INTERNET NETWORK ARCHITECTURES

# KORREKTHEITSBEWEISE VON ALGORITHMEN

## *Inhalt*

- Wie beschreibt man einen Algorithmus?
- **Rechenmodell**
- **Laufzeitanalyse (Zeitkomplexität)**
- **Speicherplatzanalyse (Raumkomplexität)**
- **Wie beweist man die Korrektheit eines Algorithmus?**

# Was ist ein mathematischer Beweis?

## *Informale Definition*

- Ein Beweis ist eine Herleitung einer Aussage aus bereits bewiesenen Aussagen und/oder Grundannahmen (Axiomen).

# Korrektheitsbeweis

## *Was muss ich eigentlich zeigen?*

- Häufiges Problem: Was muss man in einem Korrektheitsbeweis beweisen?

## *Was wissen wir?*

- Problembeschreibung definiert zulässige Eingaben und zugehörige (gewünschte) Ausgaben

# Korrektheitsbeweise

*Wann ist ein Algorithmus korrekt?*

- Wir bezeichnen einen Algorithmus für eine vorgegebene Problembeschreibung als korrekt, wenn er für jede Eingabe die in der Problembeschreibung spezifizierte Ausgabe berechnet
- Streng genommen, kann man also nur von Korrektheit sprechen, wenn vorher das angenommene Verhalten des Algorithmus geeignet beschrieben wurde

# Beispiel: Sortieren

- Problem: Sortieren
- Eingabe: Folge von n Zahlen $(a_1, \ldots, a_n)$
- Ausgabe: Permutation $(a'_1, \ldots, a'_n)$ von $(a_1, \ldots, a_n)$, so dass $a'_1 \leq a'_2 \leq \ldots \leq a'_n$

# Korrektheitsbeweise

## *Was müssen wir zeigen?*

- Für jede gültige Eingabe sortiert unser Algorithmus korrekt

## *Aber wie? (Auf welchen Annahmen können wir aufbauen?)*

- Die Grundannahme in der Algorithmik ist, dass ein Pseudocodebefehl gemäß seiner Spezifikation ausgeführt wird
- Z.B.: Die Anweisung $x \leftarrow x + 1$ bewirkt, dass die Variable x um eins erhöht wird

# Erster Korrektheitsbeweis: Rückgabe ist 10+n

*Ein triviales Beispiel*

EinfacherAlgorithmus(n)

1. $X \leftarrow 10$
2. $Y \leftarrow n$
3. $X \leftarrow X + Y$
4. **return** $X$

*Behauptung*

*Der Algorithmus gibt den Wert 10+n zurück.*

<u>Beweis:</u>

# Erster Korrektheitsbeweis: Rückgabe ist 10+n

## *Ein triviales Beispiel*

EinfacherAlgorithmus(n)

1. $X \leftarrow 10$
2. $Y \leftarrow n$
3. $X \leftarrow X + Y$
4. **return** $X$

## *Behauptung*

*Der Algorithmus gibt den Wert 10+n zurück.*

Beweis:

*Zu Beginn des Algorithmus sind alle Variablen bis auf den Parameter n undefiniert.*

# Erster Korrektheitsbeweis: Rückgabe ist 10+n

*Ein triviales Beispiel*

EinfacherAlgorithmus(n)

1. $\boxed{X \leftarrow 10}$
2. $Y \leftarrow n$
3. $X \leftarrow X + Y$
4. **return** $X$

*Behauptung*

*Der Algorithmus gibt den Wert 10+n zurück.*

Beweis:

*Zu Beginn des Algorithmus sind alle Variablen bis auf den Parameter n undefiniert. Der Befehl in Zeile 1 weist X den Wert 10 zu.*

# Korrektheitsbeweise

*Ein triviales Beispiel*

EinfacherAlgorithmus(n)

1. $X \leftarrow 10$
2. $\boxed{Y \leftarrow n}$
3. $X \leftarrow X + Y$
4. **return** $X$

