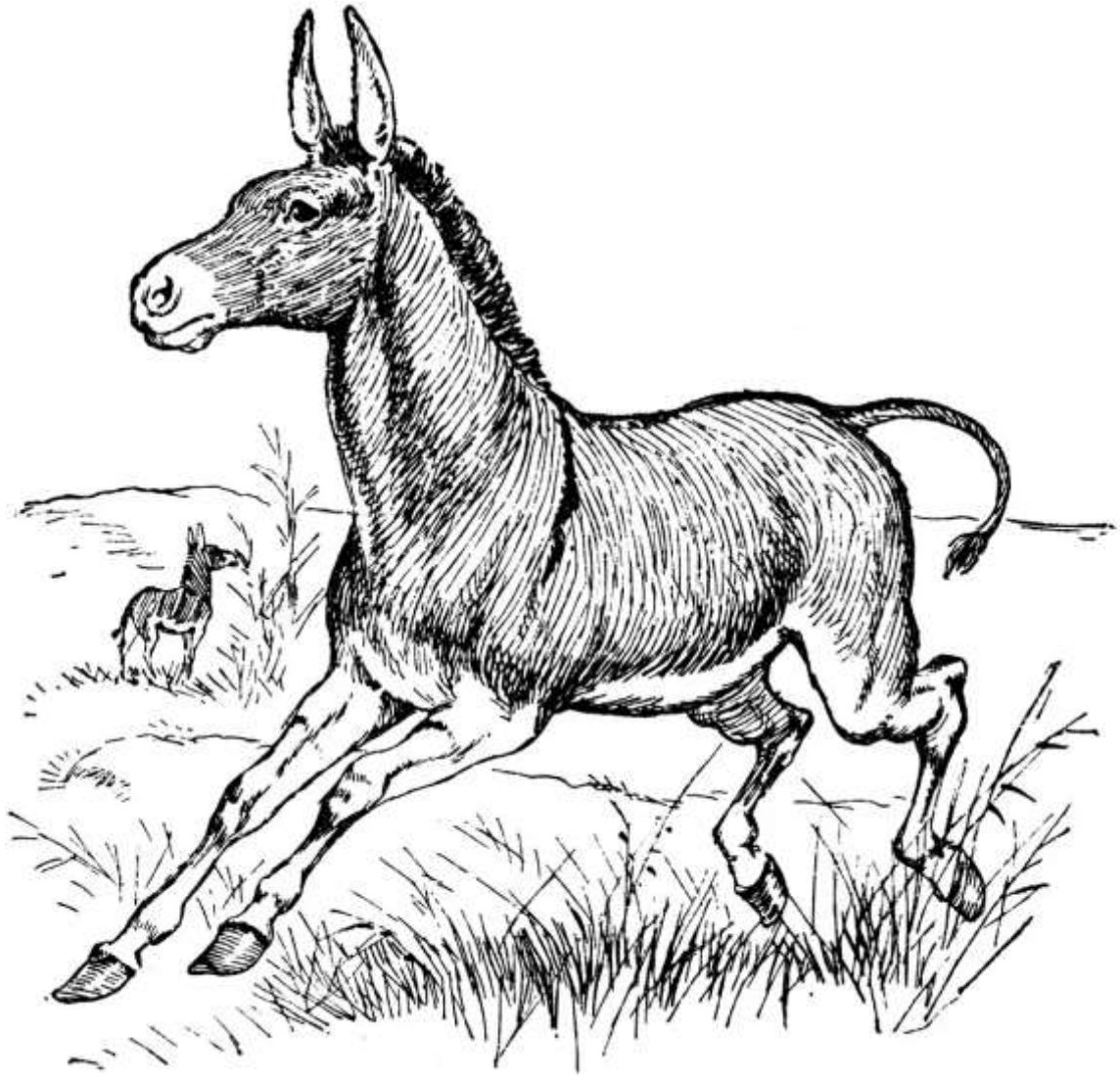


*Learn some basic stuffs of polynomials*



# Delving into Polynomials

*An unpractical guide*

**Rhodes Island**

*Amiya*



## Table of Contents

<b>Preface</b>	<b>iii</b>
<b>Delving into Polynomials</b>	<b>1</b>
Prerequisites . . . . .	2
Definition of Polynomials . . . . .	29
Division Algorithm . . . . .	37
Polynomial Equality . . . . .	42
Roots of Polynomials . . . . .	47
Polynomials over $\mathbb{F}$ . . . . .	52
Interpolation . . . . .	60



## Preface

本文是瞎写的。我给本文的另一个名字是“Re: ゼロから始めるポリノミアルのイントロダクション”。不过想了想, 算了算了。龙鸣日语, 不好意思直接说出来。

这是写给中学生看的。

总是可以去这儿得到本文的最新版本:

<https://gitee.com/septsea/strange-book-zero>

<https://github.com/septsea/strange-book-zero>

就先说到这里。

**评注** 总算写完 Prerequisites 了。我写这玩意儿花了好久好久啊。先发布再说吧。

*June 3, 2021*

**评注** 忘记介绍域是什么东西了。我真是笨蛋啊。

*June 3, 2021*



## Delving into Polynomials

Out of boredom, I wrote the article.

*Gohan ni suru? Ofuro ni suru? Sore tomo... wa ta shi?*

*(Would you like dinner? Would you like a bath? Or... would you like me?)*

## Prerequisites

您将在本节熟悉一些记号与术语。建议您熟悉本节的内容后学习下节的内容。

在进入小节 Sets 前, 让我们先回顾命题、复数与数学归纳法吧!

**定义** 能判断真假的话是命题 (*proposition*)。正确的命题称为真命题; 错误的命题称为假命题。当然, 命题也可以用“对”“错”形容。

**例** 根据常识, “日东升西落”是真命题。类似地, “月自身可发光”是假命题。

“这是什么?” 不是命题, 因为它没有作出判断。类似地, “请保持安静”也不是命题, 因为它只是一个祈使句 (*imperative sentence*)。不过, “难道中国不强?” 不但是命题, 它还是正确的, 因为这个反问 (*rhetorical question*) 作出了正确的判断。

“ $x > 3$ ”不是命题, 因为它不可判断真假。像这种话里有未知元, 且揭秘未知元前不可知此话之真伪的话是开句 (*open sentence*)。

我们会经常遇到“若  $p$ , 则  $q$ ”的命题。

**定义** 设“若  $p$ , 则  $q$ ”是真命题。我们说,  $p$  是  $q$  的充分条件 (*sufficient condition*),  $q$  是  $p$  的必要条件 (*necessary condition*)。用符号写出来, 就是

$$p \Rightarrow q \quad \text{or} \quad q \Leftarrow p.$$

**例** “若刚下过雨, 则地面潮湿”是对的。“刚下过雨”是“充分的”: 根据常识可以知道这一点。“地面潮湿”是“必要的”: 地面不潮湿, 那么不可能刚下过雨。

**评注** 我们会遇到形如“ $\ell$  的一个必要与充分条件是  $r$ ”的命题。换个说法, 就是“ $r$  是  $\ell$  的一个必要与充分条件”。再分解一下, 就是“ $r$  是  $\ell$  的一个必要条件”与“ $r$  是  $\ell$  的一个充分条件”这二个命题。根据定义, 这相当于“若  $\ell$ , 则  $r$ ”与“若  $r$ , 则  $\ell$ ”都是真命题。也就是说,  $\ell$  跟  $r$  是等价的 (*equivalent*)。用符号写出来, 就是

$$p \Leftrightarrow q.$$

证明“ $\ell$  的一个必要与充分条件是  $r$ ”时, 我们会把它分为必要性 (*necessity*) 与充分性 (*sufficiency*) 二个部分。证明必要性, 就是证明“ $r$  是  $\ell$  的一个必要条件”, 也就是证明“若  $\ell$ , 则  $r$ ”是对的; 换句话说, 证明左边可以推出右边。证明充分性, 就是证明“ $r$  是  $\ell$  的一个充分条件”, 也就是证明“若  $r$ , 则  $\ell$ ”是对的; 换句话说, 证明右边可以推出左边。



命题就介绍到这里。下面回顾复数基础。

**定义** 复数 (*complex number*) 是形如  $x + yi$  ( $x, y$  是实数) 的数。

**评注** 可将  $x + yi$  写为  $x + iy$ 。

**定义** 设  $a, b, c, d$  是实数。则

$$a + bi = c + di \iff a = c \text{ and } b = d.$$

**评注** 我们把形如  $a + 0i$  的复数写为  $a$ , 并认为  $a + 0i$  是实数。反过来,  $a$  也可以认为是复数  $a + 0i$ 。

形如  $0 + bi$  的复数可写为  $bi$ 。按照习惯,  $1i$  可写为  $i$ , 且  $-1i$  可写为  $-i$ 。

**定义** 复数的加、乘法定义为

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i, \\ (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

由此可见, 二个复数的和 (或积) 还是复数。

**例** 我们计算  $i$  与自己的积:

$$i \cdot i = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)i = -1.$$

简单地说, 就是

$$i \cdot i = i^2 = -1.$$

设  $z_1, z_2, z_3$  是任意三个复数 (不必不同)。设  $z_1 = a + bi$ 。

**命题** 复数的加法适合如下运算律:

- (i) 交换律:  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ;
  - (ii) 结合律:  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ ;
  - (iii)  $0 + z_1 = z_1$ ;
  - (iv) 存在复数  $w = (-a) + (-b)i$  使  $w + z_1 = 0$ 。
- 通常把适合 (iv) 的  $w$  记为  $-z_1$ , 且称之为  $z_1$  的相反数。

**评注**  $(-a) + (-b)i$  可写为  $-a - bi$ 。

**定义** 复数的减法定义为

$$z_2 - z_1 = z_2 + (-z_1).$$

**命题** 复数的乘法适合如下运算律:

(v) 交换律:  $z_1 z_2 = z_2 z_1$ ;

(vi) 结合律:  $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ ;

(vii)  $1 z_1 = z_1$ ;

(viii) 若  $z_1 \neq 0$ , 则存在复数  $v = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$  使  $v z_1 = 1$ 。

通常把适合 (viii) 的  $v$  记为  $z_1^{-1}$ , 且称之为  $z_1$  的倒数。

**定义** 复数的除法定义为

$$\frac{z_2}{z_1} = z_2 z_1^{-1}.$$

**命题** 复数的加法与乘法还适合分配律:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3,$$

$$(z_2 + z_3)z_1 = z_2 z_1 + z_3 z_1.$$

**评注**  $a, bi, c, di$  都可以看成是复数。这样

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= (a + bi)c + (a + bi)(di) \\ &= ac + bic + adi + bdi^2 \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= (ac + bdi^2) + (ad + bc)i \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

也就是说, 我们不必死记复数的乘法规则: 只要用运算律与  $i^2 = -1$  即可召唤它。

**定义**  $a + bi$  的共轭 (*conjugate*) 是复数  $a - bi$ 。复数  $z_1$  的共轭可写为  $\overline{z_1}$ 。

**命题** 共轭适合如下性质:

(ix)  $\overline{z_1} + z_1$  与  $i \cdot (\overline{z_1} - z_1)$  都是实数;

(x)  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ,  $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$ ;

(xi)  $\overline{z_1} z_1$  是正数, 除非  $z_1 = 0$ 。

**定义**  $|z_1| = \sqrt{\overline{z_1} z_1}$  称为  $z_1$  的绝对值 (*absolute value*)。

**命题** 绝对值适合如下性质:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|.$$

**定义** 设  $n$  是整数。若  $n = 0$ , 则说  $z_1^n = 1$ 。若  $n \geq 1$ , 则说  $z_1^n$  是  $n$  个  $z_1$  的积。若  $z_1 \neq 0$ , 且  $n \leq -1$ , 则说  $z_1^n$  是  $\frac{1}{z_1^{-n}}$ 。

$z_1^n$  的一个名字是  $z_1$  的  $n$  次幂 (power)。

**命题** 设  $m, n$  是非负整数。幂适合如下性质:

$$z_1^m z_1^n = z_1^{m+n}, \quad (z_1^m)^n = z_1^{mn}, \quad (z_1 z_2)^m = z_1^m z_2^m.$$

若  $z_1$  与  $z_2$  都不是 0, 则  $m, n$  允许取全体整数。

复数就先回顾到这里。下面回顾数学归纳法。

**评注** 数学归纳法 (mathematical induction) 是一种演绎推理。

**命题** 设  $P(n)$  是跟整数  $n$  相关的命题。设  $P(n)$  适合:

(i)  $P(n_0)$  是正确的;

(ii) 任取  $\ell \geq n_0$ , 必有“若  $P(\ell)$  是正确的, 则  $P(\ell + 1)$  是正确的”成立。

则任取不低于  $n_0$  的整数  $n$ , 必有  $P(n)$  是正确的。

**评注** 可以这么理解数学归纳法。假设有一排竖立的砖。如果 (i) 第一块砖倒下, 且 (ii) 前一块砖倒下可引起后一块砖倒下, 那么所有的砖都可以倒下, 是吧? 由此也可以看出, (i) (ii) 缺一不可。第一块砖不倒, 后面的砖怎么倒下呢?<sup>†</sup> 如果前一块砖倒下时后一块砖不一定能倒下, 那么会在某块砖后开始倒不下去。

**例** 我们试着用数学归纳法证明, 对任意正整数  $n$ ,

$$P(n): \quad 0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

既然想证明对任意正整数  $n$ ,  $P(n)$  都成立, 我们取  $n_0 = 1$ 。然后验证 (i): 左边只有 0 这一项, 右边是  $\frac{1 \cdot (1-1)}{2} = 0$ 。所以 (i) 适合。

再验证 (ii)。(ii) 是说, 要由  $P(\ell)$  推出  $P(\ell + 1)$ 。所以, 假设

$$0 + 1 + \cdots + (\ell - 1) = \frac{\ell(\ell - 1)}{2}, \quad \ell \geq n_0.$$

因为

$$\begin{aligned} 0 + 1 + \cdots + (\ell - 1) + \ell &= (0 + 1 + \cdots + (\ell - 1)) + \ell \\ \text{(IH)} \quad &= \frac{\ell(\ell - 1)}{2} + \ell \end{aligned}$$

<sup>†</sup> 当然, 也可以从第  $n$  块砖开始倒下 ( $n > 1$ ), 但这就照顾不到第一块了。

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ell(\ell-1)}{2} + \frac{\ell \cdot 2}{2} \\
&= \frac{\ell(\ell+1)}{2} \\
&= \frac{(\ell+1)((\ell+1)-1)}{2},
\end{aligned}$$

故我们由  $P(\ell)$  推出了  $P(\ell+1)$ 。我们在哪儿用到了  $P(\ell)$  呢？我们在标了 (IH) 的那一行用了  $P(\ell)$ 。这样的假设称为归纳假设 (*induction hypothesis*)。

既然 (i) (ii) 都适合, 那么任取不低于  $n_0 = 1$  的整数  $n$ ,  $P(n)$  都对。

我们用二个具体的例说明, (i) (ii) 缺一不可。

**例** 我们“证明”, 对任意正整数  $n$ ,

$$P'(n): \quad 0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} + 1.$$

这里,  $n_0$  自然取 1。

(i) 不适合: 显然  $n = 1$  时, 左侧是 0 而右侧是 1。再看 (ii)。假设

$$0 + 1 + \cdots + (\ell-1) = \frac{\ell(\ell-1)}{2} + 1, \quad \ell \geq n_0.$$

由于

$$\begin{aligned}
0 + 1 + \cdots + (\ell-1) + \ell &= (0 + 1 + \cdots + (\ell-1)) + \ell \\
\text{("IH")} \quad &= \frac{\ell(\ell-1)}{2} + 1 + \ell \\
&= \frac{\ell(\ell-1)}{2} + \frac{\ell \cdot 2}{2} + 1 \\
&= \frac{\ell(\ell+1)}{2} + 1 \\
&= \frac{(\ell+1)((\ell+1)-1)}{2} + 1,
\end{aligned}$$

故我们由  $P'(\ell)$  “推出”了  $P'(\ell+1)$ 。我们也在 (“IH”) 处用到了“归纳假设”。那么  $P'(n)$  就是正确的吗？当然不是！前面我们知道，

$$0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

也就是说,  $P'(n)$  的右侧的 “+ 1” 使其错误。当然, 一般我们很少会犯这样的错误: 毕竟, 一开始就不对的东西就不用看下去了。

**例** 不同的老婆<sup>†</sup>有着不同的发色。但是, 我们用数学归纳法却可以“证明”, 任意的  $n$  ( $n \geq 1$ ) 个老婆有着相同的发色! 称这个命题为  $Q(n)$ 。这里,  $n_0$  自然取 1。

<sup>†</sup> 一般地, 二次元人会称动画、漫画、游戏、小说中自己喜爱的女性角色为老婆 (*waifu*)。一个二次元人可以有不止一个老婆。

(i) 当  $n = n_0 = 1$  时, 一个老婆自然只有一种发色。这个时候, 命题是正确的!

