Learn some basic stuffs of polynomials

Delving into Polynomials

An unpractical guide

Rhodes Island

Amiya

Table of Contents

Preface iii

Delving into Polynomials 1

Prerequisites . . . 2
Definition of Polynomials . . . 30
Division Algorithm . . . 40
Polynomial Equality . . . 44
Derivatives . . . 49
Roots of Polynomials . . . 58
Polynomials over $\mathbb{F}$ . . . 64
Interpolation . . . 74
Generalized Binomial Coefficients . . . 92

Preface

本文是瞎写的。我给本文的另一个名字是 “Re: ゼロから始めるポリノミアルのイントロダクション”。不过想了想, 算了算了。龙鸣日语, 不好意思直接说出来。

这是写给中学生看的。

总是可以去这儿得到本文的最新版本:

`https://gitee.com/septsea/strange-book-zero`

`https://github.com/septsea/strange-book-zero`

就先说到这里。

评注 总算写完 Prerequisites 了。我写这玩意儿花了好久好久啊。先发布再说吧。

June 3, 2021

评注 忘记介绍域是什么东西了。我真是笨蛋啊。

June 3, 2021

Delving into Polynomials

Out of boredom, I wrote the article.

Gohan ni suru? Ofuro ni suru? Sore tomo… wa ta shi?
(Would you like dinner? Would you like a bath? Or… would you like me?)

Prerequisites

您将在本节熟悉一些记号与术语。建议您熟悉本节的内容后学习下节的内容。

在进入小节 Sets 前, 让我们先回顾命题、复数与数学归纳法吧!

定义 能判断真假的话是命题 (*proposition*)。正确的命题称为真命题; 错误的命题称为假命题。当然, 命题也可以用 "对" "错" 形容。

例 根据常识, "日东升西落" 是真命题。类似地, "月自身可发光" 是假命题。

"这是什么?" 不是命题, 因为它没有作出判断。类似地, "请保持安静" 也不是命题, 因为它只是一个祈使句 (*imperative sentence*)。不过, "难道中国不强?" 不但是命题, 它还是正确的, 因为这个反问 (*rhetorical question*) 作出了正确的判断。

"$x > 3$" 不是命题, 因为它不可判断真假。像这种话里有未知元, 且揭秘未知元前不可知此话之真伪的话是开句 (*open sentence*)。

我们会经常遇到 "若 p, 则 q" 的命题。

定义 设 "若 p, 则 q" 是真命题。我们说, p 是 q 的充分条件 (*sufficient condition*), q 是 p 的必要条件 (*necessary condition*)。用符号写出来, 就是

$$p \Rightarrow q \quad \text{or} \quad q \Leftarrow p。$$

例 "若刚下过雨, 则地面潮湿" 是对的。"刚下过雨" 是 "充分的": 根据常识可以知道这一点。"地面潮湿" 是 "必要的": 地面不潮湿, 那么不可能刚下过雨。

评注 我们会遇到形如 "ℓ 的一个必要与充分条件是 r" 的命题。换个说法, 就是 "r 是 ℓ 的一个必要与充分条件"。再分解一下, 就是 "r 是 ℓ 的一个必要条件" 与 "r 是 ℓ 的一个充分条件" 这二个命题。根据定义, 这相当于 "若 ℓ, 则 r" 与 "若 r, 则 ℓ" 都是真命题。也就是说, ℓ 跟 r 是等价的 (*equivalent*)。用符号写出来, 就是

$$p \Leftrightarrow q。$$

证明 "ℓ 的一个必要与充分条件是 r" 时, 我们会把它分为必要性 (*necessity*) 与充分性 (*sufficiency*) 二个部分。证明必要性, 就是证明 "r 是 ℓ 的一个必要条件", 也就是证明 "若 ℓ, 则 r" 是对的; 换句话说, 证明左边可以推出右边。证明充分性, 就是证明 "r 是 ℓ 的一个充分条件", 也就是证明 "若 r, 则 ℓ" 是对的; 换句话说, 证明右边可以推出左边。

命题就介绍到这里。下面回顾复数基础。

定义 复数 ($complex\ number$) 是形如 $x + y\mathrm{i}$ (x, y 是实数) 的数。

评注 可将 $x + y\mathrm{i}$ 写为 $x + \mathrm{i}y$。

定义 设 a, b, c, d 是实数。则

$$a + b\mathrm{i} = c + d\mathrm{i} \iff a = c \text{ and } b = d。$$

评注 我们把形如 $a + 0\mathrm{i}$ 的复数写为 a, 并认为 $a + 0\mathrm{i}$ 是实数。反过来, a 也可以认为是复数 $a + 0\mathrm{i}$。

形如 $0+b\mathrm{i}$ 的复数可写为 $b\mathrm{i}$。按照习惯, $1\mathrm{i}$ 可写为 i, 且 $-1\mathrm{i}$ 可写为 $-\mathrm{i}$。

定义 复数的加、乘法定义为

$$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i},$$
$$(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}。$$

由此可见, 二个复数的和 (或积) 还是复数。

例 我们计算 i 与自己的积:

$$\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = (0 + 1\mathrm{i})(0 + 1\mathrm{i}) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)\mathrm{i} = -1。$$

简单地说, 就是

$$\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}^2 = -1。$$

设 z_1, z_2, z_3 是任意三个复数 (不必不同)。设 $z_1 = a + b\mathrm{i}$。

命题 复数的加法适合如下运算律:
(i) 交换律: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
(ii) 结合律: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
(iii) $0 + z_1 = z_1$;
(iv) 存在复数 $w = (-a) + (-b)\mathrm{i}$ 使 $w + z_1 = 0$。
通常把适合 (iv) 的 w 记为 $-z_1$, 且称之为 z_1 的相反数。

评注 $(-a) + (-b)\mathrm{i}$ 可写为 $-a - b\mathrm{i}$。

定义 复数的减法定义为

$$z_2 - z_1 = z_2 + (-z_1)。$$

命题 复数的乘法适合如下运算律:
(v) 交换律: $z_1z_2 = z_2z_1$;
(vi) 结合律: $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$;
(vii) $1z_1 = z_1$;
(viii) $(-1)z_1 = -z_1$;
(ix) 若 $z_1 \neq 0$, 则存在复数 $v = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$ 使 $vz_1 = 1$。
通常把适合 (ix) 的 v 记为 z_1^{-1}, 且称之为 z_1 的倒数。

定义 复数的除法定义为

$$\frac{z_2}{z_1} = z_2z_1^{-1}。$$

命题 复数的加法与乘法还适合分配律:

$$\begin{aligned}z_1(z_2+z_3) &= z_1z_2 + z_1z_3,\\(z_2+z_3)z_1 &= z_2z_1 + z_3z_1。\end{aligned}$$

评注 a, $b\mathrm{i}$, c, $d\mathrm{i}$ 都可以看成是复数。这样

$$\begin{aligned}(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i}) &= (a+b\mathrm{i})c + (a+b\mathrm{i})(d\mathrm{i})\\&= ac + b\mathrm{i}c + ad\mathrm{i} + b\mathrm{i}d\mathrm{i}\\&= ac + bc\mathrm{i} + ad\mathrm{i} + bd\mathrm{i}^2\\&= (ac+bd\mathrm{i}^2) + (ad+bc)\mathrm{i}\\&= (ac-bd) + (ad+bc)\mathrm{i}。\end{aligned}$$

也就是说, 我们不必死记复数的乘法规则: 只要用运算律与 $\mathrm{i}^2 = -1$ 即可召唤它。

定义 $a + b\mathrm{i}$ 的共轭 (*conjugate*) 是复数 $a - b\mathrm{i}$ 。复数 z_1 的共轭可写为 $\overline{z_1}$。

命题 共轭适合如下性质:
(x) $\overline{z_1} + z_1$ 与 $\mathrm{i}\cdot(\overline{z_1} - z_1)$ 都是实数;
(xi) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$;
(xii) $\overline{\overline{z_1}} = z_1$;
(xiii) $\overline{z_1}z_1$ 是正数, 除非 $z_1 = 0$。

定义 $|z_1| = \sqrt{\overline{z_1}z_1}$ 称为 z_1 的绝对值 (*absolute value*)。

命题 绝对值适合如下性质:

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|。$$

定义 设 n 是整数。若 $n=0$, 则说 $z_1^n=1$。若 $n\geq 1$, 则说 z_1^n 是 n 个 z_1 的积。若 $z_1\neq 0$, 且 $n\leq -1$, 则说 z_1^n 是 $\frac{1}{z_1^{-n}}$。

z_1^n 的一个名字是 z_1 的 n 次幂 ($power$)。

命题 设 m,n 是非负整数。幂适合如下性质:

$$z_1^m z_1^n = z_1^{m+n}, \quad (z_1^m)^n = z_1^{mn}, \quad (z_1 z_2)^m = z_1^m z_2^m。$$

若 z_1 与 z_2 都不是 0, 则 m,n 允许取全体整数。

复数就先回顾到这里。下面回顾数学归纳法。

评注 数学归纳法 ($mathematical\ induction$) 是一种演绎推理。

命题 设 $P(n)$ 是跟整数 n 相关的命题。设 $P(n)$ 适合:

(i) $P(n_0)$ 是正确的;

(ii) 任取 $\ell\geq n_0$, 必有 "若 $P(\ell)$ 是正确的, 则 $P(\ell+1)$ 是正确的" 成立。

则任取不低于 n_0 的整数 n, 必有 $P(n)$ 是正确的。

评注 可以这么理解数学归纳法。假设有一排竖立的砖。如果 (i) 第一块砖倒下, 且 (ii) 前一块砖倒下可引起后一块砖倒下, 那么所有的砖都可以倒下, 是吧? 由此也可以看出, (i) (ii) 缺一不可。第一块砖不倒, 后面的砖怎么倒下呢?[†] 如果前一块砖倒下时后一块砖不一定能倒下, 那么会在某块砖后开始倒不下去。

例 我们试着用数学归纳法证明, 对任意正整数 n,

$$P(n): \qquad 0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}。$$

既然想证明对任意正整数 n, $P(n)$ 都成立, 我们取 $n_0=1$。然后验证 (i): 左边只有 0 这一项, 右边是 $\frac{1\cdot(1-1)}{2}=0$。所以 (i) 适合。

再验证 (ii)。(ii) 是说, 要由 $P(\ell)$ 推出 $P(\ell+1)$。所以, 假设

$$0+1+\cdots+(\ell-1)=\frac{\ell(\ell-1)}{2}, \quad \ell\geq n_0。$$

因为

$$\begin{aligned} 0+1+\cdots+(\ell-1)+\ell &= (0+1+\cdots+(\ell-1))+\ell \\ \text{(IH)} \qquad &= \frac{\ell(\ell-1)}{2}+\ell \end{aligned}$$

[†] 当然, 也可以从第 n 块砖开始倒下 ($n>1$), 但这就照顾不到第一块了。

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\ell(\ell-1)}{2} + \frac{\ell \cdot 2}{2} \\
&= \frac{\ell(\ell+1)}{2} \\
&= \frac{(\ell+1)((\ell+1)-1)}{2},
\end{aligned}
$$

故我们由 $P(\ell)$ 推出了 $P(\ell+1)$。我们在哪儿用到了 $P(\ell)$ 呢? 我们在标了 (IH) 的那一行用了 $P(\ell)$。这样的假设称为归纳假设 ($induction\ hypothesis$)。

既然 (i) (ii) 都适合, 那么任取不低于 $n_0 = 1$ 的整数 n, $P(n)$ 都对。

我们用二个具体的例说明, (i) (ii) 缺一不可。

例 我们 "证明", 对任意正整数 n,

$$
P'(n): \qquad 0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} + 1。
$$

这里, n_0 自然取 1。

(i) 不适合: 显然 $n = 1$ 时, 左侧是 0 而右侧是 1。再看 (ii)。假设

$$
0 + 1 + \cdots + (\ell-1) = \frac{\ell(\ell-1)}{2} + 1, \quad \ell \geq n_0。
$$

由于

$$
\begin{aligned}
0 + 1 + \cdots + (\ell-1) + \ell &= (0 + 1 + \cdots + (\ell-1)) + \ell \\
\text{(``IH'')} \qquad &= \frac{\ell(\ell-1)}{2} + 1 + \ell \\
&= \frac{\ell(\ell-1)}{2} + \frac{\ell \cdot 2}{2} + 1 \\
&= \frac{\ell(\ell+1)}{2} + 1 \\
&= \frac{(\ell+1)((\ell+1)-1)}{2} + 1,
\end{aligned}
$$

故我们由 $P'(\ell)$ "推出" 了 $P'(\ell+1)$。我们也在 ("IH") 处用到了 "归纳假设"。那么 $P'(n)$ 就是正确的吗? 当然不是! 前面我们知道,

$$
0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2},
$$

也就是说, $P'(n)$ 的右侧的 " $+1$" 使其错误。当然, 一般我们很少会犯这样的错误: 毕竟, 一开始就不对的东西就不用看下去了。

例 不同的老婆[†]有着不同的发色。但是, 我们用数学归纳法却可以 "证明", 任意的 n ($n \geq 1$) 个老婆有着相同的发色! 称这个命题为 $Q(n)$。这里, n_0 自然取 1。

[†] 一般地, 二次元人会称动画、漫画、游戏、小说中自己喜爱的女性角色为老婆 (*waifu*)。一个二次元人可以有不止一个老婆。

(i) 当 $n = n_0 = 1$ 时, 一个老婆自然只有一种发色。这个时候, 命题是正确的!

(ii) 假设任意的 ℓ ($\ell \geq n_0$) 个老婆有着相同的发色! 随意取 $\ell + 1$ 个老婆。根据假设, 老婆 $1, 2, \cdots, \ell$ 有着相同的发色, 且老婆 $2, \cdots, \ell, \ell+1$ 有着相同的发色。这二组中都有 $2, \cdots, \ell$ 这 $\ell - 1$ 个老婆, 所以老婆 $1, 2, \cdots, \ell, \ell+1$ 有着相同的发色!

根据 (i) (ii), 命题成立。

可是这对吗? 不对。问题出在 (ii)。如果说, 任意二个老婆有着相同的发色, 那任意三个老婆也有着相同的发色。这没问题。可是, 由 $Q(1)$ 推不出 $Q(2)$: 老婆 1 与老婆 2 根本就不重叠呀! (ii) 要求任取 $\ell \geq n_0$, 必有 $Q(\ell)$ 推出 $Q(\ell+1)$。而 $\ell = 1$ 时, (ii) 不对, 因此不能推出 $Q(n)$ 对任意正整数都对。

下面是数学归纳法的一个变体。

命题　设 $P(n)$ 是跟整数 n 相关的命题。设 $P(n)$ 适合:

(i) $P(n_0)$ 是正确的;

(ii)$'$ 任取 $\ell \geq n_0$, 必有 "若 $\ell - n_0 + 1$ 个命题 $P(n_0), P(n_0+1), \cdots, P(\ell)$ 都是正确的, 则 $P(\ell+1)$ 是正确的" 成立。

则任取不低于 n_0 的整数 n, 必有 $P(n)$ 是正确的。

评注　可以由下面的推理看出, 上面的数学归纳法变体是正确的。

作命题 $Q(n)$ ($n \geq n_0$) 为 "$n - n_0 + 1$ 个命题 $P(n_0), P(n_0+1), \cdots, P(n)$ 都是正确的"。

(i) $P(n_0)$ 是正确的, 所以 $n_0 - n_0 + 1$ 个命题 $P(n_0)$ 是正确的, 也就是 $Q(n_0)$ 是正确的。

(ii) 任取 $\ell \geq n_0$。假设 $Q(\ell)$ 是正确的, 也就是假设 $\ell - n_0 + 1$ 个命题 $P(n_0), P(n_0+1), \cdots, P(\ell)$ 都是正确的。由 (ii)$'$, $P(\ell+1)$ 是正确的。所以, $\ell + 1 - n_0 + 1$ 个命题 $P(n_0), P(n_0+1), \cdots, P(\ell), P(\ell+1)$ 都是正确的。换句话说, $Q(\ell+1)$ 是正确的。

由数学归纳法可知, 任取不低于 n_0 的整数 n, 必有 $Q(n)$ 是正确的。所以, $P(n)$ 是正确的。

另一方面, 这个变体的条件 (ii)$'$ 比数学归纳法的 (ii) 强, 所以若变体正确, 数学归纳法也正确。也就是说, 数学归纳法与其变体是等价的。

以后, "数学归纳法" 既可以指老的数学归纳法 (由 $P(\ell)$ 推 $P(\ell+1)$), 也可以指变体 (由 $P(n_0), P(n_0+1), \cdots, P(\ell)$ 推 $P(\ell+1)$)。

知识就回顾到这里。开始进入集的世界吧!

Sets

定义 集 (set) 是具有某种特定性质的对象汇集而成的一个整体, 其对象称为元 ($element$)。

定义 无元的集是空集 ($empty\ set$)。

评注 一般用小写字母表示元, 大写字母表示集。

定义 一般地, 若集 A 由元 a, b, c, $\cdots$ 作成, 我们写

$$A = \{\, a, b, c, \cdots \}。$$

还有一种记号。设集 A 是由具有某种性质 p 的对象汇集而成, 则记

$$A = \{\, x \mid x \text{ possesses the property } p \,\}。$$

定义 若 a 是集 A 的元, 则写 $a \in A$ 或 $A \ni a$, 说 a 属于 ($to\ belong\ to$) A 或 A 包含 ($to\ contain$) a。若 a 不是集 A 的元, 则写 $a \notin A$ 或 $A \not\ni a$, 说 a 不属于 A 或 A 不包含 a。

例 全体整数作成的集用 $\mathbb{Z}$ (*Zahl*)† 表示。它可以写为

$$\mathbb{Z} = \{\, 0, 1, -1, 2, -2, \cdots, n, -n, \cdots \}。$$

例 全体非负整数作成的集用 $\mathbb{N}$ ($natural$) 表示。它可以写为

$$\mathbb{N} = \{\, x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ and } x \geq 0 \,\}。$$

为了方便, 也可以写为

$$\mathbb{N} = \{\, x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0 \,\}。$$

定义 若任取 $a \in A$, 都有 $a \in B$, 则写 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 说 A 是 B 的子集 ($subset$) 或 B 是 A 的超集 ($superset$)。假如有一个 $b \in B$ 不是 A 的元, 可以用 “真” ($proper$) 形容之。

例 空集是任意集的子集。空集是任意不空的集的真子集。

例 全体有理数作成的集用 $\mathbb{Q}$ ($quotient$) 表示。因为整数是有理数, 所以 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$。因为有理数 $\frac{1}{2}$ 不是整数, 我们说 $\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的真子集。

定义 全体实数作成的集用 $\mathbb{R}$ ($real$) 表示。

† A German word which means *number*.

定义 全体复数作成的集用 $\mathbb{C}$ ($complex$) 表示。不难看出,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}。$$

定义 $\mathbb{F}$ (*field*) 可表示 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 的任意一个。不难看出, $\mathbb{F}$ 适合这几条:

(i) $0 \in \mathbb{F}$, $1 \in \mathbb{F}$, $0 \neq 1$;

(ii) 任取 $x, y \in \mathbb{F}$ $(y \neq 0)$, 必有 $x - y$, $\frac{x}{y} \in \mathbb{F}$。

后面会见到稍详细的论述。

定义 设 $\mathbb{L}$ 是 $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{F}$ 的任意一个。$\mathbb{L}^*$ 表示 $\mathbb{L}$ 去掉 0 后得到的集。不难看出, $\mathbb{L}$ 是 $\mathbb{L}^*$ 的真超集。

定义 若集 A 与 B 包含的元完全一样, 则 A 与 B 是同一集。我们说 A 等于 B, 写 $A = B$。显然

$$A = B \iff A \subset B \text{ and } B \subset A。$$

定义 集 A 与 B 的交 ($intersection$) 是集

$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \text{ and } x \in B \,\}。$$

也就是说, $A \cap B$ 恰由 A 与 B 的公共元作成。

集 A 与 B 的并 ($union$) 是集

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ or } x \in B \,\}。$$

也就是说, $A \cup B$ 恰包含 A 与 B 的全部元。

类似地, 可定义多个集的交与并。

定义 设 A, B 是集。定义

$$A \times B = \{\, (a, b) \mid a \in A,\ b \in B \,\}。$$

$A \times A$ 可简写为 A^2。类似地,

$$A \times B \times C = \{\, (a, b, c) \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C \,\}, \quad A^3 = A \times A \times A。$$

例 设 $A = \{\, 1, 2 \,\}$, $B = \{\, 3, 4, 5 \,\}$。则

$$A \times B = \{\, (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5) \,\}。$$

而

$$B \times A = \{\, (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2) \,\}。$$

评注 一般地, $A \times B \neq B \times A$。假如 A, B 各自有 m, n 个元, 利用一点计数知识可以看出, $A \times B$ 有 mn 个元。

Functions

定义 假如通过一个法则 f, 使任取 $a \in A$, 都能得到唯一的 $b \in B$, 则说这个法则 f 是集 A 到集 B 的一个函数 (*function*)。元 b 是元 a 在函数 f 下的象 (*image*)。元 a 是元 b 在 f 下的一个原象 (*inverse image*)。这个关系可以写为

$$f\colon \quad \begin{aligned} &A \to B, \\ &a \mapsto b = f(a)。\end{aligned}$$

称 A 是定义域 (*domain*), B 是陪域† (*codomain*)。

例 可以把 $\mathbb{R}^2$ 看作平面上的点集。

$$f\colon \quad \begin{aligned} &\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\ &(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

是函数: 它表示点 (x, y) 到点 $(0, 0)$ 的距离。

例 设

$$A = \{\, \mathrm{dinner}, \mathrm{bath}, \mathrm{me} \,\}, \quad B = \{\, 0, 1 \,\}。$$

法则

$$f_1\colon \quad \mathrm{dinner} \mapsto 0, \quad \mathrm{bath} \mapsto 1$$

不是 A 到 B 的函数, 因为它没有为 A 的元 me 规定象。但是, 如果记 $A_1 = \{\, \mathrm{dinner}, \mathrm{bath} \,\}$, 这个 f_1 可以是 A_1 到 B 的函数。

法则

$$f_2\colon \quad \begin{aligned} &\mathrm{dinner} \mapsto 0, \\ &\mathrm{bath} \mapsto 1, \\ &\mathrm{me} \mapsto b \quad \text{where } b^2 = b \end{aligned}$$

不是 A 到 B 的函数, 因为它给 A 的元 me 规定的象不唯一。

法则

$$f_3\colon \quad \mathrm{dinner} \mapsto 0, \quad \mathrm{bath} \mapsto 1, \quad \mathrm{me} \mapsto -1$$

不是 A 到 B 的函数, 因为它给 A 的元 me 规定的象不是 B 的元。但是, 如果记 $B_1 = \{\, -1, 0, 1 \,\}$, 这个 f_3 可以是 A 到 B_1 的函数。

† 不要混淆陪域与象集 (*image*, *range*)。f 的象集是

$$\operatorname{Im} f = \{\, b \in B \mid b = f(a),\ a \in A \,\}。$$

这就是中学数学里的 “值域”。

定义 设 f_1 与 f_2 都是 A 到 B 的函数。若任取 $a \in A$, 必有 $f_1(a) = f_2(a)$, 则说这二个函数相等, 写为 $f_1 = f_2$。

例 设 $A \subset \mathbb{C}$, 且 A 非空。定义二个 A 到 $\mathbb{C}$ 的函数: $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = |x|^2$。如果 $A = \mathbb{R}$, 那么 $f_1 = f_2$。可是, 若 $A = \mathbb{C}$, f_1 与 f_2 不相等。

