urna. Integer varius wisi non elit. Etiam nec sem. Mauris consequat, risus nec congue condimentum, ligula ligula suscipit urna, vitae porta odio erat quis sapien. Proin luctus leo id erat. Etiam massa metus, accumsan pellentesque, sagittis sit amet, venenatis nec, mauris. Praesent urna eros, ornare nec, vulputate eget, cursus sed, justo. Phasellus nec lorem. Nullam ligula ligula, mollis sit amet, faucibus vel, eleifend ac, dui. Aliquam erat volutpat.

Fusce vehicula, tortor et gravida porttitor, metus nibh congue lorem, ut tempus purus mauris a pede. Integer tincidunt orci sit amet turpis. Aenean a metus. Aliquam vestibulum lobortis felis. Donec gravida. Sed sed urna. Mauris et orci. Integer ultrices feugiat ligula. Sed dignissim nibh a massa. Donec orci dui, tempor sed, tincidunt nonummy, viverra sit amet, turpis. Quisque lobortis. Proin venenatis tortor nec wisi. Vestibulum placerat. In hac habitasse platea dictumst. Aliquam porta mi quis risus. Donec sagittis luctus diam. Nam ipsum elit, imperdiet vitae, faucibus nec, fringilla eget, leo. Etiam quis dolor in sapien porttitor imperdiet.

Cras pretium. Nulla malesuada ipsum ut libero. Suspendisse gravida hendrerit tellus. Maecenas quis lacus. Morbi fringilla. Vestibulum odio turpis, tempor vitae, scelerisque a, dictum non, massa. Praesent erat felis, porta sit amet, condimentum sit amet, placerat et, turpis. Praesent placerat lacus a enim. Vestibulum non eros. Ut congue. Donec tristique varius tortor. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Nam dictum dictum urna.

Phasellus vestibulum orci vel mauris. Fusce quam leo, adipiscing ac, pulvinar eget, molestie sit amet, erat. Sed diam. Suspendisse eros leo, tempus eget, dapibus sit amet, tempus eu, arcu. Vestibulum wisi metus, dapibus vel, luctus sit amet, condimentum quis, leo. Suspendisse molestie. Duis in ante. Ut sodales sem sit amet mauris. Suspendisse ornare pretium orci. Fusce tristique enim eget mi. Vestibulum eros elit, gravida ac, pharetra sed, lobortis in, massa. Proin at dolor. Duis accumsan accumsan pede. Nullam blandit elit in magna lacinia hendrerit. Ut nonummy luctus eros. Fusce eget tortor.

Ut sit amet magna. Cras a ligula eu urna dignissim viverra. Nullam tempor leo porta ipsum. Praesent purus. Nullam consequat. Mauris dictum sagittis dui. Vestibulum sollicitudin consectetuer wisi. In sit amet diam. Nullam malesuada pharetra risus. Proin lacus arcu, eleifend sed, vehicula at, congue sit amet, sem. Sed sagittis pede a nisl. Sed tincidunt odio a pede. Sed dui. Nam eu enim. Aliquam sagittis lacus eget libero. Pellentesque diam sem, sagittis molestie, tristique et, fermentum ornare, nibh. Nulla et tellus non felis imperdiet mattis. Aliquam erat volutpat.

Vestibulum sodales ipsum id augue. Integer ipsum pede, convallis sit amet, tristique vitae, tempor ut, nunc. Nam non ligula non lorem convallis hendrerit. Maecenas hendrerit. Sed magna odio, aliquam imperdiet, porta ac, aliquet eget, mi. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Vestibulum nisl sem, dignissim vel, euismod quis, egestas ut, orci. Nunc vitae risus vel metus euismod laoreet. Cras sit amet neque a turpis lobortis auctor. Sed aliquam sem ac elit. Cras velit lectus, facilisis id, dictum sed, porta rutrum, nisl. Nam hendrerit ipsum sed augue. Nullam scelerisque hendrerit wisi. Vivamus egestas arcu sed purus. Ut ornare lectus sed eros. Suspendisse potenti. Mauris sollicitudin pede vel velit. In hac habitasse platea dictumst.

Suspendisse erat mauris, nonummy eget, pretium eget, consequat vel, justo. Pellentesque consectetuer erat sed lacus. Nullam egestas nulla ac dui. Donec cursus rhoncus ipsum. Nunc et sem eu magna egestas malesuada. Vivamus dictum massa at dolor. Morbi est nulla, faucibus ac, posuere in, interdum ut, sapien. Proin consectetuer pretium urna. Donec sit amet nibh nec purus dignissim mattis. Phasellus vehicula elit at lacus. Nulla facilisi. Cras ut arcu. Sed consectetuer. Integer tristique elit quis felis consectetuer eleifend. Cras et lectus.

Ut congue malesuada justo. Curabitur congue, felis at hendrerit faucibus, mauris lacus porttitor pede, nec aliquam turpis diam feugiat arcu. Nullam rhoncus ipsum at risus. Vestibulum a dolor sed dolor fermentum vulputate. Sed nec ipsum dapibus urna bibendum lobortis. Vestibulum elit. Nam ligula arcu, volutpat eget, lacinia eu, lobortis ac, urna. Nam mollis ultrices nulla. Cras vulputate. Suspendisse at risus at metus pulvinar malesuada. Nullam lacus. Aliquam tempus magna. Aliquam ut purus. Proin tellus.

Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Donec scelerisque metus. Maecenas non mi ut metus porta hendrerit. Nunc semper. Cras quis wisi ut lorem posuere tristique. Nunc vestibulum scelerisque nulla. Suspendisse pharetra sollicitudin ante. Praesent at augue sit amet ante interdum porta. Nunc bibendum augue luctus diam. Etiam nec sem. Sed eros turpis, facilisis nec, vehicula vitae, aliquam sed, nulla. Curabitur justo leo, vestibulum eget, tristique ut, tempus at, nisl.

Nulla venenatis lorem id arcu. Morbi cursus urna a ipsum. Donec porttitor. Integer eleifend, est non mattis malesuada, mi nulla convallis mi, et auctor lectus sapien ut purus. Aliquam nulla augue, pharetra sit amet, faucibus semper, molestie vel, nibh. Pellentesque vestibulum magna et mi. Sed fringilla dolor vel tellus. Nunc libero nunc, venenatis eget, convallis hendrerit, iaculis elementum, mi. Nullam aliquam, felis et accumsan vehicula, magna justo vehicula diam, eu condimentum nisl felis et nunc. Quisque volutpat mauris a velit. Pellentesque massa. Integer at lorem. Nam metus erat, lacinia id, convallis ut, pulvinar non, wisi. Cras iaculis mauris ut neque. Cras sodales, sem vitae imperdiet consequat, pede purus sollicitudin urna, ac aliquam metus orci in leo. Ut molestie ultrices mauris. Vivamus vitae sem. Aliquam erat volutpat. Praesent commodo, nisl ac dapibus aliquet, tortor orci sodales lorem, non ornare nulla lorem quis nisl.

Sed at sem vitae purus ultrices vestibulum. Vestibulum tincidunt lacus et ligula. Pellentesque vitae elit. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Duis ornare, erat eget laoreet vulputate, lacus ipsum suscipit turpis, et bibendum nisl orci non lectus. Vestibulum nec risus nec libero fermentum fringilla. Morbi non velit in magna gravida hendrerit. Pellentesque quis lectus. Vestibulum eleifend lobortis leo. Vestibulum non augue. Vivamus dictum tempor dui. Maecenas at ligula id felis congue porttitor. Nulla leo magna, egestas quis, vulputate sit amet, viverra id, velit.

Ut lectus lectus, ultricies sit amet, semper eget, laoreet non, ante. Proin at massa quis nunc rhoncus mattis. Aliquam lorem. Curabitur pharetra dui at neque. Aliquam eu tellus. Aenean tempus, felis vitae vulputate iaculis, est dolor faucibus urna, in viverra wisi neque non risus. Fusce vel dolor nec sapien pretium nonummy. Integer faucibus massa ac nulla ornare venenatis. Nulla quis sapien. Sed tortor. Phasellus eget mi. Cras nunc. Cras a enim.

Quisque nisl. In dignissim dapibus massa. Aenean sem magna, scelerisque nec, ullamcorper quis, porttitor ut, lectus. Fusce dignissim facilisis tortor. Vivamus gravida felis sit amet nunc. Nam pulvinar odio vel enim. Pellentesque sit amet est. Vivamus pulvinar leo non sapien. Aliquam erat volutpat. Ut elementum auctor metus. Mauris vestibulum neque vitae eros. Pellentesque aliquam quam. Donec venenatis tristique purus. In nisl. Nulla velit libero, fermentum at, porta a, feugiat vitae, urna. Etiam aliquet ornare ipsum. Proin non dolor. Aenean nunc ligula, venenatis suscipit, porttitor sit amet, mattis suscipit, magna. Vivamus egestas viverra est. Morbi at risus sed sapien sodales pretium.

Morbi congue congue metus. Aenean sed purus. Nam pede magna, tristique nec, porta id, sollicitudin quis, sapien. Vestibulum blandit. Suspendisse ut augue ac nibh ullamcorper posuere. Integer euismod, neque at eleifend fringilla, augue elit ornare dolor, vel tincidunt purus est id lacus. Vivamus lorem dui, commodo quis, scelerisque eu, tincidunt non, magna. Cras sodales. Quisque vestibulum pulvinar diam. Phasellus tincidunt, leo vitae tristique facilisis, ipsum wisi interdum sem, dapibus semper nulla velit vel lectus. Cras dapibus mauris et augue. Quisque cursus nulla in libero. Suspendisse et lorem sit amet mauris malesuada mollis. Nullam id justo. Maecenas venenatis. Donec lacus arcu, egestas ac, fermentum consectetuer, tempus eu, metus. Proin sodales, sem in pretium fermentum, arcu sapien commodo mauris, venenatis consequat augue urna in wisi. Quisque sapien nunc, varius eget, condimentum quis, lacinia in, est. Fusce facilisis. Praesent nec ipsum.

Suspendisse a dolor. Nam erat eros, congue eget, sagittis a, lacinia in, pede. Maecenas in elit. Proin molestie varius nibh. Vivamus tristique purus sed augue. Proin egestas semper tortor. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Vestibulum orci enim, sagittis ornare, eleifend ut, mattis at, ligula. Nulla molestie convallis arcu. Ut eros tellus, condimentum at, sodales in, ultrices vel, nulla.

Duis magna ante, bibendum eget, eleifend eget, suscipit sed, neque. Vestibulum in mi sed massa cursus cursus. Pellentesque pulvinar mollis neque. Fusce ut enim vitae mauris malesuada tincidunt. Vivamus a neque. Mauris pulvinar, sapien id condimentum dictum, quam arcu rhoncus dui, id tempor lacus justo et justo. Proin sit amet orci eu diam eleifend blandit. Nunc erat massa, luctus ac, fermentum lacinia, tincidunt ultrices, sapien. Praesent sed orci vitae dolor sollicitudin adipiscing. Cras a neque. Ut risus dui, interdum at, placerat id, tristique eu, enim. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Etiam adipiscing eros vestibulum dolor. Pellentesque aliquam, diam eget eleifend posuere, augue eros porttitor lectus, ac dignissim dui metus nec felis. Quisque lacinia. Vestibulum tellus. Suspendisse nec wisi. Aenean ac felis. Aliquam ultrices metus et nulla.

Praesent sed est non nibh tempus venenatis. Praesent rhoncus. Curabitur sagittis est sit amet neque. Sed commodo malesuada lectus. Phasellus enim tellus, tempor ut, tristique eu, aliquam eu, quam. Aenean quis quam quis wisi gravida vehicula. Pellentesque a massa a leo pretium rhoncus. Suspendisse ultrices. Donec lacinia malesuada massa. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Donec pretium ornare mauris. Phasellus auctor erat eget enim. Integer scelerisque, felis eu consequat fringilla, lorem wisi ultricies velit, id vehicula purus nulla eget odio. Nullam mattis, diam a rutrum fermentum, odio sapien tristique quam, id mollis tellus quam in odio. Mauris eu sapien. Donec aliquam lorem sit amet lorem pharetra lobortis.

Donec ac velit. Sed convallis vestibulum sapien. Vivamus tempor lacus sed lacus. Nunc ut lorem. Ut et tortor. Nullam varius wisi at diam. Etiam ultricies, dolor sit amet fermentum vulputate, neque libero vestibulum orci, vitae fringilla neque arcu aliquet ante. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Quisque venenatis lobortis augue. Sed tempor, tellus iaculis pellentesque pharetra, pede dui malesuada mauris, vel ultrices urna mauris ac nibh. Etiam nibh odio, ultricies vehicula, vestibulum vitae, feugiat eleifend, felis. Vivamus pulvinar. Aliquam erat volutpat. Nulla egestas venenatis metus. Nam feugiat nunc quis elit egestas sagittis. Sed vitae felis. In libero arcu, rhoncus in, commodo eget, auctor in, enim. Vivamus suscipit est. Nulla dapibus, magna vel aliquet egestas, massa massa hendrerit lacus, ac rutrum tellus tellus sit amet felis. Cras viverra.

Suspendisse eu nunc. Aliquam dignissim urna sit amet mauris. Cras commodo, urna ut porttitor venenatis, arcu metus sodales risus, vitae gravida sapien ligula in est. Donec vulputate sollicitudin wisi. Donec vehicula, est id interdum ornare, nibh tellus consectetuer justo, a ultrices felis erat at lectus.

In est massa, malesuada non, suscipit at, ullamcorper eu, elit. Nam nulla lacus, bibendum sit amet, sagittis sed, tempor eget, libero. Praesent ligula. Suspendisse nulla. Etiam diam. Nulla ante diam, vestibulum et, aliquet ac, imperdiet vitae, urna. Fusce tincidunt lacus vel elit. Maecenas dictum, tortor non euismod bibendum, pede nibh pretium tellus, at dignissim leo eros eget pede. Nulla venenatis eleifend eros. Aenean ut odio dignissim augue rutrum faucibus. Fusce posuere, tellus eget viverra mattis, erat tellus porta mi, at facilisis sem nibh non urna. Phasellus quis turpis quis mauris suscipit vulputate. Sed interdum lacus non velit. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae.

Vivamus vehicula leo a justo. Quisque nec augue. Morbi mauris wisi, aliquet vitae, dignissim eget, sollicitudin molestie, ligula. In dictum enim sit amet risus. Curabitur vitae velit eu diam rhoncus hendrerit. Vivamus ut elit. Praesent mattis ipsum quis turpis. Curabitur rhoncus neque eu dui. Etiam vitae magna. Nam ullamcorper. Praesent interdum bibendum magna. Quisque auctor aliquam dolor. Morbi eu lorem et est porttitor fermentum. Nunc egestas arcu at tortor varius viverra. Fusce eu nulla ut nulla interdum consectetuer. Vestibulum gravida. Morbi mattis libero sed est.

Nam quis enim. Quisque ornare dui a tortor. Fusce consequat lacus pellentesque metus. Duis euismod. Duis non quam. Maecenas vitae dolor in ipsum auctor vehicula. Vivamus nec nibh eget wisi varius pulvinar. Cras a lacus. Etiam et massa. Donec in nisl sit amet dui imperdiet vestibulum. Duis porttitor nibh id eros.

Mauris consectetuer, wisi eu lobortis scelerisque, urna nibh feugiat quam, id congue eros justo eget orci. Ut tellus. Maecenas mattis sapien sed eros. Aliquam quis lectus. Donec nec massa ac turpis semper cursus. Etiam consectetuer ante vel odio. Aliquam tincidunt felis non dolor. Cras id augue ut nisl pretium placerat. Phasellus sapien sapien, pharetra sed, aliquam nec, suscipit a, nibh. Suspendisse risus. Nulla ut mi eget tellus sollicitudin euismod. Vestibulum malesuada malesuada dui. Ut at est ac dui aliquam sagittis. Aliquam erat volutpat.

Curabitur ullamcorper est in mauris. Praesent ac massa. Quisque enim odio, lobortis nec, mattis ut, luctus et, mauris. Mauris eu risus. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Duis eu ligula. Nulla vehicula leo tincidunt erat. Maecenas et nunc. Sed ut sapien. Vestibulum in est. Vestibulum rhoncus.

Donec metus metus, condimentum eu, accumsan nec, vulputate non, purus. Vestibulum ullamcorper vehicula sapien. Mauris risus odio, hendrerit ac, congue ac, ullamcorper at, odio. Aenean leo justo, commodo vitae, placerat blandit, malesuada vel, sem. Donec sit amet ante eget mauris adipiscing sollicitudin. Curabitur posuere sem et leo. Nulla ultricies mauris. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Fusce sollicitudin augue vel tellus. Vivamus mauris eros, pharetra vel, lacinia pretium, egestas a, nibh. Morbi a ligula.

Donec vitae turpis. Suspendisse porttitor. Mauris aliquam purus vitae tellus. Morbi metus diam, tempus ac, cursus ut, ultricies quis, nulla. Praesent nec justo. In lobortis. Donec nec lectus a neque laoreet rhoncus. Quisque in risus nec wisi lacinia ullamcorper. In placerat. Proin facilisis sollicitudin libero. Integer eget neque et pede placerat aliquet. Aliquam purus nulla, pulvinar ut, facilisis quis, sodales sed, magna. Curabitur nulla lectus, rutrum id, bibendum ut, sagittis eget, diam. Sed porta dolor eget est. Integer hendrerit orci. In hac habitasse platea dictumst.