(ii) 假设任意的  $\ell$  ( $\ell \geq n_0$ ) 个老婆有着相同的发色! 随意取  $\ell + 1$  个老婆。根据假设, 老婆 1, 2,  $\dots$ ,  $\ell$  有着相同的发色, 且老婆 2,  $\dots$ ,  $\ell$ ,  $\ell + 1$  有着相同的发色。这二组中都有 2,  $\dots$ ,  $\ell$  这  $\ell - 1$  个老婆, 所以老婆 1, 2,  $\dots$ ,  $\ell$ ,  $\ell + 1$  有着相同的发色!

根据 (i) (ii), 命题成立。

可是这对吗? 不对。问题出在 (ii)。如果说, 任意二个老婆有着相同的发色, 那任意三个老婆也有着相同的发色。这没问题。可是, 由  $Q(1)$  推不出  $Q(2)$ : 老婆 1 与老婆 2 根本就不重叠呀! (ii) 要求任取  $\ell \geq n_0$ , 必有  $Q(\ell)$  推出  $Q(\ell + 1)$ 。而  $\ell = 1$  时, (ii) 不对, 因此不能推出  $Q(n)$  对任意正整数都对。

下面是数学归纳法的一个变体。

**命题** 设  $P(n)$  是跟整数  $n$  相关的命题。设  $P(n)$  适合:

(i)  $P(n_0)$  是正确的;

(ii)' 任取  $\ell \geq n_0$ , 必有“若  $\ell - n_0 + 1$  个命题  $P(n_0), P(n_0 + 1), \dots, P(\ell)$  都是正确的, 则  $P(\ell + 1)$  是正确的”成立。

则任取不低于  $n_0$  的整数  $n$ , 必有  $P(n)$  是正确的。

**评注** 可以由下面的推理看出, 上面的数学归纳法变体是正确的。

作命题  $Q(n)$  ( $n \geq n_0$ ) 为“ $n - n_0 + 1$  个命题  $P(n_0), P(n_0 + 1), \dots, P(n)$  都是正确的”。

(i)  $P(n_0)$  是正确的, 所以  $n_0 - n_0 + 1$  个命题  $P(n_0)$  是正确的, 也就是  $Q(n_0)$  是正确的。

(ii) 任取  $\ell \geq n_0$ 。假设  $Q(\ell)$  是正确的, 也就是假设  $\ell - n_0 + 1$  个命题  $P(n_0), P(n_0 + 1), \dots, P(\ell)$  都是正确的。由 (ii)',  $P(\ell + 1)$  是正确的。所以,  $\ell + 1 - n_0 + 1$  个命题  $P(n_0), P(n_0 + 1), \dots, P(\ell), P(\ell + 1)$  都是正确的。换句话说,  $Q(\ell + 1)$  是正确的。

由数学归纳法可知, 任取不低于  $n_0$  的整数  $n$ , 必有  $Q(n)$  是正确的。所以,  $P(n)$  是正确的。

另一方面, 这个变体的条件 (ii)' 比数学归纳法的 (ii) 强, 所以若变体正确, 数学归纳法也正确。也就是说, 数学归纳法与其变体是等价的。

以后, “数学归纳法”既可以指老的数学归纳法 (由  $P(\ell)$  推  $P(\ell + 1)$ ), 也可以指变体 (由  $P(n_0), P(n_0 + 1), \dots, P(\ell)$  推  $P(\ell + 1)$ )。

知识就回顾到这里。开始进入集的世界吧!

## Sets

**定义** 集 (*set*) 是具有某种特定性质的对象汇集而成的一个整体, 其对象称为元 (*element*)。

**定义** 无元的集是空集 (*empty set*)。

**评注** 一般用小写字母表示元, 大写字母表示集。

**定义** 一般地, 若集  $A$  由元  $a, b, c, \dots$  作成, 我们写

$$A = \{a, b, c, \dots\}.$$

还有一种记号。设集  $A$  是由具有某种性质  $p$  的对象汇集而成, 则记

$$A = \{x \mid x \text{ possesses the property } p\}.$$

**定义** 若  $a$  是集  $A$  的元, 则写  $a \in A$  或  $A \ni a$ , 说  $a$  属于 (*to belong to*)  $A$  或  $A$  包含 (*to contain*)  $a$ 。若  $a$  不是集  $A$  的元, 则写  $a \notin A$  或  $A \not\ni a$ , 说  $a$  不属于  $A$  或  $A$  不包含  $a$ 。

**例** 全体整数作成的集用  $\mathbb{Z}$  (*Zahl*)<sup>†</sup> 表示。它可以写为

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots, n, -n, \dots\}.$$

**例** 全体非负整数作成的集用  $\mathbb{N}$  (*natural*) 表示。它可以写为

$$\mathbb{N} = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ and } x \geq 0\}.$$

为了方便, 也可以写为

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}.$$

**定义** 若任取  $a \in A$ , 都有  $a \in B$ , 则写  $A \subset B$  或  $B \supset A$ , 说  $A$  是  $B$  的子集 (*subset*) 或  $B$  是  $A$  的超集 (*superset*)。假如有一个  $b \in B$  不是  $A$  的元, 可以用“真” (*proper*) 形容之。

**例** 空集是任意集的子集。空集是任意不空的集的真子集。

**例** 全体有理数作成的集用  $\mathbb{Q}$  (*quotient*) 表示。因为整数是有理数, 所以  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ 。因为有理数  $\frac{1}{2}$  不是整数, 我们说  $\mathbb{Z}$  是  $\mathbb{Q}$  的真子集。

**定义** 全体实数作成的集用  $\mathbb{R}$  (*real*) 表示。

---

<sup>†</sup> A German word which means *number*.

**定义** 全体复数作成的集用  $\mathbb{C}$  (*complex*) 表示。不难看出,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

**定义**  $\mathbb{F}$  (*field*) 可表示  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  的任意一个。不难看出,  $\mathbb{F}$  适合这几条:

- (i)  $0 \in \mathbb{F}, 1 \in \mathbb{F}, 0 \neq 1$ ;
  - (ii) 任取  $x, y \in \mathbb{F} (y \neq 0)$ , 必有  $x - y, \frac{x}{y} \in \mathbb{F}$ 。
- 后面会见到稍详细的论述。

**定义** 设  $\mathbb{L}$  是  $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{F}$  的任意一个。 $\mathbb{L}^*$  表示  $\mathbb{L}$  去掉 0 后得到的集。不难看出,  $\mathbb{L}$  是  $\mathbb{L}^*$  的真超集。

**定义** 若集  $A$  与  $B$  包含的元完全一样, 则  $A$  与  $B$  是同一集。我们说  $A$  等于  $B$ , 写  $A = B$ 。显然

$$A = B \iff A \subset B \text{ and } B \subset A.$$

**定义** 集  $A$  与  $B$  的交 (*intersection*) 是集

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}.$$

也就是说,  $A \cap B$  恰由  $A$  与  $B$  的公共元作成。

集  $A$  与  $B$  的并 (*union*) 是集

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}.$$

也就是说,  $A \cup B$  恰包含  $A$  与  $B$  的全部元。

类似地, 可定义多个集的交与并。

**定义** 设  $A, B$  是集。定义

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

$A \times A$  可简写为  $A^2$ 。类似地,

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}, \quad A^3 = A \times A \times A.$$

**例** 设  $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4, 5\}$ 。则

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}.$$

而

$$B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}.$$

**评注** 一般地,  $A \times B \neq B \times A$ 。假如  $A, B$  各自有  $m, n$  个元, 利用一点计数知识可以看出,  $A \times B$  有  $mn$  个元。

## Functions

**定义** 假如通过一个法则  $f$ , 使任取  $a \in A$ , 都能得到唯一的  $b \in B$ , 则说这个法则  $f$  是集  $A$  到集  $B$  的一个函数 (*function*)。元  $b$  是元  $a$  在函数  $f$  下的象 (*image*)。元  $a$  是元  $b$  在  $f$  下的一个原象 (*inverse image*)。这个关系可以写为

$$\begin{aligned} f: & & A &\rightarrow B, \\ & & a &\mapsto b = f(a). \end{aligned}$$

称  $A$  是定义域 (*domain*),  $B$  是陪域<sup>†</sup> (*codomain*)。

**例** 可以把  $\mathbb{R}^2$  看作平面上的点集。

$$\begin{aligned} f: & & \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ & & (x, y) &\mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

是函数: 它表示点  $(x, y)$  到点  $(0, 0)$  的距离。

**例** 设

$$A = \{\text{dinner, bath, me}\}, \quad B = \{0, 1\}.$$

法则

$$f_1: \quad \text{dinner} \mapsto 0, \quad \text{bath} \mapsto 1$$

不是  $A$  到  $B$  的函数, 因为它没有为  $A$  的元  $\text{me}$  规定象。但是, 如果记  $A_1 = \{\text{dinner, bath}\}$ , 这个  $f_1$  可以是  $A_1$  到  $B$  的函数。

法则

$$\begin{aligned} f_2: & & \text{dinner} &\mapsto 0, \\ & & \text{bath} &\mapsto 1, \\ & & \text{me} &\mapsto b \quad \text{where } b^2 = b \end{aligned}$$

不是  $A$  到  $B$  的函数, 因为它给  $A$  的元  $\text{me}$  规定的象不唯一。

法则

$$f_3: \quad \text{dinner} \mapsto 0, \quad \text{bath} \mapsto 1, \quad \text{me} \mapsto -1$$

不是  $A$  到  $B$  的函数, 因为它给  $A$  的元  $\text{me}$  规定的象不是  $B$  的元。但是, 如果记  $B_1 = \{-1, 0, 1\}$ , 这个  $f_3$  可以是  $A$  到  $B_1$  的函数。

<sup>†</sup> 不要混淆陪域与象集 (*image, range*)。  $f$  的象集是

$$\text{Im } f = \{b \in B \mid b = f(a), a \in A\}.$$

这就是中学数学里的“值域”。



**定义** 设  $f_1$  与  $f_2$  都是  $A$  到  $B$  的函数。若任取  $a \in A$ , 必有  $f_1(a) = f_2(a)$ , 则说这二个函数相等, 写为  $f_1 = f_2$ 。

**例** 设  $A \subset \mathbb{C}$ , 且  $A$  非空。定义二个  $A$  到  $\mathbb{C}$  的函数:  $f_1(x) = x^2$ ,  $f_2(x) = |x|^2$ 。如果  $A = \mathbb{R}$ , 那么  $f_1 = f_2$ 。可是, 若  $A = \mathbb{C}$ ,  $f_1$  与  $f_2$  不相等。

**例** 设  $A$  是全体正实数作成的集。定义二个  $A$  到  $\mathbb{R}$  的函数:  $f_1(x) = \frac{1}{6} \log_2 x^3$ ,  $f_2(x) = \log_4 x$ 。知道对数的读者可以看出,  $f_1$  与  $f_2$  有着相同的对应法则, 故  $f_1 = f_2$ 。因为  $f_2$  是对数函数 (*logarithmic function*), 所以  $f_1$  也是。

**评注** 在上下文清楚的情况下, 可以单说函数的对应法则。比如, 中学数学课说“二次函数  $f(x) = x^2 + x - 1$ ”时, 定义域与陪域默认都是  $\mathbb{R}$ 。中学的函数一般都是实数的子集到实数的子集的函数。所谓“自然定义域”是指 (在一定范围内) 一切使对应法则有意义的元构成的集。比如, 在中学, 我们说  $\frac{1}{x}$  的自然定义域是  $\mathbb{R}^*$ ,  $\sqrt{x}$  的自然定义域是一切非负实数。在研究复变函数时, 我们说  $\frac{1}{z}$  的自然定义域是  $\mathbb{C}^*$ 。如果不明确函数的定义域, 我们会根据上下文作出自然定义域作为它的定义域。

**定义**  $A$  到  $A$  的函数是  $A$  的变换 (*transform*)。换句话说, 变换是定义域跟陪域一样的函数。

## Binary Functions

**定义**  $A^2$  到  $A$  的函数称为  $A$  的二元运算 (*binary functions*)。

**例** 设  $f(x, y) = x - y$ 。这个  $f$  是  $\mathbb{Z}$  的二元运算; 但是, 它不是  $\mathbb{N}$  的二元运算。

**评注** 设  $\circ$  是  $A$  的二元运算。代替  $\circ(x, y)$ , 我们写  $x \circ y$ 。一般地, 若表示这个二元运算的符号不是字母, 我们就把这个符号写在二个元的中间。

**定义** 设  $T(A)$  是全部  $A$  的变换作成的集。设  $f, g$  是  $A$  的变换。任取  $a \in A$ , 当然有  $b = f(a) \in A$ 。所以,  $g(b) = g(f(a))$  也是  $A$  的元。当然, 这个  $g(f(a))$  也是唯一确定的。这样, 我们说,  $f$  与  $g$  的复合 (*composition*)  $g \circ f$  是

$$\begin{aligned} g \circ f: & & A &\rightarrow A, \\ & & a &\mapsto g(f(a)). \end{aligned}$$

所以, 复合是  $T(A)$  的二元运算:

$$\begin{aligned} \circ: \quad & T(A) \times T(A) \rightarrow T(A), \\ & (g, f) \mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

**评注** 设  $A$  有有限多个元。此时, 可排出  $A$  的元:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

设  $f$  是  $A^2$  到  $B$  的函数。则任给整数  $i, j, 1 \leq i, j \leq n$ , 记

$$f(a_i, a_j) = b_{i,j} \in B.$$

可以用这样的表描述此函数:

	$a_1$	$a_2$	$\cdots$	$a_n$
$a_1$	$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	$\cdots$	$b_{1,n}$
$a_2$	$b_{2,1}$	$b_{2,2}$	$\cdots$	$b_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$a_n$	$b_{n,1}$	$b_{n,2}$	$\cdots$	$b_{n,n}$

有的时候, 为了强调函数名, 可在左上角书其名:

$f$	$a_1$	$a_2$	$\cdots$	$a_n$
$a_1$	$b_{1,1}$	$b_{1,2}$	$\cdots$	$b_{1,n}$
$a_2$	$b_{2,1}$	$b_{2,2}$	$\cdots$	$b_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$a_n$	$b_{n,1}$	$b_{n,2}$	$\cdots$	$b_{n,n}$

这种表示函数的方式是方便的。如果这些  $b_{i,j}$  都是  $A$  的元, 就说这张表是  $A$  的运算表。

**例** 设  $T = \{0, 1, -1\}$ ,  $\circ(x, y) = xy$ 。不难看出,  $\circ$  确实是  $T$  的二元运算。它的运算表如下:

	0	1	-1
0	0	0	0
1	0	1	-1
-1	0	-1	1

**例** 设  $\mathbb{F}_{\text{nu}}$  是将  $\mathbb{F}$  去掉 0, 1 后得到的集<sup>†</sup>。看下列 6 个法则:

$$f_0: \quad x \mapsto x;$$

<sup>†</sup> 这个  $\mathbb{F}_{\text{nu}}$  只是临时记号: nu 表示 *nil, unity*。

$$\begin{aligned}
f_1: & \quad x \mapsto 1 - x; \\
f_2: & \quad x \mapsto \frac{1}{x}; \\
f_3: & \quad x \mapsto 1 - \frac{1}{1-x}; \\
f_4: & \quad x \mapsto 1 - \frac{1}{x}; \\
f_5: & \quad x \mapsto \frac{1}{1-x}.
\end{aligned}$$

记  $S_6 = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ 。可以验证,  $S_6 \subset T(\mathbb{F}_{\text{nu}})$ 。

进一步地, 36 次复合告诉我们, 任取  $f, g \in S_6$ , 必有  $g \circ f \in S_6$ 。可以验证, 这是  $S_6$  的 (复合) 运算表:

	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
$f_0$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
$f_1$	$f_1$	$f_0$	$f_4$	$f_5$	$f_2$	$f_3$
$f_2$	$f_2$	$f_5$	$f_0$	$f_4$	$f_3$	$f_1$
$f_3$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_0$	$f_1$	$f_2$
$f_4$	$f_4$	$f_3$	$f_1$	$f_2$	$f_5$	$f_0$
$f_5$	$f_5$	$f_2$	$f_3$	$f_1$	$f_0$	$f_4$

我们在本节会经常用  $S_6$  举例。

**定义** 设  $\circ$  是  $A$  的二元运算。若任取  $x, y, z \in A$ , 必有

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

则说  $f$  适合结合律 (*associativity*)。此时,  $(x \circ y) \circ z$  或  $x \circ (y \circ z)$  可简写为  $x \circ y \circ z$ 。