例 设 A 是全体正实数作成的集。定义二个 A 到 $\mathbb{R}$ 的函数: $f_1(x) = \frac{1}{6}\log_2 x^3$, $f_2(x) = \log_4 x$。知道对数的读者可以看出, f_1 与 f_2 有着相同的对应法则, 故 $f_1 = f_2$。因为 f_2 是对数函数 ($\mathit{logarithmic\ function}$), 所以 f_1 也是。

评注 在上下文清楚的情况下, 可以单说函数的对应法则。比如, 中学数学课说 "二次函数 $f(x) = x^2 + x - 1$" 时, 定义域与陪域默认都是 $\mathbb{R}$。中学的函数一般都是实数的子集到实数的子集的函数。所谓 "自然定义域" 是指 (在一定范围内) 一切使对应法则有意义的元构成的集。比如, 在中学, 我们说 $\frac{1}{x}$ 的自然定义域是 $\mathbb{R}^*$, $\sqrt{x}$ 的自然定义域是一切非负实数。在研究复变函数时, 我们说 $\frac{1}{z}$ 的自然定义域是 $\mathbb{C}^*$。如果不明确函数的定义域, 我们会根据上下文作出自然定义域作为它的定义域。

定义 A 到 A 的函数是 A 的变换 ($\mathit{transform}$)。换句话说, 变换是定义域跟陪域一样的函数。

Binary Functions

定义 A^2 到 A 的函数称为 A 的二元运算 ($\mathit{binary\ functions}$)。

例 设 $f(x, y) = x - y$。这个 f 是 $\mathbb{Z}$ 的二元运算; 但是, 它不是 $\mathbb{N}$ 的二元运算。

评注 设 $\circ$ 是 A 的二元运算。代替 $\circ(x, y)$, 我们写 $x \circ y$。一般地, 若表示这个二元运算的符号不是字母, 我们就把这个符号写在二个元的中间。

定义 设 $T(A)$ 是全部 A 的变换作成的集。设 f, g 是 A 的变换。任取 $a \in A$, 当然有 $b = f(a) \in A$。所以, $g(b) = g(f(a))$ 也是 A 的元。当然, 这个 $g(f(a))$ 也是唯一确定的。这样, 我们说, f 与 g 的复合 ($\mathit{composition}$) $g \circ f$ 是

$$g \circ f: \quad A \to A, \quad a \mapsto g(f(a))。$$

所以, 复合是 $T(A)$ 的二元运算:

$$\circ: \quad T(A)\times T(A)\to T(A), \quad (g,f)\mapsto g\circ f。$$

评注 设 A 有有限多个元。此时, 可排出 A 的元:

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}。$$

设 f 是 A^2 到 B 的函数。则任给整数 i,j, $1\le i,j\le n$, 记

$$f(a_i,a_j)=b_{i,j}\in B。$$

可以用这样的表描述此函数:

	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	$\cdots$	$b_{1,n}$
a_2	$b_{2,1}$	$b_{2,2}$	$\cdots$	$b_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_n	$b_{n,1}$	$b_{n,2}$	$\cdots$	$b_{n,n}$

有的时候, 为了强调函数名, 可在左上角书其名:

f	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	$\cdots$	$b_{1,n}$
a_2	$b_{2,1}$	$b_{2,2}$	$\cdots$	$b_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_n	$b_{n,1}$	$b_{n,2}$	$\cdots$	$b_{n,n}$

这种表示函数的方式是方便的。如果这些 $b_{i,j}$ 都是 A 的元, 就说这张表是 A 的运算表。

例 设 $T=\{0,1,-1\}$, $\circ(x,y)=xy$。不难看出, $\circ$ 确实是 T 的二元运算。它的运算表如下:

	0	1	-1
0	0	0	0
1	0	1	-1
-1	0	-1	1

例 设 $\mathbb{F}_{\mathrm{nu}}$ 是将 $\mathbb{F}$ 去掉 0, 1 后得到的集†。看下列 6 个法则:

$$f_0: \quad x\mapsto x;$$

† 这个 $\mathbb{F}_{\mathrm{nu}}$ 只是临时记号: nu 表示 *nil*, *unity*。

$$
\begin{aligned}
f_1\colon & \qquad x \mapsto 1-x;\\
f_2\colon & \qquad x \mapsto \frac{1}{x};\\
f_3\colon & \qquad x \mapsto 1-\frac{1}{1-x};\\
f_4\colon & \qquad x \mapsto 1-\frac{1}{x};\\
f_5\colon & \qquad x \mapsto \frac{1}{1-x}。
\end{aligned}
$$

记 $S_6 = \{ f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \}$。可以验证, $S_6 \subset T(\mathbb{F}_{\mathrm{nu}})$。

进一步地, 36 次复合告诉我们, 任取 $f, g \in S_6$, 必有 $g \circ f \in S_6$。可以验证, 这是 S_6 的 (复合) 运算表:

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_0	f_4	f_5	f_2	f_3
f_2	f_2	f_5	f_0	f_4	f_3	f_1
f_3	f_3	f_4	f_5	f_0	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_1	f_2	f_5	f_0
f_5	f_5	f_2	f_3	f_1	f_0	f_4

我们在本节会经常用 S_6 举例。

定义 设 $\circ$ 是 A 的二元运算。若任取 $x, y, z \in A$, 必有

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

则说 f 适合结合律 (*associativity*)。此时, $(x \circ y) \circ z$ 或 $x \circ (y \circ z)$ 可简写为 $x \circ y \circ z$。

例 $\mathbb{Z}$ 的加法当然适合结合律。可是, 它的减法不适合结合律。

评注 变换的复合适合结合律。确切地, 设 f, g, h 都是 A 的变换。任取 $a \in A$, 则

$$
\begin{aligned}
(h \circ (g \circ f))(a) &= h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))),\\
((h \circ g) \circ f)(a) &= (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))。
\end{aligned}
$$

也就是说,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f。$$

例 S_6 的复合当然适合结合律。

定义 设 $\circ$ 是 A 的二元运算。若任取 $x, y \in A$, 必有

$$x \circ y = y \circ x,$$

则说 $\circ$ 适合交换律 (*commutativity*)。

例 $\mathbb{F}^*$ 的乘法当然适合交换律。可是, 它的除法不适合交换律。

例 S_6 的复合不适合交换律, 因为 $f_1 \circ f_2 = f_4$, 而 $f_2 \circ f_1 = f_5$, 二者不相等。

评注 在本文里, $\cdot$ 运算的优先级高于 $+$ 运算。所以, $a \cdot b + c$ 的意思就是

$$(a \cdot b) + c,$$

而不是

$$a \cdot (b + c)。$$

定义 设 $+, \cdot$ 是 A 的二个二元运算。若任取 $x, y, z \in A$, 必有

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \tag{LD}$$

则说 $+$ 与 $\cdot$ 适合左 $(\cdot)$ 分配律[†] (*left distributivity*)。类似地, 若

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x, \tag{RD}$$

则说 $+$ 与 $\cdot$ 适合右 $(\cdot)$ 分配律 (*right distributivity*)。说既适合 LD 也适合 RD 的 $+$ 与 $\cdot$ 适合 $(\cdot)$ 分配律 (*distributivity*)。显然, 若 $\cdot$ 适合交换律, 则 LD 与 RD 等价。

例 $\mathbb{F}$ 的加法与乘法适合分配律。当然, 减法与乘法也适合分配律:

$$x(y - z) = xy - xz = yx - zx = (y - z)x。$$

甚至, 在正实数里, 加法与除法适合右分配律:

$$\frac{y + z}{x} = \frac{y}{x} + \frac{z}{x}。$$

[†] 在不引起歧义时, 括号里的内容可省略。或者这么说: 当我们说 $+, \cdot$ 适合分配律时, 我们不会理解为 $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$。但有意思的事儿是, 如果把 $+$ 理解为并, $\cdot$ 理解为交, x, y, z 理解为集, 那这个式是对的。当然, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ 也是对的。

定义 设 $\circ$ 是 A 的二元运算。若任取 $x, y, z \in A$, 必有

$$\text{(LC)} \qquad x \circ y = x \circ z \implies y = z,$$

则说 $\circ$ 适合左消去律 (*left cancellation property*)。类似地, 若

$$\text{(RC)} \qquad x \circ z = y \circ z \implies x = y,$$

则说 $\circ$ 适合右消去律 (*right cancellation property*)。说既适合 LC 也适合 RC 的 $\circ$ 适合消去律 (*cancellation property*)。显然, 若 $\circ$ 适合交换律, 则 LC 与 RC 等价。

例 显然, $\mathbb{N}$ 的乘法不适合消去律, 但 $\mathbb{N}^*$ 的乘法适合消去律†。

例 考虑 $x \circ y = x^3 + y^2$。若把 $\circ$ 视为 $\mathbb{N}$ 的二元运算, 那么它适合消去律。若把 $\circ$ 视为 $\mathbb{Q}$ 的二元运算, 那么它适合右消去律。若把 $\circ$ 视为 $\mathbb{C}$ 的二元运算, 那么它不适合任意一个消去律。

例 一般地, 当 A 至少有二个元时, $\circ$ (在 $T(A)$ 里) 不适合消去律。设 $a, b \in A$, $a \neq b$。考虑下面 4 个变换:

$$\begin{aligned}
g_0:&\qquad a \mapsto a, \quad b \mapsto b, \quad x \mapsto x \text{ where } x \neq a, b;\\
g_1:&\qquad a \mapsto a, \quad b \mapsto a, \quad x \mapsto x \text{ where } x \neq a, b;\\
g_2:&\qquad a \mapsto b, \quad b \mapsto b, \quad x \mapsto x \text{ where } x \neq a, b;\\
g_3:&\qquad a \mapsto b, \quad b \mapsto a, \quad x \mapsto x \text{ where } x \neq a, b。
\end{aligned}$$

可以验证,

$$g_3 \circ g_1 = g_2 \circ g_1 = g_2 \circ g_3 = g_2。$$

由此可以看出, $\circ$ 不适合任意一个消去律。

例 我们看 $\circ$ 在 S_6 里是否适合消去律。取 $f, g, h \in S_6$。由表易知, 当 $g \neq h$ 时, $f \circ g \neq f \circ h$ (横着看运算表), 且 $g \circ f \neq h \circ f$ (竖着看运算表)。这说明, $\circ$ 在 $T(\mathbb{F}_{\mathrm{nu}})$ 的子集 S_6 里适合消去律。

定义 设 $\circ$ 是 A 的二元运算。若存在 $e \in A$, 使若任取 $x \in A$, 必有

$$e \circ x = x \circ e = x,$$

则说 e 是 A 的 (关于运算 $\circ$ 的) 幺元 (*identity*)。如果 e' 也是幺元, 则

$$e = e \circ e' = e'。$$

† 后面提到整环时, 我们会稍微修改一下消去律的描述。

例 $\mathbb{F}$ 的加法的幺元是 0, 且其乘法的幺元是 1。

例 不难看出, 这个变换是 $T(A)$ 的幺元:

$$\iota:\quad \begin{aligned} &A \to A,\\ &a \mapsto a。\end{aligned}$$

它也有个一般点的名字: 恒等变换 (*identity transform*)。

在 S_6 里, f_0 就是这里的 ι。

定义 设 $\circ$ 是 A 的二元运算。设 e 是 A 的幺元。设 $x \in A$。若存在 $y \in A$, 使

$$y \circ x = x \circ y = e,$$

则说 y 是 x 的 (关于运算 $\circ$ 的) 逆元 (*inverse*)。

例 $\mathbb{F}$ 的每个元都有加法逆元, 即其相反数。

评注 设 $\circ$ 适合结合律。如果 y, y' 都是 x 的逆元, 则

$$y = y \circ e = y \circ (x \circ y') = (y \circ x) \circ y' = e \circ y' = y'。$$

此时, 一般用 x^{-1} 表示 x 的逆元。因为

$$x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e,$$

由上可知, x^{-1} 也有逆元, 且 $(x^{-1})^{-1} = x$。

例 一般地, 当 A 至少有二个元时, $T(A)$ 既有有逆元的变换, 也有无逆元的变换。还是看前面的 g_0, g_1, g_2, g_3。首先, g_0 是幺元 ι。不难看出, g_0 与 g_3 都有逆元:

$$g_0 \circ g_0 = g_3 \circ g_3 = g_0。$$

不过, g_1 不可能有逆元。假设 g_1 有逆元 h, 则应有

$$(h \circ g_1)(a) = \iota(a) = a, \quad (h \circ g_1)(b) = \iota(b) = b。$$

可是, $g_1(a) = g_1(b) = a$, 故 $(h \circ g_1)(a) = (h \circ g_1)(b) = h(a)$, 它不能既等于 a 也等于 b, 矛盾!

例 再看 S_6。由表可看出, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 的逆元分别是 f_0, f_1, f_2, f_3, f_5, f_4。

评注 设 $\circ$ 适合结合律。如果 x, y 都有逆元, 那么 $x \circ y$ 也有逆元, 且

$$(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}。$$

为了说明这一点, 只要按定义验证即可:

$$(y^{-1} \circ x^{-1}) \circ (x \circ y) = y^{-1} \circ (x^{-1} \circ x) \circ y = y^{-1} \circ e \circ y = y^{-1} \circ y = e,$$
$$(x \circ y) \circ (y^{-1} \circ x^{-1}) = x \circ (y \circ y^{-1}) \circ x^{-1} = x \circ e \circ x^{-1} = x \circ x^{-1} = e。$$

这个规则往往称为袜靴规则 (*socks and shoes rule*): 设 y 是穿袜, x 是穿靴, $x \circ y$ 表示动作的复合: 先穿袜后穿靴。那么这个规则告诉我们, $x \circ y$ 的逆元就是先脱靴再脱袜。

评注 由此可见, 结合律是一条很重要的规则。我们算 $63 \cdot 8 \cdot 125$ 时也会想着先算 $8 \cdot 125$。

Semi-groups and Groups

定义 设 S 是非空集。设 $\circ$ 是 S 的二元运算。若 $\circ$ 适合结合律, 则称 S (关于 $\circ$) 是半群 (*semi-group*)。

例 $\mathbb{N}$ 关于加法 (或乘法) 作成半群。

例 $T(A)$ 关于 $\circ$ 作成半群。

评注 事实上, 这里要求 S 非空是有必要的。

首先, 空集没什么意思。其次, 前面所述的结合律、交换律、分配律等自动成立, 这是因为对形如 "若 p, 则 q" 的命题而言, p 为假推出整个命题为真。这是相当 "危险" 的!

定义 设 m 是正整数。设 x 是半群 S 的元。令

$$x^1 = x, \quad x^m = x \circ x^{m-1}。$$

x^m 称为 x 的 m 次幂。不难看出, 当 m, n 都是正整数时,

$$x^{m+n} = x^m \circ x^n, \quad (x^m)^n = x^{mn}。$$

假如 S 有二个元 x, y 适合 $x \circ y = y \circ x$, 那么还有

$$(x \circ y)^m = x^m \circ y^m。$$

例 还是看熟悉的 $\mathbb{N}$。对于乘法而言, 这里的幂就是普通的幂——一个数自乘多次的结果。对于加法而言, 这里的幂相当于乘法——一个数自加多次的结果。

定义 设 G 关于 $\circ$ 是半群。若 G 的关于 $\circ$ 的幺元存在, 且 G 的任意元都有关于 $\circ$ 的逆元, 则 G 是群 (*group*)。

例 $\mathbb{N}$ 关于加法 (或乘法) 不能作成群。$\mathbb{Z}$ 关于加法作成群, 但关于乘法不能作成群。$\mathbb{F}$ 关于乘法不能作成群, 但 $\mathbb{F}^*$ 关于乘法作成群。不过, $\mathbb{F}^*$ 关于加法不能作成群。

例 $T(A)$ 一般不是群。不过, S_6 是群。

评注 群有唯一的幺元。群的每个元都有唯一的逆元。

评注 设 G 关于 $\circ$ 是群。我们说, $\circ$ 适合消去律。

假如 $x \circ y = x \circ z$。二侧左边乘 x 的逆元 x^{-1}, 就有

$$x^{-1} \circ (x \circ y) = x^{-1} \circ (x \circ y)。$$

由于 $\circ$ 适合结合律,

$$(x^{-1} \circ x) \circ y = (x^{-1} \circ x) \circ y。$$

也就是

$$e \circ y = e \circ z。$$

这样, $y = z$。类似地, 用同样的方法可以知道, 右消去律也对。

定义 已经知道, 群的每个元 x 都有逆元 x^{-1}。由此, 当 m 是正整数时, 定义 $x^{-m} = (x^{-1})^m$。再定义 $x^0 = e$。利用半群的结果, 可以看出, 当 m, n 都是整数时,

$$x^{m+n} = x^m \circ x^n, \quad (x^m)^n = x^{mn}。$$

假如 G 有二个元 x, y 适合 $x \circ y = y \circ x$, 那么还有

$$(x \circ y)^m = x^m \circ y^m。$$

例 对于 $\mathbb{F}^*$ 的乘法而言, 这里的任意整数幂跟普通的整数幂没有任何区别。我们学习数的负整数幂的时候, 也是借助倒数定义的。

Subgroups

定义 设 G 关于 $\circ$ 是群。设 $H \subset G$, H 非空。若 H 关于 $\circ$ 也作成群, 则 H 是 G 的子群 (*subgroup*)。

例 对加法来说, $\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{F}$ 的子群。对乘法来说, $\mathbb{Z}^*$ 不是 $\mathbb{F}^*$ 的子群。

评注 设 $H \subset G$, H 非空。H 是 G 的子群的一个必要与充分条件是: 任取 $x, y \in H$, 必有 $x \circ y^{-1} \in H$。

怎么说明这一点呢? 先看充分性。任取 $x \in H$, 则 $e = x \circ x^{-1} \in H$。任取 $y \in H$, 则 $y^{-1} = e \circ y^{-1} \in H$。所以

$$x \circ y = x \circ (y^{-1})^{-1} \in H。$$

$\circ$ 在 G 适合结合律, $H \subset G$, 所以 $\circ$ 作为 H 的二元运算也适合结合律。至此, H 是半群。

前面已经说明, $e \in H$, 所以 H 的关于 $\circ$ 的幺元存在。进一步地, $x \in H$ 在 G 里的逆元也是 H 的元, 所以 H 的任意元都有关于 $\circ$ 的逆元。这样, H 是群。顺便一提, 我们刚才也说明了, G 的幺元也是 H 的幺元, 且 H 的元在 G 里的逆元也是在 H 里的逆元。

再看必要性。假设 H 是一个群。任取 $x, y \in H$, 我们要说明 $x \circ y^{-1} \in H$。看上去有点显然呀! H 是群, 所以 y 有逆元 y^{-1}, 又因为 $\circ$ 是 H 的二元运算, $x \circ y^{-1} \in H$。不过要注意一个细节。我们说明充分性时, y^{-1} 被认为是 y 在 G 里的逆元; 可是, 刚才的论证里 y^{-1} 实则是 y 在 H 里的逆元。大问题! 怎么解决呢? 如果我们说明 y 在 H 里的逆元也是 y 在 G 里的逆元, 那这个漏洞就被修复了。

我们知道, H 有幺元 e_H, 所以 $e_H \circ e_H = e_H$。e_H 是 G 的元, 所以 e_H 在 G 里有逆元 $(e_H)^{-1}$。这样,

$$\begin{aligned}
e_H &= e \circ e_H \\
&= ((e_H)^{-1} \circ e_H) \circ e_H \\
&= (e_H)^{-1} \circ (e_H \circ e_H) \\
&= (e_H)^{-1} \circ e_H \\
&= e。
\end{aligned}$$

取 $y \in H$。y 在 H 里有逆元 z, 即

$$z \circ y = y \circ z = e_H = e。$$

y, z 都是 G 的元。这样, 根据逆元的唯一性, z 自然是 y 在 G 里的逆元。

Additive Groups

定义 若 G 关于名为 $+$ 的二元运算作成群, 幺元 e 读作 "零元" 写作 0, $x \in G$ 的逆元 x^{-1} 读作 "x 的相反元" 写作 $-x$, 且 $+$ 适合交换律, 则说 G 是加群 (*additive group*)。相应地, "元的幂" 也应该改为 "元的倍": x^m

写为 mx。用加法的语言改写前面的幂的规则, 就得到了倍的规则: 对任意 $x, y \in G$, $m, n \in \mathbb{Z}$, 有

$$\begin{aligned}&(m+n)x = mx + nx,\\&m(nx) = (mn)x,\\&m(x+y) = mx + my。\end{aligned}$$

顺便一提, 在这种记号下, $x - y$ 是 $x + (-y)$ 的简写。并且

$$x + y = x + z \implies y = z。$$

由于这里的加法适合交换律, 直接换位就是右消去律。前面说, 若运算适合结合律, 则 x 的逆元的逆元还是 x。这句话用加法的语言写, 就是

$$-(-x) = x。$$

前面的 "袜靴规则" 就是

$$-(x+y) = (-y) + (-x) = (-x) + (-y) = -x - y。$$

这就是熟悉的去括号法则。这里体现了交换律的作用。

评注 初见此定义可能会觉得有些混乱: 怎么 "倒数" 又变为 "相反数" 了? 其实这都是借鉴已有写法。前面, $\circ$ 虽然不是 $\cdot$, 但这个形状暗示着乘法, 因此有 x^{-1} 这样的记号; 现在, 运算的名字是 $+$, 自然要根据形状作出相应的改变。其实, 这里 "名为 $+$" "零元" "相反元" 都不是本质——换句话说, 还是可以用老记号。不过, 我们主要接触至少与二种运算相关联的结构——整环与域, 所以用二套记号、名字是有必要的。

评注 前面的 $x^0 = e$ 在加群里变为 $0x = 0$。看上去 "很普通", 不过左边的 0 是整数, 右边的 0 是加群的零元, 二者一般不一样!