Ut facilisis. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Sed pellentesque, turpis sit amet aliquet porta, risus odio venenatis felis, at porta tellus lacus vitae nisl. Donec augue. Quisque consequat, pede laoreet pellentesque posuere, urna sapien tempor justo, eu aliquam tortor nunc id mauris. Fusce pretium, purus facilisis consequat mattis, ligula leo pretium mauris, ac suscipit augue sapien sit amet ipsum. Praesent et ligula eget tortor dapibus blandit. Duis rutrum felis eget dolor. Vestibulum quis elit. Integer dignissim, velit at scelerisque congue, ipsum nulla dignissim dolor, lacinia scelerisque neque erat a mi. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Quisque ipsum lectus, euismod et, lacinia eu, iaculis eu, pede.

Etiam justo quam, cursus ut, vulputate vel, feugiat ut, eros. Fusce eleifend mollis ipsum.

Nulla facilisi. Nunc nec elit. Integer ornare convallis tortor. Proin ac diam. In est sapien, laoreet euismod, mattis a, tincidunt at, risus. Vivamus risus. Vestibulum aliquam, urna aliquam porttitor accumsan, nulla tortor ullamcorper elit, ut consequat augue purus sit amet libero. Vivamus nisl lacus, commodo vel, dignissim ut, vestibulum id, pede. Curabitur malesuada hendrerit libero. Mauris quis dolor in tellus varius posuere. Sed vulputate elit at wisi. Fusce vitae neque. Nulla consectetuer, nunc ac eleifend laoreet, mi nulla commodo wisi, vel faucibus ligula lectus ut arcu. Vivamus hendrerit.

Sed varius, nulla vitae tincidunt lobortis, nibh ipsum sollicitudin libero, et commodo tellus massa in neque. Nulla facilisi. Aenean nec lectus. Aliquam fermentum. Duis ut magna et augue interdum gravida. Morbi elit. Fusce malesuada tempus ipsum. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Mauris iaculis enim non metus. Nullam dui magna, congue et, suscipit sed, aliquam vel, turpis. Quisque ultricies.

Suspendisse feugiat sapien laoreet ante. Integer fringilla, erat eget adipiscing ultrices, nibh dui sollicitudin nunc, in lobortis arcu odio vitae erat. Fusce bibendum ultricies lacus. Mauris eleifend ligula a ante. Etiam faucibus cursus pede. Mauris enim eros, malesuada eu, mattis sit amet, blandit in, nulla. Fusce sit amet purus id mi posuere tincidunt. Mauris sit amet quam vitae quam semper accumsan. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Nam a justo at quam accumsan euismod. Duis tincidunt tristique risus. Ut vel nibh vel libero varius malesuada. In hac habitasse platea dictumst. Morbi sagittis mattis lorem. Pellentesque metus tellus, rutrum vitae, malesuada et, pharetra accumsan, ante. Quisque ac metus ac nisl gravida pellentesque. Sed dapibus feugiat sapien. Vestibulum nec nunc eget sem aliquam lobortis. Suspendisse aliquam quam quis metus.

Suspendisse in odio. In elit diam, cursus vitae, venenatis in, molestie in, leo. Cras ornare. Nulla libero. Phasellus feugiat mattis libero. Sed vehicula aliquam ligula. Nullam lacinia, felis vel dignissim sodales, enim lectus lobortis diam, quis nonummy mauris odio auctor tortor. Integer in dui nec lacus bibendum ultrices. Etiam odio elit, aliquam et, porttitor id, interdum cursus, elit. Nulla eleifend tempor mauris. In vel arcu quis pede laoreet vulputate.

Morbi pharetra magna a lorem. Cras sapien. Duis porttitor vehicula urna. Phasellus iaculis, mi vitae varius consequat, purus nibh sollicitudin mauris, quis aliquam felis dolor vel elit. Quisque neque mi, bibendum non, tristique convallis, congue eu, quam. Etiam vel felis. Quisque ac ligula at orci pulvinar rutrum. Donec mi eros, sagittis eu, consectetuer sed, sagittis sed, lorem. Nunc sed eros. Nullam pellentesque ante quis lectus. Vivamus lacinia, sapien vel fermentum placerat, purus nisl aliquet odio, et porta wisi dui nec nunc. Fusce porta cursus libero.

Quisque eu mi a augue mollis posuere. Donec tincidunt, lorem at vestibulum pulvinar, felis purus nonummy urna, at accumsan purus dui nec leo. Praesent tortor turpis, vehicula in, aliquet ut, dignissim ac, leo. Curabitur sagittis mi id eros. In magna. Sed vitae elit facilisis elit semper sollicitudin. Curabitur convallis tempor nulla. Nullam non turpis a pede sagittis ultrices. Etiam vulputate pede in ligula. Sed a ante id metus pellentesque suscipit. Sed adipiscing justo vitae sapien. Nunc posuere, pede ullamcorper gravida egestas, justo libero tincidunt arcu, vitae pellentesque arcu leo ut mauris. Pellentesque auctor mauris sit amet elit luctus fringilla. Cras sed wisi. Morbi luctus enim vitae tellus. Vivamus venenatis sodales libero.

In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse potenti. Nulla pretium sem sit amet nisl. Nulla facilisi. Sed aliquam, turpis sed hendrerit gravida, nunc metus aliquam urna, eget pharetra nibh urna nec lectus. Duis in nisl a nisl commodo facilisis. Nunc placerat risus sed leo. Duis pellentesque porta libero. Praesent et enim. Aenean ullamcorper, ante sit amet fermentum mollis, ligula metus laoreet magna, accumsan accumsan nibh wisi at wisi. Nam tincidunt tempor neque. Maecenas dolor. Donec interdum nisl. Aliquam

quam libero, interdum quis, volutpat sed, semper ut, eros. Pellentesque sodales auctor quam. Nullam suscipit massa nec elit. Nullam vulputate.

Aliquam a nulla. Suspendisse suscipit. Etiam lectus ante, interdum sit amet, euismod venenatis, condimentum eu, urna. Etiam at turpis. Cras quis ligula. Cras varius, sapien non pellentesque bibendum, mauris wisi sodales sem, ac commodo mauris neque non felis. Sed sollicitudin tincidunt arcu. Nullam vel lectus sit amet magna tincidunt tempor. Phasellus a ante. Donec et diam.

Proin sit amet augue. Praesent lacus. Donec a leo. Ut turpis ante, condimentum sed, sagittis a, blandit sit amet, enim. Integer sed elit. In ultricies blandit libero. Proin molestie erat dignissim nulla convallis ultrices. Aliquam in magna. Etiam sollicitudin, eros a sagittis pellentesque, lacus odio volutpat elit, vel tincidunt felis dui vitae lorem. Etiam leo. Nulla et justo.

Integer interdum varius diam. Nam aliquam velit a pede. Vivamus dictum nulla et wisi. Vestibulum a massa. Donec vulputate nibh vitae risus dictum varius. Nunc suscipit, nunc nec facilisis convallis, lacus ligula bibendum nulla, ac sollicitudin sapien nisl fermentum velit. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Nullam commodo dui ut augue molestie scelerisque. Sed aliquet rhoncus tortor. Fusce laoreet, turpis a facilisis tristique, leo mauris accumsan tellus, vitae ornare lacus pede sit amet purus. Sed dignissim velit vitae ligula. Sed sit amet diam sit amet arcu luctus ullamcorper.

Duis quis velit id elit facilisis luctus. Donec nec elit. Quisque ullamcorper arcu ac felis. Phasellus leo. Pellentesque consequat consequat purus. Ut vel justo at pede facilisis tempor. Integer tempus blandit dolor. Donec eget neque sed elit ultricies molestie. Cras cursus viverra tortor. Cras commodo condimentum diam. Pellentesque interdum malesuada wisi. Suspendisse eu quam. Donec consectetuer. Suspendisse wisi purus, vestibulum at, vehicula vel, congue a, eros. Nulla vulputate dolor at purus.

Suspendisse ac diam sed dui adipiscing pretium. Donec ullamcorper, sapien nec tempor venenatis, enim felis euismod pede, ut auctor lacus lectus sit amet diam. Vestibulum rutrum sem ut ante. Nulla eros. Quisque vitae nisl eget tellus feugiat volutpat. Nam id neque eu quam sodales vehicula. Nam dapibus, nulla eu iaculis placerat, pede est volutpat purus, id iaculis elit elit vel mauris. Donec dui. In hac habitasse platea dictumst. Nunc non quam. Proin euismod egestas eros. Mauris nisl. Sed neque. Phasellus bibendum. Proin ut purus in eros faucibus auctor.

Fusce mollis dui eu leo. Sed sapien augue, porta at, posuere ut, ultrices molestie, est. Vivamus quis pede nec erat placerat tincidunt. Aenean odio dui, facilisis non, vehicula et, bibendum a, libero. Etiam leo turpis, venenatis eleifend, nonummy sit amet, aliquam non, mi. Maecenas eget mi. Sed nec diam. Integer orci tellus, pellentesque nec, bibendum quis, sodales ut, nibh. Duis laoreet aliquet orci. Curabitur sit amet sem sit amet nibh fermentum faucibus. Donec adipiscing, ipsum id fringilla convallis, elit massa cursus augue, at lobortis massa augue nec ligula. Proin ac lacus.

Nunc id nulla nec mauris iaculis rutrum. Nunc nisl. Integer mi. Praesent lorem neque, egestas at, molestie in, faucibus et, eros. Sed rutrum, ante vitae aliquet tincidunt, diam elit auctor risus, eu elementum purus turpis eu elit. Proin ac orci. Integer varius, urna non sollicitudin consequat, massa libero pharetra erat, et venenatis dui orci eget purus. Aliquam iaculis est eget ipsum. Ut volutpat velit. Phasellus fringilla. Aliquam mollis tellus vel odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Vestibulum gravida sapien sed diam dictum pharetra. Nulla ac odio. Duis vitae metus ut purus feugiat interdum. Duis eros enim, tincidunt ac, venenatis et, dignissim id, lacus. Curabitur sagittis dolor nec augue. Sed ultricies mauris. Donec semper, enim eu vestibulum placerat, justo risus eleifend quam, ac semper velit pede convallis arcu.

Pellentesque tempus. Fusce tempor euismod nulla. Integer metus quam, semper sit amet, pellentesque sed, ornare sit amet, pede. Sed viverra. Aliquam erat volutpat. Donec tristique. In ac pede ut tortor mattis blandit. Phasellus a nunc. Integer metus. Sed malesuada gravida arcu. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit.

Phasellus suscipit placerat neque. Duis rutrum. Quisque enim. Proin et erat at augue aliquam aliquam. Mauris porttitor imperdiet lectus. Proin egestas faucibus risus. Praesent pharetra consequat odio. Fusce sed felis et nulla tempor elementum. Nulla eu turpis. Proin posuere. Nullam nonummy nulla sed nulla volutpat consectetuer. Vivamus vehicula accumsan eros. Fusce ullamcorper. Phasellus vehicula consequat mauris. Sed vitae purus. Sed accumsan, felis suscipit auctor fermentum, odio turpis vestibulum risus, vitae mattis metus neque non pede.

Suspendisse mollis erat et risus. Vestibulum et odio eu nisl malesuada dapibus. Morbi ac tortor et magna tincidunt ullamcorper. Ut pellentesque fermentum mi. Etiam sed neque sit amet leo consectetuer sagittis. Nulla facilisi. Sed lobortis erat vitae nulla. Duis bibendum ipsum et mi scelerisque dapibus. Fusce nonummy vestibulum orci. Donec a nisl. Integer ac nibh. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Aenean nec nunc sed dui lobortis vestibulum. Praesent metus ligula, auctor vitae, lacinia sed, hendrerit a, felis. Etiam sapien. Proin et sem vitae dolor sodales venenatis. Integer luctus aliquam risus.

Maecenas mi massa, fermentum eu, venenatis et, cursus id, ipsum. Morbi vehicula justo faucibus mauris. Donec non neque. Fusce id mi ut neque tincidunt posuere. Suspendisse quis enim. Cras porttitor. Sed quis velit. Aliquam vel augue at wisi blandit suscipit. Duis ut justo. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Etiam bibendum wisi quis augue. Nulla lorem odio, sollicitudin vitae, vehicula nec, dapibus ultricies, purus. In vitae tellus at odio cursus congue. Quisque tincidunt tempus metus. Aenean et nulla nec dolor dapibus ultricies. Phasellus commodo vulputate arcu. Sed enim. Phasellus quis leo. Aliquam iaculis, turpis nec aliquet rutrum, pede risus porta diam, id ullamcorper erat est sed eros. Fusce ornare.

Suspendisse porta, dolor sed fringilla ultrices, augue mauris gravida dolor, vel sollicitudin magna dui sit amet nunc. Mauris mollis condimentum risus. Integer ipsum. Quisque malesuada, erat ac dictum pulvinar, magna nisl fermentum ligula, quis euismod mauris felis non diam. Nullam sapien turpis, rutrum vel, condimentum ac, bibendum vulputate, nulla. Vestibulum tortor ipsum, fermentum egestas, placerat ut, vulputate et, wisi. Aliquam erat volutpat. Donec consequat, ligula sit amet tincidunt aliquam, nunc lorem sagittis nunc, a ullamcorper erat ante ac felis. Donec eleifend. Nullam quam leo, lobortis non, condimentum at, tempus consectetuer, orci. Quisque ut lorem. Donec nisl. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Donec porta, libero eget feugiat posuere, felis arcu pulvinar odio, vel dapibus enim dui nec turpis.

Duis leo. Cras nec odio. Nullam pretium lacinia est. Fusce aliquet, metus et vestibulum lobortis, ante erat vestibulum eros, eu sodales eros turpis id massa. Quisque est. Vivamus eu lacus. Nulla nisl. Nam eros. Aliquam sit amet neque vel magna dictum ultricies. Praesent magna mauris, sollicitudin ac, commodo eu, bibendum sit amet, lectus. Suspendisse potenti. Fusce congue leo quis libero nonummy adipiscing. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Nunc a orci. Ut at erat sit amet nunc scelerisque malesuada. Phasellus odio nisl, porta eget, laoreet nec, vehicula non, risus. Etiam dolor mauris, consectetuer eget, tincidunt sed, egestas quis, neque. Ut egestas ante ac libero. Proin mattis volutpat metus.

Sed tempor metus eget wisi. Duis cursus. Nam nunc. Nulla placerat wisi sed est. Aenean risus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Proin erat dolor, ultricies a, rutrum sed, posuere eget, metus. Donec sagittis nunc ac tortor. Aliquam erat volutpat. Curabitur consectetuer, augue nec viverra eleifend, dolor dolor volutpat orci, dapibus pellentesque eros pede a arcu. Nullam augue. Etiam eget nulla vel mi porta hendrerit. Phasellus cursus scelerisque tortor. Maecenas ut leo.

Donec libero. Quisque vitae est quis dui bibendum suscipit. Fusce leo felis, sagittis non, vehicula ac, ultricies vitae, diam. Aenean congue libero et metus. Nulla convallis libero a lacus. Donec hendrerit lorem sit amet leo. Mauris libero. Pellentesque pulvinar molestie dolor. Proin nibh mauris, ornare at, pretium sit amet, porttitor vel, mi. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas.

Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Aliquam interdum porttitor tortor. Donec ultricies justo eget sapien. Proin ac est. Aliquam erat volutpat. In tempus scelerisque ligula. Morbi scelerisque urna. Duis ac nisl. Donec sed leo. Fusce posuere orci mollis nunc. Sed arcu enim, pharetra nec, aliquam eu, consectetuer sit amet, eros. Sed id enim. Etiam mattis est at elit. Pellentesque est risus, pellentesque nec, dignissim vitae, egestas vitae, sapien. Maecenas et eros non libero iaculis facilisis. Mauris porttitor tempor justo. Sed sollicitudin neque nec libero.

Mauris ac ipsum. Duis ultrices erat ac felis. Donec dignissim luctus orci. Fusce pede odio, feugiat sit amet, aliquam eu, viverra eleifend, ipsum. Fusce arcu massa, posuere id, nonummy eu, pulvinar ut, wisi. Sed dui. Vestibulum nunc nisl, rutrum quis, pharetra eget, congue sed, dui. Donec justo neque, euismod eget, nonummy adipiscing, iaculis eu, leo. Duis lectus. Morbi pellentesque nonummy dui.

Aenean sem dolor, fermentum nec, gravida hendrerit, mattis eget, felis. Nullam non diam vitae mi lacinia consectetuer. Fusce non massa eget quam luctus posuere. Aenean vulputate velit. Quisque et dolor. Donec ipsum tortor, rutrum quis, mollis eu, mollis a, pede. Donec nulla. Duis molestie. Duis lobortis commodo purus. Pellentesque vel quam. Ut congue congue risus. Sed ligula. Aenean dictum pede vitae felis. Donec sit amet nibh. Maecenas eu orci. Quisque gravida quam sed massa.