**例**  $\mathbb{Z}$  的加法当然适合结合律。可是, 它的减法不适合结合律。

**评注** 变换的复合适合结合律。确切地, 设  $f, g, h$  都是  $A$  的变换。任取  $a \in A$ , 则

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))),$$

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))).$$

也就是说,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

**例**  $S_6$  的复合当然适合结合律。

**定义** 设  $\circ$  是  $A$  的二元运算。若任取  $x, y \in A$ , 必有

$$x \circ y = y \circ x,$$

则说  $\circ$  适合交换律 (*commutativity*)。

**例**  $\mathbb{F}^*$  的乘法当然适合交换律。可是, 它的除法不适合交换律。

**例**  $S_6$  的复合不适合交换律, 因为  $f_1 \circ f_2 = f_4$ , 而  $f_2 \circ f_1 = f_5$ , 二者不相等。

**评注** 在本文里,  $\cdot$  运算的优先级高于  $+$  运算。所以,  $a \cdot b + c$  的意思就是

$$(a \cdot b) + c,$$

而不是

$$a \cdot (b + c)。$$

**定义** 设  $+, \cdot$  是  $A$  的二个二元运算。若任取  $x, y, z \in A$ , 必有

$$(LD) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$$

则说  $+$  与  $\cdot$  适合左 ( $\cdot$ ) 分配律<sup>†</sup> (*left distributivity*)。类似地, 若

$$(RD) \quad (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x,$$

则说  $+$  与  $\cdot$  适合右 ( $\cdot$ ) 分配律 (*right distributivity*)。说既适合 LD 也适合 RD 的  $+$  与  $\cdot$  适合 ( $\cdot$ ) 分配律 (*distributivity*)。显然, 若  $\cdot$  适合交换律, 则 LD 与 RD 等价。

**例**  $\mathbb{F}$  的加法与乘法适合分配律。当然, 减法与乘法也适合分配律:

$$x(y - z) = xy - xz = yx - zx = (y - z)x。$$

甚至, 在正实数里, 加法与除法适合右分配律:

$$\frac{y + z}{x} = \frac{y}{x} + \frac{z}{x}。$$

---

<sup>†</sup> 在不引起歧义时, 括号里的内容可省略。或者这么说: 当我们说  $+, \cdot$  适合分配律时, 我们不会理解为  $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$ 。但有意思的事儿是, 如果把  $+$  理解为并,  $\cdot$  理解为交,  $x, y, z$  理解为集, 那这个式是对的。当然,  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$  也是对的。

**定义** 设  $\circ$  是  $A$  的二元运算。若任取  $x, y, z \in A$ , 必有

$$(LC) \quad x \circ y = x \circ z \implies y = z,$$

则说  $\circ$  适合左消去律 (*left cancellation property*)。类似地, 若

$$(RC) \quad x \circ z = y \circ z \implies x = y,$$

则说  $\circ$  适合右消去律 (*right cancellation property*)。说既适合 LC 也适合 RC 的  $\circ$  适合消去律 (*cancellation property*)。显然, 若  $\circ$  适合交换律, 则 LC 与 RC 等价。

**例** 显然,  $\mathbb{N}$  的乘法不适合消去律, 但  $\mathbb{N}^*$  的乘法适合消去律<sup>†</sup>。

**例** 考虑  $x \circ y = x^3 + y^2$ 。若把  $\circ$  视为  $\mathbb{N}$  的二元运算, 那么它适合消去律。若把  $\circ$  视为  $\mathbb{Q}$  的二元运算, 那么它适合右消去律。若把  $\circ$  视为  $\mathbb{C}$  的二元运算, 那么它不适合任意一个消去律。

**例** 一般地, 当  $A$  至少有二个元时,  $\circ$  (在  $T(A)$  里) 不适合消去律。设  $a, b \in A, a \neq b$ 。考虑下面 4 个变换:

$$\begin{aligned} g_0: & \quad a \mapsto a, \quad b \mapsto b, \quad x \mapsto x \text{ where } x \neq a, b; \\ g_1: & \quad a \mapsto a, \quad b \mapsto a, \quad x \mapsto x \text{ where } x \neq a, b; \\ g_2: & \quad a \mapsto b, \quad b \mapsto b, \quad x \mapsto x \text{ where } x \neq a, b; \\ g_3: & \quad a \mapsto b, \quad b \mapsto a, \quad x \mapsto x \text{ where } x \neq a, b. \end{aligned}$$

可以验证,

$$g_3 \circ g_1 = g_2 \circ g_1 = g_2 \circ g_3 = g_2 \circ$$

由此可以看出,  $\circ$  不适合任意一个消去律。

**例** 我们看  $\circ$  在  $S_6$  里是否适合消去律。取  $f, g, h \in S_6$ 。由表易知, 当  $g \neq h$  时,  $f \circ g \neq f \circ h$  (横着看运算表), 且  $g \circ f \neq h \circ f$  (竖着看运算表)。这说明,  $\circ$  在  $T(\mathbb{F}_{nu})$  的子集  $S_6$  里适合消去律。

**定义** 设  $\circ$  是  $A$  的二元运算。若存在  $e \in A$ , 使若任取  $x \in A$ , 必有

$$e \circ x = x \circ e = x,$$

则说  $e$  是  $A$  的 (关于运算  $\circ$  的) 么元 (*identity*)。如果  $e'$  也是么元, 则

$$e = e \circ e' = e'.$$

<sup>†</sup> 后面提到整环时, 我们会稍微修改一下消去律的描述。

**例**  $\mathbb{F}$  的加法的么元是 0, 且其乘法的么元是 1。

**例** 不难看出, 这个变换是  $T(A)$  的么元:

$$\begin{aligned}\iota: \quad & A \rightarrow A, \\ & a \mapsto a_\circ.\end{aligned}$$

它也有个一般点的名字: 恒等变换 (*identity transform*)。

在  $S_6$  里,  $f_0$  就是这里的  $\iota_\circ$ 。

**定义** 设  $\circ$  是  $A$  的二元运算。设  $e$  是  $A$  的么元。设  $x \in A$ 。若存在  $y \in A$ , 使

$$y \circ x = x \circ y = e,$$

则说  $y$  是  $x$  的 (关于运算  $\circ$  的) 逆元 (*inverse*)。

**例**  $\mathbb{F}$  的每个元都有加法逆元, 即其相反数。

**评注** 设  $\circ$  适合结合律。如果  $y, y'$  都是  $x$  的逆元, 则

$$y = y \circ e = y \circ (x \circ y') = (y \circ x) \circ y' = e \circ y' = y'.$$

此时, 一般用  $x^{-1}$  表示  $x$  的逆元。因为

$$x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e,$$

由上可知,  $x^{-1}$  也有逆元, 且  $(x^{-1})^{-1} = x_\circ$ 。

**例** 一般地, 当  $A$  至少有二个元时,  $T(A)$  既有有逆元的变换, 也有无逆元的变换。还是看前面的  $g_0, g_1, g_2, g_3$ 。首先,  $g_0$  是么元  $\iota_\circ$ 。不难看出,  $g_0$  与  $g_3$  都有逆元:

$$g_0 \circ g_0 = g_3 \circ g_3 = g_0 \circ$$

不过,  $g_1$  不可能有逆元。假设  $g_1$  有逆元  $h$ , 则应有

$$(h \circ g_1)(a) = \iota(a) = a, \quad (h \circ g_1)(b) = \iota(b) = b.$$

可是,  $g_1(a) = g_1(b) = a$ , 故  $(h \circ g_1)(a) = (h \circ g_1)(b) = h(a)$ , 它不能既等于  $a$  也等于  $b$ , 矛盾!

**例** 再看  $S_6$ 。由表可看出,  $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$  的逆元分别是  $f_0, f_1, f_2, f_3, f_5, f_4$ 。

**评注** 设  $\circ$  适合结合律。如果  $x, y$  都有逆元, 那么  $x \circ y$  也有逆元, 且

$$(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}.$$

为了说明这一点, 只要按定义验证即可:

$$(y^{-1} \circ x^{-1}) \circ (x \circ y) = y^{-1} \circ (x^{-1} \circ x) \circ y = y^{-1} \circ e \circ y = y^{-1} \circ y = e,$$

$$(x \circ y) \circ (y^{-1} \circ x^{-1}) = x \circ (y \circ y^{-1}) \circ x^{-1} = x \circ e \circ x^{-1} = x \circ x^{-1} = e.$$

这个规则往往称为袜靴规则 (*socks and shoes rule*): 设  $y$  是穿袜,  $x$  是穿靴,  $x \circ y$  表示动作的复合: 先穿袜后穿靴。那么这个规则告诉我们,  $x \circ y$  的逆元就是先脱靴再脱袜。

**评注** 由此可见, 结合律是一条很重要的规则。我们算  $63 \cdot 8 \cdot 125$  时也会想着先算  $8 \cdot 125$ 。

## Semi-groups and Groups

**定义** 设  $S$  是非空集。设  $\circ$  是  $S$  的二元运算。若  $\circ$  适合结合律, 则称  $S$  (关于  $\circ$ ) 是半群 (*semi-group*)。

**例**  $\mathbb{N}$  关于加法 (或乘法) 作成半群。

**例**  $T(A)$  关于  $\circ$  作成半群。

**评注** 事实上, 这里要求  $S$  非空是有必要的。

首先, 空集没什么意思。其次, 前面所述的结合律、交换律、分配律等自动成立, 这是因为对形如“若  $p$ , 则  $q$ ”的命题而言,  $p$  为假推出整个命题为真。这是相当“危险”的!

**定义** 设  $m$  是正整数。设  $x$  是半群  $S$  的元。令

$$x^1 = x, \quad x^m = x \circ x^{m-1}.$$

$x^m$  称为  $x$  的  $m$  次幂。不难看出, 当  $m, n$  都是正整数时,

$$x^{m+n} = x^m \circ x^n, \quad (x^m)^n = x^{mn}.$$

假如  $S$  有二个元  $x, y$  适合  $x \circ y = y \circ x$ , 那么还有

$$(x \circ y)^m = x^m \circ y^m.$$

**例** 还是看熟悉的  $\mathbb{N}$ 。对于乘法而言, 这里的幂就是普通的幂——一个数自乘多次的结果。对于加法而言, 这里的幂相当于乘法——一个数自加多次的结果。

**定义** 设  $G$  关于  $\circ$  是半群。若  $G$  的关于  $\circ$  的么元存在, 且  $G$  的任意元都有关于  $\circ$  的逆元, 则  $G$  是群 (*group*)。

**例**  $\mathbb{N}$  关于加法 (或乘法) 不能作成群。 $\mathbb{Z}$  关于加法作成群, 但关于乘法不能作成群。 $\mathbb{F}$  关于乘法不能作成群, 但  $\mathbb{F}^*$  关于乘法作成群。不过,  $\mathbb{F}^*$  关于加法不能作成群。

**例**  $T(A)$  一般不是群。不过,  $S_6$  是群。

**评注** 群有唯一的么元。群的每个元都有唯一的逆元。

**评注** 设  $G$  关于  $\circ$  是群。我们说,  $\circ$  适合消去律。

假如  $x \circ y = x \circ z$ 。二侧左边乘  $x$  的逆元  $x^{-1}$ , 就有

$$x^{-1} \circ (x \circ y) = x^{-1} \circ (x \circ z).$$

由于  $\circ$  适合结合律,

$$(x^{-1} \circ x) \circ y = (x^{-1} \circ x) \circ z.$$

也就是

$$e \circ y = e \circ z.$$

这样,  $y = z$ 。类似地, 用同样的方法可以知道, 右消去律也对。

**定义** 已经知道, 群的每个元  $x$  都有逆元  $x^{-1}$ 。由此, 当  $m$  是正整数时, 定义  $x^{-m} = (x^{-1})^m$ 。再定义  $x^0 = e$ 。利用半群的结果, 可以看出, 当  $m, n$  都是整数时,

$$x^{m+n} = x^m \circ x^n, \quad (x^m)^n = x^{mn}.$$

假如  $G$  有二个元  $x, y$  适合  $x \circ y = y \circ x$ , 那么还有

$$(x \circ y)^m = x^m \circ y^m.$$

**例** 对于  $\mathbb{F}^*$  的乘法而言, 这里的任意整数幂跟普通的整数幂没有任何区别。我们学习数的负整数幂的时候, 也是借助倒数定义的。

## Subgroups

**定义** 设  $G$  关于  $\circ$  是群。设  $H \subset G$ ,  $H$  非空。若  $H$  关于  $\circ$  也作成群, 则  $H$  是  $G$  的子群 (*subgroup*)。

**例** 对加法来说,  $\mathbb{Z}$  是  $\mathbb{F}$  的子群。对乘法来说,  $\mathbb{Z}^*$  不是  $\mathbb{F}^*$  的子群。



**评注** 设  $H \subset G$ ,  $H$  非空。 $H$  是  $G$  的子群的一个必要与充分条件是: 任取  $x, y \in H$ , 必有  $x \circ y^{-1} \in H$ 。

怎么说明这一点呢? 先看充分性。任取  $x \in H$ , 则  $e = x \circ x^{-1} \in H$ 。任取  $y \in H$ , 则  $y^{-1} = e \circ y^{-1} \in H$ 。所以

$$x \circ y = x \circ (y^{-1})^{-1} \in H。$$

$\circ$  在  $G$  适合结合律,  $H \subset G$ , 所以  $\circ$  作为  $H$  的二元运算也适合结合律。至此,  $H$  是半群。

前面已经说明,  $e \in H$ , 所以  $H$  的关于  $\circ$  的么元存在。进一步地,  $x \in H$  在  $G$  里的逆元也是  $H$  的元, 所以  $H$  的任意元都有关于  $\circ$  的逆元。这样,  $H$  是群。顺便一提, 我们刚才也说明了,  $G$  的么元也是  $H$  的么元, 且  $H$  的元在  $G$  里的逆元也是在  $H$  里的逆元。

再看必要性。假设  $H$  是一个群。任取  $x, y \in H$ , 我们要说明  $x \circ y^{-1} \in H$ 。看上去有点显然呀!  $H$  是群, 所以  $y$  有逆元  $y^{-1}$ , 又因为  $\circ$  是  $H$  的二元运算,  $x \circ y^{-1} \in H$ 。不过要注意一个细节。我们说明充分性时,  $y^{-1}$  被认为是  $y$  在  $G$  里的逆元; 可是, 刚才的论证里  $y^{-1}$  实则是  $y$  在  $H$  里的逆元。大问题! 怎么解决呢? 如果我们说明  $y$  在  $H$  里的逆元也是  $y$  在  $G$  里的逆元, 那这个漏洞就被修复了。

我们知道,  $H$  有么元  $e_H$ , 所以  $e_H \circ e_H = e_H \circ e_H$  是  $G$  的元, 所以  $e_H$  在  $G$  里有逆元  $(e_H)^{-1}$ 。这样,

$$\begin{aligned} e_H &= e \circ e_H \\ &= ((e_H)^{-1} \circ e_H) \circ e_H \\ &= (e_H)^{-1} \circ (e_H \circ e_H) \\ &= (e_H)^{-1} \circ e_H \\ &= e。 \end{aligned}$$

取  $y \in H$ 。  $y$  在  $H$  里有逆元  $z$ , 即

$$z \circ y = y \circ z = e_H = e。$$

$y, z$  都是  $G$  的元。这样, 根据逆元的唯一性,  $z$  自然是  $y$  在  $G$  里的逆元。

## Additive Groups

**定义** 若  $G$  关于名为  $+$  的二元运算作成群, 么元  $e$  读作“零元”写作  $0$ ,  $x \in G$  的逆元  $x^{-1}$  读作“ $x$  的相反元”写作  $-x$ , 且  $+$  适合交换律, 则说  $G$  是加群 (additive group)。相应地, “元的幂”也应该改为“元的倍”:  $x^m$

写为  $mx$ 。用加法的语言改写前面的幂的规则, 就得到了倍的规则: 对任意  $x, y \in G, m, n \in \mathbb{Z}$ , 有

$$(m+n)x = mx + nx,$$

$$m(nx) = (mn)x,$$

$$m(x+y) = mx + my.$$

顺便一提, 在这种记号下,  $x-y$  是  $x+(-y)$  的简写。并且

$$x+y = x+z \implies y=z.$$

由于这里的加法适合交换律, 直接换位就是右消去律。前面说, 若运算适合结合律, 则  $x$  的逆元的逆元还是  $x$ 。这句话用加法的语言写, 就是

$$-(-x) = x.$$

前面的“袜靴规则”就是

$$-(x+y) = (-y) + (-x) = (-x) + (-y) = -x - y.$$

这就是熟悉的去括号法则。这里体现了交换律的作用。

**评注** 初见此定义可能会觉得有些混乱: 怎么“倒数”又变为“相反数”了? 其实这都是借鉴已有写法。前面,  $\circ$  虽然不是  $\cdot$ , 但这个形状暗示着乘法, 因此有  $x^{-1}$  这样的记号; 现在, 运算的名字是  $+$ , 自然要根据形状作出相应的改变。其实, 这里“名为  $+$ ”“零元”“相反元”都不是本质——换句话说, 还是可以用老记号。不过, 我们主要接触至少与二种运算相关联的结构——整环与域, 所以用二套记号、名字是有必要的。