例 显而易见, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}$ 都是加群。

例 S_6 不是加群, 因为它的二元运算不适合交换律。

评注 类似地, 可以定义子加群 (*sub-additive group*)。这里, 就直接用等价刻画来描述它: "G 的非空子集 H 是加群 G 的子加群的一个必要与充分条件是: 任取 $x, y \in H$, 必有 $x - y \in H$。"

Sums

定义 设 f 是 $\mathbb{Z}$ 的非空子集 S 到加群 G 的函数。设 p, q 是二个整数。如果 $p \leq q$, 则记

$$\sum_{j=p}^{q} f(j) = f(p) + f(p+1) + \cdots + f(q)。$$

也就是说, $\sum_{j=p}^{q} f(j)$ 就是 $q-(p-1)$ 个元的和的一种简洁的表示法。如果 $p>q$, 约定 $\sum_{j=p}^{q} f(j)=0$。

例 我们已经知道, $n \geq 0$ 时

$$0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}。$$

用 $\sum$ 写出来, 就是

$$\sum_{k=0}^{n-1} k=\frac{n(n-1)}{2}。$$

这里的 k 是所谓的 “dummy variable”。所以,

$$\sum_{j=0}^{n-1} j=\sum_{k=0}^{n-1} k=\sum_{\ell=0}^{n-1} \ell=\frac{n(n-1)}{2}。$$

例 f 可以是常函数:

$$\sum_{t=p}^{q} 1= \begin{cases}q-p+1, & q \geq p ; \\ 0, & q<p。\end{cases}$$

例 设 f 与 g 是 $\mathbb{Z}$ 的非空子集 S 到加群 G 的函数。因为加群的加法适合结合律与交换律, 所以

$$\sum_{j=p}^{q}(f(j)+g(j))=\sum_{j=p}^{q} f(j)+\sum_{j=p}^{q} g(j)。$$

评注 设 $f(i, j)$ 是 $\mathbb{Z}^{2}$ 的非空子集到加群 G 的函数。记

$$S_{C}=\sum_{j=p}^{q} \sum_{i=m}^{n} f(i, j), \quad S_{R}=\sum_{i=m}^{n} \sum_{j=p}^{q} f(i, j),$$

其中 $q \geq p$, $n \geq m$。$\sum_{i=m}^{n} f(i, j)$ 是何物? 暂时视 i 之外的变元为常元, 则

$$\sum_{i=m}^{n} f(i, j)=f(m, j)+f(m+1, j)+\cdots+f(n, j)。$$

$\sum_{j=p}^{q} \sum_{i=m}^{n} f(i, j)$ 是 $\sum_{j=p}^{q}\left(\sum_{i=m}^{n} f(i, j)\right)$ 的简写:

$$\sum_{j=p}^{q} \sum_{i=m}^{n} f(i, j)=\sum_{i=m}^{n} f(i, p)+\sum_{i=m}^{n} f(i, p+1)+\cdots+\sum_{i=m}^{n} f(i, q)。$$

$\sum_{i=m}^{n} \sum_{j=p}^{q} f(i, j)$ 有着类似的解释。我们说, S_{C} 一定与 S_{R} 相等。

记

$$C_j=\sum_{i=m}^{n}f(i,j),\quad R_i=\sum_{j=p}^{q}f(i,j)。$$

考虑下面的表:

$$\begin{array}{cccc|c} f(m,p) & f(m,p+1) & \cdots & f(m,q) & R_m \\ f(m+1,p) & f(m+1,p+1) & \cdots & f(m+1,q) & R_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f(n,p) & f(n,p+1) & \cdots & f(n,q) & R_n \\ \hline C_p & C_{p+1} & \cdots & C_q & \end{array}$$

由此, 不难看出, S_C 与 S_R 只是用不同的方法将 $(n-m+1)(q-p+1)$ 个元相加罢了。

评注 上面的例其实就是一个特殊情形 $(n-m+1=2)$。

Rings

定义 设 R 是加群。设 $\cdot$ (读作 "乘法") 也是 R 的二元运算。假设
(i) $\cdot$ 适合结合律;
(ii) $+$ 与 $\cdot$ 适合 $\cdot$ 分配律。
我们说 R (关于 $+$ 与 $\cdot$) 是环 (*ring*)。

评注 在不引起歧义的情况下, 可省去 $\cdot$ 。例如, $a\cdot b$ 可写为 ab。

例 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}$ (关于普通加法与乘法) 都是环。

例 全体偶数作成的集也是环。一般地, 设 k 是整数, 则全体 k 的倍作成的集是环。

例 这里举一个 "平凡的" (*trivial*) 例。N 只有一个元 0。可以验证, N 关于普通加法与乘法作成群。这也是 "最小的环"。在上个例里, 取 $k=0$ 就是 N。

例 这里举一个 "不平凡的" (*nontrivial*) 例。设 $R=\{0,a,b,c\}$。加法和乘法由以下二个表给定:

$$\begin{array}{c|cccc} + & 0 & a & b & c \\ \hline 0 & 0 & a & b & c \\ a & a & 0 & c & b \\ b & b & c & 0 & a \\ c & c & b & a & 0 \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{c|cccc} \cdot & 0 & a & b & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a & b & c \\ c & 0 & a & b & c \end{array}$$

可以验证, 这是一个环。

评注 我们看一下环的简单性质。

已经知道, R 的任意元的 "整数 0 倍" 是 R 的零元。不禁好奇, 零元乘任意元会是什么结果。首先, 回想起, R 的零元适合 $0+0=0$。利用分配律, 当 $x \in R$ 时,

$$0x = (0+0)x = 0x + 0x。$$

我们知道, 加法适合消去律。所以

$$0 = 0x。$$

类似地, $x0 = 0$。也许有点眼熟? 但是这里左右二侧的 0 都是 R 的元, 不一定是数!

因为

$$xy + (-x)y = (x-x)y = 0,$$
$$xy + x(-y) = x(y-y) = 0,$$

所以

$$(-x)y = x(-y) = -xy。$$

从而

$$(-x)(-y) = -(x(-y)) = -(-xy) = xy。$$

根据分配律,

$$x(y_1 + \cdots y_n) = xy_1 + \cdots + xy_n,$$
$$(x_1 + \cdots + x_m)y = x_1 y + \cdots + x_m y。$$

二式联合, 就是

$$(x_1 + \cdots + x_m)(y_1 + \cdots y_n) = x_1 y_1 + \cdots + x_1 y_n + \cdots + x_m y_1 + \cdots + x_m y_n。$$

利用 $\sum$ 符号, 此式可以写为

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j。$$

所以, 若 n 是整数, $x, y \in R$, 则

$$(nx)y = n(xy) = x(ny)。$$

对于正整数 m, n 与 R 的元 x, 有

$$x^{m+n} = x^m x^n, \quad (x^m)^n = x^{mn}。$$

假如 R 有二个元 x, y 适合 $xy = yx$, 那么还有

$$(xy)^m = x^m y^m。$$

例 在 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}$ 里, 这些就是我们熟悉的 (部分的) 数的运算律。

评注 类似地, 可以定义子环 (*subring*)。这里, 就直接用等价刻画来描述它: “R 的非空子集 S 是环 R 的子环的一个必要与充分条件是: 任取 $x, y \in S$, 必有 $x - y \in S$, $xy \in S$。”

定义 设 R 是环。假设任取 $x, y \in R$, 必有 $xy = yx$, 就说 R 是交换环 (*commutative ring*)。

评注 以后接触的环都是交换环。

Domains

定义 设 D 是环。假设
(i) 任取 $x, y \in D$, 必有 $xy = yx$;
(ii) 存在 $1 \in D$, $1 \neq 0$, 使任取 $x \in D$, 必有 $1x = x1 = x$;
(iii) $\cdot$ 适合 “消去律变体”†: 若 $xy = xz$, $x \neq 0$, 则 $y = z$。
我们说 D (关于 $+$ 与 $\cdot$) 是整环 (*domain*, *integral domain*)。

例 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}$ 都是整环。当然, 也有介于 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{F}$ 之间的整环。假如 $s \in \mathbb{C}$ 的平方是整数, 那么全体形如 $x + sy$ $(x, y \in \mathbb{Z})$ 的数作成一个整环。

例 看一个有限整环的例。设 V (*Vierergruppe*)‡ 是 4 元集:

$$V = \{\, 0, 1, \tau, \tau^2 \,\}。$$

加法与乘法由下面的运算表决定:

$+$	0	1	τ	τ^2
0	0	1	τ	τ^2
1	1	0	τ^2	τ
τ	τ	τ^2	0	1
τ^2	τ^2	τ	1	0

$\cdot$	0	1	τ	τ^2
0	0	0	0	0
1	0	1	τ	τ^2
τ	0	τ	τ^2	1
τ^2	0	τ^2	1	τ

† 一般地, 这也可称为消去律。
‡ A German word which means *four-group*.

可以验证, V 不但是一个环, 它还适合整环定义的条件 (i) (ii) (iii)。因此, V 是整环。

在 V 里, $1+1=0$, 这跟平常的加法有点不一样。换句话说, 这里的 0 跟 1 已经不是我们熟悉的数了。

评注 整环 D 有乘法幺元 1。因为 D 是加群, 1 当然有相反元 -1。任取 $a \in D$。根据分配律,

$$0 = 0a = (1+(-1))a = 1a + (-1)a = a + (-1)a。$$

又因为 a 的相反元 $-a$ 适合

$$0 = a + (-a),$$

故由 (加法) 消去律知 $-a = (-1)a$。

例 全体偶数作成的集是交换环, 却不是整环。

例 再来看一个非整环例。考虑 $\mathbb{Z}^2$。设 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$。规定

$$\begin{aligned}
&(a,b) = (c,d) \iff a = b \text{ and } c = d,\\
&(a,b) + (c,d) = (a+b, c+d),\\
&(a,b)(c,d) = (ac, bd)。
\end{aligned}$$

可以验证, 在这二种运算下, $\mathbb{Z}^2$ 作成一个交换环, 其加法、乘法幺元分别是 $(0,0)$, $(1,1)$。可是

$$(1,0) \neq (0,0), \quad (0,1) \neq (0,-1), \quad (1,0)(0,1) = (1,0)(0,-1)。$$

也就是说, 乘法不适合消去律。

评注 可是, 如果这么定义乘法, 那么 $\mathbb{Z}^2$ 可作为一个整环:

$$(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)。$$

事实上, 这就是复数乘法, 因为

$$(a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d) = (ac-bd) + \mathrm{i}(ad+bc)。$$

评注 整环 D 有乘法幺元 1。任取 $a \in D$。我们定义

$$a^0 = 1。$$

我们已经知道, 当 m, n 是正整数, $x \in D$ 时,

$$x^m x^n = x^{m+n}, \quad (x^m)^n = x^{mn}。$$

现在, 当 m, n 是非负整数时, 上面的关系仍成立。并且, 既然 D 的乘法适合交换律, 那么任取 x, $y \in D$, 必有

$$(xy)^m = x^m y^m,$$

m 可以是非负整数。

评注 类似地, 可以定义子整环 (*subdomain*)。这里, 就直接用前面的等价刻画来描述它: "D 的非空子集 S 是整环 D 的子整环的一个必要与充分条件是: (i) $1 \in S$; (ii) 任取 $x, y \in S$, 必有 $x - y \in S$, $xy \in S$。"

例 设 $D \subset \mathbb{C}$, 且 D 是整环。不难看出, $\mathbb{Z} \subset D$。

Products

定义 设 f 是 $\mathbb{Z}$ 的非空子集 S 到整环 D 的函数。设 p, q 是二个整数。如果 $p \leq q$, 则记

$$\prod_{j=p}^{q} f(j) = f(p) \cdot f(p+1) \cdot \cdots \cdot f(q)。$$

也就是说, $\prod_{j=p}^{q} f(j)$ 就是 $q - (p - 1)$ 个元的积的一种简洁的表示法。如果 $p > q$, 约定 $\prod_{j=p}^{q} f(j) = 1$。

定义 设 n 是正整数。那么 1, 2, $\cdots$, n 的积是 n 的阶乘 (*factorial*):

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j。$$

顺便约定 $0! = 1$。

评注 不难看出, 当 n 是正整数时,

$$n! = n \cdot (n-1)!。$$

例 不难验证, 下面是 0 至 9 的阶乘:

$$\begin{aligned} 0! &= 1, & 1! &= 1, \\ 2! &= 2, & 3! &= 6, \\ 4! &= 24, & 5! &= 120, \\ 6! &= 720, & 7! &= 5\,040, \\ 8! &= 40\,320, & 9! &= 362\,880。 \end{aligned}$$

评注 因为整环的乘法也适合结合律与交换律, 所以

$$\prod_{j=p}^{q}(f(j)\cdot g(j))=\prod_{j=p}^{q}f(j)\cdot\prod_{j=p}^{q}g(j),$$
$$\prod_{j=p}^{q}\prod_{i=m}^{n}f(i,j)=\prod_{i=m}^{n}\prod_{j=p}^{q}f(i,j),$$

其中, $\prod_{j=p}^{q}\prod_{i=m}^{n}f(i,j)$ 当然是 $\prod_{j=p}^{q}\left(\prod_{i=m}^{n}f(i,j)\right)$ 的简写。

评注 回顾一下 $\sum$ 符号。我们已经知道

$$\sum_{j=p}^{q}(f(j)+g(j))=\sum_{j=p}^{q}f(j)+\sum_{j=p}^{q}g(j)。$$

因为整环有分配律, 故当 $c\in D$ 与变元 j 无关时[†]

$$\sum_{j=p}^{q}cf(j)=c\sum_{j=p}^{q}f(j)。$$

进而, 当 c, d 都是常元时,

$$\sum_{j=p}^{q}(cf(j)+dg(j))=c\sum_{j=p}^{q}f(j)+d\sum_{j=p}^{q}g(j)。$$

类似地, 当 $q\geq p$, c 是常元时,

$$\prod_{j=p}^{q}cf(j)=c^{q-p+1}\prod_{j=p}^{q}f(j)。$$

定义 最后介绍一下双阶乘 ($double\ factorial$)。前 n 个正偶数的积是 $2n$ 的双阶乘:

$$(2n)!!=\prod_{j=1}^{n}2j。$$

前 n 个正奇数是 $2n-1$ 的双阶乘:

$$(2n-1)!!=\prod_{j=1}^{n}(2j-1)。$$

顺便约定 $0!!=(-1)!!=1$。

评注 不难看出, 对任意正整数 m, 都有

$$m!!=m\cdot(m-2)!!。$$

[†] 这样的元称为常元 (*constant*)。

双阶乘可以用阶乘表示:

$$
\begin{aligned}
&(2n)!! = 2^n n!,\\
&(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}。
\end{aligned}
$$

由此可得

$$n!! \cdot (n-1)!! = n!。$$

例 不难验证, 下面是 1 至 10 的双阶乘:

$$
\begin{aligned}
&1!! = 1, && 2!! = 2,\\
&3!! = 3, && 4!! = 8,\\
&5!! = 15, && 6!! = 48,\\
&7!! = 105, && 8!! = 384,\\
&9!! = 945, && 10!! = 3\,840。
\end{aligned}
$$

Units and Fields

定义 设 D 是整环。设 $x \in D$。若存在 $y \in D$ 使 $xy = 1$, 则说 x 是 D 的单位 ($unit$)。

评注 不难看出, D 至少有一个单位 1, 因为 $1 \cdot 1 = 1$。定义里的 y 自然就是 x 的 (乘法) 逆元, 其一般记为 x^{-1}。x^{-1} 当然也是单位。二个单位 x, y 的积 xy 也是单位: $(xy)(y^{-1}x^{-1}) = 1$。单位的乘法当然适合结合律。这样, D 的单位作成一个 (乘法) 群。姑且叫 D 的所有单位作成的集为单位群 ($unit\ group$) 吧!

评注 不难看出, 0 一定不是单位。

例 看全体整数作成的整环 $\mathbb{Z}$。它恰有二个单位: 1 与 -1。

例 $\mathbb{F}$ 也是整环。它有无数多个单位: 任意 $\mathbb{F}^*$ 的元都是单位。

例 前面的 4 元集 V 的非零元都是单位。

例 现在看一个不那么平凡的例。设

$$D = \{\, x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Z} \,\}。$$

这个 D (关于数的运算) 作成整环。

首先, 我们说, 不存在有理数 q 使 $q^2 = 3$。用反证法。设 $q = \frac{m}{n}$, m, n 是非零整数。我们知道, 分数可以约分, 故可以假设 m, n 不全为 3 的倍。这样

$$m^2 = 3n^2。$$

所以 m^2 一定是 3 的倍。因为

$$\begin{aligned} &(3\ell)^2 = 3 \cdot 3\ell^2, \\ &(3\ell \pm 1)^2 = 3(3\ell^2 \pm 2\ell) + 1, \end{aligned}$$

故由此可看出, m 也是 3 的倍。记 $m = 3u$。这样

$$3u^2 = n^2。$$

所以 n 也是 3 的倍。这跟假设矛盾!

再说一下 D 的二个元相等意味着什么。设 a, b, c, d 都是整数。那么

$$a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3} \implies (a-c)^2 = 3(d-b)^2。$$

若 $d - b \neq 0$, 则 $\frac{a-c}{d-b}$ 是有理数, 且

$$\left(\frac{a-c}{d-b}\right)^2 = 3,$$

而这是荒谬的。所以 $d - b = 0$。这样 $a - c = 0$。

现在再来看单位问题。若 k 是大于 1 的整数, 则 k 不是 D 的单位。反证法。若 k 是单位, 则有 $c, d \in \mathbb{Z}$ 使

$$1 = k(c + d\sqrt{3}) = kc + kd\sqrt{3} \implies 1 = kc,$$

矛盾!

D 有无数多个单位。因为

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1,$$

故对任意正整数 n, 有

$$(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n = 1。$$

所以, $(2 \pm \sqrt{3})^n$ 是单位。

定义 设 F 是整环。若每个 F 的不是 0 的元都是 F 的单位, 则说 F 是域 (*field*)。

例 不难看出, $\mathbb{F}$ 是域。这也解释了为什么我们用 $\mathbb{F}$ 表示 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 之一。

评注 在域 F 里, 只要 $a \neq 0$, 则 a^{-1} 有意义。那么, 我们说 $\frac{b}{a}$ 就是 $ba^{-1} = a^{-1}b$ 的简写。不难验证, 当 $a, c \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}&\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \iff bc = da,\\&\frac{b}{a} \pm \frac{d}{c} = \frac{bc \pm da}{ac},\\&\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{bd}{ac}。\end{aligned}$$

若 $d \neq 0$, 则

$$\frac{\frac{b}{a}}{\frac{d}{c}} = \frac{bc}{da}。$$

这就是我们熟知的分数运算法则。

评注 类似地, 可以定义子域 (*subfield*)。这里, 就直接用前面的等价刻画来描述它: "F 的非空子集 K 是域 F 的子域的一个必要与充分条件是: (i) $1 \in K$; (ii) 任取 $x, y \in K$, $y \neq 0$, 必有 $x - y \in K$, $\frac{x}{y} \in K$。"

例 设 $F \subset \mathbb{C}$, 且 F 是域。不难看出, $\mathbb{Q} \subset F$。

Definition of Polynomials

现在开始介绍多项式。

定义 设 D 是整环。设 x 是不在 D 里的任意一个文字。形如

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \quad (n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \cdots, a_n \in D,\ a_n \neq 0)$$

的表达式称为 D 上 x 的一个多项式 (*polynomial in x over D*)。n 称为其次 (*degree*), a_i 称为其 i 次系数 (*the i^{th} coefficient*), a_ix^i 称为其 i 次项 (*the i^{th} term*)。$f(x)$ 的次可写为 $\deg f(x)$。

若二个多项式的次与各同次系数均相等, 则二者相等。

多项式的系数为 0 的项可以不写。

约定 $0 \in D$ 也是多项式, 称为零多项式。零多项式的次是 $-\infty$。任取整数 m, 约定

$$\begin{aligned}&-\infty = -\infty, \quad -\infty < m,\\&-\infty + m = m + (-\infty) = -\infty + (-\infty) = -\infty。\end{aligned}$$

当然, 还约定, 零多项式只跟自己相等。换句话说,

$$a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n = 0$$

的一个必要与充分条件是

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0。$$

D 上 x 的所有多项式作成的集是 $D[x]$:

$$D[x] = \{\, a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \cdots, a_n \in D \,\}。$$

文字 x 只是一个符号, 它与 D 的元的和与积都是形式的。我们说, x 是不定元 $(indeterminate)$。

例 $0y^0 + 1y^1 + (-1)y^2 + 0y^3 + (-7)y^4 \in \mathbb{Z}[y]$ 是一个 4 次多项式。顺便一提, 一般把 y^1 写为 y。这个多项式的一个更普通的写法是

$$y - y^2 - 7y^4。$$

也许 y^0 看起来有些奇怪。如上所言, 这只是一个形式上的表达式。我们之后再处理这个小细节。

例 $z^0 + z + z^{\frac{3}{2}}$ 不是 z 的多项式。

例 考虑 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}[x]$。设

$$f(x) = ax^0 + x + 2x^2 - x^4 - bx^5, \quad g(x) = cx + dx^2 - x^4 - 3x^5,$$

其中 a, b, c, d 都是整数。那么, $f(x) = g(x)$ 相当于

$$a = 0, \quad 1 = c, \quad 2 = d, \quad 0 = 0, \quad -1 = -1, \quad -b = -3,$$

也就是

$$a = 0, \quad b = 3, \quad c = 1, \quad d = 2。$$

评注 文字 x 的意义在数学中是不断进化的 $(evolving)$。在中小学里, x 是未知元 $(unknown)$: 虽然它是待求的, 但是它是一个具体的数。后来在函数里, x 表示变元 $(variable)$, 不过它的取值范围是确定的。在上面的定义里, x 仅仅是一个文字, 成为不定元。

下面考虑多项式的运算。先从加法开始。

定义 设

$$f(x)=a_0x^0+a_1x+\cdots+a_nx^n,\quad g(x)=b_0x^0+b_1x+\cdots+b_nx^n$$

是 $D[x]$ 的元。规定加法如下:

$$f(x)+g(x)=(a_0+b_0)x^0+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n。$$

例 取 $\mathbb{Z}[x]$ 的二个元 $f(x)=x^0+2x^2$, $g(x)=-3x^0+4x-x^3$。先改写一下:

$$f(x)=1x^0+0x+2x^2+0x^3,\quad g(x)=-3x^0+4x+0x^2+(-1)x^3。$$

所以

$$f(x)+g(x)=-2x^0+4x+2x^2-x^3。$$

命题 $D[x]$ 作成加群。

证 设

$$\begin{aligned}f(x)&=a_0x^0+a_1x+\cdots+a_nx^n,\\g(x)&=b_0x^0+b_1x+\cdots+b_nx^n,\\h(x)&=c_0x^0+c_1x+\cdots+c_nx^n\end{aligned}$$

是 $D[x]$ 的元。根据加法的定义, $+$ 显然是 $D[x]$ 的二元运算。因为 D 的加法适合交换律, 故

$$\begin{aligned}g(x)+f(x)&=(b_0+a_0)x^0+(b_1+a_1)x+\cdots+(b_n+a_n)x^n\\&=(a_0+b_0)x^0+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n\\&=f(x)+g(x)。\end{aligned}$$

也就是说, $D[x]$ 的加法适合交换律。

注意到

$$\begin{aligned}&(f(x)+g(x))+h(x)\\&=((a_0+b_0)x^0+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n)\\&\qquad+(c_0x^0+c_1x+\cdots+c_nx^n)\\&=((a_0+b_0)+c_0)x^0+((a_1+b_1)+c_1)x+\cdots+((a_n+b_n)+c_n)x^n\\&=(a_0+b_0+c_0)x^0+(a_1+b_1+c_1)x+\cdots+(a_n+b_n+c_n)x^n。\end{aligned}$$

类似地, 计算 $f(x)+(g(x)+h(x))$ 也可以得到一样的结果。也就是说, $D[x]$ 的加法适合结合律。

零多项式可以写为

$$0=0x^0+0x+\cdots+0x^n。$$

这样

$$\begin{aligned}0+f(x)&=(0+a_0)x^0+(0+a_1)x+\cdots+(0+a_n)x^n\\&=a_0x^0+a_1x+\cdots+a_nx^n\\&=f(x)。\end{aligned}$$

类似地, $f(x)+0=f(x)$。

记

$$\underline{f}(x)=(-a_0)x^0+(-a_1)x+\cdots+(-a_n)x^n。$$

这样

$$\begin{aligned}\underline{f}(x)+f(x)&=(-a_0+a_0)x^0+(-a_1+a_1)x+\cdots+(-a_n+a_n)x^n\\&=0x^0+0x+\cdots+0x^n\\&=0。\end{aligned}$$

类似地, $f(x)+\underline{f}(x)=0$。以后, 我们把这个 $\underline{f}(x)$ 用普通的符号写为

$$-f(x)=-a_0x^0-a_1x-\cdots-a_nx^n。$$

综上, $D[x]$ 是加群。 ✌

定义 设 $f(x)$, $g(x)\in D[x]$。规定减法如下:

$$f(x)-g(x)=f(x)+(-g(x))。$$

评注 可以看出, $f(x)\pm g(x)$ 的次既不会超出 $f(x)$ 的次, 也不会超出 $g(x)$ 的次。用符号写出来, 就是

$$\deg(f(x)\pm g(x))\le\max\{\deg f(x),\deg g(x)\}。$$

若 $\deg f(x)>\deg g(x)$, 则

$$\deg(f(x)\pm g(x))=\deg f(x)。$$

类似地, 若 $\deg f(x)<\deg g(x)$, 则

$$\deg(f(x)\pm g(x))=\deg g(x)。$$

评注 既然 $D[x]$ 是加群, 且每个 a_ix^i $(i=0,1,\cdots,n)$ 都可以看成是多项式, 那么多项式的项的次序是不重要的。前面的写法称为升次排列 (*ascending order*)。下面的写法称为降次排列 (*descending order*):