Nunc euismod, mauris luctus adipiscing pellentesque, augue ligula pellentesque lectus, vitae posuere purus velit a pede. Phasellus leo mi, egestas imperdiet, blandit non, sollicitudin pharetra, enim. Nullam faucibus tellus non enim. Sed egestas nunc eu eros. Nunc euismod venenatis urna. Phasellus ullamcorper. Vivamus varius est ac lorem. In id pede eleifend nibh consectetuer faucibus. Phasellus accumsan euismod elit. Etiam vitae elit. Integer imperdiet nibh. Morbi imperdiet orci euismod mi.

Donec tincidunt tempor metus. Aenean egestas cursus nulla. Fusce ac metus at enim viverra lacinia. Vestibulum in magna non eros varius suscipit. Nullam cursus nibh. Mauris neque. In nunc quam, convallis vitae, posuere in, consequat sed, wisi. Phasellus bibendum consectetuer massa. Curabitur quis urna. Pellentesque a justo.

In sit amet dui eget lacus rutrum accumsan. Phasellus ac metus sed massa varius auctor. Curabitur velit elit, pellentesque eget, molestie nec, congue at, pede. Maecenas quis tellus non lorem vulputate ornare. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Etiam magna arcu, vulputate egestas, aliquet ut, facilisis ut, nisl. Donec vulputate wisi ac dolor. Aliquam feugiat nibh id tellus. Morbi eget massa sit amet purus accumsan dictum. Aenean a lorem. Fusce semper porta sapien.

Curabitur sit amet libero eget enim eleifend lacinia. Vivamus sagittis volutpat dui. Suspendisse potenti. Morbi a nibh eu augue fermentum posuere. Curabitur elit augue, porta quis, congue aliquam, rutrum non, massa. Integer mattis mollis ipsum. Sed tellus enim, mattis id, feugiat sed, eleifend in, elit. Phasellus non purus sed elit viverra rhoncus. Vestibulum id tellus vel sem imperdiet congue. Aenean in arcu. Nullam urna justo, imperdiet eget, volutpat vitae, semper eu, quam. Sed turpis dui, porttitor ut, egestas ac, condimentum non, wisi. Fusce iaculis turpis eget dui. Quisque pulvinar est pellentesque leo. Ut nulla elit, mattis vel, scelerisque vel, blandit ut, justo. Nulla feugiat risus in erat.

Curabitur hendrerit. Morbi fringilla enim quis nunc. Phasellus at dui. Donec commodo augue at nunc. Nunc in sapien et magna mollis sagittis. Morbi eu elit. Phasellus lacus. Donec a quam. Etiam pulvinar sapien. Sed nibh magna, viverra vitae, auctor eget, eleifend nec, lorem. Curabitur fringilla dui a odio. Nunc semper condimentum arcu. Curabitur vitae lectus sit amet turpis pretium condimentum. Nullam imperdiet mattis neque. Proin eget magna porta erat rhoncus consectetuer. Aenean pulvinar erat vitae mi.

In eget turpis non tortor iaculis tincidunt. Ut egestas feugiat magna. Duis enim nibh, gravida vel, nonummy non, sollicitudin ac, enim. Sed in tortor sed tellus eleifend cursus. Morbi a dolor at nibh molestie faucibus. Duis sed wisi. Duis fringilla, dui et malesuada dignissim, elit eros dictum lacus, rhoncus imperdiet pede elit nec tellus. Aenean at ligula eget nulla imperdiet faucibus. Quisque vestibulum lorem ac leo. Sed laoreet neque ut magna.

Aenean eget justo id lorem congue tristique. Maecenas sit amet nunc. Aenean bibendum risus. Nam convallis, mi sed ultrices sodales, metus nibh placerat dui, eu hendrerit erat enim vel libero. Duis placerat sem vitae wisi imperdiet condimentum. Aliquam pellentesque dui ac diam eleifend venenatis. Nulla facilisis posuere sapien. Cras euismod. Praesent ut enim. Aliquam ut ipsum quis urna interdum vehicula. Fusce eget sem. Nullam accumsan ullamcorper turpis.

Integer posuere, metus ac rhoncus auctor, mi tellus scelerisque nunc, venenatis elementum tortor lorem eu erat. Sed consectetuer risus vitae orci. Nullam tortor mauris, interdum at, imperdiet in, convallis eget, massa. Aliquam suscipit, magna nec blandit volutpat, lectus neque suscipit nunc, sit amet cursus nisl erat eget risus. Vestibulum leo lectus, accumsan ut, pharetra vel, elementum sed, quam. Maecenas condimentum orci at enim. Maecenas ut nunc. Vivamus pede. Integer vel purus vel mi mollis vestibulum. Sed laoreet ultricies nibh. Suspendisse non nisl quis ligula fermentum facilisis. Vestibulum sem nibh, porttitor et, fermentum a, ultricies id, augue.

In accumsan convallis metus. Aenean est. Donec pharetra porta odio. Duis nunc nisl, imperdiet ac, tincidunt vitae, varius sit amet, felis. Curabitur wisi. Ut iaculis, nunc in lacinia egestas, elit enim tincidunt turpis, at luctus ipsum augue condimentum metus. Aenean lorem wisi, cursus sit amet, mollis nec, porta ac, augue. Vivamus massa. Praesent rhoncus imperdiet orci. Aenean pharetra dolor ut sapien. Maecenas egestas augue semper dolor.

Vestibulum at lectus. Vestibulum dapibus placerat magna. Suspendisse dolor urna, condimentum sit amet, euismod a, adipiscing a, enim. Aliquam erat volutpat. Donec imperdiet dolor non mi. Phasellus magna metus, dictum sit amet, laoreet non, dictum vel, dui. Suspendisse potenti. Nunc turpis risus, porta vel, pharetra id, eleifend vitae, justo. Duis pulvinar dolor sit amet urna. Integer eu eros. Nulla facilisi. Duis dui. Nullam vitae quam. Morbi a nunc in elit sodales euismod. Nunc sed orci. Etiam malesuada metus vitae felis. Suspendisse imperdiet velit in tellus.

Nullam elit orci, condimentum vitae, accumsan quis, gravida non, velit. Morbi pellentesque accumsan elit. Aenean est purus, eleifend ac, dictum at, dignissim sed, dolor. Vestibulum volutpat sapien quis augue. Maecenas vulputate accumsan sapien. Nam mattis, lacus non iaculis aliquet, mi elit varius lectus, eu malesuada dolor nunc at wisi. Aliquam ligula. Mauris nisl elit, molestie vitae, gravida sit amet, facilisis convallis, enim. Sed urna. Praesent et augue. Fusce pellentesque. Maecenas varius orci eget nisl. Donec tempor rhoncus turpis. Integer nibh. Cras metus erat, tincidunt et, scelerisque quis, bibendum sed, dui. Suspendisse potenti.

Integer ac diam. Nullam porttitor dolor eget metus. Nulla sed metus quis tortor lacinia tempor. Mauris mauris dui, faucibus vitae, aliquet sit amet, placerat a, ante. Nunc placerat tincidunt neque. Mauris egestas dolor ut ipsum cursus malesuada. Curabitur odio. Nunc lobortis. Sed mattis tempor felis. Mauris dolor quam, facilisis at, bibendum sit amet, rutrum ornare, pede. Suspendisse accumsan sagittis velit. Pellentesque varius laoreet lorem. Vivamus egestas sapien id diam.

Integer viverra, felis ac tempus cursus, neque risus interdum turpis, eget venenatis tellus velit in neque. Nulla feugiat luctus tellus. Nam pulvinar lacus id leo. Vestibulum at ligula. Duis laoreet tincidunt enim. Suspendisse at nisl molestie est laoreet laoreet. Suspendisse euismod metus vel nisl. Aenean ullamcorper imperdiet massa. Aliquam nibh. Donec quis erat. Nunc sodales auctor ante.

Nam quis ante. Nullam interdum quam in eros. Sed eleifend libero eu tellus consequat fermentum. Nullam pellentesque risus ut augue. Vestibulum eu tellus. Integer eleifend suscipit urna. Fusce porttitor leo et odio. Vivamus vehicula justo a nisl. In rutrum, purus ut dictum auctor, dolor velit accumsan dolor, eu convallis augue dui ac lectus. Nullam eleifend pellentesque ligula.

Nam quis magna. Donec elementum dapibus erat. Pellentesque vel ipsum nec orci fermentum accumsan. Nunc porta magna eu neque. Nam id erat eu mi aliquet cursus. Morbi ut felis. Vestibulum in ipsum.

Donec vel augue. Morbi a turpis sed libero consequat porta. Quisque lacinia consequat odio. Sed vehicula sollicitudin purus. Vestibulum eget est. In hac habitasse platea dictumst. Sed blandit, tortor a auctor imperdiet, wisi nibh ornare leo, ac dictum nibh enim eu orci. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Aliquam tincidunt ullamcorper justo. Etiam accumsan lacus nec ante. Ut dictum luctus mauris. Ut metus. Maecenas gravida. Proin iaculis. Integer convallis, justo iaculis ullamcorper sollicitudin, lectus neque tincidunt mi, at condimentum sem quam vel diam. Aenean sit amet purus.

Sed justo. Maecenas lacinia, turpis sed commodo congue, odio urna elementum nunc, vitae molestie velit nunc eu sem. Maecenas enim. Proin quis neque nec tortor sollicitudin volutpat. Sed at ante. Sed vitae mauris non ante egestas hendrerit. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. In venenatis facilisis magna. Phasellus purus. Cras quis mauris. Aliquam eget magna. Donec rutrum sagittis mi. Morbi elementum, est sit amet sollicitudin feugiat, orci magna semper risus, eu congue nulla metus vel elit. Nunc tempor ornare mi. Integer justo odio, suscipit tincidunt, fermentum eu, tincidunt et, libero. Vestibulum vestibulum, urna et suscipit imperdiet, nulla ante fermentum erat, at laoreet lorem lectus sed metus. Fusce ante sem, posuere in, vehicula a, posuere sed, ante. Phasellus magna. Maecenas sit amet diam. Nunc at nibh sit amet augue tristique gravida.

Aenean adipiscing auctor est. Morbi quam arcu, malesuada sed, volutpat et, elementum sit amet, libero. Duis accumsan. Curabitur urna. In sed ipsum. Donec lobortis nibh. Duis mattis. Sed cursus lectus quis odio. Phasellus arcu. Praesent imperdiet dui in sapien. Vestibulum tellus pede, auctor a, pellentesque sit amet, vulputate sed, purus. Nunc pulvinar, dui at eleifend adipiscing, tellus nulla placerat massa, sed condimentum nulla tellus sed ligula. Nulla vitae odio sit amet leo imperdiet blandit. In vel massa. Maecenas varius dui at turpis. Sed odio.

Quisque aliquam ipsum sed turpis. Pellentesque laoreet velit nec justo. Nam sed augue. Maecenas rutrum quam eu dolor. Fusce consectetuer. Proin tellus est, luctus vitae, molestie a, mattis et, mauris. Donec tempor. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Duis ante felis, dignissim id, blandit in, suscipit vel, dolor. Pellentesque tincidunt cursus felis. Proin rhoncus semper nulla. Ut et est. Vivamus ipsum erat, gravida in, venenatis ac, fringilla in, quam. Nunc ac augue. Fusce pede erat, ultrices non, consequat et, semper sit amet, urna.

Fusce adipiscing justo nec ante. Nullam in enim. Pellentesque felis orci, sagittis ac, malesuada et, facilisis in, ligula. Nunc non magna sit amet mi aliquam dictum. In mi. Curabitur sollicitudin justo sed quam. Aenean imperdiet. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Donec lacinia nonummy lectus. Proin vel urna. Fusce sit amet orci ac magna iaculis pharetra. Duis sagittis massa in tellus. Aenean vel velit vel felis consectetuer pharetra.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetuer at, consectetuer sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.

Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetuer a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetuer. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetuer odio sem sed wisi.

Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetuer eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.

Etiam euismod. Fusce facilisis lacinia dui. Suspendisse potenti. In mi erat, cursus id, nonummy sed, ullamcorper eget, sapien. Praesent pretium, magna in eleifend egestas, pede pede pretium lorem, quis consectetuer tortor sapien facilisis magna. Mauris quis magna varius nulla scelerisque imperdiet. Aliquam non quam. Aliquam porttitor quam a lacus. Praesent vel arcu ut tortor cursus volutpat. In vitae pede quis diam bibendum placerat. Fusce elementum convallis neque. Sed dolor orci, scelerisque ac, dapibus nec, ultricies ut, mi. Duis nec dui quis leo sagittis commodo.

Aliquam lectus. Vivamus leo. Quisque ornare tellus ullamcorper nulla. Mauris porttitor pharetra tortor. Sed fringilla justo sed mauris. Mauris tellus. Sed non leo. Nullam elementum, magna in cursus sodales, augue est scelerisque sapien, venenatis congue nulla arcu et pede. Ut suscipit enim vel sapien. Donec congue. Maecenas urna mi, suscipit in, placerat ut, vestibulum ut, massa. Fusce ultrices nulla et nisl.

Etiam ac leo a risus tristique nonummy. Donec dignissim tincidunt nulla. Vestibulum rhoncus molestie odio. Sed lobortis, justo et pretium lobortis, mauris turpis condimentum augue, nec ultricies nibh arcu pretium enim. Nunc purus neque, placerat id, imperdiet sed, pellentesque nec, nisl. Vestibulum imperdiet neque non sem accumsan laoreet. In hac habitasse platea dictumst. Etiam condimentum facilisis libero. Suspendisse in elit quis nisl aliquam dapibus. Pellentesque auctor sapien. Sed egestas sapien nec lectus. Pellentesque vel dui vel neque bibendum viverra. Aliquam porttitor nisl nec pede. Proin mattis libero vel turpis. Donec rutrum mauris et libero. Proin euismod porta felis. Nam lobortis, metus quis elementum commodo, nunc lectus elementum mauris, eget vulputate ligula tellus eu neque. Vivamus eu dolor.

Nulla in ipsum. Praesent eros nulla, congue vitae, euismod ut, commodo a, wisi. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Aenean nonummy magna non leo. Sed felis erat, ullamcorper in, dictum non, ultricies ut, lectus. Proin vel arcu a odio lobortis euismod. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Proin ut est. Aliquam odio. Pellentesque massa turpis, cursus eu, euismod nec, tempor congue, nulla. Duis viverra gravida mauris. Cras tincidunt. Curabitur eros ligula, varius ut, pulvinar in, cursus faucibus, augue.

Nulla mattis luctus nulla. Duis commodo velit at leo. Aliquam vulputate magna et leo. Nam vestibulum ullamcorper leo. Vestibulum condimentum rutrum mauris. Donec id mauris. Morbi molestie justo et pede. Vivamus eget turpis sed nisl cursus tempor. Curabitur mollis sapien condimentum nunc. In wisi nisl, malesuada at, dignissim sit amet, lobortis in, odio. Aenean consequat arcu a ante. Pellentesque porta elit sit amet orci. Etiam at turpis nec elit ultricies imperdiet. Nulla facilisi. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse viverra aliquam risus. Nullam pede justo, molestie nonummy, scelerisque eu, facilisis vel, arcu.

Curabitur tellus magna, porttitor a, commodo a, commodo in, tortor. Donec interdum. Praesent scelerisque. Maecenas posuere sodales odio. Vivamus metus lacus, varius quis, imperdiet quis, rhoncus a, turpis. Etiam ligula arcu, elementum a, venenatis quis, sollicitudin sed, metus. Donec nunc pede, tincidunt in, venenatis vitae, faucibus vel, nibh. Pellentesque wisi. Nullam malesuada. Morbi ut tellus ut pede tincidunt porta. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam congue neque id dolor.

Donec et nisl at wisi luctus bibendum. Nam interdum tellus ac libero. Sed sem justo, laoreet vitae, fringilla at, adipiscing ut, nibh. Maecenas non sem quis tortor eleifend fermentum. Etiam id tortor ac mauris porta vulputate. Integer porta neque vitae massa. Maecenas tempus libero a libero posuere dictum. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Aenean quis mauris sed elit commodo placerat. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Vivamus rhoncus tincidunt libero. Etiam elementum pretium justo. Vivamus est. Morbi a tellus eget pede tristique commodo. Nulla nisl. Vestibulum sed nisl eu sapien cursus rutrum.

Nulla non mauris vitae wisi posuere convallis. Sed eu nulla nec eros scelerisque pharetra. Nullam varius. Etiam dignissim elementum metus. Vestibulum faucibus, metus sit amet mattis rhoncus, sapien dui laoreet odio, nec ultricies nibh augue a enim. Fusce in ligula. Quisque at magna et nulla commodo consequat. Proin accumsan imperdiet sem. Nunc porta. Donec feugiat mi at justo. Phasellus facilisis ipsum quis ante. In ac elit eget ipsum pharetra faucibus. Maecenas viverra nulla in massa.

Nulla ac nisl. Nullam urna nulla, ullamcorper in, interdum sit amet, gravida ut, risus. Aenean ac enim. In luctus. Phasellus eu quam vitae turpis viverra pellentesque. Duis feugiat felis ut enim. Phasellus pharetra, sem id porttitor sodales, magna nunc aliquet nibh, nec blandit nisl mauris at pede. Suspendisse risus risus, lobortis eget, semper at, imperdiet sit amet, quam. Quisque scelerisque dapibus nibh. Nam enim. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Nunc ut metus. Ut metus justo, auctor at, ultrices eu, sagittis ut, purus. Aliquam aliquam.