*Behauptung*

*Der Algorithmus gibt den Wert 10+n zurück.*

Beweis:

*Zu Beginn des Algorithmus sind alle Variablen bis auf den Parameter n undefiniert. Der Befehl in Zeile 1 weist X den Wert 10 zu. Der Befehl in Zeile 2 weist Y den Wert n zu.*

# Erster Korrektheitsbeweis: Rückgabe ist 10+n

*Ein triviales Beispiel*

EinfacherAlgorithmus(n)

1. $X \leftarrow 10$
2. $Y \leftarrow n$
3. $\boxed{X \leftarrow X + Y}$
4. **return** $X$

*Behauptung*

*Der Algorithmus gibt den Wert 10+n zurück.*

Beweis:

*Zu Beginn des Algorithmus sind alle Variablen bis auf den Parameter n undefiniert. Der Befehl in Zeile 1 weist X den Wert 10 zu. Der Befehl in Zeile 2 weist Y den Wert n zu. Der Befehl in Zeile 3 weist X den Wert X + Y zu. Da X vor der Zuweisung den Wert 10 enthielt und Y den Wert n, wird X auf 10+n gesetzt.*

# Erster Korrektheitsbeweis: Rückgabe ist 10+n

*Ein triviales Beispiel*

EinfacherAlgorithmus(n)

1. $X \leftarrow 10$
2. $Y \leftarrow n$
3. $X \leftarrow X + Y$
4. **return** $X$

*Behauptung*

*Der Algorithmus gibt den Wert 10+n zurück.*

Beweis:

*Zu Beginn des Algorithmus sind alle Variablen bis auf den Parameter n undefiniert. Der Befehl in Zeile 1 weist X den Wert 10 zu. Der Befehl in Zeile 2 weist Y den Wert n zu. Der Befehl in Zeile 3 weist X den Wert X + Y zu. Da X vor der Zuweisung den Wert 10 enthielt und Y den Wert n, wird X auf 10+n gesetzt. Der Befehl in Zeile 4 gibt X zurück. Da X zu diesem Zeitpunkt den Wert 10+n hat, folgt die Behauptung.*

# Erster Korrektheitsbeweis: Rückgabe ist 10+n

*Ein triviales Beispiel*

EinfacherAlgorithmus(n)

1. $X \leftarrow 10$
2. $Y \leftarrow n$
3. $X \leftarrow X + Y$
4. **return** $X$

**Ein Korrektheitsbeweis vollzieht also das Programm Schritt für Schritt nach.**

*Behauptung*

*Der Algorithmus gibt den Wert 10+n zurück.*

Beweis:

*Zu Beginn des Algorithmus sind alle Variablen bis auf den Parameter n undefiniert. Der Befehl in Zeile 1 weist X den Wert 10 zu. Der Befehl in Zeile 2 weist Y den Wert n zu. Der Befehl in Zeile 3 weist X den Wert X + Y zu. Da X vor der Zuweisung den Wert 10 enthielt und Y den Wert n, wird X auf 10+n gesetzt. Der Befehl in Zeile 4 gibt X zurück. Da X zu diesem Zeitpunkt den Wert 10+n hat, folgt die Korrektheit der Behauptung.*

# Korrektheitsbeweis: Maximumssuche

*Ein erstes nicht triviales Beispiel*

Algorithmus Max-Search(Array A)

1. max $\leftarrow$ 1
2. **for** j $\leftarrow$ 2 **to** length(A) **do**
3.     **if** A[j] > A[max] **then** max $\leftarrow$ j
4. **return** max

*Aufgabe:*

Korrektheitsbeweis muss das Programm Schritt für Schritt nachvollziehen

*Problem*

Wir wissen nicht, wie viele Durchläufe die **for**-Schleife benötigt.

Das hängt von der Eingabelänge ab.