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0x^0。$$

这跟中学里接触的多项式是一样的。

(非零) 多项式的最高次非零项是首项 (*leading term*)。它的系数是此多项式的首项系数 (*the coefficient of the leading term*)。

例 $y-y^2-7y^4\in\mathbb{Z}[x]$ 可以写为 $-7y^4-y^2+y$, 其首项是 $-7y^4$, 且其首项系数是 -7。

现在考虑乘法。

定义 设

$$f(x)=a_0x^0+a_1x+\cdots+a_mx^m,\quad g(x)=b_0x^0+b_1x+\cdots+b_nx^n$$

是 $D[x]$ 的元。规定乘法如下:

$$f(x)g(x)=c_0x^0+c_1x+\cdots+c_{m+n}x^{m+n},$$

其中

$$c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_kb_0。$$

且约定 $i>m$ 时 $a_i=0$, $j>n$ 时 $b_j=0$。在这个约定下, 不难看出, $\ell>m+n$ 时, $c_\ell=0$。所以, 我们至少有

$$\deg f(x)g(x)\le\deg f(x)+\deg g(x)。$$

例 取 $\mathbb{Z}[x]$ 的二个元 $f(x)=x^0+2x^2$, $g(x)=-3x^0+4x-x^3$。先改写一下:

$$f(x)=1x^0+0x+2x^2,\quad g(x)=-3x^0+4x+0x^2+(-1)x^3。$$

所以

$$\begin{aligned}
c_0&=1\cdot(-3)=-3,\\
c_1&=1\cdot4+0\cdot(-3)=4,\\
c_2&=1\cdot0+0\cdot4+2\cdot(-3)=-6,\\
c_3&=1\cdot(-1)+0\cdot0+2\cdot4=7,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c_4 &= 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 0, \\
c_5 &= 2 \cdot (-1) = -2。
\end{aligned}
$$

所以

$$f(x)g(x) = -3x^0 + 4x - 6x^2 + 7x^3 - 2x^5。$$

例 设

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_mx^m。$$

是 $D[x]$ 的元。零多项式可以写为

$$0 = 0x^0,$$

由此易知

$$0f(x) = f(x)0 = 0。$$

评注 设

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_mx^m, \quad g(x) = b_0x^0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

是 $D[x]$ 的元, 且 $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$。这样, $f(x)g(x)$ 的 $m+n$ 次项就是 cx^{m+n}, 其中

$$
\begin{aligned}
c &= a_0b_{m+n} + \cdots + a_{m-1}b_{n+1} + a_mb_n + a_{m+1}b_{n-1} + \cdots + a_{m+n}b_n \\
&= 0 + \cdots + 0 + a_mb_n + 0 + \cdots + 0 \\
&= a_mb_n。
\end{aligned}
$$

因为 $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$, 所以 $a_mb_n \neq 0$ (反证法: 若 $a_mb_n = 0 = a_m0$, 因为 $a_m \neq 0$, 根据 D 的消去律, 得 $b_n = 0$, 矛盾!)。所以

$$\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x)。$$

可以验证, 若 f 或 g 的任意一个是 0, 这个关系也对。

评注 设

$$
\begin{aligned}
f(x) &= px^m = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m, \\
g(x) &= qx^n = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n。
\end{aligned}
$$

当 $i \neq m$ 时, $a_i = 0$; 当 $i = m$ 时, $a_i = p \neq 0$。当 $j \neq n$ 时, $b_j = 0$; 当 $j = n$ 时, $b_j = q \neq 0$。现在考虑这二个多项式的积

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{m+n}x^{m+n},$$

其中

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0。$$

我们来看什么时候 $a_\ell b_{k-\ell}$ 不是 0。这相当于要求 a_ℓ 跟 $b_{k-\ell}$ 都不是 0, 所以

$$\ell = m, \quad k - \ell = n,$$

也就是

$$\ell = m, \quad k = m + n。$$

所以, 当 $k \neq m + n$ 时, $c_k = 0$; 当 $k = m + n$ 时,

$$c_{m+n} = a_m b_n = pq \neq 0。$$

所以, 任取 $m, n \in \mathbb{N}$, 必有

$$(px^m)(qx^n) = (pq)x^{m+n}。$$

特别地, 取 $p = q = 1$, 有

$$x^m x^n = x^{m+n}。$$

这里提醒读者: 这个式是形式上的表达式, 其内涵与中学的 "同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加" 的内涵是不一样的!

顺便一提, 若 p 跟 q 的一个是 0, 则每个 c_k 全为 0, 故此时积是零多项式, 此式仍成立。

命题 $D[x]$ 作成整环。所以, $D[x]$ 的一个名字就是 (整环) D 上 (x) 的多项式 (整) 环。

证 已经知道, $D[x]$ 是加群。下面先说明 $D[x]$ 是交换环。

根据定义, 多项式的乘法还是多项式, 也就是说, 乘法是二元运算。

设

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 x^0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m, \\
g(x) &= b_0 x^0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n, \\
h(x) &= u_0 x^0 + u_1 x + \cdots + u_s x^s
\end{aligned}$$

是 $D[x]$ 的元。则

$$f(x)g(x) = c_0 x^0 + c_1 x + \cdots + c_{m+n} x^{m+n},$$

$$g(x)f(x) = d_0x^0 + d_1x + \cdots + d_{n+m}x^{n+m},$$

其中

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0,$$
$$d_k = b_0a_k + b_1a_{k-1} + \cdots + b_ka_0。$$

因为 D 的乘法适合交换律, 加法适合交换律与结合律, 故 $c_k = d_k$。这样, $D[x]$ 的乘法适合交换律。

不难算出

$$\begin{aligned}&(f(x)g(x))h(x)\\ =&(c_0x^0 + c_1x + \cdots + c_{m+n}x^{m+n})(u_0x^0 + u_1x + \cdots + u_sx^s)\\ =&v_0x^0 + v_1x + \cdots + v_{m+n+s}x^{m+n+s},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}v_t &= (\text{the sum of all } a_ib_ju_r\text{'s with } i+j+r=t)\\ &= a_0b_0u_t + a_0b_1u_{t-1} + \cdots + a_0b_tu_0 + a_1b_0u_{t-1} + \cdots。\end{aligned}$$

类似地, 计算 $f(x)(g(x)h(x))$ 也可以得到一样的结果。也就是说, $D[x]$ 的乘法适合结合律。

现在验证分配律。前面已经看到, 多项式的乘法是交换的, 所以只要验证一个分配律即可。不失一般性, 设 $s = n$。这样

$$g(x) + h(x) = (b_0 + u_0)x^0 + (b_1 + u_1)x + \cdots + (b_n + u_n)x^n。$$

所以

$$f(x)(g(x) + h(x)) = p_0x^0 + p_1x^1 + \cdots + p_{m+n}x^{m+n},$$

其中

$$\begin{aligned}p_k &= a_0(b_k + c_k) + a_1(b_{k-1} + c_{k-1}) + \cdots + a_k(b_0 + c_0)\\ &= (a_0b_k + a_0c_k) + (a_1b_{k-1} + a_1c_{k-1}) + \cdots + (a_kb_0 + a_kc_0)\\ &= (a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0) + (a_0c_k + a_1c_{k-1} + \cdots + a_kc_0)。\end{aligned}$$

不难看出, 这就是 $f(x)g(x)$ 的 k 次系数与 $f(x)h(x)$ 的 k 次系数的和。这样, $D[x]$ 的加法与乘法适合分配律。至此, 我们知道, $D[x]$ 是交换环。

交换环离整环还差二步: 一是乘法幺元, 二是消去律。先看消去律。若 $f(x)g(x) = f(x)h(x)$, $f(x) \neq 0$, 根据分配律,

$$0 = f(x)g(x) - f(x)h(x) = f(x)(g(x) - h(x))。$$

如果 $g(x)-h(x)\neq 0$, 则 $g(x)-h(x)$ 的次不是 $-\infty$。$f(x)$ 的次不是 $-\infty$, 故 $f(x)(g(x)-h(x))$ 的次不是 $-\infty$。换句话说, $f(x)(g(x)-h(x))\neq 0$, 矛盾!

再看乘法幺元。设

$$e(x)=x^0。$$

不难算出

$$e(x)f(x)=f(x)e(x)=f(x)。$$

综上, $D[x]$ 是整环。 ✌

例 在前面, 我们直接用定义计算了下面二个多项式的积:

$$f(x)=x^0+2x^2,\quad g(x)=-3x^0+4x-x^3。$$

现在, 我们利用

$$(px^m)(qx^n)=(pq)x^{m+n}\quad (p,q\in D,\ m,n\in\mathbb{N})$$

与运算律再做一次:

$$\begin{aligned}
f(x)g(x)&=(x^0+2x^2)(-3x^0+4x-x^3)\\
&=x^0(-3x^0+4x-x^3)+2x^2(-3x^0+4x-x^3)\\
&=-3x^{0+0}+4x^{0+1}-x^{0+3}-6x^{2+0}+8x^{2+1}-2x^{2+3}\\
&=-3x^0+4x-x^3-6x^2+8x^3-2x^5\\
&=-3x^0+4x-6x^2+7x^3-2x^5。
\end{aligned}$$

这跟之前的结果是一致的。

定义 设 $m\in\mathbb{N}$。多项式 $f(x)$ 的 m 次幂就是 m 个 $f(x)$ 的积:

$$(f(x))^m=\underbrace{f(x)\cdot f(x)\cdot\dots\cdot f(x)}_{m\ f(x)\text{'s}}。$$

既然 $D[x]$ 是整环, 那么前面的幂规则都适用。具体地说, 设 m, $n\in\mathbb{N}$, $f(x)$, $g(x)\in D[x]$, 则

$$\begin{aligned}
&(f(x))^m(f(x))^n=(f(x))^{m+n},\\
&((f(x))^m)^n=(f(x))^{mn},\\
&(f(x)g(x))^m=(f(x))^m(g(x))^m。
\end{aligned}$$

前面, 我们知道

$$x^m x^n = x^{m+n}。$$

当时, 我们还说, 这跟中学的 "同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加" 有着不一样的内涵。有了 "幂" 这个概念后, 我们发现, x^m 的确可以视为 m 个 x 的积。

评注 以后, 我们把 x^0 写为 1。换句话说, 代替

$$a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

我们写

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n。$$

这儿还有一件事儿值得一提。考虑

$$D_0 = \{\, ax^0 \mid a \in D \,\} \subset D[x]。$$

任取 D_0 的二元 ax^0, bx^0。首先, $ax^0 = bx^0$ 的一个必要与充分条件是 $a = b$。然后, 不难看出,

$$ax^0 + bx^0 = (a+b)x^0, \quad (ax^0)(bx^0) = (ab)x^0。$$

由此可以看出, D_0 与 D "几乎完全一样"。用摩登 ($modern$) 数学的话来说, "D_0 与 D 是天然同构的 ($naturally\ isomorphic$)"。

我们不打算深究这一点。上面, 我们把 x^0 写为 1; 反过来, D 的元 a 也可以理解为是多项式 ax^0。这跟中学的习惯是一致的。

最后, 我们指出: 既然非零的 $c \in D$ 可视为 0 次多项式, 那么 $cf(x)$ 也是多项式。如果

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

那么

$$cf(x) = ca_0 + ca_1x + \cdots + ca_nx^n,$$

且

$$\deg cf(x) = \deg f(x)。$$

Division Algorithm

我们知道, 非负整数有这样的性质:

命题 设 n 是正整数, m 是非负整数。则必有一对非负整数 q, r 使

$$m = qn + r, \quad 0 \leq r < n。$$

例如, 取 $n = 5$, $m = 23$。不难看出,

$$23 = 4 \cdot 5 + 3。$$

多项式也有类似的性质哟。

命题 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \in D[x],$$

且 a_n 是 D 的单位。对任意 $g(x) \in D[x]$, 存在 $q(x), r(x) \in D[x]$ 使

$$g(x) = q(x) f(x) + r(x), \quad \deg r(x) < n。$$

一般称其为带余除法: $q(x)$ 就是商 ($quotient$); $r(x)$ 就是余式 ($remainder$)。

证 用数学归纳法。记 $\deg g(x) = m$。若 $m < n$, 则 $q(x) = 0$, $r(x) = g(x)$ 适合要求。所以, 命题对不高于 $n - 1$ 的 m 都成立。

设 $m \leq \ell$ ($\ell \geq n - 1$) 时, 命题成立。考虑 $m = \ell + 1$ 的情形。此时, 设

$$g(x) = b_{\ell+1} x^{\ell} + b_{\ell} x^{\ell} + \cdots + b_0 \in D[x]。$$

作一个跟 $g(x)$ 有着共同首项的多项式:

$$\begin{aligned}
s(x) &= b_{\ell+1} a_n^{-1} x^{\ell+1-n} f(x) \\
&= b_{\ell+1} a_n^{-1} x^{\ell+1-n} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0) \\
&= b_{\ell+1} a_n^{-1} (a_n x^{\ell+1} + a_{n-1} x^{\ell} + \cdots + a_0 x^{\ell+1-n}) \\
&= b_{\ell+1} (x^{\ell+1} + a_n^{-1} a_{n-1} x^{\ell} + \cdots + a_n^{-1} a_0 x^{\ell+1-n}) \\
&= b_{\ell+1} x^{\ell+1} + b_{\ell+1} a_n^{-1} a_{n-1} x^{\ell} + \cdots + b_{\ell+1} a_n^{-1} a_0 x^{\ell+1-n}。
\end{aligned}$$

因为 a_n 是单位, 故 $s(x) \in D[x]$。设 $r_1(x) = g(x) - s(x) \in D[x]$。这样, $r_1(x)$ 的次不高于 ℓ。根据归纳假设, 有 $q_2(x)$, $r_2(x) \in D[x]$ 使

$$r_1(x) = q_2(x) f(x) + r_2(x), \quad \deg r_2(x) < n。$$

所以

$$g(x) = b_{\ell+1} a_n^{-1} x^{\ell+1-n} f(x) + r_1(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n}f(x) + q_2(x)f(x) + r_2(x) \\
&= (b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n} + q_2(x))f(x) + r_2(x)。
\end{aligned}
$$

记 $q(x) = b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n} + q_2(x)$, $r(x) = r_2(x)$, 则 $q(x)$, $r(x)$ 适合要求。所以, $m \le \ell + 1$ 时, 命题成立。根据数学归纳法, 命题成立。 ✌

例 取 $\mathbb{F}[x]$ 的二元 $f(x) = 2(x-1)^2(x+2)$, $g(x) = 8x^6 + 1$。我们来找一对多项式 $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$
g(x) = q(x)f(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg f(x)。
$$

不难看出, $f(x)$ 的次是 3, 且

$$
f(x) = 2(x^2 - 2x + 1)(x + 2) = 2x^3 - 6x + 4。
$$

我们按上面证明的方法寻找 $q(x)$ 与 $r(x)$。$a_3 = 2$ 是 $\mathbb{F}$ 的单位, 且 $a_3^{-1} = \frac{1}{2}$。取

$$
q_1(x) = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{6-3} = 4x^3。
$$

则

$$
\begin{aligned}
r_1(x) &= g(x) - q_1(x)f(x) \\
&= (8x^6 + 1) - 4x^3(2x^3 - 6x + 4) \\
&= (8x^6 + 1) - (8x^6 - 24x^4 + 16x^3) \\
&= 24x^4 - 16x^3 + 1。
\end{aligned}
$$

$r_1(x)$ 的次仍不低于 3。因此, 再来一次。取

$$
q_2(x) = 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{4-3} = 12x。
$$

则

$$
\begin{aligned}
r_2(x) &= r_1(x) - q_2(x)f(x) \\
&= (24x^4 - 16x^3 + 1) - 12x(2x^3 - 6x + 4) \\
&= (24x^4 - 16x^3 + 1) - (24x^4 - 72x + 48x) \\
&= -16x^3 + 72x^2 - 48x + 1。
\end{aligned}
$$

$r_2(x)$ 的次仍不低于 3。因此, 再来一次。取

$$
q_3(x) = -16 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{3-3} = -8。
$$

则

$$\begin{aligned} r_3(x) &= r_2(x) - q_3(x)f(x) \\ &= (-16x^3 + 72x^2 - 48x + 1) - (-8)(2x^3 - 6x + 4) \\ &= (-16x^3 + 72x^2 - 48x + 1) - (-16x^3 + 48x - 32) \\ &= 72x^2 - 96x + 33。\end{aligned}$$

$r_3(x)$ 的次低于 3。这样

$$\begin{aligned} g(x) &= q_1(x)f(x) + r_1(x) \\ &= q_1(x)f(x) + q_2(x)f(x) + r_2(x) \\ &= q_1(x)f(x) + q_2(x)f(x) + q_3(x)f(x) + r_3(x) \\ &= (q_1(x) + q_2(x) + q_3(x))f(x) + r_3(x) \\ &= (4x^3 + 12x - 8)f(x) + (72x^2 - 96x + 33)。\end{aligned}$$

也就是说,

$$q(x) = 4x^3 + 12x - 8, \quad r(x) = 72x^2 - 96x + 33。$$

评注 带余除法要求 $f(x)$ 的首项系数是单位是有必要的。

在上面的例里, $f(x)$ 与 $g(x)$ 可以看成 $\mathbb{Z}[x]$ 的元, 但 2 不是 $\mathbb{Z}$ 的单位。虽然最终所得 $q(x)$, $r(x)$ 也是 $\mathbb{Z}[x]$ 的元, 但这并不是一定会出现的。我们看下面的简单例。

考虑 $\mathbb{Z}[x]$ 的多项式 $f(x) = 2x$。设

$$\begin{aligned} r(x) &= r_0, \\ q(x) &= q_0 + q_1x + \cdots + q_px^p, \\ g(x) &= g_0 + g_1x + \cdots + g_sx^s, \end{aligned}$$

且 $r_0, q_0, \cdots, q_p, g_0, \cdots, g_s \in \mathbb{Z}$, $q_p, g_s \neq 0$。若 $g(x) = q(x)f(x) + r(x)$, 则

$$g_0 + g_1x + \cdots + g_sx^s = r_0 + 2q_0x + 2q_1x^2 + \cdots + 2q_px^{p+1}。$$

所以

$$\begin{aligned} &p = s - 1, \\ &r_0 = g_0, \\ &2q_{i-1} = g_i, \quad i = 1, \cdots, s。\end{aligned}$$

这说明, $g(x)$ 的 i 项系数 $(i = 1, \cdots, s)$ 必须是偶数。所以, 不存在 $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 使

$$1 + 3x + x^2 = q(x) \cdot 2x + r(x), \quad \deg r(x) < 1。$$

我们知道, 用一个正整数除非负整数, 所得的余数与商是唯一的。比方说, 5 除 23 的余数只能是 3。

多项式也有类似的性质哟。不过, 我们需要借助另一个命题的帮助。

命题 设 $f(x) \in D[x]$, 且 $f(x) \neq 0$。若 D 上 x 的 2 个多项式 $q(x)$, $r(x)$ 适合

$$q(x)f(x) + r(x) = 0, \quad \deg r(x) < \deg f(x),$$

则必有

$$q(x) = r(x) = 0。$$

通俗地说, 二个非零多项式的积的次不可能变低。

证 题设条件即

$$-q(x)f(x) = r(x)。$$

反证法。若 $-q(x) \neq 0$, 则 $\deg(-q(x)) \geq 0$。从而

$$\deg r(x) = \deg(-q(x)) + \deg f(x) \geq \deg f(x)。$$

可是,

$$\deg r(x) < \deg f(x),$$

矛盾! 故 $-q(x) = 0$。这样, $r(x) = 0$。 ✌

命题 设 $f(x) \in D[x]$, 且 $f(x) \neq 0$。若 D 上 x 的 4 个多项式 $q_1(x)$, $r_1(x)$, $q_2(x)$, $r_2(x)$ 适合

$$\begin{gathered} q_1(x)f(x) + r_1(x) = q_2(x)f(x) + r_2(x), \\ \deg r_1(x) < \deg f(x), \quad \deg r_2(x) < \deg f(x), \end{gathered}$$

则必有

$$q_1(x) = q_2(x), \quad r_1(x) = r_2(x)。$$

证 记

$$Q(x) = q_1(x) - q_2(x), \quad R(x) = r_1(x) - r_2(x)。$$

题设条件即

$$(q_1(x) - q_2(x))f(x) + (r_1(x) - r_2(x)) = 0,$$

也就是

$$Q(x)f(x)+R(x)=0。$$

注意到

$$\begin{aligned}\deg R(x)=&\ \deg(r_1(x)-r_2(x))\\ \le&\ \max\{\,\deg r_1(x),\deg r_2(x)\,\}\\ <&\ \deg f(x)。\end{aligned}$$

根据上个命题, $Q(x)=R(x)=0$。所以,

$$q_1(x)=q_2(x),\quad r_1(x)=r_2(x)。$$ ✌

这样, 我们得到了这个命题:

命题 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\in D[x],$$

且 a_n 是 D 的单位。对任意 $g(x)\in D[x]$, 存在唯一的 $q(x),r(x)\in D[x]$ 使

$$g(x)=q(x)f(x)+r(x),\quad \deg r(x)<n。$$

一般称其为带余除法: $q(x)$ 就是商; $r(x)$ 就是余式。并且, 当 $f(x)$ 的次不高于 $g(x)$ 的次时, $f(x)$, $g(x)$, $q(x)$ 间还有如下的次关系:

$$\deg g(x)=\deg(g(x)-r(x))=\deg q(x)+\deg f(x)。$$

Polynomial Equality

本节讨论二个多项式的相等。

设 a_0, b_0, a_1, b_1, ⋯, a_n, b_n 都是整环 D 的元。根据定义, 我们已经知道,

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$$

的一个必要与充分条件是

$$a_0=b_0,\quad a_1=b_1,\quad \cdots,\quad a_n=b_n。$$

之后, 我们会遇到形如

$$f(x)=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\cdots+a_n(x-c)^n$$

的式, 这里 $c \in D$。因为

$$1, \quad x-c, \quad (x-c)^2, \quad \cdots, \quad (x-c)^n$$

是首项系数为 1 的 0, 1, 2, ⋯, n 次多项式, 所以这个 $f(x)$ 也是多项式, 且 $\deg f(x) \le n$。当 $a_n \ne 0$ 时, $\deg f(x) = n$, 且 $f(x)$ 的首项系数为 a_n。

再作一个多项式

$$g(x) = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \cdots + b_n(x-c)^n。$$

$f(x)$ 与 $g(x)$ 都是多项式, 自然可以讨论是否相等。若 $c=0$, $(x-c)^\ell$ 就变为普通的 x^ℓ。所以, $c=0$ 时, $f(x)=g(x)$ 的一个必要与充分条件是

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \cdots, \quad a_n = b_n。$$

可是, 如果 $c \ne 0$ 呢? 这个时候, 还是一样的条件吗?