Etiam pede massa, dapibus vitae, rhoncus in, placerat posuere, odio. Vestibulum luctus commodo lacus. Morbi lacus dui, tempor sed, euismod eget, condimentum at, tortor. Phasellus aliquet odio ac lacus tempor faucibus. Praesent sed sem. Praesent iaculis. Cras rhoncus tellus sed justo ullamcorper sagittis. Donec quis orci. Sed ut tortor quis tellus euismod tincidunt. Suspendisse congue nisl eu elit. Aliquam tortor diam, tempus id, tristique eget, sodales vel, nulla. Praesent tellus mi, condimentum sed, viverra at, consectetuer quis, lectus. In auctor vehicula orci. Sed pede sapien, euismod in, suscipit in, pharetra placerat, metus. Vivamus commodo dui non odio. Donec et felis.

Etiam suscipit aliquam arcu. Aliquam sit amet est ac purus bibendum congue. Sed in eros. Morbi non orci. Pellentesque mattis lacinia elit. Fusce molestie velit in ligula. Nullam et orci vitae nibh vulputate auctor. Aliquam eget purus. Nulla auctor wisi sed ipsum. Morbi porttitor tellus ac enim. Fusce ornare. Proin ipsum enim, tincidunt in, ornare venenatis, molestie a, augue. Donec vel pede in lacus sagittis porta. Sed hendrerit ipsum quis nisl. Suspendisse quis massa ac nibh pretium cursus. Sed sodales. Nam eu neque quis pede dignissim ornare. Maecenas eu purus ac urna tincidunt congue.

Donec et nisl id sapien blandit mattis. Aenean dictum odio sit amet risus. Morbi purus. Nulla a est sit amet purus venenatis iaculis. Vivamus viverra purus vel magna. Donec in justo sed odio malesuada dapibus. Nunc ultrices aliquam nunc. Vivamus facilisis pellentesque velit. Nulla nunc velit, vulputate dapibus, vulputate id, mattis ac, justo. Nam mattis elit dapibus purus. Quisque enim risus, congue non, elementum ut, mattis quis, sem. Quisque elit.

Maecenas non massa. Vestibulum pharetra nulla at lorem. Duis quis quam id lacus dapibus interdum. Nulla lorem. Donec ut ante quis dolor bibendum condimentum. Etiam egestas tortor vitae lacus. Praesent cursus. Mauris bibendum pede at elit. Morbi et felis a lectus interdum facilisis. Sed suscipit gravida turpis. Nulla at lectus. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Praesent nonummy luctus nibh. Proin turpis nunc, congue eu, egestas ut, fringilla at, tellus. In hac habitasse platea dictumst.

Vivamus eu tellus sed tellus consequat suscipit. Nam orci orci, malesuada id, gravida nec, ultricies vitae, erat. Donec risus turpis, luctus sit amet, interdum quis, porta sed, ipsum. Suspendisse condimentum, tortor at egestas posuere, neque metus tempor orci, et tincidunt urna nunc a purus. Sed facilisis blandit tellus. Nunc risus sem, suscipit nec, eleifend quis, cursus quis, libero. Curabitur et dolor. Sed vitae sem. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Maecenas ante. Duis ullamcorper enim. Donec tristique enim eu leo. Nullam molestie elit eu dolor. Nullam bibendum, turpis vitae tristique gravida, quam sapien tempor lectus, quis pretium tellus purus ac quam. Nulla facilisi.

Duis aliquet dui in est. Donec eget est. Nunc lectus odio, varius at, fermentum in, accumsan non, enim. Aliquam erat volutpat. Proin sit amet nulla ut eros consectetuer cursus. Phasellus dapibus aliquam justo. Nunc laoreet. Donec consequat placerat magna. Duis pretium tincidunt justo. Sed sollicitudin vestibulum quam. Nam quis ligula. Vivamus at metus. Etiam imperdiet imperdiet pede. Aenean turpis. Fusce augue velit, scelerisque sollicitudin, dictum vitae, tempor et, pede. Donec wisi sapien, feugiat in, fermentum ut, sollicitudin adipiscing, metus.

Donec vel nibh ut felis consectetuer laoreet. Donec pede. Sed id quam id wisi laoreet suscipit. Nulla lectus dolor, aliquam ac, fringilla eget, mollis ut, orci. In pellentesque justo in ligula. Maecenas turpis. Donec eleifend leo at felis tincidunt consequat. Aenean turpis metus, malesuada sed, condimentum sit amet, auctor a, wisi. Pellentesque sapien elit, bibendum ac, posuere et, congue eu, felis. Vestibulum mattis libero quis metus scelerisque ultrices. Sed purus.

Donec molestie, magna ut luctus ultrices, tellus arcu nonummy velit, sit amet pulvinar elit justo et mauris. In pede. Maecenas euismod elit eu erat. Aliquam augue wisi, facilisis congue, suscipit in, adipiscing et, ante. In justo. Cras lobortis neque ac ipsum. Nunc fermentum massa at ante. Donec orci tortor, egestas sit amet, ultrices eget, venenatis eget, mi. Maecenas vehicula leo semper est. Mauris vel metus. Aliquam erat volutpat. In rhoncus sapien ac tellus. Pellentesque ligula.

Cras dapibus, augue quis scelerisque ultricies, felis dolor placerat sem, id porta velit odio eu elit. Aenean interdum nibh sed wisi. Praesent sollicitudin vulputate dui. Praesent iaculis viverra augue. Quisque in libero. Aenean gravida lorem vitae sem ullamcorper cursus. Nunc adipiscing rutrum ante. Nunc ipsum massa, faucibus sit amet, viverra vel, elementum semper, orci. Cras eros sem, vulputate et, tincidunt id, ultrices eget, magna. Nulla varius ornare odio. Donec accumsan mauris sit amet augue. Sed ligula lacus, laoreet non, aliquam sit amet, iaculis tempor, lorem. Suspendisse eros. Nam porta, leo sed congue tempor, felis est ultrices eros, id mattis velit felis non metus. Curabitur vitae elit non mauris varius pretium. Aenean lacus sem, tincidunt ut, consequat quis, porta vitae, turpis. Nullam laoreet fermentum urna. Proin iaculis lectus.

Sed mattis, erat sit amet gravida malesuada, elit augue egestas diam, tempus scelerisque nunc nisl vitae libero. Sed consequat feugiat massa. Nunc porta, eros in eleifend varius, erat leo rutrum dui, non convallis lectus orci ut nibh. Sed lorem massa, nonummy quis, egestas id, condimentum at, nisl. Maecenas at nibh. Aliquam et augue at nunc pellentesque ullamcorper. Duis nisl nibh, laoreet suscipit, convallis ut, rutrum id, enim. Phasellus odio. Nulla nulla elit, molestie non, scelerisque at, vestibulum eu, nulla. Ut odio nisl, facilisis id, mollis et, scelerisque nec, enim. Aenean sem leo, pellentesque sit amet, scelerisque sit amet, vehicula pellentesque, sapien.

Sed consequat tellus et tortor. Ut tempor laoreet quam. Nullam id wisi a libero tristique semper. Nullam nisl massa, rutrum ut, egestas semper, mollis id, leo. Nulla ac massa eu risus blandit mattis. Mauris ut nunc. In hac habitasse platea dictumst. Aliquam eget tortor. Quisque dapibus pede in erat. Nunc enim. In dui nulla, commodo at, consectetuer nec, malesuada nec, elit. Aliquam ornare tellus eu urna. Sed nec metus. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas.

Phasellus id magna. Duis malesuada interdum arcu. Integer metus. Morbi pulvinar pellentesque mi. Suspendisse sed est eu magna molestie egestas. Quisque mi lorem, pulvinar eget, egestas quis, luctus at, ante. Proin auctor vehicula purus. Fusce ac nisl aliquam ante hendrerit pellentesque. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Morbi wisi. Etiam arcu mauris, facilisis sed, eleifend non, nonummy ut, pede. Cras ut lacus tempor metus mollis placerat. Vivamus eu tortor vel metus interdum malesuada.

Sed eleifend, eros sit amet faucibus elementum, urna sapien consectetuer mauris, quis egestas leo justo non risus. Morbi non felis ac libero vulputate fringilla. Mauris libero eros, lacinia non, sodales quis, dapibus porttitor, pede. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Morbi dapibus mauris condimentum nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Etiam sit amet erat. Nulla varius. Etiam tincidunt dui vitae turpis. Donec leo. Morbi vulputate convallis est. Integer aliquet. Pellentesque aliquet sodales urna.

Nullam eleifend justo in nisl. In hac habitasse platea dictumst. Morbi nonummy. Aliquam ut felis. In velit leo, dictum vitae, posuere id, vulputate nec, ante. Maecenas vitae pede nec dui dignissim suscipit. Morbi magna. Vestibulum id purus eget velit laoreet laoreet. Praesent sed leo vel nibh convallis blandit. Ut rutrum. Donec nibh. Donec interdum. Fusce sed pede sit amet elit rhoncus ultrices. Nullam at enim vitae pede vehicula iaculis.

Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Aenean nonummy turpis id odio. Integer euismod imperdiet turpis. Ut nec leo nec diam imperdiet lacinia. Etiam eget lacus eget mi ultricies posuere. In placerat tristique tortor. Sed porta vestibulum metus. Nulla iaculis sollicitudin pede. Fusce luctus tellus in dolor. Curabitur auctor velit a sem. Morbi sapien. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Donec adipiscing urna vehicula nunc. Sed ornare leo in leo. In rhoncus leo ut dui. Aenean dolor quam, volutpat nec, fringilla id, consectetuer vel, pede.

Nulla malesuada risus ut urna. Aenean pretium velit sit amet metus. Duis iaculis. In hac habitasse platea dictumst. Nullam molestie turpis eget nisl. Duis a massa id pede dapibus ultricies. Sed eu leo. In at mauris sit amet tortor bibendum varius. Phasellus justo risus, posuere in, sagittis ac, varius vel, tortor. Quisque id enim. Phasellus consequat, libero pretium nonummy fringilla, tortor lacus vestibulum nunc, ut rhoncus ligula neque id justo. Nullam accumsan euismod nunc. Proin vitae ipsum ac metus dictum tempus. Nam ut wisi. Quisque tortor felis, interdum ac, sodales a, semper a, sem. Curabitur in velit sit amet dui tristique sodales. Vivamus mauris pede, lacinia eget, pellentesque quis, scelerisque eu, est. Aliquam risus. Quisque bibendum pede eu dolor.

Donec tempus neque vitae est. Aenean egestas odio sed risus ullamcorper ullamcorper. Sed in nulla a tortor tincidunt egestas. Nam sapien tortor, elementum sit amet, aliquam in, porttitor faucibus, enim. Nullam congue suscipit nibh. Quisque convallis. Praesent arcu nibh, vehicula eget, accumsan eu, tincidunt a, nibh. Suspendisse vulputate, tortor quis adipiscing viverra, lacus nibh dignissim tellus, eu suscipit risus ante fringilla diam. Quisque a libero vel pede imperdiet aliquet. Pellentesque nunc nibh, eleifend a, consequat consequat, hendrerit nec, diam. Sed urna. Maecenas laoreet eleifend neque. Vivamus purus odio, eleifend non, iaculis a, ultrices sit amet, urna. Mauris faucibus odio vitae risus. In nisl. Praesent purus. Integer iaculis, sem eu egestas lacinia, lacus pede scelerisque augue, in ullamcorper dolor eros ac lacus. Nunc in libero.

Fusce suscipit cursus sem. Vivamus risus mi, egestas ac, imperdiet varius, faucibus quis, leo. Aenean tincidunt. Donec suscipit. Cras id justo quis nibh scelerisque dignissim. Aliquam sagittis elementum dolor. Aenean consectetuer justo in pede. Curabitur ullamcorper ligula nec orci. Aliquam purus turpis, aliquam id, ornare vitae, porttitor non, wisi. Maecenas luctus porta lorem. Donec vitae ligula eu ante pretium varius. Proin tortor metus, convallis et, hendrerit non, scelerisque in, urna. Cras quis libero eu ligula bibendum tempor. Vivamus tellus quam, malesuada eu, tempus sed, tempor sed, velit. Donec lacinia auctor libero.

Praesent sed neque id pede mollis rutrum. Vestibulum iaculis risus. Pellentesque lacus. Ut quis nunc sed odio malesuada egestas. Duis a magna sit amet ligula tristique pretium. Ut pharetra. Vestibulum imperdiet magna nec wisi. Mauris convallis. Sed accumsan sollicitudin massa. Sed id enim. Nunc pede enim, lacinia ut, pulvinar quis, suscipit semper, elit. Cras accumsan erat vitae enim. Cras sollicitudin. Vestibulum rutrum blandit massa.

Sed gravida lectus ut purus. Morbi laoreet magna. Pellentesque eu wisi. Proin turpis. Integer sollicitudin augue nec dui. Fusce lectus. Vivamus faucibus nulla nec lacus. Integer diam. Pellentesque sodales, enim feugiat cursus volutpat, sem mauris dignissim mauris, quis consequat sem est fermentum ligula. Nullam justo lectus, condimentum sit amet, posuere a, fringilla mollis, felis. Morbi nulla nibh, pellentesque at, nonummy eu, sollicitudin nec, ipsum. Cras neque. Nunc augue. Nullam vitae quam id quam pulvinar blandit. Nunc sit amet orci. Aliquam erat elit, pharetra nec, aliquet a, gravida in, mi. Quisque urna enim, viverra quis, suscipit quis, tincidunt ut, sapien. Cras placerat consequat sem. Curabitur ac diam. Curabitur diam tortor, mollis et, viverra ac, tempus vel, metus.

Curabitur ac lorem. Vivamus non justo in dui mattis posuere. Etiam accumsan ligula id pede. Maecenas tincidunt diam nec velit. Praesent convallis sapien ac est. Aliquam ullamcorper euismod nulla. Integer mollis enim vel tortor. Nulla sodales placerat nunc. Sed tempus rutrum wisi. Duis accumsan gravida purus. Nunc nunc. Etiam facilisis dui eu sem. Vestibulum semper. Praesent eu eros. Vestibulum tellus nisl, dapibus id, vestibulum sit amet, placerat ac, mauris. Maecenas et elit ut erat placerat dictum. Nam feugiat, turpis et sodales volutpat, wisi quam rhoncus neque, vitae aliquam ipsum sapien vel enim. Maecenas suscipit cursus mi.

Quisque consectetuer. In suscipit mauris a dolor pellentesque consectetuer. Mauris convallis neque non erat. In lacinia. Pellentesque leo eros, sagittis quis, fermentum quis, tincidunt ut, sapien. Maecenas sem. Curabitur eros odio, interdum eu, feugiat eu, porta ac, nisl. Curabitur nunc. Etiam fermentum convallis velit. Pellentesque laoreet lacus. Quisque sed elit. Nam quis tellus. Aliquam tellus arcu, adipiscing non, tincidunt eleifend, adipiscing quis, augue. Vivamus elementum placerat enim. Suspendisse ut tortor. Integer faucibus adipiscing felis. Aenean consectetuer mattis lectus. Morbi malesuada faucibus dolor. Nam lacus. Etiam arcu libero, malesuada vitae, aliquam vitae, blandit tristique, nisl.

Maecenas accumsan dapibus sapien. Duis pretium iaculis arcu. Curabitur ut lacus. Aliquam vulputate. Suspendisse ut purus sed sem tempor rhoncus. Ut quam dui, fringilla at, dictum eget, ultricies quis, quam. Etiam sem est, pharetra non, vulputate in, pretium at, ipsum. Nunc semper sagittis orci. Sed scelerisque suscipit diam. Ut volutpat, dolor at ullamcorper tristique, eros purus mollis quam, sit amet ornare ante nunc et enim.

Phasellus fringilla, metus id feugiat consectetuer, lacus wisi ultrices tellus, quis lobortis nibh lorem quis tortor. Donec egestas ornare nulla. Mauris mi tellus, porta faucibus, dictum vel, nonummy in, est. Aliquam erat volutpat. In tellus magna, porttitor lacinia, molestie vitae, pellentesque eu, justo. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Sed orci nibh, scelerisque sit amet, suscipit sed, placerat vel, diam. Vestibulum nonummy vulputate orci. Donec et velit ac arcu interdum semper. Morbi pede orci, cursus ac, elementum non, vehicula ut, lacus. Cras volutpat. Nam vel wisi quis libero venenatis placerat. Aenean sed odio. Quisque posuere purus ac orci. Vivamus odio. Vivamus varius, nulla sit amet semper viverra, odio mauris consequat lacus, at vestibulum neque arcu eu tortor. Donec iaculis tincidunt tellus. Aliquam erat volutpat. Curabitur magna lorem, dignissim volutpat, viverra et, adipiscing nec, dolor. Praesent lacus mauris, dapibus vitae, sollicitudin sit amet, nonummy eget, ligula.

Cras egestas ipsum a nisl. Vivamus varius dolor ut dolor. Fusce vel enim. Pellentesque accumsan ligula et eros. Cras id lacus non tortor facilisis facilisis. Etiam nisl elit, cursus sed, fringilla in, congue nec, urna. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Integer at turpis. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Duis fringilla, ligula sed porta fringilla, ligula wisi commodo felis, ut adipiscing felis dui in enim. Suspendisse malesuada ultrices ante. Pellentesque scelerisque augue sit amet urna. Nulla volutpat aliquet tortor. Cras aliquam, tellus at aliquet pellentesque, justo sapien commodo leo, id rhoncus sapien quam at erat. Nulla commodo, wisi eget sollicitudin pretium, orci orci aliquam orci, ut cursus turpis justo et lacus. Nulla vel tortor. Quisque erat elit, viverra sit amet, sagittis eget, porta sit amet, lacus.