**评注** 前面的  $x^0 = e$  在加群里变为  $0x = 0$ 。看上去“很普通”, 不过左边的  $0$  是整数, 右边的  $0$  是加群的零元, 二者一般不一样!

**例** 显而易见,  $\mathbb{Z}, \mathbb{F}$  都是加群。

**例**  $S_6$  不是加群, 因为它的二元运算不适合交换律。

**评注** 类似地, 可以定义子加群 (sub-additive group)。这里, 就直接用等价刻画来描述它: “ $G$  的非空子集  $H$  是加群  $G$  的子加群的一个必要与充分条件是: 任取  $x, y \in H$ , 必有  $x-y \in H$ 。”

## Sums

**定义** 设  $f$  是  $\mathbb{Z}$  的非空子集  $S$  到加群  $G$  的函数。设  $p, q$  是二个整数。如果  $p \leq q$ , 则记

$$\sum_{j=p}^q f(j) = f(p) + f(p+1) + \cdots + f(q).$$

也就是说,  $\sum_{j=p}^q f(j)$  就是  $q - (p - 1)$  个元的和的一种简洁的表示法。如果  $p > q$ , 约定  $\sum_{j=p}^q f(j) = 0$ 。

**例** 我们已经知道,  $n \geq 0$  时

$$0 + 1 + \cdots + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2}。$$

用  $\sum$  写出来, 就是

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n - 1)}{2}。$$

这里的  $k$  是所谓的 “dummy variable”。所以,

$$\sum_{j=0}^{n-1} j = \sum_{k=0}^{n-1} k = \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell = \frac{n(n - 1)}{2}。$$

**例**  $f$  可以是常函数:

$$\sum_{t=p}^q 1 = \begin{cases} q - p + 1, & q \geq p; \\ 0, & q < p。 \end{cases}$$

**例** 设  $f$  与  $g$  是  $\mathbb{Z}$  的非空子集  $S$  到加群  $G$  的函数。因为加群的加法适合结合律与交换律, 所以

$$\sum_{j=p}^q (f(j) + g(j)) = \sum_{j=p}^q f(j) + \sum_{j=p}^q g(j)。$$

**评注** 设  $f(i, j)$  是  $\mathbb{Z}^2$  的非空子集到加群  $G$  的函数。记

$$S_C = \sum_{j=p}^q \sum_{i=m}^n f(i, j), \quad S_R = \sum_{i=m}^n \sum_{j=p}^q f(i, j),$$

其中  $q \geq p, n \geq m$ 。  $\sum_{i=m}^n f(i, j)$  是何物? 暂时视  $i$  之外的变元为常元, 则

$$\sum_{i=m}^n f(i, j) = f(m, j) + f(m + 1, j) + \cdots + f(n, j)。$$

$\sum_{j=p}^q \sum_{i=m}^n f(i, j)$  是  $\sum_{j=p}^q (\sum_{i=m}^n f(i, j))$  的简写:

$$\sum_{j=p}^q \sum_{i=m}^n f(i, j) = \sum_{i=m}^n f(i, p) + \sum_{i=m}^n f(i, p + 1) + \cdots + \sum_{i=m}^n f(i, q)。$$

$\sum_{i=m}^n \sum_{j=p}^q f(i, j)$  有着类似的解释。我们说,  $S_C$  一定与  $S_R$  相等。

记

$$C_j = \sum_{i=m}^n f(i, j), \quad R_i = \sum_{j=p}^q f(i, j).$$

考虑下面的表:

$f(m, p)$	$f(m, p+1)$	$\cdots$	$f(m, q)$	$R_m$
$f(m+1, p)$	$f(m+1, p+1)$	$\cdots$	$f(m+1, q)$	$R_{m+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$f(n, p)$	$f(n, p+1)$	$\cdots$	$f(n, q)$	$R_n$
$C_p$	$C_{p+1}$	$\cdots$	$C_q$	

由此, 不难看出,  $S_C$  与  $S_R$  只是用不同的方法将  $(n-m+1)(q-p+1)$  个元相加罢了。

**评注** 上面的例其实就是一个特殊情形 ( $n-m+1=2$ )。

## Rings

**定义** 设  $R$  是加群。设  $\cdot$  (读作“乘法”) 也是  $R$  的二元运算。假设

(i)  $\cdot$  适合结合律;

(ii)  $+$  与  $\cdot$  适合分配律。

我们说  $R$  (关于  $+$  与  $\cdot$ ) 是环 (*ring*)。

**评注** 在不引起歧义的情况下, 可省去  $\cdot$ 。例如,  $a \cdot b$  可写为  $ab$ 。

**例**  $\mathbb{Z}, \mathbb{F}$  (关于普通加法与乘法) 都是环。

**例** 全体偶数作成的集也是环。一般地, 设  $k$  是整数, 则全体  $k$  的倍作成的集是环。

**例** 这里举一个“平凡的” (*trivial*) 例。  $N$  只有一个元  $0$ 。可以验证,  $N$  关于普通加法与乘法作成群。这也是“最小的环”。在上个例里, 取  $k=0$  就是  $N$ 。

**例** 这里举一个“不平凡的” (*nontrivial*) 例。设  $R = \{0, a, b, c\}$ 。加法和乘法由以下二个表给定:

$+$	$0$	$a$	$b$	$c$
$0$	$0$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$0$	$c$	$b$
$b$	$b$	$c$	$0$	$a$
$c$	$c$	$b$	$a$	$0$

$\cdot$	$0$	$a$	$b$	$c$
$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
$a$	$0$	$0$	$0$	$0$
$b$	$0$	$a$	$b$	$c$
$c$	$0$	$a$	$b$	$c$

可以验证, 这是一个环。

**评注** 我们看一下环的简单性质。

已经知道,  $R$  的任意元的“整数 0 倍”是  $R$  的零元。不禁好奇, 零元乘任意元会是什么结果。首先, 回想起,  $R$  的零元适合  $0 + 0 = 0$ 。利用分配律, 当  $x \in R$  时,

$$0x = (0 + 0)x = 0x + 0x。$$

我们知道, 加法适合消去律。所以

$$0 = 0x。$$

类似地,  $x0 = 0$ 。也许有点眼熟? 但是这里左右二侧的 0 都是  $R$  的元, 不一定是数!

因为

$$xy + (-x)y = (x - x)y = 0,$$

$$xy + x(-y) = x(y - y) = 0,$$

所以

$$(-x)y = x(-y) = -xy。$$

从而

$$(-x)(-y) = -(x(-y)) = -(-xy) = xy。$$

根据分配律,

$$x(y_1 + \cdots y_n) = xy_1 + \cdots + xy_n,$$

$$(x_1 + \cdots + x_m)y = x_1y + \cdots + x_my。$$

二式联合, 就是

$$(x_1 + \cdots + x_m)(y_1 + \cdots y_n) = x_1y_1 + \cdots + x_1y_n + \cdots + x_my_1 + \cdots + x_my_n。$$

利用  $\sum$  符号, 此式可以写为

$$\left(\sum_{i=1}^m x_i\right) \left(\sum_{j=1}^n y_j\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j。$$

所以, 若  $n$  是整数,  $x, y \in R$ , 则

$$(nx)y = n(xy) = x(ny)。$$

对于正整数  $m, n$  与  $R$  的元  $x$ , 有

$$x^{m+n} = x^m x^n, \quad (x^m)^n = x^{mn}.$$

假如  $R$  有二个元  $x, y$  适合  $xy = yx$ , 那么还有

$$(xy)^m = x^m y^m.$$

**例** 在  $\mathbb{Z}, \mathbb{F}$  里, 这些就是我们熟悉的 (部分的) 数的运算律。

**评注** 类似地, 可以定义子环 (*subring*)。这里, 就直接用等价刻画来描述它: “ $R$  的非空子集  $S$  是环  $R$  的子环的一个必要与充分条件是: 任取  $x, y \in S$ , 必有  $x - y \in S, xy \in S$ 。”

**定义** 设  $R$  是环。假设任取  $x, y \in R$ , 必有  $xy = yx$ , 就说  $R$  是交换环 (*commutative ring*)。

**评注** 以后接触的环都是交换环。

## Domains

**定义** 设  $D$  是环。假设

- (i) 任取  $x, y \in D$ , 必有  $xy = yx$ ;
  - (ii) 存在  $1 \in D, 1 \neq 0$ , 使任取  $x \in D$ , 必有  $1x = x1 = x$ ;
  - (iii)  $\cdot$  适合“消去律变体”<sup>†</sup>: 若  $xy = xz, x \neq 0$ , 则  $y = z$ 。
- 我们说  $D$  (关于  $+$  与  $\cdot$ ) 是整环 (*domain, integral domain*)。

**例**  $\mathbb{Z}, \mathbb{F}$  都是整环。当然, 也有介于  $\mathbb{Z}$  与  $\mathbb{F}$  之间的整环。假如  $s \in \mathbb{C}$  的平方是整数, 那么全体形如  $x + sy$  ( $x, y \in \mathbb{Z}$ ) 的数作成个整环。

**例** 看一个有限整环的例。设  $V$  (*Vierergruppe*)<sup>‡</sup> 是 4 元集:

$$V = \{0, 1, \tau, \tau^2\}.$$

加法与乘法由下面的运算表决定:

$+$	0	1	$\tau$	$\tau^2$	$\cdot$	0	1	$\tau$	$\tau^2$
0	0	1	$\tau$	$\tau^2$	0	0	0	0	0
1	1	0	$\tau^2$	$\tau$	1	0	1	$\tau$	$\tau^2$
$\tau$	$\tau$	$\tau^2$	0	1	$\tau$	0	$\tau$	$\tau^2$	1
$\tau^2$	$\tau^2$	$\tau$	1	0	$\tau^2$	0	$\tau^2$	1	$\tau$

<sup>†</sup> 一般地, 这也可称为消去律。

<sup>‡</sup> A German word which means *four-group*.

可以验证,  $V$  不但是一个环, 它还适合整环定义的条件 (i) (ii) (iii)。因此,  $V$  是整环。

在  $V$  里,  $1 + 1 = 0$ , 这跟平常的加法有点不一样。换句话说, 这里的 0 跟 1 已经不是我们熟悉的数了。

**例** 全体偶数作成的集是交换环, 却不是整环。

**例** 再来看一个非整环例。考虑  $\mathbb{Z}^2$ 。设  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ 。规定

$$\begin{aligned}(a, b) &= (c, d) \iff a = c \text{ and } b = d, \\(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d), \\(a, b)(c, d) &= (ac, bd).\end{aligned}$$

可以验证, 在这二种运算下,  $\mathbb{Z}^2$  作成交换环, 其加法、乘法么元分别是  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ 。可是

$$(1, 0) \neq (0, 0), \quad (0, 1) \neq (0, -1), \quad (1, 0)(0, 1) = (1, 0)(0, -1).$$

也就是说, 乘法不适合消去律。

**评注** 可是, 如果这么定义乘法, 那么  $\mathbb{Z}^2$  可作为一个整环:

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

事实上, 这就是复数乘法, 因为

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

**评注** 类似地, 可以定义子整环 (*subdomain*)。这里, 就直接用前面的等价刻画来描述它: “ $D$  的非空子集  $S$  是整环  $D$  的子整环的一个必要与充分条件是: (i)  $1 \in S$ ; (ii) 任取  $x, y \in S$ , 必有  $x - y \in S$ ,  $xy \in S$ 。”

**例** 设  $D \subset \mathbb{C}$ , 且  $D$  是整环。不难看出,  $\mathbb{Z} \subset D$ 。

## Products

**定义** 设  $f$  是  $\mathbb{Z}$  的非空子集  $S$  到整环  $D$  的函数。设  $p, q$  是二个整数。如果  $p \leq q$ , 则记

$$\prod_{j=p}^q f(j) = f(p) \cdot f(p+1) \cdots f(q).$$

也就是说,  $\prod_{j=p}^q f(j)$  就是  $q - (p - 1)$  个元的积的一种简洁的表示法。如果  $p > q$ , 约定  $\prod_{j=p}^q f(j) = 1$ 。

**定义** 设  $n$  是正整数。那么  $1, 2, \dots, n$  的积是  $n$  的阶乘 (*factorial*):

$$n! = \prod_{j=1}^n j.$$

顺便约定  $0! = 1$ 。

**评注** 不难看出, 当  $n$  是正整数时,

$$n! = n \cdot (n-1)!.$$

**例** 不难验证, 下面是 0 至 9 的阶乘:

$$\begin{array}{ll} 0! = 1, & 1! = 1, \\ 2! = 2, & 3! = 6, \\ 4! = 24, & 5! = 120, \\ 6! = 720, & 7! = 5\,040, \\ 8! = 40\,320, & 9! = 362\,880. \end{array}$$

**评注** 因为整环的乘法也适合结合律与交换律, 所以

$$\begin{aligned} \prod_{j=p}^q (f(j) \cdot g(j)) &= \prod_{j=p}^q f(j) \cdot \prod_{j=p}^q g(j), \\ \prod_{j=p}^q \prod_{i=m}^n f(i, j) &= \prod_{i=m}^n \prod_{j=p}^q f(i, j), \end{aligned}$$

其中,  $\prod_{j=p}^q \prod_{i=m}^n f(i, j)$  当然是  $\prod_{j=p}^q (\prod_{i=m}^n f(i, j))$  的简写。

**评注** 回顾一下  $\sum$  符号。我们已经知道

$$\sum_{j=p}^q (f(j) + g(j)) = \sum_{j=p}^q f(j) + \sum_{j=p}^q g(j).$$

因为整环有分配律, 故当  $c \in D$  与变元  $j$  无关时<sup>†</sup>

$$\sum_{j=p}^q cf(j) = c \sum_{j=p}^q f(j).$$

进而, 当  $c, d$  都是常元时,

$$\sum_{j=p}^q (cf(j) + dg(j)) = c \sum_{j=p}^q f(j) + d \sum_{j=p}^q g(j).$$

类似地, 当  $q \geq p$ ,  $c$  是常元时,

$$\prod_{j=p}^q cf(j) = c^{q-p+1} \prod_{j=p}^q f(j).$$

---

<sup>†</sup> 这样的元称为常元 (*constant*)。



**定义** 最后介绍一下双阶乘 (*double factorial*)。前  $n$  个正偶数的积是  $2n$  的双阶乘:

$$(2n)!! = \prod_{j=1}^n 2j.$$

前  $n$  个正奇数是  $2n-1$  的双阶乘:

$$(2n-1)!! = \prod_{j=1}^n (2j-1).$$

顺便约定  $0!! = (-1)!! = 1$ 。

**评注** 不难看出, 对任意正整数  $m$ , 都有

$$m!! = m \cdot (m-2)!!.$$

双阶乘可以用阶乘表示:

$$\begin{aligned} (2n)!! &= 2^n n!, \\ (2n-1)!! &= \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}. \end{aligned}$$

由此可得

$$n!! \cdot (n-1)!! = n!.$$

**例** 不难验证, 下面是 1 至 10 的双阶乘:

$$\begin{array}{ll} 1!! = 1, & 2!! = 2, \\ 3!! = 3, & 4!! = 8, \\ 5!! = 15, & 6!! = 48, \\ 7!! = 105, & 8!! = 384, \\ 9!! = 945, & 10!! = 3840. \end{array}$$

## Units and Fields

**定义** 设  $D$  是整环。设  $x \in D$ 。若存在  $y \in D$  使  $xy = 1$ , 则说  $x$  是  $D$  的单位 (*unit*)。

**评注** 不难看出,  $D$  至少有一个单位 1, 因为  $1 \cdot 1 = 1$ 。定义里的  $y$  自然就是  $x$  的 (乘法) 逆元, 其一般记为  $x^{-1}$ 。 $x^{-1}$  当然也是单位。二个单位  $x, y$  的积  $xy$  也是单位:  $(xy)(y^{-1}x^{-1}) = 1$ 。单位的乘法当然适合结合律。这样,  $D$  的单位作成是一个 (乘法) 群。姑且叫  $D$  的所有单位作成的集为单位群 (*unit group*) 吧!

**评注** 不难看出, 0 一定不是单位。

**例** 看全体整数作成的整环  $\mathbb{Z}$ 。它恰有二个单位: 1 与  $-1$ 。

**例**  $\mathbb{F}$  也是整环。它有无数多个单位: 任意  $\mathbb{F}^*$  的元都是单位。

**例** 前面的 4 元集  $V$  的非零元都是单位。

**例** 现在看一个不那么平凡的例。设

$$D = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

这个  $D$  (关于数的运算) 作成整环。

首先, 我们说, 不存在有理数  $q$  使  $q^2 = 3$ 。用反证法。设  $q = \frac{m}{n}$ ,  $m, n$  是非零整数。我们知道, 分数可以约分, 故可以假设  $m, n$  不全为 3 的倍。这样

$$m^2 = 3n^2.$$

所以  $m^2$  一定是 3 的倍。因为

$$(3\ell)^2 = 3 \cdot 3\ell^2,$$

$$(3\ell \pm 1)^2 = 3(3\ell^2 \pm 2\ell) + 1,$$

故由此可看出,  $m$  也是 3 的倍。记  $m = 3u$ 。这样

$$3u^2 = n^2.$$

所以  $n$  也是 3 的倍。这跟假设矛盾!