先看一个例。

例 我们试研究

$$(\bigstar) \qquad a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2。$$

在中学, 我们已经知道

$$(x-c)^2 = c^2 - 2cx + x^2。$$

这样, ($\bigstar$) 的左侧变为

$$\begin{aligned}
&a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 \\
&= a_0 + a_1(-c+x) + a_2(c^2 - 2cx + x^2) \\
&= a_0 + (-a_1c + a_1x) + (a_2c^2 + (-2a_2c)x + a_2x^2) \\
&= (a_0 - a_1c + a_2c^2) + (a_1 - 2a_2c)x + a_2x^2。
\end{aligned}$$

同理, ($\bigstar$) 的右侧变为

$$(b_0 - b_1c + b_2c^2) + (b_1 - 2b_2c)x + b_2x^2。$$

所以, ($\bigstar$) 成立等价于

$$\begin{gathered}
a_0 - a_1c + a_2c^2 = b_0 - b_1c + b_2c^2, \\
a_1 - 2a_2c = b_1 - 2b_2c, \\
a_2 = b_2,
\end{gathered}$$

即

$$\begin{aligned}(a_0-b_0)-c(a_1-b_1)+c^2(a_2-b_2)&=0,\\(a_1-b_1)-2c(a_2-b_2)&=0,\\(a_2-b_2)&=0。\end{aligned}$$

由这个方程组, 可解出

$$a_0-b_0=a_1-b_1=a_2-b_2=0。$$

这跟 $c=0$ 时的

$$a_0=b_0,\quad a_1=b_1,\quad a_2=b_2$$

是完全一致的。

定义 设 $p_0(x)$, $p_1(x)$, ⋯, $p_n(x)\in D[x]$。设 c_0, c_1, ⋯, $c_n\in D$。我们说

$$c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_np_n(x)$$

是多项式 $p_0(x)$, $p_1(x)$, ⋯, $p_n(x)$ 的一个线性组合 (*linear combination*)。c_0, c_1, ⋯, c_n 就是此线性组合的系数。

若不存在一组不全为 0 的 D 中元 d_0, d_1, ⋯, d_n 使

$$d_0p_0(x)+d_1p_1(x)+\cdots+d_np_n(x)=0,$$

则说 $p_0(x)$, $p_1(x)$, ⋯, $p_n(x)$ 是线性无关的 (*linearly independent*)。换句话说, "$p_0(x)$, $p_1(x)$, ⋯, $p_n(x)$ 是线性无关的" 意味着: 若 D 中元 r_0, r_1, ⋯, r_n 使

$$r_0p_0(x)+r_1p_1(x)+\cdots+r_np_n(x)=0,$$

则 $r_0=r_1=\cdots=r_n=0$。

例 显然, 1, x, ⋯, x^n 是线性无关的。当然, 前面的例告诉我们, 1, $x-c$, $(x-c)^2$ 也是线性无关的。

例 单独一个非零多项式是线性无关的。

评注 设 $p_0(x)$, $p_1(x)$, ⋯, $p_n(x)$ 是线性无关的。

(i) 显然, 因为多项式的加法可交换, 随意打乱这 $n+1$ 个多项式的次序后得到的多项式仍线性无关。

(ii) 对任意 ℓ $(0\le\ell\le n)$, $p_0(x)$, $p_1(x)$, ⋯, p_ℓ 这 $\ell+1$ 个多项式也是线性无关的。设 c_0, c_1, ⋯, $c_\ell\in D$, 且

$$c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_\ell p_\ell(x)=0。$$

这个相当于

$$c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_\ell p_\ell(x)+0p_{\ell+1}(x)+\cdots+0p_n(x)=0。$$

所以

$$c_0=c_1=\cdots=c_\ell=\underbrace{0=\cdots=0}_{(n-\ell)\ 0\text{'s}}=0。$$

(iii) 根据 (i) (ii) 可知, 线性无关的多项式的片段也是线性无关的。

评注 设 $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\cdots$, $p_n(x)$ 是线性无关的。设 a_0, b_0, a_1, b_1, $\cdots$, a_n, b_n 都是 D 的元。那么

$$a_0p_0(x)+a_1p_1(x)+\cdots+a_np_n(x)=b_0p_0(x)+b_1p_1(x)+\cdots+b_np_n(x)$$

相当于

$$(a_0-b_0)p_0(x)+(a_1-b_1)p_1(x)+\cdots+(a_n-b_n)p_n(x)=0,$$

也就是

$$a_0-b_0=a_1-b_1=\cdots=a_n-b_n=0,$$

亦即

$$a_0=b_0,\quad a_1=b_1,\quad \cdots,\quad a_n=b_n。$$

由此可见, 线性无关的多项式有着优良的性质: 二个线性组合相等的一个必要与充分条件是对应的系数相等。

我们知道, 1, x, $\cdots$, x^n 是线性无关的。在这串多项式里, 后一个的次比前一个的次多 1。不仅如此, 由多项式的定义可见, 每一个次不高于 n 的多项式都可以写为它们的线性组合。下面的命题就是这二件事实的推广。

命题 设 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)\in D[x]$ 分别是 $0, 1, \cdots, n$ 次多项式。则:

(i) $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\cdots$, $p_n(x)$ 是线性无关的;

(ii) 若 $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\cdots$, $p_n(x)$ 的首项系数都是 D 的单位, 则任意次不高于 n 的多项式都可写为 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 的线性组合。由 (i) 知, 这个组合的系数一定是唯一的。

证 (i) 用数学归纳法。当 $n=0$ 时, 只有一个 0 次多项式 $p_0(x)=c\neq 0$ 那么, 由 $dc=0$ 可推出 $d=0$。这样, 命题对 $n=0$ 成立。假定命题对 $n=\ell\geq 0$ 成立。设 $c_0, c_1, \cdots, c_{\ell+1}\in D$ 使

$$c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_\ell p_\ell(x)+c_{\ell+1}p_{\ell+1}(x)=0。$$

记

$$r(x)=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_\ell p_\ell(x),$$

则 $r(x)$ 的次不高于 ℓ。所以

$$c_{\ell+1}p_{\ell+1}(x)+r(x)=0,\quad \deg r(x)\le \ell<\deg p_{\ell+1}(x)。$$

由上节命题知

$$c_{\ell+1}=0,\quad r(x)=0。$$

根据归纳假设,

$$r(x)=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_\ell p_\ell(x)=0 \implies c_0=c_1=\cdots=c_\ell=0。$$

这样,

$$c_0=c_1=\cdots=c_\ell=c_{\ell+1}=0。$$

也就是说, $n=\ell+1$ 时, 命题成立。

(ii) 用数学归纳法。当 $n=0$ 时, 只有一个 0 次多项式 $p_0(x)=c\neq 0$, 且 c 是单位。任取次不高于 0 的多项式 d。因为 $d=(dc^{-1})c$, 这样, 命题对 $n=0$ 成立。这样, 命题对 $n=0$ 成立。假定命题对 $n=\ell\ge 0$ 成立。任取次不高于 $\ell+1$ 的多项式 $f(x)$。由于 $p_{\ell+1}(x)$ 的首项系数是单位, 所以, 由带余除法知道, 存在多项式 $q(x)$, $r(x)\in D[x]$ 使

$$f(x)=q(x)p_{\ell+1}(x)+r(x),\quad \deg r(x)\le \ell。$$

如果 $f(x)$ 的次不高于 ℓ, 则 $q(x)=0$; 如果 $f(x)$ 的次是 $\ell+1$, 则

$$\deg q(x)=\deg f(x)-\deg p_{\ell+1}(x)=0。$$

也就是说, 存在 $c_{\ell+1}\in D$ 使 $q(x)=c_{\ell+1}$。所以,

$$f(x)=r(x)+c_{\ell+1}p_{\ell+1}(x),\quad \deg r(x)\le \ell。$$

根据归纳假设, 存在 c_0, c_1, $\cdots$, $c_\ell\in D$ 使

$$r(x)=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_\ell p_\ell(x),$$

即

$$f(x)=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_\ell p_\ell(x)+c_{\ell+1}p_{\ell+1}(x)。$$

所以, $n=\ell+1$ 时, 命题成立。 ✌

评注 这里, (ii) 要求每个多项式的首项系数为单位是有必要的。考虑 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}[x]$。取 $n=2$, 及

$$p_0(x)=-1,\quad p_1(x)=2x,\quad p_2(x)=3x^2。$$

根据上面的命题, 这三个多项式是线性无关的。考虑 $f(x)=3+x-2x^2$。设 $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ 使

$$3+x-2x^2=c_0\cdot(-1)+c_1\cdot 2x+c_2\cdot 3x^2。$$

这相当于

$$3=-c_0,\quad 1=2c_1,\quad -2=3c_2。$$

容易看出, 这个方程组无整数解, 所以 $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ 的 (系数为 $\mathbb{Z}$ 的元的) 线性组合不能表示每一个次不高于 2 的多项式。

本节开头的问题总算得到了解答。不仅如此, 我们得到了更深的结论:

命题 设 $a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n$ 都是 D 的元。设 $c \in D$。再设

$$f(x)=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\cdots+a_n(x-c)^n,$$
$$g(x)=b_0+b_1(x-c)+b_2(x-c)^2+\cdots+b_n(x-c)^n。$$

则 $f(x)=g(x)$ 的一个必要与充分条件是

$$a_0=b_0,\quad a_1=b_1,\quad \cdots,\quad a_n=b_n。$$

并且, 任取

$$f(x)=u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots+u_nx^n \in D[x],$$

必存在 $v_0, v_1, \cdots, v_n \in D$ 使

$$f(x)=v_0+v_1(x-c)+v_2(x-c)^2+\cdots+v_n(x-c)^n。$$

Derivatives

本节讨论多项式的导数。

在本节, 我们会将一些容易证明的命题留给读者练习。读者可乘此机会让自己熟悉证明命题的过程与数学归纳法。

定义 设

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n \in D[x]。$$

$f(x)$ 的导数 ($derivative$) 是多项式

$$f'(x)=0+1a_1+2a_2x+\cdots+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+na_nx^{n-1}\in D[x]。$$

$f'(x)$ 也可写为 $(f(x))'$。

评注 整环 D 里不一定有名为 $\pm2,\ \pm3,\ \cdots$ 的元。回忆一下, 若 $a\in D$, $n\in\mathbb{N}$, 则

$$na=n\cdot a=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\ a\text{'s}}。$$

若 $-n\in\mathbb{N}$, 则

$$na=-((-n)a)。$$

当然, 在 $\mathbb{Z}$ (或 $\mathbb{F}$) 里, na 可以认为是 $\mathbb{Z}$ (或 $\mathbb{F}$) 的二个元 n 与 a 的积。

例 取 $f(x)=x^6-x^3+1\in D[x]$。若 $D=\mathbb{F}$, 则

$$f'(x)=6x^5-3x^2+0=6x^5-3x^2。$$

若 D 是 4 元集 V, 则

$$f'(x)=(6\cdot1)x^5+(3\cdot(-1))x^2+0=x^2。$$

这里, $V=\{\,0,1,\tau,\tau^2\,\}$。它的加法与乘法如下:

$+$	0	1	τ	τ^2
0	0	1	τ	τ^2
1	1	0	τ^2	τ
τ	τ	τ^2	0	1
τ^2	τ^2	τ	1	0

$\cdot$	0	1	τ	τ^2
0	0	0	0	0
1	0	1	τ	τ^2
τ	0	τ	τ^2	1
τ^2	0	τ^2	1	τ

在前面 (Prerequisites 节的 Domains 小节), 我们知道, V 是整环。任取 $a\in V$, 都有

$$2\cdot a=a+a=0。$$

所以 $a=-a$。这样,

$$\begin{aligned}&6\cdot1=2\cdot(3\cdot1)=(3\cdot1)+(3\cdot1)=0,\\&3\cdot(-1)=(-1)+(-1)+(-1)=1+1+1=0+1=1。\end{aligned}$$

所以, 当我们把 $f(x)$ 视为 $V[x]$ 中元时, 它的导数 “有点奇怪”。同样的道理, 在 V 与 $V[x]$ 中,

$$(x^{2k})'=(2k\cdot1)x^{2k-1}=0x^{2k-1}=0。$$

评注 导数就是 $D[x]$ 到 $D[x]$ 的函数 (也就是 $D[x]$ 的变换):

$$
\begin{aligned}
{}': \quad & D[x] \to D[x], \\
& a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mapsto a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}。
\end{aligned}
$$

定义 设

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m, \\
g(x) &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n
\end{aligned}
$$

为 $D[x]$ 中的二个元。我们称

$$(g \circ f)(x) = b_0 + b_1 f(x) + \cdots + b_n (f(x))^n$$

为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合 ($composition$)。

评注 可以看到, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合仍为多项式。设

$$h(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_s x^s \in D[x]。$$

记

$$
\begin{aligned}
\ell(x) &= (h \circ g)(x) \\
&= d_0 + d_1(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) + \cdots \\
&\qquad + d_s (b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n)^s,
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
((h \circ g) \circ f)(x) &= (\ell \circ f)(x) \\
&= d_0 + d_1(b_0 + b_1 f(x) + \cdots + b_n (f(x))^n) + \cdots \\
&\qquad + d_s (b_0 + b_1 f(x) + \cdots + b_n (f(x))^n)^s \\
&= d_0 + d_1 (g \circ f)(x) + \cdots + d_s ((g \circ f)(x))^s \\
&= (h \circ (g \circ f))(x)。
\end{aligned}
$$

换句话说, 多项式的复合适合结合律。

例 取

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n, \quad f(x) = x - c \in D[x]。$$

那么

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= b_0 + b_1 (x - c) + \cdots + b_n (x - c)^n, \\
(f \circ g)(x) &= -c + b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n。
\end{aligned}
$$

例 考虑 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}[x]$。取

$$f(x) = x^3 + 2, \quad g(x) = x^2 + x - 1。$$

不难得到

$$f'(x) = 3x^2, \quad g'(x) = 2x + 1。$$

(i) $4g(x)$ 也是多项式, 当然可以有导数。因为

$$4g(x) = 4x^2 + 4x - 4,$$

故

$$(4g(x))' = 8x + 4,$$

这刚好是 $4g'(x)$:

$$4g' = 4(2x + 1) = 8x + 4。$$

(ii) $f(x) + g(x)$ 也是多项式。因为

$$f(x) + g(x) = x^3 + 2 + x^2 + x - 1 = x^3 + x^2 + x + 1,$$

故

$$(f(x) + g(x))' = 3x^2 + 2x + 1,$$

而这刚好是 $f'(x) + g'(x)$:

$$f'(x) + g'(x) = 3x^2 + 2x + 1。$$

一般地, 我们有

命题 设 $f(x)$, $g(x) \in D[x]$, $c \in D$。则
(i) $(cf(x))' = cf'(x)$;
(ii) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$。

由 (i) (ii) 与数学归纳法可知: 当 c_0, c_1, ⋯, $c_{k-1} \in D$, 且 $f_0(x)$, $f_1(x)$, ⋯, $f_{k-1}(x) \in D[x]$ 时,

$$\begin{aligned}&(c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) + \cdots + c_{k-1} f_{k-1}(x))' \\ &= c_0 f_0'(x) + c_1 f_1'(x) + \cdots + c_{k-1} f_{k-1}'(x)。\end{aligned}$$

证 我们证明 (i) (ii), 将剩下的推论留给读者作练习。设

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n, \\ g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n \end{aligned}$$

是 $D[x]$ 中二个元。

(i) $cf(x)$ 就是多项式

$$ca_0 + ca_1x + ca_2x^2 + \cdots + ca_{n-1}x^{n-1} + ca_nx^n,$$

故

$$\begin{aligned} (cf(x))' &= (ca_0 + ca_1x + ca_2x^2 + \cdots + ca_{n-1}x^{n-1} + ca_nx^n)' \\ &= ca_1 + 2ca_2x + \cdots + (n-1)ca_{n-1}x^{n-2} + nca_nx^{n-1} \\ &= ca_1 + c2a_2x + \cdots + c(n-1)a_{n-1}x^{n-2} + cna_nx^{n-1} \\ &= c(a_1 + 2a_2x + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}) \\ &= cf'(x)。 \end{aligned}$$

(ii) $f(x) \pm g(x)$ 就是多项式

$$\begin{aligned} &(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + (a_2 \pm b_2)x^2 + \cdots \\ &\qquad + (a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-1} + (a_n \pm b_n)x^n, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &(f(x) \pm g(x))' \\ &= ((a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + (a_2 \pm b_2)x^2 + \cdots \\ &\qquad + (a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-1} + (a_n \pm b_n)x^n)' \\ &= (a_1 \pm b_1) + 2(a_2 \pm b_2)x + \cdots + (n-1)(a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-2} \\ &\qquad + n(a_n \pm b_n)x^{n-1} \\ &= (a_1 \pm b_1) + (2a_2x \pm 2b_2x) + \cdots + ((n-1)a_{n-1}x^{n-2} \\ &\qquad \pm (n-1)b_{n-1}x^{n-2}) + (na_nx^{n-1} \pm nb_nx^{n-1}) \\ &= (a_1 + 2a_2x + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}) \\ &\qquad \pm (b_1 + 2b_2x + \cdots + (n-1)b_{n-1}x^{n-2} + nb_nx^{n-1}) \\ &= f'(x) \pm g'(x)。 \end{aligned}$$

✌

命题 设 $f(x)$, $g(x) \in D[x]$。则

(★) $$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)。$$

由 (★) 与数学归纳法可知: 当 $f_0(x)$, $f_1(x)$, ···, $f_{k-1}(x) \in D[x]$ 时,

$$\begin{aligned}&(f_0(x)f_1(x)\cdots f_{k-1}(x))'\\=\ &f_0'(x)f_1(x)\cdots f_{k-1}(x)+f_0(x)f_1'(x)\cdots f_{k-1}(x)+\cdots\\&+f_0(x)f_1(x)\cdots f_{k-1}'(x)。\end{aligned}$$

取 $f_0(x)=f_1(x)=\cdots=f_{k-1}(x)=f(x)$ 知

$$(f(x))^k=k(f(x))^{k-1}f'(x)。$$

证 我们证明 (★), 将剩下的二个式留给读者作练习。首先, 任取 i, $j \in \mathbb{N}$, p, $q \in D$, 有

$$px^i \cdot qx^j = pqx^{i+j}。$$

这样,

$$\begin{aligned}(px^i\cdot qx^j)'&=(pqx^{i+j})'\\&=(i+j)pqx^{i+j-1}\\&=ipqx^{(i-1)+j}+jpqx^{i+(j-1)}\\&=ipqx^{i-1}x^j+jpqx^ix^{j-1}\\&=(ipx^{i-1})(qx^j)+(px^i)(jqx^{j-1})\\&=(px^i)'(qx^j)+(px^i)(qx^j)'。\end{aligned}$$

设

$$\begin{aligned}f(x)&=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m,\\g(x)&=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n\end{aligned}$$

为 $D[x]$ 中的二个元。取 px^i 为 a_0, a_1x, ···, a_mx^m, 有

$$\begin{aligned}(a_0\cdot qx^j)'&=(a_0)'(qx^j)+(a_0)(qx^j)',\\(a_1x\cdot qx^j)'&=(a_1x)'(qx^j)+(a_1x)(qx^j)',\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\(a_mx^m\cdot qx^j)'&=(a_mx^m)'(qx^j)+(a_mx^m)(qx^j)'。\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&(f(x)\cdot qx^j)'\\=\ &(a_0\cdot qx^j+a_1x\cdot qx^j+\cdots+a_mx^m\cdot qx^j)'\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_0 \cdot qx^j)' + (a_1 x \cdot qx^j)' + \cdots + (a_m x^m \cdot qx^j)' \\
&= ((a_0)'(qx^j) + (a_0)(qx^j)') + ((a_1 x)'(qx^j) + (a_1 x)(qx^j)') \\
&\qquad + \cdots + ((a_m x^m)'(qx^j) + (a_m x^m)(qx^j)') \\
&= ((a_0)'(qx^j) + (a_1 x)'(qx^j) + \cdots + (a_m x^m)'(qx^j)) \\
&\qquad + ((a_0)(qx^j)' + (a_1 x)(qx^j)' + \cdots + (a_m x^m)(qx^j)') \\
&= ((a_0)' + (a_1 x)' + \cdots + (a_m x^m)')(qx^j) \\
&\qquad + (a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m)(qx^j)' \\
&= (a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m)'(qx^j) + f(x)(qx^j)' \\
&= f'(x)(qx^j) + f(x)(qx^j)'。
\end{aligned}
$$

再取 qx^j 为 b_0, $b_1 x$, $\cdots$, $b_n x^n$, 有

$$
\begin{gathered}
(f(x) \cdot b_0)' = f'(x)(b_0) + f(x)(b_0)', \\
(f(x) \cdot b_1 x)' = f'(x)(b_1 x) + f(x)(b_1 x)', \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
(f(x) \cdot b_n x^n)' = f'(x)(b_n x^n) + f(x)(b_n x^n)'。
\end{gathered}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&(f(x)g(x))' \\
&= (f(x) \cdot b_0 + f(x) \cdot b_1 x + \cdots + f(x) \cdot b_n x^n)' \\
&= (f(x) \cdot b_0)' + (f(x) \cdot b_1 x)' + \cdots + (f(x) \cdot b_n x^n)' \\
&= (f'(x)(b_0) + f(x)(b_0)') + (f'(x)(b_1 x) + f(x)(b_1 x)') \\
&\qquad + \cdots + (f'(x)(b_n x^n) + f(x)(b_n x^n)') \\
&= (f'(x)(b_0) + (f'(x)(b_1 x) + \cdots + f'(x)(b_n x^n)) \\
&\qquad + (f(x)(b_0)' + f(x)(b_1 x)' + \cdots f(x)(b_n x^n)') \\
&= f'(x)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) \\
&\qquad + f(x)((b_0)' + (b_1 x)' + \cdots + (b_n x^n)') \\
&= f'(x)g(x) + f(x)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n)' \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)。
\end{aligned}
$$

✌

例 考虑 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}[x]$。取

$$f(x) = x^3 + 2, \quad g(x) = x^2 + x - 1。$$

不难得到

$$f'(x) = 3x^2, \quad g'(x) = 2x + 1。$$

$f(x)$ 与 $g(x)$ 的积

$$f(x)g(x) = x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 + 2x - 2$$

的导数是

$$(f(x)g(x))' = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 4x + 2。$$

如果用上面的 $(\bigstar)$ 计算, 就是

$$\begin{aligned}
&f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
&= 3x^2(x^2 + x - 1) + (x^3 + 2)(2x + 1) \\
&= 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x^4 + x^3 + 4x + 2 \\
&= 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 4x + 2。
\end{aligned}$$

也许这不太能体现 $(\bigstar)$ 的作用: 算二个多项式积的导数时, 先拆再算好像没什么不方便的。的确如此。可是 $(\bigstar)$ 的推论

$$((f(x))^k)' = k(f(x))^{k-1}f'(x)$$

很有用。看下面的例。

例 还是考虑 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}[x]$。计算

$$\begin{aligned}
p(x) &= (g \circ f)(x) = (x^3 + 2)^2 + (x^3 + 2) - 1, \\
q(x) &= (f \circ g)(x) = (x^2 + x - 1)^3 + 2
\end{aligned}$$

的导数。

用定义写出 $p(x)$ 的导数并不是很难。因为

$$p(x) = (x^6 + 4x^3 + 4) + x^3 + 2 - 1 = x^6 + 5x^3 + 5,$$

故

$$p'(x) = 6x^5 + 15x^2。$$

不过用定义写出 $q(x)$ 就有点麻烦了: 三项的立方不是那么好算。但是, 我们利用这个推论, 可直接写出

$$q'(x) = 3(x^2 + x - 1)^2(2x + 1)。$$

记 $g(x) = x^k$。取 $f(x) \in D[x]$。不难看出,

$$(f(x))^k = (g \circ f)(x)。$$

所以

$$(g\circ f)'(x)=((f(x))^k)'=k(f(x))^{k-1}f'(x)=(g'\circ f)(x)f'(x)。$$

这告诉我们什么呢? 如果我们把 $f(x)$ 看成文字 y, 那么 $y^k\in D[y]$ 的导数是 ky^{k-1}。将此结果乘 $y=f(x)\in D[x]$ 的导数 $f'(x)$, 就是 $(g\circ f)(x)\in D[x]$ 的导数。