# Korrektheitsbeweis: Maximumssuche

*Ein erstes nicht triviales Beispiel*

Algorithmus Max-Search(Array A)

1. max $\leftarrow$ 1
2. **for** j $\leftarrow$ 2 **to** length(A) **do**
3. **if** A[j] > A[max] **then** max $\leftarrow$ j
4. **return** max

*Abhilfe*

Wir benötigen eine Aussage, die den Zustand am Ende der Schleife nach einer beliebigen Anzahl Schleifendurchläufe angibt.

*Zustand*

Werte der Variablen des Programms

# Korrektheitsbeweis: Schleifeninvariante

*Ein erstes nicht triviales Beispiel*

Algorithmus Max-Search(Array A)

max $\leftarrow$ 1
**for** j $\leftarrow$ 2 **to** length(A) **do**
    **if** A[j] > A[max] **then** max $\leftarrow$ j
**return** max

## *Definition* ***Schleifeninvariante***

Eine Schleifeninvariante ist eine Aussage A(i), die

- Zu Beginn des ersten Durchlaufs gilt (Initialisierung)
- Zu Beginn des i-ten Schleifendurchlaufs gilt (in Abhängigkeit von i)

Und eine Aussage über den Zustand nach Ablauf der Schleife erlaubt, den Austrittszustand.

# Korrektheitsbeweis: Schleifeninvariante

*Ein erstes nicht triviales Beispiel*

Algorithmus Max-Search(Array A)

1. max ← 1
2. **for** j ← 2 **to** length(A) **do**
3.     **if** A[j] > A[max] **then** max ← j
4. **return** max

*Schleifeninvariante – Austrittszustand*

Eine Schleife wird beendet, wenn die Schleifenbedingung nicht mehr gilt.

Dieser Zustand wird als Austrittszustand bezeichnet.

# Korrektheitsbeweis: Schleifeninvariante

*Ein erstes nicht triviales Beispiel*

Algorithmus Max-Search(Array A)

1. max $\leftarrow$ 1
2. **for** j $\leftarrow$ 2 **to** length(A) **do**
3.     **if** A[j] > A[max] **then** max $\leftarrow$ j
4. **return** max

*Schleifeninvariante – Konventionen für **for**-Schleifen*

Bei einer for-Schleife nehmen wir an:

- Laufvariablen werden am Ende des Schleifendurchlaufs erhöht
- Bei der Initialisierung die Laufvariablen mit dem Startwert initialisiert sind.

Somit kann (und sollte) die Invariante von der Laufvariablen abhängen.

# Korrektheitsbeweis: Maximumssuche

**Abkürzung:**
A[1..j-1] entspricht A[1, …, j-1]

*Ein erstes nicht triviales Beispiel*

Algorithmus Max-Search(Array A)

1. max $\leftarrow$ 1
2. **for** j $\leftarrow$ 2 **to** length(A) **do**
3.     **if** A[j] > A[max] **then** max $\leftarrow$ j
4. **return** max

*Lemma*

Die **for**-Schleife in Algorithmus Max-Search erfüllt folgende Schleifeninvariante:

(Invariante) A[max] ist ein größtes Element aus A[1..j-1].

# Korrektheitsbeweis: Maximumssuche

*Lemma*

Die **for**-Schleife in Algorithmus Max-Search erfüllt folgende Schleifeninvariante:

(Invariante) A[max] ist ein größtes Element aus A[1..j-1].

# Korrektheitsbeweis: Maximumssuche

*Lemma*

Die **for**-Schleife in Algorithmus Max-Search erfüllt folgende Schleifeninvariante:

(Invariante) A[max] ist ein größtes Element aus A[1..j-1].

Beweis:

Vor der Schleife setzt der Befehl in Zeile 1 max auf 1.

Wir zeigen in Abhängigkeit von der Laufvariable j, dass die Invariante erfüllt ist.