再说一下  $D$  的二个元相等意味着什么。设  $a, b, c, d$  都是整数。那么

$$a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3} \implies (a - c)^2 = 3(d - b)^2.$$

若  $d - b \neq 0$ , 则  $\frac{a-c}{d-b}$  是有理数, 且

$$\left(\frac{a-c}{d-b}\right)^2 = 3,$$

而这是荒谬的。所以  $d - b = 0$ 。这样  $a - c = 0$ 。

现在再来看单位问题。若  $k$  是大于 1 的整数, 则  $k$  不是  $D$  的单位。反证法。若  $k$  是单位, 则有  $c, d \in \mathbb{Z}$  使

$$1 = k(c + d\sqrt{3}) = kc + kd\sqrt{3} \implies 1 = kc,$$

矛盾!

$D$  有无数多个单位。因为

$$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1,$$

故对任意正整数  $n$ , 有

$$(2 + \sqrt{3})^n (2 - \sqrt{3})^n = 1.$$

所以,  $(2 \pm \sqrt{3})^n$  是单位。

**定义** 设  $F$  是整环。若每个  $F$  的  $0$  的元都是  $F$  的单位, 则说  $F$  是域 (*field*)。

**例** 不难看出,  $\mathbb{F}$  是域。这也解释了为什么我们用  $\mathbb{F}$  表示  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  之一。

**评注** 在域  $F$  里, 只要  $a \neq 0$ , 则  $a^{-1}$  有意义。那么, 我们说  $\frac{b}{a}$  就是  $ba^{-1} = a^{-1}b$  的简写。不难验证, 当  $a, c \neq 0$  时,

$$\begin{aligned}\frac{b}{a} &= \frac{d}{c} \iff bc = da, \\ \frac{b}{a} \pm \frac{d}{c} &= \frac{bc \pm da}{ac}, \\ \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} &= \frac{bd}{ac}.\end{aligned}$$

若  $d \neq 0$ , 则

$$\frac{\frac{b}{a}}{\frac{d}{c}} = \frac{bc}{da}.$$

这就是我们熟知的分数运算法则。

**评注** 类似地, 可以定义子域 (*subfield*)。这里, 就直接用前面的等价刻画来描述它: “ $F$  的非空子集  $K$  是域  $F$  的子域的一个必要与充分条件是: (i)  $1 \in K$ ; (ii) 任取  $x, y \in K, y \neq 0$ , 必有  $x - y \in K, \frac{x}{y} \in K$ 。”

**例** 设  $F \subset \mathbb{C}$ , 且  $F$  是域。不难看出,  $\mathbb{Q} \subset F$ 。

## Definition of Polynomials

现在开始介绍多项式。

**定义** 设  $D$  是整环。设  $x$  是不在  $D$  里的任意一个文字。形如

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \quad (n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in D, a_n \neq 0)$$

的表达式称为  $D$  上  $x$  的一个多项式 (*polynomial in  $x$  over  $D$* )。  $n$  称为其次 (*degree*),  $a_i$  称为其  $i$  次系数 (*the  $i^{\text{th}}$  coefficient*),  $a_i x^i$  称为其  $i$  次项 (*the  $i^{\text{th}}$  term*)。  $f(x)$  的次可写为  $\deg f(x)$ 。

若二个多项式的次与各同次系数均相等, 则二者相等。

多项式的系数为 0 的项可以不写。

约定  $0 \in D$  也是多项式, 称为零多项式。零多项式的次是  $-\infty$ 。任取整数  $m$ , 约定

$$\begin{aligned} -\infty &= -\infty, & -\infty &< m, \\ -\infty + m &= m + (-\infty) = -\infty + (-\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

当然, 还约定, 零多项式只跟自己相等。换句话说,

$$a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n = 0$$

的一个必要与充分条件是

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

$D$  上  $x$  的所有多项式作成的集是  $D[x]$ :

$$D[x] = \{ a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \cdots, a_n \in D \}.$$

文字  $x$  只是一个符号, 它与  $D$  的元的和与积都是形式的。我们说,  $x$  是不定元 (*indeterminate*)。

**例**  $0y^0 + 1y^1 + (-1)y^2 + 0y^3 + (-7)y^4 \in \mathbb{Z}[y]$  是一个 4 次多项式。顺便一提, 一般把  $y^1$  写为  $y$ 。这个多项式的一个更普通的写法是

$$y - y^2 - 7y^4.$$

也许  $y^0$  看起来有些奇怪。如上所言, 这只是一个形式上的表达式。我们之后再处理这个小细节。

**例**  $z^0 + z + z^{\frac{3}{2}}$  不是  $z$  的多项式。

**例** 考虑  $\mathbb{Z}$  与  $\mathbb{Z}[x]$ 。设

$$f(x) = ax^0 + x + 2x^2 - x^4 - bx^5, \quad g(x) = cx + dx^2 - x^4 - 3x^5,$$

其中  $a, b, c, d$  都是整数。那么,  $f(x) = g(x)$  相当于

$$a = 0, \quad 1 = c, \quad 2 = d, \quad 0 = 0, \quad -1 = -1, \quad -b = -3,$$

也就是

$$a = 0, \quad b = 3, \quad c = 1, \quad d = 2.$$

**评注** 文字  $x$  的意义在数学中是不断进化的 (*evolving*)。在中小学里,  $x$  是未知元 (*unknown*): 虽然它是待求的, 但是它是一个具体的数。后来在函数里,  $x$  表示变元 (*variable*), 不过它的取值范围是确定的。在上面的定义里,  $x$  仅仅是一个文字, 成为不定元。

下面考虑多项式的运算。先从加法开始。

**定义** 设

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad g(x) = b_0x^0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

是  $D[x]$  的元。规定加法如下:

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n。$$

**例** 取  $\mathbb{Z}[x]$  的二个元  $f(x) = x^0 + 2x^2$ ,  $g(x) = -3x^0 + 4x - x^3$ 。先改写一下:

$$f(x) = 1x^0 + 0x + 2x^2 + 0x^3, \quad g(x) = -3x^0 + 4x + 0x^2 + (-1)x^3。$$

所以

$$f(x) + g(x) = -2x^0 + 4x + 2x^2 - x^3。$$

**命题**  $D[x]$  作成加群。

**证** 设

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

$$g(x) = b_0x^0 + b_1x + \cdots + b_nx^n,$$

$$h(x) = c_0x^0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$$

是  $D[x]$  的元。根据加法的定义,  $+$  显然是  $D[x]$  的二元运算。因为  $D$  的加法适合交换律, 故

$$\begin{aligned} g(x) + f(x) &= (b_0 + a_0)x^0 + (b_1 + a_1)x + \cdots + (b_n + a_n)x^n \\ &= (a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n \\ &= f(x) + g(x)。 \end{aligned}$$

也就是说,  $D[x]$  的加法适合交换律。

注意到

$$(f(x) + g(x)) + h(x)$$

$$\begin{aligned}
&= ((a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n) \\
&\quad + (c_0x^0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) \\
&= ((a_0 + b_0) + c_0)x^0 + ((a_1 + b_1) + c_1)x + \cdots + ((a_n + b_n) + c_n)x^n \\
&= (a_0 + b_0 + c_0)x^0 + (a_1 + b_1 + c_1)x + \cdots + (a_n + b_n + c_n)x^n.
\end{aligned}$$

类似地, 计算  $f(x) + (g(x) + h(x))$  也可以得到一样的结果。也就是说,  $D[x]$  的加法适合结合律。

零多项式可以写为

$$0 = 0x^0 + 0x + \cdots + 0x^n.$$

这样

$$\begin{aligned}
0 + f(x) &= (0 + a_0)x^0 + (0 + a_1)x + \cdots + (0 + a_n)x^n \\
&= a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

类似地,  $f(x) + 0 = f(x)$ 。

记

$$\underline{f}(x) = (-a_0)x^0 + (-a_1)x + \cdots + (-a_n)x^n.$$

这样

$$\begin{aligned}
\underline{f}(x) + f(x) &= (-a_0 + a_0)x^0 + (-a_1 + a_1)x + \cdots + (-a_n + a_n)x^n \\
&= 0x^0 + 0x + \cdots + 0x^n \\
&= 0.
\end{aligned}$$

类似地,  $f(x) + \underline{f}(x) = 0$ 。以后, 我们把这个  $\underline{f}(x)$  用普通的符号写为

$$-f(x) = -a_0x^0 - a_1x - \cdots - a_nx^n.$$

综上,  $D[x]$  是加群。



**定义** 设  $f(x), g(x) \in D[x]$ 。规定减法如下:

$$f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x)).$$

**评注** 可以看出,  $f(x) \pm g(x)$  的次既不会超出  $f(x)$  的次, 也不会超出  $g(x)$  的次。用符号写出来, 就是

$$\deg(f(x) \pm g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}.$$

若  $\deg f(x) > \deg g(x)$ , 则

$$\deg(f(x) \pm g(x)) = \deg f(x).$$

类似地, 若  $\deg f(x) < \deg g(x)$ , 则

$$\deg(f(x) \pm g(x)) = \deg g(x).$$

**评注** 既然  $D[x]$  是加群, 且每个  $a_i x^i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 都可以看成是多项式, 那么多项式的项的次序是不重要的。前面的写法称为升次排列 (*ascending order*)。下面的写法称为降次排列 (*descending order*):

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^0.$$

这跟中学里接触的多项式是一样的。

(非零) 多项式的最高次非零项是首项 (*leading term*)。它的系数是此多项式的首项系数 (*the coefficient of the leading term*)。

**例**  $y - y^2 - 7y^4 \in \mathbb{Z}[x]$  可以写为  $-7y^4 - y^2 + y$ , 其首项是  $-7y^4$ , 且其首项系数是  $-7$ 。

现在考虑乘法。

**定义** 设

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x + \dots + a_m x^m, \quad g(x) = b_0 x^0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$$

是  $D[x]$  的元。规定乘法如下:

$$f(x)g(x) = c_0 x^0 + c_1 x + \dots + c_{m+n} x^{m+n},$$

其中

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0.$$

且约定  $i > m$  时  $a_i = 0$ ,  $j > n$  时  $b_j = 0$ 。在这个约定下, 不难看出,  $\ell > m + n$  时,  $c_\ell = 0$ 。所以, 我们至少有

$$\deg f(x)g(x) \leq \deg f(x) + \deg g(x).$$

**例** 取  $\mathbb{Z}[x]$  的二个元  $f(x) = x^0 + 2x^2$ ,  $g(x) = -3x^0 + 4x - x^3$ 。先改写一下:

$$f(x) = 1x^0 + 0x + 2x^2, \quad g(x) = -3x^0 + 4x + 0x^2 + (-1)x^3.$$

所以

$$\begin{aligned}c_0 &= 1 \cdot (-3) = -3, \\c_1 &= 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-3) = 4, \\c_2 &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) = -6, \\c_3 &= 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 7, \\c_4 &= 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 0, \\c_5 &= 2 \cdot (-1) = -2.\end{aligned}$$

所以

$$f(x)g(x) = -3x^0 + 4x - 6x^2 + 7x^3 - 2x^5.$$

**例** 再看一个例。设

$$f(x) = x, \quad g(x) = x^\ell.$$

$a_i$  在  $i = 1$  时为 1,  $i \neq 1$  时为 0;  $b_j$  在  $j = \ell$  时为 1,  $j \neq \ell$  时为 0。

$\ell = 0$  时, 不难算出,  $f(x)g(x) = x$ 。现在设  $\ell \geq 1$ 。  $k \leq \ell$  时,

$$c_k = 0b_k + \underbrace{1 \cdot 0 + \cdots + 0 \cdot 0}_{k \text{ terms}} = 0.$$

$k = \ell + 1$  时,

$$c_{\ell+1} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + \underbrace{0 \cdot 0 + \cdots + 0 \cdot 0}_{\ell \text{ terms}} = 1.$$

所以

$$x \cdot x^\ell = x^{\ell+1}.$$

这样,  $x^\ell$  可以视为  $x$  的  $\ell$  次幂。

**评注** 由上面二个例可以看到, 这跟中学的多项式乘法运算没有什么本质区别。

**例** 设

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_mx^m.$$

是  $D[x]$  的元。零多项式可以写为

$$0 = 0x^0,$$

由此易知

$$0f(x) = f(x)0 = 0.$$



**评注** 设

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_mx^m, \quad g(x) = b_0x^0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

是  $D[x]$  的元, 且  $a_m \neq 0, b_n \neq 0$ 。这样,  $f(x)g(x)$  的  $m+n$  次项就是  $cx^{m+n}$ , 其中

$$\begin{aligned} c &= a_0b_{m+n} + \cdots + a_{m-1}b_{n+1} + a_mb_n + a_{m+1}b_{n-1} + \cdots + a_{m+n}b_n \\ &= 0 + \cdots + 0 + a_mb_n + 0 + \cdots + 0 \\ &= a_mb_n. \end{aligned}$$

因为  $a_m \neq 0, b_n \neq 0$ , 所以  $a_mb_n \neq 0$  (反证法: 若  $a_mb_n = 0 = a_m0$ , 因为  $a_m \neq 0$ , 根据  $D$  的消去律, 得  $b_n = 0$ , 矛盾!)。所以

$$\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x).$$

可以验证, 若  $f$  或  $g$  的任意一个是 0, 这个关系也对。

**命题**  $D[x]$  作成整环。所以,  $D[x]$  的一个名字就是 (整环)  $D$  上  $(x)$  的多项式 (整) 环。

**证** 已经知道,  $D[x]$  是加群。下面先说明  $D[x]$  是交换环。

根据定义, 多项式的乘法还是多项式, 也就是说, 乘法是二元运算。

设

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_mx^m, \\ g(x) &= b_0x^0 + b_1x + \cdots + b_nx^n, \\ h(x) &= u_0x^0 + u_1x + \cdots + u_sx^s \end{aligned}$$

是  $D[x]$  的元。则

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= c_0x^0 + c_1x + \cdots + c_{m+n}x^{m+n}, \\ g(x)f(x) &= d_0x^0 + d_1x + \cdots + d_{n+m}x^{n+m}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} c_k &= a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0, \\ d_k &= b_0a_k + b_1a_{k-1} + \cdots + b_ka_0. \end{aligned}$$

因为  $D$  的乘法适合交换律, 加法适合交换律与结合律, 故  $c_k = d_k$ 。这样,  $D[x]$  的乘法适合交换律。

不难算出

$$\begin{aligned} & (f(x)g(x))h(x) \\ &= (c_0x^0 + c_1x + \cdots + c_{m+n}x^{m+n})(u_0x^0 + u_1x + \cdots + u_sx^s) \\ &= v_0x^0 + v_1x + \cdots + v_{m+n+s}x^{m+n+s}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} v_t &= (\text{the sum of all } a_i b_j u_r \text{'s with } i + j + r = t) \\ &= a_0 b_0 u_t + a_0 b_1 u_{t-1} + \cdots + a_0 b_t u_0 + a_1 b_0 u_{t-1} + \cdots. \end{aligned}$$

类似地, 计算  $f(x)(g(x)h(x))$  也可以得到一样的结果。也就是说,  $D[x]$  的乘法适合结合律。

现在验证分配律。前面已经看到, 多项式的乘法是交换的, 所以只要验证一个分配律即可。不失一般性, 设  $s = n$ 。这样

$$g(x) + h(x) = (b_0 + u_0)x^0 + (b_1 + u_1)x + \cdots + (b_n + u_n)x^n.$$

所以

$$f(x)(g(x) + h(x)) = p_0x^0 + p_1x^1 + \cdots + p_{m+n}x^{m+n},$$

其中

$$\begin{aligned} p_k &= a_0(b_k + c_k) + a_1(b_{k-1} + c_{k-1}) + \cdots + a_k(b_0 + c_0) \\ &= (a_0b_k + a_0c_k) + (a_1b_{k-1} + a_1c_{k-1}) + \cdots + (a_kb_0 + a_kc_0) \\ &= (a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0) + (a_0c_k + a_1c_{k-1} + \cdots + a_kc_0). \end{aligned}$$

不难看出, 这就是  $f(x)g(x)$  的  $k$  次系数与  $f(x)h(x)$  的  $k$  次系数的和。这样,  $D[x]$  的加法与乘法适合分配律。至此, 我们知道,  $D[x]$  是交换环。

交换环离整环还差二步: 一是乘法么元, 二是消去律。先看消去律。若  $f(x)g(x) = f(x)h(x)$ ,  $f(x) \neq 0$ , 根据分配律,

$$0 = f(x)g(x) - f(x)h(x) = f(x)(g(x) - h(x)).$$

如果  $g(x) - h(x) \neq 0$ , 则  $g(x) - h(x)$  的次不是  $-\infty$ 。  $f(x)$  的次不是  $-\infty$ , 故  $f(x)(g(x) - h(x))$  的次不是  $-\infty$ 。换句话说,  $f(x)(g(x) - h(x)) \neq 0$ , 矛盾!