取 $h(x)=x\in D[x]$。那么 $(f\circ h)(x)$ 就是 $f(x)$。因为 $(x)'=1$, 所以

$$(f\circ h)'(x)=f'(x)=(f'\circ h)(x)h'(x)。$$

我们作出猜想: 任取 $f(x), g(x)\in D[x]$, 必有

$$(g\circ f)'(x)=(g'\circ f)(x)f'(x)。$$

幸运的事儿是, 这个猜想是正确的。

命题 设 $f(x), g(x)\in D[x]$。则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合的导数适合链规则 ($\mathit{the\ chain\ rule}$):

$$(g\circ f)'(x)=(g'\circ f)(x)f'(x)。$$

证 设

$$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}+b_nx^n\in D[x],$$

则

$$(g\circ f)(x)=b_0+b_1f(x)+b_2(f(x))^2+\cdots+b_{n-1}(f(x))^{n-1}+b_n(f(x))^n。$$

所以

$$\begin{aligned}
&(g\circ f)'(x)\\
&=b_1f'(x)+b_2((f(x))^2)'+\cdots+b_{n-1}((f(x))^{n-1})'+b_n((f(x))^n)'\\
&=b_1f'(x)+b_2\cdot 2f(x)f'(x)+\cdots+b_{n-1}\cdot(n-1)(f(x))^{n-2}f'(x)\\
&\qquad\qquad +b_n\cdot n(f(x))^{n-1}f'(x)\\
&=b_1f'(x)+2b_2f(x)f'(x)+\cdots+(n-1)b_{n-1}(f(x))^{n-2}f'(x)\\
&\qquad\qquad +nb_n(f(x))^{n-1}f'(x)\\
&=(b_1+2b_2f(x)+\cdots+(n-1)b_{n-1}(f(x))^{n-2}+nb_n(f(x))^{n-1})f'(x)\\
&=(g'\circ f)(x)f'(x)。
\end{aligned}$$

✌

例 我们用链规则计算 $p(x)$ 的导数:

$$p'(x)=(g'\circ f)(x)f'(x)=(2(x^3+2)+1)(3x^2)=3x^2(2x^3+5)。$$

这跟前面算出的 $6x^5+15x^2$ 是一致的。

Roots of Polynomials

我们回顾一下熟悉的多项式函数。

定义 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in D$。称

$$\begin{aligned} f\colon \quad & D \to D, \\ & t \mapsto a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \end{aligned}$$

为 D 的多项式函数 (*polynomial function*)。我们也说, 这个 f 是由 D 上 x 的多项式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

诱导的多项式函数 (*the polynomial function induced by* f)。不难看出, 若二个多项式相等, 则其诱导的多项式函数也相等。

定义 设 f 与 g 是 D 的二个多项式函数。二者的和 $f+g$ 定义为

$$\begin{aligned} f+g\colon \quad & D \to D, \\ & t \mapsto f(t) + g(t)。 \end{aligned}$$

二者的积 fg 定义为

$$\begin{aligned} fg\colon \quad & D \to D, \\ & t \mapsto f(t)g(t)。 \end{aligned}$$

设 f, g 是 D 的二个多项式函数:

$$\begin{aligned} f\colon \quad & D \to D, \\ & t \mapsto a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, \\ g\colon \quad & D \to D, \\ & t \mapsto b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n。 \end{aligned}$$

利用 D 的运算律, 可以得到

$$\begin{aligned} f+g\colon \quad & D \to D, \\ & t \mapsto (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n, \\ fg\colon \quad & D \to D, \\ & t \mapsto c_0 + c_1 t + \cdots + c_{2n} t^{2n}, \end{aligned}$$

其中

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0。$$

由此可得下面的命题:

命题 设 $f(x),\ g(x) \in D[x],\ f,\ g$ 分别是 $f(x),\ g(x)$ 诱导的多项式函数。那么 $f+g$ 是 $f(x)+g(x)$ 诱导的多项式函数, 且 fg 是 $f(x)g(x)$ 诱导的多项式函数。

通俗地说, 若多项式 $f_0(x),\ f_1(x),\ \cdots,\ f_{n-1}(x)$ 之间有一个由加法与乘法计算得到的关系, 那么将 x 换为 D 的元 t, 这样的关系仍成立。

例 考虑 $\mathbb{F}$ 与 $\mathbb{F}[x]$。前面, 利用带余除法, 得到关系

$$8x^6+1=(4x^3+12x-8)\cdot 2(x-1)^2(x+2)+(72x^2-96x+33)。$$

这里 x 只是一个文字, 不是数! 但是, 上面的命题告诉我们, 可以把 x 看成一个数。比如, 由上面的式可以立即看出, $8t^6+1$ 与 $72t^2-96t+33$ 在 $t=1$ 或 $t=-2$ 时值是一样的。

可是, 对于这样的式, 我们不能将 x 改写为 $\mathbb{F}$ 的元 t:

$$\deg 3x^2 < \deg 2x^3。$$

可以看到, 若 $t=0$, 则 $3t^2=2t^3=0$, 而 0 的次是 $-\infty$; 若 $t \neq 0$, 则 $3t^2$ 与 $2t^3$ 都是非零数, 次都是 0。

评注 我们已经知道, 多项式确定多项式函数。自然地, 有这样的问题: 多项式函数能否确定多项式? 一般情况下, 这个问题的答案是 no。

考虑 4 元集 V。作 V 上 x 的二个多项式:

$$f(x)=x^4-x, \quad g(x)=0。$$

显然, 这是二个不相等的多项式。但是, 任取 $t \in V$, 都有

$$t^4-t=0。$$

因此, $f(x)$ 与 $g(x)$ 诱导的多项式函数是同一函数!

不过, 在某些场合下, 多项式函数可以确定多项式。之后我们还会提到这一点。

评注 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \in D[x]$。设 t 是 D 的元。以后, 我们直接写

$$f(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n。$$

至少, 一方通行 (*one-way traffic*) 是没问题的。

顺便一提, $f(x)$ 的导数也是多项式:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}。$$

我们把

$$a_1 + 2a_2t + \cdots + na_nt^{n-1} \in D$$

简单地写为 $f'(t)$。

了解了多项式与多项式函数的关系后, 下面的这个命题就不会太凸兀了。

命题 设 $f(x) \in D[x]$ 是 n 次多项式 $(n \geq 1)$, $a \in D$。则存在 $n-1$ 次多项式 $q(x)$ $(\in D[x])$ 使

$$f(x) = q(x)(x-a) + f(a)。$$

根据带余除法, 这样的 $q(x)$ 一定是唯一的。

证 因为 $x-a$ 的首项系数 1 是单位, 故存在 $D[x]$ 的二元 $q(x)$, $r(x)$ 使

$$f(x) = q(x)(x-a) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg(x-a) = 1。$$

所以, $r(x) = c$, $c \in D$。用 D 的元 a 替换 x, 有

$$f(a) = q(a)(a-a) + c = c。$$

所以

$$f(x) = q(x)(x-a) + f(a)。$$

再看这个 $q(x)$ 的次。因为 $f(x)$ 的次不低于 $x-a$ 的次, 故

$$\deg q(x) = \deg f(x) - \deg(x-a) = n-1。$$ ✌

评注 如果用 D 的元 b 替换 x, 则

$$f(b) = (b-a)q(b) + f(a),$$

也就是说, 存在 $r \in D$ 使

$$f(b) - f(a) = (b-a)r。$$

所以, 若 $f(x) \in D[x]$ 是 n 次多项式 $(n \geq 1)$, $a, b \in D$, 则存在 $r \in D$ 使 $f(b) - f(a) = (b-a)r$。当 $f(x)$ 的次低于 1 时, 这个命题也对 (取 $r = 0$)。

举个简单的例。我们说, 不存在系数为整数的多项式 $f(x)$ 使 $f(1) = f(-1) + 1$。假如说这样的 f 存在, 那么应存在整数 r 使

$$1 = f(1) - f(-1) = (1-(-1))r = 2r,$$

而 1 不是偶数, 矛盾。

现在, 我们讨论多项式的根的基本性质。

定义 设 $f(x)$ 是 D 上 x 的多项式。若有 $a \in D$ 使 $f(a) = 0$, 则说 a 是 (多项式) $f(x)$ 的根 ($root$)。

例 设 $D \subset \mathbb{C}$, 且 $\mathbb{Z} \subset D$。看 D 上 x 的多项式

$$f(x) = (2x-1)(x+1)(x^2-3)(x^2+1)(x^2+4)。$$

如果 $D = \mathbb{Z}$, 则 $f(x)$ 有一个在 D 里的根: -1。如果 $D = \mathbb{Q}$, 则 $f(x)$ 有二个在 D 里的根: -1, $\frac{1}{2}$。如果 $D = \mathbb{R}$, 则 $f(x)$ 有四个在 D 里的根: -1, $\frac{1}{2}$, $\pm\sqrt{3}$。如果 $D = \mathbb{C}$, 则 $f(x)$ 有八个在 D 里的根: -1, $\frac{1}{2}$, $\pm\sqrt{3}$, $\pm\mathrm{i}$, $\pm 2\mathrm{i}$。

例 再来一个例。看 D 上 x 的多项式

$$f(x) = x^2 + x - 1。$$

若 $D = \mathbb{R}$, 则 $f(x)$ 的二个根是 $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$。若 $D = V$, 则 $f(x)$ 的二个根是 τ, τ^2。当然, 若 $D \subset \mathbb{Q}$, 则 $f(x)$ 无 (D 的) 根。

评注 设 $a, b \in D$, 且 $a \neq 0$。

若 $f(x) = a$, 则 $f(x)$ 无根。换句话说, 零次多项式至多有零个根。

再设 $f(x) = ax + b$ 是一次多项式。若存在 $c \in D$ 使 $b = ac$, 则 $f(x)$ 有一个根 $-c$。并且, $f(x)$ 也不会有另一个根 (若 $at_1 + b = at_2 + b$, 则 $at_1 = at_2$, 故 $t_1 = t_2$)。若这样的 c 不存在, 则 $f(x)$ 无根 (反设 $f(x)$ 有根 d, 则由 $ad + b = 0$ 知 $b = a(-d)$, 矛盾)。换句话说, 一次多项式至多有一个根。

结合上面的二个例, 我们猜想: n 次多项式 ($n \in \mathbb{N}$) 至多有 n 个 (不同的) 根。幸运的事儿是, 这个猜想是正确的。

命题 设 $f(x) \in D[x]$ 是 n 次多项式 ($n \geq 1$)。a 是 $f(x)$ 的根的一个必要与充分条件是: 存在 $n-1$ 次多项式 $q(x)$ ($\in D[x]$) 使

$$f(x) = q(x)(x-a)。$$

根据带余除法, 这样的 $q(x)$ 一定是唯一的。

证 先看充分性。若这样的 $q(x)$ 存在, 则

$$f(a) = q(a)(a-a) = 0。$$

再看必要性。设 $f(a) = 0$。根据上面的命题, 存在 $n-1$ 次多项式 $q(x) \in D[x]$ 使

$$f(x) = q(a)(x-a) + f(a) = q(a)(x-a)。$$ ✌

命题 设 $f(x) \in D[x]$ 是 n 次多项式 $(n \in \mathbb{N})$。则 $f(x)$ 至多有 n 个不同的根。

证 $n = 0$ 或 $n = 1$ 时, 我们已经知道这是对的。用数学归纳法。假设 ℓ 次多项式至多有 ℓ 个不同的根。看 $\ell + 1$ 次多项式 $f(x)$。如果它没有根, 当然至多有 $\ell + 1$ 个不同的根。如果它有一个根 a, 则存在 ℓ 次多项式 $q(x)$ 使

$$f(x) = q(x)(x - a)。$$

根据归纳假设, $q(x)$ 至多有 ℓ 个不同的根。而且, 若 $b \neq a$, 且 b 不是 $q(x)$ 的根, 利用消去律可知 $f(b) \neq 0$。这样, $f(x)$ 至多有 $\ell + 1$ 个不同的根。 ✌

由此可推出一个很有用的事实:

命题 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是 D 的元。设 n 是非负整数。设

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n。$$

若 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ 是 $n + 1$ 个互不相同的 D 的元, 且

$$f(t_0) = f(t_1) = \cdots = f(t_n) = 0,$$

则 $f(x)$ 必为零多项式。通俗地说, 次不高于 n (且系数为整环的元) 的多项式不可能有 n 个以上的互不相同的根, 除非这个多项式是零。

证 反证法。设 $f(x)$ 不是零多项式。设 $f(x)$ 的次为 m, 则 $0 \leq m \leq n$。根据上个命题, $f(x)$ 至多有 m 个不同的根, 这与题设矛盾! 故 $f(x) = 0$。 ✌

评注 再看前面提到的 4 元集 V。可以看出, 因为 V 的元 “不够多”, 所以出现了取零值的非零多项式。

此事实的一个推论是:

命题 设 $a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n$ 是 D 的元。设 n 是非负整数。设

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n。$$

若 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ 是 $n + 1$ 个互不相同的 D 的元, 且

$$f(t_0) = g(t_0), \quad f(t_1) = g(t_1), \quad \cdots, \quad f(t_n) = g(t_n),$$

则 $f(x)$ 必等于 $g(x)$。通俗地说, 若次不高于 n (且系数为整环的元) 的二个多项式若在多于 n 处取一样的值, 则这二个多项式相等。

证 考虑 $h(x) = f(x) - g(x)$。则 $\deg h(x) \leq n$。$h(x)$ 有 $n+1$ 个不同的根。根据上个命题, $h(x)$ 是零多项式。这样, $f(x) = g(x)$。 ✌

在中学, 我们学过解一元二次方程 $at^2 + bt + c = 0$ (a, b, c 为实数, 且 $a \neq 0$) 的一种方法: 直接套用公式

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

其中

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

是判别式: 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有二个不等的实数解; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有二个相等的实数解; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数解。

当 $\Delta = 0$ 时, $c = \frac{b^2}{4a}$, 则

$$at^2 + bt + c = a\left(t^2 + 2\frac{b}{2a}t + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) = a\left(t + \frac{b}{2a}\right)^2。$$

记

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \in \mathbb{R}[x]。$$

根据根的定义, $-\frac{b}{2a} \in \mathbb{R}$ 是 $f(x)$ 的根。我们发现, 这个根 “出现了” 2 次, 是重复的。我们给这样的根一个特殊点的称呼。

定义 设 $a \in D$ 是多项式 $f(x) \in D[x]$ 的根。那么, 存在唯一的多项式 $q(x) \in D[x]$ 使

$$f(x) = (x - a)q(x)。$$

若 $q(a) = 0$, 则说 a 是 $f(x)$ 的一个重根 (*multiple root*)。若 $q(a) \neq 0$, 则说 a 是 $f(x)$ 的一个单根 (*simple root*)。

例 看 Z 上 x 的多项式

$$f(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 2)(x - 1)^2(x + 2)。$$

显然, $f(x)$ 的根是 1 与 -2。因为

$$f(x) = (x + 2)\underbrace{(x^2 - 3)(x^2 + 2)(x - 1)^2}_{q_1(x)},$$

且 $q_1(x) \neq 0$, 故 -2 是 $f(x)$ 的单根。类似地, 由于

$$f(x) = (x - 1)\underbrace{(x^2 - 3)(x^2 + 2)(x - 1)(x + 2)}_{q_2(x)},$$

且 $q_2(x) = 0$, 故 1 是 $f(x)$ 的重根。

命题 设 $a \in D$ 是多项式 $f(x) \in D[x]$ 的根。则:
(i) 若 a 是 $f(x)$ 的重根, 则 a 是 $f'(x)$ 的根;
(ii) 若 a 是 $f(x)$ 的单根, 则 a 不是 $f'(x)$ 的根。
所以, $f(x)$ 有重根的一个必要与充分条件是: $f(x)$ 与 $f'(x)$ 有公共根。

证 因为 a 是 $f(x)$ 的根, 故存在唯一的 $q(x)$ 使

$$f(x) = (x-a)q(x)。$$

从而

$$f'(x) = (x-a)'q(x) + (x-a)q'(x) = q(x) + (x-a)q'(x)。$$

这样

$$f'(a) = q(a) + (a-a)q'(a) = q(a)。$$

(i) 若 a 是 $f(x)$ 的重根, 则 $q(a) = 0$, 故 $f'(a) = 0$。
(ii) 若 a 是 $f(x)$ 的单根, 则 $q(a) \neq 0$, 故 $f'(a) \neq 0$。 ✌

例 我们看

$$f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x], \quad a \neq 0。$$

它的导数 $f'(x) = 2ax + b$ 恰有一个根 $t_0 = -\frac{b}{2a}$。由上个命题, $f(x)$ 有重根相当于 $f(t_0) = 0$, 即

$$0 = f(t_0) = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}。$$

Polynomials over $\mathbb{F}$

我们在前几节讨论的都是整环 D 上的多项式, 所以它们看上去是有些抽象的。从现在开始, 我们不讨论抽象的 D 与 $D[x]$, 而是讨论 $\mathbb{F}$ 与 $\mathbb{F}[x]$, 其中 $\mathbb{F}$ 可代指 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 的任意一个。细心的读者会注意到我们在前几节未使用 $\sum$ 符号。这是为了让读者没那么困难地适应多项式理论。从本节起, 我们会较多地使用这个 $\sum$。您也可以乘此机会让自己熟悉它。当然, 我们偶尔也会使用 $\prod$ 符号。

本节并没有什么新的知识。您可以乘此机会温习一下所学内容。我们将重述一些定义与命题。我们在学校学数学的时候, 也会有复习课。就当本节就是 “复习节” 吧!

先从多项式的定义与运算开始。

定义 设 x 是不在 $\mathbb{F}$ 里的任意一个文字。形如

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \\ &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad (n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F},\ a_n \neq 0) \end{aligned}$$

的表达式称为 $\mathbb{F}$ 上 x 的一个多项式。n 称为其次, a_i 称为其 i 次系数, $a_i x^i$ 称为其 i 次项。$f(x)$ 的次可写为 $\deg f(x)$。

若二个多项式的次与各同次系数均相等, 则二者相等。

多项式的系数为 0 的项可以不写。

约定 $0 \in \mathbb{F}$ 也是多项式, 称为零多项式。零多项式的次是 $-\infty$。任取整数 m, 约定

$$\begin{aligned} &-\infty = -\infty, \quad -\infty < m, \\ &-\infty + m = m + (-\infty) = -\infty + (-\infty) = -\infty。 \end{aligned}$$

当然, 还约定, 零多项式只跟自己相等。换句话说,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$$

的一个必要与充分条件是

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0。$$

$\mathbb{F}$ 上 x 的所有多项式作成的集是 $\mathbb{F}[x]$:

$$\mathbb{F}[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F} \right\}。$$

文字 x 只是一个符号, 它与 $\mathbb{F}$ 的元的和与积都是形式的。我们说, x 是不定元。

定义 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \in \mathbb{F}[x]。$$

规定加法如下:

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i。$$

命题 设 $f(x)$, $g(x)$, $h(x) \in \mathbb{F}[x]$。$\mathbb{F}[x]$ 的加法适合如下性质:

(i) $f(x) + g(x) \in \mathbb{F}[x]$;

(ii) $(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$;
(iii) 存在多项式 0 使 $0+f(x)=f(x)+0=f(x)$;
(iv) 存在多项式 $-f(x)$ 使 $-f(x)+f(x)=f(x)+(-f(x))=0$;
(v) $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$。

定义 设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad g(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i \in \mathbb{F}[x]。$$

则

$$-g(x)=\sum_{i=0}^{n} (-b_i) x^i。$$

规定减法如下:

$$f(x)-g(x)=f(x)+(-g(x))。$$

命题 设 $f(x)$, $g(x) \in \mathbb{F}[x]$。则

$$\deg(f(x) \pm g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}。$$

若 $\deg f(x) > \deg g(x)$, 则

$$\deg(f(x) \pm g(x)) = \deg f(x)。$$

类似地, 若 $\deg f(x) < \deg g(x)$, 则

$$\deg(f(x) \pm g(x)) = \deg g(x)。$$

定义 设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{F}[x]。$$

这称为 $f(x)$ 的升次排列。下面的写法称为 $f(x)$ 的降次排列:

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} x^{n-j} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0。$$

(非零) 多项式的最高次非零项是首项。它的系数是此多项式的首项系数。

定义 设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \quad g(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in \mathbb{F}[x]。$$

规定乘法如下:

$$f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}\right)x^k。$$

命题 设 $m,\, n\in\mathbb{N},\, p,\, q\in\mathbb{F}$。则

$$px^i\cdot qx^j=(px^i)(qx^j)=(pq)x^{i+j}。$$

命题 设 $f(x),\, g(x)\in\mathbb{F}[x]$。则

$$\deg f(x)g(x)=\deg f(x)+\deg g(x)。$$

命题 设 $f(x),\, g(x),\, h(x)\in\mathbb{F}[x]$。$\mathbb{F}[x]$ 的加法与乘法适合 (i) 至 (v) 及如下性质:

(vi) $f(x)g(x)\in\mathbb{F}[x]$;

(vii) $(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$;

(viii) 存在多项式 1 使 $1f(x)=f(x)1=f(x)$;

(ix) $(-1)f(x)=-f(x)$;

(x) $f(x)g(x)=g(x)f(x)$;

(xi) 若 $f(x)\neq 0$, 则

$$\begin{aligned}f(x)g(x)=f(x)h(x)&\implies g(x)=h(x),\\ g(x)f(x)=h(x)f(x)&\implies g(x)=h(x);\end{aligned}$$

(xii) 二个分配律都对:

$$\begin{aligned}f(x)(g(x)+h(x))&=f(x)g(x)+f(x)h(x),\\ (g(x)+h(x))f(x)&=g(x)f(x)+h(x)f(x)。\end{aligned}$$

评注 $\mathbb{F}[x]$ 的一个名字就是 (域) $\mathbb{F}$ 上 (x) 的多项式环。

定义 设 $m\in\mathbb{N}$。多项式 $f(x)$ 的 m 次幂就是 m 个 $f(x)$ 的积:

$$(f(x))^m=\underbrace{f(x)\cdot f(x)\cdot\dots\cdot f(x)}_{m\ f(x)\text{'s}}=\prod_{\ell=0}^{m-1}f(x)。$$

设 $m,\, n\in\mathbb{N},\, f(x),\, g(x)\in\mathbb{F}[x]$, 则多项式的幂适合如下规则:

$$\begin{aligned}&(f(x))^m(f(x))^n=(f(x))^{m+n},\\ &((f(x))^m)^n=(f(x))^{mn},\\ &(f(x)g(x))^m=(f(x))^m(g(x))^m。\end{aligned}$$

命题 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$。非零的 $c \in \mathbb{F}$ 是 0 次多项式, 那么

$$\deg cf(x) = \deg f(x)。$$

再来看多项式的带余除法。因为 $\mathbb{F}$ 的每个非零元都是 $\mathbb{F}$ 的单位, 所以有

命题 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是非零多项式。对任意 $g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 存在唯一的 $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg f(x)。$$