# Korrektheitsbeweis: Maximumssuche

*Lemma*

Die **for**-Schleife in Algorithmus Max-Search erfüllt folgende Schleifeninvariante:

(Invariante) A[max] ist ein größtes Element aus A[1..j-1].

Beweis:

Vor der Schleife setzt der Befehl in Zeile 1 max auf 1.

Wir zeigen in Abhängigkeit von der Laufvariable j, dass die Invariante erfüllt ist.

(Erster Schritt) Zur Initialisierung der Schleife ist max=1 und j=2.
A[1..1] enhält nur ein Element, nämlich A[1].
Da A[max] = A[1] ist, ist A[max] ein größtes Element aus A[1..1].
=> Die Invariante gilt zur Initialisierung.

# Korrektheitsbeweis: Maximumssuche

*Lemma*

Die **for**-Schleife in Algorithmus Max-Search erfüllt folgende Schleifeninvariante:

(Invariante) A[max] ist ein größtes Element aus A[1..j-1].

Beweis:

Vor der Schleife setzt der Befehl in Zeile 1 max auf 1.

Wir zeigen in Abhängigkeit von der Laufvariable j, dass Invariante erfüllt ist.

(Erster Schritt) Zur Initialisierung der Schleife ist max=1 und j=2.
A[1..1] enhält nur ein Element, nämlich A[1].
Da A[max] = A[1] ist, ist A[max] ein größtes Element aus A[1..1].
=> Die Invariante gilt zur Initialisierung.

INTERNET NETWORK ARCHITECTURES

# Korrektheitsbeweis: Maximumssuche

*Lemma*

Die **for**-Schleife in Algorithmus Max-Search erfüllt folgende Schleifeninvariante:

(Invariante) A[max] ist ein größtes Element aus A[1..j-1].

Beweis(fortgesetzt):

(Voraussetzung) Sei die Invariante erfüllt für $j=j_0 <$ length(A)+1.

# Korrektheitsbeweis: Maximumssuche

*Lemma*

Die **for**-Schleife in Algorithmus Max-Search erfüllt folgende Schleifeninvariante:

(Invariante) A[max] ist ein größtes Element aus A[1..j-1].

Beweis(fortgesetzt):

(Voraussetzung) Sei die Invariante erfüllt für $j = j_0 < \text{length}(A)+1$.

Zu zeigen: Die Invariante ist erfüllt für j + 1. („Induktionsschritt“: j -> j+1)

# Korrektheitsbeweis: Maximumssuche

*Lemma*

Die **for**-Schleife in Algorithmus Max-Search erfüllt folgende Schleifeninvariante:

(Invariante) A[max] ist ein größtes Element aus A[1..j-1].

Beweis(fortgesetzt):

(Voraussetzung) Sei die Invariante erfüllt für $j=j_0 <$ length(A)+1.

Zu zeigen: Die Invariante ist erfüllt für j + 1. („Induktionsschritt“: j -> j+1)

Wir betrachten den Durchlauf der Schleife mit Laufvariable $j=j_0$.

INTERNET NETWORK ARCHITECTURES

# Korrektheitsbeweis: Maximumssuche

*Lemma*

Die **for**-Schleife in Algorithmus Max-Search erfüllt folgende Schleifeninvariante:

(Invariante) A[max] ist ein größtes Element aus A[1..j-1].

Beweis(fortgesetzt):

(Voraussetzung) Sei die Invariante erfüllt für $j=j_0 <$ length(A)+1.

Zu zeigen: Die Invariante ist erfüllt für j + 1. („Induktionsschritt“: j -> j+1)

Wir betrachten den Durchlauf der Schleife mit Laufvariable $j=j_0$.

Falls A[j] ≤ A[max] ist, so wird die **then**-Anweisung nicht ausgeführt.
Dann ist A[max] auch größtes Element aus A[1..j].
Am Ende der Schleife wird j um 1 erhöht.
Somit gilt die Aussage auch für j + 1.