In hac habitasse platea dictumst. Proin at est. Curabitur tempus vulputate elit. Pellentesque sem. Praesent eu sapien. Duis elit magna, aliquet at, tempus sed, vehicula non, enim. Morbi viverra arcu nec purus. Vivamus fringilla, enim et commodo malesuada, tortor metus elementum ligula, nec aliquet est sapien ut lectus. Aliquam mi. Ut nec elit. Fusce euismod luctus tellus. Curabitur scelerisque. Nullam purus. Nam ultricies accumsan magna. Morbi pulvinar lorem sit amet ipsum. Donec ut justo vitae nibh mollis congue. Fusce quis diam. Praesent tempus eros ut quam.

Donec in nisl. Fusce vitae est. Vivamus ante ante, mattis laoreet, posuere eget, congue vel, nunc. Fusce sem. Nam vel orci eu eros viverra luctus. Pellentesque sit amet augue. Nunc sit amet ipsum et lacus varius nonummy. Integer rutrum sem eget wisi. Aenean eu sapien. Quisque ornare dignissim mi. Duis a urna vel risus pharetra imperdiet. Suspendisse potenti.

Morbi justo. Aenean nec dolor. In hac habitasse platea dictumst. Proin nonummy porttitor velit. Sed sit amet leo nec metus rhoncus varius. Cras ante. Vestibulum commodo sem tincidunt massa. Nam justo. Aenean luctus, felis et condimentum lacinia, lectus enim pulvinar purus, non porta velit nisl sed eros. Suspendisse consequat. Mauris a dui et tortor mattis pretium. Sed nulla metus, volutpat id, aliquam eget, ullamcorper ut, ipsum. Morbi eu nunc. Praesent pretium. Duis aliquam pulvinar ligula. Ut blandit egestas justo. Quisque posuere metus viverra pede.

Vivamus sodales elementum neque. Vivamus dignissim accumsan neque. Sed at enim. Vestibulum nonummy interdum purus. Mauris ornare velit id nibh pretium ultricies. Fusce tempor pellentesque odio. Vivamus augue purus, laoreet in, scelerisque vel, commodo id, wisi. Duis enim. Nulla interdum, nunc eu semper eleifend, enim dolor pretium elit, ut commodo ligula nisl a est. Vivamus ante. Nulla leo massa, posuere nec, volutpat vitae, rhoncus eu, magna.

Quisque facilisis auctor sapien. Pellentesque gravida hendrerit lectus. Mauris rutrum sodales sapien. Fusce hendrerit sem vel lorem. Integer pellentesque massa vel augue. Integer elit tortor, feugiat quis, sagittis et, ornare non, lacus. Vestibulum posuere pellentesque eros. Quisque venenatis ipsum dictum nulla. Aliquam quis quam non metus eleifend interdum. Nam eget sapien ac mauris malesuada adipiscing. Etiam eleifend neque sed quam. Nulla facilisi. Proin a ligula. Sed id dui eu nibh egestas tincidunt. Suspendisse arcu.

Maecenas dui. Aliquam volutpat auctor lorem. Cras placerat est vitae lectus. Curabitur massa lectus, rutrum euismod, dignissim ut, dapibus a, odio. Ut eros erat, vulputate ut, interdum non, porta eu, erat. Cras fermentum, felis in porta congue, velit leo facilisis odio, vitae consectetuer lorem quam vitae orci. Sed ultrices, pede eu placerat auctor, ante ligula rutrum tellus, vel posuere nibh lacus nec nibh. Maecenas laoreet dolor at enim. Donec molestie dolor nec metus. Vestibulum libero. Sed quis erat. Sed tristique. Duis pede leo, fermentum quis, consectetuer eget, vulputate sit amet, erat.

Donec vitae velit. Suspendisse porta fermentum mauris. Ut vel nunc non mauris pharetra varius. Duis consequat libero quis urna. Maecenas at ante. Vivamus varius, wisi sed egestas tristique, odio wisi luctus nulla, lobortis dictum dolor ligula in lacus. Vivamus aliquam, urna sed interdum porttitor, metus orci interdum odio, sit amet euismod lectus felis et leo. Praesent ac wisi. Nam suscipit vestibulum sem. Praesent eu ipsum vitae pede cursus venenatis. Duis sed odio. Vestibulum eleifend. Nulla ut massa. Proin rutrum mattis sapien. Curabitur dictum gravida ante.

Phasellus placerat vulputate quam. Maecenas at tellus. Pellentesque neque diam, dignissim ac, venenatis vitae, consequat ut, lacus. Nam nibh. Vestibulum fringilla arcu mollis arcu. Sed et turpis. Donec sem tellus, volutpat et, varius eu, commodo sed, lectus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Quisque enim arcu, suscipit nec, tempus at, imperdiet vel, metus. Morbi volutpat purus at erat. Donec dignissim, sem id semper tempus, nibh massa eleifend turpis, sed pellentesque wisi purus sed libero. Nullam lobortis tortor vel risus. Pellentesque consequat nulla eu tellus. Donec velit. Aliquam fermentum, wisi ac rhoncus iaculis, tellus nunc malesuada orci, quis volutpat dui magna id mi. Nunc vel ante. Duis vitae lacus. Cras nec ipsum.

Morbi nunc. Aliquam consectetuer varius nulla. Phasellus eros. Cras dapibus porttitor risus. Maecenas ultrices mi sed diam. Praesent gravida velit at elit vehicula porttitor. Phasellus nisl mi, sagittis ac, pulvinar id, gravida sit amet, erat. Vestibulum est. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Curabitur id sem elementum leo rutrum hendrerit. Ut at mi. Donec tincidunt faucibus massa. Sed turpis quam, sollicitudin a, hendrerit eget, pretium ut, nisl. Duis hendrerit ligula. Nunc pulvinar congue urna.

Nunc velit. Nullam elit sapien, eleifend eu, commodo nec, semper sit amet, elit. Nulla lectus risus, condimentum ut, laoreet eget, viverra nec, odio. Proin lobortis. Curabitur dictum arcu vel wisi. Cras id nulla venenatis tortor congue ultrices. Pellentesque eget pede. Sed eleifend sagittis elit. Nam sed tellus sit amet lectus ullamcorper tristique. Mauris enim sem, tristique eu, accumsan at, scelerisque vulputate, neque. Quisque lacus. Donec et ipsum sit amet elit nonummy aliquet. Sed viverra nisl at sem. Nam diam. Mauris ut dolor. Curabitur ornare tortor cursus velit.

Morbi tincidunt posuere arcu. Cras venenatis est vitae dolor. Vivamus scelerisque semper mi. Donec ipsum arcu, consequat scelerisque, viverra id, dictum at, metus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut pede sem, tempus ut, porttitor bibendum, molestie eu, elit. Suspendisse potenti. Sed id lectus sit amet purus faucibus vehicula. Praesent sed sem non dui pharetra interdum. Nam viverra ultrices magna.

Aenean laoreet aliquam orci. Nunc interdum elementum urna. Quisque erat. Nullam tempor neque. Maecenas velit nibh, scelerisque a, consequat ut, viverra in, enim. Duis magna. Donec odio neque, tristique et, tincidunt eu, rhoncus ac, nunc. Mauris malesuada malesuada elit. Etiam lacus mauris, pretium vel, blandit in, ultricies id, libero. Phasellus bibendum erat ut diam. In congue imperdiet lectus.

Aenean scelerisque. Fusce pretium porttitor lorem. In hac habitasse platea dictumst. Nulla sit amet nisl at sapien egestas pretium. Nunc non tellus. Vivamus aliquet. Nam adipiscing euismod dolor. Aliquam erat volutpat. Nulla ut ipsum. Quisque tincidunt auctor augue. Nunc imperdiet ipsum eget elit. Aliquam quam leo, consectetuer non, ornare sit amet, tristique quis, felis. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque interdum quam sit amet mi. Pellentesque mauris dui, dictum a, adipiscing ac, fermentum sit amet, lorem.

Ut quis wisi. Praesent quis massa. Vivamus egestas risus eget lacus. Nunc tincidunt, risus quis bibendum facilisis, lorem purus rutrum neque, nec porta tortor urna quis orci. Aenean aliquet, libero semper volutpat luctus, pede erat lacinia augue, quis rutrum sem ipsum sit amet pede. Vestibulum aliquet, nibh sed iaculis sagittis, odio dolor blandit augue, eget mollis urna tellus id tellus. Aenean aliquet aliquam nunc. Nulla ultricies justo eget orci. Phasellus tristique fermentum leo. Sed massa metus, sagittis ut, semper ut, pharetra vel, erat. Aliquam quam turpis, egestas vel, elementum in, egestas sit amet, lorem. Duis convallis, wisi sit amet mollis molestie, libero mauris porta dui, vitae aliquam arcu turpis ac sem. Aliquam aliquet dapibus metus.

Vivamus commodo eros eleifend dui. Vestibulum in leo eu erat tristique mattis. Cras at elit. Cras pellentesque. Nullam id lacus sit amet libero aliquet hendrerit. Proin placerat, mi non elementum laoreet, eros elit tincidunt magna, a rhoncus sem arcu id odio. Nulla eget leo a leo egestas facilisis. Curabitur quis velit. Phasellus aliquam, tortor nec ornare rhoncus, purus urna posuere velit, et commodo risus tellus quis tellus. Vivamus leo turpis, tempus sit amet, tristique vitae, laoreet quis, odio. Proin scelerisque bibendum ipsum. Etiam nisl. Praesent vel dolor. Pellentesque vel magna. Curabitur urna. Vivamus congue urna in velit. Etiam ullamcorper elementum dui. Praesent non urna. Sed placerat quam non mi. Pellentesque diam magna, ultricies eget, ultrices placerat, adipiscing rutrum, sem.

Morbi sem. Nulla facilisi. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Nulla facilisi. Morbi sagittis ultrices libero. Praesent eu ligula sed sapien auctor sagittis. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Donec vel nunc. Nunc fermentum, lacus id aliquam porta, dui tortor euismod eros, vel molestie ipsum purus eu lacus. Vivamus pede arcu, euismod ac, tempus id, pretium et, lacus. Curabitur sodales dapibus urna. Nunc eu sapien. Donec eget nunc a pede dictum pretium. Proin mauris. Vivamus luctus libero vel nibh.

Fusce tristique risus id wisi. Integer molestie massa id sem. Vestibulum vel dolor. Pellentesque vel urna vel risus ultricies elementum. Quisque sapien urna, blandit nec, iaculis ac, viverra in, odio. In hac habitasse platea dictumst. Morbi neque lacus, convallis vitae, commodo ac, fermentum eu, velit. Sed in orci. In fringilla turpis non arcu. Donec in ante. Phasellus tempor feugiat velit. Aenean varius massa non turpis. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae;

Aliquam tortor. Morbi ipsum massa, imperdiet non, consectetuer vel, feugiat vel, lorem. Quisque eget lorem nec elit malesuada vestibulum. Quisque sollicitudin ipsum vel sem. Nulla enim. Proin nonummy felis vitae felis. Nullam pellentesque. Duis rutrum feugiat felis. Mauris vel pede sed libero tincidunt mollis. Phasellus sed urna rhoncus diam euismod bibendum. Phasellus sed nisl. Integer condimentum justo id orci iaculis varius. Quisque et lacus. Phasellus elementum, justo at dignissim auctor, wisi odio lobortis arcu, sed sollicitudin felis felis eu neque. Praesent at lacus.

Vivamus sit amet pede. Duis interdum, nunc eget rutrum dignissim, nisl diam luctus leo, et tincidunt velit nisl id tellus. In lorem tellus, aliquet vitae, porta in, aliquet sed, lectus. Phasellus sodales. Ut varius scelerisque erat. In vel nibh eu eros imperdiet rutrum. Donec ac odio nec neque vulputate suscipit. Nam nec magna. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Nullam porta, odio et sagittis iaculis, wisi neque fringilla sapien, vel commodo lorem lorem id elit. Ut sem lectus, scelerisque eget, placerat et, tincidunt scelerisque, ligula. Pellentesque non orci.

Etiam vel ipsum. Morbi facilisis vestibulum nisl. Praesent cursus laoreet felis. Integer adipiscing pretium orci. Nulla facilisi. Quisque posuere bibendum purus. Nulla quam mauris, cursus eget, convallis ac, molestie non, enim. Aliquam congue. Quisque sagittis nonummy sapien. Proin molestie sem vitae urna. Maecenas lorem. Vivamus viverra consequat enim.

Nunc sed pede. Praesent vitae lectus. Praesent neque justo, vehicula eget, interdum id, facilisis et, nibh. Phasellus at purus et libero lacinia dictum. Fusce aliquet. Nulla eu ante placerat leo semper dictum. Mauris metus. Curabitur lobortis. Curabitur sollicitudin hendrerit nunc. Donec ultrices lacus id ipsum.

Donec a nibh ut elit vestibulum tristique. Integer at pede. Cras volutpat varius magna. Phasellus eu wisi. Praesent risus justo, lobortis eget, scelerisque ac, aliquet in, dolor. Proin id leo. Nunc iaculis, mi vitae accumsan commodo, neque sem lacinia nulla, quis vestibulum justo sem in eros. Quisque sed massa. Morbi lectus ipsum, vulputate a, mollis ut, accumsan placerat, tellus. Nullam in wisi. Vivamus eu ligula a nunc accumsan congue. Suspendisse ac libero. Aliquam erat volutpat. Donec augue. Nunc venenatis fringilla nibh. Fusce accumsan pulvinar justo. Nullam semper, dui ut dignissim auctor, orci libero fringilla massa, blandit pulvinar pede tortor id magna. Nunc adipiscing justo sed velit tincidunt fermentum.

Integer placerat. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Sed in massa. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Phasellus tempus aliquam risus. Aliquam rutrum purus at metus. Donec posuere odio at erat. Nam non nibh. Phasellus ligula. Quisque venenatis lectus in augue. Sed vestibulum dapibus neque.

Mauris tempus eros at nulla. Sed quis dui dignissim mauris pretium tincidunt. Mauris ac purus. Phasellus ac libero. Etiam dapibus iaculis nunc. In lectus wisi, elementum eu, sollicitudin nec, imperdiet quis, dui. Nulla viverra neque ac libero. Mauris urna leo, adipiscing eu, ultrices non, blandit eu, dui. Maecenas dui neque, suscipit sit amet, rutrum a, laoreet in, eros. Ut eu nibh. Fusce nec erat tempus urna fringilla tempus. Curabitur id enim. Sed ante. Cras sodales enim sit amet wisi. Nunc fermentum consequat quam.

Ut auctor, augue porta dignissim vestibulum, arcu diam lobortis velit, vel scelerisque risus augue sagittis risus. Maecenas eu justo. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris congue ligula eget tortor. Nullam laoreet urna sed enim. Donec eget eros ut eros volutpat convallis. Praesent turpis. Integer mauris diam, elementum quis, egestas ac, rutrum vel, orci. Nulla facilisi. Quisque adipiscing, nulla vitae elementum porta, sem urna volutpat leo, sed porta enim risus sed massa. Integer ac enim quis diam sodales luctus. Ut eget eros a ligula commodo ultricies. Donec eu urna viverra dolor hendrerit feugiat. Aliquam ac orci vel eros congue pharetra. Quisque rhoncus, justo eu volutpat faucibus, augue leo posuere lacus, a rhoncus purus pede vel est. Proin ultrices enim.

Aenean tincidunt laoreet dui. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Integer ipsum lectus, fermentum ac, malesuada in, eleifend ut, lorem. Vivamus ipsum turpis, elementum vel, hendrerit ut, semper at, metus. Vivamus sapien tortor, eleifend id, dapibus in, egestas et, pede. Pellentesque faucibus. Praesent lorem neque, dignissim in, facilisis nec, hendrerit vel, odio. Nam at diam ac neque aliquet viverra. Morbi dapibus ligula sagittis magna. In lobortis. Donec aliquet ultricies libero. Nunc dictum vulputate purus. Morbi varius. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In tempor. Phasellus commodo porttitor magna. Curabitur vehicula odio vel dolor.

Praesent facilisis, augue a adipiscing venenatis, libero risus molestie odio, pulvinar consectetuer felis erat ac mauris. Nam vestibulum rhoncus quam. Sed velit urna, pharetra eu, eleifend eu, viverra at, wisi. Maecenas ultrices nibh at turpis. Aenean quam. Nulla ipsum. Aliquam posuere luctus erat. Curabitur magna felis, lacinia et, tristique id, ultrices ut, mauris. Suspendisse feugiat. Cras eleifend wisi vitae tortor. Phasellus leo purus, mattis sit amet, auctor in, rutrum in, magna. In hac habitasse platea dictumst. Phasellus imperdiet metus in sem. Vestibulum ac enim non sem ultricies sagittis. Sed vel diam.