一般称其为带余除法: $q(x)$ 就是商; $r(x)$ 就是余式。并且, 当 $f(x)$ 的次不高于 $g(x)$ 的次时, $f(x)$, $g(x)$, $q(x)$ 间还有如下的次关系:

$$\deg g(x) = \deg(g(x) - r(x)) = \deg q(x) + \deg f(x)。$$

可以看到, 在 $\mathbb{F}[x]$ 里, 带余除法的适用范围更广了。

下面回顾多项式的相等。我们借助 “线性无关” 讨论相等问题。

定义 设 $p_0(x)$, $p_1(x)$, ⋯, $p_n(x) \in \mathbb{F}[x]$。设 c_0, c_1, ⋯, $c_n \in \mathbb{F}$。我们说

$$\sum_{i=0}^{n} c_i p_i(x)$$

是多项式 $p_0(x)$, $p_1(x)$, ⋯, $p_n(x)$ 的一个线性组合。c_0, c_1, ⋯, c_n 就是此线性组合的系数。

若不存在一组不全为 0 的 $\mathbb{F}$ 中元 d_0, d_1, ⋯, d_n 使

$$\sum_{i=0}^{n} d_i p_i(x) = 0,$$

则说 $p_0(x)$, $p_1(x)$, ⋯, $p_n(x)$ 是线性无关的。换句话说, “$p_0(x)$, $p_1(x)$, ⋯, $p_n(x)$ 是线性无关的” 意味着: 若 $\mathbb{F}$ 中元 r_0, r_1, ⋯, r_n 使

$$\sum_{i=0}^{n} r_i p_i(x) = 0,$$

则 $r_0 = r_1 = \cdots = r_n = 0$。

命题 设 $p_0(x)$, $p_1(x)$, ⋯, $p_n(x) \in \mathbb{F}[x]$ 分别是 0, 1, ⋯, n 次多项式。则:

(i) $p_0(x)$, $p_1(x)$, ⋯, $p_n(x)$ 是线性无关的;

(ii) 任意次不高于 n 的多项式都可唯一地写为 $p_0(x)$, $p_1(x)$, ⋯, $p_n(x)$ 的线性组合。

由于 $\mathbb{F}$ 的每个非零元都是单位, 上面的命题的结论变强了。下面的例体现了这一点。

例 考虑 $\mathbb{F}$ 与 $\mathbb{F}[x]$。取 $n=2$, 及

$$p_0(x)=-1,\quad p_1(x)=2x,\quad p_2(x)=3x^2。$$

这三个多项式是线性无关的。考虑 $f(x)=3+x-2x^2$。设 $c_0, c_1, c_2\in\mathbb{F}$ 使

$$3+x-2x^2=c_0\cdot(-1)+c_1\cdot 2x+c_2\cdot 3x^2。$$

这相当于

$$3=-c_0,\quad 1=2c_1,\quad -2=3c_2。$$

由此可得

$$c_0=-3,\quad c_1=\frac{1}{2},\quad c_2=-\frac{2}{3}。$$

可以看到, 在 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}[x]$ 里 $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ 的线性组合还不能表示这个 $f(x)$, 但当我们在 "大环境" $\mathbb{F}$ 与 $\mathbb{F}[x]$ 下讨论问题时就可以了。

命题 设 $a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n\in\mathbb{F}$。设 $c\in\mathbb{F}$。再设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x-c)^i,\quad g(x)=\sum_{i=0}^{n}b_i(x-c)^i。$$

则 $f(x)=g(x)$ 的一个必要与充分条件是

$$a_0=b_0,\quad a_1=b_1,\quad \cdots,\quad a_n=b_n。$$

并且, 任取

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}u_ix^i\in\mathbb{F}[x],$$

必存在 $v_0, v_1, \cdots, v_n\in\mathbb{F}$ 使

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}v_i(x-c)^i。$$

我们看看多项式的导数。

定义 设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in\mathbb{F}[x]。$$

$f(x)$ 的导数是多项式

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{n} ia_i x^{i-1}\in\mathbb{F}[x]。$$

$f'(x)$ 也可写为 $(f(x))'$。

评注 若 $f(x)=c$, $c\in\mathbb{F}$, 则 $f'(x)$ 为零多项式。

定义 设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i,\quad g(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j$$

为 $\mathbb{F}[x]$ 中的二个元。我们称

$$(g\circ f)(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j(f(x))^j$$

为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合。

命题 多项式的复合适合结合律。具体地说, 设 $f(x), g(x), h(x)\in\mathbb{F}[x]$, 则

$$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ(g\circ f))(x)。$$

命题 设 $f(x), g(x)\in\mathbb{F}[x]$, $c\in\mathbb{F}$。则

(i) $(cf(x))'=cf'(x)$;

(ii) $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$。

由 (i) (ii) 与数学归纳法可知: 当 c_0, c_1, ⋯, $c_{k-1}\in\mathbb{F}$, 且 $f_0(x)$, $f_1(x)$, ⋯, $f_{k-1}(x)\in\mathbb{F}[x]$ 时,

$$\left(\sum_{\ell=0}^{k-1} c_\ell f_\ell(x)\right)'=\sum_{\ell=0}^{k-1} c_\ell f_\ell'(x)。$$

命题 设 $f(x), g(x)\in\mathbb{F}[x]$。则

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)。\tag{★}$$

由 (★) 与数学归纳法可知: 当 $f_0(x)$, $f_1(x)$, ⋯, $f_{k-1}(x)\in\mathbb{F}[x]$ 时,

$$\begin{aligned}&(f_0(x)f_1(x)\cdots f_{k-1}(x))'\\ &=f_0'(x)f_1(x)\cdots f_{k-1}(x)+f_0(x)f_1'(x)\cdots f_{k-1}(x)+\cdots\\ &\qquad+f_0(x)f_1(x)\cdots f_{k-1}'(x)。\end{aligned}$$

取 $f_0(x)=f_1(x)=\cdots=f_{k-1}(x)=f(x)$ 知

$$(f(x))^k=k(f(x))^{k-1}f'(x)。$$

命题 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$。则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合的导数适合链规则:

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) f'(x)。$$

最后, 我们回顾多项式函数与多项式的根。

定义 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$。称

$$\begin{aligned} f\colon \quad & \mathbb{F} \to \mathbb{F}, \\ & t \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \end{aligned}$$

为 $\mathbb{F}$ 的多项式函数。我们也说, 这个 f 是由 $\mathbb{F}$ 上 x 的多项式

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

诱导的多项式函数。不难看出, 若二个多项式相等, 则其诱导的多项式函数也相等。

定义 设 f 与 g 是 $\mathbb{F}$ 的二个多项式函数。二者的和 $f+g$ 定义为

$$\begin{aligned} f+g\colon \quad & \mathbb{F} \to \mathbb{F}, \\ & t \mapsto f(t) + g(t)。 \end{aligned}$$

二者的积 fg 定义为

$$\begin{aligned} fg\colon \quad & \mathbb{F} \to \mathbb{F}, \\ & t \mapsto f(t) g(t)。 \end{aligned}$$

设 f, g 是 $\mathbb{F}$ 的二个多项式函数:

$$\begin{aligned} f\colon \quad & \mathbb{F} \to \mathbb{F}, \\ & t \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i t^i, \\ g\colon \quad & \mathbb{F} \to \mathbb{F}, \\ & t \mapsto \sum_{i=0}^{n} b_i t^i。 \end{aligned}$$

利用 $\mathbb{F}$ 的运算律, 可以得到

$$\begin{aligned} f+g\colon \quad & \mathbb{F} \to \mathbb{F}, \\ & t \mapsto \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) t^i, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
fg\colon \qquad & \mathbb{F} \to \mathbb{F}, \\
& t \mapsto \sum_{i=0}^{2n} \left(\sum_{\ell=0}^{i} a_\ell b_{i-\ell} \right) t^i。
\end{aligned}
$$

由此可得下面的命题:

命题 设 $f(x)$, $g(x) \in \mathbb{F}[x]$, f, g 分别是 $f(x)$, $g(x)$ 诱导的多项式函数。那么 $f+g$ 是 $f(x)+g(x)$ 诱导的多项式函数, 且 fg 是 $f(x)g(x)$ 诱导的多项式函数。

通俗地说, 若多项式 $f_0(x)$, $f_1(x)$, ···, $f_{n-1}(x)$ 之间有一个由加法与乘法计算得到的关系, 那么将 x 换为 $\mathbb{F}$ 的元 t, 这样的关系仍成立。

定义 设

$$
f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{F}[x]。
$$

设 $t \in \mathbb{F}$。我们把 $\mathbb{F}$ 的元

$$
\sum_{i=0}^{n} a_i t^i
$$

简单地写为 $f(t)$。

顺便一提, $f(x)$ 的导数也是多项式:

$$
f'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}。
$$

我们把

$$
\sum_{i=1}^{n} i a_i t^{i-1} \in \mathbb{F}
$$

简单地写为 $f'(t)$。

下面是带余除法的推论。它在根的讨论里起了重要的作用。

命题 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是 n 次多项式 $(n \geq 1)$, $a \in \mathbb{F}$。则存在 $n-1$ 次多项式 $q(x)$ $(\in \mathbb{F}[x])$ 使

$$
f(x) = q(x)(x-a) + f(a)。
$$

根据带余除法, 这样的 $q(x)$ 一定是唯一的。

定义 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上 x 的多项式。若有 $a \in \mathbb{F}$ 使 $f(a) = 0$, 则说 a 是 (多项式) $f(x)$ 的根。

命题 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是 n 次多项式 $(n \geq 1)$。a 是 $f(x)$ 的根的一个必要与充分条件是: 存在 $n-1$ 次多项式 $q(x)$ $(\in \mathbb{F}[x])$ 使

$$f(x) = q(x)(x-a)。$$

根据带余除法, 这样的 $q(x)$ 一定是唯一的。

命题 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是 n 次多项式 $(n \in \mathbb{N})$。则 $f(x)$ 至多有 n 个不同的根。

评注 在上节, 我们知道, 整环 D 上的多项式 $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ 不一定有根。可是, 在域 $\mathbb{F}$ 里, $f(x)$ 就有根 $-\frac{b}{a}$。

命题 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是 $\mathbb{F}$ 的元。设 n 是非负整数。设

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i。$$

若 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ 是 $n+1$ 个互不相同的 $\mathbb{F}$ 的元, 且

$$f(t_0) = f(t_1) = \cdots = f(t_n) = 0,$$

则 $f(x)$ 必为零多项式。通俗地说, 次不高于 n (且系数为 $\mathbb{F}$ 的元) 的多项式不可能有 n 个以上的互不相同的根, 除非这个多项式是零。

命题 设 $a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n$ 是 $\mathbb{F}$ 的元。设 n 是非负整数。设

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i。$$

若 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ 是 $n+1$ 个互不相同的 $\mathbb{F}$ 的元, 且

$$f(t_0) = g(t_0), \quad f(t_1) = g(t_1), \quad \cdots, \quad f(t_n) = g(t_n),$$

则 $f(x)$ 必等于 $g(x)$。通俗地说, 若次不高于 n (且系数为 $\mathbb{F}$ 的元) 的二个多项式若在多于 n 处取一样的值, 则这二个多项式相等。

定义 设 $a \in \mathbb{F}$ 是多项式 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 的根。那么, 存在唯一的多项式 $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$f(x) = (x-a)q(x)。$$

若 $q(a) = 0$, 则说 a 是 $f(x)$ 的一个重根。若 $q(a) \neq 0$, 则说 a 是 $f(x)$ 的一个单根。

命题 设 $a \in \mathbb{F}$ 是多项式 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 的根。则:
(i) 若 a 是 $f(x)$ 的重根, 则 a 是 $f'(x)$ 的根;
(ii) 若 a 是 $f(x)$ 的单根, 则 a 不是 $f'(x)$ 的根。
所以, $f(x)$ 有重根的一个必要与充分条件是: $f(x)$ 与 $f'(x)$ 有公共根。

下面是一些新命题。由于 $\mathbb{F}$ 里有无数多个元, 所以

命题 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$。设 $S \subset \mathbb{F}$, 且 S 有无数多个元。若任取 $t \in S$, 必有 $f(t) = 0$, 则 $f(x)$ 必为零多项式。通俗地说, 系数为 $\mathbb{F}$ 的元的多项式不可能有无数多个根, 除非这个多项式是零。

证 $f(x)$ 的次不可能是非负整数。所以 $f(x)$ 只能是 0。 ✌

由此立得

命题 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$。设 $S \subset \mathbb{F}$, 且 S 有无数多个元。若任取 $t \in S$, 必有 $f(t) = g(t)$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是二个相同的多项式。通俗地说, 若系数为 $\mathbb{F}$ 的元的二个多项式在无数多个地方有相同的取值, 则这二个多项式必相等。

证 考虑 $h(x) = f(x) - g(x)$, 并利用上个命题。 ✌

前面已经知道, 多项式确定多项式函数。利用上面的命题, 我们有

命题 $\mathbb{F}$ 上的多项式与 $\mathbb{F}$ 的多项式函数是一一对应的: 不但二个不同的 $\mathbb{F}$ 上的多项式给出二个不同的 $\mathbb{F}$ 的多项式函数, 而且二个不同的 $\mathbb{F}$ 的多项式函数给出二个不同的 $\mathbb{F}$ 上的多项式。

评注 以后, 我们不再区分 “多项式” 与 “多项式函数”。从现在开始, 您可以认为本文接下来讨论的 “多项式” 跟中学里的多项式是同一事物。

Interpolation

本节讨论多项式插值问题。
“插值” 听上去可能比较陌生。不过, 您在初中一定见过这样的问题:

例 已知一次函数的图像经过点 $(-1, 2)$ 与 $(1, 3)$, 求其解析式。

例 已知二次函数的图像经过点 $(-1, -1)$, $(1, 1)$ 与 $(2, 5)$, 求其解析式。

在初中, 我们是用 "待定系数法" (*the method of undetermined coefficients*) 求解的。它的基本思想是 "求什么, 设什么"。设此一次函数的解析式为

$$y = ax + b, \quad a \neq 0。$$

代入已知条件, 得到二元一次方程组

$$\begin{cases} 2 = -a + b, \\ 3 = a + b。\end{cases}$$

由此可解出

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{5}{2}。$$

所以此一次函数的解析式为

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}。$$

完全类似地, 设此二次函数的解析式为

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0。$$

代入已知条件, 得到三元一次方程组

$$\begin{cases} -1 = a - b + c, \\ 1 = a + b + c, \\ 5 = 4a + 2b + c。\end{cases}$$

由此可解出

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = -1。$$

所以此二次函数的解析式为

$$y = x^2 + x - 1。$$

在初中, 一般用左 y 右 x 的等式表示函数 (的解析式)。这种表示法强调因变元 (*dependent variable*) y 与自变元 (*independent variable*) x 的关系。不过, 既然我们有 $f(x)$ 这样的记号, 那么因变元就不必写出了。并且, 我们在前节提到, 我们不再区分多项式与多项式函数。所以, 为方便, 我们用另一种方式叙述这二个问题:

例 求次为 1 的多项式 $f(x)$, 使 $f(-1) = 2$, $f(1) = 3$。

例 求次为 2 的多项式 $f(x)$, 使 $f(-1)=-1$, $f(1)=1$, $f(2)=5$。

设 x_0, x_1, ⋯, x_n 是 $\mathbb{F}$ 的 $n+1$ 个互不相同的元。这 $n+1$ 个不同的元称为 $n+1$ 个节点 ($node$)。设 y_0, y_1, ⋯, $y_n \in \mathbb{F}$。通俗地说, 多项式插值 ($polynomial\ interpolation$) 的任务是: 找一个多项式 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ 使

$$f(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\cdots,n),$$

且适合 “附加条件”。

这里, “附加条件” 是有必要的: 如果太松, 可能找出的 $f(x)$ 不止一个; 如果太紧, 则可能找不到 $f(x)$。

例 找一个多项式 $f(x)$ 使 $f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$。

如果不作任何别的约束, 那么 n 是奇数时, $f(x)=x^n$ 适合这些条件。不仅如此, 下面的多项式也适合条件:

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^5, \quad -x+2x^7, \quad \frac{x+x^3+\cdots+x^{2k-1}}{k}。$$

在初中, 我们知道, 若平面直角坐标系的三点 A, B, C 不在同一直线上, 且任意二点的连线既不与 y 轴平行也不与 y 轴重合, 则存在 (唯一的) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 使其图像过此三点。假如 “附加条件” 是 “$f(x)$ 是次为 2 的多项式” 呢? 设

$$f(x)=ax^2+bx+c, \quad a\neq 0。$$

代入已知条件, 得到三元一次方程组

$$\begin{cases}-1=a-b+c,\\ 0=c,\\ 1=a+b+c。\end{cases}$$

由此可解出

$$a=0, \quad b=1, \quad c=0。$$

这与假定 $a\neq 0$ 不符。所以, 这个条件太紧了。

有没有什么 “松紧得当的” “附加条件” 呢? 回想一下这个命题:

命题 设 a_0, b_0, a_1, b_1, ⋯, a_n, b_n 是 $\mathbb{F}$ 的元。设 n 是非负整数。设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i, \quad g(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i。$$

若 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ 是 $n+1$ 个互不相同的 $\mathbb{F}$ 的元, 且

$$f(t_0) = g(t_0), \quad f(t_1) = g(t_1), \quad \cdots, \quad f(t_n) = g(t_n),$$

则 $f(x)$ 必等于 $g(x)$。通俗地说, 若次不高于 n (且系数为 $\mathbb{F}$ 的元) 的二个多项式若在多于 n 处取一样的值, 则这二个多项式相等。

由此, 我们可以试着作出这样的 "附加条件": 多项式的次低于节点数。至少, 这个条件不是太松: 因为上面的命题说, 这样的多项式若存在, 必唯一。

这个 "附加条件" 一定能让我们求出这个多项式吗? 不好说。

例 如果把 $\mathbb{F}$ 跟 $\mathbb{F}[x]$ 改为 $\mathbb{Z}$ 跟 $\mathbb{Z}[x]$, 那么就没有 1 次多项式 $f(x)$ 使 $f(-1) = 2$, $f(1) = 3$。为啥? 看二元一次方程组

$$\begin{cases} 2 = -a + b, \\ 3 = a + b。\end{cases}$$

二式相加, 可得 $5 = 2b$。可是, 如果 b 是整数, 那么 $2b$ 是偶数。偶数 $2b$ 不可能等于奇数 5 呀!

具体地说, 设次低于节点数 $n+1$ 的多项式

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{F}[x]$$

适合

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n),$$

则可得到下面的方程组:

$$\begin{cases} y_0 = 1a_0 + x_0 a_1 + \cdots + x_0^n a_n, \\ y_1 = 1a_0 + x_1 a_1 + \cdots + x_1^n a_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ y_n = 1a_0 + x_n a_1 + \cdots + x_n^n a_n。\end{cases}$$

这是一个有 $n+1$ 个 $n+1$ 元一次方程的方程组, 且未知元是 a_0, a_1, $\cdots$, a_n。假如我们能解出这个方程组, 且这个方程组的解 "不超出 $\mathbb{F}$ 的范围" (我们说, 上面的二元一次方程组超出了 $\mathbb{Z}$ 的范围, 但没有超出 $\mathbb{F}$ 的范围), 那么就能说明 "多项式的次低于节点数" 这个 "附加条件" 是 "松紧得当的"。

可惜, 我们在初中并没有研究一般的多元一次方程组。我们在学习二 (三) 元一次方程组的时候, 主要学习怎么用代入消元法与加减消元法解方程组, 并没有过多地讨论方程组什么时候有解与解的结构这样的问题。

我们换一个角度看问题。首先, 我们有如下命题:

命题 设 $t_0, t_1, \cdots, t_{s-1} \in \mathbb{F}$ 互不相同。则 $t_0, t_1, \cdots, t_{s-1}$ $(1 \leq s \leq n)$ 是 n 次多项式 $f(x)$ 的根的一个必要与充分条件是：存在 $n-s$ 次多项式 $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$f(x) = (x-t_0)(x-t_1)\cdots(x-t_{s-1})q(x)。$$

证 先看充分性。既然 $f(x)$ 能写为这种形式，将 x 换为 t_i $(i=0, 1, \cdots, s-1)$，则有 $f(t_i)=0$。

再看必要性。因为 t_0 是 $f(x)$ 的根，故存在 $n-1$ 次多项式 $q_1(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$f(x) = (x-t_0)q_1(x)。$$

设 t_j 是 $t_1, t_2, \cdots, t_{s-1}$ 的一个。则 $t_j \neq t_0$。因为 t_j 也是 $f(x)$ 的根，故

$$(t_j-t_0)q_1(t_j) = f(t_j) = 0 = (t_j-t_0)0。$$

根据消去律，$q_1(t_j)=0$。这样，$t_1, \cdots, t_{s-1}$ 这 $s-1$ 个 $\mathbb{F}$ 中元是 $q_1(x)$ 的根。所以，对 $q_1(x)$ 来说，存在 $n-1-1=n-2$ 次多项式 $q_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$q_1(x) = (x-t_1)q_2(x) \implies f(x) = (x-t_0)(x-t_1)q_2(x),$$

且 $t_2, \cdots, t_{s-1}$ 这 $s-2$ 个 $\mathbb{F}$ 中元是 $q_2(x)$ 的根。再将这个过程进行 $s-2$ 次，可得到 $n-s$ 次多项式 $q_s(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使

$$f(x) = (x-t_0)(x-t_1)\cdots(x-t_{s-1})q_s(x)。$$

取 $q(x) = q_s(x)$ 即可。 ✌

例 我们考虑非常特殊的情形。如果 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 中恰有一个是 1，而剩下的全是 0，那这样的多项式应该长什么样呢？

以 $y_0=1, y_1=y_2=\cdots=y_n=0$ 为例。这样，多项式 $f(x)$ 有根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。根据上个命题，存在多项式 $q(x)$ 使

$$f(x) = q(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)。$$

因为 $f(x)$ 的次低于 $n+1$，而 $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ 的次为 n，故 $q(x)$ 一定是非零的数 c，即

$$f(x) = c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)。$$

因为 $f(x_0)=y_0=1$，故

$$1 = c(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n),$$

也就是

$$c = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)}。$$

故

$$f(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)}。$$

类似地, 适合条件 $y_1 = 1$, $y_0 = y_2 = y_3 = \cdots = y_n = 0$ 的多项式是

$$\frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n)}。$$

可以将这个多项式简单地写为

$$\prod_{\substack{0\leq \ell \leq n\\ \ell\neq 1}} \frac{x - x_\ell}{x_1 - x_\ell}。$$

上面的 $f(x)$ 也可以写为

$$\prod_{\substack{0\leq \ell \leq n\\ \ell\neq 0}} \frac{x - x_\ell}{x_0 - x_\ell}。$$

回到一般的设定 (也就是说, y_0, y_1, ⋯, y_n 是 $\mathbb{F}$ 的任意元)。作 $n+1$ 个多项式

$$L_i(x) = \prod_{\substack{0\leq \ell \leq n\\ \ell\neq i}} \frac{x - x_\ell}{x_i - x_\ell} \quad (i = 0, 1, \cdots, n)。$$

不难看出, 任取 $i, j = 0, 1, \cdots, n$,

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j。\end{cases}$$

所以,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

适合条件

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n),$$

且

$$\deg f(x) \leq n < n + 1。$$

综合上面的事实, 我们已经证明了

命题 设 x_0, x_1, …, x_n 是 $\mathbb{F}$ 的 $n+1$ 个互不相同的元。设 y_0, y_1, …, $y_n \in \mathbb{F}$。存在唯一的多项式

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{0 \le \ell \le n \\ \ell \ne i}} \frac{x - x_\ell}{x_i - x_\ell}$$

适合条件

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n),$$

且

$$\deg f(x) < n + 1。$$

这个公式以 "Lagrange 插值公式" (*Lagrange's interpolation formula*) 之名闻名全球。

评注 我们在前面接触的线性无关的多项式组 (几乎都) 是次不等的多项式。Lagrange 插值公式告诉我们, $L_0(x)$, $L_1(x)$, …, $L_n(x)$ 适合:

(i) $L_0(x)$, $L_1(x)$, …, $L_n(x)$ 是线性无关的;

(ii) 任意次不高于 n 的多项式都可唯一地写为 $L_0(x)$, $L_1(x)$, …, $L_n(x)$ 的线性组合;

(iii) $L_0(x)$, $L_1(x)$, …, $L_n(x)$ 全为 n 次多项式。

评注 由上面的公式, 可以看出, $f(x)$ 的 n 次系数是

$$\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{0 \le \ell \le n \\ \ell \ne i}} \frac{1}{x_i - x_\ell}。$$

看上去有点复杂。我们想个办法简单地写出 $\prod$ 符号代表的内容。作 $n+1$ 次多项式

$$N_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)。$$

从 0, 1, …, n 里任取一个整数 i。那么

$$N_{n+1}(x) = (x - x_i) \prod_{\substack{0 \le \ell \le n \\ \ell \ne i}} (x - x_\ell)。$$

二边求导, 有

$$N_{n+1}(x) = \prod_{\substack{0 \le \ell \le n \\ \ell \ne i}} (x - x_\ell) + (x - x_i) \left(\prod_{\substack{0 \le \ell \le n \\ \ell \ne i}} (x - x_\ell) \right)'。$$

用 x_i 代替 x, 有

$$N'_{n+1}(x) = \prod_{\substack{0\le\ell\le n\\ \ell\ne i}} (x_i - x_\ell) + 0,$$

即

$$\prod_{\substack{0\le\ell\le n\\ \ell\ne i}} \frac{1}{x_i - x_\ell} = \frac{1}{N'_{n+1}(x_i)}。$$

这样, $f(x)$ 的 n 次系数可简单地写为

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{N'_{n+1}(x_i)}。$$

例 取 $n = 2$。取

$$\begin{aligned} &x_0 = -1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \\ &y_0 = -1, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 5。\end{aligned}$$

计算 $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \prod_{\substack{0\le\ell\le 2\\ \ell\ne 0}} \frac{x - x_\ell}{x_0 - x_\ell} = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}, \\ L_1(x) &= \prod_{\substack{0\le\ell\le 2\\ \ell\ne 1}} \frac{x - x_\ell}{x_1 - x_\ell} = \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1, \\ L_2(x) &= \prod_{\substack{0\le\ell\le 2\\ \ell\ne 2}} \frac{x - x_\ell}{x_2 - x_\ell} = \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}。\end{aligned}$$

所以, 适合条件

$$\begin{aligned} &f(-1) = -1, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 5, \\ &\deg f(x) < n + 1 = 3 \end{aligned}$$

的多项式 $f(x)$ 就是

$$\begin{aligned} &\quad (-1)L_0(x) + 1L_1(x) + 5L_2(x) \\ &= -L_0(x) + L_1(x) + 5L_2(x) \\ &= -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 + \frac{5}{3}x^2 - \frac{5}{3} \\ &= x^2 + x - 1。\end{aligned}$$

这跟前面用三元一次方程组算出的答案完全一致。

例 取 $n=3$。在上例的基础上, 追加

$$x_3=-2,\quad y_3=-11。$$

我们的目标是: 找多项式 $f(x)$ 适合条件

$$\begin{aligned}&f(-1)=-1,\quad f(1)=1,\quad f(2)=5,\quad f(-2)=-11,\\&\deg f(x)<n+1=4。\end{aligned}$$

在原理上, 并没有什么复杂的地方。求出 $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$ 后, 答案就出来了:

$$\begin{aligned}f(x)=&-\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(-1-1)(-1-2)(-1+2)}+\frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{(1+1)(1-2)(1+2)}\\&+5\cdot\frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(2+1)(2-1)(2+2)}-11\cdot\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2-1)(-2-2)}。\end{aligned}$$

不过, 实践告诉我们, 拆开 4 个 3 次多项式后再相加可不是什么轻松的事儿——至少比前一个例复杂一些。而且, 加一个节点后, $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ (跟之前相比) 都要多乘一个一次多项式。有无稍微容易一些的算法呢?

定义 设 x_0, x_1, ···, x_n 是 $\mathbb{F}$ 的 $n+1$ 个互不相同的元。设 y_0, y_1, ···, $y_n\in\mathbb{F}$。定义

$$[x_i,x_j]=\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}\quad(i\neq j)。$$

这称为 1 级差商 (*first-order divided difference*)。类似地, 当 i, j, k 互不相同时, 2 级差商是

$$[x_i,x_j,x_k]=\frac{[x_i,x_j]-[x_j,x_k]}{x_i-x_k}。$$

一般地, 当 i_0, i_1, ···, $i_{\ell-1}$ 互不相同时, $\ell-1$ 级差商定义为

$$[x_{i_0},x_{i_1},\cdots,x_{i_{\ell-1}}]=\frac{[x_{i_0},x_{i_1},\cdots,x_{i_{\ell-2}}]-[x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_{\ell-1}}]}{x_0-x_{\ell-1}}。$$

“差商” 可指代任意级差商。

例 取 $n=2$。取

$$\begin{aligned}&x_0=-1,\quad x_1=1,\quad x_2=2,\\&y_0=-1,\quad y_1=1,\quad y_2=5。\end{aligned}$$

我们随意地计算三个 1 级差商:

$$[x_0,x_1]=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}=1,$$

$$[x_0, x_2] = \frac{y_0 - y_2}{x_0 - x_2} = 2,$$
$$[x_1, x_2] = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 4。$$

由此可知

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2} = \frac{1 - 4}{-1 - 2} = 1。$$

根据 1 级差商的定义,

$$[x_j, x_i] = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} = [x_i, x_j],$$

故

$$[x_2, x_1] = [x_1, x_2] = 4。$$

所以

$$[x_0, x_2, x_1] = \frac{[x_0, x_2] - [x_2, x_1]}{x_0 - x_1} = \frac{2 - 4}{-1 - 1} = 1。$$

同样的道理,

$$[x_1, x_0] = [x_0, x_1] = 1。$$

所以

$$[x_1, x_0, x_2] = \frac{[x_1, x_0] - [x_0, x_2]}{x_1 - x_2} = \frac{1 - 2}{1 - 2} = 1。$$

我们发现, 在这些特殊的 x_i 与 y_j $(i, j = 0, 1, 2)$ 下

$$[x_0, x_1, x_2] = [x_0, x_2, x_1] = [x_1, x_0, x_2]。$$

类似地, 读者还可以计算 $[x_1, x_2, x_0]$, $[x_2, x_0, x_1]$, $[x_2, x_1, x_0]$, 它们跟上面三个 2 级差商有着同样的值。换句话说, 我们猜想, 2 级差商 $[x_i, x_j, x_k]$ 的三个文字 x_i, x_j, x_k 的次序可以任意交换, 且值不变 (当然, y_i, y_j, y_k 的次序也要交换)。

幸运的事儿是, 我们没猜错:

命题 设 m 是大于 1 的整数。$m-1$ 级差商 $[x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}]$ 可表示为

$$[x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}] = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y_k}{N_m'(x_k)},$$

这里

$$N_m(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{m-1}) = \prod_{k=0}^{m-1}(x-x_k)。$$

由此立得: 随意交换 x_0, x_1, ···, x_{m-1} 的次序, 若 y_0, y_1, ···, y_{m-1} 的次序也跟着改变, 得到的新 $m-1$ 级差商的值不变。

证 回想一下, ℓ 级差商 ($\ell > 1$) 是用 $\ell-1$ 级差商定义的。所以, 我们用数学归纳法证明这个结论。

当 $m=2$ 时,

$$N_2(x) = (x-x_0)(x-x_1) = x^2 - (x_0+x_1)x + x_0x_1,$$

故

$$N_2'(x) = 2x - (x_0+x_1)。$$

从而

$$N_2'(x_0) = x_0 - x_1, \quad N_2'(x_1) = x_1 - x_0。$$

根据定义,

$$\begin{aligned}
[x_0, x_1] &= \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \\
&= \frac{y_0}{x_0 - x_1} - \frac{y_1}{x_0 - x_1} \\
&= \frac{y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0} \\
&= \frac{y_0}{N_2'(x_0)} + \frac{y_1}{N_2'(x_1)} \\
&= \sum_{k=0}^{2-1} \frac{y_k}{N_2'(x_k)}。
\end{aligned}$$

所以, 结论对 $m=2$ 成立。

假设结论对 $m=\ell \geq 2$ 成立。我们要由此推出: 结论对 $m=\ell+1$ 也成立。x_0, x_1, ···, x_ℓ 这 $\ell+1$ 个元的 ℓ 级差商, 按定义, 是

$$[x_0, x_1, \cdots, x_\ell] = \frac{[x_0, x_1, \cdots, x_{\ell-1}] - [x_1, x_2, \cdots, x_\ell]}{x_0 - x_\ell}。$$

这里, $[x_0, x_1, \cdots, x_{\ell-1}]$ 与 $[x_1, x_2, \cdots, x_\ell]$ 都是 $\ell-1$ 级差商。按归纳假设,

$$[x_0, x_1, \cdots, x_{\ell-1}] = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{y_k}{P'(x_k)},$$

$$[x_1, x_2, \cdots, x_\ell] = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{y_k}{Q'(x_k)},$$

其中

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{\ell-1}), \\ Q(x) &= (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_\ell)。\end{aligned}$$

作

$$N_{\ell+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{\ell-1})(x - x_\ell),$$

我们观察 $N_{\ell+1}(x)$ 与 $P(x)$ (或 $Q(x)$) 的关系。显然,

$$N_{\ell+1}(x) = P(x)(x - x_\ell)。$$

二边求导, 有

$$N'_{\ell+1}(x) = P'(x)(x - x_\ell) + P(x)。$$

用 x_u $(u \neq \ell)$ 代替 x, 有

$$\begin{aligned} N'_{\ell+1}(x_u) = P'(x_u)(x_u - x_\ell) + P(x_u) = P'(x_u)(x_u - x_\ell) \\ \implies \frac{1}{P'(x_u)} = \frac{x_u - x_\ell}{N'_{\ell+1}(x_u)}。\end{aligned}$$

同理, 若 $v \neq 0$, 则

$$\frac{1}{Q'(x_v)} = \frac{x_v - x_0}{N'_{\ell+1}(x_v)}。$$

所以

$$\begin{aligned} & [x_0, x_1, \cdots, x_{\ell-1}] - [x_1, x_2, \cdots, x_\ell] \\ =& \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{y_k}{P'(x_k)} - \sum_{k=1}^{\ell} \frac{y_k}{Q'(x_k)} \\ =& \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{y_k(x_k - x_\ell)}{N'_{\ell+1}(x_k)} + \sum_{k=1}^{\ell} \frac{-y_k(x_k - x_0)}{N'_{\ell+1}(x_k)} \\ =& \sum_{k=0}^{\ell} \frac{y_k(x_k - x_\ell)}{N'_{\ell+1}(x_k)} + \sum_{k=0}^{\ell} \frac{y_k(x_0 - x_k)}{N'_{\ell+1}(x_k)} \\ =& \sum_{k=0}^{\ell} \frac{y_k(x_k - x_\ell) + y_k(x_0 - x_k)}{N'_{\ell+1}(x_k)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\ell} \frac{y_k(x_0 - x_\ell)}{N'_{\ell+1}(x_k)} \\
&= (x_0 - x_\ell) \sum_{k=0}^{\ell} \frac{y_k}{N'_{\ell+1}(x_k)}。
\end{aligned}
$$

这样

$$
\begin{aligned}
[x_0, x_1, \cdots, x_\ell] &= \frac{[x_0, x_1, \cdots, x_{\ell-1}] - [x_1, x_2, \cdots, x_\ell]}{x_0 - x_\ell} \\
&= \frac{1}{x_0 - x_\ell} \cdot (x_0 - x_\ell) \sum_{k=0}^{\ell} \frac{y_k}{N'_{\ell+1}(x_k)} \\
&= \sum_{k=0}^{(\ell+1)-1} \frac{y_k}{N'_{\ell+1}(x_k)}。
\end{aligned}
$$

✌

评注 前面, 我们知道, 用 Lagrange 插值公式算出的次不高于 n 的多项式的 n 次系数是

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{N'_{n+1}(x_i)},$$

其中

$$N_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)。$$

用差商的语言, 有: $f(x)$ 的 n 次系数可用 n 级差商

$$[x_0, x_1, \cdots, x_n]$$

表示。

现在, 我们来看看差商在多项式插值里的用处。设 x_0, x_1, ···, x_n 是 $\mathbb{F}$ 的 $n+1$ 个互不相同的元。设 y_0, y_1, ···, $y_n \in \mathbb{F}$。作 $n+1$ 个多项式:

$$
\begin{aligned}
&N_0(x) = 1, \\
&N_1(x) = x - x_0, \\
&N_2(x) = (x - x_0)(x - x_1), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
&N_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})。
\end{aligned}
$$

因为 $N_0(x)$, $N_1(x)$, ···, $N_n(x)$ 的次分别是 0, 1, ···, n, 所以:

(i) $N_0(x)$, $N_1(x)$, ···, $N_n(x)$ 是线性无关的;

(ii) 任意次不高于 n 的多项式都可唯一地写为 $N_0(x)$, $N_1(x)$, ⋯, $N_n(x)$ 的线性组合。

由前面的 Lagrange 插值公式可知, 存在一个次不高于 n 的多项式 $f(x)$ 使

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n)。$$

对这个 $f(x)$ 而言, 存在 (唯一的) c_0, c_1, ⋯, $c_n \in \mathbb{F}$ 使

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i N_n(x)。$$

我们的任务就是找出 c_0, c_1, ⋯, c_n。先从 c_n 看起。显然, 左侧的 n 次系数是 $[x_0, x_1, \cdots, x_n]$, 而右侧的 n 次系数是 c_n, 故

$$c_n = [x_0, x_1, \cdots, x_n]。$$

找出 c_n, 还有 n 个系数要找呢! 接下来的系数该怎么找呢?

命题 设 x_0, x_1, ⋯, x_n 是 $\mathbb{F}$ 的 $n+1$ 个互不相同的元 $(n \geq 1)$。设 y_0, y_1, ⋯, $y_n \in \mathbb{F}$。作 $n+1$ 个多项式:

$$\begin{aligned}
&N_0(x) = 1, \\
&N_1(x) = x - x_0, \\
&N_2(x) = (x - x_0)(x - x_1), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
&N_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})。
\end{aligned}$$

由 Lagrange 插值公式可知, 存在一个次不高于 n 的多项式 $f(x)$ 使

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n)。$$

对这个 $f(x)$ 而言, 存在 (唯一的) c_0, c_1, ⋯, $c_n \in \mathbb{F}$ 使

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i N_n(x)。$$

这些系数有着简单的形式:

$$\begin{aligned}
&c_0 = y_0, \\
&c_i = [x_0, x_1, \cdots, x_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, n)。
\end{aligned}$$

证 用数学归纳法。当 $n=1$ 时,

$$\begin{aligned}
f(x) &= y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\\
&= y_0\frac{(x-x_0)+(x_0-x_1)}{x_0-x_1}-y_1\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\\
&= y_0+y_0\frac{x-x_0}{x_0-x_1}-y_1\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\\
&= y_0+\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}(x-x_0)\\
&= y_0N_0(x)+[x_0,x_1]N_1(x)。
\end{aligned}$$

这样, 结论对 $n=1$ 成立。

设结论对 $n=\ell\geq 1$ 成立。我们看 $n=\ell+1$ 的情形。

由 Lagrange 插值公式可知, 存在一个次不高于 $\ell+1$ 的多项式 $f(x)$ 使

$$f(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\cdots,\ell+1)。$$

对这个 $f(x)$ 而言, 存在 (唯一的) c_0, c_1, ···, $c_\ell, c_{\ell+1}\in\mathbb{F}$ 使

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\ell}c_iN_i(x)+c_{\ell+1}N_{\ell+1}(x)。$$

左侧的 $\ell+1$ 次系数是 $[x_0,x_1,\cdots,x_\ell,x_{\ell+1}]$, 右侧的 $\ell+1$ 次系数是 $c_{\ell+1}$, 故

$$c_{\ell+1}=[x_0,x_1,\cdots,x_\ell,x_{\ell+1}]。$$

作

$$g(x)=f(x)-[x_0,x_1,\cdots,x_\ell,x_{\ell+1}]N_{\ell+1}(x)。$$

则

$$g(x)=\sum_{i=0}^{\ell}c_iN_i(x),$$

且 $i\neq\ell+1$ 时,

$$g(x_i)=f(x_i)-[x_0,x_1,\cdots,x_\ell,x_{\ell+1}]0=y_i。$$

这个 $g(x)$ 的次不会高于 ℓ。并且, $i=0$, 1, ···, ℓ 时, $g(x_i)=y_i$。

由 Lagrange 插值公式, 存在一个次不高于 ℓ 的多项式 $h(x)$ 使

$$h(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\cdots,\ell)。$$

对这个 $h(x)$ 而言, 存在 (唯一的) d_0, d_1, ⋯, $d_\ell \in \mathbb{F}$ 使

$$h(x) = \sum_{i=0}^{\ell} d_i N_i(x)。$$

根据归纳假设,

$$\begin{aligned} &d_0 = y_0, \\ &d_i = [x_0, x_1, \cdots, x_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, \ell)。\end{aligned}$$

由插值的唯一性, $g(x) = h(x)$。所以

$$\begin{aligned} &c_0 = d_0 = y_0, \\ &c_i = d_i = [x_0, x_1, \cdots, x_i] \quad (i = 1, 2, \cdots, \ell)。\end{aligned}$$

所以, $n = \ell + 1$ 时, 结论是正确的。 ✌

为方便, 记 $[x_i] = y_i$, 称其为 x_i 的 0 级差商。我们证明了

命题 设 x_0, x_1, ⋯, x_n 是 $\mathbb{F}$ 的 $n+1$ 个互不相同的元 $(n \geq 1)$。设 y_0, y_1, ⋯, $y_n \in \mathbb{F}$。存在唯一的多项式

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{n} [x_0, x_1, \cdots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \\ &= [x_0] + [x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + [x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0) \\ &\qquad \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

适合条件

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n),$$

且

$$\deg f(x) < n + 1。$$

这个公式以 “Newton 插值公式” (*Newton's interpolation formula*) 之名闻名全球。

我们举三个具体的例帮读者消化这个 Newton 插值公式。

例 求次不高于 1 的多项式 $f(x)$, 使 $f(-1) = 2$, $f(1) = 3$。
这里, $n = 2$, 且

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 1,$$

$$y_0 = 2, \quad y_1 = 3。$$

不难算出

$$\begin{aligned}
&[x_0] = y_0 = 2, \\
&[x_0, x_1] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{1}{2}。
\end{aligned}$$

所以

$$f(x) = 2 + \frac{1}{2}(x - (-1)) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}。$$

例 求次不高于 2 的多项式 $f(x)$, 使 $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 5$。这里, $n = 3$, 且

$$\begin{aligned}
&x_0 = -1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \\
&y_0 = -1, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 5。
\end{aligned}$$

不难算出

$$\begin{aligned}
&[x_0] = y_0 = -1, \\
&[x_0, x_1] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = 1, \\
&[x_1, x_2] = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 4, \\
&[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2} = 1。
\end{aligned}$$

所以

$$f(x) = -1 + (x + 1) + (x + 1)(x - 1) = x^2 + x - 1。$$

前面, 我们用 Lagrange 插值公式, 得到了一样的结果, 不过计算过程稍繁。

实操时, 往往用名为 "差商表" 的表进行计算。当 $n = 3$ 时, 它长这样:

$$\begin{array}{c|lll}
x_2 & [x_2] & & \\
x_1 & [x_1] & [x_1, x_2] & \\
x_0 & [x_0] & [x_0, x_1] & [x_0, x_1, x_2]
\end{array}$$

在这个问题里, 差商表如下:

$$\begin{array}{c|ccc}
2 & 5 & & \\
1 & 1 & 4 & \\
-1 & -1 & 1 & 1
\end{array}$$

例 求次不高于 3 的多项式 $f(x)$, 使 $f(-1)=-1$, $f(1)=1$, $f(2)=5$, $f(-2)=-11$。

这里, $n=4$, 且

$$\begin{aligned} &x_0=-1, \quad x_1=1, \quad x_2=2, \quad x_3=-2 \\ &y_0=-1, \quad y_1=1, \quad y_2=5, \quad y_3=-11。\end{aligned}$$

画出 $n=4$ 时的差商表:

$$\begin{array}{c|cccc} x_3 & [x_3] & & & \\ x_2 & [x_2] & [x_2,x_3] & & \\ x_1 & [x_1] & [x_1,x_2] & [x_1,x_2,x_3] & \\ x_0 & [x_0] & [x_0,x_1] & [x_0,x_1,x_2] & [x_0,x_1,x_2,x_3] \end{array}$$

我们已经在上个例里算出了 $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_0,x_1,x_2]$:

$$\begin{array}{c|cccc} x_3 & [x_3] & & & \\ 2 & 1 & [x_2,x_3] & & \\ 1 & 1 & 4 & [x_1,x_2,x_3] & \\ -1 & -1 & 1 & 1 & [x_0,x_1,x_2,x_3] \end{array}$$

我们的目标是算出 $[x_0,x_1,x_2,x_3]$。所以, 我们要算出 $[x_1,x_2,x_3]$; 所以, 我们要算出 $[x_2,x_3]$; 所以, 我们要算出 $[x_3]$。不过, $[x_3]$ 是已知的, 它就是 y_3, 也就是 -11。

列出算式:

$$\begin{aligned} &x_3=-2, \\ &[x_3]=y_3=-11, \\ &[x_2,x_3]=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}=4, \\ &[x_1,x_2,x_3]=\frac{[x_1,x_2]-[x_2,x_3]}{x_1-x_3}=0, \\ &[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{[x_0,x_1,x_2]-[x_1,x_2,x_3]}{x_0-x_3}=1。\end{aligned}$$

此时, 差商表如下:

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & -11 & & & \\ 2 & 1 & 4 & & \\ 1 & 1 & 4 & 0 & \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) = & -1 + (x+1) + (x+1)(x-1) + (x+1)(x-1)(x-2) \\ & = (x^2 + x - 1) + (x^3 - 2x^2 - x + 2) \\ & = x^3 - x^2 + 1。\end{aligned}$$

用 Lagrange 插值公式, 有

$$\begin{aligned} f(x) = & -\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(-1-1)(-1-2)(-1+2)} + \frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{(1+1)(1-2)(1+2)} \\ & + 5 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(2+1)(2-1)(2+2)} - 11 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2-1)(-2-2)}。\end{aligned}$$

有兴趣的读者可展开上式, 以验证我们的计算是否正确。由此可见, Newton 插值公式在实操上优于 Lagrange 插值公式。

Generalized Binomial Coefficients

本节讨论广义二项系数。

回忆一下: 正整数 n 的阶乘 $n!$ 是前 n 个正整数的积; 0 的阶乘 $0!$ 是 1。

定义 设 n 是整数。设 $t \in \mathbb{F}$。定义广义二项系数 (*generalized binomial coefficient*) 如下:

$$\binom{t}{n} = \begin{cases} \frac{1}{n!}(t-0)(t-1)\cdots(t-(n-1)), & n > 0; \\ 1, & n = 0; \\ 0, & n < 0。\end{cases}$$

评注 我们曾在 Polynomials over $\mathbb{F}$ 指出, 我们将不再区分多项式与多项式函数。故当 x 是 “不定元” 时, 我们把

$$\begin{cases} \frac{1}{n!}(x-0)(x-1)\cdots(x-(n-1)), & n > 0; \\ 1, & n = 0; \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

所表示的多项式也写为

$$\binom{x}{n},$$

并也称其为 “广义二项系数”。