# Korrektheitsbeweis: Maximumssuche

*Lemma*

Die **for**-Schleife in Algorithmus Max-Search erfüllt folgende Schleifeninvariante:

(Invariante) A[max] ist ein größtes Element aus A[1..j-1].

<u>Beweis(fortgesetzt):</u>

(Voraussetzung) Sei die Invariante erfüllt für $j = j_0 <$ length(A)+1.

Zu zeigen: Die Invariante ist erfüllt für j + 1. („Induktionsschritt“: j -> j+1)

Wir betrachten den Durchlauf der Schleife mit Laufvariable $j = j_0$.

Falls A[j] ≤ A[max] ist, so wird die **then**-Anweisung nicht ausgeführt.
Dann ist A[max] auch größtes Element aus A[1..j].
Am Ende der Schleife wird j um 1 erhöht.
Somit gilt die Aussage auch für j + 1.

# Korrektheitsbeweis: Maximumssuche

*Lemma*

Die **for**-Schleife in Algorithmus Max-Search erfüllt folgende Schleifeninvariante:

(Invariante) A[max] ist ein größtes Element aus A[1..j-1].

Beweis(fortgesetzt):

Falls A[j] > A[max] ist, so ist nach I.V.

A[j] größer als das größte Element aus A[1...j-1]
somit ist A[j] das größte Element aus A[1..j].

# Korrektheitsbeweis: Maximumssuche

*Lemma*

Die **for**-Schleife in Algorithmus Max-Search erfüllt folgende Schleifeninvariante:

(Invariante) A[max] ist ein größtes Element aus A[1..j-1].

Beweis(fortgesetzt):

Falls A[j] > A[max] ist, so ist nach I.V.

A[j] größer als das größte Element aus A[1...j-1]

somit ist A[j] das größte Element aus A[1..j].

In der **then**-Anweisung wird max=j gesetzt.

Damit ist A[max] das größte Element aus A[1..j].

# Korrektheitsbeweis: Maximumssuche

*Lemma*

Die **for**-Schleife in Algorithmus Max-Search erfüllt folgende Schleifeninvariante:

(Invariante) A[max] ist ein größtes Element aus A[1..j-1].

Beweis(fortgesetzt):

Falls A[j] > A[max] ist, so ist nach I.V.

A[j] größer als das größte Element aus A[1...j-1]

somit ist A[j] das größte Element aus A[1..j].

In der **then**-Anweisung wird max=j gesetzt.

Damit ist A[max] das größte Element aus A[1..j].

Am Ende der Schleife wird j um 1 erhöht.

Damit gilt die Aussage auch für j + 1.

# Korrektheitsbeweis: Maximumssuche

*Lemma*

Die **for**-Schleife in Algorithmus Max-Search erfüllt folgende Schleifeninvariante:

(Invariante) A[max] ist ein größtes Element aus A[1..j-1].

Beweis(fortgesetzt):

Falls A[j] > A[max] ist, so ist nach I.V.

A[j] größer als das größte Element aus A[1...j-1]
somit ist A[j] das größte Element aus A[1..j].
In der **then**-Anweisung wird max=j gesetzt.
Damit ist A[max] das größte Element aus A[1..j].
Am Ende der Schleife wird j um 1 erhöht.
Damit gilt die Aussage auch für j + 1.

# Korrektheitsbeweis: Maximumssuche

*Lemma*

Die **for**-Schleife in Algorithmus Max-Search erfüllt folgende Schleifeninvariante:

(Invariante) A[max] ist ein größtes Element aus A[1..j-1].

Beweis(fortgesetzt):

Das entspricht dem Prinzip der vollständigen Induktion: Ist die Invariante vor jedem Schleifendurchlauf und vor dem Schleifenaustritt erfüllt, gilt sie für jeden Schleifendurchlauf und insbesondere am Ende der Schleife!