再看乘法么元。设

$$e(x) = x^0.$$

不难算出

$$e(x)f(x) = f(x)e(x) = f(x).$$

综上,  $D[x]$  是整环。

**评注** 以后, 我们把  $x^0$  写为 1。换句话说, 代替

$$a_0x^0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

我们写

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n。$$

这儿还有一件事儿值得一提。考虑

$$D_0 = \{ax^0 \mid a \in D\} \subset D[x]。$$

任取  $D_0$  的二元  $ax^0, bx^0$ 。首先,  $ax^0 = bx^0$  的一个必要与充分条件是  $a = b$ 。然后, 不难看出,

$$ax^0 + bx^0 = (a+b)x^0, \quad (ax^0)(bx^0) = (ab)x^0。$$

由此可以看出,  $D_0$  与  $D$  “几乎完全一样”。用摩登 (*modern*) 数学的话来说, “ $D_0$  与  $D$  是天然同构的 (*naturally isomorphic*)”。

我们不打算深究这一点。上面, 我们把  $x^0$  写为 1; 反过来,  $D$  的元  $a$  也可以理解为是多项式  $ax^0$ 。这跟中学的习惯是一致的。

最后, 我们指出: 既然非零的  $c \in D$  可视为 0 次多项式, 那么

$$\deg cf(x) = \deg f(x)。$$

## Division Algorithm

我们知道, 非负整数有这样的性质:

**命题** 设  $n$  是正整数,  $m$  是非负整数。则必有一对非负整数  $q, r$  使

$$m = qn + r, \quad 0 \leq r < n。$$

例如, 取  $n = 5, m = 23$ 。不难看出,

$$18 = 4 \cdot 5 + 3。$$

多项式也有类似的性质哟。

**命题** 设

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in D[x],$$

且  $a_n$  是  $D$  的单位。对任意  $g(x) \in D[x]$ , 存在  $q(x), r(x) \in D[x]$  使

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x), \quad \deg r(x) < n。$$

一般称其为带余除法:  $q(x)$  就是商 (*quotient*);  $r(x)$  就是余式 (*remainder*)。

**证** 用数学归纳法。记  $\deg g(x) = m$ 。若  $m < n$ , 则  $q(x) = 0, r(x) = g(x)$  适合要求。所以, 命题对不高于  $n-1$  的  $m$  都成立。

设  $m \leq \ell$  ( $\ell \geq n-1$ ) 时, 命题成立。考虑  $m = \ell+1$  的情形。此时, 设

$$g(x) = b_{\ell+1}x^\ell + b_\ell x^\ell + \cdots + b_0 \in D[x]_0.$$

作一个跟  $g(x)$  有着共同首项的多项式:

$$\begin{aligned} s(x) &= b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n}f(x) \\ &= b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0) \\ &= b_{\ell+1}a_n^{-1}(a_nx^{\ell+1} + a_{n-1}x^\ell + \cdots + a_0x^{\ell+1-n}) \\ &= b_{\ell+1}(x^{\ell+1} + a_n^{-1}a_{n-1}x^\ell + \cdots + a_n^{-1}a_0x^{\ell+1-n}) \\ &= b_{\ell+1}x^{\ell+1} + b_{\ell+1}a_n^{-1}a_{n-1}x^\ell + \cdots + b_{\ell+1}a_n^{-1}a_0x^{\ell+1-n}. \end{aligned}$$

因为  $a_n$  是单位, 故  $s(x) \in D[x]$ 。设  $r_1(x) = g(x) - s(x) \in D[x]$ 。这样,  $r_1(x)$  的次不高于  $\ell$ 。根据归纳假设, 有  $q_2(x), r_2(x) \in D[x]$  使

$$r_1(x) = q_2(x)f(x) + r_2(x), \quad \deg r_2(x) < n.$$

所以

$$\begin{aligned} g(x) &= b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n}f(x) + r_1(x) \\ &= b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n}f(x) + q_2(x)f(x) + r_2(x) \\ &= (b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n} + q_2(x))f(x) + r_2(x). \end{aligned}$$

记  $q(x) = b_{\ell+1}a_n^{-1}x^{\ell+1-n} + q_2(x)$ ,  $r(x) = r_2(x)$ , 则  $q(x), r(x)$  适合要求。所以,  $m \leq \ell+1$  时, 命题成立。根据数学归纳法, 命题成立。  $\text{☺}$

**例** 取  $\mathbb{F}[x]$  的二元  $f(x) = 2(x-1)^2(x+2)$ ,  $g(x) = 8x^6 + 1$ 。我们来找一对多项式  $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$  使

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg f(x).$$

不难看出,  $f(x)$  的次是 3, 且

$$f(x) = 2(x^2 - 2x + 1)(x + 2) = 2x^3 - 6x + 4.$$

我们按上面证明的方法寻找  $q(x)$  与  $r(x)$ 。  $a_3 = 2$  是  $\mathbb{F}$  的单位, 且  $a_3^{-1} = \frac{1}{2}$ 。取

$$q_1(x) = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{6-3} = 4x^3.$$

则

$$\begin{aligned}
 r_1(x) &= g(x) - q_1(x)f(x) \\
 &= (8x^6 + 1) - 4x^3(2x^3 - 6x + 4) \\
 &= (8x^6 + 1) - (8x^6 - 24x^4 + 16x^3) \\
 &= 24x^4 - 16x^3 + 1.
 \end{aligned}$$

$r_1(x)$  的次仍不低于 3。因此, 再来一次。取

$$q_2(x) = 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{4-3} = 12x.$$

则

$$\begin{aligned}
 r_2(x) &= r_1(x) - q_2(x)f(x) \\
 &= (24x^4 - 16x^3 + 1) - 12x(2x^3 - 6x + 4) \\
 &= (24x^4 - 16x^3 + 1) - (24x^4 - 72x + 48x) \\
 &= -16x^3 + 72x^2 - 48x + 1.
 \end{aligned}$$

$r_2(x)$  的次仍不低于 3。因此, 再来一次。取

$$q_3(x) = -16 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{3-3} = -8.$$

则

$$\begin{aligned}
 r_3(x) &= r_2(x) - q_3(x)f(x) \\
 &= (-16x^3 + 72x^2 - 48x + 1) - (-8)(2x^3 - 6x + 4) \\
 &= (-16x^3 + 72x^2 - 48x + 1) - (-16x^3 + 48x - 32) \\
 &= 72x^2 - 96x + 33.
 \end{aligned}$$

$r_3(x)$  的次低于 3。这样

$$\begin{aligned}
 g(x) &= q_1(x)f(x) + r_1(x) \\
 &= q_1(x)f(x) + q_2(x)f(x) + r_2(x) \\
 &= q_1(x)f(x) + q_2(x)f(x) + q_3(x)f(x) + r_3(x) \\
 &= (q_1(x) + q_2(x) + q_3(x))f(x) + r_3(x) \\
 &= (4x^3 + 12x - 8)f(x) + (72x^2 - 96x + 33).
 \end{aligned}$$

也就是说,

$$q(x) = 4x^3 + 12x - 8, \quad r(x) = 72x^2 - 96x + 33.$$

**评注** 带余除法要求  $f(x)$  的首项系数是单位是有必要的。

在上面的例里,  $f(x)$  与  $g(x)$  可以看成  $\mathbb{Z}[x]$  的元, 但 2 不是  $\mathbb{Z}$  的单位。虽然最终所得  $q(x), r(x)$  也是  $\mathbb{Z}[x]$  的元, 但这并不是一定会出现的。我们看下面的简单例。

考虑  $\mathbb{Z}[x]$  的多项式  $f(x) = 2x$ 。设

$$r(x) = r_0,$$

$$q(x) = q_0 + q_1x + \cdots + q_px^p,$$

$$g(x) = g_0 + g_1x + \cdots + g_sx^s,$$

且  $r_0, q_0, \dots, q_p, g_0, \dots, g_s \in \mathbb{Z}, q_p, g_s \neq 0$ 。若  $g(x) = q(x)f(x) + r(x)$ , 则

$$g_0 + g_1x + \cdots + g_sx^s = r_0 + 2q_0x + 2q_1x^2 + \cdots + 2q_px^{p+1}.$$

所以

$$p = s - 1,$$

$$r_0 = g_0,$$

$$2q_{i-1} = g_i, \quad i = 1, \dots, s.$$

这说明,  $g(x)$  的  $i$  项系数 ( $i = 1, \dots, s$ ) 必须是偶数。所以, 不存在  $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$  使

$$1 + 3x + x^2 = q(x) \cdot 2x + r(x), \quad \deg r(x) < 1.$$

我们知道, 用一个正整数除非负整数, 所得的余数与商是唯一的。比方说, 5 除 23 的余数只能是 3。

多项式也有类似的性质哟。不过, 我们需要借助另一个命题的帮助。

**命题** 设  $f(x) \in D[x]$ , 且  $f(x) \neq 0$ 。若  $D$  上  $x$  的 2 个多项式  $q(x), r(x)$  适合

$$q(x)f(x) + r(x) = 0, \quad \deg r(x) < \deg f(x),$$

则必有

$$q(x) = r(x) = 0.$$

通俗地说, 二个非零多项式的积的次不可能变低。

**证** 题设条件即

$$-q(x)f(x) = r(x).$$

反证法。若  $-q(x) \neq 0$ , 则  $\deg(-q(x)) \geq 0$ 。从而

$$\deg r(x) = \deg(-q(x)) + \deg f(x) \geq \deg f(x)。$$

可是,

$$\deg r(x) < \deg f(x),$$

矛盾! 故  $-q(x) = 0$ 。这样,  $r(x) = 0$ 。

☺

**命题** 设  $f(x) \in D[x]$ , 且  $f(x) \neq 0$ 。若  $D$  上  $x$  的 4 个多项式  $q_1(x)$ ,  $r_1(x)$ ,  $q_2(x)$ ,  $r_2(x)$  适合

$$\begin{aligned} q_1(x)f(x) + r_1(x) &= q_2(x)f(x) + r_2(x), \\ \deg r_1(x) &< \deg f(x), \quad \deg r_2(x) < \deg f(x), \end{aligned}$$

则必有

$$q_1(x) = q_2(x), \quad r_1(x) = r_2(x)。$$

**证** 记

$$Q(x) = q_1(x) - q_2(x), \quad R(x) = r_1(x) - r_2(x)。$$

题设条件即

$$(q_1(x) - q_2(x))f(x) + (r_1(x) - r_2(x)) = 0,$$

也就是

$$Q(x)f(x) + R(x) = 0。$$

注意到

$$\begin{aligned} \deg R(x) &= \deg(r_1(x) - r_2(x)) \\ &\leq \max\{\deg r_1(x), \deg r_2(x)\} \\ &< \deg f(x)。 \end{aligned}$$

根据上个命题,  $Q(x) = R(x) = 0$ 。所以,

$$q_1(x) = q_2(x), \quad r_1(x) = r_2(x)。$$

☺

这样, 我们得到了这个命题:

**命题** 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \in D[x],$$

且  $a_n$  是  $D$  的单位。对任意  $g(x) \in D[x]$ , 存在唯一的  $q(x), r(x) \in D[x]$  使

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x), \quad \deg r(x) < n.$$

一般称其为带余除法:  $q(x)$  就是商;  $r(x)$  就是余式。并且, 当  $f(x)$  的次不高于  $g(x)$  的次时,  $f(x), g(x), q(x)$  间还有如下的次关系:

$$\deg g(x) = \deg(g(x) - r(x)) = \deg q(x) + \deg f(x).$$

## Polynomial Equality

本节讨论二个多项式的相等。

设  $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$  都是整环  $D$  的元。根据定义, 我们已经知道,

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

的一个必要与充分条件是

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots, \quad a_n = b_n.$$

之后, 我们会遇到形如

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n$$

的式, 这里  $c \in D$ 。因为

$$1, \quad x-c, \quad (x-c)^2, \quad \dots, \quad (x-c)^n$$

是首项系数为 1 的  $0, 1, 2, \dots, n$  次多项式, 所以这个  $f(x)$  也是多项式, 且  $\deg f(x) \leq n$ 。当  $a_n \neq 0$  时,  $\deg f(x) = n$ , 且  $f(x)$  的首项系数为  $a_n$ 。

再作一个多项式

$$g(x) = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \cdots + b_n(x-c)^n.$$

$f(x)$  与  $g(x)$  都是多项式, 自然可以讨论是否相等。若  $c = 0$ ,  $(x-c)^\ell$  就变为普通的  $x^\ell$ 。所以,  $c = 0$  时,  $f(x) = g(x)$  的一个必要与充分条件是

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots, \quad a_n = b_n.$$

可是, 如果  $c \neq 0$  呢? 这个时候, 还是一样的条件吗?

先看一个例。



**例** 我们试研究

$$(\star) \quad a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 = b_0 + b_1(x - c) + b_2(x - c)^2。$$

在中学, 我们已经知道

$$(x - c)^2 = c^2 - 2cx + x^2。$$

这样,  $(\star)$  的左侧变为

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 \\ &= a_0 + a_1(-c + x) + a_2(c^2 - 2cx + x^2) \\ &= a_0 + (-a_1c + a_1x) + (a_2c^2 + (-2a_2c)x + a_2x^2) \\ &= (a_0 - a_1c + a_2c^2) + (a_1 - 2a_2c)x + a_2x^2。 \end{aligned}$$

同理,  $(\star)$  的右侧变为

$$(b_0 - b_1c + b_2c^2) + (b_1 - 2b_2c)x + b_2x^2。$$

所以,  $(\star)$  成立等价于

$$\begin{aligned} a_0 - a_1c + a_2c^2 &= b_0 - b_1c + b_2c^2, \\ a_1 - 2a_2c &= b_1 - 2b_2c, \\ a_2 &= b_2, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} (a_0 - b_0) - c(a_1 - b_1) + c^2(a_2 - b_2) &= 0, \\ (a_1 - b_1) - 2c(a_2 - b_2) &= 0, \\ (a_2 - b_2) &= 0。 \end{aligned}$$

由这个方程组, 可解出

$$a_0 - b_0 = a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = 0。$$

这跟  $c = 0$  时的

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2$$

是完全一致的。

**定义** 设  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x) \in D[x]$ 。设  $c_0, c_1, \dots, c_n \in D$ 。我们说

$$c_0p_0(x) + c_1p_1(x) + \dots + c_np_n(x)$$

是多项式  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$  的一个线性组合 (*linear combination*)。  $c_0, c_1, \dots, c_n$  就是此线性组合的系数。

若不存在一组不全为 0 的  $D$  中元  $d_0, d_1, \dots, d_n$  使

$$d_0 p_0(x) + d_1 p_1(x) + \dots + d_n p_n(x) = 0,$$

则说  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$  是线性无关的 (*linearly independent*)。换句话说, “ $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$  是线性无关的” 意味着: 若  $D$  中元  $r_0, r_1, \dots, r_n$  使

$$r_0 p_0(x) + r_1 p_1(x) + \dots + r_n p_n(x) = 0,$$

则  $r_0 = r_1 = \dots = r_n = 0$ 。

**例** 显然,  $1, x, \dots, x^n$  是线性无关的。当然, 前面的例告诉我们,  $1, x-c, (x-c)^2$  也是线性无关的。

**例** 单独一个非零多项式是线性无关的。

**评注** 设  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$  是线性无关的。

(i) 显然, 因为多项式的加法可交换, 随意打乱这  $n+1$  个多项式的次序后得到的多项式仍线性无关。

(ii) 对任意  $\ell$  ( $0 \leq \ell \leq n$ ),  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_\ell$  这  $\ell+1$  个多项式也是线性无关的。设  $c_0, c_1, \dots, c_\ell \in D$ , 且

$$c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \dots + c_\ell p_\ell(x) = 0.$$

这个相当于

$$c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \dots + c_\ell p_\ell(x) + 0 p_{\ell+1}(x) + \dots + 0 p_n(x) = 0.$$

所以

$$c_0 = c_1 = \dots = c_\ell = \underbrace{0 = \dots = 0}_{(n-\ell) \text{ 0's}} = 0.$$

(iii) 根据 (i) (ii) 可知, 线性无关的多项式的片段也是线性无关的。

**评注** 设  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$  是线性无关的。设  $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$  都是  $D$  的元。那么

$$a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + \dots + a_n p_n(x) = b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + \dots + b_n p_n(x)$$

相当于

$$(a_0 - b_0) p_0(x) + (a_1 - b_1) p_1(x) + \dots + (a_n - b_n) p_n(x) = 0,$$

也就是

$$a_0 - b_0 = a_1 - b_1 = \cdots = a_n - b_n = 0,$$

亦即

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \cdots, \quad a_n = b_n.$$

由此可见, 线性无关的多项式有着优良的性质: 二个线性组合相等的一个必要与充分条件是对应的系数相等。

我们知道,  $1, x, \cdots, x^n$  是线性无关的。在这串多项式里, 后一个的次比前一个的次多 1。不仅如此, 由多项式的定义可见, 每一个次不高于  $n$  的多项式都可以写为它们的线性组合。下面的命题就是这二件事实的推广。