Integer vel enim sed turpis adipiscing bibendum. Vestibulum pede dolor, laoreet nec, posuere in, nonummy in, sem. Donec imperdiet sapien placerat erat. Donec viverra. Aliquam eros. Nunc consequat massa id leo. Sed ullamcorper, lorem in sodales dapibus, risus metus sagittis lorem, non porttitor purus odio nec odio. Sed tincidunt posuere elit. Quisque eu enim. Donec libero risus, feugiat ac, dapibus eget, posuere a, felis. Quisque vel lectus ut metus tincidunt eleifend. Duis ut pede. Duis velit erat, venenatis vitae, vulputate a, pharetra sit amet, est. Etiam fringilla faucibus augue.

Aenean velit sem, viverra eu, tempus id, rutrum id, mi. Nullam nec nibh. Proin ullamcorper, dolor in cursus tristique, eros augue tempor nibh, at gravida diam wisi at purus. Donec mattis ullamcorper tellus. Phasellus vel nulla. Praesent interdum, eros in sodales sollicitudin, nunc nulla pulvinar justo, a euismod eros sem nec nibh. Nullam sagittis dapibus lectus. Nullam eget ipsum eu tortor lobortis sodales. Etiam purus leo, pretium nec, feugiat non, ullamcorper vel, nibh. Sed vel elit et quam accumsan facilisis. Nunc leo. Suspendisse faucibus lacus.

Pellentesque interdum sapien sed nulla. Proin tincidunt. Aliquam volutpat est vel massa. Sed dolor lacus, imperdiet non, ornare non, commodo eu, neque. Integer pretium semper justo. Proin risus. Nullam id quam. Nam neque. Duis vitae wisi ullamcorper diam congue ultricies. Quisque ligula. Mauris vehicula.

Curabitur nunc magna, posuere eget, venenatis eu, vehicula ac, velit. Aenean ornare, massa a accumsan pulvinar, quam lorem laoreet purus, eu sodales magna risus molestie lorem. Nunc erat velit, hendrerit quis, malesuada ut, aliquam vitae, wisi. Sed posuere. Suspendisse ipsum arcu, scelerisque nec, aliquam eu, molestie tincidunt, justo. Phasellus iaculis. Sed posuere lorem non ipsum. Pellentesque dapibus. Suspendisse quam libero, laoreet a, tincidunt eget, consequat at, est. Nullam ut lectus non enim consequat facilisis. Mauris leo. Quisque pede ligula, auctor vel, pellentesque vel, posuere id, turpis. Cras ipsum sem, cursus et, facilisis ut, tempus euismod, quam. Suspendisse tristique dolor eu orci. Mauris mattis. Aenean semper. Vivamus tortor magna, facilisis id, varius mattis, hendrerit in, justo. Integer purus.

Vivamus adipiscing. Curabitur imperdiet tempus turpis. Vivamus sapien dolor, congue venenatis, euismod eget, porta rhoncus, magna. Proin condimentum pretium enim. Fusce fringilla, libero et venenatis facilisis, eros enim cursus arcu, vitae facilisis odio augue vitae orci. Aliquam varius nibh ut odio. Sed condimentum condimentum nunc. Pellentesque eget massa. Pellentesque quis mauris. Donec ut ligula ac pede pulvinar lobortis. Pellentesque euismod. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent elit. Ut laoreet ornare est. Phasellus gravida vulputate nulla. Donec sit amet arcu ut sem tempor malesuada. Praesent hendrerit augue in urna. Proin enim ante, ornare vel, consequat ut, blandit in, justo. Donec felis elit, dignissim sed, sagittis ut, ullamcorper a, nulla. Aenean pharetra vulputate odio.

Quisque enim. Proin velit neque, tristique eu, eleifend eget, vestibulum nec, lacus. Vivamus odio. Duis odio urna, vehicula in, elementum aliquam, aliquet laoreet, tellus. Sed velit. Sed vel mi ac elit aliquet interdum. Etiam sapien neque, convallis et, aliquet vel, auctor non, arcu. Aliquam suscipit aliquam lectus. Proin tincidunt magna sed wisi. Integer blandit lacus ut lorem. Sed luctus justo sed enim.

Morbi malesuada hendrerit dui. Nunc mauris leo, dapibus sit amet, vestibulum et, commodo id, est. Pellentesque purus. Pellentesque tristique, nunc ac pulvinar adipiscing, justo eros consequat lectus, sit amet posuere lectus neque vel augue. Cras consectetuer libero ac eros. Ut eget massa. Fusce sit amet enim eleifend sem dictum auctor. In eget risus luctus wisi convallis pulvinar. Vivamus sapien risus, tempor in, viverra in, aliquet pellentesque, eros. Aliquam euismod libero a sem.

Nunc velit augue, scelerisque dignissim, lobortis et, aliquam in, risus. In eu eros. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Curabitur vulputate elit viverra augue. Mauris fringilla, tortor sit amet malesuada mollis, sapien mi dapibus odio, ac imperdiet ligula enim eget nisl. Quisque vitae pede a pede aliquet suscipit. Phasellus tellus pede, viverra vestibulum, gravida id, laoreet in, justo. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Integer commodo luctus lectus. Mauris justo. Duis varius eros. Sed quam. Cras lacus eros, rutrum eget, varius quis, convallis iaculis, velit. Mauris imperdiet, metus at tristique venenatis, purus neque pellentesque mauris, a ultrices elit lacus nec tortor. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent malesuada. Nam lacus lectus, auctor sit amet, malesuada vel, elementum eget, metus. Duis neque pede, facilisis eget, egestas elementum, nonummy id, neque.

Proin non sem. Donec nec erat. Proin libero. Aliquam viverra arcu. Donec vitae purus. Donec felis mi, semper id, scelerisque porta, sollicitudin sed, turpis. Nulla in urna. Integer varius wisi non elit. Etiam nec sem. Mauris consequat, risus nec congue condimentum, ligula ligula suscipit urna, vitae porta odio erat quis sapien. Proin luctus leo id erat. Etiam massa metus, accumsan pellentesque, sagittis sit amet, venenatis nec, mauris. Praesent urna eros, ornare nec, vulputate eget, cursus sed, justo. Phasellus nec lorem. Nullam ligula ligula, mollis sit amet, faucibus vel, eleifend ac, dui. Aliquam erat volutpat.

Fusce vehicula, tortor et gravida porttitor, metus nibh congue lorem, ut tempus purus mauris a pede. Integer tincidunt orci sit amet turpis. Aenean a metus. Aliquam vestibulum lobortis felis. Donec gravida. Sed sed urna. Mauris et orci. Integer ultrices feugiat ligula. Sed dignissim nibh a massa. Donec orci dui, tempor sed, tincidunt nonummy, viverra sit amet, turpis. Quisque lobortis. Proin venenatis tortor nec wisi. Vestibulum placerat. In hac habitasse platea dictumst. Aliquam porta mi quis risus. Donec sagittis luctus diam. Nam ipsum elit, imperdiet vitae, faucibus nec, fringilla eget, leo. Etiam quis dolor in sapien porttitor imperdiet.

Cras pretium. Nulla malesuada ipsum ut libero. Suspendisse gravida hendrerit tellus. Maecenas quis lacus. Morbi fringilla. Vestibulum odio turpis, tempor vitae, scelerisque a, dictum non, massa. Praesent erat felis, porta sit amet, condimentum sit amet, placerat et, turpis. Praesent placerat lacus a enim. Vestibulum non eros. Ut congue. Donec tristique varius tortor. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Nam dictum dictum urna.

Phasellus vestibulum orci vel mauris. Fusce quam leo, adipiscing ac, pulvinar eget, molestie sit amet, erat. Sed diam. Suspendisse eros leo, tempus eget, dapibus sit amet, tempus eu, arcu. Vestibulum wisi metus, dapibus vel, luctus sit amet, condimentum quis, leo. Suspendisse molestie. Duis in ante. Ut sodales sem sit amet mauris. Suspendisse ornare pretium orci. Fusce tristique enim eget mi. Vestibulum eros elit, gravida ac, pharetra sed, lobortis in, massa. Proin at dolor. Duis accumsan accumsan pede. Nullam blandit elit in magna lacinia hendrerit. Ut nonummy luctus eros. Fusce eget tortor.

Ut sit amet magna. Cras a ligula eu urna dignissim viverra. Nullam tempor leo porta ipsum. Praesent purus. Nullam consequat. Mauris dictum sagittis dui. Vestibulum sollicitudin consectetuer wisi. In sit amet diam. Nullam malesuada pharetra risus. Proin lacus arcu, eleifend sed, vehicula at, congue sit amet, sem. Sed sagittis pede a nisl. Sed tincidunt odio a pede. Sed dui. Nam eu enim. Aliquam sagittis lacus eget libero. Pellentesque diam sem, sagittis molestie, tristique et, fermentum ornare, nibh. Nulla et tellus non felis imperdiet mattis. Aliquam erat volutpat.

Vestibulum sodales ipsum id augue. Integer ipsum pede, convallis sit amet, tristique vitae, tempor ut, nunc. Nam non ligula non lorem convallis hendrerit. Maecenas hendrerit. Sed magna odio, aliquam imperdiet, porta ac, aliquet eget, mi. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Vestibulum nisl sem, dignissim vel, euismod quis, egestas ut, orci. Nunc vitae risus vel metus euismod laoreet. Cras sit amet neque a turpis lobortis auctor. Sed aliquam sem ac elit. Cras velit lectus, facilisis id, dictum sed, porta rutrum, nisl. Nam hendrerit ipsum sed augue. Nullam scelerisque hendrerit wisi. Vivamus egestas arcu sed purus. Ut ornare lectus sed eros. Suspendisse potenti. Mauris sollicitudin pede vel velit. In hac habitasse platea dictumst.

Suspendisse erat mauris, nonummy eget, pretium eget, consequat vel, justo. Pellentesque consectetuer erat sed lacus. Nullam egestas nulla ac dui. Donec cursus rhoncus ipsum. Nunc et sem eu magna egestas malesuada. Vivamus dictum massa at dolor. Morbi est nulla, faucibus ac, posuere in, interdum ut, sapien. Proin consectetuer pretium urna. Donec sit amet nibh nec purus dignissim mattis. Phasellus vehicula elit at lacus. Nulla facilisi. Cras ut arcu. Sed consectetuer. Integer tristique elit quis felis consectetuer eleifend. Cras et lectus.

Ut congue malesuada justo. Curabitur congue, felis at hendrerit faucibus, mauris lacus porttitor pede, nec aliquam turpis diam feugiat arcu. Nullam rhoncus ipsum at risus. Vestibulum a dolor sed dolor fermentum vulputate. Sed nec ipsum dapibus urna bibendum lobortis. Vestibulum elit. Nam ligula arcu, volutpat eget, lacinia eu, lobortis ac, urna. Nam mollis ultrices nulla. Cras vulputate. Suspendisse at risus at metus pulvinar malesuada. Nullam lacus. Aliquam tempus magna. Aliquam ut purus. Proin tellus.

Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Donec scelerisque metus. Maecenas non mi ut metus porta hendrerit. Nunc semper. Cras quis wisi ut lorem posuere tristique. Nunc vestibulum scelerisque nulla. Suspendisse pharetra sollicitudin ante. Praesent at augue sit amet ante interdum porta. Nunc bibendum augue luctus diam. Etiam nec sem. Sed eros turpis, facilisis nec, vehicula vitae, aliquam sed, nulla. Curabitur justo leo, vestibulum eget, tristique ut, tempus at, nisl.

Nulla venenatis lorem id arcu. Morbi cursus urna a ipsum. Donec porttitor. Integer eleifend, est non mattis malesuada, mi nulla convallis mi, et auctor lectus sapien ut purus. Aliquam nulla augue, pharetra sit amet, faucibus semper, molestie vel, nibh. Pellentesque vestibulum magna et mi. Sed fringilla dolor vel tellus. Nunc libero nunc, venenatis eget, convallis hendrerit, iaculis elementum, mi. Nullam aliquam, felis et accumsan vehicula, magna justo vehicula diam, eu condimentum nisl felis et nunc. Quisque volutpat mauris a velit. Pellentesque massa. Integer at lorem. Nam metus erat, lacinia id, convallis ut, pulvinar non, wisi. Cras iaculis mauris ut neque. Cras sodales, sem vitae imperdiet consequat, pede purus sollicitudin urna, ac aliquam metus orci in leo. Ut molestie ultrices mauris. Vivamus vitae sem. Aliquam erat volutpat. Praesent commodo, nisl ac dapibus aliquet, tortor orci sodales lorem, non ornare nulla lorem quis nisl.

Sed at sem vitae purus ultrices vestibulum. Vestibulum tincidunt lacus et ligula. Pellentesque vitae elit. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Duis ornare, erat eget laoreet vulputate, lacus ipsum suscipit turpis, et bibendum nisl orci non lectus. Vestibulum nec risus nec libero fermentum fringilla. Morbi non velit in magna gravida hendrerit. Pellentesque quis lectus. Vestibulum eleifend lobortis leo. Vestibulum non augue. Vivamus dictum tempor dui. Maecenas at ligula id felis congue porttitor. Nulla leo magna, egestas quis, vulputate sit amet, viverra id, velit.

Ut lectus lectus, ultricies sit amet, semper eget, laoreet non, ante. Proin at massa quis nunc rhoncus mattis. Aliquam lorem. Curabitur pharetra dui at neque. Aliquam eu tellus. Aenean tempus, felis vitae vulputate iaculis, est dolor faucibus urna, in viverra wisi neque non risus. Fusce vel dolor nec sapien pretium nonummy. Integer faucibus massa ac nulla ornare venenatis. Nulla quis sapien. Sed tortor. Phasellus eget mi. Cras nunc. Cras a enim.

Quisque nisl. In dignissim dapibus massa. Aenean sem magna, scelerisque nec, ullamcorper quis, porttitor ut, lectus. Fusce dignissim facilisis tortor. Vivamus gravida felis sit amet nunc. Nam pulvinar odio vel enim. Pellentesque sit amet est. Vivamus pulvinar leo non sapien. Aliquam erat volutpat. Ut elementum auctor metus. Mauris vestibulum neque vitae eros. Pellentesque aliquam quam. Donec venenatis tristique purus. In nisl. Nulla velit libero, fermentum at, porta a, feugiat vitae, urna. Etiam aliquet ornare ipsum. Proin non dolor. Aenean nunc ligula, venenatis suscipit, porttitor sit amet, mattis suscipit, magna. Vivamus egestas viverra est. Morbi at risus sed sapien sodales pretium.

Morbi congue congue metus. Aenean sed purus. Nam pede magna, tristique nec, porta id, sollicitudin quis, sapien. Vestibulum blandit. Suspendisse ut augue ac nibh ullamcorper posuere. Integer euismod, neque at eleifend fringilla, augue elit ornare dolor, vel tincidunt purus est id lacus. Vivamus lorem dui, commodo quis, scelerisque eu, tincidunt non, magna. Cras sodales. Quisque vestibulum pulvinar diam. Phasellus tincidunt, leo vitae tristique facilisis, ipsum wisi interdum sem, dapibus semper nulla velit vel lectus. Cras dapibus mauris et augue. Quisque cursus nulla in libero. Suspendisse et lorem sit amet mauris malesuada mollis. Nullam id justo. Maecenas venenatis. Donec lacus arcu, egestas ac, fermentum consectetuer, tempus eu, metus. Proin sodales, sem in pretium fermentum, arcu sapien commodo mauris, venenatis consequat augue urna in wisi. Quisque sapien nunc, varius eget, condimentum quis, lacinia in, est. Fusce facilisis. Praesent nec ipsum.

Suspendisse a dolor. Nam erat eros, congue eget, sagittis a, lacinia in, pede. Maecenas in elit. Proin molestie varius nibh. Vivamus tristique purus sed augue. Proin egestas semper tortor. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Vestibulum orci enim, sagittis ornare, eleifend ut, mattis at, ligula. Nulla molestie convallis arcu. Ut eros tellus, condimentum at, sodales in, ultrices vel, nulla.

Duis magna ante, bibendum eget, eleifend eget, suscipit sed, neque. Vestibulum in mi sed massa cursus cursus. Pellentesque pulvinar mollis neque. Fusce ut enim vitae mauris malesuada tincidunt. Vivamus a neque. Mauris pulvinar, sapien id condimentum dictum, quam arcu rhoncus dui, id tempor lacus justo et justo. Proin sit amet orci eu diam eleifend blandit. Nunc erat massa, luctus ac, fermentum lacinia, tincidunt ultrices, sapien. Praesent sed orci vitae dolor sollicitudin adipiscing. Cras a neque. Ut risus dui, interdum at, placerat id, tristique eu, enim. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Etiam adipiscing eros vestibulum dolor. Pellentesque aliquam, diam eget eleifend posuere, augue eros porttitor lectus, ac dignissim dui metus nec felis. Quisque lacinia. Vestibulum tellus. Suspendisse nec wisi. Aenean ac felis. Aliquam ultrices metus et nulla.

Praesent sed est non nibh tempus venenatis. Praesent rhoncus. Curabitur sagittis est sit amet neque. Sed commodo malesuada lectus. Phasellus enim tellus, tempor ut, tristique eu, aliquam eu, quam. Aenean quis quam quis wisi gravida vehicula. Pellentesque a massa a leo pretium rhoncus. Suspendisse ultrices. Donec lacinia malesuada massa. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Donec pretium ornare mauris. Phasellus auctor erat eget enim. Integer scelerisque, felis eu consequat fringilla, lorem wisi ultricies velit, id vehicula purus nulla eget odio. Nullam mattis, diam a rutrum fermentum, odio sapien tristique quam, id mollis tellus quam in odio. Mauris eu sapien. Donec aliquam lorem sit amet lorem pharetra lobortis.