# Korrektheitsbeweis: Maximumssuche

## *Ein erstes nicht triviales Beispiel*

Algorithmus Max-Search(Array A)

1. max $\leftarrow$ 1
2. **for** j $\leftarrow$ 2 **to** length(A) **do**
3.   **if** A[j] > A[max] **then** max $\leftarrow$ j
4. **return** max

## *Invarianten bei der Programmierung*

Invarianten sollten zur Kommentierung von Schleifen benutzt werden. Diese kann man u.a. mit Hilfe von „Assertions“ zur Laufzeit überprüfen.

# AUSFLUG: VOLLSTÄNDIGE INDUKTION

# Vollständige Induktion

- **Zu zeigen**: p: $N_0 \rightarrow$ Boolean (Prädikat)

  $N_0 = \{0,1,..\}$
- **Induktionsanfang**: Zu beweisen:

  p(0) ist WAHR
- **Induktionsvoraussetzung**: Für alle $n \in N_0$, mit $n <= n_0$ gilt:

  p(n) ist WAHR
- **Induktionsschritt:** Zu beweisen ist:

  p(n) ist WAHR für $n <= n_0 \Rightarrow$ p(n+1) ist WAHR
- **Induktionsschluss**: Für alle $n \in N_0$ gilt

  p(n) ist WAHR.

# Beispiel für vollständigen Induktion

Zu zeigen: Für alle n in $N_0$ gilt

$$p(n):\quad 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n \;=\; \frac{n(n+1)}{2}$$

# Beispiel für vollständigen Induktion

p(n): $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Induktionsanfang: $1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = \dfrac{2}{2}$

Induktionsschritt:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)$$

$$= (n + 1)(\frac{n}{2} + 1)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

# Beispiel für vollständigen Induktion

Induktionsschluss: Für alle n in $N_0$

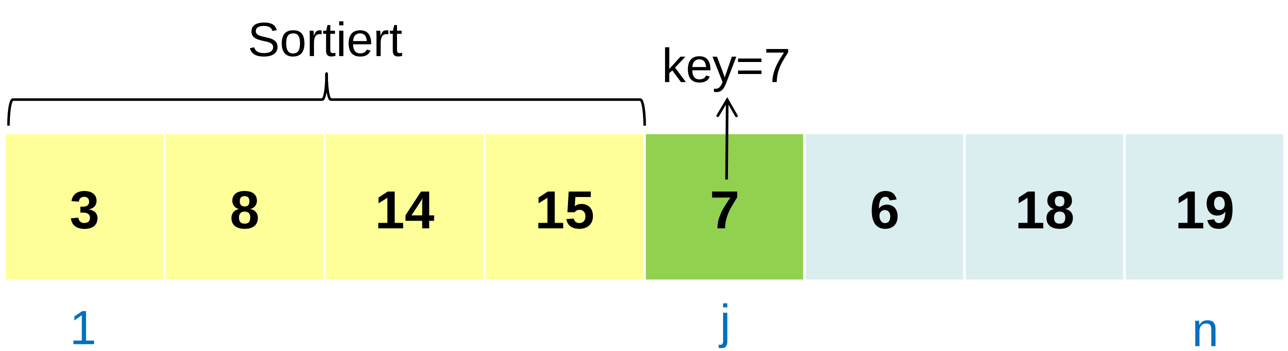
$$1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

# KORREKTHEIT INSERTIONSORT

# Insertion Sort

```
InsertionSort(Array A)
    for j ← 2 to length(A) do
        key ← A[j]
        i ← j-1
        while i>0 and A[i]>key do
            A[i+1] ← A[i]
            i ← i-1
        A[i+1] ← key
```

- Eingabegröße n
- length(A) = n
- verschiebe alle Elemente aus
- A[1…j-1], die größer als key
- sind eine Stelle nach rechts
- Speichere key in Lücke



# Korrektheitsbeweis: Insertion Sort

```
InsertionSort(Array A)
for j ← 2 to length(A) do
   key ← A[j]
   i ← j-1
   while i>0 and A[i]>key do
      A[i+1] ← A[i]
      i ← i-1
   A[i+1] ← key
```