**命题** 设  $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x) \in D[x]$  分别是  $0, 1, \cdots, n$  次多项式。则:

- (i)  $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$  是线性无关的;
- (ii) 若  $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$  的首项系数都是  $D$  的单位, 则任意次不高于  $n$  的多项式都可写为  $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$  的线性组合。由 (i) 知, 这个组合的系数一定是唯一的。

**证** (i) 用数学归纳法。当  $n = 0$  时, 只有一个 0 次多项式  $p_0(x) = c \neq 0$  那么, 由  $dc = 0$  可推出  $d = 0$ 。这样, 命题对  $n = 0$  成立。假定命题对  $n = \ell \geq 0$  成立。设  $c_0, c_1, \cdots, c_{\ell+1} \in D$  使

$$c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \cdots + c_\ell p_\ell(x) + c_{\ell+1} p_{\ell+1}(x) = 0.$$

记

$$r(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \cdots + c_\ell p_\ell(x),$$

则  $r(x)$  的次不高于  $\ell$ 。所以

$$c_{\ell+1} p_{\ell+1}(x) + r(x) = 0, \quad \deg r(x) \leq \ell < \deg p_{\ell+1}(x).$$

由上节命题知

$$c_{\ell+1} = 0, \quad r(x) = 0.$$

根据归纳假设,

$$r(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \cdots + c_\ell p_\ell(x) = 0 \implies c_0 = c_1 = \cdots = c_\ell = 0.$$

这样,

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_\ell = c_{\ell+1} = 0.$$

也就是说,  $n = \ell + 1$  时, 命题成立。

(ii) 用数学归纳法。当  $n = 0$  时, 只有一个 0 次多项式  $p_0(x) = c \neq 0$ , 且  $c$  是单位。任取次不高于 0 的多项式  $d$ 。因为  $d = (dc^{-1})c$ , 这样, 命题对  $n = 0$  成立。这样, 命题对  $n = 0$  成立。假定命题对  $n = \ell \geq 0$  成立。任取次不高于  $\ell + 1$  的多项式  $f(x)$ 。由于  $p_{\ell+1}(x)$  的首项系数是单位, 所以, 由带余除法知道, 存在多项式  $q(x), r(x) \in D[x]$  使

$$f(x) = q(x)p_{\ell+1}(x) + r(x), \quad \deg r(x) \leq \ell.$$

如果  $f(x)$  的次不高于  $\ell$ , 则  $q(x) = 0$ ; 如果  $f(x)$  的次是  $\ell + 1$ , 则

$$\deg q(x) = \deg f(x) - \deg p_{\ell+1}(x) = 0.$$

也就是说, 存在  $c_{\ell+1} \in D$  使  $q(x) = c_{\ell+1}$ 。所以,

$$f(x) = r(x) + c_{\ell+1}p_{\ell+1}(x), \quad \deg r(x) \leq \ell.$$

根据归纳假设, 存在  $c_0, c_1, \dots, c_\ell \in D$  使

$$r(x) = c_0p_0(x) + c_1p_1(x) + \dots + c_\ell p_\ell(x),$$

即

$$f(x) = c_0p_0(x) + c_1p_1(x) + \dots + c_\ell p_\ell(x) + c_{\ell+1}p_{\ell+1}(x).$$

所以,  $n = \ell + 1$  时, 命题成立。 ✎

**评注** 这里, (ii) 要求每个多项式的首项系数为单位是有必要的。考虑  $\mathbb{Z}$  与  $\mathbb{Z}[x]$ 。取  $n = 2$ , 及

$$p_0(x) = -1, \quad p_1(x) = 2x, \quad p_2(x) = 3x^2.$$

根据上面的命题, 这三个多项式是线性无关的。考虑  $f(x) = 3 + x - 2x^2$ 。设  $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$  使

$$3 + x - 2x^2 = c_0 \cdot (-1) + c_1 \cdot 2x + c_2 \cdot 3x^2.$$

这相当于

$$3 = -c_0, \quad 1 = 2c_1, \quad -2 = 3c_2.$$

容易看出, 这个方程组无整数解, 所以  $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$  的 (系数为  $\mathbb{Z}$  的元的) 线性组合不能表示每一个次不高于 2 的多项式。

本节开头的问题总算得到了解答。不仅如此, 我们得到了更深的结论:

**命题** 设  $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$  都是  $D$  的元。设  $c \in D$ 。再设

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots + a_n(x-c)^n, \\ g(x) &= b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \dots + b_n(x-c)^n. \end{aligned}$$

则  $f(x) = g(x)$  的一个必要与充分条件是

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots, \quad a_n = b_n.$$

并且, 任取

$$f(x) = u_0 + u_1x + u_2x^2 + \dots + u_nx^n \in D[x],$$

必存在  $v_0, v_1, \dots, v_n \in D$  使

$$f(x) = v_0 + v_1(x-c) + v_2(x-c)^2 + \dots + v_n(x-c)^n.$$

## Roots of Polynomials

我们回顾一下熟悉的多项式函数。

**定义** 设  $a_0, a_1, \dots, a_n \in D$ 。称

$$\begin{aligned} f: \quad & D \rightarrow D, \\ & t \mapsto a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n \end{aligned}$$

为  $D$  的多项式函数 (*polynomial function*)。我们也说, 这个  $f$  是由  $D$  上  $x$  的多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

诱导的多项式函数 (*the polynomial function induced by  $f$* )。不难看出, 若二个多项式相等, 则其诱导的多项式函数也相等。

**定义** 设  $f$  与  $g$  是  $D$  的二个多项式函数。二者的和  $f+g$  定义为

$$\begin{aligned} f+g: \quad & D \rightarrow D, \\ & t \mapsto f(t) + g(t). \end{aligned}$$

二者的积  $fg$  定义为

$$\begin{aligned} fg: \quad & D \rightarrow D, \\ & t \mapsto f(t)g(t). \end{aligned}$$

设  $f, g$  是  $D$  的二个多项式函数:

$$\begin{aligned} f: \quad & D \rightarrow D, \\ & t \mapsto a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, \\ g: \quad & D \rightarrow D, \\ & t \mapsto b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n. \end{aligned}$$

利用  $D$  的运算律, 可以得到

$$\begin{aligned} f+g: \quad & D \rightarrow D, \\ & t \mapsto (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n, \\ fg: \quad & D \rightarrow D, \\ & t \mapsto c_0 + c_1 t + \cdots + c_{2n} t^{2n}, \end{aligned}$$

其中

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0.$$

由此可得下面的命题:

**命题** 设  $f(x), g(x) \in D[x]$ ,  $f, g$  分别是  $f(x), g(x)$  诱导的多项式函数。那么  $f+g$  是  $f(x)+g(x)$  诱导的多项式函数, 且  $fg$  是  $f(x)g(x)$  诱导的多项式函数。

通俗地说, 若多项式  $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$  之间有一个由加法与乘法计算得到的关系, 那么将  $x$  换为  $D$  的元  $t$ , 这样的关系仍成立。

**例** 考虑  $\mathbb{F}$  与  $\mathbb{F}[x]$ 。前面, 利用带余除法, 得到关系

$$8x^6 + 1 = (4x^3 + 12x - 8) \cdot 2(x-1)^2(x+2) + (72x^2 - 96x + 33).$$

这里  $x$  只是一个文字, 不是数! 但是, 上面的命题告诉我们, 可以把  $x$  看成一个数。比如, 由上面的式可以立即看出,  $8t^6 + 1$  与  $72t^2 - 96t + 33$  在  $t = 1$  或  $t = -2$  时值是一样的。

可是, 对于这样的式, 我们不能将  $x$  改写为  $\mathbb{F}$  的元  $t$ :

$$\deg 3x^2 < \deg 2x^3.$$

可以看到, 若  $t = 0$ , 则  $3t^2 = 2t^3 = 0$ , 而  $0$  的次是  $-\infty$ ; 若  $t \neq 0$ , 则  $3t^2$  与  $2t^3$  都是非零数, 次都是  $0$ 。

**评注** 我们已经知道, 多项式确定多项式函数。自然地, 有这样的问題: 多项式函数能否确定多项式? 一般情况下, 这个问题的答案是 no。

考虑 4 元集  $V = \{0, 1, \tau, \tau^2\}$ 。它的加法与乘法如下:

+	0	1	$\tau$	$\tau^2$	·	0	1	$\tau$	$\tau^2$
0	0	1	$\tau$	$\tau^2$	0	0	0	0	0
1	1	0	$\tau^2$	$\tau$	1	0	1	$\tau$	$\tau^2$
$\tau$	$\tau$	$\tau^2$	0	1	$\tau$	0	$\tau$	$\tau^2$	1
$\tau^2$	$\tau^2$	$\tau$	1	0	$\tau^2$	0	$\tau^2$	1	$\tau$

在前面, 我们已经知道,  $V$  是整环。作  $V$  上  $x$  的二个多项式:

$$f(x) = x^4 - x, \quad g(x) = 0。$$

显然, 这是二个不相等的多项式。但是, 任取  $t \in V$ , 都有

$$t^4 - t = 0。$$

因此,  $f(x)$  与  $g(x)$  诱导的多项式函数是同一函数!

不过, 在某些场合下, 多项式函数可以确定多项式。之后我们还会提到这一点。

**评注** 设  $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in D[x]$ 。设  $t$  是  $D$  的元。以后, 我们直接写

$$f(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n。$$

至少, 一方通行 (*one-way traffic*) 是没问题的。

了解了多项式与多项式函数的关系后, 下面的这个命题就不会太凸兀了。

**命题** 设  $f(x) \in D[x]$  是  $n$  次多项式 ( $n \geq 1$ ),  $a \in D$ 。则存在  $n-1$  次多项式  $q(x) (\in D[x])$  使

$$f(x) = q(x)(x - a) + f(a)。$$

**证** 因为  $x - a$  的首项系数 1 是单位, 故存在  $D[x]$  的二元  $q(x), r(x)$  使

$$f(x) = q(x)(x - a) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg(x - a) = 1。$$

所以,  $r(x) = c, c \in D$ 。用  $D$  的元  $a$  替换  $x$ , 有

$$f(a) = q(a)(a - a) + c = c。$$

所以

$$f(x) = q(x)(x - a) + f(a).$$

再看这个  $q(x)$  的次。因为  $f(x)$  的次不低于  $x - a$  的次, 故

$$\deg q(x) = \deg f(x) - \deg(x - a) = n - 1. \quad \text{♣}$$

**评注** 如果用  $D$  的元  $b$  替换  $x$ , 则

$$f(b) = (b - a)q(b) + f(a),$$

也就是说, 存在  $r \in D$  使

$$f(b) - f(a) = (b - a)r.$$

所以, 若  $f(x) \in D[x]$  是  $n$  次多项式 ( $n \geq 1$ ),  $a, b \in D$ , 则存在  $r \in D$  使  $f(b) - f(a) = (b - a)r$ 。当  $f(x)$  的次低于 1 时, 这个命题也对 (取  $r = 0$ )。

举个简单的例。我们说, 不存在系数为整数的多项式  $f(x)$  使  $f(1) = f(-1) + 1$ 。假如说这样的  $f$  存在, 那么应存在整数  $r$  使

$$1 = f(1) - f(-1) = (1 - (-1))r = 2r,$$

而 1 不是偶数, 矛盾。

现在, 我们讨论多项式的根的基本性质。

**定义** 设  $f(x)$  是  $D$  上  $x$  的多项式。若有  $a \in D$  使  $f(a) = 0$ , 则说  $a$  是 (多项式)  $f(x)$  的根 (root)。

**例** 设  $D \subset \mathbb{C}$ , 且  $\mathbb{Z} \subset D$ 。看  $D$  上  $x$  的多项式

$$f(x) = (2x - 1)(x + 1)(x^2 - 3)(x^2 + 1)(x^2 + 4).$$

如果  $D = \mathbb{Z}$ , 则  $f(x)$  有一个在  $D$  里的根:  $-1$ 。如果  $D = \mathbb{Q}$ , 则  $f(x)$  有二个在  $D$  里的根:  $-1, \frac{1}{2}$ 。如果  $D = \mathbb{R}$ , 则  $f(x)$  有四个在  $D$  里的根:  $-1, \frac{1}{2}, \pm\sqrt{3}$ 。如果  $D = \mathbb{C}$ , 则  $f(x)$  有八个在  $D$  里的根:  $-1, \frac{1}{2}, \pm\sqrt{3}, \pm i, \pm 2i$ 。

**例** 再来一个例。看  $D$  上  $x$  的多项式

$$f(x) = x^2 + x - 1.$$

若  $D = \mathbb{R}$ , 则  $f(x)$  的二个根是  $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 。若  $D = \mathbb{C}$ , 则  $f(x)$  的二个根是  $\tau, \tau^2$ 。当然, 若  $D \subset \mathbb{Q}$ , 则  $f(x)$  无 ( $D$  的) 根。



**评注** 设  $a, b \in D$ , 且  $a \neq 0$ 。

若  $f(x) = a$ , 则  $f(x)$  无根。换句话说, 零次多项式至多有零个根。

再设  $f(x) = ax + b$  是一次多项式。若存在  $c \in D$  使  $b = ac$ , 则  $f(x)$  有一个根  $-c$ 。并且,  $f(x)$  也不会有另一个根 (若  $at_1 + b = at_2 + b$ , 则  $at_1 = at_2$ , 故  $t_1 = t_2$ )。若这样的  $c$  不存在, 则  $f(x)$  无根 (反设  $f(x)$  有根  $d$ , 则由  $ad + b = 0$  知  $b = a(-d)$ , 矛盾)。换句话说, 一次多项式至多有一个根。

结合上面的二个例, 我们猜想:  $n$  次多项式 ( $n \in \mathbb{N}$ ) 至多有  $n$  个 (不同的) 根。幸运的事儿是, 这个猜想是正确的。

**命题** 设  $f(x) \in D[x]$  是  $n$  次多项式 ( $n \geq 1$ )。  $a$  是  $f(x)$  的根的一个必要与充分条件是: 存在  $n-1$  次多项式  $q(x) (\in D[x])$  使

$$f(x) = q(x)(x - a)。$$

**证** 先看充分性。若这样的  $q(x)$  存在, 则

$$f(a) = q(a)(a - a) = 0。$$

再看必要性。设  $f(a) = 0$ 。根据上面的命题, 存在  $n-1$  次多项式  $q(x) \in D[x]$  使

$$f(x) = q(a)(x - a) + f(a) = q(a)(x - a)。 \quad \text{§}$$

**命题** 设  $f(x) \in D[x]$  是  $n$  次多项式 ( $n \in \mathbb{N}$ )。则  $f(x)$  至多有  $n$  个不同的根。

**证**  $n = 0$  或  $n = 1$  时, 我们已经知道这是对的。用数学归纳法。假设  $\ell$  次多项式至多有  $\ell$  个不同的根。看  $\ell + 1$  次多项式  $f(x)$ 。如果它没有根, 当然至多有  $\ell + 1$  个不同的根。如果它有一个根  $a$ , 则存在  $\ell$  次多项式  $q(x)$  使

$$f(x) = q(x)(x - a)。$$

根据归纳假设,  $q(x)$  至多有  $\ell$  个不同的根。而且, 若  $b \neq a$ , 且  $b$  不是  $q(x)$  的根, 利用消去律可知  $f(b) \neq 0$ 。这样,  $f(x)$  至多有  $\ell + 1$  个不同的根。  $\text{§}$

由此可推出一个很有用的事实:

**命题** 设  $a_0, a_1, \dots, a_n$  是  $D$  的元。设  $n$  是非负整数。设

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n。$$

若  $t_0, t_1, \dots, t_n$  是  $n+1$  个互不相同的  $D$  的元, 且

$$f(t_0) = f(t_1) = \dots = f(t_n) = 0,$$

则  $f(x)$  必为零多项式。通俗地说, 次不高于  $n$  (且系数为整环的元) 的多项式不可能有  $n$  个以上的互不相同的根, 除非这个多项式是零。

**证** 反证法。设  $f(x)$  不是零多项式。设  $f(x)$  的次为  $m$ , 则  $0 \leq m \leq n$ 。根据上个命题,  $f(x)$  至多有  $m$  个不同的根, 这与题设矛盾! 故  $f(x) = 0$ 。  $\clubsuit$

**评注** 再看前面提到的 4 元集  $V$ 。可以看出, 因为  $V$  的元“不够多”, 所以出现了取零值的非零多项式。

此事实的一个推论是:

**命题** 设  $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$  是  $D$  的元。设  $n$  是非负整数。设

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n.$$

若  $t_0, t_1, \dots, t_n$  是  $n+1$  个互不相同的  $D$  的元, 且

$$f(t_0) = g(t_0), \quad f(t_1) = g(t_1), \quad \dots, \quad f(t_n) = g(t_n),$$

则  $f(x)$  必等于  $g(x)$ 。通俗地说, 若次不高于  $n$  (且系数为整环的元) 的二个多项式若在多于  $n$  处取一样的值, 则这二个多项式相等。

**证** 考虑  $h(x) = f(x) - g(x)$ 。则  $\deg h(x) \leq n$ 。  $h(x)$  有  $n+1$  个不同的根。根据上个命题,  $h(x)$  是零多项式。这样,  $f(x) = g(x)$ 。  $\clubsuit$

## Polynomials over $\mathbb{F}$

我们在前几节讨论的都是整环  $D$  上的多项式, 所以它们看上去是有些抽象的。从现在开始, 我们不讨论抽象的  $D$  与  $D[x]$ , 而是讨论  $\mathbb{F}$  与  $\mathbb{F}[x]$ , 其中  $\mathbb{F}$  可代指  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  的任意一个。细心的读者会注意到我们在前几节未使用  $\sum$  符号。这是为了让读者没那么困难地适应多项式理论。从本节起, 我们会较多地使用这个  $\sum$ 。您也可以乘此机会让自己熟悉它。

本节并没有什么新的知识。您可以乘此机会温习一下所学内容。我们将重述一些定义与命题。我们在学校学数学的时候, 也会有复习课。就当本节就是“复习节”吧!