Donec ac velit. Sed convallis vestibulum sapien. Vivamus tempor lacus sed lacus. Nunc ut lorem. Ut et tortor. Nullam varius wisi at diam. Etiam ultricies, dolor sit amet fermentum vulputate, neque libero vestibulum orci, vitae fringilla neque arcu aliquet ante. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Quisque venenatis lobortis augue. Sed tempor, tellus iaculis pellentesque pharetra, pede dui malesuada mauris, vel ultrices urna mauris ac nibh. Etiam nibh odio, ultricies vehicula, vestibulum vitae, feugiat eleifend, felis. Vivamus pulvinar. Aliquam erat volutpat. Nulla egestas venenatis metus. Nam feugiat nunc quis elit egestas sagittis. Sed vitae felis. In libero arcu, rhoncus in, commodo eget, auctor in, enim. Vivamus suscipit est. Nulla dapibus, magna vel aliquet egestas, massa massa hendrerit lacus, ac rutrum tellus tellus sit amet felis. Cras viverra.

Suspendisse eu nunc. Aliquam dignissim urna sit amet mauris. Cras commodo, urna ut porttitor venenatis, arcu metus sodales risus, vitae gravida sapien ligula in est. Donec vulputate sollicitudin wisi. Donec vehicula, est id interdum ornare, nibh tellus consectetuer justo, a ultrices felis erat at lectus. In est massa, malesuada non, suscipit at, ullamcorper eu, elit. Nam nulla lacus, bibendum sit amet, sagittis sed, tempor eget, libero. Praesent ligula. Suspendisse nulla. Etiam diam. Nulla ante diam, vestibulum et, aliquet ac, imperdiet vitae, urna. Fusce tincidunt lacus vel elit. Maecenas dictum, tortor non euismod bibendum, pede nibh pretium tellus, at dignissim leo eros eget pede. Nulla venenatis eleifend eros. Aenean ut odio dignissim augue rutrum faucibus. Fusce posuere, tellus eget viverra mattis, erat tellus porta mi, at facilisis sem nibh non urna. Phasellus quis turpis quis mauris suscipit vulputate. Sed interdum lacus non velit. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae.

Vivamus vehicula leo a justo. Quisque nec augue. Morbi mauris wisi, aliquet vitae, dignissim eget, sollicitudin molestie, ligula. In dictum enim sit amet risus. Curabitur vitae velit eu diam rhoncus hendrerit. Vivamus ut elit. Praesent mattis ipsum quis turpis. Curabitur rhoncus neque eu dui.

Etiam vitae magna. Nam ullamcorper. Praesent interdum bibendum magna. Quisque auctor aliquam dolor. Morbi eu lorem et est porttitor fermentum. Nunc egestas arcu at tortor varius viverra. Fusce eu nulla ut nulla interdum consectetuer. Vestibulum gravida. Morbi mattis libero sed est.

Nam quis enim. Quisque ornare dui a tortor. Fusce consequat lacus pellentesque metus. Duis euismod. Duis non quam. Maecenas vitae dolor in ipsum auctor vehicula. Vivamus nec nibh eget wisi varius pulvinar. Cras a lacus. Etiam et massa. Donec in nisl sit amet dui imperdiet vestibulum. Duis porttitor nibh id eros.

Mauris consectetuer, wisi eu lobortis scelerisque, urna nibh feugiat quam, id congue eros justo eget orci. Ut tellus. Maecenas mattis sapien sed eros. Aliquam quis lectus. Donec nec massa ac turpis semper cursus. Etiam consectetuer ante vel odio. Aliquam tincidunt felis non dolor. Cras id augue ut nisl pretium placerat. Phasellus sapien sapien, pharetra sed, aliquam nec, suscipit a, nibh. Suspendisse risus. Nulla ut mi eget tellus sollicitudin euismod. Vestibulum malesuada malesuada dui. Ut at est ac dui aliquam sagittis. Aliquam erat volutpat.

Curabitur ullamcorper est in mauris. Praesent ac massa. Quisque enim odio, lobortis nec, mattis ut, luctus et, mauris. Mauris eu risus. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Duis eu ligula. Nulla vehicula leo tincidunt erat. Maecenas et nunc. Sed ut sapien. Vestibulum in est. Vestibulum rhoncus.

Donec metus metus, condimentum eu, accumsan nec, vulputate non, purus. Vestibulum ullamcorper vehicula sapien. Mauris risus odio, hendrerit ac, congue ac, ullamcorper at, odio. Aenean leo justo, commodo vitae, placerat blandit, malesuada vel, sem. Donec sit amet ante eget mauris adipiscing sollicitudin. Curabitur posuere sem et leo. Nulla ultricies mauris. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Fusce sollicitudin augue vel tellus. Vivamus mauris eros, pharetra vel, lacinia pretium, egestas a, nibh. Morbi a ligula.

Donec vitae turpis. Suspendisse porttitor. Mauris aliquam purus vitae tellus. Morbi metus diam, tempus ac, cursus ut, ultricies quis, nulla. Praesent nec justo. In lobortis. Donec nec lectus a neque laoreet rhoncus. Quisque in risus nec wisi lacinia ullamcorper. In placerat. Proin facilisis sollicitudin libero. Integer eget neque et pede placerat aliquet. Aliquam purus nulla, pulvinar ut, facilisis quis, sodales sed, magna. Curabitur nulla lectus, rutrum id, bibendum ut, sagittis eget, diam. Sed porta dolor eget est. Integer hendrerit orci. In hac habitasse platea dictumst.

Ut facilisis. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Sed pellentesque, turpis sit amet aliquet porta, risus odio venenatis felis, at porta tellus lacus vitae nisl. Donec augue. Quisque consequat, pede laoreet pellentesque posuere, urna sapien tempor justo, eu aliquam tortor nunc id mauris. Fusce pretium, purus facilisis consequat mattis, ligula leo pretium mauris, ac suscipit augue sapien sit amet ipsum. Praesent et ligula eget tortor dapibus blandit. Duis rutrum felis eget dolor. Vestibulum quis elit. Integer dignissim, velit at scelerisque congue, ipsum nulla dignissim dolor, lacinia scelerisque neque erat a mi. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Quisque ipsum lectus, euismod et, lacinia eu, iaculis eu, pede. Etiam justo quam, cursus ut, vulputate vel, feugiat ut, eros. Fusce eleifend mollis ipsum.

Nulla facilisi. Nunc nec elit. Integer ornare convallis tortor. Proin ac diam. In est sapien, laoreet euismod, mattis a, tincidunt at, risus. Vivamus risus. Vestibulum aliquam, urna aliquam porttitor accumsan, nulla tortor ullamcorper elit, ut consequat augue purus sit amet libero. Vivamus nisl lacus, commodo vel, dignissim ut, vestibulum id, pede. Curabitur malesuada hendrerit libero. Mauris quis dolor in tellus varius posuere. Sed vulputate elit at wisi. Fusce vitae neque. Nulla consectetuer, nunc ac eleifend laoreet, mi nulla commodo wisi, vel faucibus ligula lectus ut arcu. Vivamus hendrerit.

Sed varius, nulla vitae tincidunt lobortis, nibh ipsum sollicitudin libero, et commodo tellus massa in neque. Nulla facilisi. Aenean nec lectus. Aliquam fermentum. Duis ut magna et augue interdum gravida. Morbi elit. Fusce malesuada tempus ipsum. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Mauris iaculis enim non metus. Nullam dui magna, congue et, suscipit sed, aliquam vel, turpis. Quisque ultricies.

Suspendisse feugiat sapien laoreet ante. Integer fringilla, erat eget adipiscing ultrices, nibh dui sollicitudin nunc, in lobortis arcu odio vitae erat. Fusce bibendum ultricies lacus. Mauris eleifend ligula a ante. Etiam faucibus cursus pede. Mauris enim eros, malesuada eu, mattis sit amet, blandit in, nulla. Fusce sit amet purus id mi posuere tincidunt. Mauris sit amet quam vitae quam semper accumsan. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Nam a justo at quam accumsan euismod. Duis tincidunt tristique risus. Ut vel nibh vel libero varius malesuada. In hac habitasse platea dictumst. Morbi sagittis mattis lorem. Pellentesque metus tellus, rutrum vitae, malesuada et, pharetra accumsan, ante. Quisque ac metus ac nisl gravida pellentesque. Sed dapibus feugiat sapien. Vestibulum nec nunc eget sem aliquam lobortis. Suspendisse aliquam quam quis metus.

Suspendisse in odio. In elit diam, cursus vitae, venenatis in, molestie in, leo. Cras ornare. Nulla libero. Phasellus feugiat mattis libero. Sed vehicula aliquam ligula. Nullam lacinia, felis vel dignissim sodales, enim lectus lobortis diam, quis nonummy mauris odio auctor tortor. Integer in dui nec lacus bibendum ultrices. Etiam odio elit, aliquam et, porttitor id, interdum cursus, elit. Nulla eleifend tempor mauris. In vel arcu quis pede laoreet vulputate.

Morbi pharetra magna a lorem. Cras sapien. Duis porttitor vehicula urna. Phasellus iaculis, mi vitae varius consequat, purus nibh sollicitudin mauris, quis aliquam felis dolor vel elit. Quisque neque mi, bibendum non, tristique convallis, congue eu, quam. Etiam vel felis. Quisque ac ligula at orci pulvinar rutrum. Donec mi eros, sagittis eu, consectetuer sed, sagittis sed, lorem. Nunc sed eros. Nullam pellentesque ante quis lectus. Vivamus lacinia, sapien vel fermentum placerat, purus nisl aliquet odio, et porta wisi dui nec nunc. Fusce porta cursus libero.

Quisque eu mi a augue mollis posuere. Donec tincidunt, lorem at vestibulum pulvinar, felis purus nonummy urna, at accumsan purus dui nec leo. Praesent tortor turpis, vehicula in, aliquet ut, dignissim ac, leo. Curabitur sagittis mi id eros. In magna. Sed vitae elit facilisis elit semper sollicitudin. Curabitur convallis tempor nulla. Nullam non turpis a pede sagittis ultrices. Etiam vulputate pede in ligula. Sed a ante id metus pellentesque suscipit. Sed adipiscing justo vitae sapien. Nunc posuere, pede ullamcorper gravida egestas, justo libero tincidunt arcu, vitae pellentesque arcu leo ut mauris. Pellentesque auctor mauris sit amet elit luctus fringilla. Cras sed wisi. Morbi luctus enim vitae tellus. Vivamus venenatis sodales libero.

In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse potenti. Nulla pretium sem sit amet nisl. Nulla facilisi. Sed aliquam, turpis sed hendrerit gravida, nunc metus aliquam urna, eget pharetra nibh urna nec lectus. Duis in nisl a nisl commodo facilisis. Nunc placerat risus sed leo. Duis pellentesque porta libero. Praesent et enim. Aenean ullamcorper, ante sit amet fermentum mollis, ligula metus laoreet magna, accumsan accumsan nibh wisi at wisi. Nam tincidunt tempor neque. Maecenas dolor. Donec interdum nisl. Aliquam quam libero, interdum quis, volutpat sed, semper ut, eros. Pellentesque sodales auctor quam. Nullam suscipit massa nec elit. Nullam vulputate.

Aliquam a nulla. Suspendisse suscipit. Etiam lectus ante, interdum sit amet, euismod venenatis, condimentum eu, urna. Etiam at turpis. Cras quis ligula. Cras varius, sapien non pellentesque bibendum, mauris wisi sodales sem, ac commodo mauris neque non felis. Sed sollicitudin tincidunt arcu. Nullam vel lectus sit amet magna tincidunt tempor. Phasellus a ante. Donec et diam.

Proin sit amet augue. Praesent lacus. Donec a leo. Ut turpis ante, condimentum sed, sagittis a, blandit sit amet, enim. Integer sed elit. In ultricies blandit libero. Proin molestie erat dignissim nulla convallis ultrices. Aliquam in magna. Etiam sollicitudin, eros a sagittis pellentesque, lacus odio volutpat elit, vel tincidunt felis dui vitae lorem. Etiam leo. Nulla et justo.

Integer interdum varius diam. Nam aliquam velit a pede. Vivamus dictum nulla et wisi. Vestibulum a massa. Donec vulputate nibh vitae risus dictum varius. Nunc suscipit, nunc nec facilisis convallis, lacus ligula bibendum nulla, ac sollicitudin sapien nisl fermentum velit. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Nullam commodo dui ut augue molestie scelerisque. Sed aliquet rhoncus tortor. Fusce laoreet, turpis a facilisis tristique, leo mauris accumsan tellus, vitae ornare lacus pede sit amet purus. Sed dignissim velit vitae ligula. Sed sit amet diam sit amet arcu luctus ullamcorper.

Duis quis velit id elit facilisis luctus. Donec nec elit. Quisque ullamcorper arcu ac felis. Phasellus leo. Pellentesque consequat consequat purus. Ut vel justo at pede facilisis tempor. Integer tempus blandit dolor. Donec eget neque sed elit ultricies molestie. Cras cursus viverra tortor. Cras commodo condimentum diam. Pellentesque interdum malesuada wisi. Suspendisse eu quam. Donec consectetuer. Suspendisse wisi purus, vestibulum at, vehicula vel, congue a, eros. Nulla vulputate dolor at purus.

Suspendisse ac diam sed dui adipiscing pretium. Donec ullamcorper, sapien nec tempor venenatis, enim felis euismod pede, ut auctor lacus lectus sit amet diam. Vestibulum rutrum sem ut ante. Nulla eros. Quisque vitae nisl eget tellus feugiat volutpat. Nam id neque eu quam sodales vehicula. Nam dapibus, nulla eu iaculis placerat, pede est volutpat purus, id iaculis elit elit vel mauris. Donec dui. In hac habitasse platea dictumst. Nunc non quam. Proin euismod egestas eros. Mauris nisl. Sed neque. Phasellus bibendum. Proin ut purus in eros faucibus auctor.

Fusce mollis dui eu leo. Sed sapien augue, porta at, posuere ut, ultrices molestie, est. Vivamus quis pede nec erat placerat tincidunt. Aenean odio dui, facilisis non, vehicula et, bibendum a, libero. Etiam leo turpis, venenatis eleifend, nonummy sit amet, aliquam non, mi. Maecenas eget mi. Sed nec diam. Integer orci tellus, pellentesque nec, bibendum quis, sodales ut, nibh. Duis laoreet aliquet orci. Curabitur sit amet sem sit amet nibh fermentum faucibus. Donec adipiscing, ipsum id fringilla convallis, elit massa cursus augue, at lobortis massa augue nec ligula. Proin ac lacus.

Nunc id nulla nec mauris iaculis rutrum. Nunc nisl. Integer mi. Praesent lorem neque, egestas at, molestie in, faucibus et, eros. Sed rutrum, ante vitae aliquet tincidunt, diam elit auctor risus, eu elementum purus turpis eu elit. Proin ac orci. Integer varius, urna non sollicitudin consequat, massa libero pharetra erat, et venenatis dui orci eget purus. Aliquam iaculis est eget ipsum. Ut volutpat velit. Phasellus fringilla. Aliquam mollis tellus vel odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Vestibulum gravida sapien sed diam dictum pharetra. Nulla ac odio. Duis vitae metus ut purus feugiat interdum. Duis eros enim, tincidunt ac, venenatis et, dignissim id, lacus. Curabitur sagittis dolor nec augue. Sed ultricies mauris. Donec semper, enim eu vestibulum placerat, justo risus eleifend quam, ac semper velit pede convallis arcu.

Pellentesque tempus. Fusce tempor euismod nulla. Integer metus quam, semper sit amet, pellentesque sed, ornare sit amet, pede. Sed viverra. Aliquam erat volutpat. Donec tristique. In ac pede ut tortor mattis blandit. Phasellus a nunc. Integer metus. Sed malesuada gravida arcu. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit.

Phasellus suscipit placerat neque. Duis rutrum. Quisque enim. Proin et erat at augue aliquam aliquam. Mauris porttitor imperdiet lectus. Proin egestas faucibus risus. Praesent pharetra consequat odio. Fusce sed felis et nulla tempor elementum. Nulla eu turpis. Proin posuere. Nullam nonummy nulla sed nulla volutpat consectetuer. Vivamus vehicula accumsan eros. Fusce ullamcorper. Phasellus vehicula consequat mauris. Sed vitae purus. Sed accumsan, felis suscipit auctor fermentum, odio turpis vestibulum risus, vitae mattis metus neque non pede.

Suspendisse mollis erat et risus. Vestibulum et odio eu nisl malesuada dapibus. Morbi ac tortor et magna tincidunt ullamcorper. Ut pellentesque fermentum mi. Etiam sed neque sit amet leo consectetuer sagittis. Nulla facilisi. Sed lobortis erat vitae nulla. Duis bibendum ipsum et mi scelerisque dapibus. Fusce nonummy vestibulum orci. Donec a nisl. Integer ac nibh. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Aenean nec nunc sed dui lobortis vestibulum. Praesent metus ligula, auctor vitae, lacinia sed, hendrerit a, felis. Etiam sapien. Proin et sem vitae dolor sodales venenatis. Integer luctus aliquam risus.