- Eingabegröße n
- length(A) = n
- verschiebe alle Elemente aus
- A[1…j-1], die größer als key
- sind eine Stelle nach rechts
- Speichere key in Lücke

*Lemma*

Die **for**-Schleife in Algorithmus Insertion Sort erfüllt folgende Schleifeninvariante:

(Invariante) A[1..j-1] ist die sortiere Permutation von A[1..j-1].
A[1..j-1] ist „sortiert"

# Invarianten InsertionSort

```
InsertionSort(Array A)
for j ← 2 to length(A) do
   key ← A[j]
   i ← j-1
   while i>0 and A[i]>key do
      A[i+1] ← A[i]
      i ← i-1
   A[i+1] ← key
```

- Initialisierung: j=2, A[1..1] ist sortiert
- Invariante: A[1..j-1] ist „sortiert“
- Austritt: A[1..length(A)] ist sortiert

# Invarianten InsertionSort

```
InsertionSort(Array A)
   for j ← 2 to length(A) do
      key ← A[j]
      i ← j-1
      while i>0 and A[i]>key do
         A[i+1] ← A[i]
         i ← i-1
      A[i+1] ← key
```

- Initialisierung: j=2, A[1..1] ist sortiert
- Invariante: A[1..j-1] ist „sortiert“
- Austritt: A[1..length(A)] ist sortiert

*Lemma*

Die **while**-Schleife in Insertion Sort erfüllt folgende Schleifeninvariante:

> (Invariante) A[1..j-1] \ A[i+1] ist „sortiert“ und A[i+1..j-1] > key.

# Invarianten InsertionSort

```
InsertionSort(Array A)
for j ← 2 to length(A) do
   key ← A[j]
   i ← j-1
   while i>0 and A[i]>key do

      A[i+1] ← A[i]

      i ← i-1

   A[i+1] ← key
```

- Initialisierung: j=2, A[1..1] ist sortiert
- Invariante: A[1..j-1] ist „sortiert“
- Inv: A[1..j-1] \ A[i+1] ist „sortiert“
- A[i..j-1] > key
- Austritt: A[1..length(A)] ist sortiert

# Invarianten InsertionSort

```
InsertionSort(Array A)
for j ← 2 to length(A) do
    key ← A[j]
    i ← j-1
    while i>0 and A[i]>key do
        A[i+1] ← A[i]
        i ← i-1
    A[i+1] ← key
```

- Initialisierung: j=2, A[1..1] ist sortiert
- Invariante: A[1..j-1] ist „sortiert"
  - Initialisierung: i=j-1, A[1..j-1] ist
  - sortiert und A[j] > key
  - Inv: A[1..j-1] \ A[i+1] ist „sortiert"
  - A[i..j-1] > key
- Austritt: A[1..length(A)] ist sortiert

INTERNET NETWORK ARCHITECTURES

# Invarianten InsertionSort

```
InsertionSort(Array A)
for j ← 2 to length(A) do
   key ← A[j]
   i ← j-1
   while i>0 and A[i]>key do
      A[i+1] ← A[i]
      i ← i-1
   A[i+1] ← key
```

- Initialisierung: j=2, A[1..1] ist sortiert
- Invariante: A[1..j-1] ist „sortiert“
   - Initialisierung: i=j-1, A[1..j] \ A[j] ist
   - sortiert und A[j] > key
   - Inv: A[1..j-1] \ A[i+1] ist „sortiert“
   - A[i..j-1] > key
   - Austritt: A[1..j] \A[i+1] ist „sortiert“ und
   - A[i] ≤ key < A[i+2] (wenn i+1=j,dann
   - gilt die letzte Ungl. nicht unbedingt)
   - oder i=0 und key < A[2]
- Austritt: A[1..length(A)] ist „sortiert“