先从多项式的定义与运算开始。

**定义** 设  $x$  是不在  $\mathbb{F}$  里的任意一个文字。形如

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^n a_i x^i \\ &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad (n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}, a_n \neq 0) \end{aligned}$$

的表达式称为  $\mathbb{F}$  上  $x$  的一个多项式。 $n$  称为其次,  $a_i$  称为其  $i$  次系数,  $a_i x^i$  称为其  $i$  次项。 $f(x)$  的次可写为  $\deg f(x)$ 。

若二个多项式的次与各同次系数均相等, 则二者相等。

多项式的系数为 0 的项可以不写。

约定  $0 \in \mathbb{F}$  也是多项式, 称为零多项式。零多项式的次是  $-\infty$ 。任取整数  $m$ , 约定

$$\begin{aligned} -\infty &= -\infty, \quad -\infty < m, \\ -\infty + m &= m + (-\infty) = -\infty + (-\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

当然, 还约定, 零多项式只跟自己相等。换句话说,

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = 0$$

的一个必要与充分条件是

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

$\mathbb{F}$  上  $x$  的所有多项式作成的集是  $\mathbb{F}[x]$ :

$$\mathbb{F}[x] = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \mid n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F} \right\}.$$

文字  $x$  只是一个符号, 它与  $\mathbb{F}$  的元的和与积都是形式的。我们说,  $x$  是不定元。

**定义** 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i \in \mathbb{F}[x].$$

规定加法如下:

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i.$$

**命题** 设  $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。 $\mathbb{F}[x]$  的加法适合如下性质:

(i)  $f(x) + g(x) \in \mathbb{F}[x]$ ;

- (ii)  $(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$ ;
- (iii) 存在多项式  $0$  使  $0 + f(x) = f(x) + 0 = f(x)$ ;
- (iv) 存在多项式  $-f(x)$  使  $-f(x) + f(x) = f(x) + (-f(x)) = 0$ ;
- (v)  $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ 。

**定义** 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i \in \mathbb{F}[x]。$$

则

$$-g(x) = \sum_{i=0}^n (-b_i) x^i。$$

规定减法如下:

$$f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))。$$

**命题** 设  $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。则

$$\deg(f(x) \pm g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}。$$

若  $\deg f(x) > \deg g(x)$ , 则

$$\deg(f(x) \pm g(x)) = \deg f(x)。$$

类似地, 若  $\deg f(x) < \deg g(x)$ , 则

$$\deg(f(x) \pm g(x)) = \deg g(x)。$$

**定义** 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{F}[x]。$$

这称为  $f(x)$  的升次排列。下面的写法称为  $f(x)$  的降次排列:

$$\sum_{j=0}^n a_{n-j} x^{n-j} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0。$$

**定义** 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j \in \mathbb{F}[x]。$$

规定乘法如下:

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \left( \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) x^k。$$

**命题** 设  $i, j \in \mathbb{N}$ 。则

$$x^i \cdot x^j = x^i x^j = x^{i+j}。$$

**命题** 设  $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。则

$$\deg f(x)g(x) = \deg f(x) + \deg g(x)。$$

**命题** 设  $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。  $\mathbb{F}[x]$  的加法与乘法适合 (i) 至 (v) 及如下性质:

- (vi)  $f(x)g(x) \in \mathbb{F}[x]$ ;
- (vii)  $(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$ ;
- (viii) 存在多项式 1 使  $1f(x) = f(x)1 = f(x)$ ;
- (ix)  $f(x)g(x) = g(x)f(x)$ ;
- (x) 若  $f(x) \neq 0$ , 则

$$f(x)g(x) = f(x)h(x) \implies g(x) = h(x),$$

$$g(x)f(x) = h(x)f(x) \implies g(x) = h(x);$$

(xi) 二个分配律都对:

$$f(x)(g(x) + h(x)) = f(x)g(x) + f(x)h(x),$$

$$(g(x) + h(x))f(x) = g(x)f(x) + h(x)f(x)。$$

**评注**  $\mathbb{F}[x]$  的一个名字就是 (域)  $\mathbb{F}$  上  $(x)$  的多项式环。

**命题** 设  $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。非零的  $c \in \mathbb{F}$  是 0 次多项式, 那么

$$\deg cf(x) = \deg f(x)。$$

再来看多项式的带余除法。因为  $\mathbb{F}$  的每个非零元都是  $\mathbb{F}$  的单位, 所以有

**命题** 设  $f(x) \in \mathbb{F}[x]$  是非零多项式。对任意  $g(x) \in \mathbb{F}[x]$ , 存在唯一的  $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$  使

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg f(x)。$$

一般称其为带余除法:  $q(x)$  就是商;  $r(x)$  就是余式。并且, 当  $f(x)$  的次不高于  $g(x)$  的次时,  $f(x), g(x), q(x)$  间还有如下的次关系:

$$\deg g(x) = \deg(g(x) - r(x)) = \deg q(x) + \deg f(x)。$$

可以看到, 在  $\mathbb{F}[x]$  里, 带余除法的适用范围更广了。

下面回顾多项式的相等。我们借助“线性无关”讨论相等问题。

**定义** 设  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。设  $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ 。我们说

$$\sum_{i=0}^n c_i p_i(x)$$

是多项式  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$  的一个线性组合。 $c_0, c_1, \dots, c_n$  就是此线性组合的系数。

若不存在一组不全为 0 的  $\mathbb{F}$  中元  $d_0, d_1, \dots, d_n$  使

$$\sum_{i=0}^n d_i p_i(x) = 0,$$

则说  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$  是线性无关的。换句话说, “ $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$  是线性无关的”意味着: 若  $\mathbb{F}$  中元  $r_0, r_1, \dots, r_n$  使

$$\sum_{i=0}^n r_i p_i(x) = 0,$$

则  $r_0 = r_1 = \dots = r_n = 0$ 。

**命题** 设  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x) \in \mathbb{F}[x]$  分别是  $0, 1, \dots, n$  次多项式。则:

(i)  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$  是线性无关的;

(ii) 任意次不高于  $n$  的多项式都可唯一地写为  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$  的线性组合。

由于  $\mathbb{F}$  的每个非零元都是单位, 上面的命题的结论变强了。下面的例体现了这一点。

**例** 考虑  $\mathbb{F}$  与  $\mathbb{F}[x]$ 。取  $n = 2$ , 及

$$p_0(x) = -1, \quad p_1(x) = 2x, \quad p_2(x) = 3x^2.$$

这三个多项式是线性无关的。考虑  $f(x) = 3 + x - 2x^2$ 。设  $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{F}$  使

$$3 + x - 2x^2 = c_0 \cdot (-1) + c_1 \cdot 2x + c_2 \cdot 3x^2.$$

这相当于

$$3 = -c_0, \quad 1 = 2c_1, \quad -2 = 3c_2.$$

由此可得

$$c_0 = -3, \quad c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = -\frac{2}{3}.$$

可以看到, 在  $\mathbb{Z}$  与  $\mathbb{Z}[x]$  里  $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$  的线性组合还不能表示这个  $f(x)$ , 但当我们在“大环境” $\mathbb{F}$  与  $\mathbb{F}[x]$  下讨论问题时就可以了。

**命题** 设  $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{F}$ 。设  $c \in \mathbb{F}$ 。再设

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i (x-c)^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^n b_i (x-c)^i。$$

则  $f(x) = g(x)$  的一个必要与充分条件是

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots, \quad a_n = b_n。$$

并且, 任取

$$f(x) = \sum_{i=0}^n u_i x^i \in \mathbb{F}[x],$$

必存在  $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{F}$  使

$$f(x) = \sum_{i=0}^n v_i (x-c)^i。$$

最后, 我们回顾多项式函数与多项式的根。

**定义** 设  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ 。称

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, \\ & t \mapsto \sum_{i=0}^n a_i t^i \end{aligned}$$

为  $\mathbb{F}$  的多项式函数。我们也说, 这个  $f$  是由  $\mathbb{F}$  上  $x$  的多项式

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

诱导的多项式函数。不难看出, 若二个多项式相等, 则其诱导的多项式函数也相等。

**定义** 设  $f$  与  $g$  是  $\mathbb{F}$  的二个多项式函数。二者的和  $f+g$  定义为

$$\begin{aligned} f+g: \quad & \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, \\ & t \mapsto f(t) + g(t)。 \end{aligned}$$

二者的积  $fg$  定义为

$$\begin{aligned} fg: \quad & \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, \\ & t \mapsto f(t)g(t)。 \end{aligned}$$

设  $f, g$  是  $\mathbb{F}$  的二个多项式函数:

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, \\ & t \mapsto \sum_{i=0}^n a_i t^i, \\ g: \quad & \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, \\ & t \mapsto \sum_{i=0}^n b_i t^i. \end{aligned}$$

利用  $\mathbb{F}$  的运算律, 可以得到

$$\begin{aligned} f+g: \quad & \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, \\ & t \mapsto \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) t^i, \\ fg: \quad & \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, \\ & t \mapsto \sum_{i=0}^{2n} \left( \sum_{\ell=0}^i a_\ell b_{i-\ell} \right) t^i. \end{aligned}$$

由此可得下面的命题:

**命题** 设  $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ ,  $f, g$  分别是  $f(x), g(x)$  诱导的多项式函数。那么  $f+g$  是  $f(x)+g(x)$  诱导的多项式函数, 且  $fg$  是  $f(x)g(x)$  诱导的多项式函数。

通俗地说, 若多项式  $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$  之间有一个由加法与乘法计算得到的关系, 那么将  $x$  换为  $\mathbb{F}$  的元  $t$ , 这样的关系仍成立。

**定义** 设

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{F}[x].$$

设  $t \in \mathbb{F}$ 。我们把  $\mathbb{F}$  的元

$$\sum_{i=0}^n a_i t^i$$

简单地写为  $f(t)$ 。

下面是带余除法的推论。它在根的讨论里起了重要的作用。

**命题** 设  $f(x) \in \mathbb{F}[x]$  是  $n$  次多项式 ( $n \geq 1$ ),  $a \in \mathbb{F}$ 。则存在  $n-1$  次多项式  $q(x) (\in \mathbb{F}[x])$  使

$$f(x) = q(x)(x - a) + f(a).$$



**定义** 设  $f(x)$  是  $\mathbb{F}$  上  $x$  的多项式。若有  $a \in \mathbb{F}$  使  $f(a) = 0$ , 则说  $a$  是 (多项式)  $f(x)$  的根。

**命题** 设  $f(x) \in \mathbb{F}[x]$  是  $n$  次多项式 ( $n \geq 1$ )。  $a$  是  $f(x)$  的根的一个必要与充分条件是: 存在  $n-1$  次多项式  $q(x) (\in \mathbb{F}[x])$  使

$$f(x) = q(x)(x - a)。$$

**命题** 设  $f(x) \in \mathbb{F}[x]$  是  $n$  次多项式 ( $n \in \mathbb{N}$ )。则  $f(x)$  至多有  $n$  个不同的根。

**评注** 在上节, 我们知道, 整环  $D$  上的多项式  $f(x) = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) 不一定有根。可是, 在域  $\mathbb{F}$  里,  $f(x)$  就有根  $-\frac{b}{a}$ 。

**命题** 设  $a_0, a_1, \dots, a_n$  是  $\mathbb{F}$  的元。设  $n$  是非负整数。设

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n。$$

若  $t_0, t_1, \dots, t_n$  是  $n+1$  个互不相同的  $\mathbb{F}$  的元, 且

$$f(t_0) = f(t_1) = \dots = f(t_n) = 0,$$

则  $f(x)$  必为零多项式。通俗地说, 次不高于  $n$  (且系数为  $\mathbb{F}$  的元) 的多项式不可能有  $n$  个以上的互不相同的根, 除非这个多项式是零。

**命题** 设  $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$  是  $\mathbb{F}$  的元。设  $n$  是非负整数。设

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n。$$

若  $t_0, t_1, \dots, t_n$  是  $n+1$  个互不相同的  $\mathbb{F}$  的元, 且

$$f(t_0) = g(t_0), \quad f(t_1) = g(t_1), \quad \dots, \quad f(t_n) = g(t_n),$$

则  $f(x)$  必等于  $g(x)$ 。通俗地说, 若次不高于  $n$  (且系数为  $\mathbb{F}$  的元) 的二个多项式若在多于  $n$  处取一样的值, 则这二个多项式相等。

下面是一些新命题。由于  $\mathbb{F}$  里有无数多个元, 所以

**命题** 设  $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。设  $S \subset \mathbb{F}$ , 且  $S$  有无数多个元。若任取  $t \in S$ , 必有  $f(t) = 0$ , 则  $f(x)$  必为零多项式。通俗地说, 系数为  $\mathbb{F}$  的元的多项式不可能有无数多个根, 除非这个多项式是零。

**证**  $f(x)$  的次不可能是非负整数。所以  $f(x)$  只能是 0。

☞

由此立得

**命题** 设  $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。设  $S \subset \mathbb{F}$ , 且  $S$  有无数多个元。若任取  $t \in S$ , 必有  $f(t) = g(t)$ , 则  $f(x)$  与  $g(x)$  是二个相同的多项式。通俗地说, 若系数为  $\mathbb{F}$  的元的二个多项式在无数多个地方有相同的取值, 则这二个多项式必相等。

**证** 考虑  $h(x) = f(x) - g(x)$ , 并利用上个命题。

✎

前面已经知道, 多项式确定多项式函数。利用上面的命题, 我们有

**命题**  $\mathbb{F}$  上的多项式与  $\mathbb{F}$  的多项式函数是一一对应的: 不但二个不同的  $\mathbb{F}$  上的多项式给出二个不同的  $\mathbb{F}$  的多项式函数, 而且二个不同的  $\mathbb{F}$  的多项式函数给出二个不同的  $\mathbb{F}$  上的多项式。

**评注** 以后, 我们不再区分“多项式”与“多项式函数”。从现在开始, 您可以认为本文接下来讨论的“多项式”跟中学里的多项式是同一事物。

## Interpolation

本节讨论多项式插值 (*polynomial interpolation*) 问题。

“插值”听上去可能比较陌生。不过, 您在初中一定见过这样的问题:

**例** 已知一次函数的图像经过点  $(-1, 2)$  与  $(1, 3)$ , 求其解析式。

**例** 已知二次函数的图像经过点  $(-1, -1)$ ,  $(1, 1)$  与  $(2, 5)$ , 求其解析式。

在初中, 我们是用“待定系数法” (*the method of undetermined coefficients*) 求解的。它的基本思想是“求什么, 设什么”。设此一次函数的解析式为

$$y = ax + b, \quad a \neq 0.$$

代入已知条件, 得到二元一次方程组

$$\begin{cases} 2 = -a + b, \\ 3 = a + b. \end{cases}$$

由此可解出

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{5}{2}.$$

所以此一次函数的解析式为

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}。$$

完全类似地, 设此二次函数的解析式为

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0。$$

代入已知条件, 得到三元一次方程组

$$\begin{cases} -1 = a - b + c, \\ 1 = a + b + c, \\ 5 = 4a + 2b + c。 \end{cases}$$

由此可解出

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = -1。$$

所以此二次函数的解析式为

$$y = x^2 + x - 1。$$

在初中, 一般用左  $y$  右  $x$  的等式表示函数 (的解析式)。这种表示法强调因变元 (*dependent variable*)  $y$  与自变元 (*independent variable*)  $x$  的关系。不过, 既然我们有  $f(x)$  这样的记号, 那么因变元就不必写出了。并且, 我们在前节提到, 我们不再区分多项式与多项式函数。所以, 为方便, 我们用另一种方式叙述这二个問題:

**例** 求次为 1 的多项式  $f(x)$ , 使  $f(-1) = 2, f(1) = 3。$

**例** 求次为 2 的多项式  $f(x)$ , 使  $f(-1) = -1, f(1) = 1, f(2) = 5。$

设  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  是  $\mathbb{F}$  的  $n$  个互不相同的元。设  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{F}。$