Maecenas mi massa, fermentum eu, venenatis et, cursus id, ipsum. Morbi vehicula justo faucibus mauris. Donec non neque. Fusce id mi ut neque tincidunt posuere. Suspendisse quis enim. Cras porttitor. Sed quis velit. Aliquam vel augue at wisi blandit suscipit. Duis ut justo. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Etiam bibendum wisi quis augue. Nulla lorem odio, sollicitudin vitae, vehicula nec, dapibus ultricies, purus. In vitae tellus at odio cursus congue. Quisque tincidunt tempus metus. Aenean et nulla nec dolor dapibus ultricies. Phasellus commodo vulputate arcu. Sed enim. Phasellus quis leo. Aliquam iaculis, turpis nec aliquet rutrum, pede risus porta diam, id ullamcorper erat est sed eros. Fusce ornare.

Suspendisse porta, dolor sed fringilla ultrices, augue mauris gravida dolor, vel sollicitudin magna dui sit amet nunc. Mauris mollis condimentum risus. Integer ipsum. Quisque malesuada, erat ac dictum pulvinar, magna nisl fermentum ligula, quis euismod mauris felis non diam. Nullam sapien turpis, rutrum vel, condimentum ac, bibendum vulputate, nulla. Vestibulum tortor ipsum, fermentum egestas, placerat ut, vulputate et, wisi. Aliquam erat volutpat. Donec consequat, ligula sit amet tincidunt aliquam, nunc lorem sagittis nunc, a ullamcorper erat ante ac felis. Donec eleifend. Nullam quam leo, lobortis non, condimentum at, tempus consectetuer, orci. Quisque ut lorem. Donec nisl. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Donec porta, libero eget feugiat posuere, felis arcu pulvinar odio, vel dapibus enim dui nec turpis.

Duis leo. Cras nec odio. Nullam pretium lacinia est. Fusce aliquet, metus et vestibulum lobortis, ante erat vestibulum eros, eu sodales eros turpis id massa. Quisque est. Vivamus eu lacus. Nulla nisl. Nam eros. Aliquam sit amet neque vel magna dictum ultricies. Praesent magna mauris, sollicitudin ac, commodo eu, bibendum sit amet, lectus. Suspendisse potenti. Fusce congue leo quis libero nonummy adipiscing. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Nunc a orci. Ut at erat sit amet nunc scelerisque malesuada. Phasellus odio nisl, porta eget, laoreet nec, vehicula non, risus. Etiam dolor mauris, consectetuer eget, tincidunt sed, egestas quis, neque. Ut egestas ante ac libero. Proin mattis volutpat metus.

Sed tempor metus eget wisi. Duis cursus. Nam nunc. Nulla placerat wisi sed est. Aenean risus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Proin erat dolor, ultricies a, rutrum sed, posuere eget, metus. Donec sagittis nunc ac tortor. Aliquam erat volutpat. Curabitur consectetuer, augue nec viverra eleifend, dolor dolor volutpat orci, dapibus pellentesque eros pede a arcu. Nullam augue. Etiam eget nulla vel mi porta hendrerit. Phasellus cursus scelerisque tortor. Maecenas ut leo.

Donec libero. Quisque vitae est quis dui bibendum suscipit. Fusce leo felis, sagittis non, vehicula ac, ultricies vitae, diam. Aenean congue libero et metus. Nulla convallis libero a lacus. Donec hendrerit lorem sit amet leo. Mauris libero. Pellentesque pulvinar molestie dolor. Proin nibh mauris, ornare at, pretium sit amet, porttitor vel, mi. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas.

Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Aliquam interdum porttitor tortor. Donec ultricies justo eget sapien. Proin ac est. Aliquam erat volutpat. In tempus scelerisque ligula. Morbi scelerisque urna. Duis ac nisl. Donec sed leo. Fusce posuere orci mollis nunc. Sed arcu enim, pharetra nec, aliquam eu, consectetuer sit amet, eros. Sed id enim. Etiam mattis est at elit. Pellentesque est risus, pellentesque nec, dignissim vitae, egestas vitae, sapien. Maecenas et eros non libero iaculis facilisis. Mauris porttitor tempor justo. Sed sollicitudin neque nec libero.

Mauris ac ipsum. Duis ultrices erat ac felis. Donec dignissim luctus orci. Fusce pede odio, feugiat sit amet, aliquam eu, viverra eleifend, ipsum. Fusce arcu massa, posuere id, nonummy eu, pulvinar ut, wisi. Sed dui.

Vestibulum nunc nisl, rutrum quis, pharetra eget, congue sed, dui. Donec justo neque, euismod eget, nonummy adipiscing, iaculis eu, leo. Duis lectus. Morbi pellentesque nonummy dui.

Aenean sem dolor, fermentum nec, gravida hendrerit, mattis eget, felis. Nullam non diam vitae mi lacinia consectetuer. Fusce non massa eget quam luctus posuere. Aenean vulputate velit. Quisque et dolor. Donec ipsum tortor, rutrum quis, mollis eu, mollis a, pede. Donec nulla. Duis molestie. Duis lobortis commodo purus. Pellentesque vel quam. Ut congue congue risus. Sed ligula. Aenean dictum pede vitae felis. Donec sit amet nibh. Maecenas eu orci. Quisque gravida quam sed massa.

Nunc euismod, mauris luctus adipiscing pellentesque, augue ligula pellentesque lectus, vitae posuere purus velit a pede. Phasellus leo mi, egestas imperdiet, blandit non, sollicitudin pharetra, enim. Nullam faucibus tellus non enim. Sed egestas nunc eu eros. Nunc euismod venenatis urna. Phasellus ullamcorper. Vivamus varius est ac lorem. In id pede eleifend nibh consectetuer faucibus. Phasellus accumsan euismod elit. Etiam vitae elit. Integer imperdiet nibh. Morbi imperdiet orci euismod mi.

Donec tincidunt tempor metus. Aenean egestas cursus nulla. Fusce ac metus at enim viverra lacinia. Vestibulum in magna non eros varius suscipit. Nullam cursus nibh. Mauris neque. In nunc quam, convallis vitae, posuere in, consequat sed, wisi. Phasellus bibendum consectetuer massa. Curabitur quis urna. Pellentesque a justo.

In sit amet dui eget lacus rutrum accumsan. Phasellus ac metus sed massa varius auctor. Curabitur velit elit, pellentesque eget, molestie nec, congue at, pede. Maecenas quis tellus non lorem vulputate ornare. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Etiam magna arcu, vulputate egestas, aliquet ut, facilisis ut, nisl. Donec vulputate wisi ac dolor. Aliquam feugiat nibh id tellus. Morbi eget massa sit amet purus accumsan dictum. Aenean a lorem. Fusce semper porta sapien.

Curabitur sit amet libero eget enim eleifend lacinia. Vivamus sagittis volutpat dui. Suspendisse potenti. Morbi a nibh eu augue fermentum posuere. Curabitur elit augue, porta quis, congue aliquam, rutrum non, massa. Integer mattis mollis ipsum. Sed tellus enim, mattis id, feugiat sed, eleifend in, elit. Phasellus non purus sed elit viverra rhoncus. Vestibulum id tellus vel sem imperdiet congue. Aenean in arcu. Nullam urna justo, imperdiet eget, volutpat vitae, semper eu, quam. Sed turpis dui, porttitor ut, egestas ac, condimentum non, wisi. Fusce iaculis turpis eget dui. Quisque pulvinar est pellentesque leo. Ut nulla elit, mattis vel, scelerisque vel, blandit ut, justo. Nulla feugiat risus in erat.

Curabitur hendrerit. Morbi fringilla enim quis nunc. Phasellus at dui. Donec commodo augue at nunc. Nunc in sapien et magna mollis sagittis. Morbi eu elit. Phasellus lacus. Donec a quam. Etiam pulvinar sapien. Sed nibh magna, viverra vitae, auctor eget, eleifend nec, lorem. Curabitur fringilla dui a odio. Nunc semper condimentum arcu. Curabitur vitae lectus sit amet turpis pretium condimentum. Nullam imperdiet mattis neque. Proin eget magna porta erat rhoncus consectetuer. Aenean pulvinar erat vitae mi.

In eget turpis non tortor iaculis tincidunt. Ut egestas feugiat magna. Duis enim nibh, gravida vel, nonummy non, sollicitudin ac, enim. Sed in tortor sed tellus eleifend cursus. Morbi a dolor at nibh molestie faucibus. Duis sed wisi. Duis fringilla, dui et malesuada dignissim, elit eros dictum lacus, rhoncus imperdiet pede elit nec tellus. Aenean at ligula eget nulla imperdiet faucibus. Quisque vestibulum lorem ac leo. Sed laoreet neque ut magna.

Aenean eget justo id lorem congue tristique. Maecenas sit amet nunc. Aenean bibendum risus. Nam convallis, mi sed ultrices sodales, metus nibh placerat dui, eu hendrerit erat enim vel libero. Duis placerat sem vitae wisi imperdiet condimentum. Aliquam pellentesque dui ac diam eleifend venenatis. Nulla facilisis posuere sapien. Cras euismod. Praesent ut enim. Aliquam ut ipsum quis urna interdum vehicula. Fusce eget sem. Nullam accumsan ullamcorper turpis.

Integer posuere, metus ac rhoncus auctor, mi tellus scelerisque nunc, venenatis elementum tortor lorem eu erat. Sed consectetuer risus vitae orci.

Nullam tortor mauris, interdum at, imperdiet in, convallis eget, massa. Aliquam suscipit, magna nec blandit volutpat, lectus neque suscipit nunc, sit amet cursus nisl erat eget risus. Vestibulum leo lectus, accumsan ut, pharetra vel, elementum sed, quam. Maecenas condimentum orci at enim. Maecenas ut nunc. Vivamus pede. Integer vel purus vel mi mollis vestibulum. Sed laoreet ultricies nibh. Suspendisse non nisl quis ligula fermentum facilisis. Vestibulum sem nibh, porttitor et, fermentum a, ultricies id, augue.

In accumsan convallis metus. Aenean est. Donec pharetra porta odio. Duis nunc nisl, imperdiet ac, tincidunt vitae, varius sit amet, felis. Curabitur wisi. Ut iaculis, nunc in lacinia egestas, elit enim tincidunt turpis, at luctus ipsum augue condimentum metus. Aenean lorem wisi, cursus sit amet, mollis nec, porta ac, augue. Vivamus massa. Praesent rhoncus imperdiet orci. Aenean pharetra dolor ut sapien. Maecenas egestas augue semper dolor.

Vestibulum at lectus. Vestibulum dapibus placerat magna. Suspendisse dolor urna, condimentum sit amet, euismod a, adipiscing a, enim. Aliquam erat volutpat. Donec imperdiet dolor non mi. Phasellus magna metus, dictum sit amet, laoreet non, dictum vel, dui. Suspendisse potenti. Nunc turpis risus, porta vel, pharetra id, eleifend vitae, justo. Duis pulvinar dolor sit amet urna. Integer eu eros. Nulla facilisi. Duis dui. Nullam vitae quam. Morbi a nunc in elit sodales euismod. Nunc sed orci. Etiam malesuada metus vitae felis. Suspendisse imperdiet velit in tellus.

Nullam elit orci, condimentum vitae, accumsan quis, gravida non, velit. Morbi pellentesque accumsan elit. Aenean est purus, eleifend ac, dictum at, dignissim sed, dolor. Vestibulum volutpat sapien quis augue. Maecenas vulputate accumsan sapien. Nam mattis, lacus non iaculis aliquet, mi elit varius lectus, eu malesuada dolor nunc at wisi. Aliquam ligula. Mauris nisl elit, molestie vitae, gravida sit amet, facilisis convallis, enim. Sed urna. Praesent et augue. Fusce pellentesque. Maecenas varius orci eget nisl. Donec tempor rhoncus turpis. Integer nibh. Cras metus erat, tincidunt et, scelerisque quis, bibendum sed, dui. Suspendisse potenti.

Integer ac diam. Nullam porttitor dolor eget metus. Nulla sed metus quis tortor lacinia tempor. Mauris mauris dui, faucibus vitae, aliquet sit amet, placerat a, ante. Nunc placerat tincidunt neque. Mauris egestas dolor ut ipsum cursus malesuada. Curabitur odio. Nunc lobortis. Sed mattis tempor felis. Mauris dolor quam, facilisis at, bibendum sit amet, rutrum ornare, pede. Suspendisse accumsan sagittis velit. Pellentesque varius laoreet lorem. Vivamus egestas sapien id diam.

Integer viverra, felis ac tempus cursus, neque risus interdum turpis, eget venenatis tellus velit in neque. Nulla feugiat luctus tellus. Nam pulvinar lacus id leo. Vestibulum at ligula. Duis laoreet tincidunt enim. Suspendisse at nisl molestie est laoreet laoreet. Suspendisse euismod metus vel nisl. Aenean ullamcorper imperdiet massa. Aliquam nibh. Donec quis erat. Nunc sodales auctor ante.

Nam quis ante. Nullam interdum quam in eros. Sed eleifend libero eu tellus consequat fermentum. Nullam pellentesque risus ut augue. Vestibulum eu tellus. Integer eleifend suscipit urna. Fusce porttitor leo et odio. Vivamus vehicula justo a nisl. In rutrum, purus ut dictum auctor, dolor velit accumsan dolor, eu convallis augue dui ac lectus. Nullam eleifend pellentesque ligula. Nam quis magna. Donec elementum dapibus erat. Pellentesque vel ipsum nec orci fermentum accumsan. Nunc porta magna eu neque. Nam id erat eu mi aliquet cursus. Morbi ut felis. Vestibulum in ipsum.

Donec vel augue. Morbi a turpis sed libero consequat porta. Quisque lacinia consequat odio. Sed vehicula sollicitudin purus. Vestibulum eget est. In hac habitasse platea dictumst. Sed blandit, tortor a auctor imperdiet, wisi nibh ornare leo, ac dictum nibh enim eu orci. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Aliquam tincidunt ullamcorper justo. Etiam accumsan lacus nec ante. Ut dictum luctus mauris. Ut metus. Maecenas gravida. Proin iaculis. Integer convallis, justo iaculis ullamcorper sollicitudin, lectus neque tincidunt mi, at condimentum sem quam vel diam. Aenean sit amet purus.

Sed justo. Maecenas lacinia, turpis sed commodo congue, odio urna elementum nunc, vitae molestie velit nunc eu sem. Maecenas enim. Proin quis neque nec tortor sollicitudin volutpat. Sed at ante. Sed vitae mauris non ante egestas hendrerit. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. In venenatis facilisis magna. Phasellus purus. Cras quis mauris. Aliquam eget magna. Donec rutrum sagittis mi. Morbi elementum, est sit amet sollicitudin feugiat, orci magna semper risus, eu congue nulla metus vel elit. Nunc tempor ornare mi. Integer justo odio, suscipit tincidunt, fermentum eu, tincidunt et, libero. Vestibulum vestibulum, urna et suscipit imperdiet, nulla ante fermentum erat, at laoreet lorem lectus sed metus. Fusce ante sem, posuere in, vehicula a, posuere sed, ante. Phasellus magna. Maecenas sit amet diam. Nunc at nibh sit amet augue tristique gravida.

Aenean adipiscing auctor est. Morbi quam arcu, malesuada sed, volutpat et, elementum sit amet, libero. Duis accumsan. Curabitur urna. In sed ipsum. Donec lobortis nibh. Duis mattis. Sed cursus lectus quis odio. Phasellus arcu. Praesent imperdiet dui in sapien. Vestibulum tellus pede, auctor a, pellentesque sit amet, vulputate sed, purus. Nunc pulvinar, dui at eleifend adipiscing, tellus nulla placerat massa, sed condimentum nulla tellus sed ligula. Nulla vitae odio sit amet leo imperdiet blandit. In vel massa. Maecenas varius dui at turpis. Sed odio.

Quisque aliquam ipsum sed turpis. Pellentesque laoreet velit nec justo. Nam sed augue. Maecenas rutrum quam eu dolor. Fusce consectetuer. Proin tellus est, luctus vitae, molestie a, mattis et, mauris. Donec tempor. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Duis ante felis, dignissim id, blandit in, suscipit vel, dolor. Pellentesque tincidunt cursus felis. Proin rhoncus semper nulla. Ut et est. Vivamus ipsum erat, gravida in, venenatis ac, fringilla in, quam. Nunc ac augue. Fusce pede erat, ultrices non, consequat et, semper sit amet, urna.

Fusce adipiscing justo nec ante. Nullam in enim. Pellentesque felis orci, sagittis ac, malesuada et, facilisis in, ligula. Nunc non magna sit amet mi aliquam dictum. In mi. Curabitur sollicitudin justo sed quam. Aenean imperdiet. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Donec lacinia nonummy lectus. Proin vel urna. Fusce sit amet orci ac magna iaculis pharetra. Duis sagittis massa in tellus. Aenean vel velit vel felis consectetuer pharetra.

下述命题一般被称为 Eisenstein 判别法 (*Eisenstein criterion*). 当然了, 此命题仅仅是 “f 是不可约的” 的一个充分条件哟.